



COPPE/UFRJ

ALGORITMOS COMPUTACIONAIS BASEADOS NO ENFOQUE
ESTRUTURAL PARA A REJEIÇÃO DE DISTÚRBIOS EM
SISTEMAS LINEARES

Marcus Vinicius Parreira Lemgruber Kropf

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Rio de Janeiro
Setembro de 2009

ALGORITMOS COMPUTACIONAIS BASEADOS NO ENFOQUE
ESTRUTURAL PARA A REJEIÇÃO DE DISTÚRBIOS EM SISTEMAS
LINEARES

Marcus Vinicius Parreira Lemgruber Kropf

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGE-
NHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, D.Sc.

Prof. Gilberto Oliveira Correa, Ph.D.

Prof. João Carlos dos Santos Basilio, D.Phil.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2009

Kropf, Marcus Vinicius Parreira Lemgruber

Algoritmos Computacionais baseados no Enfoque Estrutural para a Rejeição de Distúrbios em Sistemas Lineares.

- Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

X, 86 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Elétrica, 2009)

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

Dissertação (mestrado) - UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Elétrica, 2009.

1. Algoritmo Matricial do DDP. 2. Implementação Computacional do Algoritmo Matricial do DDP. 3. Algoritmo Matricial do DDPKM. 4. Implementação Computacional do Algoritmo Matricial do DDPKM I. Gomes, Afonso Celso Del Nero. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

Agradecimentos

"Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá."

"O importante em cada vitória foi a emoção."

Ayrton Senna

Primeiro gostaria de agradecer a Deus, por toda força e todo amor que ele me dá, mesmo nos momentos mais difíceis.

A minha família, Alice, Reinaldo e Leonardo pois, se tenho a oportunidade de estar aqui é porque desde que nasci, eles se esforçaram, renunciaram a muitas coisas para me oferecer o melhor que puderam.

Aos meus colegas de trabalho, pelo incentivo e pela paciência de entender os meus desafios.

A todos os meus professores e colegas de mestrado: Gustavo, Carlos, Fabiano, Júnior, Anderson, Richard, Rodrigo, Cocota e Fernando pela ajuda e pela amizade.

Um agradecimento especial ao professor Afonso Celso Del Nero, por toda paciência, ajudas, conselhos dispensados em todos os momentos, principalmente ao apontar os meus erros.

Aos professores Gilberto e João Carlos Basilio quero agradecer a atenção dispensada.

A todos os meus amigos e a todas as pessoas com as quais convivi durante esses três anos, porque de alguma forma também me ajudaram a fazer este trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ALGORITMOS COMPUTACIONAIS BASEADOS NO ENFOQUE
ESTRUTURAL PARA A REJEIÇÃO DE DISTÚRBIOS EM SISTEMAS
LINEARES

Marcus Vinicius Parreira Lemgruber Kropf

Setembro/2009

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Programa: Engenharia Elétrica

O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) foi alvo de vários estudos nas últimas décadas. Foram investigadas várias possíveis abordagens, seja através de uma visão geométrica da resolução deste problema, encontrando as condições de existência de soluções a partir de um subespaço invariante, seja por uma visão estrutural e frequencial, onde uma inspeção detalhada das matrizes do sistema indica a solubilidade ou não deste problema. O mesmo foi feito para uma derivação do DDP, o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM), ou seja, foram encontradas as condições de solubilidade através de um subespaço e também usando funções de transferência.

Juntamente com esses estudos, há a necessidade da implementação computacional de algoritmos que indiquem se há ou não solução, tanto para o DDP como para o DDPKM. Já foi proposto um algoritmo neste sentido para o DDP, ao fazer uma mera inspeção nas matrizes do sistema (visão estrutural). Porém o mesmo não se pode dizer para o caso do DDPKM, ou seja, não foi ainda proposto um algoritmo que, com base nas matrizes do sistema, possa indicar a solubilidade do problema.

Este trabalho se propõe a implementar no ambiente MATLAB o algoritmo já proposto para o DDP, assim como propor um algoritmo e sua respectiva implementação computacional, também com base no ambiente MATLAB, que com base nas matrizes do sistema aponte se o DDPKM tem ou não solução.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

STRUCTURAL BASED COMPUTATIONAL ALGORITHMS OF
DISTURBANCE DECOUPLING PROBLEM IN LINEAR SYSTEMS

Marcus Vinicius Parreira Lemgruber Kropf

September/2009

Advisor: Afonso Celso Del Nero Gomes

Department: Electrical Engineering

The Disturbance Decoupling Problem (DDP) was top of many studies in recent decades. Much has been developed and investigated several possible approaches, either through a geometric view of this problem, to find conditions of existence of solutions from a subspace invariant, to a based of transfer matrices, where a detailed inspection of the matrices the system indicates the solvability of this problem. This same type of research was for a derivation of the DDP, the Disturbance Decoupling Problem by Static Measurement Feedback (DDPKM), or were the conditions of solubility by a subspace and using the transfer functions.

Together with these studies, there is the need for implementation of computational algorithms to indicate whether there is solution for both the DDP and the DDPKM. Already proposed an algorithm for the DDP in order to make a simple inspection of the matrix system (structural vision). But the same can not be said for the case of DDPKM, ie not yet proposed an algorithm that, based on the matrix of the system, may indicate the solubility of the problem.

This paper proposes to implement computationally using MATLAB for the environment that the algorithm already proposed for the DDP, and propose an algorithm and its computational implementation, also based in the MATLAB environment, which based on matrices the point where the system has DDPKM solution or not.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Problemas de Rejeição de Distúrbios	1
1.2	Equação $G(s)X(s) = H(s)$	3
1.3	Rejeição de Distúrbios e Desacoplamento	5
1.4	Rejeição de Distúrbios usando a Saída	6
1.5	Algoritmos de Verificação do DDP	8
1.6	Estrutura da Tese	8
2	O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP)	10
2.1	Enfoque Geométrico	11
2.1.1	Existência de Soluções para o DDP	12
2.2	Enfoque Estrutural	20
2.3	Conclusão	22
3	Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída	23
3.1	Enfoque Geométrico	24
3.1.1	Solução para sistemas que satisfazem $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$	27
3.1.2	Sistemas que satisfazem $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$	28
3.1.3	Parametrização de soluções	29
3.2	Enfoque Estrutural	30
3.3	Conclusão	34
4	Algoritmo matricial para o DDP	35
4.1	Introdução	35
4.2	Algoritmo Matricial	43
4.3	Implementação do Algoritmo Matricial para o DDP	47

4.3.1	Programa Início	48
4.3.2	Programa Transformação	49
4.3.3	Programa Algoritmo	52
4.3.3.1	Verificação da Matriz M	55
4.3.3.2	Função de Arredondamento de Matrizes	61
5	Algoritmo matricial DDPKM	63
5.1	Introdução	63
5.2	Algoritmo Matricial	72
6	Conclusões	76
	Bibliografia	78
A	Anexos	85
A.1	Programa Início	85
A.2	Programa Transformação	86
A.3	Programa Algoritmo	87
B	Funções	91
B.1	Função arredonda	91
B.2	Função encontra_M	92
B.3	Função calcul	94

Lista de Símbolos

Símbolos Matemáticos

\forall	para todo
\in	pertence a
\triangleq	por definição
\subset	contido em
\subseteq	contido em ou igual a
\supset	contendo
\dim	dimensão
$f(\cdot)$	uma função do tempo
$f^i(\cdot)$	a derivada i -ésima da função $f(\cdot)$
$f(t)$	o valor da função $f(\cdot)$ no instante t
X_{ij}	elemento da linha i e coluna j da matriz X
\mathcal{B}	a imagem de B
\mathcal{C}	espaço nulo à direita da matriz C
\mathcal{E}	imagem de E
\mathcal{K}	espaço nulo à direita da matriz D
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{R}^*	subespaço maximal único de controlabilidade contido em \mathcal{K}
\mathbb{R}^n	espaço vetorial de n dimensões no campo dos reais
\mathcal{S}_*	subespaço ínfimo único (A, B) -invariante contendo \mathcal{E}
\mathcal{V}	subespaço (A, B) -invariante contido em \mathcal{K}
\mathcal{V}^*	subespaço maximal único (A, B) -invariante contido em \mathcal{K}
\mathcal{V}_g^*	subespaço maximal único (A, B) -invariante contido em \mathcal{K} que estabiliza o sistema

Controle

F	matriz de realimentação de estados
K	matriz de realimentação estática de saída
Q	matriz de transformação linear
$d(t)$	vetor de distúrbios
$u(t)$	vetor de entradas
$x(t)$	vetor de estados
$z(t)$	vetor de saídas controladas
$y(t)$	vetor de saídas medidas

Siglas

DDP	Problema de Rejeição de Distúrbios (<i>Disturbance Decoupling Problem</i>)
DDPKM	Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (<i>Disturbance Decoupling Problem by Static Measurement Feedback</i>)
DDPKMS	Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída com Estabilidade (<i>Disturbance Decoupling Problem by Static Measurement Feedback with Stability</i>)
DDPM	Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação de Saída (<i>Disturbance Decoupling Problem by Measurement Feedback</i>)
DDPMS	Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação da Saída com Estabilidade Interna (<i>Disturbance Decoupling Problem by Measurement Feedback with Stability</i>)
DDPPP	Problema de Rejeição de Distúrbios com Alocação de Pólos (<i>Disturbance Decoupling Problem with Pole Placement</i>)
DDPS	Problema de Rejeição de Distúrbios com Estabilidade (<i>Disturbance Decoupling Problem with Stability</i>)

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo será feita uma revisão de vários estudos relacionados com o Problema de Rejeição de Distúrbios, baseada no trabalho desenvolvido por MATOS (2004) [41].

1.1 Problemas de Rejeição de Distúrbios

O Problema de Rejeição de Distúrbios vem sendo estudado nas últimas décadas, sendo pesquisada sua utilização para vários sistemas, como por exemplo os lineares, não-lineares e discretos. A solução teórica deste problema é uma das aplicações para o enfoque geométrico para o controle de sistemas lineares, usando para isso o conceito de subespaços (A,B)-invariantes.

Através dos conceitos de invariância, WONHAM E MORSE (1970) [59] e BASILE E MARRO (1968) [3] encontraram a solução teórica para o Problema de Rejeição de Distúrbios com realimentação completa de estados (DDP, *Disturbance Decoupling Problem*). Este consiste em encontrar uma lei de controle $u(t) = Fx(t)$ tal que a função de transferência que relaciona o distúrbio à saída controlada seja igual a zero para todas as frequências, ou seja, o distúrbio sob hipótese alguma influenciará a saída controlada. Para um sistema descrito da seguinte forma:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das entradas de controle, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor das entradas dos distúrbios, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas a serem controladas. A solução do DDP segundo o enfoque geométrico é encontrada a partir do cálculo de \mathcal{V}^* , o subespaço maximal, único, (A,B) -invariante contido no espaço nulo à direita de D .

WONHAM E MORSE (1970) [59] também solucionaram o Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática e Estabilidade (DDPS, *Disturbance Decoupling Problem with Stability*), cujo objetivo é estabelecer uma lei de controle $u(t) = Fx(t)$ que além das propriedades necessárias à solução do DDP, ou seja, o distúrbio não afetar a saída controlada, também estabilizaria o sistema em malha fechada. Para solucioná-lo é necessário calcular \mathcal{V}_g^* , o subespaço maximal único (A,B) -invariante localizado à direita de D que estabiliza o sistema.

Caso seja necessária a alocação de pólos o Problema de Rejeição de Distúrbios com Alocação de Pólos (DDPM, *Disturbance Decoupling Problem with Pole Placement*) pode ser aplicado. Resumindo, esses três problemas podem ser expostos assim: para o sistema representado em 1.1 e sendo $\mathcal{K} = \ker(D)$ e $\mathcal{E} = \text{Im}(E)$ o subespaço nulo à direita da matriz D e a imagem da matriz E respectivamente, as condições necessárias e suficientes à solução do DDP, DDPS e DDPPP são:

$$\text{DDP: } \quad \mathcal{E} \subset \mathcal{V}^*$$

$$\text{DDPS: } \quad \mathcal{E} \subset \mathcal{V}_g^* \text{ e } (A, B) \text{ é estabilizável}$$

$$\text{DDPPP: } \quad \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^* \text{ e } (A, B) \text{ é controlável}$$

onde \mathcal{V}^* , \mathcal{V}_g^* e \mathbb{R}^* são o subespaço maximal único (A, B) -invariante, o subespaço maximal único (A, B) -invariante estabilizante e o subespaço maximal único de controlabilidade, contidos em \mathcal{K} , o espaço nulo à direita de D .

LINNERMAN [35] apresentou um método eficiente e seguro para calcular \mathbb{R}^* , o subespaço maximal único controlável contido no subespaço nulo à direita de D , assim como uma expressão para o conjunto de todos os controladores relacionados. Se esta condição não for satisfeita, o cálculo de \mathcal{V}_g^* e o conjunto relacionado de matrizes de realimentação é obrigatório.

Se existir, a solução para o DDP não é única. Um dos problemas trabalhados

foi o de encontrar todos os controladores que solucionam o DDP. Na Literatura, encontramos resoluções para algumas classes de sistemas. DÓREA E MILANI (1997) [21] obtiveram a solução completa e a parametrização de todos os controladores que solucionam o DDP para uma classe particular de sistemas, incluindo os sistemas inversíveis à esquerda. Já em PARASKEVOPOULOS, KOUVOPOLIS E TZIERAKIS (1992) [45], foi apresentado um método para rejeições de distúrbios em sistemas inversíveis à esquerda via realimentação estática proporcional, onde condições necessárias e suficientes são estabelecidas na forma de um critério algébrico simples e as expressões analíticas gerais de todas as soluções às matrizes de controle são derivadas, sendo as soluções parametrizadas por uma única matriz arbitrária.

1.2 Equação $G(s)X(s) = H(s)$

A equação matricial $G(s)X(s) = H(s)$, onde $G(s)$ e $H(s)$ são matrizes racionais próprias conhecidas e a matriz racional própria $X(s)$ é a incognita procurada é extremamente importante, pois a existência de soluções para ela se associa às condições de solução de muitos problemas em sistemas lineares multivariáveis.

O DDP pode ser estudado a partir das matrizes de transferência que relacionam a entrada de controle e a entrada de distúrbios com a saída do sistema, $G_z(s)$ ($p \times m$) e $H_z(s)$ ($p \times q$), respectivamente, dadas por

$$G_z(s) = D(sI - A)^{-1}B \quad (1.2)$$

$$H_z(s) = D(sI - A)^{-1}E. \quad (1.3)$$

Pode-se mostrar que a solução do DDP, além de se relacionar com a existência de um subespaço invariante, também está ligada com a existência de uma matriz racional estritamente própria $X(s)$ ($m \times q$) tal que a expressão

$$G_z(s)X(s) = H_z(s) \quad (1.4)$$

seja verdadeira.

A equação $G(s)X(s) = H(s)$ já foi bastante estudada. MORSE (1974) [43] estudou esta equação e a sua relação com o Problema de Adaptação de Modelos. WOLOVICH foi o primeiro a formular este problema, no início da década de 70.

WANG E DAVISON (1973) [54] consideraram o problema de encontrar uma solução $X(s)$ própria e de ordem mínima e indicaram como um determinado procedimento poderia ser usado para encontrar inversas de ordem mínima para um dado sistema.

A existência de soluções próprias e estritamente próprias para a equação 1.4 através das bases mínimas foram encontradas respectivamente por FORNEY (1975) [24] e DEL NERO GOMES E NORONHA (1990) [18]. WOLOVICH (1974) [56] mostrou a conexão da equação 1.4 com o Problema de Adaptação Exata de Modelos e os meios para encontrar uma solução para esta equação, caso exista, para o caso particular em que $p \geq m$ (ou seja, o problema não tem solução ou tem uma única solução que pode ser facilmente encontrada).

Uma condição necessária e suficiente para a existência de solução própria no caso em que $p \leq m$ e $p \geq q$, utilizando o *interactor* de uma matriz racional própria $G(s)$ fora apresentado por WOLOVICH E FALB (1976) [57]. Já HAUTUS (1980) [27] mostrou que a solução do Problema de Rejeição de Distúrbios também está relacionada com a solução da equação 1.4. VARDULAKIS (1984) [50] expressou esta equação como uma equação diofantina $G_1X_1 + G_2X_2 = H$ e relacionou sua solução com a de WOLOVICH (1974) [56]. Em BHATTACHARYYA, DEL NERO GOMES E HOWZE (1983) [5], a equação aparece novamente e, após uma parametrização de suas soluções, alguns aspectos importantes sobre a robustez do DDP puderam ser vistos. Em MITA (1976) [42] foram mostradas condições necessárias e suficientes para o DDP para sistemas com entradas, saídas e distúrbios escalares baseadas no enfoque freqüencial, sendo este resultado estendido por BHATTACHARYYA (1980) [6] para o caso em que apenas a saída é escalar.

O problema da estabilidade das soluções $X(s)$ para a equação 1.4 já foi tratado na literatura por VARDULAKIS E KARCANIAS (1985) [52], que usaram uma fatoração para investigar o problema de soluções próprias e estáveis. PERNEBO (1981) [46] também estudou este assunto em que, além de apresentar as condições para a existência de soluções próprias e estáveis, forneceu uma forma de encontrar tais soluções e uma parametrização delas. A utilização das chamadas *Structure Matrices* para encontrar estas soluções foi desenvolvida por PERNEBO E EM VARDULAKIS E KARCANIAS. O resultado de PERNEBO possui um inconveniente mapeamento entre determinadas regiões do plano complexo. Já os resultados de VARDULAKIS E KAR-

CANIAS necessitam da forma de Smith-McMillan no infinito que é bem trabalhosa para ser calculada. Em BANDEIRA (1992) [1] foi proposto um método simples para verificação da natureza das soluções $X(s)$ para $p \leq m$, ou seja, se para um determinado sistema é possível encontrar uma solução $X(s)$ para a equação 1.4 própria, imprópria ou estritamente própria, assim como soluções estáveis ou não. Além disso, também em [1], outro objetivo foi a obtenção de uma lei de controle $u(t) = Fx(t)$ que soluciona o DDP a partir da solução $X(s)$.

1.3 Rejeição de Distúrbios e Desacoplamento

Se existir, a solução do DDP consome somente parte da “capacidade de controle” da matriz de realimentação de estados. Desta forma permite-se o uso da capacidade remanescente para alcançar objetivos de controle complementares. E é o que normalmente acontece em muitas situações práticas. A rejeição de distúrbios não é o único objetivo de controle. Outros objetivos são normalmente adicionados ao sistema de controle, como por exemplo desacoplamento ou alocação de pólos.

Por isso, o Problema de Rejeição de Distúrbios e o Problema de Desacoplamento têm um grande interesse na teoria de controle e ainda continuam sendo bastante pesquisados. Para cada problema em separado foi mostrado (ver em WONHAM E MORSE (1970) [59], GRIZZLE E ISIDORI (1989) [25], KOUSSIOURIS (1980) [32] e ICART, LAFAY E MALABRE (1990) [28] para o Problema de Desacoplamento e MALABRE, MARTÍNEZ-GARCÍA E DEL-MURO-CUELAR (1997) [39] para o DDP) que há pólos fixos aparecendo em um sistema em malha fechada após aplicação de uma realimentação de estados completa para solução do problema. Denominado de Problema de Modos Fixos, foi completamente caracterizado em termos geométricos por MALABRE E MARTÍNEZ-GARCÍA (1995) [38], enquanto uma caracterização polinomial foi obtida por KOUSSIOURIS E TZIERAKIS (1995) [34]. Uma vez que os pólos não-fixos em malha fechada podem ser explorados de forma a se obter desempenhos complementares do sistema realimentado, o Problema de Pólos Fixos dentro do Problema de Rejeição de Distúrbios caracteriza os graus de liberdade disponíveis quando a alocação dos pólos é considerada. Em LOPEZLENA ESTRADA E MARTÍNEZ-GARCÍA (1999) [36] é dada uma caracterização algébrica da família de

realimentação estática de estados que rejeita o distúrbio em sistemas lineares invariantes no tempo e que causam o conjunto mínimo de pólos fixos em malha fechada (supondo que o sistema é controlável), enquanto assegura também o máximo de graus livres em termo de alocação de pólos.

Alguns trabalhos consideram o Problema de Rejeição de Distúrbios juntamente com o Problema de Desacoplamento por Realimentação Completa de Estados. CHANG E RHODES (1975) [10] exibiram as condições necessárias e suficientes de solução deste problema, mostrando ser equivalente à solução de cada problema em separado. A caracterização algébrica e estrutural para a solução de pólos fixos para este problema simultâneo foi dada por KOUSSIOURIS E TZIERAKIS (1986) [33] utilizando uma aproximação no domínio da frequência no caso onde as saídas são escalares-particionadas (*scalar-partitioned*). Em CAMART, MALABRE E MARTÍNEZ-GARCÍA (2001) [9] é fornecida uma caracterização alternativa para este problema, baseada no enfoque geométrico, assim como um outro procedimento para o posicionamento dos pólos livres remanescentes.

1.4 Rejeição de Distúrbios usando a Saída

Em situações em que o vetor de estados não está disponível à medição, estuda-se o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação de Saída (DDPM, *Disturbance Decoupling Problem by Measurement Feedback*). Seu objetivo é calcular um controlador por realimentação dinâmica na saída medida tal que a função de transferência do distúrbio à saída seja zero. Este problema foi solucionado por WILLENS E COMMAUT (1981) [55] e SCHUMACHER (1980) [47]. DÓREA E MILANI (1997) [21] também discutiram o DDPM e, com base nos resultados encontrados para o DDP, propuseram um método para encontrar um compensador de ordem reduzida. O Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação de Saída e Estabilidade (DDPS, *Disturbance Decoupling Problem by Measurement Feedback with Stability*) foi resolvido por IMAI E AKASHI (1981) [29] e WILLENS E COMMAUT (1981) [55].

Também existe dentre os Problemas de Rejeição de Distúrbios baseados em realimentação na saída um problema de formulação bem simples, o **Problema de**

Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída (DDPKM, *Disturbance Decoupling Problem by Static Measurement Feedback*). Para um sistema com a seguinte descrição:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ y(t) = Cx(t) & , \quad t \geq 0 \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das entradas de controle, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor das entradas dos distúrbios, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor das saídas a serem medidas e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas a serem controladas. O objetivo do DDPKM é encontrar uma lei de controle $u(t) = Ky(t)$ tal que a função de transferência que relaciona o distúrbio $d(t)$ com a saída controlada $z(t)$ seja nula.

As condições de existência para as soluções do DDPKM foram inicialmente propostas por HAMANO E FURUTA (1975) [26] e SCHUMACHER (1980) [47]. Hamano e Firuta propuseram o cálculo de um subespaço invariante que goza de certas propriedades. Porém, no caso geral, este subespaço é bastante difícil de ser calculado.

CHEN (1997) [11] encontrou uma solução para o DDPKM para uma determinada classe de sistemas multivariáveis lineares e invariantes no tempo. Seu método caracterizou todas as possíveis soluções para o DDPKM para uma classe de funções de transferência, que relaciona a entrada controlada com a saída controlada, inversível à esquerda. Mas este método possui dois inconvenientes: além de ser restrito, só é possível ser implementado se inicialmente o sistema representado por uma base de coordenadas especial na qual o DDPKM terá solução se e somente se uma submatriz específica é nula.

Já em DÓREA E MILANI (2003) [23] os resultados anteriormente encontrados por CHEN (1997) [11] relativos ao DDPKM são estendidos a um conjunto mais abrangente de sistemas. São estabelecidas para duas famílias de sistemas condições necessárias e suficientes à existência de soluções, o que ocorre se e somente se um determinado subespaço for invariante.

Em MATOS (2007) [41] foram apresentadas as condições necessárias e suficientes à solubilidade do DDPKM sob o enfoque estrutural e freqüencial. Um dado

sistema tem solução caso as matrizes envolvidas no sistema apresentem certas propriedades após uma mudança na base de estados. Sob o enfoque frequencial, basta que existam matrizes estritamente próprias que tornem verdadeiras certas condições.

1.5 Algoritmos de Verificação do DDP

Juntamente com os primeiros estudos teóricos relativos ao DDP, surgiu a necessidade de métodos eficientes para verificar se o DDP tem ou não solução. Um algoritmo baseado no cálculo de \mathcal{V}^* pode ser encontrado em WONHAM (1979) [58]. Porém este, e métodos com o mesmo objetivo, são geralmente bastante trabalhosos, o que muitas vezes implica em dificuldades computacionais. Há pesquisas no sentido de caracterizar \mathcal{V}^* de maneira diferente da proposta por WONHAM.

Desde então, além dos interesses em simplificar as manipulações relativas ao DDP e aos problemas que envolvem o cálculo de \mathcal{V}^* , tornou-se extremamente interessante qualquer interpretação deste subespaço em termos mais intuitivos. Sobretudo, havia o interesse em não só explicar as propriedades geométricas de \mathcal{V}^* mas também em métodos de verificação de soluções para o DDP em termos frequenciais, ou seja, usando matrizes de transferência.

Algoritmo neste sentido foi desenvolvido por DEL NERO GOMES (1980) [16] em que inspeções em partes das matrizes que compõem o sistema são realizadas de modo sistemático e seqüencial, levando a conclusões sobre a solubilidade do DDP. Sob este mesmo enfoque ainda não há na Literatura estudo referente a outros tipos de problemas da mesma família, como por exemplo o DDPKM.

1.6 Estrutura da Tese

O objetivo principal deste trabalho é propor algoritmos computacionalmente implementáveis para verificar, através das matrizes envolvidas no sistema, as condições necessárias e suficientes à solubilidade do DDP e do DDPKM. Também se propõe a implementar computacionalmente os algoritmos obtidos.

No segundo capítulo será feita uma breve revisão nos conceitos relativos ao

Problema de Rejeição de Distúrbios com realimentação completa de estados, segundo os enfoques geométrico e freqüencial.

No terceiro capítulo será feita uma revisão, também segundo os enfoques geométrico e frequencial, da caracterização do Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída.

No capítulo 4 serão abordados respectivamente uma revisão do algoritmo matricial desenvolvido para o DDP, assim como sua implementação computacional.

Um estudo inicial para propor um algoritmo matricial para verificar se o DDPKM tem solução e algumas diretrizes de uma possível implementação computacional serão abordados no capítulo 5. Conclusões e possíveis trabalhos futuros serão mencionados no capítulo 6.

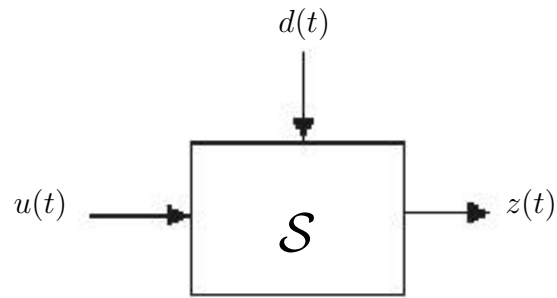
Capítulo 2

O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP)

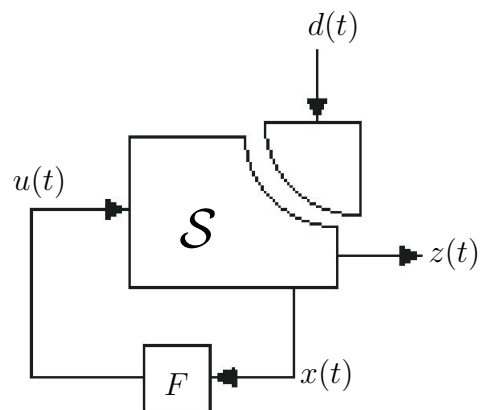
Será feita uma revisão neste capítulo baseada no trabalho desenvolvido por MATOS (2004) [41]. O Problema de Rejeição de Distúrbios vem sendo estudado há mais de três décadas, sendo um importante tópico da Teoria de Sistemas de Controle Linear Multivariável. Sua formulação é simples. Seja o sistema linear invariante no tempo:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde o comportamento do sistema pode ser afetado por dois sinais: o sinal de entrada de controle $u(t)$ e uma entrada de distúrbios $d(t)$. Deve-se controlar o sistema usando uma realimentação de estados $u(t) = Fx(t)$, de tal forma que o distúrbio não afete o sinal de saída controlada $z(t)$. A figura 2.1 abaixo permite uma visualização do problema.



(a)



(b)

Figura 2.1: (a) Sistema em malha aberta, (b) sistema realimentado para rejeição de distúrbios.

Este problema pode ser resolvido matematicamente de duas formas: usando o enfoque geométrico, em que se objetiva encontrar um subespaço (A,B) -invariante que o solucione, e o enfoque estrutural/freqüencial, baseado em funções de transferência. Estas duas maneiras de resolver o problema serão revistas a seguir.

2.1 Enfoque Geométrico

A Teoria da Invariância é importante à abordagem geométrica de diversos problemas de controle. A formulação inicial e a solução do Problema de Rejeição de Distúrbios usando a Teoria da Invariância foram desenvolvidas por WONHAM E MORSE (1970) [59] e BASILE E MARRO (1968) [3] para sistemas lineares sob uma lei de controle do tipo $u(t) = Fx(t)$. De acordo com WONHAM (1979) [58] a

base do enfoque geométrico consiste em associar certas propriedades dos sistemas com subespaços vetoriais. Assim, para haver solução para o DDP, deve-se observar propriedades geométricas de subespaços conhecidos. Da mesma forma que o DDP, vários problemas relacionados com o Problema de Rejeição de Distúrbios, entre eles o DDPS e o DDPKM (que será estudado mais adiante) podem ser estudados através de subespaços.

2.1.1 Existência de Soluções para o DDP

O material desta seção permite rever os mecanismos geométricos básicos. Seja o sistema linear multivariável invariante no tempo descrito por:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das entradas de controle, $d \in \mathbb{R}^q$ é o vetor das entradas dos distúrbios e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas a serem controladas. As matrizes B , E e D possuem posto completo. O objetivo é encontrar uma realimentação de estados $u(t) = Fx(t)$, tal que a função de transferência de distúrbio $d(t)$ para a saída controlada $z(t)$ seja igual a zero. Assim, usando a lei de controle $u(t) = Fx(t)$, o sistema em malha fechada torna-se:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Levando em conta que $x(0) = 0$, as equações 2.3 podem ser resolvidas por:

$$z(t) = \int_0^t De^{(A+BF)(t-\tau)} Ed(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

Para o DDP ter solução basta a equação anterior ser igual a zero para qualquer valor de $d(t)$. Isso também pode ser representado pela seguinte proposição: para qualquer derivada $z^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, o termo que contém $d(t)$ deve ser nulo. Assim, temos para a primeira derivada de $z(t)$:

$$\dot{z}(t) = D(A + BF)x(t) + DEd(t) \quad (2.5)$$

onde deve-se ter $DE = 0$. Para $n \geq 2$:

$$z^{(n)}(t) = D(A + BF)^n x(t) + D(A + BF)^{(n-1)} Ed(t) \quad (2.6)$$

Isso resulta em:

$$\left\{ \begin{array}{l} DE = 0 \\ D(A + BF)E = 0 \\ D(A + BF)^2E = 0 \\ D(A + BF)^{i-1}E = 0 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

De acordo com o teorema de Cayley-Hamilton apenas as primeiras n identidades são necessárias. Assim, podemos escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \\ (A + BF)\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \\ (A + BF)^2\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \\ \vdots \\ (A + BF)^{n-1}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

onde $\mathcal{E} = \text{Im}(E)$ e $\mathcal{K} = \text{ker}(D)$. Estas equações equivalem a:

$$\mathcal{E} + (A + BF)\mathcal{E} + \dots + (A + BF)^{n-1}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \quad (2.9)$$

em que o sinal de mais indica a soma de subespaços. Sendo uma transformação linear $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço, o subespaço $\mathcal{V} + M\mathcal{V} + \dots + M^{n-1}\mathcal{V}$ é comumente denotado por $\langle M|\mathcal{V} \rangle$. Assim, temos que:

$$\langle A + BF|\mathcal{E} \rangle \subseteq \mathcal{K} \quad (2.10)$$

Temos então enunciado o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1. *O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) tem solução se e somente se for possível encontrar uma matriz de estados $F(m \times n)$ tal que:*

$$D(sI - A - BF)^{-1}E = 0 \quad \forall s \quad (2.11)$$

ou equivalentemente:

$$\langle A + BF|\mathcal{E} \rangle = \mathcal{E} + (A + BF)\mathcal{E} + (A + BF)^2\mathcal{E} + \dots + (A + BF)^{n-1}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \quad (2.12)$$

Agora, faremos uma revisão sobre o conceito de subespaços (A,B)-invariantes, indispensáveis à continuação dos estudos clássicos referentes do DDP.

Definição 2.1.1. Consideremos o par (A,B) relativo ao sistema 2.1. Um subespaço $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ é (A,B) -invariante se $A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \mathcal{B}$, onde \mathcal{B} é a imagem de B .

Pode-se demonstrar que um dado subespaço \mathcal{V} é (A,B) -invariante se e somente se houver uma matriz $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $(A + BF)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$. O subespaço (A,B) -invariante de dimensão máxima entre todos os contidos no espaço nulo à direita de D , aqui denotado por \mathcal{K} , é:

$$\mathcal{V}^* = \text{Subespaço maximal único } (A,B)\text{-invariante contido em } \mathcal{K}.$$

O subespaço $\mathcal{V} := \langle A + BF | \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E} + (A + BF)\mathcal{E} + \dots + (A + BF)^{n-1}\mathcal{E}$ é (A,B) -invariante, pois é fácil demonstrar que $(A + BF)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$. De acordo com a equação 2.12, a solução do DDP depende de $\langle A + BF | \mathcal{E} \rangle$ estar contido em \mathcal{K} e além disso ser um subespaço (A,B) -invariante. Como visto anteriormente, o maior subespaço com estas características é \mathcal{V}^* .

O Teorema a seguir mostra as condições de existência para a resolução do Problema de Rejeição de Distúrbios em função de \mathcal{V}^* .

Teorema 2.1.2. [58] O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) tem solução, ou seja, existe uma matriz de realimentação de estados $F(m \times n)$ tal que $\langle A + BF | \mathcal{E} \rangle \subseteq \mathcal{K}$ se e somente se $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}^*$.

Assim, pode-se descrever geometricamente as condições de existência de soluções para o DDP a partir do esquema 2.2 abaixo.

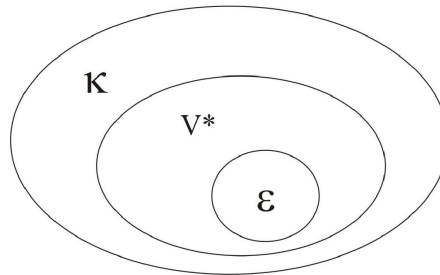


Figura 2.2: Representação dos Subespaços envolvidos na solução do DDP

Dito isso, encontrar a solução para o Problema da Rejeição de Distúrbios através do enfoque geométrico implica inicialmente em encontrar o subespaço \mathcal{V}^* .

Há na literatura vários algoritmos que permitem calcular \mathcal{V}^* , como por exemplo em [58], onde foi desenvolvido um algoritmo bem simples, como pode ser visto a seguir.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_0 = \mathcal{K} \\ \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_0) \\ \vdots \\ \mathcal{V}_{i+1} = \mathcal{V}_i \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_i) \\ \vdots \\ \mathcal{V}_v = \mathcal{V}^* \quad , \text{ onde } v = \dim \mathcal{K} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Para facilitar a visualização, seguiremos com o exemplo:

Exemplo 2.1.1. *Seja o sistema descrito por:*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Usando o algoritmo para calcular \mathcal{V}^ , temos:*

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{K} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_0) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_1 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_1) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{V}_3 = \mathcal{V}_2 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_2) = \left\{ 0 \right\} = \mathcal{V}^*$$

Obviamente o DDP não terá solução. Vejamos agora o que aconteceria caso a matriz B passasse a ser:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então teremos:

$$\mathcal{V}_0 = \ker(D) = \mathcal{K}$$

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_0) = \mathcal{V}_0$$

Como $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0$ temos que:

$$\mathcal{V}^* = \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

Como $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^*$, o DDP tem solução. Para acharmos a matriz de realimentação F , deve-se fazer $F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix}$ e impõe-se a condição $(A + BF)\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{V}^*$. Após algum trabalho, encontraremos $f_2 = -1$, $f_3 = f_4 = 0$. Assim, $F = \begin{bmatrix} f_1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde f_1 é arbitrário.

Exemplo 2.1.2. Considere o pêndulo duplo invertido na figura 2.3 abaixo:

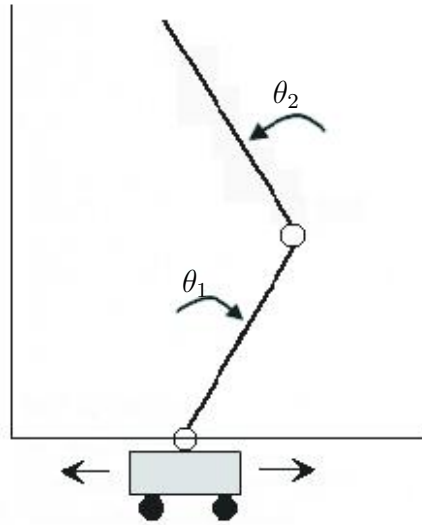


Figura 2.3: Pêndulo duplo invertido.

As entradas u_1 e u_2 são torques sobre seus respectivos pivôs. Os estados são os ângulos θ_1 e θ_2 e as suas respectivas derivadas. As saídas medidas são θ_1 e θ_2 . O objetivo de controle é manter o pêndulo duplo invertido na posição vertical através de uma lei de controle apropriada. O pêndulo invertido pode ser descrito por:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 9,8 & 0,0 & -9,8 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ -9,8 & 0,0 & 29,4 & 0,0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \end{bmatrix} x(t)$$

Usando o algoritmo 2.13 para calcular \mathcal{V}^* , obtem-se:

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_0) = \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}\mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} = \{0\} = \mathcal{V}^*.$$

Neste caso o DDP não terá solução.

Ao observar os exemplos já mostrados, percebe-se que a obtenção da matriz de realimentação F pode ser muito trabalhosa. Um método sistemático para calcular uma matriz F ou uma família de matrizes F utilizando o subespaço \mathcal{V}^* que soluciona o DDP é dado a seguir.

Teorema 2.1.3. *Dadas uma base V para \mathcal{V}^* ($n \times \nu$) e uma matriz W ($n \times n - \nu$) de tal forma que $[V \ W]$ é não-singular, defina a transformação de similaridade*

$$Q = [V \ W]$$

tal que

$$Q^{-1}(A + BF)Q = \begin{bmatrix} A_1(F) & A_2(F) \\ A_3(F) & A_4(F) \end{bmatrix}.$$

Então o conjunto de soluções para o DDP, ou seja, a família de matrizes F que solucionam o problema é dada por:

$$\{F(m \times n) | A_3(F) = 0\}.$$

Usando esta metodologia, é possível calcular uma solução para o DDP, exclusivamente a partir das matrizes A , B , D e E da malha aberta. O exemplo 2.1.3 ilustra este método.

Exemplo 2.1.3. *Seja o sistema descrito por:*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Utilizando o algoritmo 2.13 para calcular \mathcal{V}^ , obtém-se:*

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{K} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}^*.$$

Como $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}^$, o DDP tem solução e portanto uma matriz Q como definida anteriormente pode ser igual a:*

$$Q = [V \quad W] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Supondo

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} \end{bmatrix}$$

a matriz $A_3(F)$ será igual a:

$$A_3(F) = \begin{bmatrix} 1 + F_{13} & F_{14} & F_{15} \\ F_{23} & F_{24} & F_{25} \end{bmatrix}$$

o que fornecerá a seguinte família de F que soluciona o DDP:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & -1 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2 Enfoque Estrutural

Uma contribuição para a resolução do problema foi dada por DEL NERO GOMES E BHATTACHARYYA (1981) [17]: a resolução do Problema de Rejeição de Distúrbios seguindo um enfoque estrutural. Segundo esta visão, através de diagramas em blocos os subespaços relacionados com a solução do DDP são explicados de uma maneira bem simples. Com isso, foi criado um método de resolução do DDP sem a necessidade de calcular qualquer subespaço. A visão estrutural do DDP foi desenvolvida a partir do sistema a seguir, já descrito anteriormente:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

O Problema de Rejeição de Distúrbios, de acordo com [17], terá solução se e somente se for possível representar o sistema de acordo com o diagrama em blocos exposto na figura 2.2 abaixo, em que a saída $z_1(t)$ do sistema \mathcal{S}_1 tem o mesmo tamanho da entrada $u(t)$:

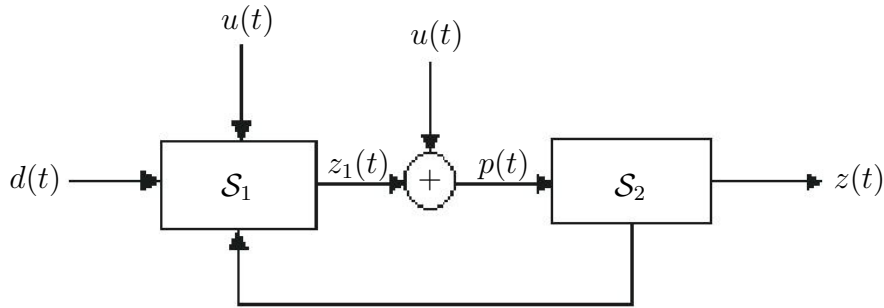


Figura 2.4: Diagrama de blocos esquemático para a solução do DDP.

É imediato perceber, olhando para o diagrama, que $u(t) = -z_1(t)$ é uma possível solução para o problema. Sendo $x_i(t)$ o estado do subsistema \mathcal{S}_i temos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) + E_1d(t) \\ z_1(t) &= D_1x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{22}x_2(t) + B_2p(t) = A_{22}x_2(t) + B_2[u(t) + z_1(t)] \\ z(t) &= D_2x_2(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Colocando essas equações dinâmicas sob a forma matricial temos:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_2 D_1 & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ \hat{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & D_2 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}\quad (2.16)$$

Uma possível realimentação de estados que soluciona o DDP, usando a lei de controle $u = Fx(t)$, será:

$$F = \begin{bmatrix} -D_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

A forma canônica exibida acima e o diagrama de blocos equivalente indicam a existência de soluções para o DDP. Assim, para qualquer sistema, é possível afirmar que o DDP tem solução se e só se for possível realizar uma mudança de bases $x = Q\hat{x}$ que coloque as matrizes do sistema na forma 2.16:

Teorema 2.2.1. [17] *O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) tem solução para um sistema de matrizes $\langle A, B, D, E \rangle$ se e somente se existir um número real ν , $q \leq \nu \leq n - p$ e uma base de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{D}, \hat{E} \rangle$ do sistema satisfazem:*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array} \right] x(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ z(t) &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & \hat{D}_2 \end{array} \right]\end{aligned}\quad (2.18)$$

onde \hat{A}_{11} é $\nu \times \nu$, \hat{A}_{12} é $\nu \times (n - \nu)$, etc e $\hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{D}_1$, para alguma matriz \hat{D}_1 $m \times \nu$.

Isto significa uma nova condição para a resolução do DDP. Assim, para que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}^*$, é necessário e suficiente encontrar uma base no espaço de estados na qual as matrizes que compõem o sistema tenham a estrutura de 2.18. Em outras palavras, deve-se procurar Q $n \times n$ inversível tal que a mudança de bases dada por $x = Q\hat{x}$ coloque as matrizes no formato de 2.18.

Agora vejamos um exemplo:

Exemplo 2.2.1. *Repetindo o Exemplo 2.1.1*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma mudança de bases a partir de:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Colocará as matrizes na forma:

$$\dot{x}(t) = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t)$$

$$z(t) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

que exibe o formato de 2.18, para $\nu = 3$ e $\hat{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.3 Conclusão

Foi feita uma breve revisão das condições de existência de solução para o DDP usando para isso dois enfoques existentes: o geométrico, que depende do cálculo de um subespaço, e o estrutural, que trabalha com as matrizes que descrevem o sistema, que já facilita bastante o entendimento e a determinação de solução para este problema sem ter que fazer uso da Teoria da Invariância. Esta segunda implementação será aproveitada, como veremos em um capítulo posterior, na implementação de um algoritmo capaz de determinar se o DDP tem ou não solução.

Capítulo 3

Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída

A seguir far-se-á uma breve descrição do que foi estudado sobre um outro Problema de Rejeição de Distúrbios, o Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída (DDPKM). Da mesma forma que para o DDP, as condições necessárias e suficientes para solucioná-lo, através dos enfoques geométrico e estrutural, serão revistas.

Diferentemente do DDP pouca atenção foi dada ao Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída (DDPKM). Até bem pouco tempo, este problema só fora investigado sob o enfoque geométrico, onde as condições de existência se baseiam em um subespaço cuja existência é bastante difícil de se verificar. Recentemente, condições de existência sob o enfoque freqüencial também foram encontradas. O DDPKM, assim como o DDP, também tem uma formulação bastante simples. Seja o sistema multivariável linear e invariante no tempo:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ y(t) = Cx(t) & , \quad t \geq 0 \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das entradas de controle, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor das entradas dos distúrbios, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor das saídas a serem medidas e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas a serem controladas. Supõe-se que as matrizes B e E tenham posto de coluna completo e as matrizes

C e D tenham posto de linha completo. O sistema linear multivariável pode ser representado através da figura 3 a seguir.

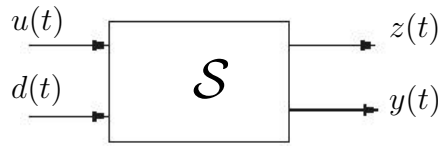


Figura 3.1: Sistema estudado.

O objetivo do DDPKM é encontrar uma lei de controle $u(t) = Ky(t)$ que faça com que a função de transferência que relaciona o distúrbio $d(t)$ com a saída controlada $z(t)$ seja nula. Podemos representar o sistema em malha fechada pela figura 3.2.

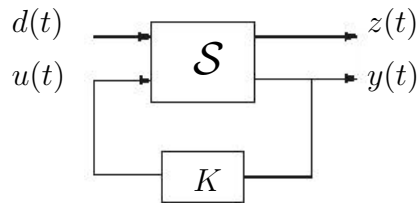


Figura 3.2: Sistema em malha fechada.

A seguir, revisaremos as condições de existência para a solução do DDPKM segundo dois enfoques já apresentados na literatura: o geométrico e o estrutural.

3.1 Enfoque Geométrico

As condições geométricas para a resolução do DDPKM se baseiam na existência de um subespaço que possua certas propriedades [26] [47]. Em CHEN [11] foram propostas condições necessárias e suficientes à solução do DDPKM em sistemas inversíveis à esquerda (sistemas cuja função de transferência que relaciona a entrada $u(t)$ com a saída controlada $z(t)$ é inversível à esquerda). Neste método, o sistema é inicialmente posto numa base de coordenadas especial em que o DDPKM

tem solução se e somente uma submatriz específica é nula. Em DÓREA E MILANI (2003)[23] os resultados propostos pelo método descrito antes [11] são estendidos a duas classes importantes de sistemas, com uma caracterização bem completa das soluções e a parametrização de todas as matrizes de realimentação do sistema.

Para o DDPKM, além do conceito de subespaço (A,B)-invariante já visto para o DDP no capítulo 2 é necessário ter em mente o conceito de subespaço (C,A)-invariante. Consideremos então as definições 3.1.1 e 3.1.2 seguintes:

Definição 3.1.1. [58], [2] *Considere o par (A,B) relativo ao sistema 3.1. Um subespaço $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ é (A,B)-invariante se $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}$.*

Mostra-se que \mathcal{V} é um subespaço (A,B)-invariante se e somente se existir uma matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times l}$ tal que $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Também pode-se observar a existência de um subespaço de dimensão máxima entre todos os contidos no subespaço \mathcal{K} .

$$\mathcal{V}^* = \text{Subespaço maximal único (A,B)-invariante contido em } \mathcal{K}.$$

Definição 3.1.2. [58], [2] *Considere o par (C,A) relativo ao sistema 3.1. Um subespaço $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^n$ é (C,A)-invariante se $A(\mathcal{S} \cap C) \subset \mathcal{S}$.*

Mostra-se que o subespaço \mathcal{S} é (C,A)-invariante se e somente se existir uma matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times l}$ tal que $(A + GC)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$. O conjunto de todos os subespaços (C,A)-invariantes que contém \mathcal{E} , que é a imagem da matriz E , possui um elemento de dimensão mínima.

$$\mathcal{S}_* = \text{Subespaço de dimensão mínima (C,A)-invariante que contém } \mathcal{E}.$$

O teorema a seguir enumera as condições de existência para o DDPKM segundo o enfoque geométrico:

Teorema 3.1.1. [26], [47] *O Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída (DDPKM) tem solução se e somente se existir um subespaço \mathcal{V} , (A,B) e (C,A)-invariantes, tal que $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$.*

Em outras palavras, podemos afirmar que o DDPKM tem solução se e somente se existir um subespaço \mathcal{V} e uma matriz $K \in \mathbb{R}^{(m \times l)}$ tais que $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$ e $(A + BKC)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.

Este teorema descreve as condições necessárias e suficientes à existência de soluções para o DDPKM a partir da obtenção de um subespaço que goza de certas propriedades. Porém não é apresentado um método construtivo deste subespaço, pois é extremamente complicado de ser obtido no caso geral, a não ser em casos particulares, em que pode-se concluir a existência do subespaço, obter a caracterização das soluções bem como parametrizar todas as matrizes de realimentação de saída correspondentes.

Pode-se representar as condições de existência de solução para o DDPKM sob o enfoque geométrico através de conjuntos conforme a figura 3.3 a seguir.

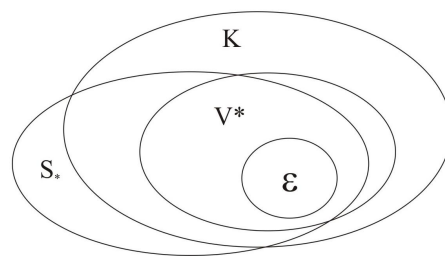


Figura 3.3: Representação dos Subespaços envolvidos na solução do DDPKM

Fazendo uma comparação com a estrutura das condições de existência para solução do DDP, nota-se que o DDPKM nada mais é do que um subconjunto das soluções do DDP.

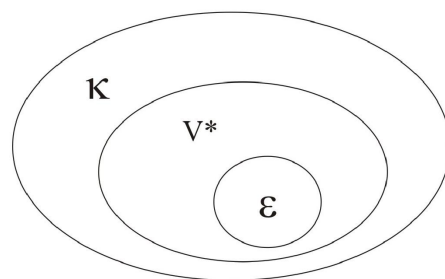


Figura 3.4: Representação dos Subespaços envolvidos na solução do DDP

Em DÓREA E MILANI (2003) [23] foram apresentadas condições necessárias e suficientes à solução do DDPKM para duas classes de sistemas: sistemas que satisfazem $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$ e sistemas que satisfazem $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$. A seguir veremos detalhes destas condições.

3.1.1 Solução para sistemas que satisfazem $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$

Seja o seguinte sistema em estudo:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ y(t) = Cx(t) & , \quad t \geq 0 \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

E supondo que este sistema satisfaz a seguinte condição:

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_* \quad , \quad \text{onde} \quad \mathcal{B} = \text{Im}(B) \quad (3.3)$$

Sistemas cujas matrizes de transferência são inversíveis à esquerda, propriedade esta que possibilita reconstruir a entrada $u(t)$ a partir da saída $y(t)$, formam uma categoria importante de sistemas que satisfaz a suposição anterior. Estes sistemas inversíveis à esquerda satisfazem a seguinte condição: $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* = 0$ [2]. O DDPKM é estudado unicamente para este sistema em CHEN (1997) [11]. Observemos o seguinte conjunto de subespaços:

$$\mathcal{J}(A, B; \mathcal{K}; \mathcal{S}_*) \triangleq \{ \mathcal{V} : \mathcal{V} \in \mathcal{I}(A, B; \mathcal{K}) \quad \text{e} \quad \mathcal{V}^* \supset \mathcal{S}_* \} \quad , \quad (3.4)$$

onde $\mathcal{I}(A, B; \mathcal{K})$ representa o conjunto de subespaço (A,B)-invariantes contidos em \mathcal{K} . A partir do teorema a seguir, podemos perceber que para o DDPKM ter solução, necessariamente o conjunto $\mathcal{J}(A, B; \mathcal{K}; \mathcal{S}_*)$ não pode ser vazio.

Lema 3.1.1. [23] *Se $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$, então $\mathcal{J}(A, B; \mathcal{K}; \mathcal{S}_*)$ possui um elemento de dimensão mínima.*

$$\mathcal{V}_* = \min \mathcal{V} \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{K}; \mathcal{S}_*) \quad (3.5)$$

A partir destes resultados preliminares é possível deduzir as condições de existência de soluções para o DDPKM para esta classe de sistemas.

Teorema 3.1.2. [23] *Para sistemas em que $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$, o Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída (DDPKM) tem solução se e somente se \mathcal{V}_* é um subespaço (C,A) -invariante.*

As condições geométricas estabelecidas através deste teorema independem de qualquer base escolhida para representar os espaços de estado, entrada e saída do sistema. Agora serão vistas as condições de existência para outra família importante de sistemas.

3.1.2 Sistemas que satisfazem $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$

Novamente colocaremos o sistema já conhecido:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ y(t) = Cx(t) & , \quad t \geq 0 \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

Desta vez suporemos que o sistema obedece a seguinte condição:

$$\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{S}_* \quad , \quad (3.7)$$

onde $\mathcal{C} = \ker C$, ou seja, o espaço nulo à direita da matriz C . Os sistemas cujas matrizes de transferência são inversíveis à direita são uma categoria importante de sistemas que obedecem a esta condição. Caracterizam-se pela condição [2] $\mathcal{C} + \mathcal{S}_* = \mathbb{R}^n$. Observe agora a seguinte família de subespaços:

$$\mathcal{J}(C, A; \mathcal{E}; \mathcal{V}^*) \triangleq \{ \mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{I}(C, A; \mathcal{E}) \text{ e } \mathcal{S} \supset \mathcal{V}^* \} \quad , \quad (3.8)$$

onde $\mathcal{I}(C, A; \mathcal{E})$ representa o conjunto de subespaço (C,A) -invariantes que contém \mathcal{E} . O resultado a seguir mostra que uma condição necessária para que o DDPKM tenha solução é o conjunto $\mathcal{J}(C, A; \mathcal{E}; \mathcal{V}^*)$ não ser vazio.

Lema 3.1.2. *Se $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$, então $\mathcal{J}(C, A; \mathcal{E}; \mathcal{V}^*)$ possui um elemento de dimensão máxima.*

$$\mathcal{S}^* = \max \mathcal{S} \in \mathcal{J}(C, A; \mathcal{E}; \mathcal{V}^*) \quad (3.9)$$

A partir desse resultado pode-se afirmar as condições necessárias e suficientes para a existência de solução do DDPKM para esta família de sistemas.

Teorema 3.1.3. [23] Para sistemas para os quais $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$, o Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação de Saída (DDPKM) tem solução se e somente se \mathcal{S}^* é um subespaço (A,B) -invariante.

3.1.3 Parametrização de soluções

Se uma das condições expostas acima, $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$ ou $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{D} + \mathcal{S}_*$, for verificada, será possível determinar mudanças de base ortogonais tais que o sistema possa ser representado pelas seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix}, & E &= \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & D_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Onde B_{21} possui posto de coluna completo, C_{11} tem posto de linha completo e:

$$\mathcal{V}_* = \text{Im} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{se } \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_* \subset \mathcal{S}_*) \tag{3.11}$$

Ou:

$$\mathcal{S}^* = \text{Im} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{se } \mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{S}_*) \tag{3.12}$$

Lembrando que I equivale a matriz identidade e 0 representa a matriz nula, ambos com suas devidas dimensões. Observa-se também que as estruturas das matrizes D e E são obtidas pressupondo que a condição de existência para o Problema de Rejeição de Distúrbios $DE = 0$ é satisfeita.

Agora veremos uma proposição que representa uma condição necessária à existência de solução para o DDPKM, levando em conta somente o caso $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$. Por dualidade, podemos encontrar os mesmos resultados para o outro caso.

Assim, a representação acima reflete as seguintes decomposições dos espaços de estado, entrada e saída medida:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$$

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$$

em que $\mathcal{X}_1 = \mathcal{V}_*$, $\mathcal{BU}_2 = \mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* = \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_*$, $\mathcal{BU} = \mathcal{B}$; $\mathcal{DX} = \mathcal{Y}$, $\mathcal{D}_2\mathcal{X} = \mathcal{Y}_2$, $\ker D_2 = \mathcal{D} + \mathcal{V}_*$.

Proposição 3.1.1. [23] *Para sistemas em que $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$, o DDPKM tem solução se e somente se existe uma matriz K_{11} tal que:*

$$A_{21} + B_{21}K_{11}C_{11} = 0 \quad (3.13)$$

Assim, o conjunto de todas as matrizes de realimentação estática de saída que resolvem o DDPKM é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Em que K_{11} é dada pela solução do sistema de equações descrito anteriormente, enquanto que as matrizes K_{12} , K_{21} e K_{22} possuem valores livres.

Esta parametrização explicita os graus de liberdade da matriz de realimentação de saída K , o que pode fazê-la ser usada em outras estratégias de controle além da Rejeição de Distúrbios.

Uma dessas estratégias é estabilizar do sistema em malha fechada. Com a parametrização acima, percebe-se que o problema passa ao problema de realimentação estática dos trios $(A_{11} + B_{11} K_{11} C_{11}, B_{12}, C_{11})$ e $(A_{22} + B_{21} K_{11} C_{12}, B_{21}, C_{22})$.

3.2 Enfoque Estrutural

Até agora os resultados obtidos passam necessariamente pela Teoria da Invariância, em que para o DDPKM ter solução devemos encontrar um subespaço (A,B) e (C,A) -invariante. O cálculo destes subespaços, como já mencionado, é extremamente complicado e não há um procedimento formal para sua obtenção.

Estes fatos animam a obter, da mesma forma que a realizada para o DDP, uma maneira de solucionar o DDPKM se valendo das matrizes no modelo do sistema.

Em MATOS (2004) [41] houve uma importante contribuição neste sentido. A seguir, serão vistas as condições necessárias e suficientes lá desenvolvidas para encontrar a solução do DDPKM usando o enfoque estrutural. Seja o sistema já descrito e estudado na figura 3.1.

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ y(t) = Cx(t) & , \quad t \geq 0 \\ z(t) = Dx(t) \end{cases}$$

O objetivo aqui é encontrar uma matriz de realimentação de saídas K tal que a lei de controle $u(t) = Ky(t)$ rejeite os distúrbios da saída controlada $z(t)$. Por analogia ao diagrama encontrado para o DDP, o DDPKM terá solução se e somente se for possível representar seu diagrama de blocos conforme a figura 5.1 abaixo, onde M é um ganho estático.

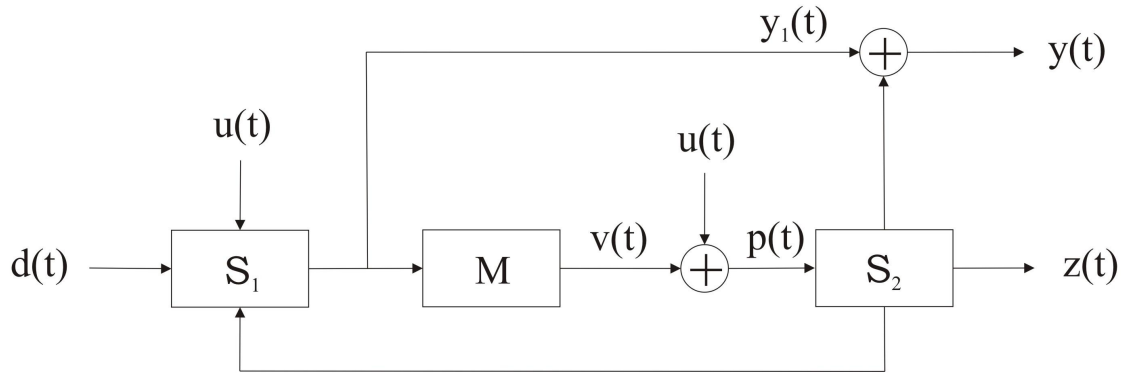


Figura 3.5: Representação dos Subsistemas envolvidos na solução do DDPKM

Da mesma forma que para o DDP, é possível escrever as equações dinâmicas deste sistema. Seja então x_i o estado do subsistema S_i , o resultado é:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) + E_1d(t) \\ y_1(t) &= C_1x_1(t) \\ v(t) &= My_1(t) = MC_1x_1(t) = D_1x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{22}x_2(t) + B_2[v(t) + u(t)] = A_{22}x_2(t) + B_2u(t) + B_2MC_1x_1(t) \quad (3.15) \\ y_2(t) &= C_2x_2(t) \\ y(t) &= y_1(t) + y_2(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \\ z(t) &= z_2(t) = D_2x_2(t) \end{aligned}$$

Passando essas equações à forma matricial temos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_2 M C_1 & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & D_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Essa forma canônica está associada às condições de solução para o DDPKM. Equações sob a forma acima se caracterizam por porções nulas nas matrizes D e E e pela parte inferior à esquerda da matriz A ser múltipla ao mesmo tempo das submatrizes B_2 e C_1 . Uma matriz de realimentação estática de saída K que soluciona o DDPKM usando a lei de controle $u(t) = Ky(t)$ é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} -M & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Assim, pode-se apresentar o seguinte teorema:

Teorema 3.2.1. [41] *O Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída (DDPKM) tem solução para um sistema descrito pelas matrizes $\langle A, B, C, D, E \rangle$ se e somente se existe um número real ν , $q \leq \nu \leq \nu - p$, uma matriz real $\hat{M}(m \times p)$ e uma base do espaço de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E} \rangle$ do sistema satisfazem:*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array} \right] \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ \hat{y}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde \hat{A}_{11} é $\nu \times \nu$, \hat{A}_{12} é $\nu \times (n - \nu)$ etc, e $\hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{M} \hat{C}_1$.

Uma contribuição deste teorema é uma visão estrutural nova para o DDPKM, anteriormente resolvido apenas com a ferramenta da Teoria da Invariância.

Exemplo 3.2.1. [41] *Considere o seguinte exemplo:*

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Fazendo a seguinte transformação de similaridade $\hat{x} = Qx$, onde:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teremos:

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= \left[\begin{array}{cc|ccc} 5.67 & -5.33 & 1.33 & 2.67 & -0.67 \\ 5.67 & -6.33 & 0.33 & 1.17 & -3.67 \\ \hline 0.33 & -0.67 & -3.33 & -5.67 & -4.33 \\ 0.67 & -1.33 & 1.33 & 2.67 & 0.33 \\ -0.33 & 0.67 & 1.33 & 2.67 & 2.33 \end{array} \right] & \hat{B} &= \begin{bmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.17 & 0.33 \\ \hline -0.67 & -0.33 \\ -1.33 & -0.67 \\ 0.67 & 0.33 \end{bmatrix} & \hat{E} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{C} &= \left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \\
 \hat{D} &= \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Algumas das possíveis matrizes K que solucionam o DDPKM a partir da equa-

ção $\hat{A}_{21} + \hat{B}_2 \hat{K} \hat{C}_1 = 0$ são:

$$\hat{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{K}_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3.3 Conclusão

Foram revisadas as as condições necessárias e suficientes à obtenção de solução do DDPKM sob os pontos de vista geométrico e estrutural. No enfoque geométrico, a solubilidade do DDPKM baseia-se na obtenção de um subespaço (A,B) e (C,A)-invariante extremamente difícil de ser verificado, a menos em casos particulares. Já no enfoque estrutural, o DDPKM tem solução se o sistema puder ser caracterizado pela forma da equação 3.18, o que facilita bastante os cálculos.

No capítulo 5 veremos um algoritmo que permite, baseado nestes resultados estruturais, indicar se o DDPKM tem ou não solução para um dado sistema.

Capítulo 4

Algoritmo matricial para o DDP

4.1 Introdução

Os estudos relativos ao DDP sob o ponto de vista estrutural oferecem condições necessárias e suficientes para a existência de soluções, necessitando para isso apenas das matrizes que caracterizam o sistema. Este fato, além de seu interesse teórico, facilita bastante os cálculos, pois possibilita a criação de um algoritmo que responde eficientemente se o Problema de Rejeição de Distúrbios tem ou não solução. Esse algoritmo foi desenvolvido por DEL NERO GOMES (1980) [16], se destina a fazer inspeções seqüenciais em porções das matrizes do sistema até se alcançar uma decisão sobre a solubilidade do DDP.

Faremos uma breve revisão de alguns conceitos do capítulo 2. Seja o sistema linear e invariante no tempo descrito por:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das entradas de controle, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor das entradas dos distúrbios e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas a serem controladas. As matrizes B , E e D possuem posto completo. O teorema a seguir assegura que os distúrbios serão rejeitados para um dado sistema se e somente se for possível colocar o seu diagrama de blocos na forma vista na figura 2.2, repetida aqui por conveniência.

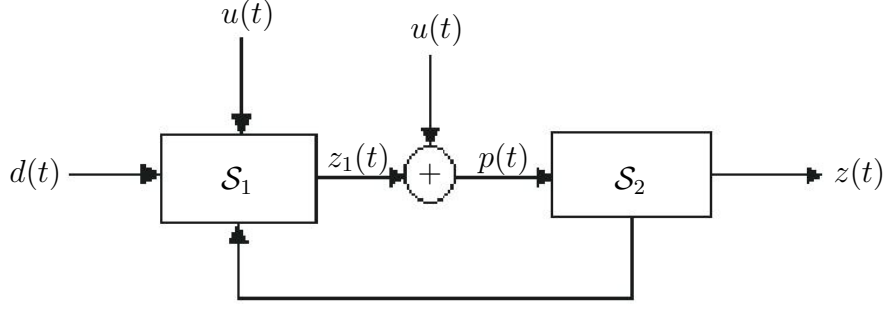


Figura 4.1: Diagrama de blocos esquemático para a solução do DDP.

Teorema 4.1.1. [17] *O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) tem solução para um sistema de matrizes $\langle A, B, D, E \rangle$ se e somente se existir um número real ν , $q \leq \nu \leq n - p$ e uma base de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{D}, \hat{E} \rangle$ do sistema satisfazem:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array} \right] x(t) + \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{array} \right] u(t) + \left[\begin{array}{c} \hat{E}_1 \\ 0 \end{array} \right] \\ z(t) &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde \hat{A}_{11} é $\nu \times \nu$, \hat{A}_{12} é $\nu \times (n - \nu)$, etc e $\hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{D}_1$, para alguma matriz \hat{D}_1 $m \times \nu$.

Nesta forma \hat{A}_{21} é a porção inferior esquerda da matriz \hat{A} formada pelas $n - \nu$ últimas linhas e ν primeiras colunas e é um múltiplo de \hat{B}_2 , que é a porção inferior da matriz \hat{B} formada por suas $n - \nu$ últimas linhas. A porção inferior de \hat{E} e as primeiras colunas da matriz \hat{D} devem ser nulas.

Resolver o DDP então seria procurar uma matriz inversível Q tal que $Q^{-1}AQ$, $Q^{-1}B$, DQ e $Q^{-1}E$ apresentem as propriedades explicitadas na equação 4.2. O corolário que será mostrado a seguir especifica ainda mais estas propriedades.

Corolário 4.1.1. [16] *O Problema de Rejeição de Distúrbios é solúvel para um sistema descrito pelas matrizes $\langle A, B, D, E \rangle$ se e somente se existir um número real ν , $q \leq \nu \leq n - p$ e uma base do espaço de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{D}, \hat{E} \rangle$ satisfazem o teorema 4.1.1 e ainda:*

$$\hat{D}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_p \end{array} \right] \quad e \quad \hat{E}_1 = \left[\begin{array}{c} I_q \\ 0 \end{array} \right] \quad (4.3)$$

Podemos afirmar desta forma que as matrizes \hat{D} e \hat{E} podem ser consideradas iguais respectivamente a:

$$\hat{D} = \left[0 \mid I_p \right] \quad \text{e} \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Assim, a matriz procurada Q deve satisfazer as condições impostas pelo corolário 4.1.1 e pela equação 4.4. Mas se na base originalmente usada para descrever o sistema as matrizes D e E já apresentarem a forma de 4.4, é de se esperar que Q tenha uma estrutura bastante especial e camarada. Consideremos então que o sistema $\langle A, B, D, E \rangle$ se apresenta, na base original, como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} x(t), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde a submatriz A_{11} tem dimensão $(q \times q)$, $A_{22}(n - q - p \times n - q - p)$, $A_{33}(p \times p)$, $B_1(q \times m)$ e assim por diante.

Esta hipótese é sustentada pelo corolário 4.1.1: se não for possível encontrar uma base inicial em que as matrizes do sistema gozem desse formato, o DDP não tem solução. Supondo então que o sistema original é descrito por 4.5, é de fácil constatação que a matriz Q procurada possui a forma:

$$Q = \begin{bmatrix} I_q & Q_{12} & Q_{13} \\ 0 & M & Q_{23} \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Como fica claro nas demonstrações formais em [16], pode-se considerar as submatrizes Q_{12} , Q_{13} e Q_{23} nulas, fazendo com que a matriz Q procurada tenha a forma:

$$Q = \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Assim, conclui-se que para encontrar a matriz Q basta simplesmente encontrar uma matriz $M(n - q - p \times n - q - p)$ não singular, ou seja, ao utilizar as equações 4.5

podemos trabalhar apenas com o "miolo", sem perder as informações próprias do DDP. O problema pode então ser formulado da seguinte maneira: dado um sistema $\langle A, B, D, E \rangle$ na forma de 4.5, deseja-se saber se o DDP tem ou não solução sem calcular \mathcal{V}^* . Para que isso ocorra, devemos verificar se é possível pôr o sistema na forma 4.2 usando matrizes de transformação Q como em 4.7. Se for impossível achar tais matrizes, o DDP se torna impossível de ser solucionado. O objetivo então é elaborar um algoritmo, ou seja, uma busca ordenada, um conjunto de regras que seguidas diversas vezes concluem sobre a existência ou não de uma solução. Serão apresentados mais três resultados que também são conseqüências do corolário 4.1.1 e das equações 4.5.

Corolário 4.1.2. [16] *Se existir uma matriz $D_1(m \times n - p)$ tal que $\begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = B_3 D_1$ então o Problema de Rejeição de Distúrbios tem solução usando $u = \begin{bmatrix} -D_1 & 0 \end{bmatrix}$. Teremos ainda $\mathcal{V}^* = \ker D$.*

Corolário 4.1.3. [16] *Se não existir uma matriz $D_1(m \times q)$ tal que $A_{31} = B_3 D_1$ então o Problema de Rejeição de Distúrbios não tem solução, ou seja, $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{V}^*$.*

Corolário 4.1.4. [16] *Se existir uma matriz $D_1(m \times q)$ tal que:*

$$\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} D_1 \quad (4.8)$$

então o Problema de Rejeição de Distúrbios tem solução, usando $u = \begin{bmatrix} -D_1 & 0 \end{bmatrix}$. Teremos ainda que \mathcal{E} será (A, B) -invariante.

Para aplicar estes resultados, duas condições suficientes e uma necessária, basta fazer uma mera inspeção das equações 4.5. Isso permite, para alguns casos, uma verificação praticamente imediata da solubilidade ou não do DDP.

Exemplo 4.1.1. *Seja o sistema descrito a seguir.*

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Pode-se observar, por meio de simples inspeção das matrizes, que o DDP não tem solução pois $\forall D_1, B_3 D_1 = 0 \neq A_{31} = 1$. Porém, ao mudarmos a matriz B para

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

teremos que $\begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_3 D_1$ para $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Pelo corolário 4.1.2 o DDP tem solução com $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & f_4 \end{bmatrix}$ onde f_4 pode assumir qualquer valor.

Os corolários acima tem aplicação restrita. Desejamos um algoritmo geral que, para qualquer sistema na forma 4.5 realize uma busca ordenada, um conjunto seqüencial de tarefas que leva a decisões finais sobre a existência de soluções para o DDP. Para entender melhor o formalismo final do algoritmo apresentamos agora um exemplo numérico detalhado.

Exemplo 4.1.2. [16] *Seja o sistema descrito abaixo:*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

As transformações de equivalência que preservam a particular forma das matrizes D e E são dadas por:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde M e P são matrizes (3×3) não-singulares tais que $PM = MP = I_3$.

Estamos interessados em partes específicas das matrizes $\hat{A} = Q^{-1}AQ$ e $\hat{B} = Q^{-1}B$: a porção inferior esquerda de \hat{A} , \hat{A}_{21} ($n - \nu \times \nu$) e a porção inferior de \hat{B} , \hat{B}_2 ($n - \nu \times m$). Deseja-se encontrar um valor de ν tal que:

$$\hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{D}_1 \text{ para alguma matriz } \hat{D}_1 \quad (4.9)$$

Como já fora visto no teorema 4.1.1, $q \leq \nu \leq n - p$ comecemos por:

1. Primeiro Passo: $\nu = n - p = 4$.

$$\hat{A}_{21}(4) = L_1 Q^{-1} A Q R^4 ; \hat{B}_2(4) = L_1 Q^{-1} B$$

onde os operadores L_i e R^j são definidos da seguinte forma:

$L_i X \Rightarrow$ matriz composta pelas i últimas linhas de X .

$Y R^j \Rightarrow$ matriz composta pelas j primeiras colunas de Y .

$$\hat{A}_{21}(4) = \left[0 \mid 0 \mid 1 \right] A \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & M \\ 0 & 0 \end{array} \right] ; \hat{B}_2(4) = \left[0 \mid 0 \mid 1 \right] B$$

Desenvolvendo:

$$\hat{A}_{21}(4) = \left[0 \quad m_{21} \quad m_{22} \quad m_{23} \right] ; \hat{B}_2(4) = \left[0 \quad 0 \right]$$

onde os m_{ij} são os elementos da segunda linha da matriz M .

Para a condição 4.9 ser verdadeira devemos ter $m_{21} = m_{22} = m_{23} = 0$, violando assim a hipótese da não-singularidade de M . Portanto, não é possível chegar à forma 4.2 com a dimensão $\nu = 4$.

2. Segundo Passo: $\nu = n - p - 1 = 3$

$$\hat{A}_{21}(3) = L_2 Q^{-1} A Q R^3 ; \hat{B}_2(3) = L_2 Q^{-1} B$$

$$\hat{A}_{21}(3) = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & L_1 P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] A \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & M R^2 \\ 0 & 0 \end{array} \right] ; \hat{B}_2(3) = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & L_1 P & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] B$$

Antes de continuar, percebe-se que:

$$\hat{A}_{21}(3) = \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{X} & \mathcal{X} \\ 0 & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}; \hat{B}_2(3) = \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{X} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde \mathcal{X} pode assumir qualquer valor. Uma condição necessária para que 4.9 se verifique e o processo continue é $m_{21} = m_{22} = 0$. Esta restrição, juntamente com o fato de que $L_1PMR^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ nos conduz à conclusão de que $L_1P = \begin{bmatrix} 0 & p_{32} & 0 \end{bmatrix}$, o que permite-nos escrever:

$$\hat{A}_{21}(3) = p_{32} \begin{bmatrix} 0 & m_{11} + m_{31} & m_{12} + m_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{B}_2(3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Desta forma, para que a condição 4.9 ser verificada, devemos ter $m_{11} + m_{31} = m_{12} + m_{32} = 0$ ou $p_{32} = 0$. Qualquer destas possibilidades afeta a não-singularidade de M e portanto não há novamente como chegar à forma 4.2 com $\nu = 3$.

3. Terceiro Passo: $\nu = n - p - 2 = 2$

$$\hat{A}_{21}(2) = L_3Q^{-1}AQR^2; \hat{B}_2(2) = L_3Q^{-1}B$$

$$\hat{A}_{21}(2) = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & L_2P & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] A \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & MR^1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]; \hat{B}_2(2) = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & L_2P & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] B$$

Ao usarmos ainda a restrição $m_{21} = m_{22} = 0$ é fácil notar que:

$$\hat{A}_{21}(2) = \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{X} \\ 0 & p_{32}(m_{11} + m_{31}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{B}_2(2) = \begin{bmatrix} \mathcal{X} & \mathcal{X} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde novamente \mathcal{X} pode assumir qualquer valor. Para que 4.9 valha e o processo mais uma vez continue, é necessário que $m_{11} + m_{31} = 0$. Esta restrição e mais o fato de que $L_2PMR^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ nos leva a:

$$L_2P = \begin{bmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{21} \\ 0 & p_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo mais acima temos:

$$\hat{A}_{21}(2) = \begin{bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \hat{B}_2(2) = \begin{bmatrix} p_{21} & -p_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, neste terceiro passo, em que $\nu = 2$, a condição 4.9 é satisfeita desde que:

$$\hat{D}_1 = \begin{bmatrix} \gamma + 1 & \delta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

em que γ e δ são números reais quaisquer.

Logo, o DDP tem solução para este sistema e a matriz Q responsável pela mudança de bases que o põe na forma 4.2 pode ser obtida a partir de:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{23} & 0 \\ 0 & -m_{11} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Embora o DDP tenha sido resolvido sem a necessidade de calcular \mathcal{V}^* , este pode ser extraído de qualquer uma das matrizes Q acima, usando as idéias mostradas no teorema 4.1.1. Teríamos então:

$$\mathcal{V}^* = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

valor idêntico ao obtido por qualquer outro método existente e que satisfaz à condição $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{E}$.

Embora haja neste exemplo alguns aspectos um tanto obscuros, ele sugere que existe alguma maneira suave, natural e pouco forçada de encontrar um procedimento sistemático. Um aspecto a mais do exemplo é que a equação 4.7 oferece-nos a possibilidade de trabalhar na dimensão reduzida $n - q - p$. Este exemplo é, em suma, uma maneira de mostrar como nasceram os algoritmos que serão apresentados daqui em diante.

4.2 Algoritmo Matricial

Maiores detalhes, assim como demonstrações finais para todos os resultados podem ser encontrados em [16]. Seja o sistema descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se aplicarmos a transformação caracterizada em 4.7 as matrizes D e E não se alterarão, mas as matrizes A e B passarão a ser iguais a:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}M & A_{13} \\ PA_{21} & PA_{22}M & PA_{23} \\ A_{31} & A_{32}M & A_{33} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ PB_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde $P = M^{-1}$ e as partições apresentam as mesmas dimensões das matrizes do sistema descrito em 4.5. Considerando $\nu = \nu_0 = n - p = \dim \{ker D\}$ temos:

$$\hat{A}_{21}(\nu_0) = \left[A_{31} \mid A_{32}M \right] \quad \hat{B}_2(\nu_0) = B_3 \quad (4.12)$$

A matriz M é não-singular, portanto $\hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{D}_1$ se verifica neste passo se e somente se $\left[A_{31} \mid A_{32} \right] = B_3 D_1$ para alguma D_1 . Isto demonstra a validade do corolário 4.1.2.

Agora para um passo genérico $\nu = \nu_i < n - p$:

$$\hat{A}_{21}(\nu_i) = \left[\begin{array}{c|c} L_i P A_{21} & L_i P A_{22} M R^j \\ \hline A_{31} & A_{32} M R^j \end{array} \right] \quad \text{e} \quad \hat{B}_2(\nu_i) = \begin{bmatrix} L_i P B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

onde, como visto no exemplo 4.1.2, $L_i P$ são as i últimas linhas da matriz P e $M R^j$ são as j primeiras colunas da matriz M .

A submatriz A_{31} está sempre inserida em $\hat{A}_{21}(\nu_i)$, assim uma condição necessária para o DDP ter solução é existir uma matriz D_1 tal que $A_{31} = B_3 D_1$. Está provado o corolário 4.1.3. Já o corolário 4.1.4 é provado pelo simples fato de P ser inversível.

Estes três resultados, pela importância e acessibilidade das informações, já seriam suficientes para dar às equações 4.5 a categoria de forma especialmente talhada para estudar o DDP. Neste ponto é conveniente fornecer uma maneira mais cômoda para representar a condição 4.9 e todas as que lhe são equivalentes. Com efeito, dadas as matrizes A e B existiria uma matriz D tal que $A = BD$ se e somente se $\{A\} \subset \{B\}$, ou seja, o subespaço gerado pelas colunas de A está contido no subespaço gerado pelas colunas de B . Outra notação equivalente para esta inclusão seria o uso de símbolo manuscrito para representar subespaços: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. A condição 4.9 seria então representada por:

$$\{\hat{A}_{21}\} \subset \{\hat{B}_2\} \quad \text{ou} \quad \hat{A}_{21} \subset \hat{B}_2 \quad (4.14)$$

Antes de formalização final do algoritmo, vamos fazer uma recapitulação em passos:

1. Primeiro passo: $\nu = n - p$

Pergunta: $\{A_{31}\} \subset \{B_3\}$?

Se a resposta for negativa, então o DDP não tem solução e o algoritmo deve ser parado pois $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{V}^*$. Caso seja positiva, podemos passar à próxima pergunta, que é:

Pergunta: $\{A_{31} \ A_{32}\} \subset \{B_3\}$?

Se a resposta for positiva devemos parar o algoritmo pois o DDP certamente tem solução e $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^* = \ker D$. Se a resposta for negativa, podemos garantir apenas que $\mathcal{V}^* \neq \ker D$.

2. Segundo passo: $\nu = n - p - 1$

A visão adquirida em exemplos como o 4.1.2 auxilia bastante. Sendo $\bar{n} = n - q - p$:

Pergunta: Existe M ($\bar{n} \times \bar{n}$) tal que $\{A_{32}MR^{\bar{n}-1}\} \subset \{B_3\}$?

Se a resposta for não, a única certeza é que $\dim \mathcal{V}^* < n - p - 1$ e vamos então a outras etapas do algoritmo. Mas se for positiva a resposta, é possível

que o DDP tenha solução. Para garantir a solubilidade do problema, devemos fazer outras perguntas. Sendo P a matriz inversa de M , ou seja, $P = M^{-1}$:

Pergunta: $\{L_1PA_{21}\} \subset \{L_1PB_2\}$?

Caso a resposta seja negativa, devemos parar o algoritmo, pois é certo que $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{V}^*$ e portanto o DDP não tem solução. Mas se a resposta for positiva, prosseguiremos com outra pergunta.

$$\text{Pergunta: } \left\{ \left[\begin{array}{c|c} L_1PA_{21} & L_1PA_{22}MR^{\bar{n}-1} \\ \hline A_{31} & A_{32}MR^{\bar{n}-1} \end{array} \right] \right\} \subset \left\{ \left[\begin{array}{c} L_1PB_2 \\ \hline B_3 \end{array} \right] \right\}?$$

Neste caso, a resposta sendo positiva faz com que $\dim \mathcal{V}^* = n - q - p - 1$ e com isso pode-se dizer que o Problema de Rejeição de Distúrbios seguramente tem solução. Se a resposta for não, deve-se partir a outras iterações.

Já é possível escrever um fluxograma completo para este algoritmo baseado em manipulações das matrizes do sistema.

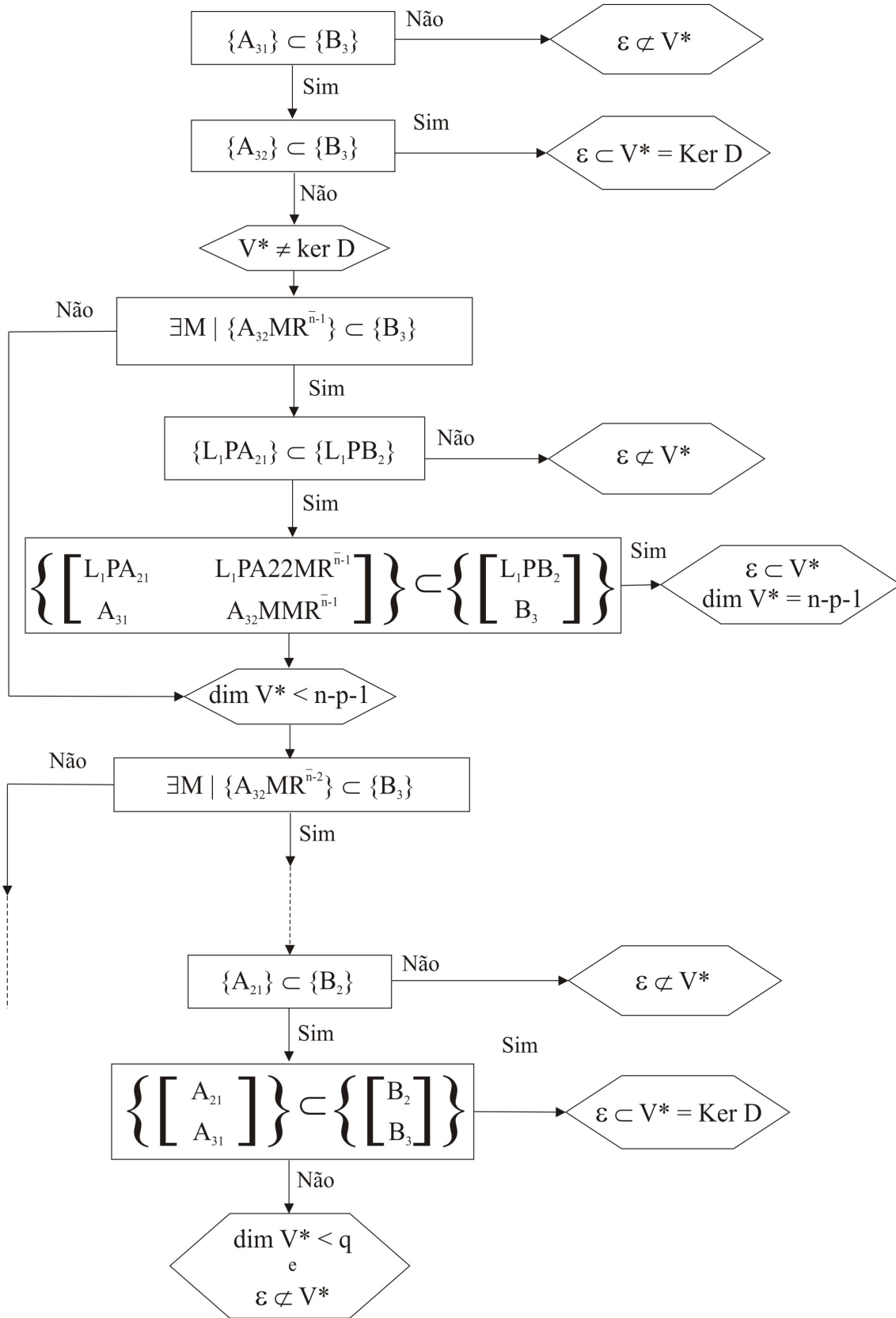


Figura 4.2: Fluxograma do algoritmo que determina se o DDP tem ou não solução

Demonstrações formais sobre a validade destes procedimentos, e de outros a ele equivalentes, podem ser encontrados em [16].

4.3 Implementação do Algoritmo Matricial para o DDP

A implementação do algoritmo matricial que determina se o Problema de Rejeição de Distúrbios tem ou não solução foi realizado no ambiente MATLAB e é composto por quatro programas, a saber: *início*, *transformação* e *algoritmo* e também pelas funções *arredonda* e *encontra_M*. Nas próximas subseções cada um dos programas será abordado com mais detalhes.

O objetivo agora é implementar todo o algoritmo proposto na seção anterior, o que possibilita dar uma posição à respeito da solubilidade ou não do DDP para um dado sistema. O diagrama em blocos que ajuda a ter uma boa visão de seu funcionamento é exibido na figura 4.3 a seguir.

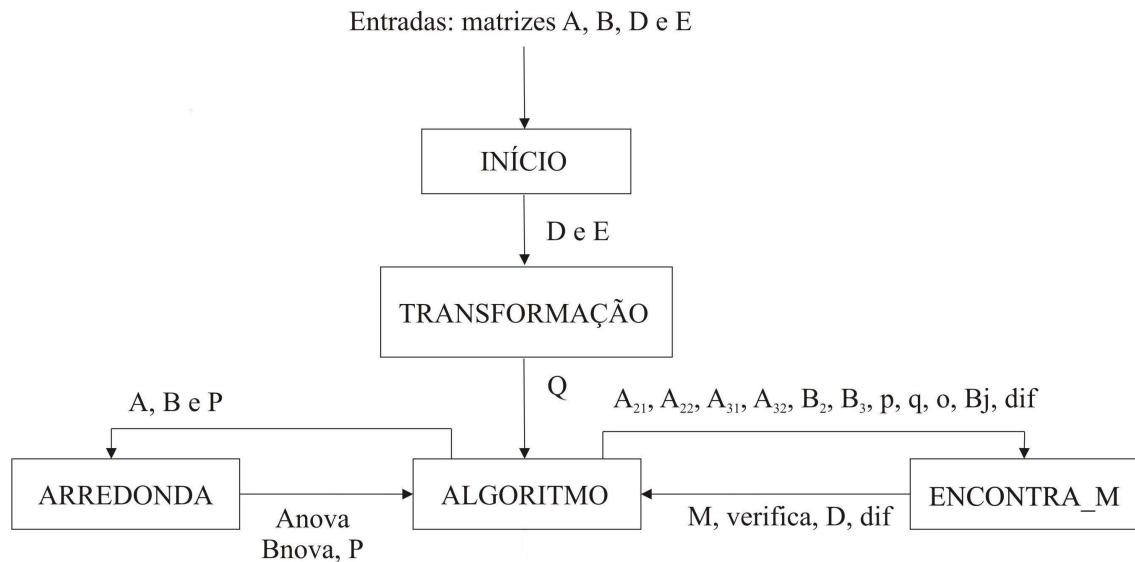


Figura 4.3: Diagrama Geral dos Programas do algoritmo matricial para o DDP

4.3.1 Programa Início

Neste programa são inseridos os valores das matrizes que descrevem o sistema a ser estudado. De posse desses dados, ele realiza os cálculos do número de linhas e colunas de todas estas matrizes (valores esses que serão usados ao longo de toda a implementação do algoritmo matricial), gerando os valores das dimensões n , p , q , r e o (que é igual a $\bar{n} = n - q - p$) e por fim verifica se as matrizes D e E já possuem a forma encontrada na equação 4.4, ou seja, $D = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix}^T$. Caso a resposta seja positiva, o programa já vai diretamente à etapa de verificação da solubilidade do DDP. Se negativa, passa-se a uma busca de uma transformação inicial de bases dada por $x = Q\hat{x}$, a fim de colocar D e E na forma requerida. Sobre esta etapa, será feita uma descrição mais detalhada na próxima subseção. O diagrama em blocos desta primeira parte de verificações é apresentada pela figura 4.4 a seguir.

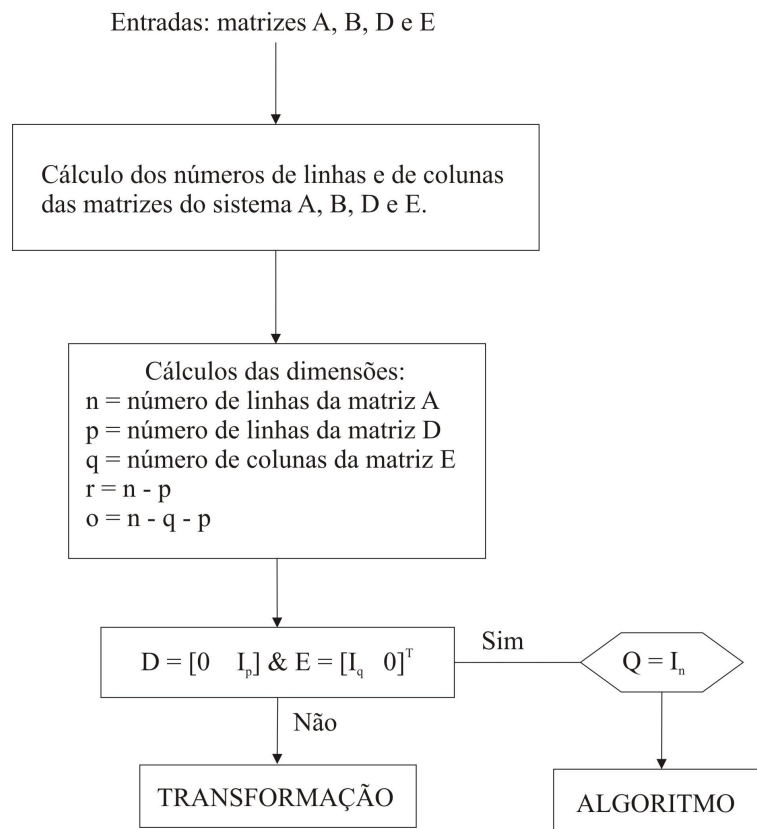


Figura 4.4: Diagrama em Blocos do Programa Início

4.3.2 Programa Transformação

Como já mencionado, este programa se incumbe de procurar uma mudança de bases preliminar, dada por $x = Q\hat{x}$, que transforma as matrizes $\langle A, B, D, E \rangle$ originais do sistema nas matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{D}, \hat{E} \rangle$ onde $\hat{D} = DQ = \left[0 \mid I_p \right]$ e $\hat{E} = Q^{-1}E = \left[I_q \mid 0 \right]^T$. É sempre bom ter em mente que a impossibilidade de se encontrar uma tal matriz Q indica a não-existência de solução para o DDP.

Duas etapas compõem o programa. Na primeira delas busca-se uma transformação que altera apenas a matriz D ; na segunda etapa o objetivo é uma transformação que muda E e que preserva as mudanças já feitas anteriormente em D . A composição entre estas mudanças de base é o objetivo final do programa *transformação*.

Consideremos então o problema associado à primeira etapa, aqui descrito em seu contexto puramente algébrico: dadas as matrizes $\langle A, B, D, E \rangle$, com as dimensões costumeiras e, com $\text{posto}(D) = p$, encontrar Q $n \times n$ é inversível tal que $DQ = \hat{D} = \left[0 \mid I_p \right]$. É fácil perceber que, se uma dada Q tem esse comportamento, então $D = \hat{D}Q^{-1} = \left[0 \mid I_p \right] Q^{-1}$, o que garante que as p últimas linhas de Q^{-1} são formadas por D , ou seja

$$Q^{-1} = \left[\begin{array}{c} X \\ D \end{array} \right] \quad (4.15)$$

onde $X(n-p \times n)$ é qualquer, desde que suas $n-p$ linhas e as p linhas de D sejam linearmente independentes. Conclui-se imediatamente que o algoritmo de primeira etapa é:

1. Escolher X ($n-p \times n$) qualquer tal que

$$P = \left[\begin{array}{c} X \\ D \end{array} \right] \quad (4.16)$$

seja invertível.

2. $Q = P^{-1}$ é a matriz procurada.

A segunda etapa é caracterizada pelo problema: dadas as matrizes $\langle A, B, D, E \rangle$, com as dimensões e hipóteses costumeiras, e onde $D = \left[0 \mid I_p \right]$, encontrar Q $n \times n$

e inversível tal que

$$DQ = \hat{D} = \left[0 \mid I_p \right] \quad \text{e} \quad Q^{-1}E = \hat{E} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

A primeira das restrições 4.17 permite concluir que as p últimas linhas da Q procurada são $\left[0 \mid I_p \right]$ ou, em outras palavras,

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \quad (4.18)$$

onde $Q_{11}(n-p \times n-p)$ é inversível e Q_{12} é $n-p \times p$. É imediato verificar que a inversa de uma matriz com a estrutura exibida em 4.18 é dada por

$$Q^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11}^{-1} & -Q_{11}^{-1}Q_{12} \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \quad (4.19)$$

onde as dimensões das partições são as mesmas. A segunda das restrições 4.17 permite escrever

$$E = Q\hat{E} = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Esta equação 4.20 significa que as q primeiras colunas de Q devem ser compostas por E , e isto permite concluir que as p últimas linhas de E devem ser necessariamente nulas para haver solução para esta etapa (e para o DDP). Assim, o algoritmo para a segunda etapa é:

1. $E_1 \triangleq n-p$ primeiras linhas de E , $E_2 \triangleq p$ últimas linhas de E .
2. $E_2 \neq 0 \Rightarrow$ DDP não tem solução
3. ($E_2 = 0$). Escolher $Y(n-p \times n-p-q)$ tal que $Q_{11} = \left[E_1 \mid Y \right]$ seja inversível.
4. Escolher $Q_{12}(n-p \times p)$ qualquer e montar a matriz procurada.

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline 0 & I_p \end{array} \right] \quad (4.21)$$

O diagrama de blocos geral para o programa *transformação*, envolvendo as duas etapas, é mostrado a seguir.

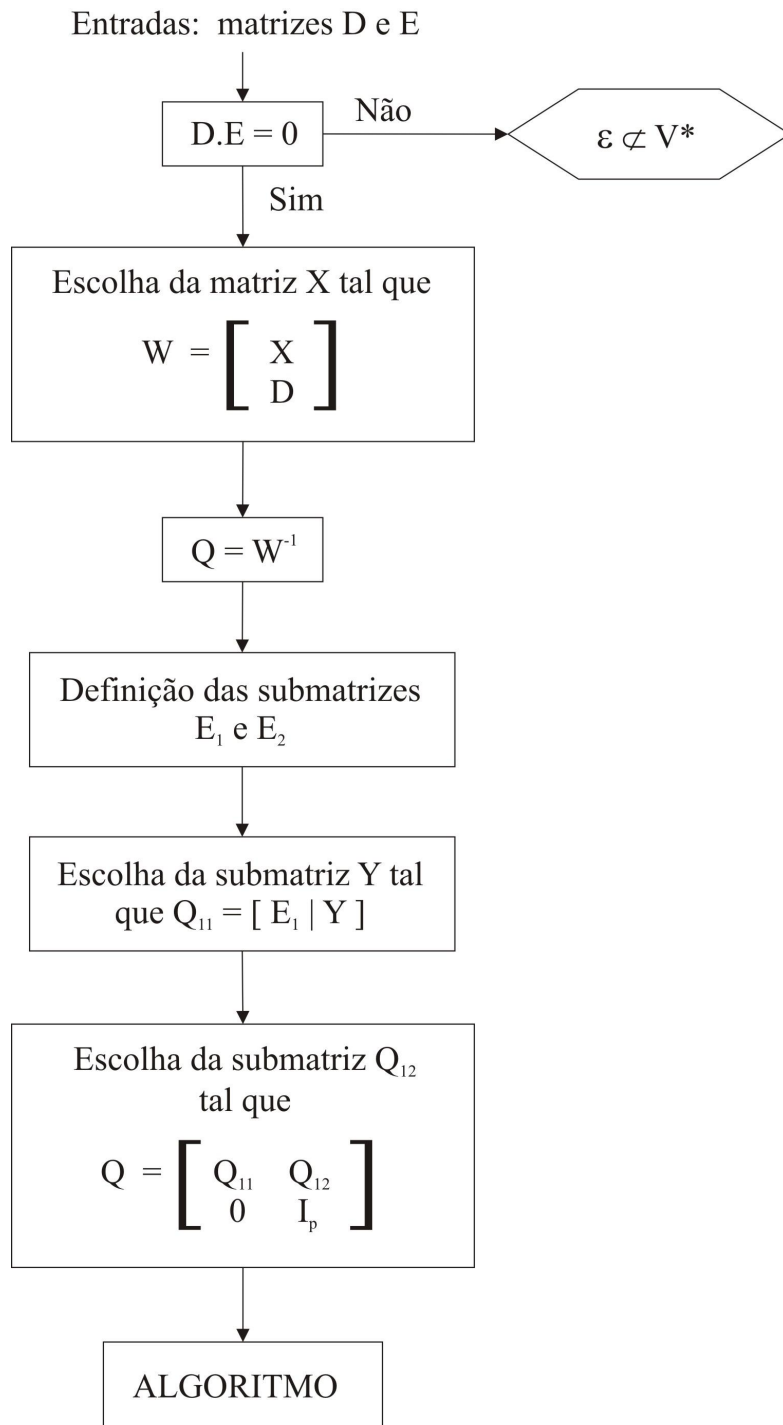


Figura 4.5: Diagrama em Blocos do Programa Transformação

4.3.3 Programa Algoritmo

De posse das matrizes A , B , D , E , onde D e E já estão "prontas", este programa implementa computacionalmente os passos do algoritmo matricial que diagnostica a solubilidade ou não do DDP.

A principal ação deste programa é encontrar, ou não, uma transformação de bases $x(t) = Q\hat{x}(t)$ que preserve o formato das matrizes D e E e faz com que A e B passem a ter a forma de 5.10. Depois, estas passam por um processo de arredondamento de cada um de seus elementos (através da subrotina *arredonda*, que será explicada posteriormente) e depois pelo de decomposição em submatrizes (A_{11} , A_{12} , A_{13} e etc) já explicitadas nesta forma.

Para determinar se subespaços gerados por porções da parte inferior esquerda da matriz A estão contidas nos subespaços gerados por porções inferiores da matriz B , necessita-se do seguinte lema:

Lema 4.3.1. *Dadas duas matrizes A e B , com o mesmo número de linhas, o subespaço gerado pelas colunas de A , $\{A\}$ está contido no subespaço gerado pelas colunas de B , $\{B\}$ se e somente se:*

$$\rho(B) = \rho\left(\begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix}\right) \quad (4.22)$$

onde ρ designa o posto da matriz.

O fato de este resultado utilizar o cálculo de posto obriga as matrizes A e B a passarem pela subrotina de arredondamento de cada um de seus elementos. No processo de mudança de bases, por incertezas nos cálculos do MATLAB, podem ser encontrados resultados que geram problemas na verificação dos postos. Por exemplo, para o cálculo de um novo elemento da matriz A , ao invés do resultado ser igual a zero, foi-lhe atribuído o valor 1×10^{-7} . Como este resultado possui relevância ao cálculo do posto, já que $\text{posto}(1 \times 10^{-7}) \neq \text{posto}(0)$, surgiu esta necessidade. Por arbitragem, o número de casas decimais permitidas pela subrotina de arredondamento ficou igual a *quatro*, valor este que pode obviamente ser alterado em virtude das magnitudes das grandezas envolvidas.

Após essa etapa de preparação das matrizes A e B , são realizadas as primeiras inspeções nas porções destas matrizes, em que o valor de ν é igual a $n - p$, testando

as condições dos corolários 4.1.2 e 4.1.3. Caso $\left\{ \left[\begin{array}{c|c} A_{31} & A_{32} \end{array} \right] \right\} \subset \left\{ \left[\begin{array}{c} B_3 \end{array} \right] \right\}$, o DDP certamente tem solução. Caso contrário, se $\{A_{31}\} \not\subset \{B_3\}$ certamente o DDP será insolúvel; se essa inclusão vale mas ao mesmo tempo $\{A_{32}\} \not\subset \{B_3\}$, passaremos a verificar se há alguma base no espaço de estados $x = Q\hat{x}$ que soluciona o DDP. Para isso, como já mencionado anteriormente, basta trabalhar com o "miolo" desta matriz Q . E é justamente esta a proposta da função *encontra_M*.

Se a resposta for sim, a função *encontra_M* retorna com o valor deste "miolo" da matriz procurada Q capaz de solucionar o DDP e, por conseguinte, o programa informa que o DDP tem solução e que a dimensão de $\mathcal{V}^* = n - p - dif$. Se ao final da função não foi possível encontrar uma base de estados que solucione o DDP, o programa *algoritmo* passa a realizar as últimas verificações do algoritmo matricial proposto, quando o valor da variável o for igual a q , que são:

$$\begin{aligned} \text{posto} \left[\begin{array}{c|c} B_2 & A_{21} \end{array} \right] &= \text{posto} \left[\begin{array}{c} B_2 \end{array} \right] \quad \text{e} \\ \text{posto} \left[\begin{array}{c|c} B_2 & A_{21} \\ \hline B_3 & A_{31} \end{array} \right] &= \text{posto} \left[\begin{array}{c} B_2 \\ \hline B_3 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Se a resposta para as duas perguntas for positiva o DDP tem solução. Caso contrário $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{V}^*$ e o DDP não tem solução. O diagrama em blocos deste programa pode ser observado através da figura 4.6 a seguir.

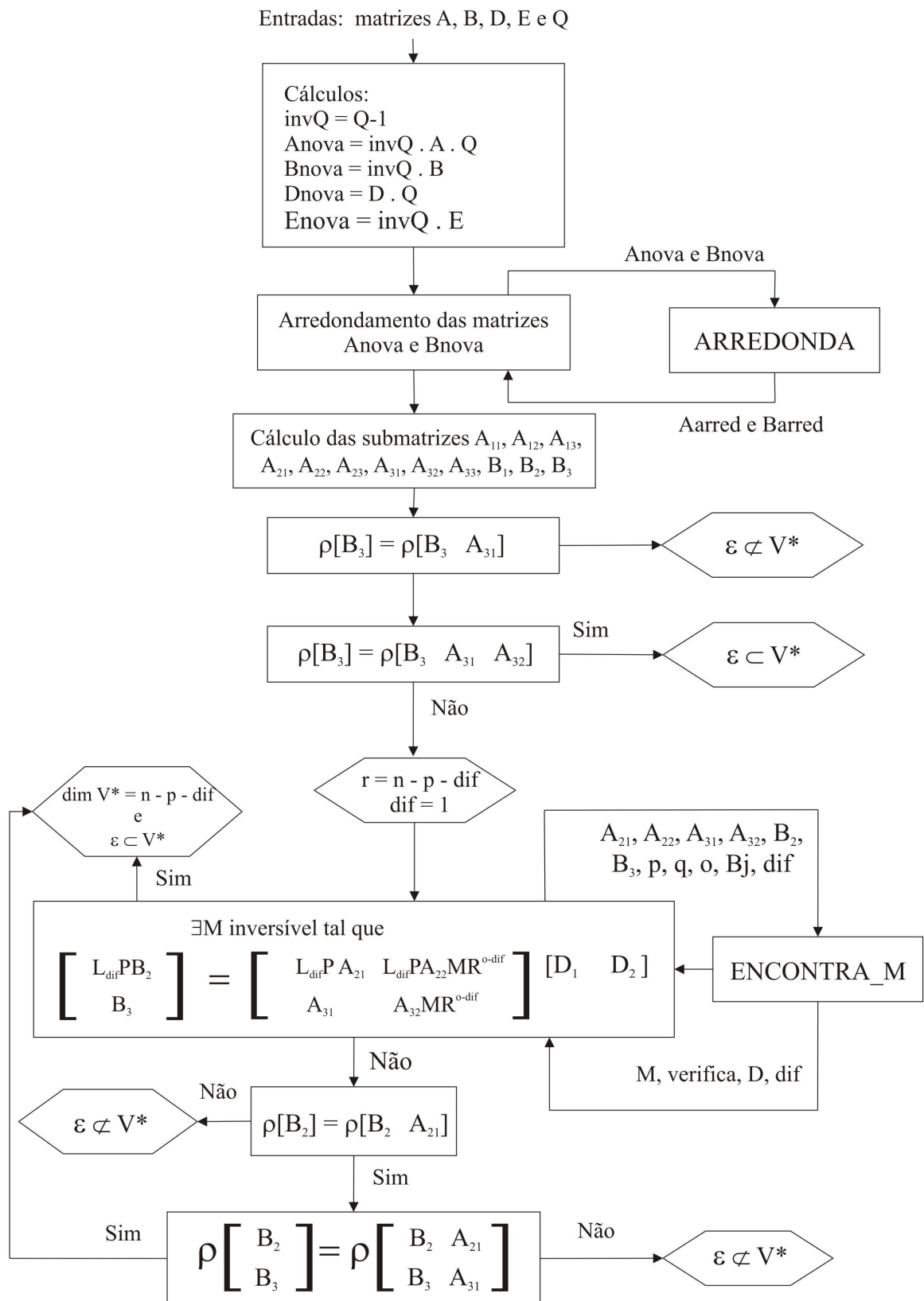


Figura 4.6: Diagrama em Blocos do Programa Algoritmo

4.3.3.1 Verificação da Matriz M

Para verificar se existe ou não uma matriz M , "miolo" da matriz de transformação de bases Q , que é a resposta à seguinte equação, quando já constatado que o valor de ν é menor que $n - p$:

$$\left[\begin{array}{c|c} L_i P A_{21} & L_i P A_{22} M R^j \\ \hline A_{31} & A_{32} M R^j \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} L_i P B_2 \\ B_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \hat{D}_1 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \quad (4.24)$$

Para isso, foi criada esta função cujo objetivo é fornecer uma possível matriz M , tendo como entradas as submatrizes A_{21} , A_{22} , A_{31} , A_{32} , B_2 e B_3 , as dimensões p , q , $o = \bar{n}$ e m (neste caso representada pela variável B_j) e a variável dif , que num primeiro momento é igual a um . De posse de todas as entradas e da equação 4.24 repetida acima, podemos decompô-la em quatro outras equações, que são:

$$A_{31} = B_3 \hat{D}_1 \quad (4.25)$$

$$L_i P A_{21} = L_i P B_2 \hat{D}_1 \quad (4.26)$$

$$A_{32} M R^j = B_3 \hat{D}_2 \quad (4.27)$$

$$L_i P A_{22} M R^j = L_i P B_2 \hat{D}_2 \quad (4.28)$$

A equação 4.25 certamente possui solução, pois como já visto no programa *algoritmo* $\{A_{31}\} \subset \{B_3\}$. O primeiro passo da função *encontra_M* consiste portanto em encontrar o conjunto de todas as soluções desta equação. Esta é solucionada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_{31} &= B_3 \hat{D}_1 \\ A_{31} - B_3 \hat{D}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{31} & -B_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} I_q \\ \hat{D}_1 \end{array} \right]$$

Seja ρ_3 o posto da matriz $\left[\begin{array}{c|c} A_{31} & -B_3 \end{array} \right]$, então v_3 é a nulidade dessa matriz. Seja então $Ker_3(q + m \times v_3)$ uma base para o espaço nulo de $\left[\begin{array}{c|c} A_{31} & -B_3 \end{array} \right]$. Deve-se então encontrar a matriz de parâmetros livres $F_3(v_3 \times q)$ tal que:

$$Ker_3 F_3 = \left[\begin{array}{c} I_q \\ \beta_3 \end{array} \right] \quad (4.30)$$

onde, partindo do pressuposto que $\{A_{31}\} \subset \{B_3\}$, esta matriz deve existir e β_3 é uma solução particular da equação $A_{31} = B_3 \hat{D}_1$. Sendo ρ_{B_3} o posto da submatriz B_3 , a sua nulidade será dada por $v_{B_3} = m - \rho_{B_3}$. Seja então $Ker_{B_3}(m \times v_{B_3})$ uma base para o espaço nulo de B_3 , o conjunto de todas as soluções para a equação 4.25 é dado por:

$$\hat{D}_1 = \beta_3 + Ker_{B_3} F_{B_3} \quad (4.31)$$

onde $F_{B_3}(v_{B_3} \times q)$ é uma matriz com elementos livres. Uma destas soluções também deve satisfazer à equação 4.26, caso contrário o DDP certamente não tem solução. Esta é resolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L_i P A_{21} &= L_i P B_2 \hat{D}_1 \\ L_i P A_{21} &= L_i P B_2 (\beta_3 + Ker_{B_3} F_{B_3}) \\ L_i P (A_{21} - B_2 \beta_3 - B_2 Ker_{B_3} F_{B_3}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

O algoritmo proposto para esta função abordará apenas os casos em que o posto da submatriz B_3 é igual a m , ou seja, caso as colunas de B_3 sejam linearmente independentes. Neste caso o espaço nulo de B_3 é zero e a equação 4.32 acima se simplifica da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} L_i P (A_{21} - B_2 \beta_3) &= 0 \\ (A_{21} - B_2 \beta_3)^T L_i P^T &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sejam $Ker_{21}(o \times v_{21})$ uma base para o espaço nulo da matriz formada por $(A_{21} - B_2 \beta_3)^T$ e $F_{21}(v_{21} \times i)$ uma matriz formada por parâmetros livres, temos:

$$L_i P^T = Ker_{21} F_{21} \quad (4.34)$$

ou seja

$$L_i P = F_{21}^T Ker_{21}^T \quad (4.35)$$

Para solucionar a equação 4.27 (ou seja, $A_{32} M R^j = B_3 \hat{D}_2$), devemos considerar primeiramente o lema a seguir:

Lema 4.3.2. *Dadas as matrizes $A(p \times o)$ e $B(p \times m)$, existe $X(o \times k)$, $k = 1, 2, \dots, o$ tal que $\{AX\} \subset \{B\}$ se e somente se $k \leq \alpha$, onde α é a nulidade de $\left[A \mid -B \right]$.*

Demonstração: Seja $K_0(o + m \times \alpha)$ uma base para o espaço nulo de $\left[A \mid -B \right]$. Sendo $F(\alpha \times k)$ uma matriz qualquer, temos que $\left[A \mid -B \right] K_0 F = 0$ se e somente se $k \leq \alpha$ (K_0 é a matriz mais "larga" tal que $\left[A \mid -B \right] K_0 = 0$). Sendo X as o primeiras linhas de $K_0 F$ e D as suas m últimas linhas temos:

$$\left[A \mid -B \right] \left[\begin{array}{c} X \\ D \end{array} \right] = 0$$

$$AX - BD = 0 \tag{4.36}$$

$$AX = BD$$

$$\{AX\} \subset \{B\}$$

Desta forma, a pergunta a ser solucionada para o algoritmo consiste em: dadas as submatrizes $A_{32}(p \times o)$ e $B_3(p \times m)$, existe uma matriz $M(o \times o)$ inversível tal que $\{A_{32}MR^{o-i}\} \subset \{B_3\}$, para $i = 1, 2, \dots, o$?

Lembramos que MR^{o-i} é uma matriz $(o \times o - i)$ composta pelas $o - i$ primeiras colunas de M . Se $o - i \leq \alpha = \text{nulidade} \left[A_{32} \mid B_3 \right]$ então, pelo lema anterior, existe $X(o \times o - i)$ tal que $\{A_{32}X\} \subset \{B_3\}$ e é fácil encontrar $\bar{X}(o \times i)$ tal que $M = \left[X \mid \bar{X} \right]$ é inversível. Se $o - i > \alpha$ não existe X e conseqüentemente não existe M .

Os passos do algoritmo referentes à questão $\{A_{32}MR^{o-i}\} \subset \{B_3\}$ podem ser detalhados no diagrama em blocos exibido na figura 4.7 abaixo.

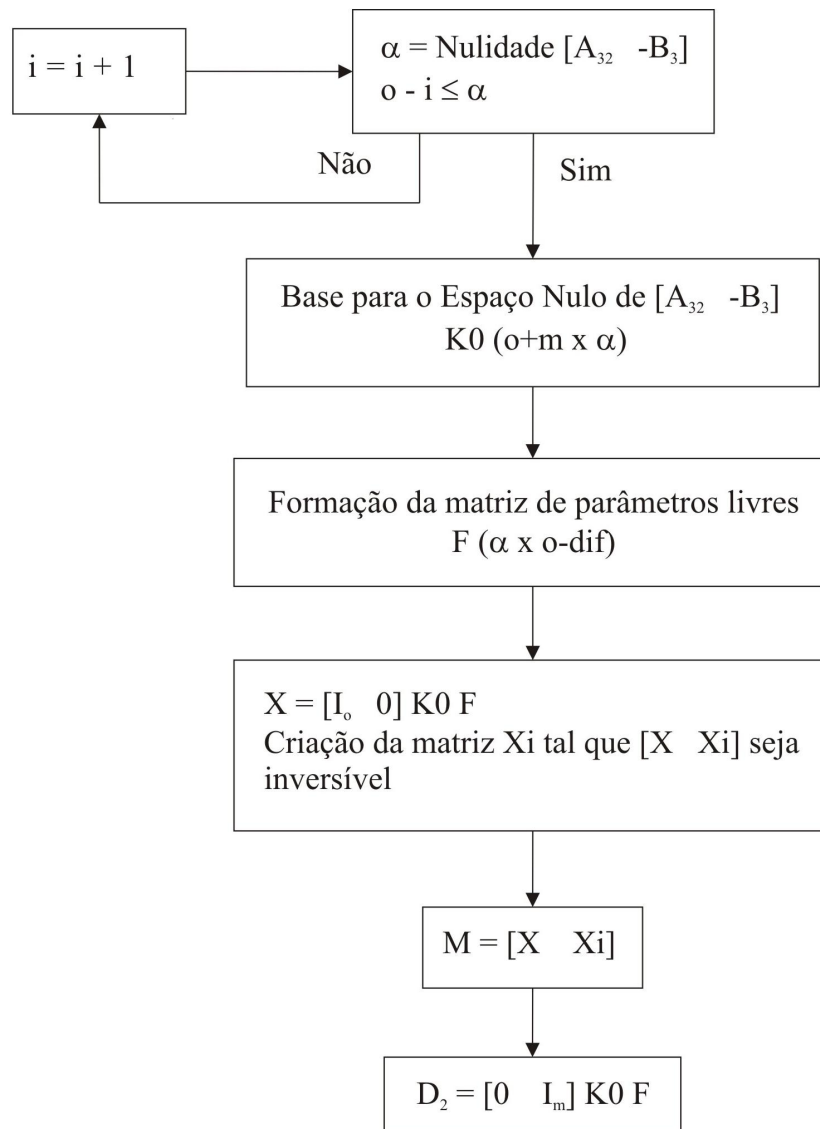


Figura 4.7: Algoritmo para a Resolução da Terceira Equação de Verificação da Existência da Matriz M

Desta maneira encontramos a família de todas as submatrizes \hat{D}_2 e todos os X tais que:

$$A_{32}X = B_3\hat{D}_2 \quad (4.37)$$

Pode-se resolver a equação 4.28, necessária para encontrar a matriz M , repetida neste ponto por conveniência.

$$L_iPA_{22}MR^j = L_iPB_2\hat{D}_2 \quad (4.38)$$

da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} L_iPA_{22}MR^j &= L_iPB_2\hat{D}_2 \\ L_iP(A_{22}MR^j - PB_2\hat{D}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Fazendo agora as seguintes considerações:

$$\begin{aligned} L_iP &= F_{21}^T Ker_{21}^T \\ B_2\hat{D}_2 &= B_2 \left[0 \mid I_m \right] K_0F = \left[0 \mid B_2 \right] K_0F \\ A_{22}MR^j &= A_{22} \left[I_o \mid 0 \right] K_0F = \left[A_{22} \mid 0 \right] K_0F \end{aligned} \quad (4.40)$$

temos a resolução desta equação, que é exibida a seguir.

$$\begin{aligned} L_iP \left(\left[A_{22} \mid 0 \right] - \left[0 \mid B_2 \right] \right) K_0F &= 0 \\ L_iP \left(\left[A_{22} \mid -B_2 \right] \right) K_0F &= 0 \\ F_{21}^T Ker_{21}^T \left[A_{22} \mid -B_2 \right] K_0F &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Temos uma matriz $Ker_{21}^T \left[A_{22} \mid -B_2 \right] K_0$ com parâmetros fixos e duas matrizes F_{21}^T e F com parâmetros livres que devem satisfazer 4.41. Uma maneira empírica de resolver isto é: arbitrar um valor para F_{21}^T e encontrar F no espaço nulo de $F_{21}^T Ker_{21}^T \left[A_{22} \mid -B_2 \right] K_0$ ou então podemos arbitrar F e encontrar F_{21}^T tal que 4.41 se verifica. É importante notar que se F (ou F_{21}^T) não puder ser encontrado pelo procedimento acima, nada se pode concluir sobre o DDP.

Entradas: submatrizes $A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}, B_2$ e B_3, p, q, o, B_j, dif

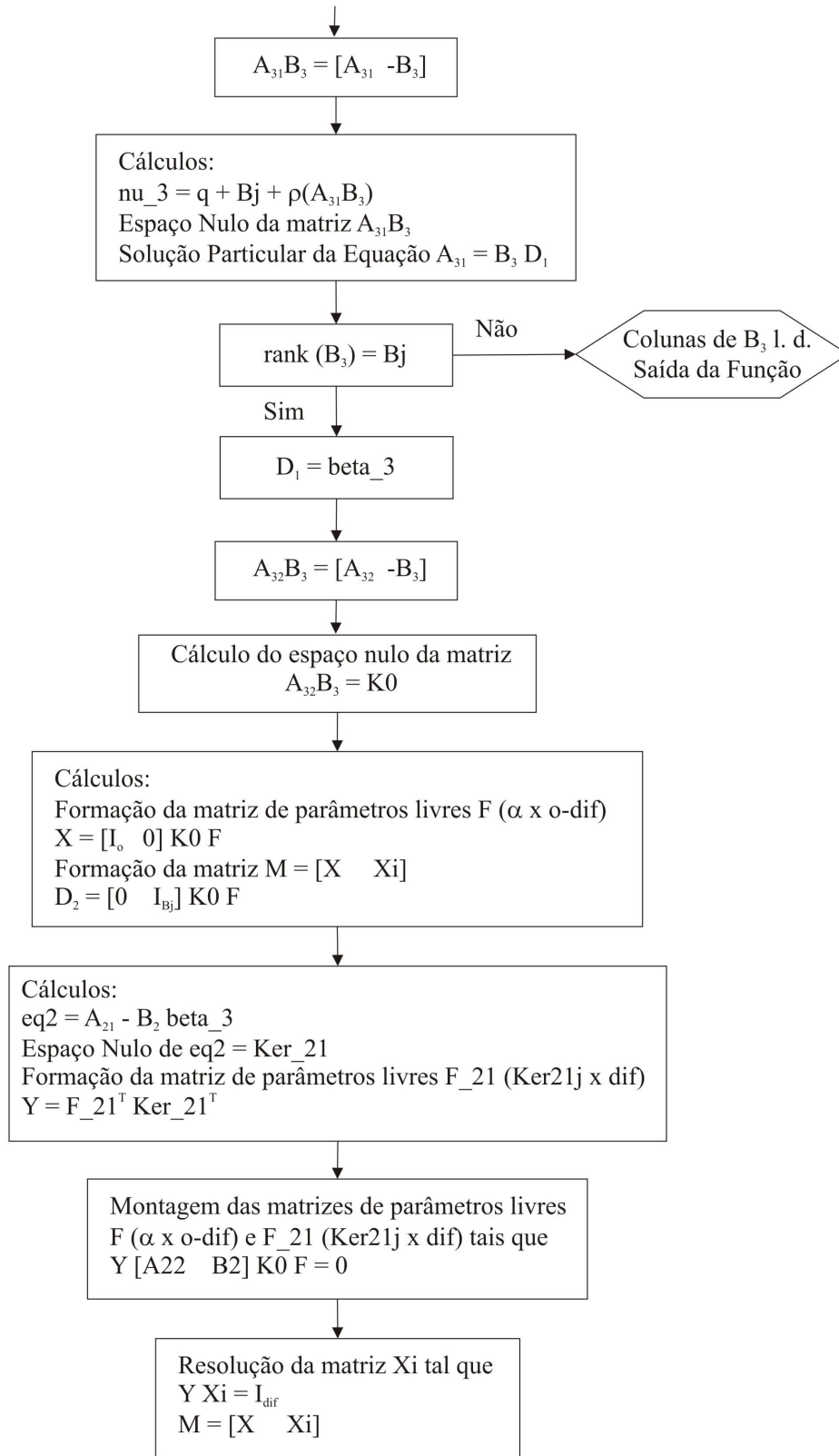


Figura 4.8: Diagrama em Blocos das Funções *encontra_M* e *calcul*

4.3.3.2 Função de Arredondamento de Matrizes

A subrotina *arredonda* é acionada logo após as matrizes A e B terem passado pela mudança na base de estados para evitar possíveis inconsistências no cálculo do posto nas diversas verificações existentes ao longo da implementação do algoritmo matricial. Seu trabalho é apenas arredondar elemento a elemento de uma dada matriz pelo número de casas decimais desejada.

Os diagramas em blocos do programa *algoritmo* e das funções *arredonda* e *encontra_M* são vistos nas figuras 4.9 a seguir.

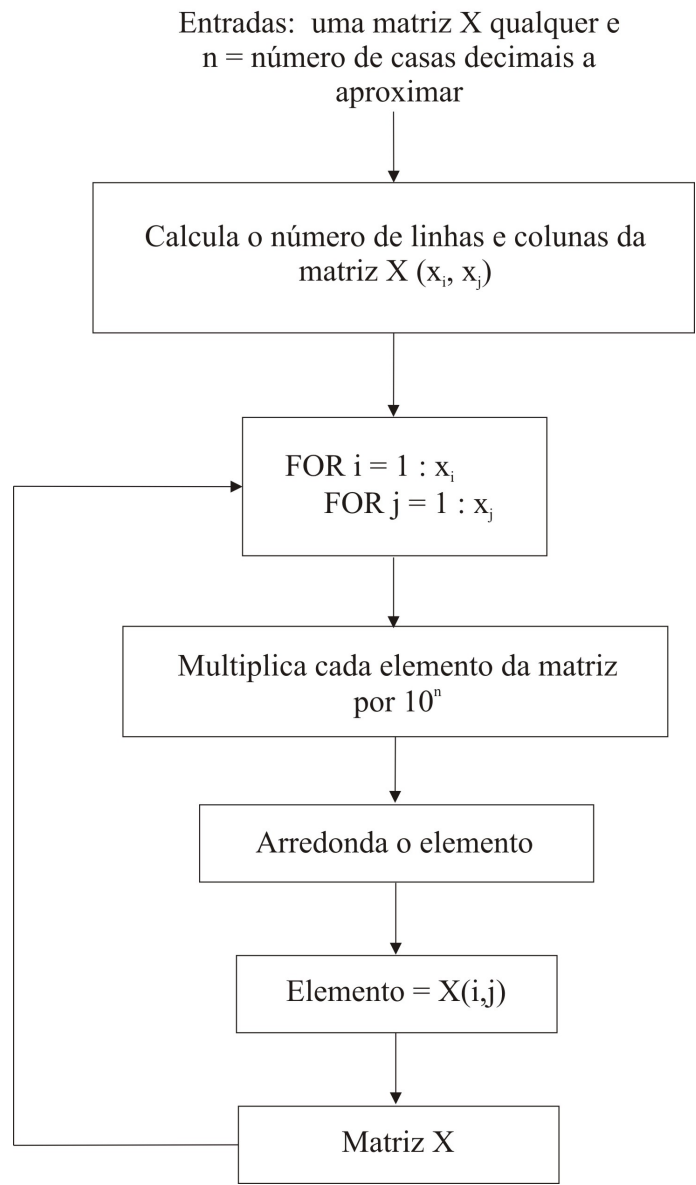


Figura 4.9: Diagrama em Blocos da Subrotina Arredonda

Capítulo 5

Algoritmo matricial DDPKM

5.1 Introdução

Da mesma forma que para o DDP, os estudos relativos ao enfoque estrutural, que oferecem condições necessárias e suficientes à existência de soluções bastando conhecer as matrizes que descrevem o sistema, possibilitam, além de uma facilidade maior nos cálculos, criar um algoritmo, uma busca ordenada, que responda com eficiência se o Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída tem ou não solução. Este capítulo trata de estudos preliminares, que podem ser objeto de estudo em trabalhos futuros, realizados com o objetivo de estabelecer este algoritmo. Faremos agora uma breve revisão de conceitos já mencionados no capítulo 3. Seja o sistema linear e invariante no tempo descrito por:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ed(t) & , \quad x(t_0) = 0 \\ y(t) = Cx(t) & , \quad t \geq 0 \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das entradas de controle, $d(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor das entradas dos distúrbios, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor das saídas a serem medidas e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas a serem controladas. Supõe-se que as matrizes B e E tenham posto de coluna completo e as matrizes C e D tenham posto de linha completo.

O teorema que será mostrado a seguir assegura que as perturbações serão rejeitadas para um dado sistema se e somente se for possível colocar o seu diagrama

em blocos sob a forma da figura 5.1, repetida por conveniência a seguir.

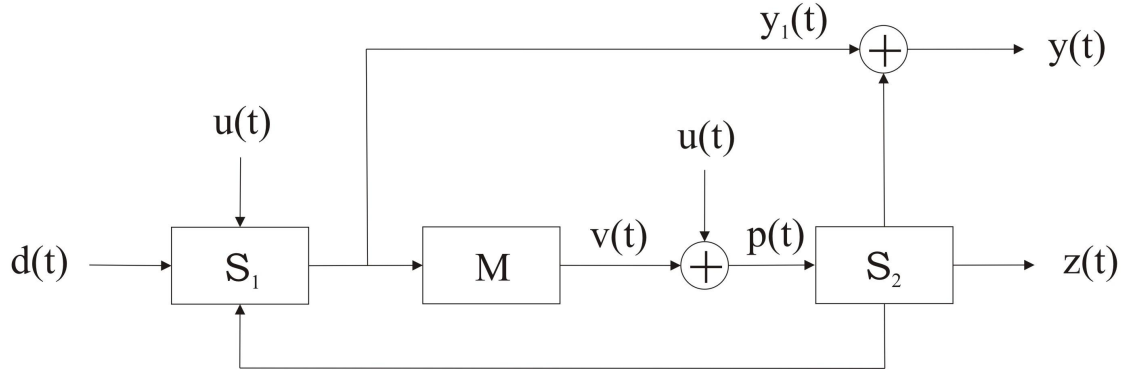


Figura 5.1: Representação dos Subsistemas envolvidos na solução do DDPKM

Teorema 5.1.1. [41] *O Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída (DDPKM) tem solução para um sistema descrito pelas matrizes $\langle A, B, C, D, E \rangle$ se e somente se existe um número real ν , $q \leq \nu \leq \nu - p$, uma matriz real $\hat{M} (m \times p)$ e uma base do espaço de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E} \rangle$ do sistema satisfazem:*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array} \right] \hat{x}(t) + \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{array} \right] u(t) + \left[\begin{array}{c} \hat{E}_1 \\ 0 \end{array} \right] d(t) \\ \hat{y}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde \hat{A}_{11} é $\nu \times \nu$, \hat{A}_{12} é $\nu \times (n - \nu)$ etc, e $\hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{M} \hat{C}_1$.

A submatriz \hat{A}_{21} , a porção inferior esquerda da matriz \hat{A} , é formada pelas $n - \nu$ últimas linhas e ν primeiras colunas e é um múltiplo de \hat{B}_2 , que é a porção inferior da matriz \hat{B} formada por suas $n - \nu$ linhas e também de \hat{C}_1 , a porção da matriz \hat{C} formada por suas ν primeiras colunas. A porção inferior de \hat{E} e as primeiras colunas da matriz \hat{D} devem ser, assim como no DDP, nulas.

Então, para resolver o DDPKM deve-se encontrar uma matriz Q inversível, tal que $Q^{-1}AQ$, $Q^{-1}B$, CQ , DQ e $Q^{-1}E$ apresentem as propriedades explicitadas na equação 5.2. O resultado abaixo é uma generalização do resultado correspondente ao DDP. Como não há demonstração será considerada uma conjectura.

Conjectura 5.1.1 O Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída é solúvel para um sistema descrito pelas matrizes $\langle A, B, C, D, E \rangle$ se e somente se existir um número real ν , $q \leq \nu \leq n - p$ e uma base do espaço de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E} \rangle$ satisfazem o teorema 4.1.1 e ainda:

$$\hat{D}_2 = \left[0 \mid I_p \right] \quad \text{e} \quad \hat{E}_1 = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Podemos afirmar desta forma que as matrizes \hat{D} e \hat{E} podem ser consideradas iguais respectivamente a:

$$\hat{D} = \left[0 \mid I_p \right] \quad \text{e} \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Nota-se que esta propriedade apresentada pela conjectura acima é a mesma utilizada para caracterizar as matrizes D e E usadas no estudo da solubilidade do DDP para um dado sistema. De maneira análoga, a matriz Q deve satisfazer condições impostas pela conjectura 5.1.1 e pela equação 5.4. Mas se na base originalmente usada para descrever o sistema as matrizes D e E já apresentarem a forma de 5.4, é de se esperar que Q tenha uma estrutura bastante especial e camarada. Consideremos então que o sistema $\langle A, B, C, D, E \rangle$ se apresente, na base original, por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} x(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} x(t), \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde a submatriz A_{11} tem dimensão $(q \times q)$, $A_{22}(n - q - p \times n - q - p)$, $A_{33}(p \times p)$, $B_1(q \times m)$ e assim por diante.

A conjectura 5.1.1 sustenta esta hipótese: se não for possível encontrar uma base inicial em que as matrizes do sistema gozem das propriedades de 5.5, o DDPKM não tem solução. É de fácil constatação que a matriz Q , da mesma forma que nos

estudos relativos ao DDP, possui a forma:

$$Q = \begin{bmatrix} I_q & Q_{12} & Q_{13} \\ 0 & M & Q_{23} \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Pode-se considerar as submatrizes Q_{12} , Q_{13} e Q_{23} nulas, fazendo com que a matriz Q resulte em:

$$Q = \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Para encontrar a matriz Q basta encontrar uma matriz $M(n - q - p \times n - q - p)$ não singular, ou seja, de maneira análoga ao DDP, ao utilizar as equações 5.5 podemos trabalhar apenas com o "miolo", sem perder as informações próprias do DDPKM. O problema pode então ser formulado da seguinte maneira: dado um sistema $\langle A, B, C, D, E \rangle$ na forma de 5.5, deseja-se saber se o DDPKM tem ou não solução sem calcular \mathcal{V}^* . Para isso ocorrer, devemos verificar se é possível pôr o sistema na forma 5.2 usando matrizes de transformação Q como em 5.7. Se for impossível achar tais matrizes, o DDPKM se torna impossível de ser solucionado. O objetivo então é elaborar um algoritmo, ou seja, uma busca ordenada, um conjunto de regras que seguidas diversas vezes concluem sobre a existência ou não de uma solução, de maneira semelhante ao realizado para estabelecer o algoritmo para o DDP. Serão apresentados mais três resultados que também são conseqüências do conjectura 5.1.1 e das equações 5.5.

Conjectura 5.1.2 Se existir uma matriz $C_1(l \times n - p)$ e uma matriz de ganho estático $K(m \times l)$ tais que $\begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = B_3 K C_1$ então o Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída tem solução à equação 5.5 usando $u = -K \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$. Teremos ainda $\mathcal{V}^* = \ker D$.

Conjectura 5.1.3 Se não existir uma matriz $C_1(l \times q)$ ou não existir uma matriz de ganho estático $K(m \times l)$ tais que $A_{31} = B_3 K C_1$ então o Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída não tem solução, ou seja, $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{V}^*$.

Conjectura 5.1.4 Se existir uma matriz $C_1(l \times q)$ e uma matriz de ganho estático $K(m \times l)$ tais que:

$$\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} KC_1$$

então o Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída tem solução, usando $u = -K \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$.

Estes resultados foram obtidos fazendo uma mera inspeção das equações 5.5. Isso permite uma verificação imediata e praticamente imediata da solubilidade ou não do DDPKM de uma maneira bem próxima da utilizada para estudar o DDP. O exemplo abaixo ilustra o procedimento.

Exemplo 5.1.1. *Seja o sistema descrito a seguir.*

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 6 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & -1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \quad B = \left[\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad E = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$D = \left[\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Por meio de simples inspeção das matrizes, observa-se que o DDPKM não tem solução pois $B_3KC_1 = 0 \neq A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$. Porém, ao mudarmos a matriz B para:

$$B = \left[\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right]$$

Teremos que $\left[\begin{array}{cc} A_{31} & A_{32} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] = B_3 K C_1$ para esta matriz C .
Pela conjectura 5.1.2 o DDP tem solução com $K = \left[\begin{array}{ccc} -1 & -2 & 2 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{array} \right]$, onde k_{21} , k_{22} e k_{23} podem assumir qualquer valor.

Estas conjecturas descritas acima tem aplicação restrita. Desejamos um algoritmo geral que, para qualquer sistema na forma 3.2.1 realize, de maneira análoga ao realizado para o DDP, uma busca ordenada, um conjunto seqüencial de tarefas que leva a decisões finais sobre a existência de soluções para o DDPKM. Para entender melhor o formalismo final do algoritmo apresentamos agora um exemplo numérico detalhado, onde foi inserida uma matriz C em um sistema que conhecidamente o Problema de Rejeição de Distúrbios já tenha solução, com o objetivo de medir a influência da matriz C . Para isso, foi repetido o exemplo 4.1.2 [16].

Exemplo 5.1.2. *Seja o sistema descrito abaixo:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] x(t) + \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] u(t) + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] d(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] x(t) \\ z(t) &= \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] x(t) \end{aligned}$$

As transformações de equivalência que preservam a particular forma das matrizes D e E são dadas por:

$$Q = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad e \quad Q^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

onde M e P são matrizes (3×3) não-singulares tais que $PM = MP = I_3$.

Estamos interessados em partes específicas das matrizes $\hat{A} = Q^{-1}AQ$, $\hat{B} = Q^{-1}B$ e $\hat{C} = CQ$: a porção inferior esquerda de \hat{A} , \hat{A}_{21} ($n - \nu \times \nu$), a porção

inferior de \hat{B} , \hat{B}_2 ($n - \nu \times m$) e a porção esquerda de \hat{C} , \hat{C}_1 ($l \times \nu$). Deseja-se encontrar um valor de ν tal que:

$$\hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{K} \hat{C}_1 \text{ para alguma matriz } \hat{K} \quad (5.8)$$

Como já fora visto no teorema 3.2.1, $q \leq \nu \leq n - p$ comecemos por:

1. *Primeiro Passo:* $\nu = n - p = 4$.

$$\hat{A}_{21}(4) = L_1 Q^{-1} A Q R^4 ; \hat{B}_2(4) = L_1 Q^{-1} B ; \hat{C}_1(4) = C Q R^4$$

onde os operadores L_i e R^j são definidos da seguinte forma:

$L_i X \Rightarrow$ matriz composta pelas i últimas linhas de X .

$Y R^j \Rightarrow$ matriz composta pelas j primeiras colunas de Y .

$$\hat{A}_{21}(4) = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \end{array} \right] A \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & M \\ 0 & 0 \end{array} \right] ; \hat{B}_2(4) = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \end{array} \right] B ;$$

$$\hat{C}_1(4) = C \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & M \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

Desenvolvendo:

$$\hat{A}_{21}(4) = \left[\begin{array}{cccc} 0 & m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{array} \right] ; \hat{B}_2(4) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] ;$$

$$\hat{C}_1(4) = \left[\begin{array}{cccc} 0 & m_{11} + m_{21} & m_{12} + m_{22} & m_{13} + m_{23} \\ 0 & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{array} \right]$$

onde os m_{ij} são os elementos da segunda linha da matriz M .

Para a condição 5.8 ser verdadeira devemos ter $m_{21} = m_{22} = m_{23} = 0$, violando assim a hipótese da não-singularidade de M . Portanto, não é possível chegar à forma 5.2 com a dimensão $\nu = 4$.

2. Segundo Passo: $\nu = n - p - 1 = 3$

$$\hat{A}_{21}(3) = L_2 Q^{-1} A Q R^3 ; \hat{B}_2(3) = L_2 Q^{-1} B ; \hat{C}_1(3) = C Q R^3$$

$$\hat{A}_{21}(3) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & L_1 P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] A \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & MR^2 \\ 0 & 0 \end{array} \right] ; \hat{B}_2(3) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & L_1 P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] B ;$$

$$\hat{C}_1(3) = C \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & MR^2 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

Antes de continuar, percebe-se que:

$$\hat{A}_{21}(3) = \left[\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \mathcal{X} & \mathcal{X} \\ 0 & m_{21} & m_{22} \end{array} \right] ; \hat{B}_2(3) = \left[\begin{array}{cc} \mathcal{X} & \mathcal{X} \\ 0 & 0 \end{array} \right] ;$$

$$\hat{C}_1(3) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & m_{11} + m_{21} & m_{12} + m_{22} \\ 0 & m_{31} & m_{32} \end{array} \right]$$

onde \mathcal{X} pode assumir qualquer valor. Uma condição necessária para que 4.9 se verifique e o processo continue é $m_{21} = m_{22} = 0$. Esta restrição, juntamente com o fato de que $L_1 P M R^2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right]$ nos conduz à conclusão de que $L_1 P = \left[\begin{array}{ccc} 0 & p_{32} & 0 \end{array} \right]$, o que permite-nos escrever:

$$\hat{A}_{21}(3) = p_{32} \left[\begin{array}{ccc} 0 & m_{11} + m_{31} & m_{12} + m_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] ; \hat{B}_2(3) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] ;$$

$$\hat{C}_1(3) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & m_{31} & m_{32} \end{array} \right]$$

Desta forma, para que a condição 4.9 ser verificada, devemos ter $m_{11} + m_{31} = m_{12} + m_{32} = 0$ ou $p_{32} = 0$. Qualquer destas possibilidades afeta a não-singularidade de M e portanto não há novamente como chegar à forma 5.2 com $\nu = 3$.

3. *Terceiro Passo: $\nu = n - p - 2 = 2$*

$$\hat{A}_{21}(2) = L_3 Q^{-1} A Q R^2 ; \hat{B}_2(2) = L_3 Q^{-1} B ; \hat{C}_1(2) = C Q R^2$$

$$\hat{A}_{21}(2) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & L_2 P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] A \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & MR^1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] ; \hat{B}_2(2) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & L_2 P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] B ;$$

$$\hat{C}_1(2) = C \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & MR^1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ao usarmos ainda a restrição $m_{21} = m_{22} = 0$ é fácil notar que:

$$\hat{A}_{21}(2) = \left[\begin{array}{cc} \mathcal{X} & \mathcal{X} \\ 0 & p_{32}(m_{11} + m_{31}) \\ 0 & 0 \end{array} \right] ; \hat{B}_2(2) = \left[\begin{array}{cc} \mathcal{X} & \mathcal{X} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] ; \hat{C}_1(2) = \left[\begin{array}{cc} 0 & m_{11} \\ 0 & m_{31} \end{array} \right]$$

onde novamente \mathcal{X} pode assumir qualquer valor. Após algumas verificações, observa-se que $p_{32} = 0$, o que inviabilizaria a existência da matriz M .

4. *Quarto Passo: $\nu = n - p - 3 = 1$*

$$\hat{A}_{21}(1) = L_4 Q^{-1} A Q R^1 ; \hat{B}_2(1) = L_4 Q^{-1} B ; \hat{C}_1(1) = C Q R^1$$

$$\hat{A}_{21}(1) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & L_3 P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] A \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] ; \hat{B}_2(1) = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & L_3 P & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] B ; \hat{C}_1(1) = C \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

Após algumas verificações temos:

$$\hat{A}_{21}(1) = \left[\begin{array}{c} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \\ 0 \end{array} \right] ; \hat{B}_2(1) = \left[\begin{array}{cc} \mathcal{X} & \mathcal{X} \\ 0 & 0 \end{array} \right] ; \hat{C}_1(1) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

Observa-se então que $p_{11} = p_{21} = p_{31} = 0$. Desta forma, é fácil verificar que não existe uma matriz M tal que ponha o sistema na forma 5.2. Portanto o DDPKM não tem solução.

Este exemplo mostra que a matriz C influencia nos cálculos para diagnosticar sobre a solubilidade ou não do DDPKM. Ele também sugere uma maneira suave de

encontrar um procedimento sistemático. Um aspecto a mais do exemplo é que a equação 5.6 oferece-nos a possibilidade de trabalhar também na dimensão reduzida $n - q - p$. Este exemplo incentiva a mostrar um algoritmo inicial, preliminar, que será apresentado daqui em diante.

5.2 Algoritmo Matricial

Nesta seção vamos propor, sem demonstrações, um método para verificar se o DDPKM possui ou não solução. Seja o sistema com a seguinte descrição:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} x(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Mais uma vez, se aplicarmos a transformação caracterizada em 5.7 as matrizes D e E não se alterarão, mas as matrizes A , B e C passarão a ser iguais a:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}M & A_{13} \\ PA_{21} & PA_{22}M & PA_{23} \\ A_{31} & A_{32}M & A_{33} \end{bmatrix} & \hat{B} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ PB_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2M & C_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Onde $P = M^{-1}$ e as matrizes apresentam as mesmas dimensões das matrizes do sistema descrito em 5.5. A partir de agora, por ter usado um raciocínio análogo ao do estudo do DDP, poderemos considerar os mesmos passos usados ali. Recapitulando os passos e considerando $\nu = \nu_0 = n - p = \dim \ker D$ temos:

$$A_{21}(v_0) = \left[A_{31} \mid A_{32}M \right] \quad ; \quad B_2(v_0) = B_3 \quad ; \quad C_1(v_0) = \left[C_{11} \mid C_{12}M \right] \quad (5.11)$$

A matriz M é não-singular, portanto se verifica que se e somente se $\left[A_{31} \quad A_{32} \right] = B_3K \left[C_{11} \quad C_{12} \right]$ o DDPKM tem solução, o que sustenta a conjectura 5.1.2.

Já para um passo genérico $\nu = \nu_i < n - p$:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{21}(v_i) &= \begin{bmatrix} L_i P A_{21} & L_i P A_{22} M R^j \\ A_{31} & A_{32} M R^j \end{bmatrix} ; \quad \hat{B}_2(v_i) = \begin{bmatrix} L_i P B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} ; \\ \hat{C}_1(v_1) &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} M R^j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Onde $L_i P$ são as i últimas linhas da matriz P e $M R^j$ são as j primeiras colunas da matriz M .

Da mesma forma que para o DDP, submatriz A_{31} está sempre inserido em $\hat{A}_{21}(v_i)$ e a submatriz C_{11} está sempre dentro de $\hat{C}_1(v_1)$. Assim, para o DDPKM ter solução a condição necessária é existir uma matriz K tal que $A_{31} = B_3 K C_1$. Está provada a conjectura 5.1.3. Já a conjectura 5.1.4 se sustenta pelo simples fato de P ser inversível.

Estes três resultados, pela importância e acessibilidade das informações, já seriam suficientes para dar às equações 5.5 a categoria de formas especialmente talhadas para estudar o DDPKM. As verificações são simples, através novamente de uma inspeção das matrizes que descrevem o sistema, adicionando as perguntas já existentes para a verificação de solubilidade do DDP outras perguntas.

De posse destas conclusões, vamos fazer uma recapitulação em passos:

1. Primeiro passo: $\nu = n - p$

Pergunta: $\{A_{31}\} \subset \{B_3\}$ e $\{A_{31}\} \subset \{C_{11}\}$?

Se a resposta for negativa para uma destas condições, então o DDPKM não tem solução e o algoritmo deve ser parado pois $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{V}^*$. Caso seja positiva, podemos passar a próxima pergunta, que é:

Pergunta: $\{A_{31} \ A_{32}\} \subset \{B_3\}$ e $\{A_{31} \ A_{32}\} \subset \{C_{11} \ C_{12}\}$?

Se a resposta for positiva para ambas as condições, devemos parar o algoritmo pois o DDPKM certamente tem solução e $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^* = \ker D$. Se a resposta for negativa, passemos ao próximo passo.

2. Segundo passo: $\nu = n - p - 1$

Pergunta: Sendo $\bar{n} = n - q - p$, existe M ($\bar{n} \times \bar{n}$) tal que $\{A_{32}MR^{\bar{n}-1}\} \subset \{B_3\}$ e $\{A_{32}MR^{\bar{n}-1}\} \subset \{C_{11}MR^{\bar{n}-1}\}$?

Se a resposta for não, a única certeza é que $\dim \mathcal{V}^* < n - p - 1$. Passemos então a outras etapas do algoritmo. Mas se for positiva a resposta, é possível que o DDPKM tenha solução. Para garantir a solubilidade do problema, devemos fazer outras perguntas, tais como:

Pergunta: Sendo a matriz P a inversa de M , $\{L_1PA_{21}\} \subset \{L_1PB_2\}$ e $\{L_1PA_{21}\} \subset \{C_1\}$?

Caso a resposta seja negativa a uma destas questões, devemos parar o algoritmo, pois é certo que $\mathcal{E} \not\subset \mathcal{V}^*$ e portanto o DDPKM não tem solução. Mas se a resposta for positiva para ambas as questões, façamos então outra pergunta para saber se o DDPKM com certeza tem solução.

Pergunta: $\left\{ \begin{array}{cc} L_1PA_{21} & L_1PA_{22}MR^{\bar{n}-1} \\ A_{31} & A_{32}MR^{\bar{n}-1} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} L_1PB_2 \\ B_3 \end{array} \right\}$ e $\left\{ \begin{array}{cc} L_1PA_{21} & L_1PA_{22}MR^{\bar{n}-1} \\ A_{31} & A_{32}MR^{\bar{n}-1} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{cc} C_{11} & C_{12}MR^{\bar{n}-1} \end{array} \right\}$?

Neste caso, a resposta sendo positiva às duas questões faz com que $\dim \mathcal{V}^* = n - q - p - 1$ e com isso pode-se dizer que o Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída seguramente tem solução. Caso contrário, deve-se partir a outras iterações.

Cabe mais uma vez lembrar de que estes são estudos preliminares. Estudos futuros podem, com mais detalhes, confirmar estas afirmações. Segue na figura 5.2 o diagrama em blocos do algoritmo que define a solubilidade do DDPKM.

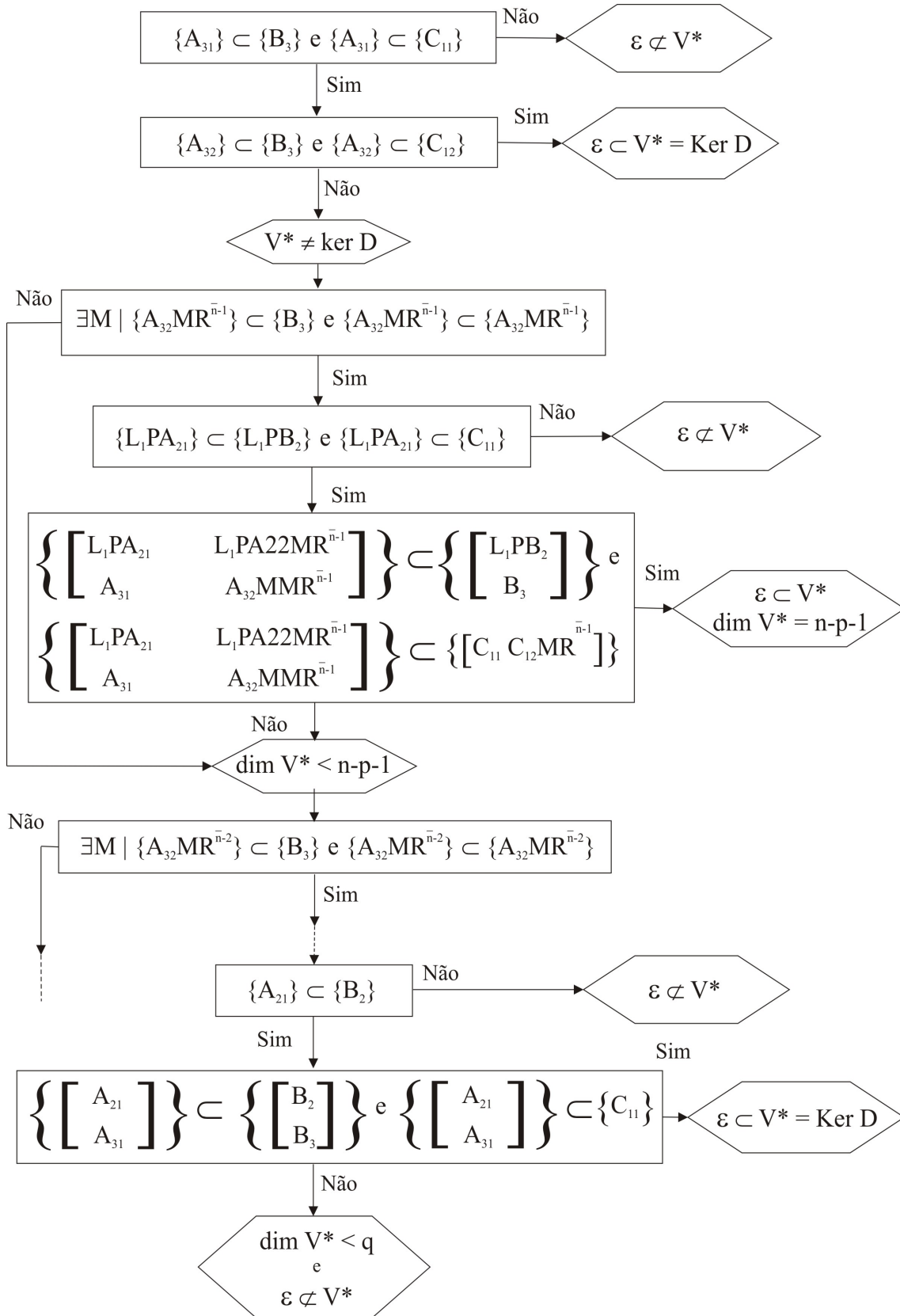


Figura 5.2: Fluxograma do algoritmo que determina se o DDPKM tem ou não solução

Capítulo 6

Conclusões

O principal objetivo deste trabalho, que era a implementação computacional de um algoritmo matricial proposto para verificar se o Problema de Rejeição de Distúrbios tem ou não solução foi conseguido com sucesso. Basicamente, as etapas desta implementação consistem em três etapas: medição das dimensões de todas as matrizes que descrevem o sistema, verificação se as matrizes D e E já possuem a estrutura camarada descrita em 4.4, ou seja, se $D = \begin{bmatrix} 0 & Ip \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} Iq & 0 \end{bmatrix}^T$ e caso contrário, realizar uma transformação de bases $x = Q\hat{x}$ de forma a colocá-las nesta forma, e por último a etapa de inspeções ordenadas de porções das matrizes A e B propostas pelo algoritmo propriamente dito. Estas verificações de subespaços, na implementação computacional, é obtida com a verificação de postos da seguinte forma:

$$\rho(B) = \rho \left(\begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} \right) \quad (6.1)$$

onde ρ designa o posto da matriz. Também foi acrescentada uma função que calcula uma possível matriz M , "miolo" da matriz de transformação de bases Q , que soluciona o Problema de Rejeição de Distúrbios. Esta matriz é a resposta para a seguinte equação, quando já observado que a dimensão ν é menor que $n - p$:

$$\left[\begin{array}{c|c} L_i P A_{21} & L_i P A_{22} M R^j \\ \hline A_{31} & A_{32} M R^j \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} L_i P B_2 \\ \hline B_3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \hat{D}_1 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \quad (6.2)$$

A equação acima é decomposta em outras quatro a saber:

$$\begin{aligned}
 A_{31} &= B_3 \hat{D}_1 \\
 L_i P A_{21} &= L_i P B_2 \hat{D}_1 \\
 A_{32} M R^j &= B_3 \hat{D}_2 \\
 L_i P A_{22} M R^j &= L_i P B_2 \hat{D}_2
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Foram apresentados no capítulo 5 estudos preliminares, ainda passíveis de verificação em estudos posteriores, sobre uma extensão dos algoritmos de verificação de solubilidade do Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) ao Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação Estática de Saída (DDPKM). Além da transformação de bases de forma a pôr o sistema em uma forma propícia e de inspeções de partes interessantes das matrizes A e B , também se faz necessário observar se subespaços gerados por porções da matriz A estão contidos em porções da matriz C .

Referências Bibliográficas

- [1] BANDEIRA, J. C., *Estudos Adicionais Sobre a Equação $G(s)X(s) = H(s)$* . Tese de M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1992.
- [2] BASILE, G., MARRO, G., *Controlled and conditioned invariants in linear system theory*, New Jersey, Prentice Hall, 1992.
- [3] BASILE, G., MARRO, G., *Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory*, Journal of Optimization Theory and Applications, v.3, pp. 306-315, 1968.
- [4] BASILE, G., MARRO, G., *Self-bounded controlled invariant subspaces: a straightforward approach to constrained controllability* *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*, Journal of Optimization Theory and Applications, v.38, pp. 71-81, 1982.
- [5] BHATTACHARYYA, S. P., DEL NERO GOMES, A. C., HOWZE, J., *The Structure of Robust Disturbance Rejection Control*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.28, n.9, pp. 874-881, setembro 1983.
- [6] BHATTACHARYYA, S. P., *Frequency Domain Conditions for Disturbance Rejection*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.25, n.6, pp. 1211-1213, dezembro 1980.
- [7] BONILLA ESTRADA, M., MALABRE, M., *Structural conditions for disturbance decoupling with stability using proportional and derivative control laws*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.46, n.1, pp. 160-165, janeiro 2001.

- [8] BONILLA ESTRADA, M., MALABRE, M., ACOSTA, P. S., "*Disturbance Decoupling with Stability using PID Control Laws*". In: Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control Lake Buena Vista, dezembro 1994.
- [9] CAMART, J. F., MALABRE, M., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., *Fixed poles of simultaneous disturbance rejection and decoupling: a geometric approach*, Automatica, v.37, n.2, pp. 297-302, fevereiro 2001.
- [10] CHANG, M., RHODES, I. B., *Disturbance localization in linear systems with simultaneous decoupling, pole assignment, or stabilization*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.20, n.4, pp. 518-523, agosto 1975.
- [11] CHEN, B. M., *Solvability conditions for disturbance decoupling problems with static measurement feedback*, International Journal of Control, v.68, n.1, pp. 51-60, 1997.
- [12] CHEN, B. M., MAREELS, I. M. Y., ZHENG, Y. *et al.*, *Solutions to disturbance decoupling problem with constant measurement feedback for linear systems*, Automatica, v.36, pp. 1717-1724, novembro 2000.
- [13] CHEN, C. T., *Linear System Theory and Design*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [14] CHU, D., MALABRE, M., *Numerically reliable design for proporcional and derivative state-feedback decoupling controller*, Automatica, v.38, n.12, pp. 2121-2125, dezembro 2002.
- [15] COMMAULT, C., DION, J. -M., PEREZ, A., *Disturbance rejection for structured systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.36, n.7, pp. 884-887, julho 1991.
- [16] DEL NERO GOMES, A. C., *Caracterização Estrutural de Sistemas de Controle Invariantes*. Tese de D.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1980.
- [17] DEL NERO GOMES, A. C., BHATTACHARYYA, S. P., "*Frequency domain structure for disturbance rejection*". In: Proceedings of the 8th IFAC World Congress, Kyoto, Japan, agosto 1981.

- [18] DEL NERO GOMES, A. C., NORONHA, T. M., "*Estudos adicionais sobre a equação $G(s)X(s) = H(s)$* ". In: 8^o CBA-UFFA, Belém, PA, 1990.
- [19] DEL-MURO-CUELLAR, B., MALABRE, M., *Fixed poles of disturbance rejection by dynamic measurement feedback: a geometric approach*, Automatica, v.37, n.2, pp. 231-238, fevereiro 2001.
- [20] DEL-MURO-CUELLAR, B., MALABRE, M., "*On the fixed poles for the disturbance rejection by dynamic output feedback*". In: Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control San Diego, California, USA, dezembro 1997.
- [21] DÓREA, C. E. T., MILANI, B. E. A, *Disturbance decoupling in a class of linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.42, n.10, pp. 1427-1431, outubro 1997.
- [22] DÓREA, C. E. T., MILANI, B. E. A, *A computational method for optimal L-Q regulation with simultaneous disturbance decoupling*, Automatica, v.31, n.1, pp. 155-160, janeiro 1995.
- [23] DÓREA, C. E. T., MILANI, B. E. A, *Rejeição de perturbação por realimentação estática de saída em sistemas lineares*, Controle & Automação, v.14, n.1, pp. 1-8, março 2003.
- [24] FORNEY JR., G. D., *Minimal basis of rational vector spaces with applications to multivariable systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, v.13, n.3, pp. 493-520, 1975.
- [25] GRIZZLE, J. W., ISIDORI, A., *Block non interacting control with stability via static feedback*, Mathematics of Control, Signals and Systems, v.2, pp. 315-341, 1989.
- [26] HAMANO, F., FURUTA, K., *Localization of disturbances and output decomposition in decentralized linear multivariable systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.22, n.4, pp. 551-562, 1975.
- [27] HAUTUS, M. L., *(A,B)-invariant and stabilizability subspaces, a frequency domain description*, Automatica, v.16, n.6, pp. 703-707, novembro 1980.

- [28] ICART, S., LAFAY, J. F., MALABRE, M., *A unified study of the fixed modes of systems decoupled via regular static state feedback*, Joint Conference on New Trends in System Theory, Gênes-Talie, pp. 425-432, Boston, Birkhauser, 1990.
- [29] IMAI, H., AKASHI, H., *Disturbance localization and pole shifting by dynamic compensator*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.26, n.1, pp. 226-235, fevereiro 1981.
- [30] KAILATH, T., *Linear Systems*, New Jersey, Prentice Hall, 1980.
- [31] KOUMBOULIS, F. N., TZIERAKIS, K. G., *Meeting transfer function requirement via static measurement output feedback*, Journal of the Franklin Institute - Engineering and Applied Mathematics, v.335B, pp. 661-677, 1998.
- [32] KOUSSIOURIS, T. G., *A frequency domain approach to the block decoupling problem ii: Pole assignment while block decoupling a minimal system by state feedback and a constant non singular input transformation and the observability of the block decoupled system*, International Journal of Control, v.32, pp. 443-464, 1980.
- [33] KOUSSIOURIS, T. G., TZIERAKIS, K. G., *Frequency-domain conditions for disturbance rejection and decoupling with stability or pole placement*, Automatica, v.32, n.2, pp. 229-234, fevereiro 1986.
- [34] KOUSSIOURIS, T., TZIERAKIS, K., *Rejection of measurable disturbances with decoupling or pole placement*. In: Proceedings of the third European control conference (ECC'95), pp. 2257-2262, Rome, Italy, 1995.
- [35] LINNEMAN, A. , *"A condensed form for disturbance decoupling with simultaneous pole placement using state feedback"*. In: Proceedings 10th IFAC World Congress, pp. 92-97, Munich, 1987.
- [36] LOPEZLENA ESTRADA, R., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., *Fixed poles and Disturbance Rejecting feedback Synthesis*, Automatica, v.35, n.10, pp. 1737-1740, outubro 1999.

- [37] MALABRE, M., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., *Simultaneous Disturbance Rejection and Decoupling with Stability: A Structural Approach*. In: Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control Lake Buena Vista, dezembro 1994.
- [38] MALABRE, M., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., *Fixed poles for disturbance rejection*, IFAC Conference on systems, structure and control. Nantes. 1995.
- [39] MALABRE, M., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., DEL-MURO-CUELLAR, B., *On the Fixed Poles for Disturbance Rejection*, Automatica, v.33, n.6, pp. 1209-1211, junho 1997.
- [40] MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., MALABRE, M., *Simultaneous disturbance rejection and regular row by row decoupling with stability: A geometric approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.40, n.2, pp. 362-369, fevereiro 1995.
- [41] MATOS, S. R., *Rejeição de Distúrbios em Sistemas Lineares por Realimentação Estática de Saída*, Tese de M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, março 2004.
- [42] MITA, T., *On necessary and sufficient conditions for disturbance localization in single input-single output systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.21, n.4, pp. 606-607, agosto 1976.
- [43] MORSE, A. S., *Minimal solutions to transfer matrix equations*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.21, pp. 131-133, 1974.
- [44] OHMS, D. Y., HOWZE, J. W., BHATTACHARYYA, S. P., *Structural synthesis of multivariable controllers*, Automatica, v.21, n.1, pp. 35-55, janeiro 1985.
- [45] PARASKEVOPOULOS, P. N., KOUMBOULIS, F. N., TZIERAKIS, K. G., *Disturbance rejection on left-invertible systems*, Automatica, v.28, n.2, pp. 427-430, março 1992.
- [46] PERNEBO, L., *An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems. Part I and Part II*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.26, n.1, pp. 171-194, fevereiro 1981.

- [47] SCHUMACHER, J. M. , *Compensator synthesis using (C,A,B)-pairs*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.25, n.6, pp. 1133-1138, dezembro 1980.
- [48] SILVA, P. S. P., LEITE, V. M. P., *Static reachability and static decoupling of linear time-invariant systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.36, n.7, pp. 880-884, julho 1991.
- [49] SILVERMAN, L. M., *Inversion of multivariable linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.24, n.3, pp. 270-276, junho 1969.
- [50] VARDULAKIS, A. I. G., *Proper rational matrix diophantine equations and the exact model matching problem*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.29, n.5, pp. 475-477, maio 1984.
- [51] VARDULAKIS, A. I. G., LIMEBEER D. N. J., KARCANIAS, N., *Structure and Smith-MacMillan form of a rational matrix at infinity*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.35, n.4, pp. 701-725, agosto 1982.
- [52] VARDULAKIS, A. I. G., KARCANIAS, N., *On the stable exact model matching problem*, Systems & Control Letters, v.5, n.4, pp. 237-242, fevereiro 1985.
- [53] VARDULAKIS, A. I. G., KARCANIAS, N., *Structure, Smith-MacMillan form and coprime MFDs of a rational matrix inside a region $\mathcal{P} = \Omega \cup \{\infty\}$* , International Journal of Control, v.38, n.5, pp. 927-957, 1983.
- [54] WANG, S. H., DAVISON, E. J., *A minimization algorithm for the design of linear multivariable systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.18, n.3, pp. 220-225, junho 1973.
- [55] WILLEMS, J. C., COMMAULT, C., *Disturbance decoupling by measurement feedback with stability or pole-placement*, SIAM Journal on Control and Optimization, v.19, pp. 490-504, 1981.
- [56] WOLOVICH, W. A. , *Linear Multivariable Systems*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [57] WOLOVICH, W. A., FALB, P. L., *Invariants and canonical forms under dynamics compensation*, SIAM Journal on Control and Optimization, v.14, n.6, pp. 996-1008, novembro 1976.

- [58] WONHAM, W. M., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, New York, Springer-Verlag, 1979.
- [59] WONHAM, W. M., MORSE, A. S., *Decoupling and pole assignment in linear multivariable system: A geometric approach*, SIAM Journal on Control and Optimization, v.8, n.1, pp. 1-18, 1970.

Apêndice A

Anexos

Os anexos consistem nos programas e as subrotinas utilizadas na implementação dos algoritmos de resolução do DDP.

A.1 Programa Início

```
%Primeira parte da implantação do algoritmo de verificação da solução do
%Problema de Rejeição de Distúrbios.
%
%Rotina inicial para teste de condição camarada do sistema.
%Com a entrada dos valores das matrizes do sistema A,B,D,E pode-se
%ou encaminhar o algoritmo à etapa de transformação linear ou, se
%ou D=[0 Ir] e E=[Iq 0]' este programa já encaminha logo todas as
%matrizes para a etapa de verificação da solubilidade do Problema
%de Rejeição de Distúrbios.
%
clear,clc
A = input ('Digite o valor da matriz A \n\nA=')
B = input ('Digite o valor da matriz B \n\nB=')
D = input ('Digite o valor da matriz D \n\nD=')
E = input ('Digite o valor da matriz E \n\nE=')
%Entradas para o DDP: matrizes A,B,D,E.
```

```

[Ai,Aj] = size(A);           %Determina o número de linhas e colunas
[Bi,Bj] = size(B);         %das matrizes A,B,D,E.
[Di,Dj] = size(D);
[Ei,Ej] = size(E);
Dcam=isequal(D,[zeros(Di,Dj-Di) eye(Di)])
%Testa se D já é apropriada, ou seja, D=[0 Ip]
p=Di;
n=Ai;                       %Determina os valores das dimensões n, q, p.
q=Ej;
v=n-p;
o=n-q-p;
Ecam=isequal(E,[eye(Ej);zeros(Ei-Ej,Ej)])
%Testa se E já é apropriada, ou seja, se E=[Iq 0]'
if Dcam==1 & Ecam==1
    Q=eye(n)
    algoritmo
else
    transformacao
end
%Para o caso do sistema já ter uma condição camarada, a matriz de
%transformação Q se iguala a matriz identidade para não alterar os
%valores das matrizes do sistema.

```

A.2 Programa Transformação

```

%Esta é a segunda parte da implantação do algoritmo de verificação da
%solução do Problema de Rejeição de Distúrbios.
%
%Rotina encarregada de compor a matriz de transformação linear inicial Q.
%De posse das matrizes D e E, este programa faz o primeiro teste das
%condições de solubilidade do problema proposto e depois compõe a
%matriz Q.

```



```

%
if D*E==zeros(p,q)
%Primeira comparação se D*E=0.
W = [randn((n-p),n) ; D]
%Formação da matriz W tal que W = [X D]'
Q = inv(W) %Q = inv(W)
D = D*Q
E1 = E(1:(n-p),:)
%Formação da submatriz E1.
Q((n-p+1):n,:) = [zeros(p,(n-p)) eye(p)]
%Últimas p linhas da matriz procurada Q.
Y = randn(r,o)
%Y deve ser qualquer e tal que a submatriz Q11 seja inversível.
Q(1:(n-p),1:(n-p)) = [E1 Y]
%Matriz procurada Q já formada com a inserção de Q11.
algoritmo
else
display('Impossível encontrar a matriz de transformação linear Q porque
o produto entre as matrizes D e E não é igual a zero.')
display('O DDPKM não tem solução.')
end

```

A.3 Programa Algoritmo

```

%Este passo é representa a implementação propriamente dita do
%algoritmo proposto pela tese de Afonso Celso del Nero, para a
%verificação da solubilidade do Problema de Rejeição de Distúrbios.

```

```

%
```

```

%A partir de todas as matrizes envolvidas no sistema e da matriz
%de transformação linear inicial Q, vinda do passo anterior, estas
%matrizes do sistema são transformadas e assim são feitas as primeiras
%verificações de solubilidade.

```

```

%
Q1=Q;
invQ=inv(Q)
Anova=invQ*A*Q;
Bnova=invQ*B;
Dnova=D*Q
Enova=invQ*E
%Temos todas as matrizes do sistema já transformadas.
Aarred=arredonda(Anova,4)
Barred=arredonda(Bnova,4)
%Arredondo os valores das matrizes A e B obtidas após a
%transformação linear inicial para no máximo 4 casas decimais.
%Encontrar as submatrizes A11, A12, A13, A21, A22,
%A23, A31, A32, A33, B1, B2, B3.
A11=Aarred(1:q,1:q);
A12=Aarred(1:q,(q+1):(n-p));
A13=Aarred(1:q,(n-p+1):n);
A21=Aarred((q+1):(n-p),1:q);
A22=Aarred((q+1):(n-p),(q+1):(n-p));
A23=Aarred((q+1):(n-p),(n-p+1):n);
A31=Aarred((n-p+1):n,1:q);
A32=Aarred((n-p+1):n,(q+1):(n-p));
A33=Aarred((n-p+1):n,(n-p+1):n);
B1=Barred(1:q,1:Bj);
B2=Barred((q+1):(Bi-p),1:Bj);
B3=Barred((Bi-p+1):Bi,1:Bj);
B3A31=[B3 A31]
if (rank(B3)==rank(B3A31))
%Primeiro passo do algoritmo => {A31}c{B3}?
B3A31A32=[B3 A31 A32]
if (rank(B3)==rank(B3A31A32))
%Segundo passo do algoritmo. => {A31 : A32}c{B3}?

```

```

dif=0;
disp('Imagem de E está contido no subespaço  $V^* = \ker D$ .')
disp('O espaço imagem da matriz B3 está contido na imagem da matriz
formada pelas submatrizes [A31 A32].')
disp('O DDP tem solução.')
else
disp('V* diferente de Ker C.')
r=n-p-1
dif=1;
[M,MR,A32MR]=encontra_M(A21,A22,A31,A32,B2,B3,p,q,o,dif,Bj)
%Verifica se existe a matriz M tal que  $\{A32MR\}c\{B3\}$ 
if verifica == 0
    invQ=inv(Q)
    Anova=invQ*A*Q
    Bnova=invQ*B
    Dnova=D*Q
    Enova=invQ*E
else
    B2A21=[B2 A21]
    if (rank(B2)==rank(B2A21))           %{A21}c{B2}?
        A21A31=[A21 ; A31]
        B2B3=[B2 ; B3]
        B2B3A21A31=[B2B3 A21A31]
        if (rank(B2B3)==rank(B2B3A21A31))  % {[A21 ; A31]}c{[B2 ; B3]}
            if det(M)==0
                Q=Q1
            else
                Q((q+1):(n-p),(q+1):(n-p))=M
            end
            invQ=inv(Q)
            Anova=invQ*A*Q
            Bnova=invQ*B

```

```

Dnova=D*Q
Enova=invQ*E
%Temos todas as matrizes do sistema já transformadas.
disp('Imagem de E está contido no subespaço V* e é igual a E
pois {[A21 ; A31]}c{[B2 ; B3]}.')
disp('Dimensão do subespaço V*=q')
disp('O DDP tem solução.')
r=q;
else
disp('Dimensão do subespaço V*<q.')
disp('Imagem de E não está contido no subespaço V*.')
disp('O DDP não tem solução.')
end
else
disp('Imagem de E não está contido no subespaço V*.')
disp('O DDP não tem solução.')
end
end
end
else
disp('Im E não está contido no subespaço V*. O DDP não tem solução.')
end

```

Apêndice B

Funções

B.1 Função arredonda

```
function M = arredonda(x,n)
%Esta função é dedicada exclusivamente para o arredondamento de todos os
%valores de uma dada matriz x pelo número de casas decimais n. É útil no
%algoritmo de verificação de solubilidade do Problema de Rejeição de
%Distúrbios para prevenir erros residuais que possam prejudicar a
%verificação de subespaços.
[xi,xj] = size(x);
for i=1:xi
    for j=1:xj
        xmul=x(i,j)*10^n;
        %Multiplica cada elemento da matriz por 10 elevado a n.
        xarred=round(xmul);
        %Arredonda para o inteiro mais próximo.
        X(i,j)=xarred/10^n;
        %Divide o resultado por 10 elevado a n.
    end
end
M=X;
```

B.2 Função encontra_M

```
function [M,verifica,D] = encontra_M(A21,A22,A31,A32,B2,B3,p,q,o,dif,Bj)
%Esta função se destina a encontrar uma possível matriz M que solucione
%o Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP).
%As entradas para esta sub-rotina são as submatrizes da matriz A do sistema
%A21, A22, A31 e A32, as submatrizes da matriz B do sistema B2 e B3, as
%dimensões o (igual a n-q-p), p, q e Bj (que é o número de colunas da
%matriz B) e o parâmetro dif, equivalente ao índice i.
%
A31B3 = [A31 -B3]
rho_3 = rank(A31B3)
nu_3 = q + Bj + rho_3
K3 = null(A31B3)
beta_3 = B3\A31 %Equação A31 = B3*beta_A31.
rho_B3 = rank(B3)
if rho_B3 == Bj
    D1 = beta_3
else
    KerB3 = null(B3) %Espaço nulo da submatriz B3.
    nu_B3 = Bj - rho_B3
    FB3 = sym(zeros(m,nu_B3)) %Monto uma matriz FB3 com variáveis quaisquer.
    for lin = 1:m
        for col = 1:nu_B3
            FB3(lin, col) = sym(sprintf('fb3_%d_%d', lin, col))
        end
    end
    D1 = beta_3 + (KerB3*FB3)
    disp('As colunas da submatriz B3 não são linearmente independentes.
    Não será objeto de verificação desta função.')
    return
end
```

```

%
%Resolvida a primeira equação.
%
A32B3 = [A32 -B3]
K0 = null(A32B3)
%Espaço nulo da matriz formada por [A32 -B3].
[K0i,alfa_K0] = size(K0)
%Medindo o número de colunas da base para o espaço nulo da matriz [A32 -B3].
[M,X,Xi,D2,F,Y,YXi] = calcul(A21,A22,B2,beta_3,K0,alfa_K0,o,dif,Bj)
M = [X Xi]
%Verifica se M = [X Xi] é inversível.
verifica = 0
if det(M) == 0
%Caso M não seja inversível nova iteração é realizada.
    dif = dif + 1
    if (o - dif) == 0
        verifica = 1
        return
    end
    [M,X,Xi,D2,F,Y,YXi] = calcul(A21,A22,B2,beta_3,K0,alfa_K0,o,dif,Bj)
end
D = [D1 D2]

```

B.3 Função calcul

```
%Esta é uma função auxiliar à função encontra_M. Ela responde às equações
%3 e 4 do algoritmo proposto para encontrar a matriz M, "miolo" da matriz
%de transformação de bases procurada Q.
%
function [M,X,Xi,D2,F,Y,YXi] = calcul(A21,A22,B2,beta_3,K0,alfa_K0,o,dif,Bj)
for dif = dif:o
    if (o - dif) == 0
        return
    end
    if (o - dif) <= alfa_K0
        F = sym(zeros(alfa_K0,(o - dif)))
        %Monto uma matriz F com variáveis quaisquer.
        for lin = 1:alfa_K0
            for col = 1:(o - dif)
                F(lin, col) = sym(sprintf('_f_%d_%d_', lin, col))
            end
        end
        X = [eye(o) zeros(o,Bj)]*K0*F
        Xi = sym(zeros(o,dif))
        %Monto uma matriz Xi com variáveis quaisquer.
        for lin = 1:o
            for col = 1:dif
                Xi(lin, col) = sym(sprintf('xi_%d_%d', lin, col))
            end
        end
        M = [X Xi]
        D2 = [zeros(Bj,o) eye(Bj)]*K0*F
        break
    end
end
end
```



```

%
%Montadas as condições que resolvem a terceira equação.
%
eq2 = A21 - (B2*beta_3)           %Supondo rank(B3) = m.
Ker_21 = null(eq2')              %Espaço nulo da matriz eq2 transposta.
[Ker21i,Ker21j] = size(Ker_21)
F_21 = sym(zeros(Ker21j,dif))
%Monto uma matriz F_21 com variáveis quaisquer.
for lin = 1:Ker21j
    for col = 1:dif
        F_21(lin, col) = sym(sprintf('_fy_%d_%d_', lin, col))
    end
end
if size(F_21) == [1,1]
    Y = conj(F_21')*Ker_21'
else
    Y = conj(F_21')*Ker_21'
    %Encontrado o valor com parâmetros livres de Y.
end
%
%Resolvida a segunda equação.
%
disp('Até este passo foram encontradas famílias de soluções.')
eq4 = Y*([A22 -B2])*K0*F
matrzero = zeros(dif,o-dif)
for lin = 1:dif
    for col = 1:(o-dif)
        aux = char(eq4(lin,col))
        scan = textscan(aux, '%s%s%d%d', 'delimiter', '_')
        c = scan{2}
        i = scan{3}
        j = scan{4}
    end
end

```

```

auxi = 0
while size(i)>=[1,1]
    if (strcmp(c(1,1),'fy') == 0)
        if auxi == 1
            F(i(1,1),j(1,1)) = Resp
        else
            F(i(1,1),j(1,1)) = rand
        end
        X = [eye(o) zeros(o,Bj)]*K0*F
    else
        if auxi == 1
            F_21(i(1,1),j(1,1)) = Resp
        else
            F_21(i(1,1),j(1,1)) = rand
        end
        if size(F_21) == [1,1]
            Y = conj(F_21')*Ker_21'
        else
            Y = F_21'*Ker_21'
            %Encontrado o valor com parâmetros livres de Y.
        end
    end
end
eq4 = Y*[A22 -B2]*K0*F
aux = char(eq4(lin,col))
scan = textscan(aux,'%s%s%d%d','delimiter','_')
c = scan{2}
i = scan{3}
j = scan{4}
if size(i)==[0,1]
    auxi = 2
    break
end

```



```

scan = textscan(aux, '%s%d%d', 'delimiter', '_')
i = scan{2}
j = scan{3}
while size(i) >= [2,1]
    Xi(i(2,1),j(2,1)) = rand
    YXi = Y*Xi
    aux = char(YXi(lin,col))
    scan = textscan(aux, '%s%d%d', 'delimiter', '_')
    i = scan{2}
    j = scan{3}
end
Resp = solve(YXi(lin,col) - ident(lin,col),matrzero(lin,col))
%Acha-se o valor da solução.
Xi(i,j) = Resp
YXi = Y*Xi
end
end
Xi = single(Xi)
M = [X Xi]

```