



DIAGNOSE ONLINE DE SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS MODELADOS  
POR REDES DE PETRI ROTULADAS ACÍCLICAS

Pedro Roberto Rodrigues Paiva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Lilian Kawakami Carvalho

Rio de Janeiro  
Março de 2019

DIAGNOSE ONLINE DE SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS MODELADOS  
POR REDES DE PETRI ROTULADAS ACÍCLICAS

Pedro Roberto Rodrigues Paiva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

---

Profa. Lilian Kawakami Carvalho, D.Sc.

---

Prof. João Carlos dos Santos Basilio, Ph.D.

---

Prof. Marcos Vicente de Brito Moreira, D.Sc.

---

Prof. Paulo Eigi Miyagi, Ph.D.

---

Prof. Antônio Eduardo Carrilho da Cunha, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2019

Paiva, Pedro Roberto Rodrigues

Diagnose Online de Sistemas a Eventos Discretos Modelados por Redes de Petri Rotuladas Acíclicas/Pedro Roberto Rodrigues Paiva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XIII, 121 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Lilian Kawakami Carvalho

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 118 – 121.

1. Sistemas a eventos Discretos.
  2. Rede de Petri.
  3. Diagnose de Falha.
  4. Diagnosticabilidade.
- I. Carvalho, Lilian Kawakami . II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Dedico esta, bem como todas as  
minhas conquistas, aos meus  
amados pais, Pedro e Maria, a  
quem agradeço a minha  
existência.*

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus que sempre ilumina os meus caminhos.

Agradeço a minha esposa Soraya, pessoa com que amo partilhar a minha vida. Obrigado pelo carinho, a paciência e por sua capacidade de compreender e me trazer apoio nestes anos de trabalho.

Agradeço as minhas filhas Lahis, Larissa e Stephane, que de forma especial, cada uma a sua maneira, me ajudaram neste trabalho e que amo estarem na minha vida.

Agradeço a professora Lilian pelos seus ensinamentos e paciência na orientação desta tese.

Agradeço ao professor Basílio pela sua contribuição em determinados momentos na execução desta tese.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## DIAGNOSE ONLINE DE SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS MODELADOS POR REDES DE PETRI ROTULADAS ACÍCLICAS

Pedro Roberto Rodrigues Paiva

Março/2019

Orientador: Lilian Kawakami Carvalho

Programa: Engenharia Elétrica

O objetivo desta tese é apresentar um método para a diagnose online de falhas para sistemas a eventos discretos (SED) modelados por redes de Petri rotuladas acíclicas, nas quais, diferentes transições podem ser rotuladas por um mesmo evento. Inicialmente um diagnosticador online é proposto que toma a sua decisão quanto à ocorrência da falha, armazenando a sequência de eventos observados e verificando, após a ocorrência de um evento observável, se dois conjuntos de desigualdades são satisfeitos: um conjunto define o comportamento normal ou livre de falha do sistema enquanto o outro define o comportamento após a falha do sistema. Além disso, considera-se o problema da verificação da diagnosticabilidade no qual conjuntos de desigualdades, quando satisfeitos, permitem decidir se a linguagem gerada por uma rede de Petri é diagnosticável. O método adotado para diagnose online tem a vantagem sobre os métodos encontrados na literatura por depender apenas da verificação do atendimento de um vetor de variáveis aos conjuntos de desigualdades sendo auto-contido dentro do formalismo da rede de Petri. Entretanto, o método proposto está restrito a redes de Petri que não apresentem sequências de falha e normal compartilhando o mesmo número de ocorrências dos eventos observados. Para abranger todas as redes de Petri rotuladas acíclicas é proposto um diagnosticador modificado no qual mais do que dois conjuntos devem ser verificados para definição do comportamento do sistema sendo o número de conjuntos dependente da árvore de alcançabilidade da rede de Petri. Um sistema de manufatura é utilizado para ilustrar os métodos aqui propostos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ONLINE DIAGNOSIS OF DISCRETE EVENTS SYSTEMS MODELED BY  
ACYCLIC LABELED PETRI NETS

Pedro Roberto Rodrigues Paiva

March/2019

Advisor: Lilian Kawakami Carvalho

Department: Electrical Engineering

The objective of this thesis is to present a method for online failure diagnosis for discrete event systems (DES) modeled by acyclic labeled Petri nets in which different transitions can be labeled by the same event. Initially, it is proposed an online diagnoser that makes its decision about the occurrence of the failure by storing sequences of observed events and verifying, after the occurrence of an observable event, if two sets of inequalities are satisfied: the first set accounts for the normal or fault-free behavior whereas the second set accounts for the faulty behavior of the system. In addition, we consider the problem of diagnosability verification in which sets of inequalities, when satisfied, allow to decide if the language generated by a Petri net is diagnosable. The method adopted for online diagnosis has the advantage over those found in the literature since it depends only on the verification if a vector of variables satisfies an inequality system, being self-contained within the formalism the Petri net. However, the proposed method is restricted to Petri nets that do not present failure and normal sequences sharing the same number of occurrences of the observable events. A modified diagnoser is proposed to encompass all the acyclic labeled Petri nets, in which more than two sets must be checked for system behavior definition being the number of sets dependent on the reachability tree of the Petri net. A manufacturing system is used to illustrate the methods proposed here.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão Bibliográfica . . . . .	2
1.2 Motivação e Objetivo do Trabalho . . . . .	5
<b>2 Fundamentos Teóricos</b>	<b>7</b>
2.1 Rede de Petri . . . . .	7
2.1.1 Lugares, Transições e Arcos . . . . .	8
2.1.2 Rede de Petri Marcada . . . . .	9
2.1.3 Disparo da Transição . . . . .	10
2.1.4 Matriz de Incidência e Equação de Estado . . . . .	12
2.1.5 Linguagem Gerada em Redes de Petri . . . . .	16
2.1.6 Redes de Petri Rotuladas . . . . .	16
2.1.7 Árvore de Alcançabilidade . . . . .	17
2.2 Diagnosticabilidade em Rede de Petri . . . . .	18
2.3 Autômatos . . . . .	20
2.3.1 Operações com autômatos . . . . .	22
2.4 Eliminação de variáveis em um sistema de desigualdades . . . . .	24
<b>3 Principais métodos na literatura para diagnose de falhas em SEDs modelados por rede de Petri</b>	<b>28</b>
3.1 Método Fourier-Motzkin para diagnose de falhas em modelos de redes de Petri não rotuladas acíclicas . . . . .	28
3.2 Uma abordagem eficiente para a diagnose online de Sistemas a Eventos Discretos. . . . .	32
3.3 Diagnose de eventos discretos usando redes de Petri rotuladas. . . . .	36
3.4 Detecção de falhas online em Sistemas a Eventos Discretos por redes de Petri e programação linear inteira . . . . .	44
3.5 Comentários finais . . . . .	48

<b>4</b>	<b>Diagnose online em rede de Petri rotulada acíclica</b>	<b>50</b>
4.1	Diagnose Online - proposta inicial . . . . .	50
4.1.1	Identificação do comportamento livre de falha e com falha . . . . .	50
4.1.2	Redução dos conjuntos de desigualdades $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ . . . . .	54
4.1.3	Diagnosticador Online . . . . .	57
4.2	Diagnose Online - proposta atual . . . . .	68
4.2.1	Verificação se uma sequência de disparos de transições pode alcançar uma marcação terminal sem a ocorrência de uma falha	73
4.2.2	Verificação se uma sequência de disparos de transições pode alcançar uma marcação terminal com a ocorrência de uma falha	79
4.2.3	Redução dos conjuntos de desigualdades $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z$ , $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^z$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^d$ .	85
4.2.4	Diagnosticador modificado . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Diagnosticabilidade em rede de Petri rotulada acíclica</b>	<b>94</b>
<b>6</b>	<b>Utilização do Método a um Sistema de Manufatura</b>	<b>106</b>
<b>7</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>116</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>118</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica de uma rede de Petri . . . . .	8
2.2	Arco ponderado . . . . .	9
2.3	Entradas e saídas dos nós de uma rede de Petri . . . . .	9
2.4	Rede de Petri marcada . . . . .	10
2.5	Disparo de uma transição . . . . .	11
2.6	Matriz de incidencia de uma rede de Petri . . . . .	13
2.7	Sequencia de disparos de transições em uma rede de Petri . . . . .	14
2.8	Marcação terminal em uma rede de Petri . . . . .	15
2.9	Rede rotulada . . . . .	16
2.10	(a) rede de Petri (b) árvore de alcançabilidade (c) marcações . . . . .	18
2.11	Rede de Petri rotulada acíclica $(\mathcal{N}, M_0)$ . . . . .	20
2.12	Diagrama de transição de estado de um autômato determinístico $G$ . . . . .	22
3.1	Rede de Petri Acíclica $(\mathcal{N}, M_0)$ . . . . .	30
3.2	Modelo de rede de Petri . . . . .	36
3.3	Sub-rede $\mathcal{N}_{uo} \prec_{T_{uo}} \mathcal{N}$ da rede de Petri da figura 3.2 . . . . .	36
3.4	Modelo de rede de Petri . . . . .	41
3.5	BRG da rede de Petri da figura 3.4 . . . . .	43
3.6	Modelo de rede de Petri . . . . .	48
4.1	Rede de Petri rotulada acíclica $(\mathcal{N}, M_0)$ . . . . .	51
4.2	Evolução e diagnose da rede de Petri do exemplo da figura 4.1 para um comportamento com falha . . . . .	62
4.3	Evolução e diagnose da rede de Petri do exemplo da figura 4.1 para um comportamento livre de falha . . . . .	63
4.4	Rede de Petri rotulada acíclica $(\mathcal{N}, M_0)$ . . . . .	64
4.5	Rede de Petri rotulada acíclica $(\mathcal{N}, M_0)$ . . . . .	67
4.6	Rede de Petri rotulada acíclica $(\mathcal{N}, M_0)$ . . . . .	71
4.7	Árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	72
4.8	Autômatos $G_I$ e $G_F$ determinados através da árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	76

4.9	Autômatos $G_N$ e $G_{nn}$ determinados através da árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	77
4.10	Autômatos $G_{nn}^1$ e $G_{nn}^2$ determinados através da árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	78
4.11	Autômatos $G_{nf}^1$ a $G_{nf}^4$ determinados através da árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	82
5.1	Rede de Petri rotulada acíclica $(\mathcal{N}, M_0)$ . . . . .	97
5.2	Rede de Petri com 2 transições de falhas . . . . .	100
6.1	Sistema de Manufatura . . . . .	106
6.2	Processo do sistema de manufatura . . . . .	107
6.3	Modelo de rede de Petri do sistema de manufatura da fig 6.1 . . . . .	108
6.4	Modelo de rede de Petri do sistema de manufatura do produto A . . . . .	110
6.5	Modelo de rede de Petri do sistema de manufatura do produto B . . . . .	114

# Lista de Tabelas

3.1	Conjuntos de desigualdades $\mathbb{E} \cup \{c\}$ e $\mathbb{E} \cup \{c'\}$ do exemplo da figura 3.1 . . . . .	31
3.2	Conjuntos de desigualdades $R$ e $R'$ do exemplo da figura 3.1 . . . . .	32
3.3	Marcações do BRG da figura 3.5 . . . . .	44
3.4	Vetores-e do BRG da figura 3.5 . . . . .	44
3.5	Principais métodos para diagnose de falhas em redes de Petri . . . . .	49
4.1	Conjuntos $\mathcal{S}$ , $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ do exemplo da figura 4.1 . . . . .	53
4.2	Conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$ do exemplo da figura 4.1 . . . . .	57
4.3	Conjunto de desigualdades $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ do exemplo da figura 4.1 . . . . .	57
4.4	Diagnose do exemplo da Figure 4.1 . . . . .	61
4.5	Conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$ do exemplo da figura 4.4 . . . . .	65
4.6	Conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ do exemplo da figura 4.4 . . . . .	66
4.7	Conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$ do exemplo da figura 4.5 . . . . .	68
4.8	Conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ do exemplo da figura 4.5 . . . . .	68
4.9	Marcações da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	73
4.10	Conjuntos $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	87
4.11	Desigualdades referentes as variáveis $y_a$ , $y_b$ , $y_d$ e $y_e$ associadas aos eventos observados $a$ , $b$ , $d$ e $e$ da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	88
4.12	Conjuntos $SF_1$ e $SF_2$ da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	88
4.13	Conjuntos $AF_1$ a $AF_4$ da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	88
4.14	Conjuntos $PF_1$ a $PF_4$ da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	89
4.15	Diagnose da rede de Petri da figura 4.6 . . . . .	93
5.1	Conjunto de desigualdades $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ do exemplo da figura 5.1 . . . . .	97
5.2	Negativa das desigualdades do conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ do exemplo da figura 5.1 . . . . .	97
5.3	Desigualdades $m \models \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ , $m \models \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ e $m' \models \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ . . . . .	98
5.4	Resultados dos Sistemas Gerados . . . . .	99
5.5	Conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_1\}$ . . . . .	101
5.6	Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_1\}$ . . . . .	101

5.7	Negativas da desigualdades do conjunto $\mathcal{S}_A$ do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_1\}$ . . . . .	101
5.8	Desigualdades $m \models \mathcal{S}_A$ , $m \models \mathcal{S}_B$ e $m' \models \mathcal{S}_B$ do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_1\}$ . . . . .	102
5.9	Resultados dos sistemas gerados do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_1\}$ . . . . .	103
5.10	Conjuntos $\mathcal{S}_N$ e $\mathcal{S}_F$ do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_2\}$ . . .	103
5.11	Conjuntos $\mathcal{S}_A$ e $\mathcal{S}_B$ do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_2\}$ . . .	104
5.12	Negativa das desigualdades do conjunto $\mathcal{S}_A$ do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_2\}$ . . . . .	104
5.13	Desigualdades $m \models \mathcal{S}_A$ , $m \models \mathcal{S}_B$ e $m' \models \mathcal{S}_B$ do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_2\}$ . . . . .	104
5.14	Resultados dos Sistemas Gerados do exemplo da figura 5.2 em que $E_f = \{f_2\}$ . . . . .	105
6.1	Conjuntos $\mathcal{S}_N$ e $\mathcal{S}_F$ da rede de Petri da figura 6.4 . . . . .	111
6.2	Conjunto de desigualdades $\mathcal{S}_A$ e $\mathcal{S}_B$ da rede de Petri da figura 6.4 . .	112
6.3	Negativa das desigualdades do conjunto $\mathcal{S}_A$ da rede de Petri da figura 6.4 . . . . .	113
6.4	Conjunto de desigualdades $\mathcal{S}_A$ e $\mathcal{S}_B$ da rede de Petri da figura 6.5 . .	115
6.5	Conjunto de desigualdades $\mathcal{S}_A$ e $\mathcal{S}_B$ para o exemplo da figura 6.3 . .	115

# Capítulo 1

## Introdução

Diagnose de falhas de sistemas a eventos discretos (SED) é uma área de pesquisa bastante ativa e foi impulsionada pela variedade de sistemas em que pode ser aplicada, tais como controle de processos, sistemas de controle, transporte, redes de comunicação, engenharia de software e outros. A falha é um evento que altera o comportamento desejado do sistema. A necessidade de procedimentos eficazes para detectar ocorrências de falhas é bastante evidente se considerarmos suas consequências e impactos nos sistemas [39].

Sistemas a eventos discretos são sistemas dinâmicos de estados discretos cuja transição de estados se dá através da ocorrência instântanea de eventos, em geral assíncrona. O fato do estado do sistema ser discreto implica que ele pode assumir valores simbólicos, como, por exemplo, ligado, desligado, verde, amarelo, vermelho, ou valores discretos tais como valores numéricos pertencentes aos conjuntos  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , ou ser formado por um subconjunto enumerável de elementos de  $\mathbb{R}$ . Eventos podem estar associados a ações específicas (por exemplo, alguém aperta um botão, um avião levanta vôo, etc) ou ser o resultado de diversas condições que são satisfeitas (uma peça atinge um determinado ponto de uma linha de produção, o líquido dentro de um tanque atinge um determinado nível, etc).

Embora seja possível modelar qualquer sistema real como um SED de acordo com o grau de abstração considerado, determinados sistemas são naturalmente discretos e com evolução determinada pela ocorrência de eventos, tal como a modelagem de um sistema de fila de atendimento em uma agência bancária em que clientes chegam e esperam por atendimento no caixa. Neste caso, os eventos são: a chegada de um novo cliente, o início do atendimento no caixa e o fim do atendimento (equivalente à saída do cliente do sistema). Os estados do sistema, que são passíveis de alteração pelos eventos anteriores, são: o número de clientes na fila de atendimento (um número inteiro positivo) e o estado do caixa (livre ou ocupado).

A diagnose de falhas em sistemas a eventos discretos consiste em verificar o comportamento do sistema após cada ocorrência de evento observado e emitir um vere-

dito como: normal ou livre de falha, com falha ou incerto com relação a ocorrência da falha.

Dois paradigmas norteiam a diagnose de falhas em sistemas a eventos discretos [3]:

- As falhas a serem diagnosticadas são eventos não observados, isto é, eventos cujas ocorrências não podem ser registradas por sensores;
- A ocorrência de falhas altera o comportamento do sistema, por exemplo, em sistemas de manufatura, a ocorrência de uma falha não diagnosticada nem sempre acarreta na parada do sistema, porém, em geral, leva a uma degradação dos indicadores de eficácia global (disponibilidade, eficiência e qualidade).

Diagnosticadores são sistemas construídos para realização do diagnóstico de falhas e o seu projeto, em primeiro lugar, requer a construção de um modelo para o SED que capture tanto o comportamento livre de falha quanto o comportamento levando-se em consideração a ocorrência de uma falha. Diagnosticadores online são aqueles que informam em tempo real a ocorrência de falhas. A segunda parte do projeto de um diagnosticador consiste no desenvolvimento de um conjunto de regras a serem seguidas para a identificação e a diagnose de falhas.

O trabalho de ZAYTOON e LAFORTUNE [39] apresenta uma revisão bastante completa da literatura sobre a diagnose de falhas em SEDs. A próxima seção apresenta uma breve descrição de trabalhos realizados sobre o assunto e, em seguida, é descrito o objetivo e a motivação deste trabalho que é relacionado à diagnose de falhas em SEDs modelados por redes de Petri.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

O problema de diagnose de falhas foi trazido para o contexto de SEDs por LIN [20] motivado por problemas de diagnose na indústria automotiva, sendo apresentado o conceito de diagnosticabilidade. Em seguida, SAMPATH *et al.* [29, 30] apresentaram condições necessárias e suficientes para diagnosticabilidade em SEDs e propuseram a construção de um autômato denominado diagnosticador que permite tanto inferir sobre a capacidade de diagnosticar a falha quanto como realizar a diagnose de falhas online. Diversos trabalhos em diagnose de falhas foram apresentados nas últimas décadas utilizando a modelagem de SEDs por autômatos como descrito em ZAYTOON e LAFORTUNE [39], entre eles podemos citar [8, 12, 33, 38].

Uma outra forma de modelagem de SEDs é através de redes de Petri que possui dupla representação: gráfica e matemática. Os trabalhos apresentados inicialmente para a diagnose de falhas em SEDs modelados por redes de Petri consideram que

a marcação de certos lugares é observada [16, 19, 22, 26, 27, 37] e os trabalhos que vieram em seguida estão baseados em um conjunto de transições observadas [1, 2, 4, 5, 7, 13, 15, 21]. Todos os trabalhos supõem que as falhas são modeladas por transições não observadas.

Entre os trabalhos de diagnose de falhas em rede de Petri baseados na observação de lugares podemos citar o trabalho de PROCK [26] como sendo um dos primeiros trabalhos em que é proposta uma técnica online com base no monitoramento do número de fichas que estão em determinados lugares da rede de Petri, sendo uma falha detectada quando o número de fichas nesses lugares se altera. Posteriormente, HADJICOSTIS e VERGHESE [16] apresentam uma abordagem que consiste em embutir a rede de Petri original em uma rede de Petri redundante (com mais lugares, fichas e/ou transições) de uma maneira que preserve o estado, a evolução e as propriedades da rede de Petri original em uma forma codificada. Eles usam lugares e fichas adicionais para impor condições invariantes que servem como verificações de consistência sendo capaz de localizar e identificar falhas no SED. A redundância também é utilizada por WU e HADJICOSTIS [37] em que o princípio orientador na adição de redundância é manter o número de lugares adicionais pequenos, mantendo informações suficientes para poder detectar e identificar sistematicamente falhas quando o estado do sistema se torna disponível usando técnicas de decodificação algébrica. A principal contribuição do trabalho de LEFEBVRE e DELHERM [19] é decidir quais conjuntos de lugares devem ser observados para a estimativa exata das sequências de disparo de transições e determinação da ocorrência de falhas. Além desses, tem-se o trabalho de RAMÍREZ-TREVIÑO *et al.* [27] que empregam uma rede de Petri interpretada que é uma extensão de uma rede de Petri, que permite associar sinais de entrada e de saída para modelar o comportamento do sistema no qual inclui eventos e estados parcialmente observados. Com base no modelo da rede de Petri interpretada propõe-se um algoritmo para detectar e localizar o estado de falha do sistema. A solução de um problema de programação linear é necessário para a diagnose de falha no método proposto.

Entre os principais trabalhos de diagnose de falhas em rede de Petri baseados na observação de um conjunto de transições observadas podemos citar BASILE *et al.* [2] que propõem a diagnose de falhas através de um diagnosticador que é construído online baseado em um problema de programação linear inteira (PLI). A marcação da rede é calculada pela equação de estado e se ela tiver componentes negativos, entende-se que ocorreu uma transição não observável. A solução do PLI fornece a sequência de transições e detecta as ocorrências de falha. DOTOLI *et al.* [13] também propõem um diagnosticador que trabalha online, o qual espera por um evento observável e decide através de um algoritmo se o comportamento do sistema é livre de falha ou pode apresentar alguma falha. Para esse fim, alguns

PLIs são formulados cujas soluções fornecem as sequências mínimas de transições não observadas contendo as falhas que podem ter ocorrido. CABASINO *et al.* [5] apresentam uma abordagem para a diagnose de falhas online que é baseada na noção de marcações e justificativas básicas que podem ser obtidas pela sequência de eventos observados em que um PLI deve ser resolvido. Além disso, mostra-se que, no caso de determinadas redes de Petri, a parte mais onerosa do procedimento pode ser executada offline, construindo-se um grafo específico e realizando-se a diagnose através da sua observação. Pode-se observar que os trabalhos apresentados são baseados na solução de um problema de PLI que tem complexidade NP-completo [31].

Recentemente, AL-AJELI e BORDBAR [1] abordaram a diagnose de falhas baseada na construção de um diagnosticador online, no qual são utilizados conjuntos de desigualdades para a tomada de decisão quanto à ocorrência da falha. Nesse método, após a ocorrência de um evento observável, os conjuntos são verificados quanto ao atendimento pela sequência de eventos observados. Note que embora não seja utilizado PPLI para a diagnose de falhas, a abordagem em [1] está restrita a redes de Petri não rotuladas acíclicas.

A determinação da diagnosticabilidade tem sido extensivamente estudada no âmbito de autômatos. Contudo, para SEDs modelados por rede de Petri poucos resultados foram apresentados. A primeira contribuição sobre a diagnosticabilidade usando rede de Petri foi dada por USHIO *et al.* [32], em que é apresentada uma condição necessária e suficiente para a diagnose, dada por SAMPATH *et al.* [29, 30] para modelos em rede de Petri ilimitada. Eles supõem que o conjunto de lugares é dividido em lugares observados e não observados, enquanto todas as transições não são observadas. A partir do modelo em rede de Petri, é construído um diagnosticador que fornece condições suficientes para se diagnosticar falhas. CHUNG *et al.* [10], em contraste com o trabalho de Ushio, pressupõem que parte das transições do modelo em rede de Petri seja observável e mostram que a adição de informações sobre transições disparadas, fornece condições de diagnosticabilidade ao sistema analisado. Além disso, partindo de um diagnosticador, é proposto um autômato chamado verificador que permite um mecanismo de verificação sobre diagnosticabilidade, mas para modelos finitos em rede de Petri. WEN e JENG [34] propuseram uma abordagem para testar a diagnosticabilidade verificando a propriedade de estrutura de T-invariante das redes. Para tanto, usam o diagnosticador de Ushio para provar que seu método está correto. WEN *et al.* [35] apresentam um algoritmo baseado em um problema de programação linear para a computação de uma condição suficiente de diagnosticabilidade em SEDs modelado por rede de Petri. CABASINO *et al.* [6] apresentam um método para testar a diagnosticabilidade analisando dois grafos que dependem da estrutura da rede de Petri, incluindo o modelo de falhas e a marcação

inicial. Esses grafos são construídos baseados nos resultados anteriores de diagnose de falha apresentados em [5]. No que se refere à diagnosticabilidade de uma linguagem, os trabalhos apresentados requerem o conhecimento da teoria do autômato ou da estrutura da rede de Petri.

## 1.2 Motivação e Objetivo do Trabalho

Neste trabalho é proposto um diagnosticador online tendo como base somente os eventos que possam ser observados, isto é, registrados por sensores instalados no sistema em análise. A motivação para a realização deste trabalho é que os principais trabalhos presentes na literatura para a diagnose de falha que apresentam métodos baseados nos conjuntos de transições observadas utilizam soluções obtidas online através de problemas de programação linear inteira (PPLI), que como é de conhecimento, acarreta alto grau de complexidade. Dessa forma, o diagnosticador aqui proposto estende o trabalho de AL-AJELI e BORDBAR [1] no sentido de que permite considerar redes de Petri rotuladas acíclicas nas quais transições diferentes podem ser rotuladas por um mesmo evento, e também permite analisar sistemas que apresentam múltiplas falhas no seu funcionamento. Os diagnosticadores tomam sua decisão com base em conjuntos de desigualdades: determinados conjuntos definem o comportamento após a falha do sistema enquanto os demais definem o comportamento livre de falha do sistema. A idéia é utilizar o número de ocorrências de cada evento observado até o momento para verificar se as desigualdades de cada conjunto são satisfeitas ou não. Dependendo de qual (ou quais) conjunto(s) for(em) satisfeito(s) será possível afirmar com certeza, se a falha ocorreu ou não, ou, então, ficar numa condição de incerteza sobre a ocorrência da falha.

Neste trabalho também é proposto um método para a verificação da diagnosticabilidade de uma linguagem em uma rede de Petri que não requer nenhum conhecimento da teoria do autômato, sendo auto-contido dentro do formalismo matemático da rede de Petri. O método é baseado em conjuntos de desigualdades que quando satisfeitos permitem decidir se a linguagem gerada é diagnosticável. O método de verificação apresentado está restrito a redes de Petri que não apresentem sequências de falha e normal compartilhando o mesmo número de ocorrências de cada um dos eventos observados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 são revistos os principais conceitos sobre rede de Petri e autômatos, diagnosticabilidade em redes de Petri e a eliminação de variáveis em um sistema de desigualdades. No capítulo 3 é descrito os principais métodos encontrados na literatura para diagnose de falhas utilizando o modelo de rede de Petri. No capítulo 4 são descritos os diagnosticadores propostos neste trabalho que permitem avaliar de forma online a ocorrência ou não

de uma falha em um SED modelado por uma rede de Petri rotulada acíclica em que transições diferentes podem estar rotuladas por um mesmo evento. No capítulo 5 é apresentada uma condição necessária e suficiente para a diagnosticabilidade de uma determinada classe de redes de Petri. No capítulo 6, o método proposto é utilizado em um sistema de manufatura. Finalmente, no capítulo 7 são apresentadas as conclusões e trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Fundamentos Teóricos

Neste capítulo são apresentados os fundamentos básicos necessários para a elaboração deste trabalho. Desta forma, ele está estruturado da seguinte forma. A seção 2.1 apresenta a definição de rede de Petri e algumas de suas propriedades. A seção 2.2 apresenta o conceito de diagnosticabilidade em uma rede de Petri pois uma dos objetivos deste trabalho é a proposta de um método para verificação desta propriedade em uma determinada classe de redes de Petri. A seção 2.3 apresenta a definição de autômatos e algumas de suas operações pois a árvore de alcançabilidade, cuja estrutura é um autômato, é utilizada na construção do diagnosticador proposto para uma determinada classe de redes de Petri. Por fim, a seção 2.4 apresenta um método para eliminação de variáveis em um sistema de desigualdades utilizado na construção dos diagnosticadores propostos neste trabalho.

### 2.1 Rede de Petri

A rede de Petri foi desenvolvida no início da década de 60 por Carl Adam Petri e representa atualmente uma forma muito eficiente para a modelagem e a análise de sistemas a eventos discretos. Redes de Petri são utilizados de forma promissora para descrever e estudar sistemas de processamento de informações que são caracterizados como concorrente, assíncrono, distribuído, paralelo, não determinístico e/ou estocástico [23]. Entre as características que uma rede de Petri possui, podemos citar:

- Podem ser apresentados na forma gráfica ou matemática sendo aplicável a vários tipos de sistemas.
- Através da forma gráfica, é possível obter uma comunicação visual semelhante às obtidas nos fluxogramas, diagramas de blocos e redes. Além disso, marcadores são usados para simular as atividades simultâneas e dinâmicas dos sistemas.

- Através da forma matemática é possível obter equações algébricas e outros modelos matemáticos do comportamento dos sistemas.
- Representam de forma compacta o espaço de estados do sistema. Na verdade, eles não exigem a representação explícita de todos os possíveis estados, mas apenas as regras de evolução dos estados.
- Podem representar um sistema a eventos discretos com um número infinito de estados através de um grafo com um número finito de nós.
- Podem fornecer uma representação em módulos de um sistema. De fato, se um sistema é composto por vários subsistemas e estes interagem uns com os outros, então é possível representar cada um deles como uma rede de Petri e, em seguida, usando construções específicas, combinar todas as redes para obter o modelo completo.

### 2.1.1 Lugares, Transições e Arcos

Uma rede de Petri representada na forma gráfica tem dois tipos de nós, denominados de lugares e transições. Os lugares são representados por círculos e as transições por barras ou caixas como pode ser visto na figura 2.1. O número de lugares e transições,  $m$  e  $n \in \mathbb{N}$  respectivamente são finitos e diferentes de zero. Lugares e transições estão ligados por arcos orientados que conectam tanto lugares a transições quanto transições a lugares sendo representados por setas orientadas. Cada arco, obrigatoriamente, deve conectar apenas um nó em cada uma de suas extremidades, ou seja, deve ser orientado de um nó  $x$  (lugar ou transição) para um nó  $y$  (transição ou lugar).

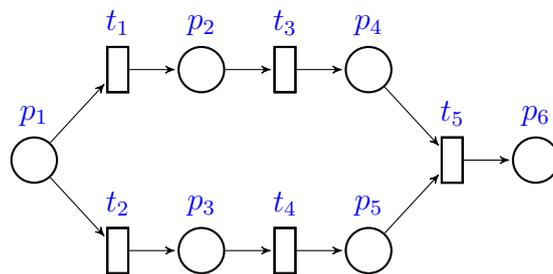


Figura 2.1: Representação gráfica de uma rede de Petri

Podemos definir uma rede de Petri como um grafo bipartido e orientado, no sentido de que arcos não podem conectar diretamente nós do mesmo tipo de modo

que lugares e transições se alternam num percurso constituído por arcos consecutivos. Arcos podem ser rotulados com pesos (inteiros positivos) como mostrado na figura 2.2, em que um arco ponderado  $k$  pode ser interpretado como o conjunto de  $k$  arcos em paralelo. Rótulos com peso unitário geralmente são omitidos.

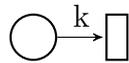


Figura 2.2: Arco ponderado

A rede de Petri representada na figura 2.1 é constituída de 6 lugares, 5 transições e 11 arcos orientados de peso unitário. O conjunto de lugares denota-se como  $P$  e o conjunto de transições como  $T$ . No exemplo temos  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$  e  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ . O lugar  $p_2$  é dito estar a montante ou entrada da transição  $t_3$  porque existe um arco orientado de  $p_2$  para  $t_3$ . O lugar  $p_3$  é dito estar a jusante ou saída da transição  $t_2$  porque existe um arco orientado de  $t_2$  para  $p_3$ . De forma semelhante, uma transição é dita ser uma entrada (montante) ou uma saída (a jusante) de um lugar como ilustrado na figura 2.3. Uma transição sem um lugar de entrada é uma transição fonte ou de origem. Uma transição sem um lugar de saída é uma transição receptora.



Figura 2.3: Entradas e saídas dos nós de uma rede de Petri

## 2.1.2 Rede de Petri Marcada

Uma rede de Petri marcada é definida de modo que cada lugar da rede contém um número não negativo de fichas ou marcas. Graficamente, colocamos  $k$  pontos pretos no lugar  $p_i$  para indicar esse número de fichas. O número de fichas contidas em um lugar  $p_i$  é denotado por  $M(p_i)$  ou  $m_i$ . A marcação  $M$  de uma rede de Petri é definida pelo vetor destas marcas, isto é,  $M = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_m]^T$ , em que  $M \in \mathbb{N}^m$ .

Mostramos na figura 2.4 um exemplo de rede marcada em que  $m_1 = 2, m_2 = 0, m_3 = 0$  e  $m_4 = 1$  e a marcação é dada por  $M = [2 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . A marcação em um determinado momento define o estado da rede de Petri, ou mais precisamente o estado do sistema descrito pela rede de Petri. Definimos como  $M_0$ , a marcação inicial que equivale ao estado inicial da rede. A evolução do estado corresponde a uma evolução da marcação, e que é causada pelo disparo de transições, conforme veremos adiante.

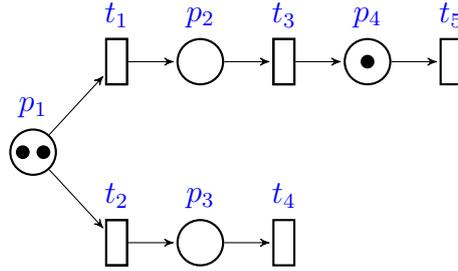


Figura 2.4: Rede de Petri marcada

Como visto, transições, lugares e as relações entre eles definem os componentes básicos de uma rede de Petri e podemos defini-la formalmente como se segue.

**Definição 1** *Rede de Petri marcada [23]*

A Rede de Petri marcada é uma *quíntupla*  $(P, T, F, W, M_0)$  em que:

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  é um conjunto finito de lugares,
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  é um conjunto finito de transições,
- $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  é um conjunto de arcos,
- $W : F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$  é uma função de ponderação,
- $M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  é a marcação inicial, e
- $P \cap T = \emptyset$  e  $T \cup P \neq \emptyset$

Uma rede de Petri sem qualquer marcação inicial é denotada por  $\mathcal{N}$  enquanto uma rede de Petri com uma dada marcação inicial é denotada por  $(\mathcal{N}, M_0)$ .

### 2.1.3 Disparo da Transição

Na modelagem de um sistema por meio de uma rede de Petri utilizando o conceito de condições e eventos, os lugares representam as condições e as transições

representam os eventos. Os lugares de entrada de uma transição estão associados com as condições necessárias para que uma transição ocorra, enquanto os lugares de saída de uma transição estão associados com condições que são afetadas pelo disparo dessa transição. Em resumo, uma transição tem um determinado número de lugares de entrada e de saída que representam as pré-condições e pós-condições para a ocorrência do evento associado a esta transição, respectivamente. A presença de uma ficha em um lugar pode ser interpretada como atendimento de uma condição. Em uma outra interpretação,  $k$  fichas são colocadas em um lugar para indicar que os  $k$  itens de dados ou recursos estão disponíveis.

O estado ou marcação de uma rede de Petri é alterado de acordo com a regra para o disparo de uma transição ou regra de disparo em que:

- 1 Uma transição  $t_i$  é dita habilitada ou ativada se cada lugar de entrada  $p_j$  de  $t_i$  possuir um mínimo de  $w(p_j, t_i)$  fichas, em que  $w(p_j, t_i)$  é o peso do arco que conecta  $p_j$  a  $t_i$ .
- 2 Um transição habilitada pode ou não disparar (depende se o evento acontece ou não).
- 3 O disparo da transição habilitada  $t_i$  remove  $w(p_j, t_i)$  fichas de cada lugar de entrada  $p_j$  de  $t_i$  e adiciona  $w(t_i, p_k)$  fichas para cada lugar de saída  $p_k$  de  $t_i$ , em que  $w(t_i, p_k)$  é o peso do arco que conecta  $t_i$  a  $p_k$ .

A figura 2.5 exemplifica a regra de disparo em que o número de fichas em cada lugar da rede de Petri é:  $m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 1$  e  $m_4 = 0$  e a ponderação dos arcos é:  $w(p_1, t_1) = 1, w(p_2, t_1) = 2, w(t_1, p_3) = 2$  e  $w(t_1, p_4) = 1$ . A transição  $t_1$  está habilitada porque  $m_1 \geq w(p_1, t_1)$  e  $m_2 \geq w(p_2, t_1)$ , e portanto pode disparar. O disparo da transição  $t_1$  remove uma ficha de  $p_1$  e duas fichas de  $p_2$  e adiciona duas fichas em  $p_3$  e uma ficha em  $p_4$ .



Figura 2.5: Disparo de uma transição

O conceito de duração de um disparo geralmente não é considerado em uma rede de Petri, ou seja, o disparo de uma transição tem duração nula.

## 2.1.4 Matriz de Incidência e Equação de Estado

O comportamento dinâmico de uma rede de Petri pode ser descrita e analisada através de equações, no entanto, a solução de um sistema de equações formado é dificultada devido as variáveis, somente, assumirem valores inteiros não negativos, como veremos em seguida.

### Definição 2 *Matriz de incidência*

Para uma rede de Petri  $\mathcal{N}$  com  $m$  lugares e  $n$  transições, denota-se a matriz  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  de matriz de incidência cujos termos são determinados da seguinte forma:

$$a_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^- \quad (2.1)$$

em que  $a_{ij}^+ = w(t_j, p_i)$  é o peso do arco da transição  $t_j$  para o lugar de saída  $p_i$  e  $a_{ij}^- = w(p_i, t_j)$  é o peso do arco do lugar de entrada  $p_i$  da transição  $t_j$ .

Os elementos  $a_{ij}^-$  e  $a_{ij}^+$  representam, respectivamente, o número de fichas retiradas e acrescentadas no lugar  $p_i$  quando a transição  $t_j$  dispara, conforme descrito na seção 2.1.3. Uma determinada transição  $t_j$  está habilitada em uma marcação  $M$  se e somente se todos os seus lugares de entrada  $p_i$  possuírem um número maior ou igual de fichas em relação ao peso do arco de  $p_i$  para  $t_j$ , ou seja,  $a_{ij}^- \leq M(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Considere a rede de Petri mostrada na figura 2.6. A matriz de incidência gerada para esta rede de Petri é dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O termo  $a_{11}$ , por exemplo, é determinado por  $w(t_1, p_1) - w(p_1, t_1) = 0 - 1 = -1$  e o termo  $a_{22}$  é determinado por  $w(t_2, p_2) - w(p_2, t_2) = 2 - 1 = 1$ . Observamos, também, que apenas a transição  $t_1$  está habilitada pois ela possui apenas um lugar de entrada  $p_1$  e temos  $m_1 \geq w(p_1, t_1)$ . A transição  $t_2$  não está habilitada porque para o seu único lugar de entrada  $p_2$  temos  $m_2 < w(p_2, t_2)$ .

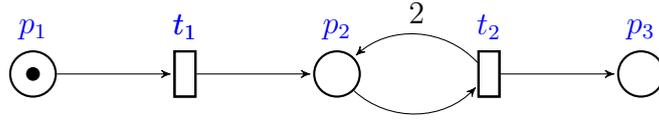


Figura 2.6: Matriz de incidência de uma rede de Petri

Seja, agora,  $M_k$  uma marcação que pode ser alcançada a partir da marcação inicial  $M_0$  através de uma sequência de disparos de transições.  $M_k$  pode ser representada por um vetor coluna  $m \times 1$  em que sua  $i$ -ésima posição denota o número de fichas no lugar  $p_i$  imediatamente após o  $k$ -ésimo disparo. Podemos representar o  $k$ -ésimo disparo por meio de um vetor coluna  $u_k$ :  $n \times 1$ , com  $(n - 1)$  elementos “0” e um elemento “1” na  $j$ -ésima posição associado ao disparo da transição  $t_j$ . Como a  $j$ -ésima coluna da matriz de incidência  $A$  denota a mudança da marcação da rede pelo disparo da transição  $t_j$ , podemos escrever a seguinte equação de estado [23]

$$M_k = M_{k-1} + Au_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Se uma marcação  $M$  for alcançada a partir de  $M_0$  por meio de uma sequência de disparos  $t_1 \dots, t_d$  representados pelos vetores  $u_1 \dots, u_d$ , podemos escrever a equação de estado (2.2) para  $k = 1, 2, \dots, d$  como

$$M = M_0 + A \sum_{k=1}^d u_k. \quad (2.3)$$

Em outras palavras, podemos dizer que, se uma marcação  $M$  for alcançada a partir de  $M_0$  através de uma sequência de disparos de transições  $\sigma = t_1 \dots t_d$ , denotada como  $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$ , então existirá um vetor  $x$  de forma que a seguinte equação de estado será satisfeita

$$M = M_0 + Ax, \quad (2.4)$$

que pode ser reescrita como

$$\Delta M = Ax \quad (2.5)$$

em que  $\Delta M = M - M_0$  e  $x = \sum_{k=1}^d u_k$ .

Denominaremos  $x = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{N}^n$  como o vetor de contagem de disparos, na qual, a  $j$ -ésima posição indica o número de vezes que a transição  $t_j$  dispara para mudar a marcação da rede de  $M_0$  para  $M$  na sequência de disparos  $\sigma$ .

Para a rede de Petri mostrada na figura 2.6, a equação de estado que descreve o seu comportamento é dada por

$$M = M_0 + Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Mostramos, a seguir, graficamente e matematicamente, utilizando a equação de estado, a transformação de  $M_0$  em  $M_3$  pela sequência de disparos  $\sigma = t_1 t_2 t_2$  da rede de Petri da figura 2.6.

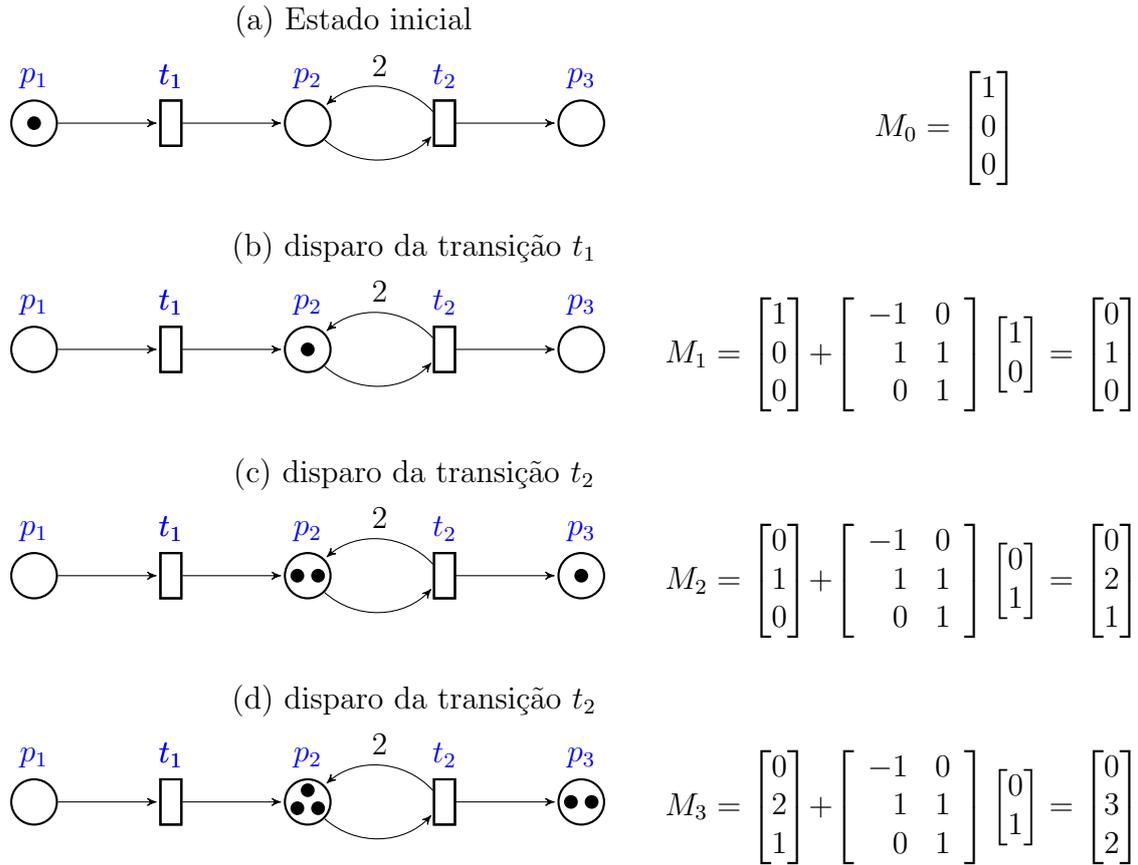


Figura 2.7: Sequencia de disparos de transições em uma rede de Petri

De forma equivalente, podemos determinar a marcação  $M_3$  utilizando o vetor de contagem de disparos  $x = [x_1 \ x_2]^T = [1 \ 2]^T$  da sequência  $\sigma$  na equação de estado.

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Definição 3** *Marcação terminal em uma rede de Petri*

Definimos *marcação terminal em uma rede de Petri* como uma marcação que não possui uma transição habilitada e portanto a rede não pode mais evoluir a partir desta marcação.

A figura 2.8 exemplifica uma rede de Petri com marcação terminal pois quando ocorre a transformação de  $M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  em  $M_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  pelo disparo da transição  $t_1$  não existe uma transição habilitada, portanto temos que  $M_1$  é uma marcação terminal e ocorre a parada da evolução da rede nesta marcação.

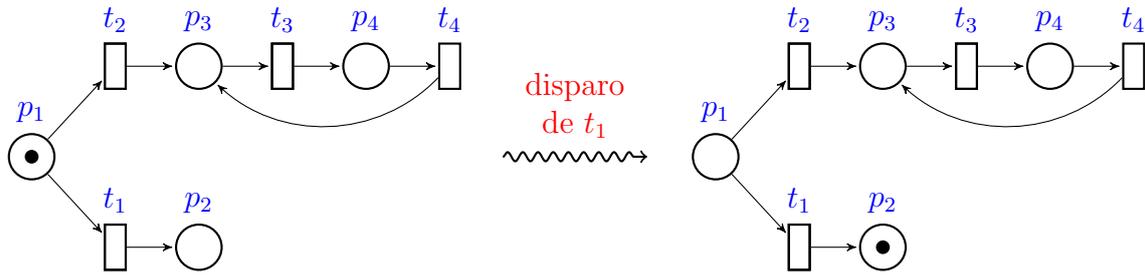


Figura 2.8: Marcação terminal em uma rede de Petri

**Definição 4** *Rede de Petri acíclica*

Denominamos uma rede de Petri  $(\mathcal{N}, M_0)$  como *acíclica*, a toda rede em que não existem seqüências de disparos de transições a partir de  $M_0$  na qual uma marcação ocorra mais do que uma vez.

A figura 2.4 mostra uma rede acíclica pois não existe uma seqüência de transições a partir de  $M_0 = [2 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  na qual uma marcação se repita. A figura 2.6 mostra, também, uma rede acíclica partir de  $M_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ . A figura 2.8 mostra uma rede que não é acíclica pois a marcação  $M = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ , por exemplo, pode ser obtida várias vezes pela seqüência de disparos  $t_2 t_3 t_4$  e repetição de  $t_3 t_4$  a partir de  $M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

Para uma rede de Petri acíclica, o Teorema a seguir estabelece uma condição necessária e suficiente para uma marcação  $M$  ser alcançada a partir de uma marcação inicial  $M_0$ .

**Teorema 1** [23] *Em uma rede de Petri acíclica, a marcação  $M$  é alcançada a partir da marcação inicial  $M_0$ , se e somente se existe uma solução  $x \in \mathbb{N}^n$  satisfazendo  $M = M_0 + Ax$ .*

## 2.1.5 Linguagem Gerada em Redes de Petri

O conjunto de todas as marcações  $M$  alcançáveis a partir de  $M_0$  define o conjunto de alcançabilidade de uma rede de Petri  $(\mathcal{N}, M_0)$  que denominamos  $\mathcal{R}(\mathcal{N}, M_0)$ .

O conjunto das sequências de disparos de transições, resultando em uma marcação alcançável a partir de  $M_0$  é chamado de linguagem da rede de Petri e é denotada por  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$ , ou seja,

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) = \{\sigma \in T^* : (\exists M \in \mathbb{N}^m)[M_0 \xrightarrow{\sigma} M]\} \quad (2.6)$$

em que  $T^*$  é o conjunto de todas as sequências de disparos de transições em  $T$  de comprimento finito e denominado de fecho de Kleene de  $T$ . Os elementos de  $T^*$  são formados a partir da concatenação de elementos de  $T$ . Em particular,  $T^*$  contém a sequência vazia  $\varepsilon$ , de forma que  $t\varepsilon = \varepsilon t = t$  para todo  $t \in T$ . Para indicar que  $t$  pertence a uma sequência de disparos de transições  $\sigma$  usaremos  $t \in \sigma$  sendo um abuso de notação.

## 2.1.6 Redes de Petri Rotuladas

Uma rede de Petri rotulada com marcação inicial é definida como uma sétupla  $(P, T, F, W, E, \ell, M_0)$  na qual  $(P, T, F, W, M_0)$  é uma rede de Petri marcada conforme definida na seção 2.1.2,  $E$  é um conjunto de eventos e  $\ell : T \rightarrow E$  é uma função de rotulação de transição.

Na figura 2.9 observamos uma rede de Petri marcada e rotulada, na qual,  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ ,  $E = \{a, b, c, d\}$  e a função de rotulação é dada por:  $\ell(t_1) = a$ ,  $\ell(t_2) = b$ ,  $\ell(t_3) = c$ ,  $\ell(t_4) = d$  e  $\ell(t_5) = a$ .

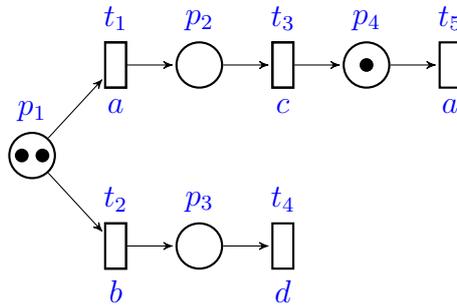


Figura 2.9: Rede rotulada

Em uma rede de Petri rotulada, duas ou mais transições  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  são chamadas indistinguíveis se elas compartilham o mesmo rótulo, ou seja,  $\ell(t_1) =$

$\ell(t_2) = \dots = \ell(t_n) = e \in E$ . Note que na figura 2.9, as transições  $t_1$  e  $t_5$  possuem a mesma rotulação  $a$  e portanto são transições indistinguíveis.

**Observação 1** *Neste trabalho, é assumido que a ocorrência de um evento dispara uma única transição por vez, ou seja, apesar da rede de Petri poder ter transições indistinguíveis, elas nunca disparam simultaneamente. Na rede de Petri da figura 2.9 caso a ocorra é porque  $t_1$  ou  $t_5$  disparou.*

A linguagem gerada pela rede de Petri rotulada  $(\mathcal{N}, M_0)$  será dada por

$$\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) = \{\ell(\sigma) \in E^* : (\sigma \in T^*)(\exists M \in \mathbb{N}^m)[M_0 \xrightarrow{\sigma} M]\} \quad (2.7)$$

Dada uma sequência de eventos  $s = l(\sigma) \in E^*$ , denotamos o comprimento de  $s$  como  $\|s\|$  que informa o número de eventos em  $s$ . Uma gama de sistemas a eventos discretos são parcialmente observados, ou seja, possuem eventos que não poderão ser observados. Desta forma, podemos tomar  $E = E_o \dot{\cup} E_{uo}$  como uma partição de  $E$ , em que  $E_o$  e  $E_{uo}$  são definidos como o conjunto de eventos observados e o conjunto de eventos não observados, respectivamente, então,  $T_o$  e  $T_{uo}$  podem ser definidos como o conjunto de transições observadas e o conjunto de transições não observadas, respectivamente, *i.e.*,  $T_o = \{t \in T | (\exists e \in E_o)[\ell(t) = e]\}$  e  $T_{uo} = \{t \in T : (\exists e \in E_{uo})[\ell(t) = e]\}$ .

Uma operação de linguagem importante é a projeção natural  $P_o : E^* \rightarrow E_o^*$ , que transforma sequências de eventos não observados na sequência vazia  $\varepsilon$ , *i.e.*,  $P_o(e) = \{\varepsilon\}$  para  $e \in E_{uo}$  e  $P_o(e) = e$  para  $e \in E_o$  e  $P_o(se) = P_o(s)P_o(e)$ ,  $s \in E^*$  e  $e \in E$ . Uma outra operação importante é a projeção inversa  $P_o^{-1} : E_o^* \rightarrow 2^{E^*}$ , *i.e.*,  $P_o^{-1}(t) = \{s \in E^* | P_o(s) = t\}$ .

Neste trabalho, utilizaremos a notação  $|\cdot|$  para definir a cardinalidade de um conjunto.

### 2.1.7 Árvore de Alcançabilidade

A partir da marcação inicial  $M_0$  de uma rede de Petri  $(\mathcal{N}, M_0)$ , pode-se obter várias “novas” marcações com o disparo das transições. De cada nova marcação, podemos alcançar outras marcações. Este processo resulta em uma representação na forma de um grafo direcionado e rotulado. Cada um de seus vértices representa uma marcação alcançável da rede e cada uma de suas arestas representa o disparo de uma transição. O grafo de marcações é então dado pelo par  $(V, A)$ , no qual,  $V$  é o conjunto de todos os vértices, distintos, e rotulados com a indicação da marcação correspondente e  $A$  é o conjunto de todas as arestas rotuladas com o nome da transição disparada entre duas marcações alcançáveis da rede. Para redes limitadas, temos uma árvore de marcações finita que denominamos de árvore de alcançabilidade. A figura 2.10(b)

ilustra a árvore de alcançabilidade da rede de Petri representada na figura 2.10(a) na qual  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$  e  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ . Note que as marcações da rede de Petri estão representadas na figura 2.10 (c).

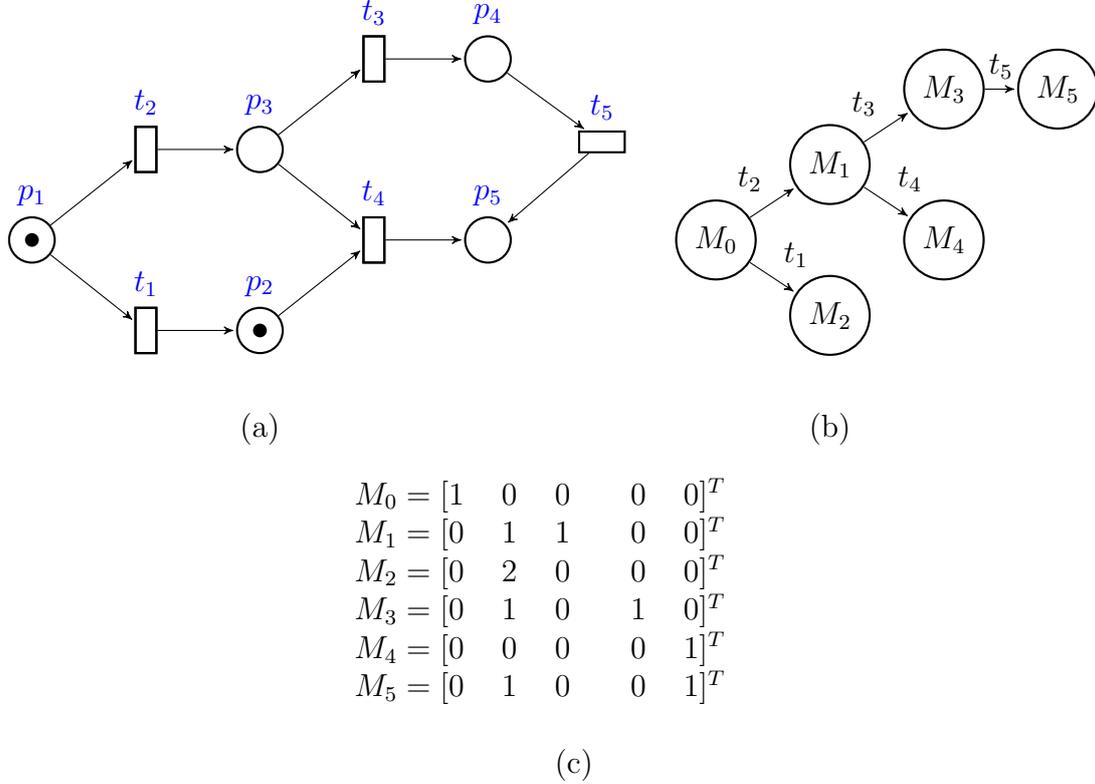


Figura 2.10: (a) rede de Petri (b) árvore de alcançabilidade (c) marcações

## 2.2 Diagnosticabilidade em Rede de Petri

Ao incorporarmos eventos que estejam associados a falhas no sistema modelado por uma rede de Petri, temos que verificar se temos condições de dizer se sistema está em um comportamento livre de falha ou em um comportamento em que a falha ocorreu. Caso o evento de falha fosse observável, poderíamos diagnosticar quanto a sua ocorrência, porém, sendo um evento não observável, podemos ter dificuldades em diagnosticá-lo. Dizemos que uma rede de Petri é diagnosticável em relação a um conjunto de eventos observados e a um conjunto de eventos de falhas, se a ocorrência de qualquer evento de falha puder sempre ser diagnosticado após um número finito de eventos após a sua ocorrência baseado somente em sequências de eventos observados.

As notações a seguir serão úteis na definição do conceito de diagnosticabilidade:

- $E'$ : um subconjunto de conjunto de eventos  $E$  de uma rede de Petri.
- $s$ : uma sequência de eventos.
- $\Psi(E') = \{se' \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) : e' \in E'\}$ : o conjunto de todas as sequências de eventos em  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  que terminam em um evento  $e' \in E'$ .
- $r/s = \{r \in E^* : sr \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)\}$ : o conjunto de todas as sequências de eventos após uma sequência  $s$ .

Vamos agora introduzir a definição de diagnosticabilidade para redes de Petri rotuladas descrito por CABASINO *et al.* [6] inspirado na definição de diagnosticabilidade para linguagens regulares por SAMPATH *et al.* [29].

**Definição 5** *Diagnosticabilidade em rede de Petri rotulada*

A linguagem gerada por uma rede de Petri rotulada  $(\mathcal{N}, M_0)$  é diagnosticável para um conjunto de eventos de falhas  $E_f$  e uma projeção  $P_o : E^* \rightarrow E_o^*$ , se:

$$\begin{aligned} \forall s \in \Psi(E_f), \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall g \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)/s \quad \text{com} \quad \|g\| \geq n \Rightarrow \\ \forall w \in (P_o^{-1}(P_o(sg)) \cap \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)) \Rightarrow \exists e_f \in E_f : e_f \in w \end{aligned} \quad (2.8)$$

Em palavras, dada uma sequência de eventos  $s$  que termina em um evento de falha  $e_f \in E_f$ , seja  $g$  qualquer continuação suficientemente longa dela, isto é,  $\|g\| \geq n$  em que  $n$  depende de  $s$ , então uma rede de Petri rotulada sem marcação terminal com a ocorrência de um evento de falha  $e_f \in E_f$ , é diagnosticável se qualquer sequência de eventos  $w$  pertencente à linguagem  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  e tendo a mesma projeção observável de  $sg$  contenha um evento em  $E_f$ . Isto implica que ao longo de qualquer continuação  $g$  de  $s$ , a ocorrência de um evento em  $E_f$  pode ser detectada em um número finito de eventos observados (no máximo  $n$ ).

Iremos considerar, neste trabalho, por uma questão de simplicidade, que há apenas um tipo de falha que será representado pelo evento  $f$ , ou seja,  $E_f = \{f\} \subseteq E_{uo}$ . Desta forma,  $\Psi(E_f) = \{s \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) : (\exists u \in (E \setminus \{f\})^*)[s = uf]\}$  é o conjunto de todas as sequências finitas de  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  que terminam com o evento de falha  $f$ .

**Exemplo 1** *Exemplo de uma rede de Petri rotulada com falha*

Considere a rede de Petri rotulada  $(P, T, F, W, E, \ell, M_0)$  mostrada na figura 2.11, em que  $P = \{p_1, \dots, p_7\}$ ,  $T = \{t_1, \dots, t_6\}$ ,  $F = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (t_1, p_2), (t_2, p_3), (p_2, t_3), (p_3, t_4), (t_3, p_4), (t_4, p_5), (p_4, t_5), (p_5, t_6), (t_5, p_6), (t_6, p_7)\}$ ,  $E = \{a, b, c, d, f\}$ ,  $M_0 = [200000]^T$ . A função de rotulagem de transições  $\ell$  é definida como se segue:  $\ell(t_1) = f$ ,  $\ell(t_2) = \ell(t_3) = a$ ,  $\ell(t_4) = d$ ,  $\ell(t_5) = b$  e  $\ell(t_6) = c$ . A linguagem gerada é  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) =$

$\{\varepsilon, f, fa, fab, a, aa, ac, aac, aca, aacc, acac, acacd\}$ . Tomaremos neste exemplo, o conjunto de eventos observados como  $E_o = \{a, b, c\}$ , o conjunto de eventos não observados como  $E_{uo} = \{d, f\}$  e o conjunto de eventos de falha como  $E_f = \{f\}$ .

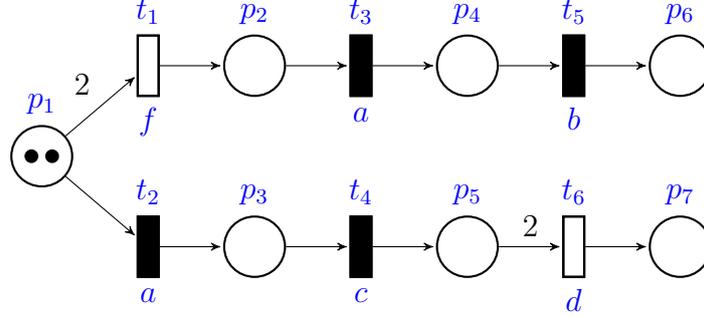


Figura 2.11: Rede de Petri rotulada acíclica  $(\mathcal{N}, M_0)$

Transições associadas a eventos observados são representadas por caixas sólidas, enquanto as caixas vazias representam transições associadas a eventos não observados. Essas transições serão referidas em todo o trabalho como transições observadas e transições não observadas, respectivamente. Observe que as transições observadas  $t_2$  e  $t_3$  são indistinguíveis porque estão rotuladas pelo evento  $a$ .

Neste exemplo, a ocorrência das sequências de eventos  $s_1 = f$ ,  $s_2 = fa$  e  $s_3 = a$  produzem a sequência observável  $s_o = a$ , e assim, não podemos ter certeza se a falha ocorreu ou não. A ocorrência da sequência de eventos  $s_4 = aa$ , por outro lado, produz a sequência observável  $s_o = aa$  e, neste caso, temos certeza de que a falha não ocorreu porque não há outras sequências de eventos que contenha a falha com a mesma sequência de eventos observados, isto é, estamos, neste caso, seguros de que o sistema está com um comportamento livre de falha. A ocorrência de sequência de eventos  $s_5 = fab$  produz a sequência observável  $s_o = ab$  e, neste caso, temos a certeza de que a falha ocorreu porque não há nenhuma outra sequência de eventos que não contenha a falha e tenha esta mesma sequência de eventos observados. Verifica-se que a linguagem gerada para esta rede de Petri é diagnosticável para o conjunto de falhas  $E_f$  e a projeção  $P_o : E^* \rightarrow E_o^*$ .

## 2.3 Autômatos

O autômato é uma outra forma para a modelagem e a análise de sistemas a eventos discretos sendo capaz de representar e manipular linguagens. Entretanto, a modelagem por autômato não será utilizado neste trabalho. Algumas operações com

autômatos serão necessárias para a construção do diagnosticador proposto que utiliza a árvore de alcançabilidade de uma rede de Petri, apresentada na seção 2.1.7, que pode ser visto como um autômato.

**Definição 6** *Um autômato determinístico, denotado por  $G$ , é uma sextupla:  $G = (X, \Sigma, f, \Gamma, x_0, X_m)$  em que:*

- $X$  é um conjunto de estados,
- $\Sigma$  é um conjunto finito de eventos,
- $f : X \times \Sigma \rightarrow X$  é a função de transição de estados, que é geralmente parcial em seu domínio [9],
- $\Gamma : X \rightarrow 2^\Sigma$  é a função dos eventos ativos,
- $x_0$  é o estado inicial, e
- $X_m \subseteq X$  é um conjunto de estados marcados

O diagrama de transição de estado é a representação gráfica orientada de um autômato em que os vértices do grafo são círculos e representam os diferentes estados do sistema e as transições que os conectam são representadas como arcos e rotuladas por símbolos, que são os eventos do sistema. Note que é possível ter auto-laços, que neste caso são transições que começam e terminam no mesmo estado. O estado inicial tem uma seta apontando para ele e os estados marcados são representados por círculos duplos. Caso os estados marcados não estejam definidos, considera-se, sem perda de generalidade, que  $X_m = \emptyset$ .

O diagrama de transição de estado de um autômato determinístico  $G$  pode ser visto na figura 2.12. Os conjuntos de estados e eventos são dados, respectivamente, por  $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$  e  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . A função de transição é definida como:  $f(x_0, a) = x_1, f(x_0, b) = x_2, f(x_1, c) = x_3, f(x_3, b) = x_3, f(x_2, a) = x_4, f(x_4, a) = x_0$ , de forma que:  $\Gamma(x_0) = \{a, b\}, \Gamma(x_1) = \{c\}, \Gamma(x_2) = \{a\}, \Gamma(x_3) = \{b\}, \Gamma(x_4) = \{a\}$ . Finalmente, o estado inicial é  $x_0$ .

As linguagens geradas e marcadas de um autômato são descritas como se segue:

**Definição 7** *Uma linguagem gerada por um autômato  $G$  é dada por:*

$$L(G) := \{s \in \Sigma^* : f(x_0, s) \text{ é definido} \}, \quad (2.9)$$

*enquanto a linguagem marcada por um autômato  $G$  é dada por:*

$$L_m(G) := \{s \in L(G) : f(x_0, s) \in X_m\}. \quad (2.10)$$

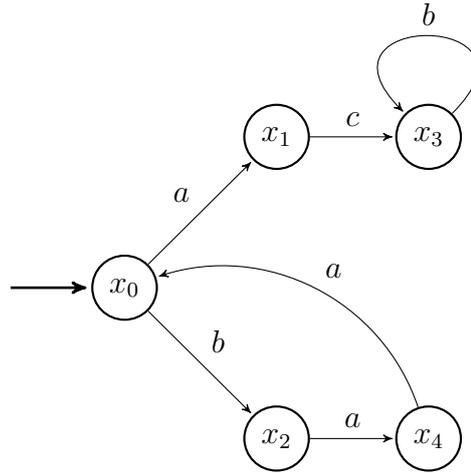


Figura 2.12: Diagrama de transição de estado de um autômato determinístico  $G$

A linguagem gerada representa todos os caminhos que podem ser seguidos no diagrama de transição de estados, começando pelo estado inicial. As transições que compõem cada caminho são rotuladas por eventos. A concatenação desses eventos é a a sequência  $s$  correspondente a esse caminho, de forma que  $s \in L(G)$  se, e somente se, corresponde a um caminho admissível no diagrama de transição de estados. É importante ressaltar que  $L(G)$  é prefixo-fechado por definição, e que é possível ter eventos definidos em  $\Sigma$  que não apareçam no diagrama de transição de estados. Isso indica que esses eventos não aparecerão em  $L(G)$ . A linguagem  $L_m(G)$ , é um subconjunto de  $L(G)$  correspondente a todas as sequências  $s$  nos caminhos do diagrama de transição de estados que terminam em um estado marcado, ou seja, para qual  $f(x_0, s) \in X_m$ . Note que  $L_m(G)$  não é necessariamente prefixo fechado.

### 2.3.1 Operações com autômatos

Para analisar um SED modelado por autômato, é necessário operações que permitam modificar o diagrama de transição de estados. Além disso, operações capazes de combinar dois ou mais autômatos são primordiais quando se trabalha com componentes de um sistema. As seguintes operações são consideradas unárias e não alteram os elementos no conjunto de eventos  $\Sigma$ .

#### 1 PARTE ACESSÍVEL

A parte acessível é uma operação que apaga de um autômato  $G$  com estado inicial  $x_0$ , todos os estados inacessíveis e transições relacionadas a eles e é formalmente definido como:

$Ac(G) := (X_{ac}, \Sigma, f_{ac}, \Gamma_{ac}, x_0, X_{ac,m})$  em que

- $X_{ac} = \{x \in X : (\exists s \in \Sigma^*)[f(x_0, s) = x]\}$
- $X_{ac,m} = X_m \cap X_{ac}$
- $f_{ac} : X_{ac} \times \Sigma^* \rightarrow X_{ac}$

Observe que a operação restringe o domínio da função de transição para  $X_{ac}$  e não altera  $L(G)$  e  $L_m(G)$ .

## 2 PARTE COACCESSÍVEL

Um estado  $x \in X$  é dito ser coaccessível sempre que houver um caminho começando do estado  $x$  e terminando em um estado marcado. A operação apaga todos os estados em  $G$  que não são coaccessíveis, juntamente com todas as transições relacionadas. Formalmente:

$CoAc(G) = (X_{coac}, \Sigma, f_{coac}, \Gamma_{coac}, x_{0,coac}, X_m)$  em que

- $X_{coac} = \{x \in X : (\exists s \in \Sigma^*)[f(x, s) \in X_m]\}$ ,
- $x_{0,coac} = x_0$ , se  $x_0 \in X_{coac}$ , ou indefinido, se  $x_0 \notin X_{coac}$
- $f_{coac} : X_{coac} \times \Sigma^* \rightarrow X_{coac}$ .

## 3 PRODUTO

A operação do produto, também chamada de composição completamente síncrona, é representada por  $\times$ . Sejam  $G_1 = (X_1, \Sigma_1, f_1, \Gamma_1, x_{0,1}, X_{m,1})$  e  $G_2 = (X_2, \Sigma_2, f_2, \Gamma_2, x_{0,2}, X_{m,2})$  denotando dois autômatos de estados finitos. O produto entre  $G_1$  e  $G_2$  (denotada como  $G_1 \times G_2$ ) produz um autômato com o seguinte comportamento:

$G_1 \times G_2 = Ac(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, f, \Gamma_{1 \times 2}, (x_{0,1}, x_{0,2}), X_{m,1} \times X_{m,2})$  em que

$$f((x_1, x_2), e) = \begin{cases} (f_1(x_1, e), f_2(x_2, e)), & \text{se } e \in \Gamma_1(x_1) \cap \Gamma_2(x_2), \\ \text{indefinido,} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e  $\Gamma_{1 \times 2}(x_1, x_2) = \Gamma_1(x_1) \cap \Gamma_2(x_2)$ .

De acordo com a definição da composição produto, as transições de ambos os autômatos precisam ser sincronizadas com um evento comum, isto é, um evento  $e \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ . Um evento ocorrerá em  $G_1 \times G_2$  se, e somente se, ocorrer simultaneamente em  $G_1$  e  $G_2$ .

Os estados de  $G_1 \times G_2$  são indicados em pares, em que o primeiro componente é o estado atual de  $G_1$  e o segundo componente é o estado atual de  $G_2$ . Além disso, as linguagens gerada e marcada de  $G_1 \times G_2$  são:

$$\begin{aligned} L(G_1 \times G_2) &= L(G_1) \cap L(G_2), \\ L_m(G_1 \times G_2) &= L_m(G_1) \cap L_m(G_2). \end{aligned} \tag{2.11}$$

## 4 COMPOSIÇÃO PARALELA

A composição paralela também é chamada de composição síncrona é representada por  $\parallel$ . A composição paralela permite que transições privadas ocorram, sincronizando apenas transições marcadas por eventos comuns.

Sejam  $G_1 = (X_1, \Sigma_1, f_1, \Gamma_1, x_{0,1})$  e  $G_2 = (X_2, \Sigma_2, f_2, \Gamma_2, x_{0,2})$  denotando dois autômatos de estados finitos. A composição paralela entre  $G_1$  e  $G_2$  (denotada como  $G_1 \parallel G_2$ ) produz um autômato com o seguinte comportamento:

A composição paralela entre os dois autômatos  $G_1$  e  $G_2$  resulta em:

$G_1 \parallel G_2 = Ac(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, f, \Gamma_{1\parallel 2}, (x_{0,1}, x_{0,2}), X_{m,1} \times X_{m,2})$  em que

$$f((x_1, x_2), e) = \begin{cases} (f_1(x_1, e), x_2), & \text{se } e \in \Gamma_1(x_1) \setminus \Sigma_2 \\ (x_1, f_2(x_2, e)), & \text{se } e \in \Gamma_2(x_2) \setminus \Sigma_1 \\ (f_1(x_1, e), f_2(x_2, e)), & \text{se } e \in \Gamma_1(x_1) \cap \Gamma_2(x_2), \\ \text{indefinido,} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e  $\Gamma_{1\parallel 2}(x_1, x_2) = [\Gamma_1(x_1) \cap \Gamma_2(x_2)] \cup [\Gamma_1(x_1) \setminus \Sigma_2] \cup [\Gamma_2(x_2) \setminus \Sigma_1]$ .

Na composição paralela, um evento comum, isto é, pertencendo a  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ , ocorrerá somente se ambos os autômatos o executar ao mesmo tempo. Por outro lado, os eventos privados, isto é, aqueles em  $(\Sigma_1 \setminus \Sigma_2) \cup (\Sigma_2 \setminus \Sigma_1)$ , podem ocorrer sempre que possível. Se  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ , a composição paralela reproduz o mesmo autômato que a operação do produto.

Para caracterizar adequadamente as linguagens gerada e marcada do autômato resultante da composição paralela, algumas definições são necessárias:

$$P_i : (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^* \rightarrow \Sigma_i^* \text{ para } i = 1, 2$$

$$P_i^{-1} : \Sigma_i^* \rightarrow 2^{(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)^*} \text{ para } i = 1, 2$$

Com base nessas projeções, as linguagens resultantes são:

$$\begin{aligned} L(G_1 \parallel G_2) &= P_1^{-1}[L(G_1)] \cap P_2^{-1}[L(G_2)], \\ L_m(G_1 \parallel G_2) &= P_1^{-1}[L_m(G_1)] \cap P_2^{-1}[L_m(G_2)]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

## 2.4 Eliminação de variáveis em um sistema de desigualdades

Consideremos agora o problema de resolver um sistema de desigualdades

$$-Ax \leq b, \quad (2.13)$$

em que  $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$  e  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ . Um meio de resolver este sistema de desigualdades é através do método de eliminação Fourier-Motzkin [11, 36]. A essência desse método é eliminar sucessivamente variáveis, de modo a reduzi-lo a sistemas de desigualdades com  $n_k < n$  variáveis desconhecidas, ou seja,

$$-A^{[k]}x^{[k]} \leq b^{[k]}, \quad (2.14)$$

em que  $A^{[k]} \in \mathbb{Z}^{m_k \times n_k}$ ,  $b^{[k]} \in \mathbb{Z}^{m_k}$  e  $x^{[k]} = (x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_k^{[k]}) \in \mathbb{Z}^{n_k}$

Suponha que queremos eliminar a variável  $x_n$ . Para fazer isso, primeiro separamos as  $m$  equações que formam o sistema de desigualdades da equação 2.13 em três conjuntos em função do coeficiente de  $x_n$  de cada equação, ou seja:

$$-\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}x_k \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m_1, \quad a_{in} = 0 \quad (2.15a)$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}x_k - a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = m_1 + 1, \dots, m_2, \quad -a_{in} > 0 \quad (2.15b)$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} a_{jk}x_k + a_{jn}x_n \leq b_j, \quad j = m_2 + 1, \dots, m, \quad a_{jn} < 0 \quad (2.15c)$$

Observe que as desigualdades em (2.15a) não têm a variável  $x_n$ , as desigualdades em (2.15b) são aquelas cujos coeficientes de  $x_n$  são negativos e as desigualdades em (2.15c) são aquelas cujos coeficientes de  $x_n$  são positivos. Se utilizarmos uma desigualdade de (2.15b),  $i \in \{m_1 + 1, \dots, m_2\}$  e uma desigualdade de (2.15c),  $j \in \{m_2 + 1, \dots, m\}$  e multiplicamos a desigualdade de (2.15b) por  $|a_{jn}|$  e multiplicarmos a desigualdade de (2.15c) por  $|a_{in}|$  e em seguida, adicionarmos as desigualdades correspondentes, obtemos:

$$-|a_{jn}| \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}x_k \right) - |a_{in}| \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_{jk}x_k \right) \leq |a_{jn}|b_i + |a_{in}|b_j, \quad (2.16)$$

que não tem a variável  $x_n$ . Continuando o processo, geramos  $(m_2 - m_1) \times (m - m_2)$  desigualdades que substituirão as  $m - m_1$  desigualdades dadas em (2.15b) e (2.15c).

Repetindo este processo, podemos sucessivamente eliminar as variáveis indesejadas e finalizar com um conjunto de desigualdades com as variáveis desejadas.

**Exemplo 2** *Seja o sistema de desigualdades com três variáveis descrito a seguir:*

$$2x_1 - 3x_2 \leq 5 \quad (2.17a)$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 8 \quad (2.17b)$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 10 \quad (2.17c)$$

*Suponha que desejamos eliminar a variável  $x_3$ . Observe que a desigualdade em (2.17a) não têm a variável  $x_3$ , a desigualdade em (2.17b) tem a variável  $x_3$  com coeficiente positivo e a desigualdade em (2.17c) tem a variável  $x_3$  com coeficiente negativo. Se multiplicarmos a desigualdade em (2.17b) por 2 e a desigualdade em (2.17c) por 4 teremos:*

$$6x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 16$$

$$4x_1 + 12x_2 - 8x_3 \leq 40$$

*Se adicionarmos as duas desigualdades obtemos:*

$$10x_1 + 14x_2 \leq 56 \quad (2.18)$$

*O sistema inicial com três variáveis pode ser reduzido a um sistema com duas variáveis substituindo as equações (2.17b) e (2.17c) pela equação (2.18) e então obtemos :*

$$2x_1 - 3x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 14x_2 \leq 56$$

## Observação 2

1 *Vale a pena notar que, como os coeficientes são todos inteiros, o processo de eliminação de Fourier-Motzkin é muito estável.*

2 *O número de desigualdades no  $k$ -th sistema (2.14) gerado pelo método de Fourier-Motzkin é  $m_k \leq m_{k-1}^2$ , para todo  $k$ , em cada passo de iteração; portanto, o número de desigualdades que pode ser gerado é quadrático em cada iteração. Consequentemente, no final do método [18],  $m_k \leq m^{2^{n-k}}$ , sendo, portanto, duplamente exponencial em  $n - k$ , em que  $n$  é a quantidade de variáveis no sistema inicial e  $k$  é a quantidade de variáveis eliminadas<sup>1</sup>. No entanto, como fornece uma representação explícita do conjunto de soluções, ao contrário de outros métodos, como o Simplex, ainda vale a pena usá-lo. As possíveis maneiras de acelerá-lo são aplicando a programação linear inteira [28] ou a computação paralela [17].*

---

<sup>1</sup> as variáveis a serem eliminadas e portanto aquelas que são de interesse ficarão claros mais adiante no trabalho

O Teorema a seguir estabelece a relação de equivalência entre o sistema de desigualdades (2.13) e o sistema de desigualdades (2.14) obtido pela eliminação de variáveis indesejadas.

**Teorema 2** [14] *Suponha que as variáveis  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  foram eliminadas aplicando um método de eliminação de variáveis a um conjunto de desigualdades lineares  $\mathcal{A}$  com variáveis  $x_1, \dots, x_n$  resultando no conjunto reduzido  $\mathcal{B}$  com variáveis  $x_1, \dots, x_p$ . Então  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  é uma solução de  $\mathcal{B}$  se e somente se, existem valores  $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$  tais que  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n$  é uma solução de  $\mathcal{A}$ .*

## Capítulo 3

# Principais métodos na literatura para diagnose de falhas em SEDs modelados por rede de Petri

Este capítulo descreve métodos existentes na literatura para a diagnose de falhas online em Sistemas a Eventos Discretos modelados por rede de Petri. Na seção 3.1 apresentamos o método proposto por AL-AJELI e BORDBAR [1] que se baseia no método de eliminação de variáveis Fourier-Motzkin. Nas seções seguintes apresentamos métodos baseados na solução de problemas de programação linear inteira: na seção 3.2, o método proposto por BASILE *et al.* [2], na seção 3.3, o método proposto por CABASINO *et al.* [5] e na seção 3.4, o método proposto por DOTOLI *et al.* [13].

### 3.1 Método Fourier-Motzkin para diagnose de falhas em modelos de redes de Petri não rotuladas acíclicas

O trabalho de AL-AJELI e BORDBAR [1] considera um problema de diagnose de falhas em sistemas a eventos discretos modelados por rede de Petri acíclicas não rotuladas por eventos. A falha é representada por uma única transição não observável e o diagnosticador online proposto é baseado em dois conjuntos de desigualdades de variáveis associadas ao número de disparos de transições observadas.

A primeira etapa da construção do diagnosticador consiste na obtenção das equações de estado da rede de Petri que relaciona uma marcação  $M$  acessível a partir de uma marcação inicial  $M_0$  através de uma sequência de disparos  $\sigma$ , da seguinte forma:  $M = M_0 + Ax$ . Como visto na seção 2.1.2, a marcação  $M \geq 0 \in \mathbb{N}^m$ .

Portanto,  $-Ax \leq M_0$  forma um conjunto de desigualdades de variáveis associadas ao número de disparos das transições existentes na rede de Petri sendo denotado como  $\mathbb{E}$ .

A ocorrência de uma falha ou não em uma sequência de disparos de transições  $\sigma$  pode ser expressa por desigualdades. Suponha que  $t_n$  é uma transição de falha e  $x_n$  é a variável que representa o número de disparos de  $t_n$  em  $\sigma$ . Então, a desigualdade da forma  $c := x_n \leq 0$  quando satisfeita considera que a transição de falha  $t_n$  não está contida em  $\sigma$ . Por outro lado, uma desigualdade da forma  $c' := x_n > 0$  quando satisfeita considera a ocorrência de uma transição de falha  $t_n$  em  $\sigma$ .

Utilizando as desigualdades  $c$  e  $c'$  com o conjunto  $\mathbb{E}$  podemos inferir as seguintes conclusões sobre a ocorrência da transição de falha  $t_n$  na sequência de disparos  $\sigma$ : (i)  $\mathbb{E} \cup \{c\}$  forma um conjunto de desigualdades que devem ser satisfeitas por sequências de disparos de transições  $\sigma$  que não contém a transição de falha  $t_n$ , ou seja, o sistema está com um comportamento livre de falha; (ii)  $\mathbb{E} \cup \{c'\}$  forma um conjunto de desigualdades que devem ser satisfeitas por sequências de disparos de transições  $\sigma$  que contém a transição de falha  $t_n$ , ou seja, o sistema está com um comportamento com falha. Note que o sistema pode ter transições não observadas em uma sequência de disparos de transições  $\sigma$ , então, a não observação de determinadas variáveis associadas a estas transições impede a verificação do comportamento do sistema em relação a falha através do conjuntos de desigualdades  $\mathbb{E} \cup \{c\}$  e  $\mathbb{E} \cup \{c'\}$ . Portanto, torna-se necessário eliminar as variáveis relativas as transições não observadas nos dois conjuntos para podermos com a observação das variáveis relativas as transições observadas realizar a verificação do comportamento do sistema em relação a falha. O método de eliminação inteira Fourier-Motzkin (IFME) foi escolhido para eliminar todas as variáveis correspondentes a transições não observadas nos conjuntos de desigualdades  $\mathbb{E} \cup \{c\}$  e  $\mathbb{E} \cup \{c'\}$  gerando os conjuntos denotados como  $R$  e  $R'$  respectivamente.

A vantagem de se utilizar os conjuntos de desigualdades  $R$  e  $R'$  é que podemos verificar pela observação de uma sequência de disparos  $\sigma$ , se a projeção para transições observadas satisfaz os conjuntos  $R$  e  $R'$  e informar sobre a ocorrência da falha [1]. Desta forma, dada uma sequência observada de disparos  $\sigma$ , e verificado o atendimento da valoração  $v(\sigma)$  aos conjuntos  $R$  e  $R'$ . Então, os estados de diagnose são estimados de acordo com os resultados. Em particular, se a sequência observada não satisfaz o conjunto  $R$  mas satisfaz o conjunto  $R'$ , então a diagnose é de falha. Em contrapartida, se a sequência observada não satisfaz o conjunto  $R'$  mas satisfaz o conjunto  $R$ , então a diagnose é livre de falha. Caso a sequência observada satisfaça simultaneamente os conjuntos  $R$  e  $R'$ , então a diagnose é de incerteza quanto a ocorrência da falha. O caso em que a sequência observada não satisfaça simultaneamente os conjuntos  $R$  e  $R'$  não é possível [1].

Formalmente, suponha uma rede de Petri acíclica com uma marcação  $M_0$  inicial. Suponha que  $\mathbb{E}$  é o conjunto de desigualdades  $-Ax \leq M_0$  produzido a partir da equação de estado de  $\mathcal{N}$ . Suponha que  $T = T_o \cup T_{uo}$ ,  $T_o = \{t_1, \dots, t_k\}$ ,  $T_{uo} = \{t_{k+1}, \dots, t_n\}$  e  $t_n$  é uma transição de falha. O vetor de variáveis  $x_1, \dots, x_n$  corresponde ao número de disparos das transições  $t_1, \dots, t_n$ . Considere-se também que  $c$  é a desigualdade  $x_n \leq 0$  e  $c'$  é a sua negação. Suponha-se que o conjunto de desigualdades  $R$  e  $R'$  são respectivamente produzidos a partir da aplicação de IFME para ambos  $\mathbb{E} \cup \{c\}$  e  $\mathbb{E} \cup \{c'\}$  para eliminar todas as variáveis correspondentes a transições em  $T_{uo}$ . Então, para qualquer sequência dada de transições observadas  $s = P_o(\sigma)$ , em que  $\sigma$  é uma sequência de disparos em  $\mathcal{N}$ , temos a diagnose sendo realizada como:

- 1  $v(s) \not\models R \wedge v(s) \models R'$ , então  $\Delta(s) = F$  (falha).
- 2  $v(s) \models R \wedge v(s) \not\models R'$ , então  $\Delta(s) = N$  (sem falha).
- 3  $v(s) \models R \wedge v(s) \models R'$ , então  $\Delta(s) = FN$  (incerto).
- 4  $v(s) \not\models R \wedge v(s) \not\models R'$ , não é possível ter este caso.

**Exemplo 3** Para ilustrar método proposto no trabalho, vamos considerar a rede de Petri  $(\mathcal{N}, M_0)$  representada na figura 3.1 em que  $P = \{p_1, \dots, p_7\}$  e  $T = \{t_1, \dots, t_7\}$ . Nesta rede, só há uma falha modelada pela transição  $t_7$  e a marcação inicial é  $M_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

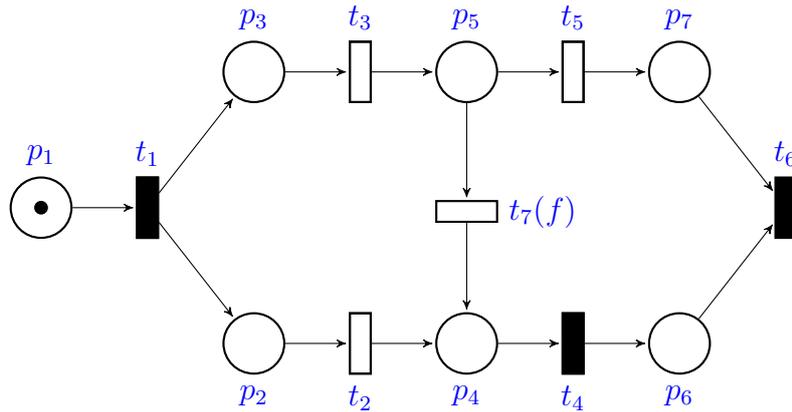


Figura 3.1: Rede de Petri Acíclica  $(\mathcal{N}, M_0)$

A equação de estado para esta rede de Petri é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

Neste exemplo, a desigualdade  $c$  pode ser escrita como  $x_7 \leq 0$  e a sua negação  $c'$  como  $x_7 > 0$  ou  $-x_7 \leq -1$ . O conjunto de desigualdades na tabela 3.1 descreve o conjunto  $\mathbb{E}$  com a adição das desigualdades  $c$  e  $c'$ .

Tabela 3.1: Conjuntos de desigualdades  $\mathbb{E} \cup \{c\}$  e  $\mathbb{E} \cup \{c'\}$  do exemplo da figura 3.1

conjunto $\mathbb{E} \cup \{c\}$	conjunto $\mathbb{E} \cup \{c'\}$
$x_1 \leq 1$	$x_1 \leq 1$
$-x_1 + x_2 \leq 0$	$-x_1 + x_2 \leq 0$
$-x_1 + x_3 \leq 0$	$-x_1 + x_3 \leq 0$
$-x_2 + x_4 - x_7 \leq 0$	$-x_2 + x_4 - x_7 \leq 0$
$-x_3 + x_5 + x_7 \leq 0$	$-x_3 + x_5 + x_7 \leq 0$
$-x_4 + x_6 \leq 0$	$-x_4 + x_6 \leq 0$
$-x_5 + x_6 \leq 0$	$-x_5 + x_6 \leq 0$
$-x_i \leq 0$	$-x_i \leq 0$
$i \in \{1, \dots, 7\}$	$i \in \{1, \dots, 7\}$
$c: x_7 \leq 0$	$c': -x_7 \leq -1$

Então, aplicando o método IFME para cada conjunto de desigualdades estabelecidos na tabela 3.1, obtemos os dois conjuntos reduzidos  $R$  e  $R'$  conforme descrito na tabela 3.2. Note que todas as variáveis correspondentes a transições não observadas  $T_{uo} = \{t_2, t_3, t_5, t_7\}$  foram eliminadas em ambos os conjuntos. Os conjuntos de desigualdades  $R$  e  $R'$  estão nas variáveis que representam as transições observadas  $T_o = \{t_1, t_4, t_6\}$ .

Tabela 3.2: Conjuntos de desigualdades  $R$  e  $R'$  do exemplo da figura 3.1

conjunto $R$	conjunto $R'$
$x_1 \leq 1$	$x_1 \leq 1$
$-x_1 + x_4 \leq 0$	$-x_1 + x_6 \leq -1$
$-2x_1 + x_4 \leq 0$	$-2x_1 + x_4 + x_6 \leq 0$
$-x_4 + x_6 \leq 0$	$-x_4 + x_6 \leq 0$
$-x_1 + x_6 \leq 0$	$-2x_1 + x_4 \leq 0$
$-2x_1 + x_4 + x_6 \leq 0$	$-x_1 \leq -1$
$-x_1 \leq 0$	$-x_4 \leq 0$
$-x_4 \leq 0$	$-x_6 \leq 0$
$-x_6 \leq 0$	

Considerando a sequência observada  $s = \varepsilon$ , então,  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 0$  e  $x_6 = 0$ , quando não observamos qualquer transição a partir do conjunto  $T_o = \{t_1, t_4, t_6\}$ . Substituindo estes valores de variáveis em  $R$  e  $R'$ , observamos que o primeiro é satisfeito, mas o segundo não é. Nesse caso, estamos certos de que nenhuma falha aconteceu, ou seja,  $\Delta(s) = N$ . Da mesma forma, quando  $s = t_1 t_4 t_6$ , temos  $x_1 = 1$ ,  $x_4 = 1$  e  $x_6 = 1$ . Substituindo estes valores de variáveis em  $R$  e  $R'$ , observamos que o primeiro é satisfeito, mas o segundo não é. Assim, podemos concluir uma diagnose semelhante, ou seja, estamos certos de que nenhuma falha aconteceu, ou seja,  $\Delta(s) = N$ . Agora, assumimos que  $s = t_1 t_4 t_4$ , então,  $x_1 = 1$ ,  $x_4 = 2$  e  $x_6 = 0$ . Neste caso,  $R$  não é satisfeito mas  $R'$  é satisfeito o que implica que a falha certamente ocorreu, ou seja,  $\Delta(s) = F$ . Finalmente, tomando  $s = t_1 t_4$ , então,  $x_1 = 1$ ,  $x_4 = 1$  e  $x_6 = 0$ . Verificando estes valores em  $R$  e  $R'$ , obtém-se que ambos são satisfeitos. Com base nestes resultados, podemos inferir que a falha pode ou não ter acontecido, ou seja,  $\Delta(s) = FN$ .

## 3.2 Uma abordagem eficiente para a diagnose online de Sistemas a Eventos Discretos.

O trabalho de BASILE *et al.* [2] apresenta a diagnose de falhas em sistemas a eventos discretos modelados por rede de Petri em que as transições podem ser rotuladas por eventos. A falha é representada por um evento não observável e o diagnosticador online proposto é baseado na solução de um problema de programação inteira. As seguintes hipóteses são utilizadas ao longo do trabalho:

- Hipótese 1: Duas transições observadas diferentes não podem compartilhar o

mesmo evento.

A abordagem utilizada no trabalho é baseada no fato de que o disparo de uma transição observável exige marcação adequada de seus lugares de entrada. Se o mesmo evento estiver associado a mais do que uma transição, a execução do método fica comprometido.

- Hipótese 2: a sub-rede induzida pelas transições não observadas deve ser acíclica.

Esta hipótese é adotada pelo fato de que a equação de estado da rede de Petri aplicada a uma sub-rede induzida pelas transições não observadas  $\mathcal{N}_{uo}$  não tem soluções espúrias. Tal suposição não é necessária se  $\mathcal{N}_{uo}$  pertence a algumas subclasses de redes de Petri - por exemplo: grafos marcados vivos e máquina de estado. No entanto, por uma questão de generalidade, esta hipótese é utilizada.

- Hipótese 3: A linguagem gerada de uma rede de Petri deve ser diagnosticável

Esta hipótese é utilizada para permitir que o diagnosticador possa distinguir tanto entre “ocorreu uma falha com certeza” e “uma falha pode não ter ocorrido”, e entre “uma falha pode ter ocorrido” e “uma falha não ocorreu com certeza”.

Para a construção do diagnosticador proposto por BASILE *et al.* [2] é necessário o cálculo online do conjunto de possíveis eventos não observados que explicam o último evento observado. Para alcançar este resultado, as marcações-g são introduzidas neste trabalho. Estas marcações são definidas da seguinte forma: se o disparo de uma transição  $t_o$  é observado e a marcação da rede é atualizada de acordo com a equação de estado da rede de Petri, pode ocorrer que a marcação determinada tenha componentes com valores negativos, então esta marcação é denominada de marcação-g. Os valores negativos são explicados pelo fato que na presença de transições não observadas, a transição  $t_o$  não foi ativada sob a marcação atual e a fim de ativar ela, uma sequência de transições não observadas foram disparadas antes. O trabalho proposto baseia-se em um problema de programação linear utilizando as marcações-g para calcular online os vetores de contagem de disparo associados a sequências de transições não observadas que podem explicar o disparo de uma transição observável  $t_o$ , e, conseqüentemente, também, as ocorrências de transições que representem eventos de falhas. Se tal vetor de contagem de disparo é único, a marcação-g se atualiza, caso contrário, mais observações são necessárias para atualizá-lo.

Considere uma rede de Petri  $\mathcal{N}$ , com  $T = T_o \cup T_{uo}$  e  $T_f \subseteq T_{uo}$ , a rede induzida  $\mathcal{N}_{uo} \prec_{T_{uo}} \mathcal{N}$  é definida como uma rede de Petri obtida a partir de  $\mathcal{N}$  removendo todos os lugares que não estão conectados com qualquer transição em  $T_{uo}$  e todas

as transições em  $T \setminus T_{uo}$ , portanto,  $P_{uo}$  e  $T_{uo}$  é conjunto dos lugares e o conjunto transições de  $\mathcal{N}_{uo} \prec_{T_{uo}} \mathcal{N}$ , respectivamente. A projeção de uma marcação  $m$  em  $\mathcal{N}$  sobre  $P_{uo}$  é denotado por  $m|_{P_{uo}} : P_{uo} \rightarrow \mathbb{N}^k$ , em que  $k = |P_{uo}|$ .

Sendo  $\mu \in \mathbb{Z}^m$  uma marcação-g, então as seguintes definições são apresentadas no trabalho:

- $\Upsilon(\mathcal{N}, \mu) = \{\sigma \in T_{uo}^* \mid \mu[\sigma]\mu' \text{ s.t. } \mu' \geq 0\}$  é o conjunto de todas as sequências de disparos de transições não observadas que podem ser ativadas em  $\mu$
- $\Sigma(\mathcal{N}, \mu) = \{\varepsilon \in \mathbb{N}^n \mid \exists \sigma \in \Upsilon(\mathcal{N}, \mu) \text{ s.t. } v(\sigma) = \varepsilon\}$  é o conjunto de todos os vetores de contagem das sequências de disparos de transições não observadas que podem ser ativadas em  $\mu$ , em que  $v(\sigma)$  é o vetor de contagem de disparos de  $\sigma$ .

Para diagnosticar uma transição de falha  $t_f$ , é suficiente considerar um subconjunto específico de  $\Upsilon(\mathcal{N}, \mu)$ . Em particular, o conjunto de sequências de disparos de transições não observadas contendo a transição de falha  $t_f$  que podem ser ativadas em  $\mu$  é definido como  $\Upsilon_f(\mathcal{N}, \mu, t_f) = \{\sigma \in T_{uo}^* \mid \mu[\sigma]\mu' \text{ s.t. } \mu' \geq 0 \text{ e } \varepsilon(t_f) \neq 0\}$ , em que  $\varepsilon(t_f)$  é a quantidade de disparos da transição  $t_f$ . O conjunto de todos os vetores de contagem das sequências de disparos de transições não observadas contendo a transição de falha  $t_f$  que podem ser ativadas em  $\mu$  é definido como  $\Sigma_f(\mathcal{N}, \mu, t_f) = \{\varepsilon \in \mathbb{N}^n \mid \exists \sigma \in \Upsilon_f(\mathcal{N}, \mu, t_f) \text{ s.t. } v(\sigma) = \varepsilon\}$

No trabalho de BASILE *et al.* [2] é discutido que as cardinalidades de  $\Sigma(\mathcal{N}, \mu)$  e  $\Sigma_f(\mathcal{N}, \mu, t_f)$  permitem realizar a diagnose da falha  $t_f$ . Em particular, é possível estabelecer as ocorrências de uma falha  $t_f$  em termos de  $|\Sigma(\mathcal{N}, \mu)|$  e  $|\Sigma_f(\mathcal{N}, \mu, t_f)|$  ou de forma equivalente sobre os valores de  $\min_{\varepsilon \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu)} \varepsilon(t_f)$  e  $\max_{\varepsilon \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu)} \varepsilon(t_f)$ , como é apresentado na seguinte proposição.

**Proposição 1** (*Diagnose de falhas*): *Considere uma rede de Petri  $\mathcal{N}$ , com  $T = T_o \cup T_{uo}$ . Sejam  $t_f \in T_f \subseteq T_{uo}$  e  $\mu$  uma marcação-g. Para realizar a diagnose da falha  $t_f$ , as três condições a seguir devem ser verificadas:*

- 1a)  $\mu \not\geq 0$  e  $|\Sigma(\mathcal{N}, \mu)| = |\Sigma_f(\mathcal{N}, \mu, t_f)| > 0 \iff t_f \text{ ocorreu};$
- 2a)  $|\Sigma_f(\mathcal{N}, \mu, t_f)| = 0 \iff t_f \text{ não ocorreu};$
- 3a)  $|\Sigma_f(\mathcal{N}, \mu, t_f)| \neq 0 \iff t_f \text{ pode ter ocorrido}.$

*As três condições listadas acima são equivalentes às seguintes, respectivamente:*

- 1b)  $\mu \not\geq 0$  e  $\min_{\varepsilon \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu)} \varepsilon(t_f) \neq 0 \iff t_f \text{ ocorreu};$
- 2b)  $\max_{\varepsilon \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu)} \varepsilon(t_f) = 0 \iff t_f \text{ não ocorreu};$

- 3b)  $\max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu)} \boldsymbol{\varepsilon}(t_f) \neq 0 \iff t_f$  pode ter ocorrido.

Se a condição 1b se mantiver e  $\min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu)} \boldsymbol{\varepsilon}(t_f) = a$ , então  $t_f$  ocorreu pelo menos  $a$  vezes. Enquanto se a condição 3b se mantiver e  $\max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu)} \boldsymbol{\varepsilon}(t_f) = b$ , então  $t_f$  pode ter disparado no máximo  $b$  vezes. Além disso, se  $a = b = n$ , a falha ocorreu exatamente  $n$  vezes.

Para realizar a diagnose de falhas, um algoritmo é proposto em [2] no qual são utilizados estimativas para marcação-g através da equação de estado e da determinação do  $\min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu)} \boldsymbol{\varepsilon}(t_f)$  e  $\max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu)} \boldsymbol{\varepsilon}(t_f)$  através da programação linear inteira. Mostraremos, a seguir, um exemplo no qual são apresentadas as idéias do diagnosticador.

**Exemplo 4** A rede de Petri mostrada na figura 3.2 tem  $T_o = \{t_1, t_2, t_6, t_7\}$ ,  $T_{uo} = \{t_3, t_4, t_5\}$  e a sub-rede  $\mathcal{N}_{uo} \prec_{T_{uo}} \mathcal{N}$  com  $P_{uo} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$  mostrada na figura 3.3. Considerando a marcação-g inicial da rede como  $\mu_0 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , caso o disparo de  $t_6 \in T_o$  seja observado, então a nova marcação-g será  $\mu_1 = \mu_0 + Au_6 = [2 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0]^T$ . A projeção de  $\mu_1$  sobre  $P_{uo}$  é  $\mu_{1|P_{uo}} = [2 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0]^T$ . A marcação negativa  $\mu_{1|p_5} = -1$  significa que uma sequência não observável  $\sigma \in T_{uo}^*$  deve ter sido disparada para explicar o disparo de  $t_6$ . Neste exemplo simples, é imediato observar que  $\sigma_1 = t_3t_5$ ,  $\sigma_2 = t_4t_5$ ,  $\sigma_3 = t_3t_4t_5$ ,  $\sigma_4 = t_3t_5t_4$ ,  $\sigma_5 = t_4t_3t_5$ ,  $\sigma_6 = t_4t_5t_3$ ,  $\sigma_7 = t_3t_5t_4t_5$ ,  $\sigma_8 = t_3t_4t_5t_5$ ,  $\sigma_9 = t_4t_5t_3t_5$  e  $\sigma_{10} = t_4t_3t_5t_5$  é o conjunto de todas as sequências de transições não observadas  $\sigma$  de tal forma que  $\mu_1 + Ax \geq 0$ , em que  $x$  é o vetor de contagem de disparos de  $\sigma$ . Assim, as transições não observadas  $t_3$ ,  $t_4$  e  $t_5$  são habilitadas em  $\mu_1$ , uma vez que pertencem a sequências de transições não observadas  $\sigma \in T_{uo}^*$  tal que  $\mu = \mu_1 + Ax \geq 0$ . Em particular, o disparo de  $t_3$  produz a marcação-g  $\mu_2 = \mu_1 + Au_3 = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0]^T$ , com  $t_4$  e  $t_5$  ainda ativada em  $\mu_2$ , enquanto o disparo de  $t_5$  produz  $\mu_3 = \mu_1 + Au_5 = [2 \ 1 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , com  $t_3$ ,  $t_4$  e  $t_5$  ativado em  $\mu_3$ .

Se considerarmos a falha como a transição  $t_5$  e o disparo de  $t_6$  for observado a partir da marcação-g  $\mu_0$  temos que  $\mu_1 \not\geq 0$  e  $|\Sigma(\mathcal{N}, \mu_1)| = |\Sigma_f(\mathcal{N}, \mu_1, t_5)| = 10 > 0$  então pela proposição 1 item 1a) temos que a falha ocorreu. Neste caso temos que  $\min_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu_1)} \boldsymbol{\varepsilon}(t_5) = 1$  e  $\max_{\boldsymbol{\varepsilon} \in \Sigma(\mathcal{N}, \mu_1)} \boldsymbol{\varepsilon}(t_5) = 2$  representando que a falha pode ter ocorrido uma ou duas vezes.

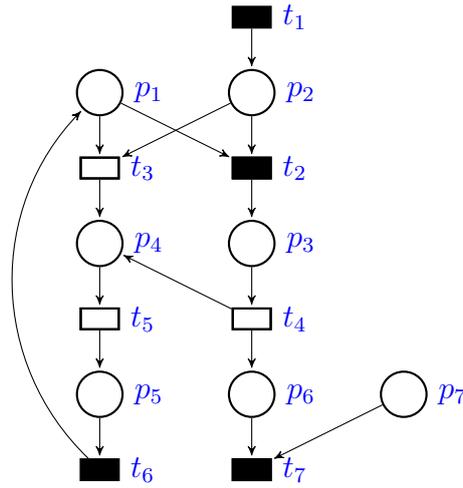


Figura 3.2: Modelo de rede de Petri

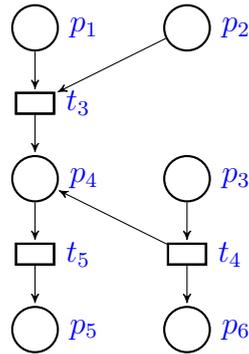


Figura 3.3: Sub-rede  $\mathcal{N}_{uo} \prec_{T_{uo}} \mathcal{N}$  da rede de Petri da figura 3.2

### 3.3 Diagnose de eventos discretos usando redes de Petri rotuladas.

O trabalho de CABASINO *et al.* [5] apresenta a diagnose de falhas online de sistemas a eventos discretos baseados em rede de Petri em que transições podem ser rotuladas por eventos e que o mesmo rótulo pode ser associado a mais do que uma transição. A abordagem pode ser utilizada em uma rede de Petri limitada ou ilimitada, cuja sub-rede de eventos não observados é acíclica. Além disso, no caso de uma rede de Petri limitada, a diagnose de falhas pode ser realizada através do Grafo de Alcançabilidade de Base (BRG).

Neste trabalho são consideradas as seguintes definições:

- $w \in E^*$  é uma sequência de eventos observados.
- O conjunto  $T_f \subseteq T_{uo}$  é particionado em  $r$  subconjuntos diferentes  $T_f^i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , que modelam as diferentes classes de falhas. As transições que pertencem à mesma classe de falha são transições que representam falha similar.
- $S(w)$  é o conjunto de sequências de disparo de transições consistente com a sequência observada  $w \in E^*$ , ou seja,  $S(w) = \{\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) | w = l(P_o(\sigma))\}$
- $C(w)$  é o conjunto de marcações alcançáveis consistentes com  $w \in E^*$ , ou seja,  $C(w) = \{M \in \mathbb{N}^m | \exists \sigma \in T^* : w = l(P_o(\sigma)) \wedge M_0[\sigma]M\}$
- $\Sigma(M, t)$  é o conjunto de sequências de disparos de transições não observadas, denominadas explicações, cujo disparo em  $M$  habilita  $t$ , ou seja,  $\Sigma(M, t) = \{\sigma \in T_{uo}^* | M[\sigma \succ M', M' \geq Pre(\cdot, t)]\}$
- $Y(M, t)$  é o conjunto dos vetores- $e$  ou vetores de explicação, isto é, vetores de disparo associados às explicações, ou seja,  $Y(M, t) = v(\Sigma(M, t))$
- Entre as explicações existentes, existem aquelas cujo vetor de disparo é mínimo. O vetor de disparo dessas sequências é chamado de  $e$ -vetores mínimos. Desta forma temos:

$$\Sigma_{min}(M, t) = \{\sigma \in \Sigma(M, t) | \nexists \sigma' \in \Sigma(M, t) : v(\sigma') \preceq v(\sigma)\},$$

o conjunto de explicações mínimas de  $t$  em  $M$ , e

$$Y_{min}(M, t) = v(\Sigma_{min}(M, t)),$$

o conjunto correspondente de vetores- $e$  mínimos.

- $\hat{J}(w)$  é o conjunto de pares em que o primeiro elemento é a sequência  $\sigma_o \in T_o^*$  com  $w = l(\sigma_o)$  e o segundo elemento denominado justificativa correspondente de  $w$  é a sequência correspondente de transições não observadas e intercaladas com  $\sigma_o$ , quando disparadas, ativa  $\sigma_o$ , possuindo um vetor de disparo mínimo, ou seja:

$$\hat{J}(w) = \{(\sigma_o, \sigma_u), \sigma_o \in T_o^*, l(\sigma_o) = w, \sigma_u \in T_u^* | [\exists \sigma \in S(w) : \sigma_o = P_o(\sigma), \sigma_u = P_u(\sigma)] \wedge [\nexists \sigma' \in S(w) : (\sigma_o = P_o(\sigma'), \sigma_u = P_u(\sigma')) \wedge (v(\sigma'_u) \preceq v(\sigma_u))]\}$$

- $\hat{Y}_{min}(M_0, w)$  é o conjunto de pares em que o primeiro elemento é a sequência  $\sigma_o \in T_o^*$  com  $w = l(\sigma_o)$  e o segundo elemento denominado vetor- $j$  que é o vetor de disparo da justificativa correspondente de  $w$

$$\hat{Y}_{min}(M_0, w) = \{(\sigma_o, y), \sigma_o \in T_o^*, l(\sigma_o) = w, y \in \mathbb{N}^{n_u} | \exists (\sigma_o, \sigma_u) \in \hat{J}(w) : v(\sigma_u) = y\}$$

- $\mathcal{M}(w)$  é o conjunto de pares em que o primeiro elemento é uma marcação de base, isto é, a marcação atingida pelo disparo de  $\sigma_o$  intercalado com a justificativa  $\sigma_u$ , e o segundo elemento é o relativo vetor- $j$  que são consistentes com  $w \in E^*$

$$\mathcal{M}(w) = \{(M, y) | (\exists \sigma \in S(w) : M_0[\sigma \succ M) \wedge (\exists ((\sigma_o, \sigma_u) \in \hat{J}(w) : \sigma_o = P_o(\sigma), \sigma_u = P_u(\sigma), y = v(\sigma_u)))\}$$

Os autores definem a noção de diagnosticador da seguinte forma:

**Definição 8** *Um diagnosticador é uma função  $\Delta : E^* \times \{T_f^1, T_f^2, \dots, T_f^r\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$  que associa para cada observação  $w \in E^*$  e para cada classe de falha  $T_f^i$ ,  $i = 1, \dots, r$  uma diagnose como se segue.*

- $\Delta(w, T_f^i) = 0$  se para todo  $\sigma \in S(w)$  e para todo  $t_f \in T_f^i$  ele assegura que  $t_f \notin \sigma$ .

*Nesse caso, a falha não pode ter ocorrido, porque nenhuma das sequências de disparo consistente com a observação contém transições de falha da classe  $i$ .*

- $\Delta(w, T_f^i) = 1$  se:

(i) existe  $\sigma \in S(w)$  e  $t_f \in T_f^i$  tal que  $t_f \in \sigma$  mas

(ii) para todo  $(\sigma_o, \sigma_u) \in \hat{J}(w)$  e para todo  $t_f \in T_f^i$  ele assegura que  $t_f \notin \sigma_u$ .

*Nesse caso, uma transição de falha da classe  $i$  pode ter ocorrido, mas não está contida em qualquer justificativa de  $w$ .*

- $\Delta(w, T_f^i) = 2$  se existir  $(\sigma_o, \sigma_u), (\sigma'_o, \sigma'_u) \in \hat{J}(w)$  tal que

(i) existe  $t_f \in T_f^i$  tal que  $t_f \in \sigma_u$  ;

(ii) para todo  $t_f \in T_f^i$ ,  $t_f \notin \sigma'_u$ .

*Nesse caso, uma transição de falha da classe  $i$  está contida em uma, mas não em todas justificativas de  $w$ .*

- $\Delta(w, T_f^i) = 3$  se para todo  $\sigma \in S(w)$  existe  $t_f \in T_f^i$  tal que  $t_f \in \sigma$ .

*Nesse caso, a falha  $i$  deve ter ocorrido, porque todas as sequências que podem ser disparadas e consistentes com a observação contem pelo menos uma falha em  $T_f^i$ .*

A proposição descrita a seguir apresenta como os estados de diagnose podem ser caracterizados analisando as marcações básicas e justificativas.

**Proposição 2** *Considere uma palavra observada  $w \in E^*$*

- $\Delta(w, T_f^i) \in \{0, 1\}$  se e somente se para todo  $(M, y) \in \mathcal{M}(w)$  e para todo  $t_f \in T_f^i$  assegura  $y(t_f) = 0$ .
- $\Delta(w, T_f^i) = 2$  se e somente se houver  $(M, y) \in \mathcal{M}(w)$  e  $(M', y') \in \mathcal{M}(w)$  tal que:
  - (i) existe  $t_f \in T_f^i$  tal que  $y(t_f) > 0$ ,
  - (ii) para todo  $t_f \in T_f^i$ ,  $y'(t_f) = 0$ .
- $\Delta(w, T_f^i) = 3$  se e somente se para todo  $(M, y) \in \mathcal{M}(w)$  existe  $t_f \in T_f^i$  tal que  $y(t_f) > 0$ .

A seguinte proposição mostra como distinguir entre os estados de diagnose 0 e 1.

**Proposição 3** *Para uma rede de Petri cuja sub-rede não observável é acíclica, seja  $w \in E^*$  uma palavra observada tal que para todo  $(M, y) \in \mathcal{M}(w)$  ela contém  $y(t_f) = 0 \forall t_f \in T_f^i$ . Considere o conjunto de restrições*

$$\mathcal{T}(M, T_f^i) = \begin{cases} M + A_{uo} \cdot z \geq \vec{0}, \\ \sum_{t_f \in T_f^i} z(t_f) > 0, \\ z \in \mathbb{N}^{n_u}. \end{cases} \quad (3.1)$$

- $\Delta(w, T_f^i) = 0$  se  $\forall (M, y) \in \mathcal{M}(w)$  o conjunto de restrições não é viável.
- $\Delta(w, T_f^i) = 1$  se  $\exists (M, y) \in \mathcal{M}(w)$  tal que o conjunto de restrições seja viável.

Com base nas proposições 2 e 3, se a sub-rede não observável for acíclica, a diagnose de falhas é baseada na computação preliminar do conjunto  $\mathcal{M}(w)$  para qualquer sequência observada  $w$ . Se  $\Delta = 2$  ou  $\Delta = 3$ , nenhum cálculo adicional é necessário, entretanto, para distinguir entre  $\Delta = 0$  e  $\Delta = 1$ , é utilizado um problema de programação inteira para resolver esta indefinição. Observe que ambos os estados do diagnosticador  $\Delta = 1$  e  $\Delta = 2$  correspondem a estados de incerteza quanto a ocorrência da falha.

Em resumo, podemos aplicar o procedimento tanto a redes de Petri limitadas quanto ilimitadas. Trata-se de uma abordagem online que, para cada novo evento observado, atualiza o estado do diagnosticador para cada classe de falha computando o conjunto de marcações de base e vetores- $j$ . Além disso, se para a classe de falha  $T_f^i$  for necessário distinguir entre os estados de diagnose 0 e 1, também é necessário resolver para cada marcação de base  $M_b$  o conjunto de restrições  $\mathcal{T}(M_b, T_f^i)$ .

Neste trabalho é mostrado que se a rede considerada for limitada, a parte mais onerosa do procedimento pode ser realizada offline, definindo um grafo chamado

BRG (Grafo de Alcançabilidade de Base). Este é um grafo determinístico que possui tantos nós quanto o número de possíveis marcações de base.

Para cada nó é associado uma marcação de base diferente  $M$  e um vetor linha com tantas entradas quanto o número de classes de falhas. As entradas deste vetor só podem ter valores binários: 1 se  $\mathcal{T}(M, T_f^i)$  for viável, 0 caso contrário.

Arcos são rotulados com eventos observados em  $E$  e vetores- $e$ . Mais precisamente, existe um arco de um nó contendo a marcação de base  $M$  para um nó contendo a marcação de base  $M'$  se, e somente se, existir uma transição  $t_k$  para a qual existe uma explicação em  $M$  e o disparo de  $t_k$  e de uma de suas explicações mínimas conduz a  $M'$ . O arco que vai de  $M$  a  $M'$  é rotulado  $(l(t_k), \vec{e})$ , em que  $e \in Y_{min}(M, t_k)$  e  $M' = M + A_{uo} \cdot \vec{e} + Au_k$ .

Observe que o número de nós do BRG é sempre finito, sendo o conjunto de marcações de base um subconjunto do conjunto de marcações alcançáveis, que é finito sendo a rede limitada. Além disso, os vetores linha de valores binários associados aos nós do BRG nos permite distinguir entre o estado de diagnose 0 ou 1.

O BRG é um grafo contendo todas as informações necessárias para a construção de um observador. No caso de redes de Petri limitadas, uma versão modificada do BRG é usada para construir um diagnosticador que é usado para estudar a diagnosticabilidade do sistema [6]. Note que, se um autômato tiver um número  $n$  de estados, no pior dos casos (que depende da rotulagem de eventos) a cardinalidade do conjunto de nós de seu observador é  $(2^n - 1)$  [9]. Pelo contrário, o número de nós do BRG é igual ao número de marcações de base que é no máximo igual ao número de marcações alcançáveis.

Neste trabalho são descritos alguns algoritmos para a aplicação do procedimento, tais como:

- determinação de  $Y_{min}(M, t)$
- determinação das marcações básicas e vetores- $j$
- determinação de BRG
- diagnose utilizando BRG

Mostraremos, a seguir, um exemplo no qual é apresentado as idéias do diagnosticador.

**Exemplo 5** *Considere a rede de Petri mostrada na figura 3.4 em que  $T_o = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$  e  $T_{uo} = \{e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$ . Para um melhor entendimento as transições não observadas foram representadas por  $e_i$  ao invés de  $t_i$ . A função de rotulagem é definida da seguinte forma:*

$l(t_1) = a$ ,  $l(t_2) = l(t_3) = b$ ,  $l(t_4) = l(t_5) = c$  e  $l(t_6) = l(t_7) = d$ . Vamos tomar como exemplo a sequência de eventos observados  $w = ab$ . Para esta sequência temos  $S(w) = \{t_1t_2, t_1t_2e_8, t_1t_2e_8e_9, t_1t_2e_8e_9e_{10}, t_1t_2e_8e_{11}\}$  e  $C(w) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \right.$   
 $\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \right.$   
 $\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$ .

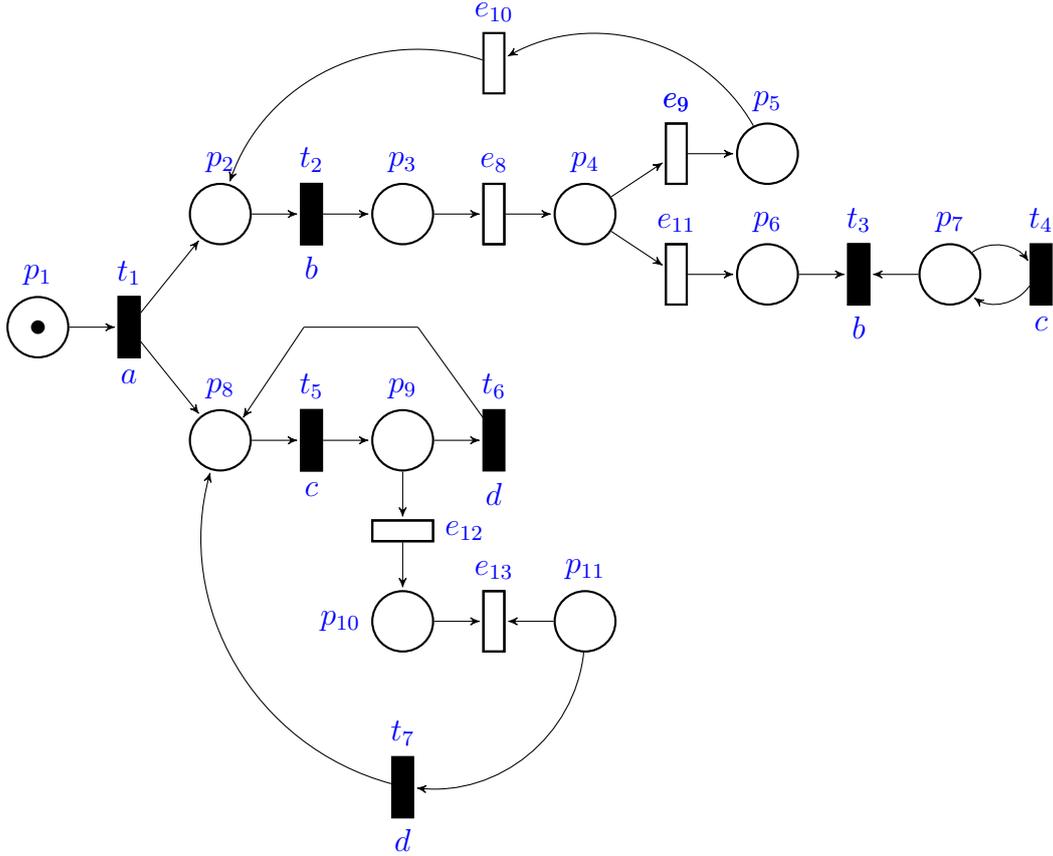


Figura 3.4: Modelo de rede de Petri

Nesta rede de Petri temos que  $\sum(M_0, t_1) = \{\varepsilon\}$  enquanto  $\sum(M_0, t_2) = \emptyset$ . Finalmente, tomando  $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , temos que  $\sum(M, t_5) = \{\varepsilon, e_8, e_8e_9, e_8e_{11}, e_8e_9e_{10}\}$ , enquanto  $\sum_{min}(M, t_5) = \{\varepsilon\}$ . Segue que  $Y(M, t_5) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$  e  $Y_{min}(M, t_5) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}$ .

Suponha que  $w = ab$ , então temos  $\hat{J}(w) = \{(t_1t_2, \varepsilon)\}$  e  $\hat{Y}_{min}(M_0, w) = \{(t_1t_2, \vec{0})\}$ , portanto, a marcação de base é  $M_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  e  $\mathcal{M}(w) = \{(M_b, \vec{0})\}$ .

Seja  $T_f = \{e_{11}, e_{12}\}$ . Suponha que as duas transições de falha pertençam a diferentes classes de falhas, ou seja,  $T_f^1 = \{e_{11}\}$  e  $T_f^2 = \{e_{12}\}$ . Vamos observar  $w = a$ . Então  $\Delta(w, T_f^1) = \Delta(w, T_f^2) = 0$ , sendo  $\hat{J}(w) = \{(t_1, \varepsilon)\}$  e  $S(w) = \{t_1\}$ . Conclui-se que nenhuma falha de ambas as classes de falhas pode ter ocorrido.

Vamos observar  $w = ab$ . Então  $\Delta(w, T_f^1) = 1$  e  $\Delta(w, T_f^2) = 0$ , sendo  $\hat{J}(w) = \{(t_1 t_2, \varepsilon)\}$  e  $S(w) = \{t_1 t_2, t_1 t_2 e_8, t_1 t_2 e_8 e_9, t_1 t_2 e_8 e_9 e_{10}, t_1 t_2 e_8 e_{11}\}$ . Isso significa que uma falha da primeira classe pode ter ocorrido (disparando a sequência  $t_1 t_2 e_8 e_{11}$ ), mas não está contida em nenhuma justificativa de  $ab$ , enquanto nenhuma falha da segunda classe de falha pode ter ocorrido.

Agora, considere  $w = abb$ . Neste caso,  $\Delta(w, T_f^1) = 2$  e  $\Delta(w, T_f^2) = 0$ , sendo  $\hat{J}(w) = \{(t_1 t_2 t_2, e_8 e_9 e_{10}), (t_1 t_2 t_3, e_8 e_{11})\}$  e  $S(w) = \{t_1 t_2 e_8 e_9 e_{10} t_2 e_8, t_1 t_2 e_8 e_9 e_{10} t_2 e_8, t_1 t_2 e_8 e_9 e_{10} t_2 e_8 e_9, t_1 t_2 e_8 e_9 e_{10} t_2 e_8 e_9 e_{10}, t_1 t_2 e_8 e_9 e_{10} t_2 e_8 e_{11}, t_1 t_2 e_8 e_{11} t_3\}$ . Isso significa que nenhuma falha da segunda classe de falha pode ter ocorrido, enquanto uma falha da primeira classe de falha pode ter ocorrido desde que uma justificativa não contém  $e_{11}$  e uma justificativa contém  $e_{11}$ .

Finalmente, considere  $w = abbcc$ . Neste caso,  $\Delta(w, T_f^1) = 3$  e  $\Delta(w, T_f^2) = 1$ , sendo  $\hat{J}(w) = \{(t_1 t_2 t_3 t_4 t_4, e_8 e_{11}), (t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_4, e_8 e_{11}), (t_1 t_2 t_3 t_4 t_4 t_5, e_8 e_{11}), (t_1 t_2 t_3 t_4 t_4 t_4, e_8 e_{11})\}$ , então uma falha da primeira classe de falha deve ter ocorrido, enquanto uma falha da segunda classe de falha pode ter ocorrido (por exemplo,  $t_1 t_2 e_8 e_{11} t_3 t_4 t_4 t_5 e_{12}$ ), mas isso não está contido em nenhuma justificativa de  $w$ .

Considere  $w = ab$ . Neste caso,  $\mathcal{M}(w) = \{(M_b^1, \vec{0})\}$ , em que  $M_b^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , então  $\mathcal{T}(M_b^1, T_f^1)$  é viável apenas para  $i = 1$  e  $\Delta(w, T_f^1) = 1$  e  $\Delta(w, T_f^2) = 0$ .

Considere  $w = abb$ . Neste caso,  $\mathcal{M}(w) = \{(M_b^1, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T), (M_b^2, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T)\}$ , em que  $M_b^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , então,  $\Delta(w, T_f^1) = 2$  e  $\Delta(w, T_f^2) = 0$  e ambos  $\mathcal{T}(M_b^2, T_f^1)$  e  $\mathcal{T}(M_b^2, T_f^2)$  não são viáveis.

Considere  $w = abbcc$ . Neste caso,  $\mathcal{M}(w) = \{(M_b^3, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T), (M_b^4, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T)\}$ , em que  $M_b^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  e  $M_b^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , então,  $\Delta(w, T_f^1) = 3$  e  $\mathcal{T}(M_b^4, T_f^2)$  é viável e portanto,  $\Delta(w, T_f^2) = 1$ .

O BRG para esta rede de Petri está mostrado na figura 3.5 em que a notação utilizada está detalhada nas tabelas 3.3 e 3.4. Cada nó contém uma marcação de base diferente e um vetor linha binária de dimensão dois que equivale ao número de classes de falhas. Como exemplo, o vetor binário  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$  está associado a  $M_0$  porque  $\mathcal{T}(M_0, T_f^i)$  não é viável para  $i = 1$  e  $i = 2$ . Do nó  $M_0$  para o nó  $M_1$  existe um arco rotulado como  $a$  com o vetor nulo como explicação mínima. O nó que contém o

marcação de base  $M_2$  tem o vetor binário  $[0 \ 1]$ , porque  $\mathcal{T}(M_2, T_f^i)$  é viável apenas para  $i = 2$ . O nó  $(M_2, [0 \ 1])$  tem dois arcos de saída, ambos rotulados como  $d$  e ambos direcionados para o nó  $(M_1, [0 \ 0])$  com duas explicações mínimas diferentes  $\vec{0}$  e  $\vec{e}_1$ , respectivamente, mais o outro arco de saída  $(b, \vec{0})$  está direcionado para o nó  $(M_4, [1 \ 1])$ .

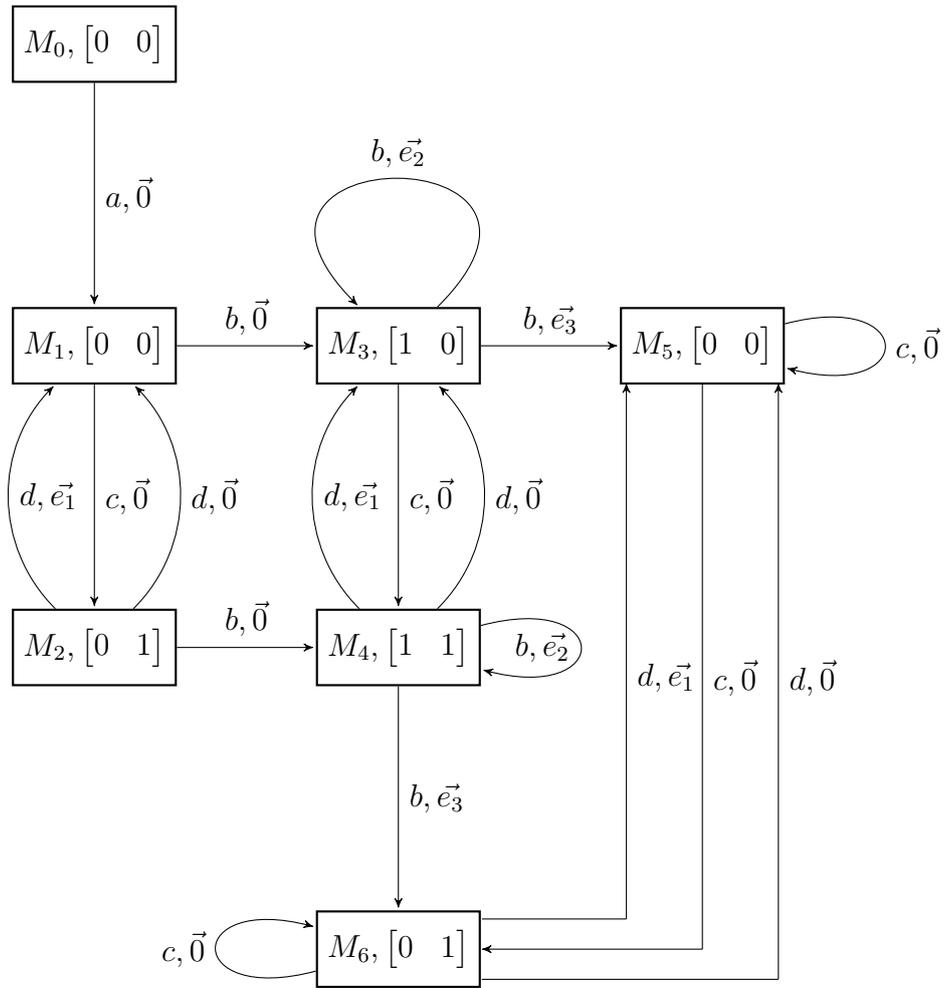


Figura 3.5: BRG da rede de Petri da figura 3.4

Tabela 3.3: Marcações do BRG da figura 3.5

$M_0 = [1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_1 = [0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_2 = [0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0]^{T}$
$M_3 = [0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_4 = [0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0]^{T}$
$M_5 = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$1$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_6 = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$1$	$0$	$0]^{T}$

Tabela 3.4: Vetores-e do BRG da figura 3.5

	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$	$e_{13}$
$\vec{e}_1$	0	0	0	0	1	1
$\vec{e}_2$	1	1	1	0	0	0
$\vec{e}_3$	1	0	0	1	0	0

Agora, mostraremos como realizar a diagnose online simplesmente observando o BRG. Seja  $w = \varepsilon$ , então, observando o BRG temos que  $\Delta(\varepsilon, T_f^1) = \Delta(\varepsilon, T_f^2) = 0$  sendo ambas as entradas do vetor linha associadas a marcação  $M_0$  igual a  $[0 \ 0]$ . Caso  $w = ab$ , então,  $\mathcal{M}(w) = \{(M_3, \vec{0})\}$  que apresenta  $\Delta(\varepsilon, T_f^1) = 1$  e  $\Delta(\varepsilon, T_f^2) = 0$  sendo o vetor linha deste nó igual a  $[1 \ 0]$ . Finalmente, para  $w = abbc$ , temos  $\Delta(\varepsilon, T_f^1) = 2$  e  $\Delta(\varepsilon, T_f^2) = 1$ . De fato,  $(w) = \{(M_4, y_1), (M_5, y_2), (M_6, y_3)\}$ , em que  $y_1 = \vec{e}_2$ ,  $y_2 = y_3 = \vec{e}_3$ , e os vetores linha associados as marcações  $M_4$  e  $M_5$  são respectivamente  $[1 \ 1]$ ,  $[0 \ 0]$  e  $[0 \ 1]$ .

### 3.4 Detecção de falhas online em Sistemas a Eventos Discretos por redes de Petri e programação linear inteira

O trabalho de DOTOLI *et al.* [13] apresenta detecção de falhas em sistemas a eventos discretos modelados por rede de Petri em que as transições podem ser rotuladas por eventos. As falhas são modeladas por transições não observadas. O diagnosticador proposto trabalha online aguardando o disparo de uma transição observável no qual um algoritmo decide se o comportamento do sistema é livre de falha ou contém alguma falha e é baseado na definição e solução de um problema de programação

linear inteira. As seguintes hipóteses são utilizadas ao longo do trabalho:

- a rede de Petri que modela o SED e a marcação inicial  $M_0$  devem ser conhecidas;
- diferentes transições não podem estar associadas ao mesmo evento;
- ciclos de eventos não observados não são admitidos.

As entradas do diagnosticador são a marcação inicial  $M_0$  e a sequência observada  $w$ . Considere que  $w = P_o(\sigma)$  em que a sequência  $\sigma = \sigma_1 t_{\alpha_1} \sigma_2 t_{\alpha_2} \dots \sigma_h t_{\alpha_h}$  com  $h \geq 1$  denota a sequência de transições observadas e não observadas correspondente à sequência  $w$ . Mais precisamente,  $\sigma_o = t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \dots t_{\alpha_h} = w$  com  $t_{\alpha_i} \in T_o$  para  $i = 1, \dots, h$  é a subsequência observável de  $\sigma$  e cada  $\sigma_i \in T_{uo}^*$  para  $i = 1, \dots, h$  é a sequência de transições não observadas que ocorreram antes da transição  $t_{\alpha_i}$  para  $i = 1, \dots, h$  e depois da transição  $t_{\alpha_{i-1}}$  para  $i = 2, \dots, h$ . As definições descritas a seguir são necessárias para a compreensão da construção do diagnosticador.

**Definição 9** *Dada a marcação inicial  $M_0 \in \mathbb{N}^m$  e uma sequência de transições observadas  $\sigma_o$  tal que  $M_0[\sigma_o]$ , ou seja,  $\sigma_o$  está habilitada a partir de  $M_0$ , define-se  $\Sigma(M_0, \sigma_o) = \{\sigma \in T^* | M_0[\sigma] \text{ e } \sigma_o \in \sigma\}$  como o conjunto de interpretações de  $\sigma_o$  em  $M_0$ . Em outras palavras,  $\Sigma(M_0, \sigma_o)$  é o conjunto de sequências contendo a sequência observável  $\sigma_o$  e as sequências de transições não observadas cujo disparo em  $M_0$  é consistente com  $\sigma_o$ .*

**Definição 10** *Dada a marcação inicial  $M_0 \in \mathbb{N}^m$  e uma sequência de transições observadas  $\sigma_o$ , define-se o conjunto de interpretações de  $\sigma_o$  em  $M_0$  contendo a falha  $f_k \in T_f$  como:  $\Sigma(M_0, \sigma_o, f_k) = \{\sigma \in \Sigma(M_0, \sigma_o) | f_k \in \sigma\}$*

**Definição 11** *O diagnosticador proposto é uma função  $\phi : \mathbb{N}^m \times T_o^* \rightarrow T_f \cup \{N\}$  que associa a cada marcação inicial  $M_0 \in \mathbb{N}^m$  e a cada observação  $w \in T_o^*$  os seguintes conjuntos:*

- $\phi(M_0, w) = \{N\}$  se  $\forall f_k \in T_f$  é garantido  $\Sigma(M_0, \sigma_o, f_k) = \emptyset$ , isto é, o comportamento do sistema é livre de falha durante a sequência observada  $w$  porque não existe uma sequência de disparos de transições contendo uma transição  $t_k \in T_f$  que seja consistente com a sequência observada;
- $\phi(M_0, w) = \{f_k \in T_f | \Sigma(M_0, \sigma_o, f_k) \neq \emptyset \text{ com } \sigma_o = w\}$ , isto é, o comportamento do sistema contém uma ou mais falhas durante a sequência observada  $w$ . Nesse caso, o diagnosticador fornece as possíveis falhas  $t_k \in T_f$  que podem estar contidas em uma sequência consistente com a sequência observada;

- $\phi(M_0, w) = \{f_k \in T_f \mid \Sigma(M_0, \sigma_o, f_k) \neq \emptyset \text{ com } \sigma_o = w\} \cup \{N\}$ , isto é, o comportamento do sistema contém uma incerteza, porque dois casos são possíveis: (i) uma ou mais falhas  $t_k \in T_f$  podem ter ocorrido durante a sequência observada  $w$ , (ii) o comportamento do sistema pode ser livre de falha.

As seguintes proposições são utilizadas para especificar o diagnosticador  $\phi$  e caracterizar o comportamento do sistema como livre de falha, com falha ou incerto. Em particular, para cada marcação inicial  $M_0 \in \mathbb{N}^m$ , na ocorrência de uma sequência observada  $w$ , a proposição descrita a seguir proporciona uma caracterização linear de cada sequência  $\sigma \in T^*$  cujo disparo em  $M_0$  é consistente com a sequência observada  $\sigma_o = w$ .

**Proposição 4** *Considere uma rede de Petri modelando um SED com a linguagem  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  e satisfazendo as hipóteses descritas anteriormente. Dada uma sequência observada  $w$  denotada por  $w = \sigma_o = t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \dots t_{\alpha_h}$ , a sequência  $\sigma = \sigma_1 t_{\alpha_1} \sigma_2 t_{\alpha_2} \dots \sigma_h t_{\alpha_h}$  com  $|\sigma_i| \geq 0$  para  $i = 1, \dots, h$ , é tal que  $\sigma \in \Sigma(M_0, \sigma_o)$  se e somente se houver  $h$  vetores de disparos  $\vec{\sigma}_1, \dots, \vec{\sigma}_i, \dots, \vec{\sigma}_h$  que satisfaçam o seguinte conjunto de restrições lineares:*

$$\begin{aligned} & \xi(w, M_0, Post, Pre) \\ &= \begin{cases} \vec{\sigma}_i \in \mathbb{N}^{n_{uo}}, \text{ para } i = 1; \dots; h \text{ e } n_{uo} = |T_{uo}| \\ A_{uo} \sum_{i=1}^k \vec{\sigma}_i \geq Pre \vec{t}_{\alpha_k} - M_0 - A \sum_{i=1}^{k-1} \vec{t}_{\alpha_i}, \text{ para } k = 1, \dots, h \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Proposição 5** *Considere uma rede de Petri modelando um SED com a linguagem  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  e satisfazendo as hipóteses descritas anteriormente. Dada uma sequência observada  $w$  denotada por  $w = \sigma_o = t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \dots t_{\alpha_h}$ , vamos definir o seguinte problema de programação linear inteira PPLI1:*

$$PPLI1 : \begin{cases} \max \varphi_1(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \dots, \vec{\sigma}_h) = \sum_{i=1}^h \vec{\sigma}_i(t_f) \\ \text{tal que } \xi(w, M_0, Post, Pre) \end{cases} \quad (3.3)$$

Se para  $t_f \in T_f$ , PPLI1 admite uma solução  $\vec{\sigma}_1^*, \vec{\sigma}_2^*, \dots, \vec{\sigma}_h^*$  e  $\varphi_1(\vec{\sigma}_1^*, \vec{\sigma}_2^*, \dots, \vec{\sigma}_h^*) = \varphi_1^{\max} > 0$ , então temos que  $\sigma = \sigma_1 t_{\alpha_1} \sigma_2 t_{\alpha_2} \dots \sigma_h t_{\alpha_h} \in \Sigma(M_0, \sigma_o, t_f)$

**Corolário 1** *Considere uma rede de Petri modelando um SED com a linguagem  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  e satisfazendo as hipóteses descritas anteriormente. Dada uma sequência observada  $w$  denotada por  $w = \sigma_o = t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \dots t_{\alpha_h}$ , se para cada  $t_f \in T_f$  a PPLI1 admite uma solução  $\vec{\sigma}_1^*, \vec{\sigma}_2^*, \dots, \vec{\sigma}_h^*$  com  $\varphi_1(\vec{\sigma}_1^*, \vec{\sigma}_2^*, \dots, \vec{\sigma}_h^*) = \varphi_1^{\max} = 0$  então o comportamento do SED é livre de falha durante a sequência observada  $w$ .*

A proposição a seguir permite determinar se o comportamento do SED pode ser livre de falha.

**Proposição 6** *Considere uma rede de Petri modelando um SED com a linguagem  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  e satisfazendo as hipóteses descritas anteriormente. Dada uma sequência observada  $w$  denotada por  $w = \sigma_o = t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \dots t_{\alpha_h}$  e o seguinte o seguinte problema de programação linear inteira PPLI2:*

$$PPLI2 : \begin{cases} \min \varphi_2(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \dots, \vec{\sigma}_h) = \vec{1}_{\mathcal{F}}^T \sum_{i=1}^h \vec{\sigma}_{f_i} \\ \text{tal que } \xi(w, M_0, Post, Pre) \end{cases} \quad (3.4)$$

em que  $\vec{1}_{\mathcal{F}}$  é um vetor coluna de dimensão  $\mathcal{F} = |T_f|$  com cada elemento sendo 1 e  $\sigma_{f_i} \in \sigma_i$  para  $i = 1, \dots, h$ . Se PPLI2 admite uma solução  $\vec{\sigma}_1^*, \vec{\sigma}_2^*, \dots, \vec{\sigma}_h^*$  e  $\varphi_2(\vec{\sigma}_1^*, \vec{\sigma}_2^*, \dots, \vec{\sigma}_h^*) = \varphi_1^{\min} = 0$ , então o comportamento do SED pode ser livre de falha.

Mostraremos, a seguir, um exemplo no qual é apresentado as idéias do diagnosticador.

**Exemplo 6** *Considere a rede de Petri mostrada na figura 3.6 em que  $T_o = \{t_1, t_2, t_3\}$ ,  $T_{uo} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$  e as falhas  $f_1$  e  $f_2$  estão associadas  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , respectivamente. Para um melhor entendimento as transições não observadas foram representadas por  $\tau_i$ . ao invés de  $t_i$ . Suponha que o sistema esteja na marcação inicial  $M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e a sequência observada seja  $w = t_1$ , então, a transição  $\tau_1$  pode ter disparado antes de  $t_1$  mas  $\tau_2$  não pode ter disparado antes de  $t_1$ . Desta forma,  $(\tau_1 t_1) \in \sum(M_0, t_1, f_1)$  e  $\sum(M_0, t_1, f_2) = \emptyset$ , isto é, a falha  $f_1$  ( $f_2$ ) é (não é) consistente com a observação. Portanto, o diagnosticador fornece  $\phi(M_0, t_1) = \{f_1, N\}$ , ou seja, a falha  $f_1$  pode ter ocorrido, mas o comportamento do SED também pode estar livre de falha. Agora, suponha que na marcação  $M_0$ , a sequência observada seja  $w = t_1 t_2$ , então, deduzimos que para a transição  $t_2$  disparar, a transição  $\tau_3$  disparou, de modo que  $\tau_1$  não pode ter disparado. Por outro lado, o disparo de  $t_2$  exclui a possibilidade de que  $\tau_2$  tenha disparado. Desta forma,  $\sum(M_0, t_1 t_2, f_k) = \emptyset$  para  $k = 1, 2$ . Portanto, o diagnosticador fornece  $\phi(M_0, t_1 t_2) = \{N\}$ , ou seja, nem a falha  $f_1$  nem  $f_2$  ocorreram durante a sequência observada e o comportamento do SED é livre de falha.*

*Considere a sequência observada  $w = t_1 t_2 t_3 t_1 t_3$  na marcação inicial  $M_0$ . O diagnosticador proposto fornece os seguintes resultados:  $\phi(M_0, t_1) = \{f_1, N\}$ ,  $\phi(M_0, t_1 t_2) = \{N\}$ ,  $\phi(M_0, t_1 t_2 t_3) = \{N\}$ ,  $\phi(M_0, t_1 t_2 t_3 t_1) = \{f_1, N\}$  e  $\phi(M_0, t_1 t_2 t_3 t_1 t_3) = \{f_1, f_2\}$ . Assim, temos uma solução de incerteza após a observação de  $w = t_1$  porque ou a falha  $f_1$  pode ter ocorrido ou o comportamento do sistema pode estar livre de falha. Por outro lado, quando  $w = t_1 t_2$  e  $w = t_1 t_2 t_3$ , a incerteza é resolvida porque nos dois casos, não existe sequência de disparos contendo*

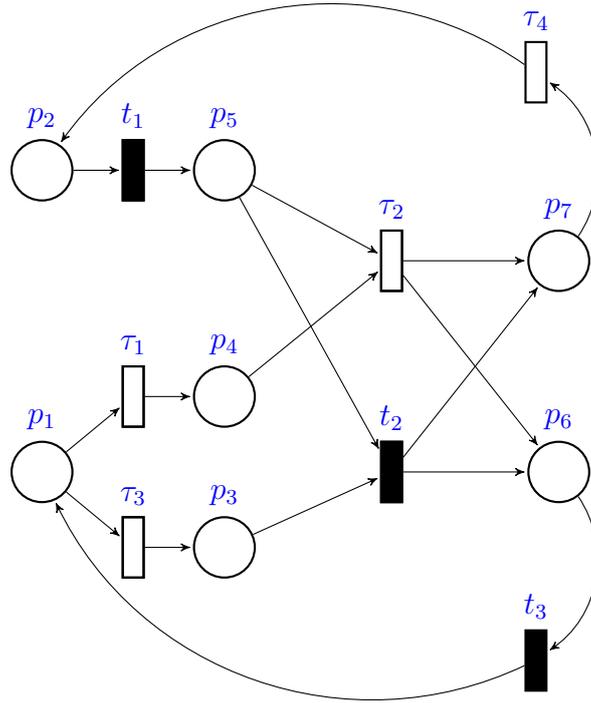


Figura 3.6: Modelo de rede de Petri

uma transição  $\tau_k \in T_f$  e consistente com a observação. Uma situação de incerteza é diagnosticada após a sequência observada  $w = t_1 t_2 t_3 t_1$  porque ou a falha  $f_1$  pode ter ocorrido ou o comportamento do sistema pode estar livre de falha. Contudo, quando se observa  $w = t_1 t_2 t_3 t_1 t_3$ , o diagnosticador decide que as duas falhas  $f_1$  e  $f_2$  ocorreram porque as duas forneceram interpretações mínimas contendo ambas transições  $\tau_1$  e  $\tau_2$ . Por exemplo, a sequência  $\sigma = t_1 \tau_3 t_2 t_3 \tau_4 \tau_1 t_1 \tau_2 t_3$  pode ter ocorrido.

### 3.5 Comentários finais

A tabela 3.5 resume os principais métodos encontrados na literatura para a diagnose de falhas em SEDs modelados por redes de Petri em que se utiliza o conjunto de transições observadas.

Tabela 3.5: Principais métodos para diagnose de falhas em redes de Petri

Autores	Características da rede de Petri	Método
Al Ajeli et al (2016) [1]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• acíclicas não rotuladas por eventos</li> <li>• uma única transição de falha</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verificação do vetor de contagem de disparos da sequência de transições observadas no atendimento a conjuntos de desigualdades</li> </ul>
Cabasino et al (2011) [5]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• qualquer rede rotulada por eventos</li> <li>• sub-rede de transições não observadas deve ser acíclica</li> <li>• múltiplas transições de falha</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinação de marcações e vetores de contagem de disparo que justifiquem a sequência de eventos observadas.</li> <li>• Pode recorrer a solução de um PPLI.</li> <li>• Para redes limitadas é proposto a diagnose através de um grafo</li> </ul>
Basile et al (2009) [2]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• qualquer rede rotulada por eventos</li> <li>• sem transições observadas indistinguíveis</li> <li>• sub-rede de transições não observadas deve ser acíclica</li> <li>• múltiplas transições de falha</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recorre a solução de um PPLI para determinar possíveis eventos de falha que justifiquem o último evento observado</li> </ul>
Dotoli et al (2009) [13]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• qualquer rede rotulada por eventos</li> <li>• sem transições observadas indistinguíveis</li> <li>• sub-rede de transições não observadas deve ser acíclica</li> <li>• múltiplas transições de falha</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recorre a solução de PPLIs para determinar possíveis eventos de falha que justifiquem o último evento observado</li> </ul>

# Capítulo 4

## Diagnose online em rede de Petri rotulada acíclica

Neste capítulo, apresentamos um método para a diagnose online de SEDs modelados por rede de Petri rotulada acíclica. Este método foi idealizado inicialmente em PAIVA *et al.* [25] incluindo a hipótese que impedia a sua utilização em redes de Petri que possuam sequências normal e de falha com projeções diferentes e com o mesmo vetor de contagem de eventos observados sendo descrito na seção 4.1. Estudos posteriores utilizando a árvore de alcançabilidade levaram a modificação do método inicial com a exclusão desta hipótese e que será descrito na seção 4.2 tendo uma versão preliminar apresentado em PAIVA *et al.* [24].

### 4.1 Diagnose Online - proposta inicial

#### 4.1.1 Identificação do comportamento livre de falha e com falha

Um sistema a eventos discretos modelado por rede de Petri tem o seu comportamento descrito pela equação de estado (2.4) conforme descrito na seção 2.1.4. Pela estrutura definida, todos os lugares de uma rede de Petri devem ter um número de fichas superior ou igual a zero, então, toda marcação  $M$  de um estado acessível a partir de  $M_0$  deve ser não-negativa, isto é,  $M \geq 0$ , então a equação (2.4) pode ser reescrita como:

$$M_0 + Ax \geq 0 \Rightarrow -Ax \leq M_0 \quad (4.1)$$

Note que a equação (4.1) produz um conjunto de desigualdades em que as variáveis são as componentes  $x_i$  do vetor de contagem de disparos  $x$ .

O número de disparos de qualquer transição em uma sequência de disparos  $\sigma$  não

pode ser negativo, ou seja,  $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ , sendo  $n$  o número de transições, ou na sua forma dual,  $-x_i \leq 0$ , então, podemos adicionar estas desigualdades ao conjunto produzido pela equação (4.1), denotando como  $\mathcal{S}$  este novo conjunto, portanto:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} -Ax \leq M_0, \\ -x_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.2)$$

A ocorrência ou não de uma transição rotulada pela falha, ou simplesmente, transição de falha, pode ser representada na forma de desigualdades. Suponha que  $t_f$  seja uma transição de falha e  $x_f$  a variável que representa o número de disparos de  $t_f$  em uma sequência de disparos  $\sigma$ . Então, se a desigualdade  $c := x_f \leq 0$  for satisfeita então  $\sigma$  não conterá  $t_f$ . Por outro lado, se a negação dessa desigualdade for satisfeita, *i.e.*,  $c' := x_f > 0$  então  $\sigma$  conterá  $t_f$ .

Como exemplo, consideremos a rede de Petri utilizada na figura 4.1 na qual  $t_1$  é uma transição de falha e  $x_1$  é a variável que representa o número de disparos de  $t_1$  em uma sequência de disparos  $\sigma$ , e então, as desigualdades  $c$  e  $c'$  são  $x_1 \leq 0$  e  $x_1 > 0$ , respectivamente. Caso ocorra a sequência de disparos  $t_1 t_3 t_5 t_7$  teremos  $x_1 = 1$ , e então, apenas  $c'$  é satisfeita, informando que uma transição de falha está contida em  $\sigma$ . Por outro lado, caso ocorra a sequência de disparos  $t_2 t_4 t_6$  teremos  $x_1 = 0$ , e então, apenas  $c$  é satisfeita, informando que uma transição de falha não está contida em  $\sigma$ .

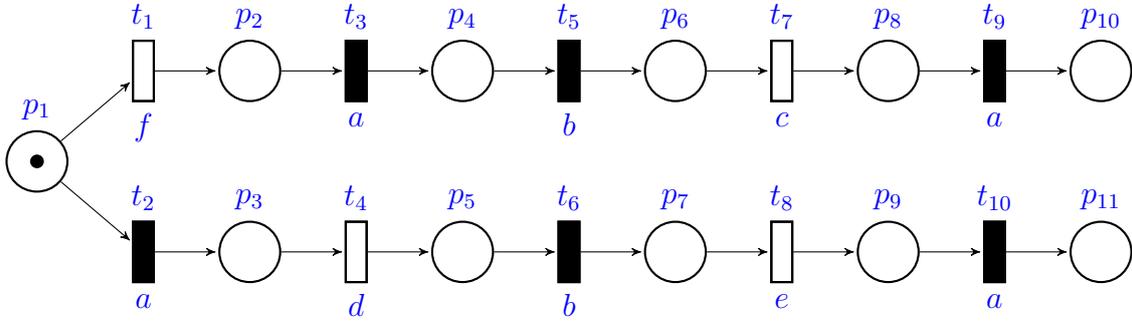


Figura 4.1: Rede de Petri rotulada acíclica  $(\mathcal{N}, M_0)$

Considerando  $T_f = \{t \in T : \ell(t) = f\}$  sendo o conjunto de transições de falha rotuladas com  $f$ , então, quando  $|T_f| > 1$ , definimos as desigualdades  $c$  e  $c'$  como se segue:

$$c := \sum_{x_i: t_i \in T_f} x_i \leq 0 \quad \wedge \quad c' := \sum_{x_i: t_i \in T_f} x_i > 0 \quad (4.3)$$

Neste ponto do desenvolvimento do modelo, adicionaremos as desigualdades  $c$  e

$c'$  ao conjunto  $\mathcal{S}$ , produzindo, então, dois novos conjuntos de desigualdades denominados de  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ , como mostrado nas equações (4.4) e (4.5).

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}} = \begin{cases} -Ax \leq M_0, \\ -x_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \\ c, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \begin{cases} -Ax \leq M_0, \\ -x_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n. \\ c', \end{cases} \quad (4.5)$$

O conjunto de desigualdades mostrado pela equação (4.4) será atendido por um vetor de contagem de disparos  $x$  de uma sequência  $\sigma$  que não tenha falha, portanto, temos em  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  as condições para identificar o comportamento livre de falha de uma rede de Petri. Por outro lado, o conjunto de desigualdades mostrado pela equação (4.5) será atendido por um vetor de contagem de disparos  $x$  de uma sequência  $\sigma$  que tenha uma falha, portanto, temos em  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  as condições para identificar o comportamento com falha em uma rede de Petri. Note que na ocorrência de uma falha, apenas um dos conjuntos será satisfeito. O Algoritmo 1 descreve os passos para determinar os conjuntos de desigualdades  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ .

**Algoritmo 1** *Algoritmo para determinar  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$*

**Entrada:**  $\mathcal{N} = (P, T, F, W, E, \ell, M_0)$ : Modelo em rede de Petri rotulada

**Saída:**  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ : Conjunto de desigualdades com variáveis que quantificam os disparos das transições da rede de de Petri

1: Determinar a equação de estado da rede de Petri  $\mathcal{N}$ ,

$$M = M_0 + Ax$$

2: Formar o conjunto  $\mathcal{S}$  das desigualdades  $-Ax \leq M_0$  e  $x_i \leq 0, i = 1, \dots, n$

3: Determinar o conjunto de transições de falha  $T_f = \{t \in T : \ell(t) = f\}$  e as desigualdades  $c'$  e  $c$  que modelam a ocorrência ou não da falha, respectivamente. Sendo  $x_f$  o número de disparos de  $t_f \in T_f$  em uma sequência de disparos  $\sigma$ , teremos:

- se  $|T_f| = 1$  :  $c := x_f \leq 0 \quad \wedge \quad c' := x_f > 0$
- se  $|T_f| > 1$  :  $c := \sum_{x_f: t_f \in T_f} x_f \leq 0 \quad \wedge \quad c' := \sum_{x_f: t_f \in T_f} x_f > 0$

4: Formar o conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  pela adição da desigualdade  $c$  ao conjunto  $\mathcal{S}$ .

5: Formar o conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  pela adição da desigualdade  $c'$  ao conjunto  $\mathcal{S}$ .

**Exemplo 7** A equação de estado para a rede de Petri mostrada na figura 4.1 está descrita na equação (4.6). A tabela 4.1 mostra como o conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}$

é representado bem como os conjuntos  $\mathcal{S}_N$  e  $\mathcal{S}_F$ .

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Tabela 4.1: Conjuntos  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}_N$  e  $\mathcal{S}_F$  do exemplo da figura 4.1

Conjunto $\mathcal{S}$	Conjunto $\mathcal{S}_N$	Conjunto $\mathcal{S}_F$
$x_1 + x_2 \leq 1$	$x_1 + x_2 \leq 1$	$x_1 + x_2 \leq 1$
$-x_1 + x_3 \leq 0$	$-x_1 + x_3 \leq 0$	$-x_1 + x_3 \leq 0$
$-x_2 + x_4 \leq 0$	$-x_2 + x_4 \leq 0$	$-x_2 + x_4 \leq 0$
$-x_3 + x_5 \leq 0$	$-x_3 + x_5 \leq 0$	$-x_3 + x_5 \leq 0$
$-x_4 + x_6 \leq 0$	$-x_4 + x_6 \leq 0$	$-x_4 + x_6 \leq 0$
$-x_5 + x_7 \leq 0$	$-x_5 + x_7 \leq 0$	$-x_5 + x_7 \leq 0$
$-x_6 + x_8 \leq 0$	$-x_6 + x_8 \leq 0$	$-x_6 + x_8 \leq 0$
$-x_7 + x_9 \leq 0$	$-x_7 + x_9 \leq 0$	$-x_7 + x_9 \leq 0$
$-x_8 + x_{10} \leq 0$	$-x_8 + x_{10} \leq 0$	$-x_8 + x_{10} \leq 0$
$-x_9 \leq 0$	$c : x_1 \leq 0$	$c' : -x_1 \leq -1$
$-x_{10} \leq 0$	$-x_i \leq 0$	$-x_i \leq 0$
$-x_i \leq 0$	$i \in \{1, \dots, 10\}$	$i \in \{1, \dots, 10\}$
$i \in \{1, \dots, 10\}$		

Caso ocorra a sequência de disparos  $\sigma_1 = t_1 t_3 t_5 t_7$  teremos  $x_1 = 1$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_5 = 1$ ,  $x_7 = 1$  e as demais variáveis serão nulas, e então, o conjunto  $\mathcal{S}_F$  terá todas as desigualdades satisfeitas e o conjunto  $\mathcal{S}_N$  não terá, informando que uma transição de falha está contida em  $\sigma_1$ . Caso ocorra a sequência de disparos  $\sigma_2 = t_2 t_4 t_6$  teremos  $x_2 = 1$ ,  $x_4 = 1$ ,  $x_6 = 1$  e as demais variáveis serão nulas, e então, o conjunto  $\mathcal{S}_N$  terá todas as desigualdades satisfeitas e o conjunto  $\mathcal{S}_F$  não terá, informando que uma transição de falha não está contida em  $\sigma_2$ .

## 4.1.2 Redução dos conjuntos de desigualdades $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$

Neste trabalho, estamos considerando que a rede de Petri analisada é uma rede rotulada por eventos, parcialmente observada e que transições indistinguíveis associadas aos eventos é possível. Na evolução desta rede, somente é possível observar a ocorrência de determinados eventos e a contagem do número de disparos de todas as transições não é possível. Desta forma, buscaremos mudar as variáveis dos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  para identificar o comportamento de uma sequência de disparos  $\sigma$ . Inicialmente, podemos adicionar variáveis associadas ao número de observações dos eventos observados nos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ , como se segue.

Seja  $T_e = \{t \in T : e \in E_o \wedge \ell(t) = e\}$  o conjunto de transições rotuladas pelo evento observável  $e \in E_o$ ,  $x_i$  o número de disparos de  $t_i \in T_e$  em uma sequência de disparos  $\sigma$  e  $y_e$  o número de observações do evento  $e$  na sequência observada de  $\sigma$ , então, se  $|T_e| = 1$ , adicionamos as seguintes equações aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$

$$y_e = x_i, \quad y_e \geq 0. \quad (4.7)$$

ou, se  $|T_e| > 1$ , adicionamos as seguintes equações aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ .

$$y_e = \sum_{x_i: t_i \in T_e} x_i, \quad y_e \geq 0. \quad (4.8)$$

Como  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  são formados por desigualdades, devemos transformar as igualdades encontradas nas equações (4.7) e (4.8) em desigualdades. No caso da equação (4.7), obtemos:

$$y_e = x_i \quad \Rightarrow \quad y_e \geq x_i \quad \wedge \quad y_e \leq x_i$$

e no caso da equação (4.8), obtemos:

$$y_e = \sum_{x_i: t_i \in T_e} x_i \quad \Rightarrow \quad y_e \geq \sum_{x_i: t_i \in T_e} x_i \quad \wedge \quad y_e \leq \sum_{x_i: t_i \in T_e} x_i.$$

Os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  com a adição das variáveis  $y_e, \forall e \in E_o$ , associadas ao número de observações dos eventos observados serão denominados de  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$

**Exemplo 8** Observamos que a rede de Petri mostrada na figura 4.1 possui transições indistinguíveis associadas aos eventos observados  $a$  e  $b$ , portanto,  $T_a = \{t_2, t_3, t_{10}\}$  e  $T_b = \{t_5, t_6, t_9\}$ . Como  $|T_a| = 3$ , adicionamos aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  as seguintes equações:

$$y_a \geq x_2 + x_3 + x_{10} \quad \wedge \quad y_a \leq x_2 + x_3 + x_{10} \quad \wedge \quad y_a \geq 0.$$

e como  $|T_b| = 3$ , adicionamos aos mesmos conjuntos as seguintes equações :

$$y_b \geq x_5 + x_6 + x_9 \quad \wedge \quad y_b \leq x_5 + x_6 + x_9 \quad \wedge \quad y_b \geq 0.$$

Neste ponto, podemos aplicar um método de eliminação de variáveis nos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$  para eliminar todas as variáveis  $x$ , deixando apenas as variáveis  $y_e$ . Os conjuntos resultantes de desigualdades serão denotados como  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ , respectivamente. A seção 2.4 descreve um procedimento para a eliminação de variáveis de um conjunto de desigualdades e que utilizamos neste trabalho. O Algoritmo 2 descreve os passos para determinar os conjuntos de desigualdades  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ .

**Algoritmo 2** *Algoritmo para determinar  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$*

**Entrada:**

- $\mathcal{N} = (P, T, F, W, E, \ell, M_0)$ : Modelo em rede de Petri rotulada
- $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ : Conjunto de desigualdades com variáveis que quantificam os disparos das transições da rede de de Petri
- $E_o$ : Conjunto dos eventos observados

**Saída:**  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ : Conjunto de desigualdades com variáveis que quantificam as ocorrências dos eventos observados da rede de Petri

1: Para todo  $e \in E_o$ , determinar  $T_e = \{t \in T : e \in E_o \wedge \ell(t) = e\}$ . Sendo  $x_i$  o número de disparos de  $t_i \in T_e$  em uma sequência de disparos  $\sigma$  e  $y_e$  o número de observações do evento  $e$  na sequência observada de  $\sigma$ , então,

- se  $|T_e| = 1$ , adicione as seguintes desigualdades aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$

$$y_e \geq x_i \quad \wedge \quad y_e \leq x_i \quad \wedge \quad -y_e \leq 0$$

- ou, se  $|T_e| > 1$ , adicione as seguintes desigualdades aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$

$$y_e \geq \sum_{x_i: t_i \in T_e} x_i \quad \wedge \quad y_e \leq \sum_{x_i: t_i \in T_e} x_i \quad \wedge \quad -y_e \leq 0.$$

Os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  com a adição das variáveis  $y_e, \forall e \in E_o$ , são denominados de  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$

2: Determinar os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  através da aplicação de um método de eliminação de variáveis aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$ , eliminando todas as variáveis  $x$ .

**Exemplo 9** A tabela 4.2 mostra os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$  da rede de Petri mostrada na figura 4.1 com as desigualdades referentes as variáveis  $y_a$  e  $y_b$  associadas aos

eventos observados  $a$  e  $b$ , respectivamente, conforme visto no exemplo 8. Com a eliminação de todas as variáveis  $x$ , obtemos os conjuntos  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  que terá somente as variáveis  $y_a$  e  $y_b$  como mostrado na tabela 4.3. A seguir, exemplificamos como eliminamos a variável  $x_1$  do conjunto  $\mathcal{S}_N$  conforme visto na seção 2.4. As variáveis  $x_2$  a  $x_{10}$  serão eliminadas de forma similar, restando no conjunto somente desigualdades envolvendo as variáveis  $y_a$  e  $y_b$ .

- passo 1: excluimos do conjunto  $\mathcal{S}_{N_e}$  todas as equações da forma  $-\sum_{k=2}^{10} a_{ik}x_k + a_{i1}x_1 \leq b_i$ , em que  $a_{i1} < 0$ . Existem duas equações:

$$-x_1 + x_3 \leq 0 \quad (1)$$

$$-x_1 \leq 0 \quad (2)$$

- passo 2: excluimos do conjunto  $\mathcal{S}_{N_e}$  todas as equações da forma  $-\sum_{k=2}^{10} a_{jk}x_k - a_{j1}x_1 \leq b_j$ , em que  $-a_{j1} > 0$ . Existe apenas uma equação:

$$x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$

$$x_1 \leq 0 \quad (4)$$

- passo 3: inserimos no conjunto  $\mathcal{S}_{N_e}$  novas equações da forma

$$-|a_{jn}| \left( \sum_{k=2}^{10} a_{ik}x_k \right) - |a_{in}| \left( \sum_{k=2}^{10} a_{ik}x_k \right) \leq |a_{jn}|b_i + |a_{in}|b_j, \text{ ou seja,}$$

$$\text{eq. (1) com eq. (3)} \implies x_2 + x_3 \leq 1$$

$$\text{eq. (1) com eq. (4)} \implies x_3 \leq 0$$

$$\text{eq. (2) com eq. (3)} \implies x_2 \leq 1$$

$$\text{eq. (2) com eq. (4)} \implies 0 \leq 0 \text{ (pode ser excluída)}$$

Tabela 4.2: Conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$  do exemplo da figura 4.1

Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$	Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$
$x_1 + x_2 \leq 1$	$x_1 + x_2 \leq 1$
$-x_1 + x_3 \leq 0$	$-x_1 + x_3 \leq 0$
$-x_2 + x_4 \leq 0$	$-x_2 + x_4 \leq 0$
$-x_3 + x_5 \leq 0$	$-x_3 + x_5 \leq 0$
$-x_4 + x_6 \leq 0$	$-x_4 + x_6 \leq 0$
$-x_5 + x_7 \leq 0$	$-x_5 + x_7 \leq 0$
$-x_6 + x_8 \leq 0$	$-x_6 + x_8 \leq 0$
$-x_7 + x_9 \leq 0$	$-x_7 + x_9 \leq 0$
$-x_8 + x_{10} \leq 0$	$-x_8 + x_{10} \leq 0$
$c : x_7 \leq 0$	$c' : -x_7 \leq -1$
$-x_i \leq 0$	$-x_i \leq 0$
$i \in \{1, \dots, 10\}$	$i \in \{1, \dots, 10\}$
$x_2 + x_3 + x_{10} - y_a \leq 0$	$x_2 + x_3 + x_{10} - y_a \leq 0$
$y_a - x_2 - x_3 - x_{10} \leq 0$	$y_a - x_2 - x_3 - x_{10} \leq 0$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$
$x_5 + x_6 + x_9 - y_b \leq 0$	$x_5 + x_6 + x_9 - y_b \leq 0$
$y_b - x_5 - x_6 - x_9 \leq 0$	$y_b - x_5 - x_6 - x_9 \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$

Tabela 4.3: Conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  do exemplo da figura 4.1

conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$	conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$
$y_a \leq 2$	$y_a \leq 1$
$y_b \leq 1$	$y_b \leq 2$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$
$y_a - y_b \leq 1$	$-2y_a + y_b \leq 0$
$-y_a + y_b \leq 0$	$-y_a + y_b \leq 1$

### 4.1.3 Diagnosticador Online

O diagnosticador online proposto neste trabalho utiliza o vetor de contagem de ocorrências dos eventos observados em equações algébricas. Esta prática foi adotada, também, por AL-AJELI e BORDBAR [1] mas que considerava transições sem

rotulação. A proposta aqui apresentada amplia a análise, para redes de Petri rotuladas acíclicas, em que podem existir transições indistinguíveis. Antes de descrever o diagnosticador, faremos a seguinte hipótese.

**H1** Seja a sequência de falha  $s_F$  como uma sequência de eventos que inclua pelo menos um evento de falha e seja a sequência normal  $s_N$  como uma sequência de eventos que não inclua nenhum evento de falha, em que  $P_o(s_F) \neq P_o(s_N)$  e compartilham os mesmos eventos observados, então o número de ocorrências de pelo menos um evento observável em  $s_F$  e  $s_N$  deve ser diferente.

**H2** A linguagem  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  de uma rede de Petri deve ser diagnosticável.

A discussão sobre a consequência de não atendimento da hipótese **H1** em uma rede de Petri no diagnosticador proposto será mostrado no exemplo 12. A hipótese **H2** é utilizada para termos certeza de que a falha poderá ser diagnosticada e será considerada durante todo este trabalho.

Seja  $\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  a sequência de disparos de transições,  $s = l(\sigma)$  a sequência de eventos e  $s_o = P_o(s)$  a sequência correspondente de eventos observados. Vamos considerar que  $E_o = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ . Portanto, a cada vetor de contagem de disparos  $x$  associado a  $\sigma$  existe um vetor  $y = [y_{e_1} y_{e_2} \dots y_{e_p}]^T$ , em que  $y_{e_i}$  é o número de ocorrências de  $e_i$  em  $s_o$ . O vetor  $y$  será referido como a valoração de  $s_o$  e representado como  $v(s_o)$ . A equivalência entre os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$  e os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  é garantido pelo Teorema 2, ou seja:

- Se  $\sigma$  não possui o disparo de uma transição de falha  $t_f \in T_f$  então  $x \models \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $[x \ y] \models \mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$ . Pelo Teorema 2 temos que se  $[x \ y] \models \mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  então  $y \models \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ . Desta forma, toda sequência de disparos de transições com comportamento livre de falha atende ao conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ .
- Se  $\sigma$  possui o disparo de uma transição de falha  $t_f \in T_f$  então  $x \models \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  e  $[x \ y] \models \mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$ . Pelo Teorema 2 temos que se  $[x \ y] \models \mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$  então  $y \models \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ . Desta forma, toda sequência de disparos de transições com comportamento de falha atende ao conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ .
- Uma sequência de disparos de transições em uma rede de Petri tem um comportamento livre de falha ou com falha, então  $y \models \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  ou  $y \models \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  obrigatoriamente.

O diagnosticador  $D$  é uma função  $D : \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) \rightarrow \{N, F, FN\}$  que associa a cada sequência de disparos de transições  $\sigma$  com respeito à um evento de falha modelada por uma transição  $t_f \in T_f$  um dos seguintes estados de diagnose:

- i  $N$ , se tivermos certeza que o evento de falha não ocorreu. Neste caso não existe nenhuma outra sequência de disparos de transições com a mesma valoração da sequência de eventos observada contendo pelo menos uma transição  $t_f \in T_f$ .
- ii  $F$ , se tivermos certeza de que ocorreu um evento de falha. Neste caso, todas as sequências de disparo de transições com a mesma valoração da sequência de eventos observada contém pelo menos uma transição  $t_f \in T_f$ .
- iii  $FN$ , se houver dúvida da ocorrência de um evento de falha. Neste caso existe pelo menos uma outra sequência de disparo de transições com a mesma valoração da sequência de eventos observada em que uma não contém transição  $t_f \in T_f$  e a outra contém pelo menos uma transição  $t_f \in T_f$ .

**Teorema 3** *Seja  $(\mathcal{N}, M_0)$  uma rede de Petri rotulada acíclica atendendo as hipóteses **H1** e **H2** com marcação inicial  $M_0$ ,  $\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$ ,  $s = l(\sigma)$ ,  $s_o = P_o(s)$ ,  $v(s_o)$  a valoração de  $s_o$ ,  $f$  um evento de falha e  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  obtidos pelo Algoritmo 1. Então, para qualquer sequência de eventos observada  $s_o$ :*

$$D = \begin{cases} N, & \text{se } v(s_o) \models \mathcal{S}_A \wedge v(s_o) \not\models \mathcal{S}_B, \\ F, & \text{se } v(s_o) \not\models \mathcal{S}_A \wedge v(s_o) \models \mathcal{S}_B, \\ FN, & \text{se } v(s_o) \models \mathcal{S}_A \wedge v(s_o) \models \mathcal{S}_B. \end{cases} \quad (4.9)$$

*Prova:* Seja  $y = v(\sigma) = [x_1 \dots x_n]^T$  e  $y = v(s_o) = [y_{e_1} y_{e_2} \dots y_{e_p}]^T$ .

- i Suponha que  $y \models \mathcal{S}_A$  e  $y \not\models \mathcal{S}_B$  mas  $\sigma$  tenha um comportamento com falha. Se  $y \not\models \mathcal{S}_B$  então para  $\forall \sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  tal que  $\exists[x \ y]$  temos pelo Teorema 2 que  $[x \ y] \not\models \mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$ . Como resultado,  $x \not\models \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ , então uma desigualdade do conjunto de  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  não está satisfeita. Desde que  $\sigma$  é uma sequência de disparo, então  $x \models \mathcal{S}$ . Conclui-se que  $x \not\models c'$ , portanto  $\sigma$  não tem uma transição de falha, contrariando a suposição.
- ii Suponha que  $y \not\models \mathcal{S}_A$  e  $y \models \mathcal{S}_B$  mas  $\sigma$  tenha um comportamento livre de falha. Se  $y \not\models \mathcal{S}_A$  então para  $\forall \sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  tal que  $\exists[x \ y]$  temos pelo Teorema 2 que  $[x \ y] \not\models \mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$ . Como resultado,  $x \not\models \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ , então uma desigualdade do conjunto de  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  não está satisfeita. Desde que  $\sigma$  é uma sequência de disparo, então  $x \models \mathcal{S}$ . Conclui-se que  $x \not\models c$ , portanto  $\sigma$  tem pelo menos uma transição de falha, contrariando a suposição.
- iii Suponha que  $y \models \mathcal{S}_A$  e  $y \models \mathcal{S}_B$  mas estamos certos sobre o comportamento de  $\sigma$ . Se  $y \models \mathcal{S}_A$  então pelo Teorema 2 temos que  $\exists[x_1 \ y]$  tal que  $[x_1 \ y] \models \mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$ . Como resultado,  $x_1 \models \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ , então  $x_1 \models \mathcal{S}$  e  $x_1 \models c$ . Se  $x_1 \models \mathcal{S}$ , pelo teorema 1,  $\exists \sigma_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  tal que  $x_1 = v(\sigma_1)$  e conclui-se que  $\sigma_1$  não tem transição de

falha pois  $x_1 \models c$ . Da mesma forma, se  $y \models \mathcal{S}_B$  então pelo Teorema 2 temos que  $\exists[x_2 y]$  tal que  $[x_2 y] \models \mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$ . Como resultado,  $x_2 \models \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ , então  $x_2 \models \mathcal{S}$  e  $x_2 \models c'$ . Se  $x_2 \models \mathcal{S}$ , pelo teorema 1,  $\exists\sigma_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  tal que  $x_2 = v(\sigma_2)$  e conclui-se que  $\sigma_2$  tem pelo menos uma transição de falha pois  $x_2 \models c'$ . Desde que  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  e  $y = y_1 = y_2$ ,  $x_1 \models c$  e  $x_2 \models c'$ , portanto, temos uma condição de incerteza sobre a ocorrência de pelo menos uma transição de falha, contrariando a suposição. ■

**Exemplo 10** *Vamos agora ilustrar a aplicação do diagnosticador proposto na diagnose de um evento de falha  $f$  da rede de Petri mostrada na figura 4.1. Vimos que a ocorrência da seqüência de eventos  $s_1 = fab$  ou  $s_2 = fabc$  ou  $s_3 = adb$  ou  $s_4 = adbe$  produzem a mesma seqüência  $s_o = ab$  de eventos observáveis, o que implica que  $y_a = 1$  e  $y_b = 1$ . Usando esses valores na Tabela 4.3, verificamos que os conjuntos  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  são satisfeitos, o que implica em  $D(P_o^{-1}(s_o)) = FN$ . Assim, o diagnosticador não está certo de que a falha ocorreu.*

*A ocorrência da seqüência de eventos  $s_5 = adbea$  produz a seqüência  $s_o = aba$  de eventos observáveis e assim  $y_a = 2$  e  $y_b = 1$ . Usando esses valores na Tabela 4.3, verificamos que o conjunto  $\mathcal{S}_A$  é satisfeito, mas o conjunto  $\mathcal{S}_B$  não é satisfeito, o que implica em  $D(P_o^{-1}(s_o)) = N$ . Neste caso, o diagnosticador está certo de que a falha não ocorreu.*

*A ocorrência da seqüência de eventos  $s_6 = fabcb$  produz a seqüência  $s_o = abb$  de eventos observáveis e assim  $y_a = 1$  e  $y_b = 2$ . Usando esses valores na Tabela 4.3, verificamos que o conjunto  $\mathcal{S}_B$  é satisfeito, mas o conjunto  $\mathcal{S}_A$  não é satisfeito, o que implica em  $D(P_o^{-1}(s_o)) = F$ . Neste caso, o diagnosticador está certo de que a falha ocorreu*

*A Tabela 4.4 mostra todas as seqüências de eventos que podem ocorrer na rede de Petri analisada e o resultado da diagnose na respectiva seqüência de eventos observáveis.*

*Se o diagnosticador online observar  $a$ , então sua valorização é  $v(a) = [y_a y_b]^T = [1 0]^T$  e  $v(a)$  satisfaz tanto  $\mathcal{S}_A$  como  $\mathcal{S}_B$ , e assim, o diagnosticador está no estado  $FN$ . Depois disso,  $b$  ocorre, então  $v(ab)$  torna-se  $[1 1]^T$  e o diagnosticador continua em dúvida sobre a ocorrência do evento de falha porque  $v(ab)$  satisfaz tanto  $\mathcal{S}_A$  como  $\mathcal{S}_B$ . Se o diagnosticador observar  $b$ , então a sua valorização é  $v(abb) = [1 2]^T$  que satisfaz somente  $\mathcal{S}_B$ . Portanto, o diagnosticador está no estado  $F$ , tendo certeza de que o evento de falha ocorreu. Se o diagnosticador observar  $a$ , em vez de  $b$ , então  $v(aba) = [2 1]^T$  que satisfaz somente  $\mathcal{S}_A$ , implica que o diagnosticador está no estado  $N$ , tendo certeza de que o evento de falha não ocorreu.*

Tabela 4.4: Diagnose do exemplo da Figure 4.1

$s$	$s_o = P_o(s)$	$v(s_o) \models \mathcal{S}_A$	$v(s_o) \models \mathcal{S}_B$	$D(s)$
$\varepsilon$	$\varepsilon$	sim	sim	$FN$
$f$	$\varepsilon$	sim	sim	$FN$
$fa$	$a$	sim	sim	$FN$
$a$	$a$	sim	sim	$FN$
$ad$	$a$	sim	sim	$FN$
$fab$	$ab$	sim	sim	$FN$
$fabcb$	$ab$	sim	sim	$FN$
$adb$	$ab$	sim	sim	$FN$
$adbe$	$ab$	sim	sim	$FN$
$fabcb$	$abb$	não	sim	$F$
$adbea$	$aba$	sim	não	$N$

As figuras 4.2 e 4.3 mostram a evolução e diagnose da rede de Petri para um comportamento com falha e livre de falha, respectivamente.

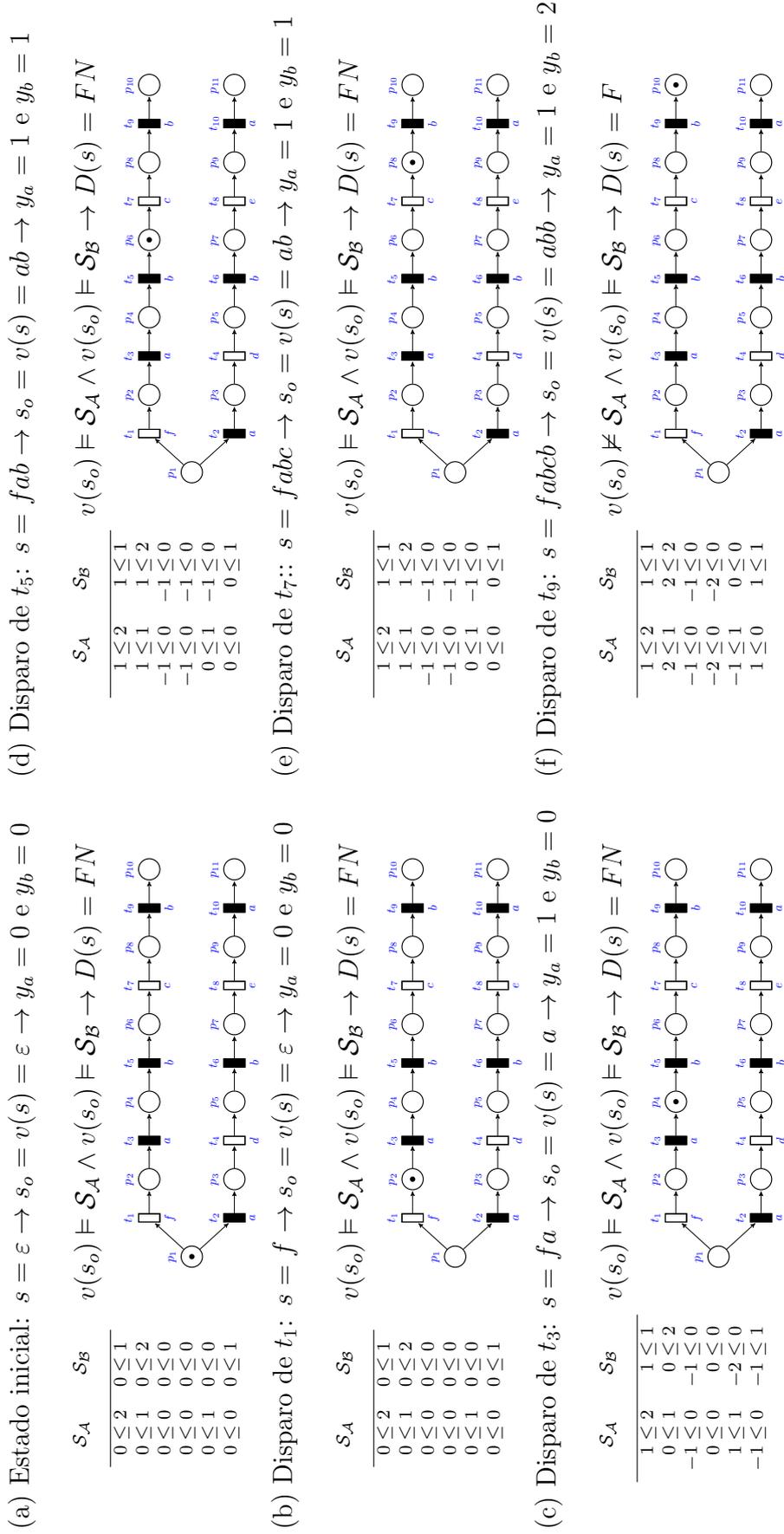


Figura 4.2: Evolução e diagnose da rede de Petri do exemplo da figura 4.1 para um comportamento com falha

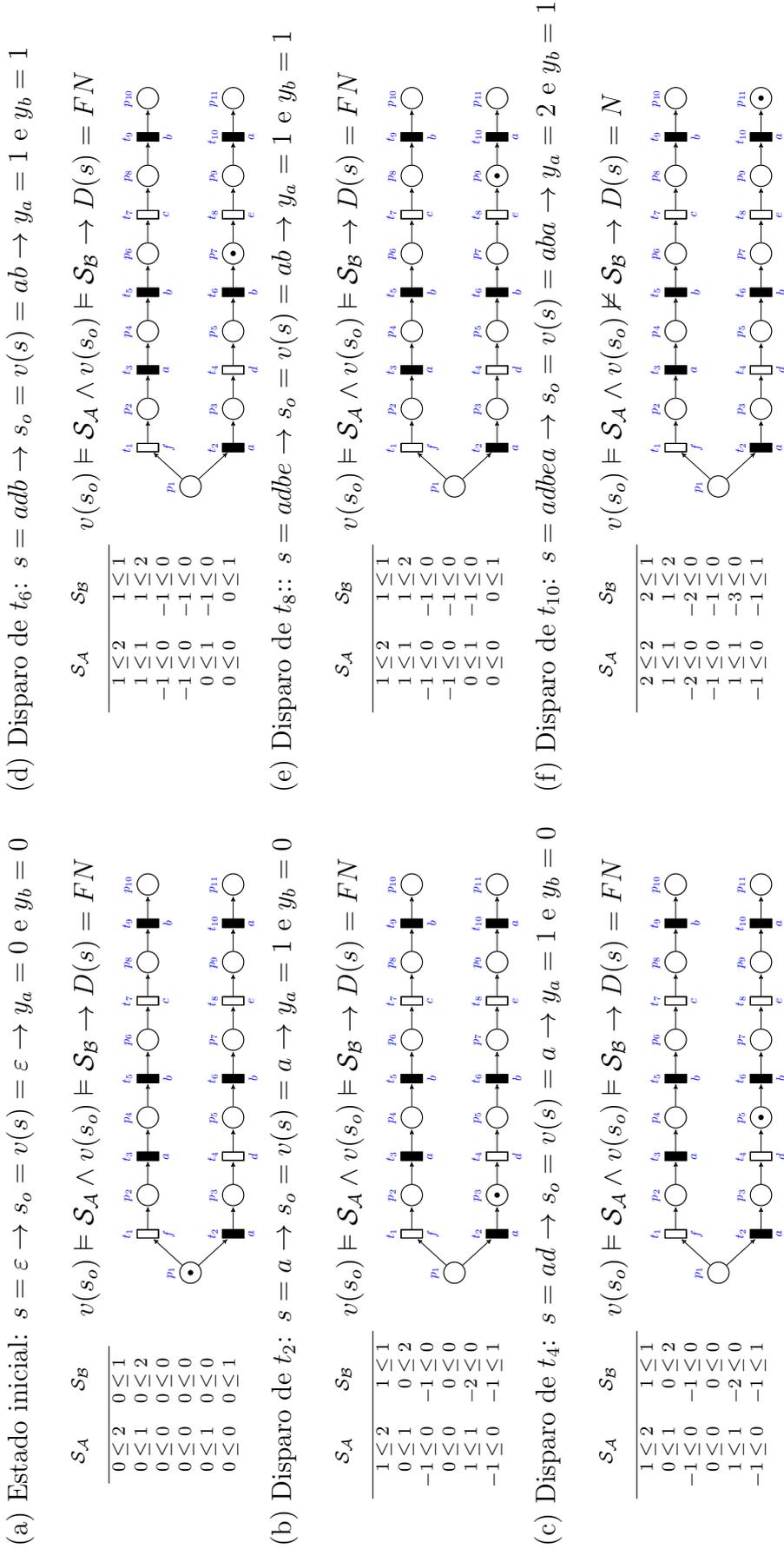


Figura 4.3: Evolução e diagnose da rede de Petri do exemplo da figura 4.1 para um comportamento livre de falha

O exemplo 11 ilustra uma rede de Petri que modela um sistema concorrente e tendo duas transições rotuladas pela mesma falha. Esta rede de Petri atende as hipóteses **H1** e **H2**, então podemos utilizar o diagnosticador proposto na equação (4.9).

**Exemplo 11** Considere a rede de Petri rotulada  $(P, T, F, W, E, \ell, M_0)$  mostrada na figura 4.4, em que  $P = \{p_1, \dots, p_{10}\}$ ,  $T = \{t_1, \dots, t_9\}$ ,  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $M_0 = [2010000000]^T$ . A função de rotulagem de transições  $\ell$  é definida como se segue:  $\ell(t_1) = \ell(t_7) = f$ ,  $\ell(t_2) = b$ ,  $\ell(t_3) = d$ ,  $\ell(t_4) = \ell(t_6) = c$ ,  $\ell(t_5) = \ell(t_8) = a$  e  $\ell(t_9) = e$ . Tomaremos neste exemplo, o conjunto de eventos observados como  $E_o = \{a, c, e\}$ , o conjunto de eventos não observados como  $E_{uo} = \{b, d, f\}$  e o conjunto de eventos de falha como  $E_f = \{f\}$ .

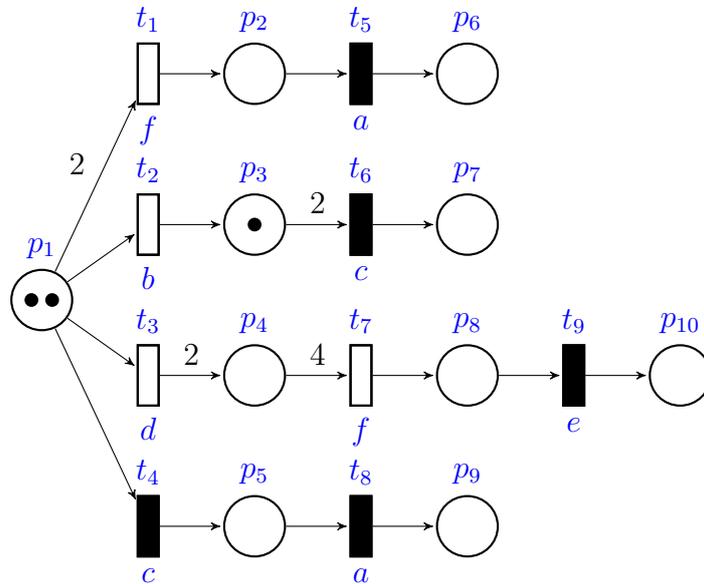


Figura 4.4: Rede de Petri rotulada acíclica  $(\mathcal{N}, M_0)$

A equação de estado para a rede de Petri da figura 4.4 é dada pela equação (4.10).

$$M = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  com a adição das desigualdades referentes as variáveis  $y_a$ ,  $y_c$  e  $y_e$  associadas aos eventos observados  $a$ ,  $c$  e  $e$ , respectivamente, estão mostrados na tabela 4.5 e os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  estão mostrados na tabela 4.6.

Tabela 4.5: Conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$  do exemplo da figura 4.4

Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$	Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$
$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$	$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$
$-x_1 + x_5 \leq 0$	$-x_1 + x_5 \leq 0$
$-x_2 + 2x_6 \leq 1$	$-x_2 + 2x_6 \leq 1$
$-2x_3 + 4x_7 \leq 0$	$-2x_3 + 4x_7 \leq 0$
$-x_4 + x_8 \leq 0$	$-x_4 + x_8 \leq 0$
$-x_7 + x_9 \leq 0$	$-x_7 + x_9 \leq 0$
$c : x_1 + x_7 \leq 0$	$c' : -x_1 - x_7 \leq -1$
$-x_i \leq 0$	$-x_i \leq 0$
$i \in \{1, \dots, 9\}$	$i \in \{1, \dots, 9\}$
$x_5 + x_8 - y_a \leq 0$	$x_5 + x_8 - y_a \leq 0$
$y_a - x_5 - x_8 \leq 0$	$y_a - x_5 - x_8 \leq 0$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$
$x_4 + x_6 - y_c \leq 0$	$x_4 + x_6 - y_c \leq 0$
$y_c - x_4 - x_6 \leq 0$	$y_c - x_4 - x_6 \leq 0$
$-y_c \leq 0$	$-y_c \leq 0$
$x_9 - y_e \leq 0$	$x_9 - y_e \leq 0$
$y_e - x_9 \leq 0$	$y_e - x_9 \leq 0$
$-y_e \leq 0$	$-y_e \leq 0$

Vamos agora ilustrar a aplicação do diagnosticador proposto na diagnose de um

Tabela 4.6: Conjuntos  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  do exemplo da figura 4.4

conjunto $\mathcal{S}_A$	conjunto $\mathcal{S}_B$
$y_a \leq 2$	$y_a \leq 1$
$y_c \leq 2$	$y_c \leq 0$
$y_e \leq 0$	$y_e \leq 1$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$
$-y_c \leq 0$	$-y_c \leq 0$
$-y_e \leq 0$	$-y_e \leq 0$
$y_a - y_c \leq 0$	

evento de falha  $f$  da rede de Petri mostrada na figura 4.1. Vimos que a ocorrência da sequência de eventos  $s_1 = fab$  ou  $s_2 = fabc$  ou  $s_3 = adb$  ou  $s_4 = adbe$  produzem a mesma sequência  $s_o = ab$  de eventos observados, o que implica que  $y_a = 1$  e  $y_b = 1$ . Usando esses valores na Tabela 4.3, verificamos que os conjuntos  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  são satisfeitos, o que implica em  $D(P_o^{-1}(s_o)) = FN$ . Assim, o diagnosticador não está certo de que a falha ocorreu.

A ocorrência da sequência de eventos  $s_5 = adbea$  produz a sequência  $s_o = aba$  de eventos observados e assim  $y_a = 2$  e  $y_b = 1$ . Usando esses valores na Tabela 4.3, verificamos que o conjunto  $\mathcal{S}_A$  é satisfeito, mas o conjunto  $\mathcal{S}_B$  não é satisfeito, o que implica em  $D(P_o^{-1}(s_o)) = N$ . Neste caso, o diagnosticador está certo de que a falha não ocorreu.

A ocorrência da sequência de eventos  $s_6 = fabcb$  produz a sequência  $s_o = abb$  de eventos observados e assim  $y_a = 1$  e  $y_b = 2$ . Usando esses valores na Tabela 4.3, verificamos que o conjunto  $\mathcal{S}_B$  é satisfeito, mas o conjunto  $\mathcal{S}_A$  não é satisfeito, o que implica em  $D(P_o^{-1}(s_o)) = F$ . Neste caso, o diagnosticador está certo de que a falha ocorreu.

O exemplo 12 ilustra a necessidade do atendimento a hipótese **H1** para podermos utilizar o diagnosticador proposto na equação (4.9).

**Exemplo 12** Considere a rede de Petri rotulada  $(P, T, F, W, E, \ell, M_0)$  mostrada na figura 4.5, em que  $P = \{p_1, \dots, p_7\}$ ,  $T = \{t_1, \dots, t_6\}$ ,  $F = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (t_1, p_2), (t_2, p_3), (p_2, t_3), (p_3, t_4), (t_3, p_4), (t_4, p_5), (p_4, t_5), (p_5, t_6), (t_5, p_6), (t_6, p_7)\}$ ,  $w(i, j) = 1, \forall (i, j) \in F$ ,  $E = \{a, b, c, f\}$ ,  $M_0 = [1000000]^T$ . A função de rotulagem de transições  $\ell$  é definida como se segue:  $\ell(t_1) = \ell(t_6) = a$ ,  $\ell(t_2) = c$ ,  $\ell(t_4) = \ell(t_5) = b$  e  $\ell(t_3) = f$ . A linguagem gerada é  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) = \{\varepsilon, a, af, afb, c, cb, cba\}$ . Tomaremos neste exemplo, o conjunto de eventos observados como  $E_o = \{a, b\}$ , o conjunto de eventos não observados como  $E_{uo} = \{c, f\}$  e o conjunto de eventos de falha como  $E_f = \{f\}$ .

O diagnosticador apresentado fornece uma diagnose imprecisa para a rede de Petri mostrada na figura 4.5 porque não obedece a hipótese **H1**, pois temos as sequências  $s_1 = afb$  e  $s_2 = cba$ , em que,  $f \in s_1$ ,  $f \notin s_2$  e  $P_o(s_1) \neq P_o(s_2)$  mas compartilham dois eventos observados  $a$  e  $b$  com o mesmo número de ocorrências.

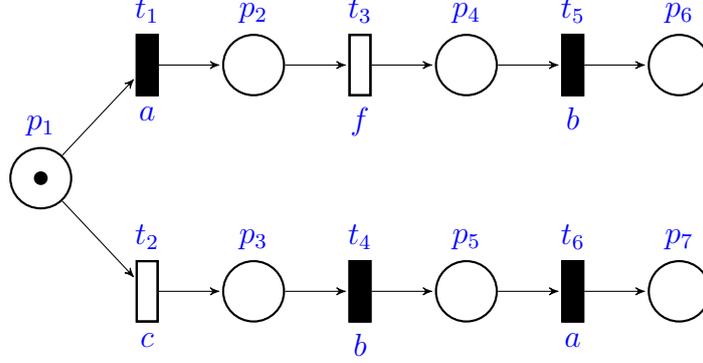


Figura 4.5: Rede de Petri rotulada acíclica  $(\mathcal{N}, M_0)$

A equação de estado para a rede de Petri da figura 4.5 é dada pela equação (4.11).

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  com a adição das desigualdades referentes as variáveis  $y_a$  e  $y_b$  associadas aos eventos observados  $a$  e  $b$ , respectivamente, estão mostrados na tabela 4.7 e os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  estão mostrados na tabela 4.8. Vamos analisar a sequência de eventos  $s_1 = afb$  que produz a sequência de eventos observados  $s_o = P_o(s_1) = ab$  com  $y_a = 1$  e  $y_b = 1$ . Usando esses valores na Tabela 4.8, verificamos que os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  são satisfeitos, o que implica em  $D(P_o^{-1}(s_o)) = FN$ . Assim, o diagnosticador não está certo de que a falha ocorreu. Neste caso, o diagnosticador não é preciso pois quando ocorre o evento  $b$  após evento  $a$  ter ocorrido, ele teria que ter certeza sobre a ocorrência da falha neste sistema. Vamos analisar a sequência de eventos  $s_2 = cba$  que produz a sequência de eventos observados  $s_o = P_o(s_2) = ba$  com  $y_a = 1$  e  $y_b = 1$ . Usando esses valores na Tabela 4.8, verificamos que os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  são satisfeitos, o que implica em  $D(P_o^{-1}(s_o)) = FN$ .

Assim, o diagnosticador não está certo de que a falha ocorreu. Neste caso, o diagnosticador não é preciso pois quando ocorre o evento  $a$  após evento  $b$  ter ocorrido, ele teria que ter certeza sobre a não ocorrência da falha neste sistema. Esta imprecisão na diagnose das duas sequências surge porque a hipótese **H1** não é atendida nesta rede pois a sequência de falha  $s_1$  e a sequência normal  $s_2$  apresentam  $P_o(s_1) \neq P_o(s_2)$  mas o número de ocorrências dos eventos observados  $a$  e  $b$  são iguais.

Tabela 4.7: Conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$  do exemplo da figura 4.5

Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{N}_e}$	Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}_e}$
$x_1 + x_2 \leq 1$	$x_1 + x_2 \leq 1$
$-x_1 + x_3 \leq 0$	$-x_1 + x_3 \leq 0$
$-x_2 + x_4 \leq 0$	$-x_2 + x_4 \leq 0$
$-x_3 + x_5 \leq 0$	$-x_3 + x_5 \leq 0$
$-x_4 + x_6 \leq 0$	$-x_4 + x_6 \leq 0$
$c : x_3 \leq 0$	$c' : -x_3 \leq -1$
$-x_i \leq 0$	$-x_i \leq 0$
$i \in \{1, \dots, 6\}$	$i \in \{1, \dots, 6\}$
$x_1 + x_6 - y_a \leq 0$	$x_1 + x_6 - y_a \leq 0$
$y_a - x_1 - x_6 \leq 0$	$y_a - x_1 - x_6 \leq 0$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$
$x_2 + x_5 - y_b \leq 0$	$x_2 + x_5 - y_b \leq 0$
$y_b - x_2 - x_5 \leq 0$	$y_b - x_2 - x_5 \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$

Tabela 4.8: Conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  do exemplo da figura 4.5

conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$	conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$
$y_a \leq 1$	$y_a \leq 1$
$y_b \leq 1$	$y_b \leq 1$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq -1$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$
$-y_b + y_a \leq 0$	$-y_a + y_b \leq 0$

## 4.2 Diagnose Online - proposta atual

O diagnosticador proposto na equação (4.9) produz um resultado  $D = FN$  quando o vetor de contagem de eventos observados de uma sequência de eventos  $s$  atende tanto ao conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  como ao conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$ . Neste caso, o diagnosticador está incerto

quanto a ocorrência de uma falha e podemos justificar esta diagnose pelas seguintes situações:

- i Seja uma sequência de eventos  $s$  que termine com o evento de falha  $f \in E_f$ , ou seja,  $s = s'f$ . Observe que o vetor de contagem  $v$  de eventos observados de  $s$  é igual ao de  $s'$  porque  $f$  é um evento não observável. Desta forma, antes de  $f$  temos uma sequência normal em que o vetor  $v$  atenderá  $\mathcal{S}_A$ , quando  $f$  ocorrer temos uma sequência com falha em que o vetor  $v$  atenderá a  $\mathcal{S}_B$ . Neste caso, temos o atendimento simultâneo de  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  e o diagnosticador está incerto quanto a ocorrência de uma falha.
- ii Sejam sequências de falha  $s$  e normal  $w$ , em que  $f \in E_f$ ,  $f \in s$ ,  $f \notin w$  e  $P_o(s) = P_o(w)$ . Neste caso, temos o atendimento simultâneo de  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  porque o vetor de contagem de eventos observados de  $s$  é igual ao de  $w$  e o diagnosticador está incerto quanto a ocorrência de uma falha, ele fica em dúvida em qual sequência de eventos a rede de Petri se encontra.
- iii Sejam sequências de falha  $s$  e normal  $w$ , em que  $f \in E_f$ ,  $f \in s$ ,  $f \notin w$ ,  $P_o(s) \neq P_o(w)$ , compartilham os mesmos eventos observados e o número de ocorrências de todos os eventos observados é igual. Neste caso, temos o atendimento simultâneo de  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  porque o vetor de contagem de eventos observados de  $s$  é igual ao de  $w$  e o diagnosticador está incerto quanto a ocorrência de uma falha, ele fica em dúvida em qual sequência de eventos a rede de Petri se encontra.

O problema de incerteza visto em i sempre ocorre tendo em vista que a falha é considerada um evento não observável. O problema de incerteza visto em ii pode ocorrer em determinadas redes de Petri tendo em vista que podemos ter sequências de falha e normal com a mesma sequência de eventos observados. O diagnosticador proposto na equação (4.9) consegue desfazer as incertezas descritas em i e ii na evolução das sequências de eventos caso a linguagem da rede de Petri seja diagnosticável. O problema de incerteza visto em iii pode ocorrer em determinadas redes de Petri quando a informação das sequências de eventos se dá através do vetor de contagem dos eventos observados. O diagnosticador proposto na equação (4.9) pode ter dificuldades em desfazer a incerteza na evolução das sequências mesmo se a linguagem da rede de Petri for diagnosticável, como visto no exemplo 12. Desta forma, a hipótese **H1** foi incluída para que não ocorresse este tipo de incerteza.

Nesta seção, modificaremos o diagnosticador proposto na equação (4.9) de forma a retirar a hipótese **H1**. Neste sentido, poderemos vir a utilizá-lo em redes de Petri que possuem sequências normal e de falha com projeções diferentes e com o mesmo vetor de contagem de eventos observados produzindo uma diagnose precisa.

A modificação no diagnosticador nos dá condições no exemplo 12 de poder diferenciar a sequência de falha  $s = afb$  da sequência normal  $w = cba$  em que ocorre o problema descrito em iii, ou seja, se ocorrer o evento  $a$  podemos estar nas sequências  $a$  ou  $af$ , a sequência está indo de encontro a falha ou a falha já ocorreu e que na ocorrência do evento  $b$ , em seguida, temos certeza que a falha ocorreu. Por outro lado, poder verificar que se ocorrer o evento  $b$  estamos na sequência  $cb$ , a sequência não está indo de encontro a falha e temos certeza que a falha não ocorreu. Na ocorrência do evento  $a$ , em seguida, continuamos ter certeza que a falha não ocorreu.

Para podermos retirar a hipótese **H1** propomos verificar a evolução da rede de Petri desde a marcação inicial  $M_0$ , identificando após cada evento observado, se a sequência de eventos pode alcançar uma marcação terminal sendo obrigatório que um evento de falha ocorra ou que pode alcançar uma marcação terminal sendo obrigatório que nenhum evento de falha ocorra. Caso identifiquemos a primeira situação, será verificado se a falha ocorreu na sequência de eventos baseado nos conceitos utilizados no diagnosticador da seção anterior. Para atender o proposto, será necessário conhecer todas as sequências de eventos desde a marcação inicial  $M_0$  que atingem marcações terminais. O conhecimento das sequências citadas poderá ser obtida com o auxílio da árvore de alcançabilidade da rede de Petri, em que o caminho entre marcações representa uma sequência de eventos na evolução da rede de Petri.

**Exemplo 13** A rede de Petri rotulada  $(P, T, F, W, E, \ell, M_0)$  mostrada na figura 4.6 possui  $P = \{p_1, \dots, p_{13}\}$ ,  $T = \{t_1, \dots, t_{13}\}$ ,  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $M_0 = [1000000000000]^T$ . A função de rotulagem de transições  $\ell$  é definida como:  $\ell(t_1) = \ell(t_6) = \ell(t_7) = \ell(t_8) = a$ ,  $\ell(t_2) = \ell(t_{10}) = e$ ,  $\ell(t_3) = \ell(t_5) = c$ ,  $\ell(t_4) = \ell(t_{11}) = d$ ,  $\ell(t_9) = f$  e  $\ell(t_{12}) = \ell(t_{13}) = b$ . A linguagem gerada é  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) = \{\varepsilon, a, ac, acf, acfd, acfb, e, ea, eaf, eafd, eafb, c, ca, cae, caeb, d, da\}$ . O conjunto de eventos observados é  $E_o = \{a, b, d, e\}$ , o conjunto de eventos não observados é  $E_{uo} = \{c, f\}$  e o conjunto de eventos de falha é  $E_f = \{f\}$ . A árvore de alcançabilidade está mostrada na figura 4.7 e suas marcações estão mostradas na tabela 4.9.

Note que as marcações  $M_{10}$  e  $M_{11}$  são marcações terminais que poderão ser alcançadas desde a marcação  $M_0$  com o evento de falha  $f$  ocorrendo. A marcação  $M_{10}$  poderá ser alcançada pela concatenação dos caminhos  $A$ ,  $E$  e  $F$  que denominaremos de caminho  $F1$  ou pela concatenação dos caminhos  $B$ ,  $E$  e  $F$  que denominaremos de caminho  $F2$ . A marcação  $M_{11}$  poderá ser alcançada pela concatenação dos caminhos  $A$ ,  $E$  e  $G$  que denominaremos de caminho  $F3$  ou pela concatenação dos caminhos  $B$ ,  $E$  e  $G$  que denominaremos de caminho  $F4$ . O caminho  $F1$  é formado pela sequência de eventos  $s_{F1} = acfd$  com  $P_o(s_{F1}) = ad$ , o caminho  $F2$  é formado pela sequência de eventos  $s_{F2} = eafd$  com  $P_o(s_{F2}) = ead$ , o caminho  $F3$  é formado

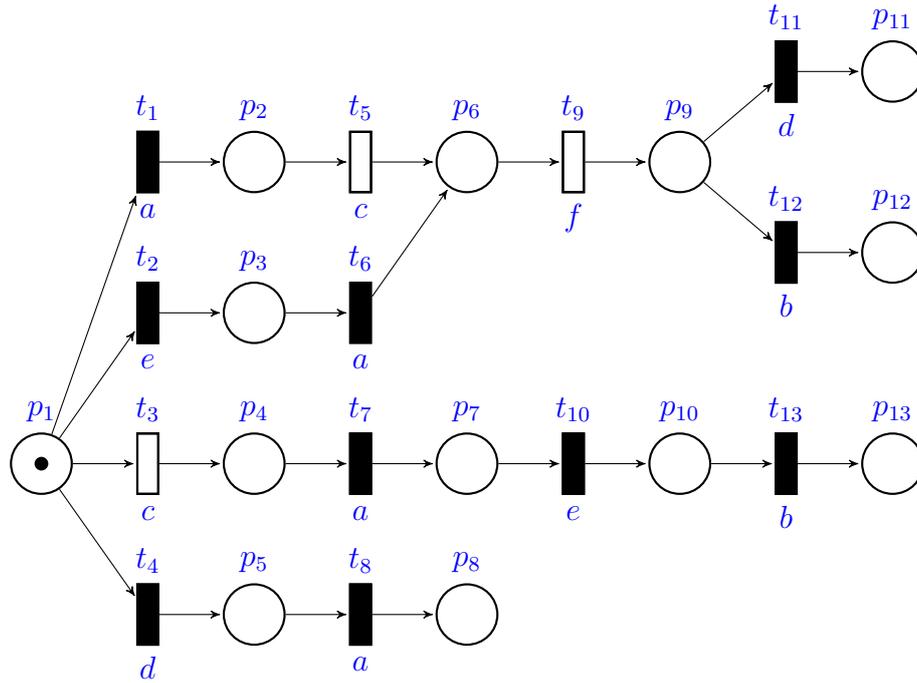


Figura 4.6: Rede de Petri rotulada acíclica  $(\mathcal{N}, M_0)$

pela sequência de eventos  $s_{F3} = acfb$  com  $P_o(s_{F3}) = ab$  enquanto o caminho  $F4$  é formado pela sequência de eventos  $s_{F4} = eafb$  com  $P_o(s_{F4}) = eab$ .

Note que as marcações  $M_7$  e  $M_{12}$  são marcações terminais que poderão ser alcançadas desde a marcação  $M_0$  sem que o evento de falha  $f$  ocorra. A marcação  $M_7$  poderá ser alcançada pelo caminho  $D$  que denominaremos de caminho  $N1$  e a marcação  $M_{12}$  poderá ser alcançada pelo caminho  $C$  que denominaremos de caminho  $N2$ . O caminho  $N1$  é formado pela sequência de eventos  $s_{N1} = da$  com  $P_o(s_{N1}) = da$  enquanto o caminho  $N2$  é formado pela sequência de eventos  $s_{N2} = caeb$  com  $P_o(s_{N2}) = aeb$ .

Ao iniciarmos o sistema e verificarmos que o evento  $a$  ocorreu teremos dúvida se estamos indo em direção a marcação  $M_{10}$  pelo caminho  $F1$  ou em direção a marcação  $M_{11}$  pelo caminho  $F3$  ou em direção a marcação  $M_{12}$  pelo caminho  $N2$ . Ao verificarmos em seguida o evento  $e$  temos certeza que estamos indo no caminho em direção a marcação  $M_{12}$  pelo caminho  $N2$ . Caso estivéssemos observando apenas o vetor de contagem dos eventos observados teríamos dúvida se a sequência de eventos observados estaria em direção a marcação  $M_{10}$  pelo caminho  $F2$  ou em direção a marcação  $M_{11}$  pelo caminho  $F4$  ou em direção a marcação  $M_{12}$  pelo caminho  $N2$  e teríamos uma contradição em relação a primeira verificação. Por outro lado, caso tivéssemos observado o evento  $d$  após o evento  $a$  temos certeza que alcançamos a

marcação  $M_{10}$  pelo caminho F1 e se tivéssemos observado apenas o vetor de contagem dos eventos observados teríamos dúvida se a sequência de eventos observados alcançou a marcação  $M_{10}$  pelo caminho F1 ou está indo em direção a marcação  $M_7$  pelo caminho N1 e teríamos, também, uma contradição em relação a primeira verificação. Desta forma, com o acompanhamento da evolução de uma sequência de eventos observados através dos caminhos possíveis desde a marcação  $M_0$  poderemos então retirar a hipótese **H1** que foi utilizada no diagnosticador anterior.

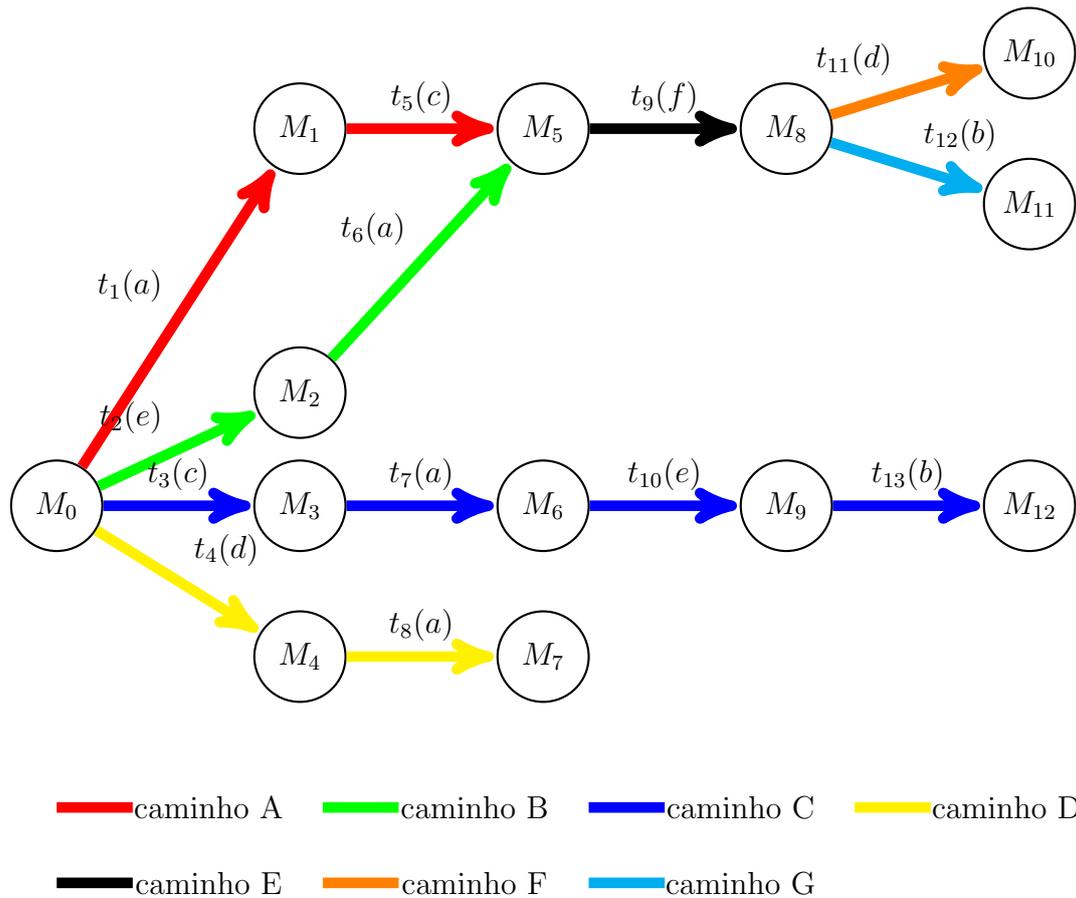


Figura 4.7: Árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6

A subseção 4.2.1 apresenta as condições a serem atendidas para verificar se uma sequência de disparos de transições pode alcançar uma marcação terminal sendo obrigatório que nenhuma falha ocorra. A subseção 4.2.2 apresenta as condições a serem atendidas para verificar se uma sequência de disparos de transições pode alcançar uma marcação terminal sendo obrigatório que uma falha ocorra e caso afirmativo, as condições a serem atendidas para verificar se a falha ocorreu. A subseção 4.2.4 apresenta o diagnosticador modificado utilizando estas verificações.

Tabela 4.9: Marcações da rede de Petri da figura 4.6

---

$M_0 = [1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_1 = [0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_2 = [0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_3 = [0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_4 = [0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_5 = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_6 = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_7 = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_8 = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_9 = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$	$0]^{T}$
$M_{10} = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0]^{T}$
$M_{11} = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0]^{T}$
$M_{12} = [0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$1]^{T}$

---

### 4.2.1 Verificação se uma sequência de disparos de transições pode alcançar uma marcação terminal sem a ocorrência de uma falha

Em uma rede de Petri acíclica, a partir de uma marcação inicial  $M_0$ , podemos ter sequências de disparos de transições com comportamento livre de falha e que na sua evolução, pode continuar com seu comportamento livre de falha até atingir uma marcação terminal. Seja  $\sigma_d \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  uma sequência de disparos de transições com comportamento livre de falha tal que  $M_0 \xrightarrow{\sigma_d} M_d$  e  $M_d$  é uma marcação terminal. O fecho de prefixo  $\overline{\sigma_d}$  contém um conjunto de sequências de disparos de transições com comportamento livre de falha e que na sua evolução, pode continuar com seu comportamento livre de falha até atingir a marcação terminal  $M_d$ .

Sejam  $\Lambda(\mathcal{N}, M_0) = \{M \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, M_0) : \exists \sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) \wedge \nexists t \in T[M_0 \xrightarrow{\sigma} M \xrightarrow{t} M' \wedge M' \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, M_0)]\}$  o conjunto das marcações terminal em uma rede de Petri e  $\mathcal{W}(\mathcal{N}, M_0) = \{\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) : M_0 \xrightarrow{\sigma} M \wedge M \in \Lambda(\mathcal{N}, M_0) \wedge t_f \notin \sigma\}$  o conjunto das sequências de disparos de transições que levam a uma marcação terminal e não possui uma transição de falha. Desta forma,  $\sigma_d \in \mathcal{W}(\mathcal{N}, M_0)$ , em que  $d \in I_W$  e  $I_W = \{1, \dots, |\mathcal{W}(\mathcal{N}, M_0)|\}$ .

Como visto na seção 4.1.1, o conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  identifica o comportamento livre de falha de uma sequência de disparos de transições, então, se quisermos identificar se uma sequência de disparos de transições é prefixo de  $\sigma_d$  e portanto pode atingir a marcação terminal  $M_d$  sem ter o disparo de uma transição de falha, podemos adicionar a  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ , um conjunto de desigualdades que denotaremos como  $c_n^d$ , produzindo um

novo conjunto que denotaremos de  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}\mathcal{N}}^d$ . Desta forma, para cada  $\sigma_d \in \mathcal{W}(\mathcal{N}, M_0)$  devemos produzir um conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}\mathcal{N}}^d$  em que teremos um conjunto de desigualdades  $c_n^d$ , ou seja,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{N}\mathcal{N}}^d = \begin{cases} \mathcal{S}_{\mathcal{N}} \\ c_n^d \end{cases}, d \in I_W. \quad (4.12)$$

Seja  $T_{\sigma_d} = \{t \in T : t \in \sigma_d \wedge \sigma_d \in \mathcal{W}(\mathcal{N}, M_0)\}$  o conjunto das transições que são disparadas em  $\sigma_d$ . Podemos notar que caso ocorra o disparo de uma transição  $t \notin T_{\sigma_d}$  teremos certeza que não estamos em uma sequência de disparos de transições que seja prefixo de  $\sigma_d$ . Desta forma, para que uma sequência de disparos de transições seja prefixo de  $\sigma_d$ , é necessário que o número de disparos  $x_i$  de uma transição  $t_i \notin T_{\sigma_d}$  seja igual a zero, então, podemos concluir que  $c_n^d$  são desigualdades do tipo  $x_i \leq 0$  para toda transição  $t_i \notin T_{\sigma_d}$ .

Para obtermos as desigualdades que formarão cada conjunto  $c_n^d$  em  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}\mathcal{N}}^d$ ,  $d \in I_W$  utilizaremos a árvore de alcançabilidade da rede de Petri. Os procedimentos estão mostrados no algoritmo 3.

**Algoritmo 3** *Algoritmo para determinar os conjuntos  $c_n^d$ ,  $d \in I_W$*

**Entrada:**

- $G = (X, T, f, x_0)$ : autômato que representa a árvore de alcançabilidade de uma rede de Petri  $(\mathcal{N}, M_0)$
- $T_f$ : conjunto de transições de falha.

**Saída:**  $c_n^d$ ,  $d \in I_W$  : conjuntos de desigualdades

1: Determinar o autômato  $G_F$  que modela o comportamento de falha do sistema:

- Defina  $A_l = (X_l, T_f, f_l, x_{o,l})$ , em que  $X_l = \{N, F\}$ ,  $x_{o,l} = \{N\}$ ,  $f_l(N, t_f) = F$  e  $f_l(F, t_f) = F$  para todo  $t_f \in T_f$
- Calcular  $G_l = G \parallel A_l$  e marcar todos os estados de  $G_l$  cuja segunda coordenada é igual a  $F$ .
- Calcular o autômato de falha  $G_F = CoAc(G_l)$ .

2: Determinar o autômato  $G_N$  que modela o comportamento livre de falha do sistema, da seguinte forma:

- utilizando  $G_l = G \parallel A_l$  encontrado na etapa anterior, desmarcar todos os estados e marcar todos os estados cuja segunda coordenada é igual a  $N$ .
- Calcular o autômato normal  $G_N = CoAc(G_l)$ .

3: Calcular o autômato  $G_{nn} = G_N - G_F$

4: Enumerar em  $G_{nn}$  todos os caminhos possíveis (sequências de disparos de transições) entre a raiz (estado inicial  $M_0$ ) e as folhas (estados terminais) modelando cada um como um autômato  $G_{nn}^d = (X_{\sigma_d}, T_{\sigma_d}, f_{\sigma_d}, x_0)$ ,  $d = \{1, \dots, k\}$ , em que  $k$  é o número de caminhos encontrados.

5: Determinar para cada  $G_{nn}^d$ ,  $d = \{1, \dots, k\}$ , o conjunto  $c_n^d$ , da seguinte forma:

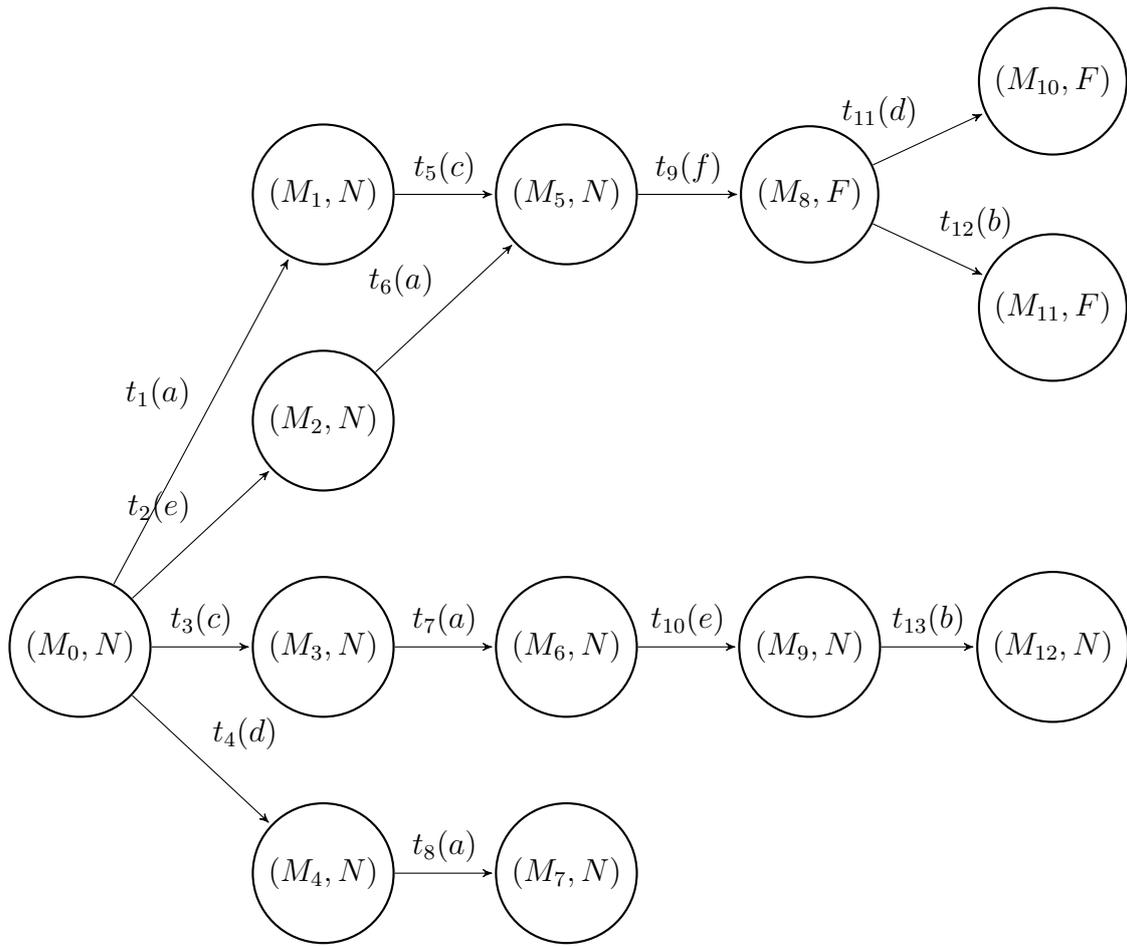
- Calcular  $T - T_{\sigma_d}$ .
- $c_n^d : x_i \leq 0$ , em que  $x_i$  é a quantidade de disparos de  $t_i \in (T - T_{\sigma_d})$

A entrada do algoritmo 3 requer a árvore de alcançabilidade da rede de Petri  $G = (X, \Sigma, f, x_0)$ , em que o conjunto de estados  $X$  é formado pelas marcações da rede de Petri, o conjunto de eventos  $\Sigma$  é formado pelas transições da rede de Petri, a função de transição  $f$  é a transição que é disparada entre duas marcações e o estado inicial  $x_0$  é a marcação inicial  $M_0$  da rede de Petri e o conjunto das transições de falha  $T_f$ .

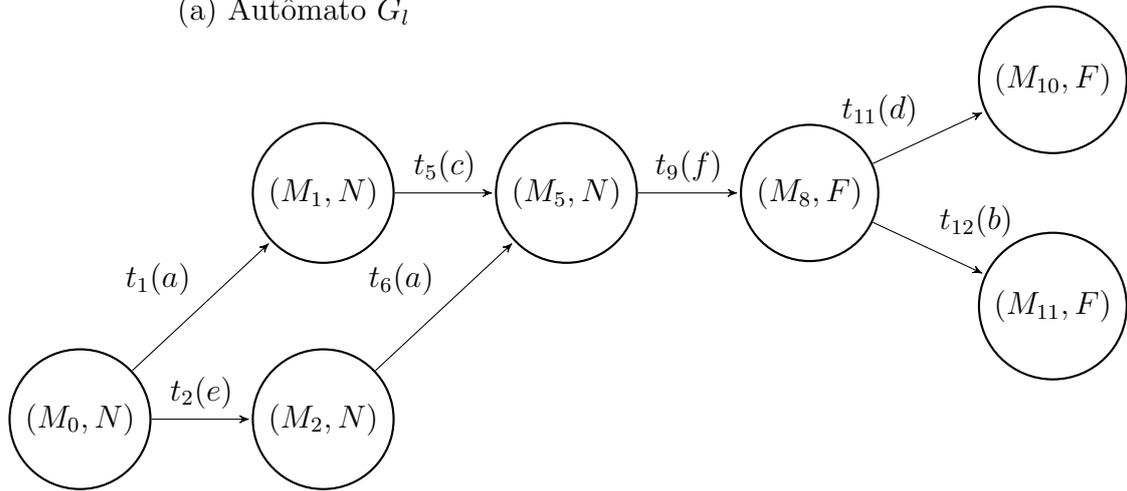
**Exemplo 14** Aplicando o algoritmo 3 na rede de Petri rotulada mostrada na figura 4.6 obtemos no passo 1, os autômatos  $G_l$  e  $G_F$  mostrados na figura 4.8 (a) e (b) respectivamente. Nos passos 2 e 3, obtemos os autômatos  $G_N$  e  $G_{nn}$  mostrados na figura 4.9 (a) e (b) respectivamente. O passo 4 determina que em  $G_{nn}$  temos dois caminhos possíveis entre a raiz  $M_0$  e as folhas  $M_{12}$  e  $M_7$ , mostrados através dos autômatos  $G_{nn}^1$  e  $G_{nn}^2$  na figura 4.10 (a) e (b) respectivamente. Os caminhos são representados pelas sequências de disparos de transições  $\sigma_1 = t_3 t_7 t_{10} t_{13}$  e  $\sigma_2 = t_4 t_8$ , portanto  $\mathcal{W}(\mathcal{N}, M_0) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ . Note que,  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}\}$  e  $T_{\sigma_1} = \{t_3, t_7, t_{10}, t_{13}\}$ , então,  $T - T_{\sigma_1} = \{t_1, t_2, t_4, t_5, t_6, t_8, t_9, t_{11}, t_{12}\}$ . Este resultado nos fornece as condições para determinarmos o conjunto  $c_n^1$  sendo  $x_i \leq 0$ ,  $i \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$ . De forma similar, notamos que  $T_{\sigma_2} = \{t_4, t_8\}$ , então,  $T - T_{\sigma_2} = \{t_1, t_2, t_3, t_5, t_6, t_7, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}\}$ . Este resultado nos fornece as condições para determinarmos o conjunto  $c_n^2$  sendo  $x_i \leq 0$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13\}$ . Neste ponto do desenvolvimento do modelo, adicionaremos as desigualdades  $c_n^1$  e  $c_n^2$  ao conjunto  $\mathcal{S}_N$ , produzindo, então, dois novos conjuntos de desigualdades denominados de  $\mathcal{S}_{NN}^1$  e  $\mathcal{S}_{NN}^2$ , como mostrado a seguir.

$$\mathcal{S}_{NN}^1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_N \\ c_n^1 : x_i \leq 0, i \in \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12\} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S}_{NN}^2 = \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_N \\ c_n^2 : x_i \leq 0, i \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13\} \end{array} \right.$$

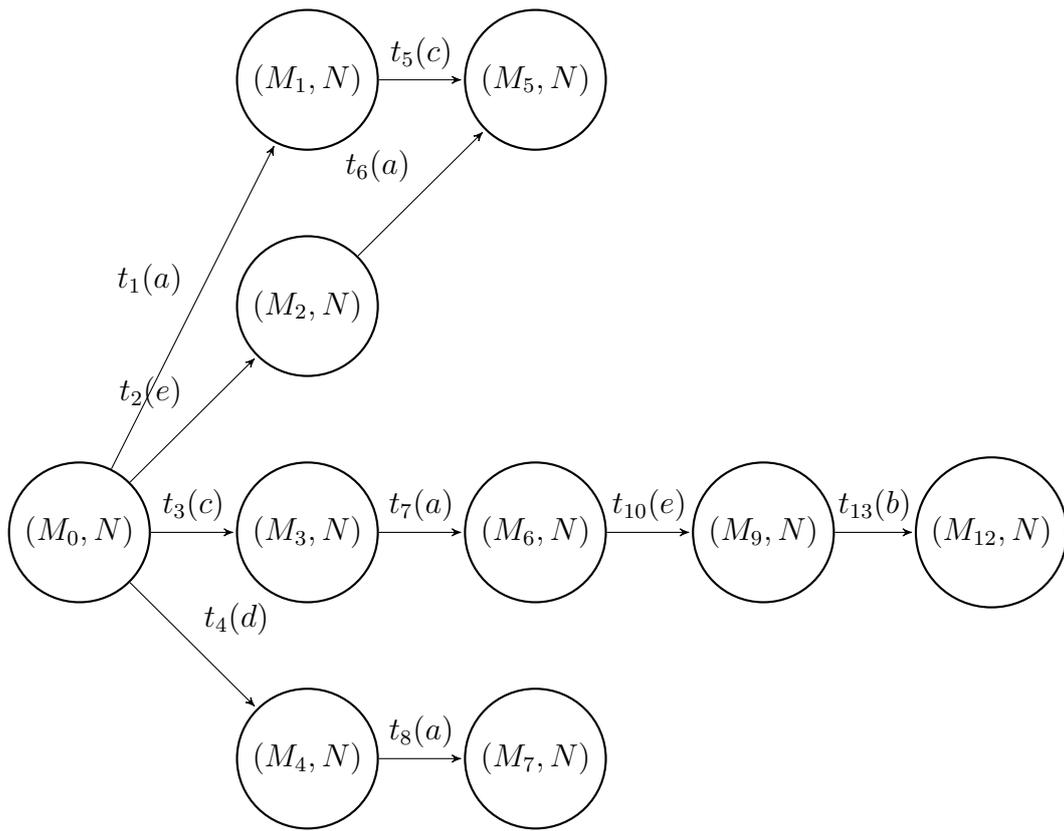


(a) Autômato  $G_l$

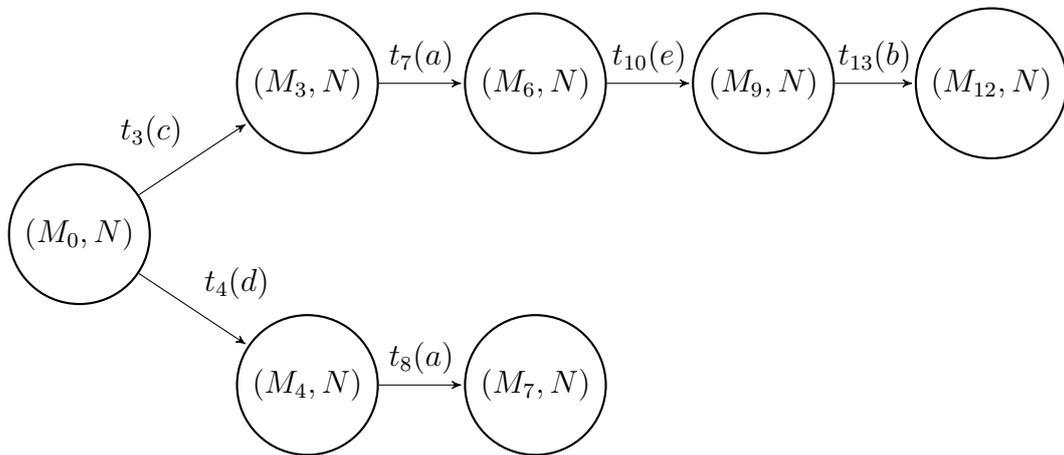


(b) Autômato  $G_F$

Figura 4.8: Autômatos  $G_l$  e  $G_F$  determinados através da árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6

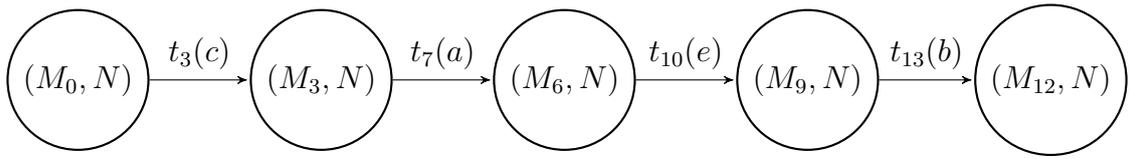


(a) Autômato  $G_N$

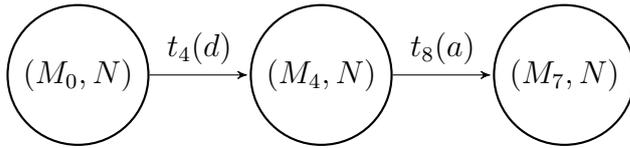


(b) Autômato  $G_{nn} = G_N - G_F$

Figura 4.9: Autômatos  $G_N$  e  $G_{nn}$  determinados através da árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6



(a) Autômato  $G_{nn}^1$



(b) Autômato  $G_{nn}^2$

Figura 4.10: Autômatos  $G_{nn}^1$  e  $G_{nn}^2$  determinados através da árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6

## 4.2.2 Verificação se uma sequência de disparos de transições pode alcançar uma marcação terminal com a ocorrência de uma falha

Em uma rede de Petri acíclica, a partir de uma marcação inicial  $M_0$ , podemos ter sequências de disparos de transições que atingem marcações terminais e que na sua evolução tenham o disparo de uma transição de falha. Sejam  $t_f \in T$  uma transição de falha e  $\Lambda(\mathcal{N}, M_0) = \{M \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, M_0) : \exists \sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) \wedge \nexists t \in T[M_0 \xrightarrow{\sigma} M \xrightarrow{t} M' \wedge M' \in \mathcal{R}(\mathcal{N}, M_0)]\}$  o conjunto das marcações terminais em uma rede de Petri então  $\mathcal{Z}(\mathcal{N}, M_0) = \{\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) : M_0 \xrightarrow{\sigma} M \wedge M \in \Lambda(\mathcal{N}, M_0) \wedge t_f \in \sigma\}$  é o conjunto das sequências de disparos de transições que levam a uma marcação terminal e possuem uma transição de falha na sua evolução. Sendo  $\sigma_z \in \mathcal{Z}(\mathcal{N}, M_0)$ , em que  $z \in I_Z$  e  $I_Z = \{1, \dots, |\mathcal{Z}(\mathcal{N}, M_0)|\}$ , temos que o fecho de prefixo  $\overline{\sigma_z}$  contém um conjunto de sequências de disparos de transições com comportamento livre de falha ou com comportamento de falha que pode alcançar uma marcação terminal  $M_z$  com a ocorrência de uma falha.

Como visto na seção 4.1.1, o conjunto  $\mathcal{S}$  identifica se uma sequência de disparos de transições pertence a uma rede de Petri, então, se quisermos identificar se uma sequência de disparos de transições é prefixo de  $\sigma_z$  e portanto pode atingir a marcação terminal  $M_z$  com o disparo de uma transição de falha, podemos adicionar a  $\mathcal{S}$ , um conjunto de desigualdades que denotaremos como  $c_z$ , produzindo um novo conjunto que denotaremos de  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^z$ . Desta forma, para cada  $\sigma_z \in \mathcal{Z}(\mathcal{N}, M_0)$  devemos produzir um conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^z$  em que teremos um conjunto de desigualdades  $c_z$ , ou seja,

$$\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^z = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_z \end{cases}, z \in I_Z. \quad (4.13)$$

Seja  $T_{\sigma_z} = \{t \in T : t \in \sigma_z \wedge \sigma_z \in \mathcal{Z}(\mathcal{N}, M_0)\}$  o conjunto das transições que são disparadas em  $\sigma_z$ . Podemos notar que caso ocorra o disparo de uma transição  $t \notin T_{\sigma_z}$  teremos certeza que não estamos em uma sequência de disparos de transições que seja prefixo de  $\sigma_z$ . Desta forma, para que uma sequência de disparos de transições seja prefixo de  $\sigma_z$ , é necessário que o número de disparos  $x_i$  de uma transição  $t_i \notin T_{\sigma_z}$  seja igual a zero, então, podemos concluir que  $c_z$  são desigualdades do tipo  $x_i \leq 0$  para toda transição  $t_i \notin T_{\sigma_z}$ .

Para obtermos as desigualdades que formarão cada conjunto  $c_z$  em  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^z$ ,  $z \in I_Z$  propomos utilizar a árvore de alcançabilidade da rede de Petri que possui a estrutura de um autômato determinístico em que podemos utilizar operações tais como composição paralela e partes acessível/coacessível para determinar as transições  $t_i \notin T_{\sigma_z}$ . Os procedimentos estão mostrados no algoritmo 4.

**Algoritmo 4** Algoritmo para determinar os conjuntos  $c_z$ ,  $z \in I_Z$

**Entrada:**

- $G = (X, T, f, x_0)$ : autômato que representa a árvore de alcançabilidade de uma rede de Petri  $(\mathcal{N}, M_0)$
- $T_f$ : conjunto de transições de falha.

**Saída:**  $c_z$ ,  $z \in I_Z$  : conjuntos de desigualdades

1: Determinar o autômato  $G_F$  que modela o comportamento de falha do sistema:

- Defina  $A_l = (X_l, T_f, f_l, x_{o,l})$ , em que  $X_l = \{N, F\}$ ,  $x_{o,l} = \{N\}$ ,  $f_l(N, t_f) = F$  e  $f_l(F, t_f) = F$  para todo  $t_f \in T_f$
- Calcular  $G_l = G \parallel A_l$  e marcar todos os estados de  $G_l$  cuja segunda coordenada é igual a  $F$ .
- Calcular o autômato de falha  $G_F = \text{CoAc}(G_l)$ .

2: Enumerar em  $G_F$  todos os caminhos possíveis (sequências de disparos de transições) entre a raiz (estado inicial  $M_0$ ) e as folhas (estados terminais) modelando cada um como um autômato  $G_{nf}^z = (X_{\sigma_z}, T_{\sigma_z}, f_{\sigma_z}, x_0)$ ,  $z = \{1, \dots, k\}$ , em que  $k$  é o número de caminhos encontrados.

3: Determinar para cada  $G_{nf}^z$ ,  $z = \{1, \dots, k\}$ , o conjunto  $c_z$ , da seguinte forma:

- Calcular  $T - T_{\sigma_z}$ .
- $c_z : x_i \leq 0$ , em que  $x_i$  é a quantidade de disparos de  $t_i \in (T - T_{\sigma_z})$ .

**Exemplo 15** Aplicando o algoritmo 4 na rede de Petri rotulada mostrada na figura 4.6, obtemos no passo 1, os autômatos  $G_l$  e  $G_F$  mostrados na figura 4.8 (a) e (b) respectivamente. O passo 2 determina que em  $G_F$  temos dois caminhos possíveis entre a raiz  $M_0$  e a folha  $M_{10}$  e dois caminhos possíveis entre a raiz  $M_0$  e a folha  $M_{11}$  mostrados através dos autômatos  $G_{nf}^1$  a  $G_{nf}^4$  na figura 4.11 (a) a (d) respectivamente. Os caminhos são representados pelas sequências de disparos de transições  $\sigma_1 = t_1 t_5 t_9 t_{11}$ ,  $\sigma_2 = t_2 t_6 t_9 t_{11}$ ,  $\sigma_3 = t_1 t_5 t_9 t_{12}$  e  $\sigma_4 = t_2 t_6 t_9 t_{12}$ , portanto,  $\mathcal{Z}(\mathcal{N}, M_0) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ . Note que  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}\}$  e  $T_{\sigma_1} = \{t_1, t_5, t_9, t_{11}\}$ , então,  $T - T_{\sigma_1} = \{t_2, t_3, t_4, t_6, t_7, t_8, t_{10}, t_{12}, t_{13}\}$ . Este resultado nos fornece as condições para determinarmos o conjunto  $c_1$  sendo  $x_i \leq 0$ ,  $i \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13\}$ . De forma similar, notamos que  $T_{\sigma_2} = \{t_2, t_6, t_9, t_{11}\}$ , então,  $T - T_{\sigma_2} = \{t_1, t_3, t_4, t_5, t_7, t_8, t_{10}, t_{12}, t_{13}\}$ . Este resultado nos fornece as condições para determinarmos o conjunto  $c_2$  sendo  $x_i \leq 0$ ,  $i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13\}$ . De forma similar, notamos que  $T_{\sigma_3} = \{t_1, t_5, t_9, t_{12}\}$ , então,  $T - T_{\sigma_3} = \{t_2, t_3, t_4, t_6, t_7, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{13}\}$ . Este resultado nos fornece as condições para determinarmos o conjunto  $c_3$  sendo  $x_i \leq 0$ ,  $i \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13\}$ . De forma similar, notamos que  $T_{\sigma_4} =$

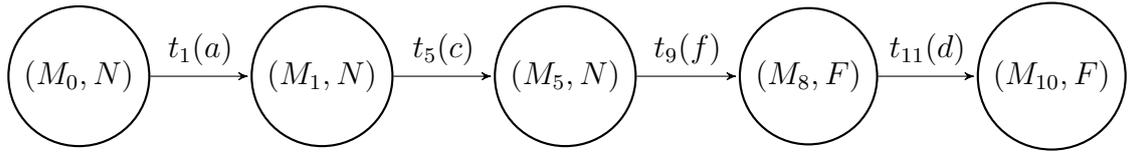
$\{t_2, t_6, t_9, t_{12}\}$ , então,  $T - T_{\sigma_4} = \{t_1, t_3, t_4, t_5, t_7, t_8, t_{10}, t_{11}, t_{13}\}$ . Este resultado nos fornece as condições para determinarmos o conjunto  $c_4$  sendo  $x_i \leq 0$ ,  $i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13\}$ . Neste ponto do desenvolvimento do modelo, adicionaremos as desigualdades  $c_1$  a  $c_4$  ao conjunto  $\mathcal{S}$ , produzindo, então, quatro novos conjuntos de desigualdades denominados de  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^4$ , como mostrado a seguir.

$$\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^1 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_1 : x_i \leq 0, i \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13\} \end{cases}$$

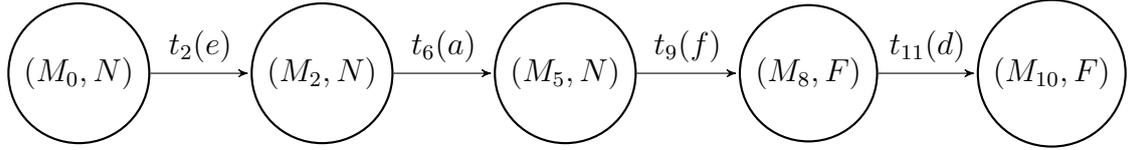
$$\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^2 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_2 : x_i \leq 0, i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13\} \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^3 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_3 : x_i \leq 0, i \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13\} \end{cases}$$

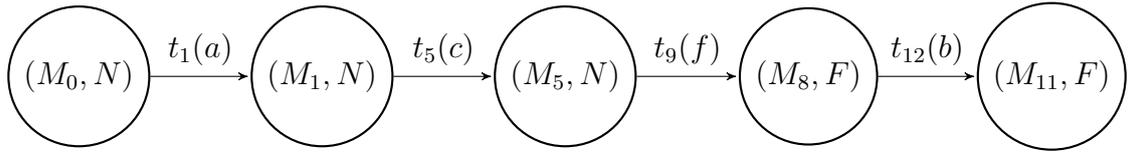
$$\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^4 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_4 : x_i \leq 0, i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13\} \end{cases}$$



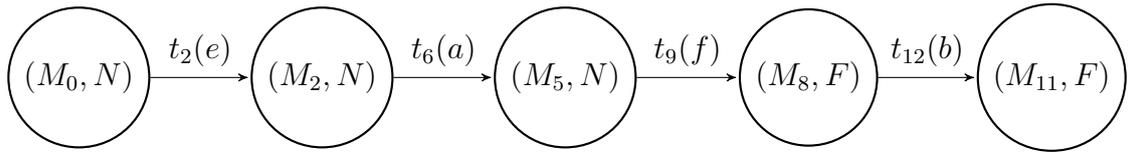
(a) Autômato  $G_{nf}^1$



(b) Autômato  $G_{nf}^2$



(c) Autômato  $G_{nf}^3$



(d) Autômato  $G_{nf}^4$

Figura 4.11: Autômatos  $G_{nf}^1$  a  $G_{nf}^4$  determinados através da árvore de alcançabilidade da rede de Petri da figura 4.6

Como visto na seção 4.1.1, a ocorrência ou não de uma transição de falha  $t_f \in T_f$  em uma sequência de disparos de transições  $\sigma$  pode ser representada na forma de desigualdades em que se a desigualdade  $c := x_f \leq 0$  for satisfeita então  $\sigma$  não

conterá  $t_f$ . Por outro lado, se a negação dessa desigualdade for satisfeita, *i.e.*,  $c' := x_f > 0$  então  $\sigma$  conterá  $t_f$ . Desta forma, para verificarmos se uma sequência de disparos sendo prefixo de  $\sigma_z \in \mathcal{Z}(\mathcal{N}, M_0)$  tem comportamento livre de falha ou um comportamento de falha podemos adicionar as desigualdades  $c$  e  $c'$  ao conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}$ , produzindo, então, dois novos conjuntos de desigualdades denominados de  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^z$ , como mostrado a seguir.

$$\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_z, z \in I_Z. \\ c \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^z = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_z, z \in I_Z. \\ c' \end{cases}$$

O conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z$  nos dá as condições para verificar o comportamento livre de falha de uma sequência de disparos sendo prefixo de  $\sigma_z$ . Por outro lado, o conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^z$  nos dá as condições para verificar o comportamento com falha de uma sequência de disparos sendo prefixo de  $\sigma_z$ . Note que apenas um dos conjuntos será satisfeito.

Como exemplo, consideremos a rede de Petri da figura 4.6 na qual  $t_9$  é uma transição de falha e  $x_9$  é a variável que representa o número de disparos de  $t_9$  em uma sequência de disparos  $\sigma$ , e então, as desigualdades  $c$  e  $c'$  são  $x_9 \leq 0$  e  $x_9 > 0$  (ou  $-x_9 \leq -1$ ), respectivamente, portanto teremos:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^1 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_1 : x_i \leq 0, i \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13\} \\ c : x_9 \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^1 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_1 : x_i \leq 0, i \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13\} \\ c' : -x_9 \leq -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^2 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_2 : x_i \leq 0, i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13\} \\ c : x_9 \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^2 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_2 : x_i \leq 0, i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13\} \\ c' : -x_9 \leq -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{NFA}^3 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_3 : x_i \leq 0, i \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13\} \\ c : x_9 \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{NFB}^3 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_3 : x_i \leq 0, i \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13\} \\ c' : -x_9 \leq -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{NFA}^4 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_4 : x_i \leq 0, i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13\} \\ c : x_9 \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{NFB}^4 = \begin{cases} \mathcal{S} \\ c_4 : x_i \leq 0, i \in \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13\} \\ c' : -x_9 \leq -1 \end{cases}$$

### 4.2.3 Redução dos conjuntos de desigualdades $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z$ , $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^z$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^d$

Como visto na seção 4.1.2, podemos aplicar um método de eliminação de variáveis nos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^z$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$  para eliminar todas as variáveis  $x$ , deixando apenas as variáveis  $y_e$ . Os conjuntos resultantes de desigualdades com variáveis que quantificam as ocorrências dos eventos observados denotaremos como  $AF_z$ ,  $PF_z$  e  $SF_d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$ . Os conjuntos de desigualdades  $AF_z$  em que  $z \in I_Z$  nos fornece condições para identificar se uma sequência de eventos pode estar evoluindo para alcançar uma marcação terminal sendo obrigatório que uma falha ocorra mas que ainda se encontra com um comportamento livre de falha. Os conjuntos de desigualdades  $PF_z$  em que  $z \in I_Z$  nos fornece condições para identificar se uma sequência de eventos pode estar evoluindo para alcançar uma marcação terminal e se encontra com um comportamento no qual a falha ocorreu. Os conjuntos de desigualdades  $SF_d$  em que  $d \in I_W$  nos fornece condições para identificar se uma sequência de eventos pode estar evoluindo para alcançar uma marcação terminal sendo obrigatório que nenhuma falha ocorra e portanto se encontra com um comportamento livre de falha. A formação destes conjuntos está resumido no Algoritmo 5.

**Algoritmo 5** *Algoritmo para determinar  $AF_z$ ,  $PF_z$  e  $SF_d$*

**Entrada:**

- $\mathcal{N} = (P, T, F, W, E, \ell, M_0)$ : Modelo em rede de Petri rotulada
- $E_o$ : Conjunto dos eventos observados

**Saída:**  $AF_z$ ,  $PF_z$  e  $SF_d$ , em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$ , respectivamente: Conjunto de desigualdades com variáveis que quantificam as ocorrências dos eventos observados

- 1: Executar algoritmo 1 para determinar os conjuntos  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$
- 2: Executar o algoritmo 4 para determinar os conjuntos  $c_z$ ,  $z \in I_Z$ .
- 3: Adicionar cada conjunto  $c_z$ ,  $z \in I_Z$  ao conjunto  $\mathcal{S}$ , formando os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^z$ ,  $z \in I_Z$
- 4: Determinar o conjunto de transições de falha  $T_f = \{t \in T : \ell(t) = f\}$  e as desigualdades  $c'$  e  $c$  que modelam a ocorrência ou não da falha, respectivamente. Sendo  $x_f$  o número de disparos de  $t_f \in T_f$  em uma sequência de disparos  $\sigma$ , teremos:

- se  $|T_f| = 1$ :  $c := x_f \leq 0 \quad \wedge \quad c' := x_f > 0$
- se  $|T_f| > 1$ :  $c := \sum_{x_f: t_f \in T_f} x_f \leq 0 \quad \wedge \quad c' := \sum_{x_f: t_f \in T_f} x_f > 0$

- 5: Formar os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z$  pela adição da desigualdade  $c$  aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^z$ ,  $z \in I_Z$ .

6: Formar os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}\mathcal{B}}^z$  pela adição da desigualdade  $c'$  aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^z$ ,  $z \in I_Z$ .

7: Executar o algoritmo 3 para determinar os conjuntos  $c_n^d$ ,  $d \in I_W$ .

8: Adicionar cada conjunto  $c_n^d$ ,  $d \in I_W$  ao conjunto  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ , formando os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^d$ ,  $d \in I_W$

9: Para todo  $e \in E_o$ , determinar  $T_e = \{t \in T : e \in E_o \wedge \ell(t) = e\}$ . Sendo  $x_i$  o número de disparos de  $t_i \in T_e$  em uma sequência de disparos  $\sigma$  e  $y_e$  o número de observações do evento e na sequência observada de  $\sigma$ , então,

- se  $|T_e| = 1$ , adicione as seguintes desigualdades aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^z$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$

$$y_e \geq x_i \quad \wedge \quad y_e \leq x_i \quad \wedge \quad -y_e \leq 0$$

- ou, se  $|T_e| > 1$ , adicione as seguintes desigualdades aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^z$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$

$$y_e \geq \sum_{x_i: t_i \in T_e} x_i \quad \wedge \quad y_e \leq \sum_{x_i: t_i \in T_e} x_i \quad \wedge \quad -y_e \leq 0.$$

10: Determinar os conjuntos  $AF_z$ ,  $PF_z$  e  $SF_d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$  através da aplicação de um método de eliminação de variáveis aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^z$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^z$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$ , eliminando todas as variáveis  $x$  e deixando somente as variáveis  $y_e$ .

**Exemplo 16** Aplicando o algoritmo 5 na rede de Petri rotulada mostrada na figura 4.6 em que a equação de estado correspondente está mostrada na equação (4.14), obtemos no passo 1, os conjuntos  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  sendo mostrados na tabela 4.10. Através dos passos 2 e 3 obtemos os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^4$  conforme visto no exemplo 15. No passo 4 é determinado as desigualdades  $c'$  e  $c$  que modelam a ocorrência ou não da transição de falha  $t_9 \in T$ , respectivamente. Através do passo 5 obtemos os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^4$  com a adição da desigualdade  $c : x_9 \leq 0$  aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^4$ . Através do passo 6 obtemos os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^4$  com a adição da desigualdade  $c' : x_9 > 0$  aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NF}}^4$ . Através dos passos 7 e 8 obtemos os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^1$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^2$  conforme visto no exemplo 14. No passo 9 adicionamos as desigualdades referentes as variáveis  $y_a$ ,  $y_b$ ,  $y_d$  e  $y_e$  associadas aos eventos observados  $a$ ,  $b$ ,  $d$  e  $e$ , respectivamente, sendo mostrados na tabela 4.11 aos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^1$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^2$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^4$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^4$ . O algoritmo é finalizado no passo 10 eliminando nos conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^1$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^2$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFA}}^4$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^1$  a  $\mathcal{S}_{\mathcal{NFB}}^4$ , todas as variáveis  $x$ , deixando apenas as variáveis  $y_e$ , e obtemos, então, os conjuntos reduzidos  $SF_1$ ,  $SF_2$ ,  $AF_1$  a  $AF_4$  e  $PF_1$  a  $PF_4$ , respectivamente, sendo mostrados

nas tabelas 4.12 a 4.14.

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Tabela 4.10: Conjuntos  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  da rede de Petri da figura 4.6

Conjunto $\mathcal{S}$	Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$
$-x_1 + x_5 \leq 0$	$-x_1 + x_5 \leq 0$
$-x_2 + x_6 \leq 0$	$-x_2 + x_6 \leq 0$
$-x_3 + x_7 \leq 0$	$-x_3 + x_7 \leq 0$
$-x_4 + x_8 \leq 0$	$-x_4 + x_8 \leq 0$
$-x_5 - x_6 + x_9 \leq 0$	$-x_5 - x_6 + x_9 \leq 0$
$-x_7 + x_{10} \leq 0$	$-x_7 + x_{10} \leq 0$
$-x_8 \leq 0$	$-x_8 \leq 0$
$-x_9 + x_{11} + x_{12} \leq 0$	$-x_9 + x_{11} + x_{12} \leq 0$
$-x_{10} + x_{13} \leq 0$	$-x_{10} + x_{13} \leq 0$
$-x_{11} \leq 0$	$-x_{11} \leq 0$
$-x_{12} \leq 0$	$-x_{12} \leq 0$
$-x_{13} \leq 0$	$-x_{13} \leq 0$
	$c : x_9 \leq 0$
$-x_i \leq 0$	$-x_i \leq 0$
$i \in \{1, \dots, 13\}$	$i \in \{1, \dots, 13\}$

Tabela 4.11: Desigualdades referentes as variáveis  $y_a$ ,  $y_b$ ,  $y_d$  e  $y_e$  associadas aos eventos observados  $a$ ,  $b$ ,  $d$  e  $e$  da rede de Petri da figura 4.6

$$\begin{array}{r}
 \hline
 x_1 + x_6 + x_7 + x_8 - y_a \leq 0 \\
 y_a - x_1 - x_6 - x_7 - x_8 \leq 0 \\
 -y_a \leq 0 \\
 x_{12} + x_{13} - y_b \leq 0 \\
 y_b - x_{12} - x_{13} \leq 0 \\
 -y_b \leq 0 \\
 x_4 + x_{11} - y_d \leq 0 \\
 y_d - x_4 - x_{11} \leq 0 \\
 -y_d \leq 0 \\
 x_2 + x_{10} - y_e \leq 0 \\
 y_e - x_2 - x_{10} \leq 0 \\
 -y_e \leq 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

Tabela 4.12: Conjuntos  $SF_1$  e  $SF_2$  da rede de Petri da figura 4.6

conjunto $SF_1$	conjunto $SF_2$
$y_a \leq 1$	$y_a \leq 1$
$y_b \leq 1$	$y_b \leq 0$
$y_d \leq 0$	$y_d \leq 1$
$y_e \leq 1$	$y_e \leq 0$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$
$-y_d \leq 0$	$-y_d \leq 0$
$-y_e \leq 0$	$-y_e \leq 0$
$-y_a + y_e \leq 0$	$y_a - y_d \leq 0$
$-y_e + y_b \leq 0$	

Tabela 4.13: Conjuntos  $AF_1$  a  $AF_4$  da rede de Petri da figura 4.6

conjunto $AF_1$	conjunto $AF_2$	conjunto $AF_3$	conjunto $AF_4$
$y_a \leq 1$	$y_a \leq 1$	$y_a \leq 1$	$y_a \leq 1$
$y_b \leq 0$	$y_b \leq 0$	$y_b \leq 0$	$y_b \leq 0$
$y_d \leq 0$	$y_d \leq 0$	$y_d \leq 0$	$y_d \leq 0$
$y_e \leq 0$	$y_e \leq 1$	$y_e \leq 0$	$y_e \leq 1$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$
$-y_d \leq 0$	$-y_d \leq 0$	$-y_d \leq 0$	$-y_d \leq 0$
$-y_e \leq 0$	$-y_e \leq 0$	$-y_e \leq 0$	$-y_e \leq 0$
	$y_a - y_e \leq 0$		$y_a - y_e \leq 0$

Tabela 4.14: Conjuntos  $PF_1$  a  $PF_4$  da rede de Petri da figura 4.6

conjunto $PF_1$	conjunto $PF_2$	conjunto $PF_3$	conjunto $PF_4$
$y_a \leq 1$	$y_a \leq 1$	$y_a \leq 1$	$y_a \leq 1$
$y_b \leq 0$	$y_b \leq 0$	$y_b \leq 1$	$y_b \leq 1$
$y_d \leq 1$	$y_d \leq 1$	$y_d \leq 0$	$y_d \leq 0$
$y_e \leq 0$	$y_e \leq 1$	$y_e \leq 0$	$y_e \leq 1$
$-y_a \leq -1$	$-y_a \leq -1$	$-y_a \leq -1$	$-y_a \leq -1$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$
$-y_d \leq 0$	$-y_d \leq 0$	$-y_d \leq 0$	$-y_d \leq 0$
$-y_e \leq 0$	$-y_e \leq -1$	$-y_e \leq 0$	$-y_e \leq -1$

## 4.2.4 Diagnosticador modificado

Vamos agora introduzir um novo diagnosticador online para uma rede de Petri rotulada acíclica. Seja  $s \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  a sequência de eventos e  $s_o = P_o(s)$  a sequência correspondente de eventos observados. Vamos considerar que  $E_o = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ . Portanto, associado a cada sequência  $s \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  existe um vetor  $v(s_o) = [y_{e_1} y_{e_2} \dots y_{e_p}]^T$ , em que  $y_{e_i}$  é o número de ocorrências de  $e_i$  em  $s_o$ . O vetor  $v(s_o)$  será referido como a valoração de  $s_o$ .

O diagnosticador proposto utiliza o vetor  $v(s_o)$  após cada ocorrência de um evento observável e verifica o seu atendimento aos conjuntos de desigualdades  $AF_z$ ,  $PF_z$  e  $SF_d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$ . O resultado desta verificação nos dá as informações conforme descrito a seguir:

- i A verificação do vetor  $v(s_o)$  para cada par de conjuntos  $AF_z$  e  $PF_z$ ,  $z \in I_Z$  nos dá condições de identificar se a sequência de eventos  $s$  pode estar tendo um comportamento livre de falha ou um comportamento de falha e estar evoluindo na direção de uma marcação terminal em que a falha ocorre pois  $AF_z$  e  $PF_z$  são os conjuntos reduzidos de  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}\mathcal{F}\mathcal{A}}^z$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}\mathcal{F}\mathcal{B}}^z$  que foram descritos na seção 4.2.2. Neste caso, após a verificação do vetor  $v(s_o)$  indicaremos a diagnose como  $D_{nf}^z$ ,  $z \in I_Z$  para cada par de conjuntos da seguinte forma:

$$D_{nf}^z = \begin{cases} N, & \text{se } v(s_o) \models AF_z \wedge v(s_o) \not\models PF_z, \\ F, & \text{se } v(s_o) \not\models AF_z \wedge v(s_o) \models PF_z, z \in I_Z \\ FN, & \text{se } v(s_o) \models AF_z \wedge v(s_o) \models PF_z. \end{cases}$$

Note que se o vetor  $v(s_o)$  não atender os dois conjuntos  $AF_z$  e  $PF_z$ , então, não será mais necessário verificar estes conjuntos na ocorrência de eventos posteriores. Isto se explica, pelo fato que estamos verificando com estes dois conjuntos de desigualdades se a sequência de eventos observados pertence a uma determinada sequência de eventos que alcança uma marcação terminal em que uma falha obrigatoriamente ocorre. Caso os dois conjuntos não sejam atendidos, significa que a sequência de eventos observados não pertence àquela sequência de eventos, portanto podemos excluir estes dois conjuntos na verificação do evento posterior. Podemos excluir também os dois conjuntos  $AF_z$  e  $PF_z$  caso o vetor  $v(s_o)$  atenda apenas  $PF_z$  com diagnose igual a  $D_{nf}^z = F$  e a diagnose  $D_{nf}^z$  anterior não tenha sido  $FN$ . Isto se explica pelo fato de que a falha é um evento não observável e então não podemos ter uma diagnose em que se afirma que a falha ocorreu sem termos anteriormente uma diagnose de incerteza quanto a ocorrência da falha.

- ii A verificação do vetor  $v(s_o)$  para cada conjunto  $SF_d$ ,  $d \in I_W$  nos dá condições

de identificar se a sequência de eventos  $s$  pode estar tendo um comportamento livre de falha e estar evoluindo na direção de uma marcação terminal sem que a falha ocorra pois  $SF_d$  é o conjunto reduzido de  $\mathcal{S}_{\mathcal{NN}}^d$  que foi descrito na seção 4.2.1. Neste caso, após a verificação do vetor  $v(s_o)$  indicaremos a diagnose como  $D_{nn}^d = N$  para cada conjunto  $SF_d$ ,  $d \in I_W$  caso  $v(s_o)$  atenda ao conjunto. Note que se o vetor  $v(s_o)$  não atender um conjunto  $SF_d$ , então, não será mais necessário verificar este conjunto na ocorrência de eventos posteriores. Isto se explica, pelo fato que estamos verificando com cada conjunto de desigualdades se a sequência de eventos observados pertence a uma determinada sequência de eventos que alcança uma marcação terminal em que nenhuma falha ocorre. Caso o conjunto não seja atendido, significa que a sequência de eventos observados não pertence àquela sequência de eventos que está sendo verificada, portanto podemos excluí-lo na verificação do evento posterior.

O diagnosticador  $D$  é uma função  $D : \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) \rightarrow \{N, F, FN\}$  definido após a verificação da valoração da sequência observada  $s_o$  de uma sequência de disparos de transições no atendimento aos conjuntos de desigualdades  $AF_z$ ,  $PF_z$  e  $SF_d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$  e obtido os resultados  $D_{nf}^z$  e  $D_{nn}^d$  e será definido como.

**Teorema 4** *Seja  $(\mathcal{N}, M_0)$  uma rede de Petri rotulada acíclica com marcação inicial  $M_0$ ,  $\sigma \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$ ,  $s = l(\sigma)$ ,  $s_o = P_o(s)$ ,  $v(s_o)$  a valoração de  $s_o$ ,  $f$  um evento de falha e  $D_{nf}^z$  e  $D_{nn}^d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$ . Então, para qualquer sequência de eventos observada  $s_o$ :*

$$D = \begin{cases} N, & \text{se não existir } D_{nf}^z = F \text{ e } D_{nf}^z = FN, \\ F, & \text{se não existir } D_{nf}^z = N, D_{nf}^z = FN \text{ e } D_{nn}^d = N, \\ FN, & \text{se existir pelo menos uma das ocorrências} \\ & \text{a) } D_{nf}^z = FN \quad \text{b) } D_{nf}^z = F \text{ e } D_{nn}^d = N \quad \text{c) } D_{nf}^{z_1} = N \text{ e } D_{nf}^{z_2} = F \\ & z \in I_Z \text{ e } d \in I_W. \end{cases}$$

*Prova:* Seja  $y = v(s_o) = [y_{e_1} y_{e_2} \dots y_{e_p}]^T$ .

- i Suponha que  $D_{nf}^z \neq F$  e  $D_{nf}^z \neq FN$ ,  $\forall z \in I'_Z \subseteq I_Z$  mas  $\sigma$  tenha um comportamento com falha. Se  $D_{nf}^z \neq F$  e  $D_{nf}^z \neq FN$ ,  $\forall z \in I'_Z \subseteq I_Z$  então  $y \models AF_z$  e  $y \not\models PF_z$ ,  $\forall z \in I'_Z \subseteq I_Z$ . Pelo teorema 3 temos que  $\sigma$  tem um comportamento livre de falha  $\forall z \in I'_Z \subseteq I_Z$ , contrariando a suposição.
- ii Suponha que  $D_{nf}^z \neq N$  e  $D_{nf}^z \neq FN$ ,  $\forall z \in I'_Z \subseteq I_Z$  e  $D_{nn}^d \neq N$ ,  $\forall d \in I_W$  mas  $\sigma$  tenha um comportamento livre de falha. Se  $D_{nf}^z \neq N$  e  $D_{nf}^z \neq FN$ ,  $\forall z \in I'_Z \subseteq I_Z$  então  $y \not\models AF_z$  e  $y \models PF_z$ ,  $\forall z \in I'_Z \subseteq I_Z$ . Pelo teorema 3 temos

que  $\sigma$  tem um comportamento com falha  $\forall z \in I'_Z \subseteq I_Z$ . Como  $D_{nn}^d \neq N$ ,  $\forall d \in I_W$  então  $y \not\models SF_d$ ,  $\forall d \in I_W$  e  $\sigma$  não tem um comportamento livre de falha  $\forall d \in I_W$ . Conclui-se, então que  $\sigma$  tem um comportamento com falha contrariando a suposição.

- iii Suponha que  $\exists z \in I_Z : D_{nf}^z = FN$  e estamos certos sobre o comportamento de  $\sigma$ . Se  $D_{nf}^z = FN$  então  $y \models AF_z$  e  $y \models PF_z$ . Pelo teorema 3 temos que  $\sigma$  tem um comportamento com incerteza sobre a ocorrência da falha em  $z \in I_Z$ , contrariando a suposição.
- iv Suponha que  $\exists z \in I_Z : D_{nf}^z = F$  e  $\exists d \in I_W : D_{nn}^d = N$  e estamos certos sobre o comportamento de  $\sigma$ . Se  $D_{nf}^z = F$  então  $y \not\models AF_z$  e  $y \models PF_z$ . Pelo teorema 3 temos que  $\sigma$  tem um comportamento com falha em  $z \in I_Z$ . Por outro lado, se  $D_{nn}^d = N$  então  $y \models SF_d$ , então  $\sigma$  tem um comportamento livre de falha em  $d \in I_W$ . Conclui-se, que não temos certeza sobre a ocorrência da falha, contrariando a suposição.
- v Suponha que  $\exists z_1, z_2 \in I_Z : D_{nf}^{z_1} = N \wedge D_{nf}^{z_2} = F$  e estamos certos sobre o comportamento de  $\sigma$ . Se  $D_{nf}^{z_1} = N$  então  $y \models AF_{z_1}$  e  $y \not\models PF_{z_1}$ . Pelo teorema 3 temos que  $\sigma$  tem um comportamento livre de falha em  $z_1 \in I_Z$ . Por outro lado, se  $D_{nf}^{z_2} = F$  então  $y \not\models AF_{z_2}$  e  $y \models PF_{z_2}$ . Pelo teorema 3 temos que  $\sigma$  tem um comportamento com falha em  $z_2 \in I_Z$ . Conclui-se, que não temos certeza sobre a ocorrência da falha, contrariando a suposição.

■

**Exemplo 17** *Vamos agora ilustrar a aplicação do diagnosticador proposto na diagnose de um evento de falha  $f$  da rede de Petri mostrada na figura 4.6. Vamos analisar a ocorrência da sequência de eventos  $s_1 = acfd$  que produz a sequência de eventos observados  $s_o = ad$ . Ao verificarmos a ocorrência do evento  $a$ , teremos o vetor  $y = [y_a \ y_b \ y_d \ y_e]^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , então pelas tabelas 4.12 a 4.14 temos que  $SF_1, AF_1, AF_3, PF_1$  e  $PF_3$  são atendidos e  $SF_2, AF_2, AF_4, PF_2$  e  $PF_4$  não são atendidos, o que implica em  $D_{nn}^1 = N$  e  $D_{nf}^1 = D_{nf}^3 = FN$ , portanto,  $D = FN$ . Assim, o diagnosticador não está certo de que a falha ocorreu. Se a ocorrência do evento  $d$  for observada em seguida, teremos o vetor  $y = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ , então pelas tabelas 4.12 a 4.14 temos que  $PF_1$  é atendido e  $SF_1, AF_1, AF_3$  e  $PF_3$  não são atendidos e  $SF_2, AF_2, AF_4, PF_2$  e  $PF_4$  não são verificados pois não tinham sido atendidos na ocorrência do evento anterior, o que implica em  $D_{nf}^1 = F$ , portanto,  $D = F$ . Assim, o diagnosticador está certo de que a falha ocorreu.*

*Vamos analisar a ocorrência da sequência de eventos  $s_2 = da$  que produz a sequência de eventos observados  $s'_o = da$ . Ao verificarmos a ocorrência do evento  $d$ ,*

teremos o vetor  $y' = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ , então pelas tabelas 4.12 a 4.14 temos que apenas  $SF_2$  é atendido e os demais não são atendidos, o que implica em  $D_{nn}^2 = N$ , portanto,  $D = N$ . Assim, o diagnosticador está certo de que a falha não ocorreu. Se a ocorrência do evento  $a$  for observada em seguida, teremos o vetor  $y = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ , então pelas tabelas 4.12 a 4.14 temos que apenas  $SF_2$  é atendido e os demais não são verificados pois não tinham sido atendidos na ocorrência do evento anterior, o que implica em  $D_{nn}^2 = N$ , portanto,  $D = N$ . A tabela 4.15 mostra os resultados da diagnose de falha para as sequências de eventos observados que pertencem as sequências de eventos que alcançam as marcações terminais da rede de Petri da figura 4.6.

Tabela 4.15: Diagnose da rede de Petri da figura 4.6

$s$	sequências de eventos observados	$D_{nf}^1$	$D_{nf}^2$	$D_{nf}^3$	$D_{nf}^4$	$D_{nn}^1$	$D_{nn}^2$	$D$
$acfd$	$a$	$FN$	–	$FN$	–	$N$	–	$FN$
	$ad$	$F$	–	–	–	–	–	$F$
$acfb$	$a$	$FN$	–	$FN$	–	$N$	–	$FN$
	$ab$	–	–	$F$	–	–	–	$F$
$ea fd$	$e$	–	$N$	–	$N$	–	–	$N$
	$ea$	–	$FN$	–	$FN$	–	–	$FN$
	$ead$	–	$F$	–	–	–	–	$F$
$ea fb$	$e$	–	$N$	–	$N$	–	–	$N$
	$ea$	–	$FN$	–	$FN$	–	–	$FN$
	$eab$	–	–	–	$F$	–	–	$F$
$caeb$	$a$	$FN$	–	$FN$	–	$N$	–	$FN$
	$ae$	–	–	–	–	$N$	–	$N$
	$aeb$	–	–	–	–	$N$	–	$N$
$da$	$d$	–	–	–	–	–	$N$	$N$
	$da$	–	–	–	–	–	$N$	$N$

# Capítulo 5

## Diagnosticabilidade em rede de Petri rotulada acíclica

O problema da diagnose de falhas consiste em verificar se, para cada sequência de eventos observados, o evento de falha ocorreu ou não. No entanto, a existência de eventos não observados, torna o diagnosticador, por vezes, inseguro sobre a ocorrência de falha. Na primeira situação, o diagnosticador estará nos estados F ou N, enquanto que, na segunda situação, seu estado é FN. Se o diagnosticador permanecer para sempre no estado FN, então a ocorrência do evento de falha não será diagnosticada. Por outro lado, se para cada ocorrência do evento de falha existir uma sequência pós-falha que mude o estado do diagnose de FN para F, então a linguagem gerada pela rede de Petri é diagnosticável. Esta é a idéia por trás do método que propomos aqui para a verificação da diagnosticabilidade da linguagem em uma rede de Petri que atenda a hipótese **H1**. Começamos com a seguinte condição suficiente para diagnosticar a linguagem .

**Proposição 7**  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  é diagnosticável com relação a  $P_o$  e  $E_f = \{f\}$  se não existir uma sequência de eventos observados  $s_o$  que satisfaça  $\mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$ .

*Prova:* Se não existir uma solução  $v(s_o) \models \mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$ , então não existe  $v(s_o)$  tal que  $v(s_o) \models \mathcal{S}_A$  e  $v(s_o) \models \mathcal{S}_B$ , simultaneamente. Então, pelo Teorema 3, qualquer sequência de eventos observados  $s_o$ ,  $D(P_o^{-1}(s_o)) = F$  ou  $D(P_o^{-1}(s_o)) = N$ . ■

De acordo com a Proposição 7, se existe uma sequência  $s_o$  de eventos observados tal que  $v(s_o) \models \mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$ , então é possível que  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  seja diagnosticável, como mostrado no resultado a seguir.

**Teorema 5** Seja  $s \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$ ,  $E_f = \{f\} \subset s$ ,  $s_o = P_o(s)$  e suponha que  $v(s_o) \models \mathcal{S}_A$  e  $v(s_o) \models \mathcal{S}_B$ . Então  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  é diagnosticável em relação a  $P_o$  e  $E_f$  se e somente se existir uma sequência de eventos de comprimento finito  $t$  tal que para  $r_o = P_o(st)$ ,  $v(r_o) \not\models \mathcal{S}_A$  e  $v(r_o) \models \mathcal{S}_B$ .

*Prova:*

( $\Rightarrow$ ) Simplesmente da definição de linguagem diagnosticável (Definição 5) e Teorema 3.

( $\Leftarrow$ ) Suponha que exista uma sequência de eventos de comprimento finito  $t$  tal que para  $r_o = P_o(st)$ ,  $v(r_o) \not\models \mathcal{S}_A$  e  $v(r_o) \models \mathcal{S}_B$  mas  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  não seja diagnosticável em relação a  $P_o$  e  $E_f$ . Então, existe uma sequência  $w \in P_o^{-1}(r_o) \cap \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  tal que  $f \notin w$ . Portanto,  $v(P_o(w)) \models \mathcal{S}_A$ , o que contradiz a suposição de que  $v(r_o) \not\models \mathcal{S}_A$  desde que  $P_o(st) = P_o(w) = r_o$ . ■

De acordo com o Teorema 5 podemos afirmar que a linguagem gerada pela rede de Petri  $\mathcal{N}$  será diagnosticável com relação a  $P_o$  e  $E_f$  se para todo  $s \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  com  $f \in s$  sendo  $m = v(P_o(s))$  tal que  $m \models \mathcal{S}_A$  e  $m \models \mathcal{S}_B$  e existir uma sequência de eventos de comprimento finito  $t$  em que  $m' = v(P_o(st))$ ,  $\Delta m = v(P_o(t))$  e  $m' = m + \Delta m \geq 0$  tal que  $m' \not\models \mathcal{S}_A$  e  $m' \models \mathcal{S}_B$ , ou seja, teremos sempre uma sequência pós-falha mudando o estado da diagnose de FN para F. Desta forma, para verificarmos se a linguagem gerada é diagnosticável precisamos determinar se existe  $\Delta m$  para que tenhamos  $m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \not\models \mathcal{S}_A$  para todo  $s \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0)$  com  $f \in s$  em que  $D(P_o(s)) = FN$

Seja  $d_1, d_2, \dots, d_n$  as desigualdades que formam o conjunto  $\mathcal{S}_A$ . Temos que  $m' \models \mathcal{S}_A$  se e somente se  $m' \models d_1 \wedge m' \models d_2 \wedge \dots \wedge m' \models d_n$ . Portanto, se a variável  $m'$  não satisfaz o conjunto  $\mathcal{S}_A$ , é devido ao fato de pelo menos uma desigualdade não é satisfeita ou pelo menos uma negação de desigualdade seja satisfeita, isto é:

$$m' \not\models \mathcal{S}_A \Leftrightarrow m' \not\models d_1 \vee m' \not\models d_2 \vee \dots \vee m' \not\models d_n$$

ou na sua forma dual

$$m' \not\models \mathcal{S}_A \Leftrightarrow m' \models \neg d_1 \vee m' \models \neg d_2 \vee \dots \vee m' \models \neg d_n$$

Portanto, usando este resultado no sistema que precisamos testar para verificar a diagnosticabilidade, temos o seguinte resultado.

Se

$$m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \not\models \mathcal{S}_A,$$

então

$$(m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B) \wedge (m' \models \neg d_1 \vee m' \models \neg d_2 \vee \dots \vee m' \models \neg d_n).$$

Usando a propriedade distributiva da álgebra booleana, obtemos

$$\begin{aligned}
& (m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \neg d_1) \vee \\
& (m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \neg d_2) \vee \\
& \quad \vdots \\
& (m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \neg d_n)
\end{aligned}$$

A verificação da diagnosticabilidade de uma rede de Petri é realizada verificando se os sistemas descritos a seguir, tem solução.

$$\{\Delta m : m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \neg d_i\}, \quad i = 1 \dots n.$$

A diagnosticabilidade de uma rede de Petri com relação a um evento de falha é obtida quando verificamos se existe solução para pelo um dos sistemas, não havendo a necessidade, em certos casos, de testar todos os sistemas.

Os resultados descritos acima estão resumidos no algoritmo a seguir para a verificação de diagnosticabilidade de uma linguagem gerada por uma rede de Petri rotulada acíclica.

**Algoritmo 6** *Algoritmo para verificar a diagnosticabilidade de uma rede de Petri*

**Entradas:**

- $\mathcal{N} = (P, T, F, W, E, \ell, M_0)$ : modelo da rede de Petri rotulada
- $T_o$ ,  $T_{uo}$  e  $T_f$ : conjuntos de transições observadas, não observadas e de falhas, respectivamente

**Saída:** *Diagnosticabilidade*  $\in \{\text{Falso}, \text{Verdadeiro}\}$

1: Determine os conjuntos  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  através do Algoritmo 2

2: Verificar se o conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$  tem solução

Se não existir solução então *Diagnosticabilidade* = Verdadeiro e fim do teste

3: Considere  $m' = m + \Delta m \geq 0$

4: Considere  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , as desigualdades que formam o conjunto  $\mathcal{S}_A$ ,

5: Seja  $i = 1$  e *Diagnosticabilidade* = Falso

6: Enquanto *Diagnosticabilidade* = Falso e  $i \leq n$  faça:

Se existe solução  $\Delta m$  tal que  $m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \neg d_i$

então *Diagnosticabilidade* = Verdadeiro

senão  $i=i+1$

**Exemplo 18** *A rede de Petri mostrada na figura 5.1 ilustra a aplicação do algoritmo proposto para verificar a sua diagnosticabilidade com relação a falha. Esta rede foi analisada na seção 4.1 e os conjuntos  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  obtidos de acordo com o Passo 1 são mostrados na Tabela 5.1. Executando o Passo 2, verificamos que  $\mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$*

tem três soluções ( $y_a = 0$  e  $y_b = 0$ ,  $y_a = 1$  e  $y_b = 0$  e  $y_a = 1$  e  $y_b = 1$ ). Note que não precisamos encontrar as soluções, só precisamos testar se o sistema formado, tem solução. Executando o Passo 3, devemos produzir a negação de todas as desigualdades do conjunto  $\mathcal{S}_A$  que está mostrado na Tabela 5.2.

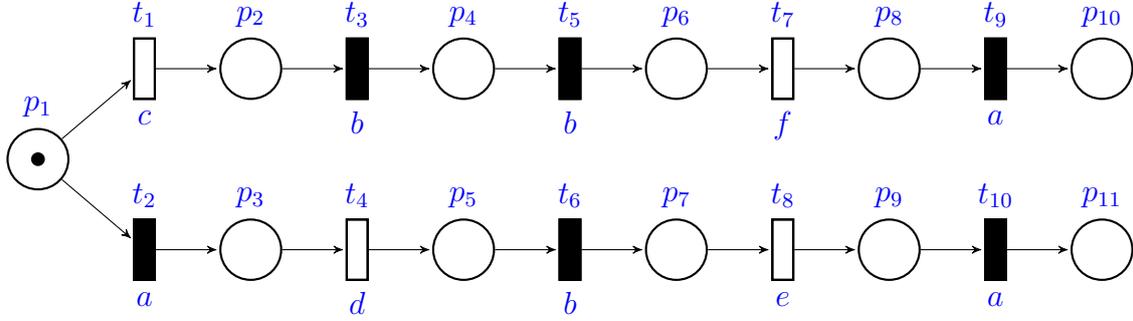


Figura 5.1: Rede de Petri rotulada acíclica  $(\mathcal{N}, M_0)$

Tabela 5.1: Conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  do exemplo da figura 5.1

conjunto $\mathcal{S}_A$	conjunto $\mathcal{S}_B$
$y_a \leq 2$	$y_a \leq 1$
$y_b \leq 1$	$y_b \leq 2$
$y_a - y_b \leq 1$	$-2y_a + y_b \leq 0$
$-y_a + y_b \leq 0$	$-y_a + y_b \leq 1$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$

Tabela 5.2: Negativa das desigualdades do conjunto  $\mathcal{S}_A$  do exemplo da figura 5.1

$d_1 : y_a \leq 2$	$\neg d_1 : y_a > 2$	$\neg d_1 : -y_a \leq -3$
$d_2 : y_b \leq 1$	$\neg d_2 : y_b > 1$	$\neg d_2 : -y_b \leq -2$
$d_3 : -y_a + y_b \leq 0$	$\neg d_3 : -y_a + y_b > 0$	$\neg d_3 : y_a - y_b \leq -1$
$d_4 : y_a - y_b \leq 1$	$\neg d_4 : y_a - y_b > 1$	$\neg d_4 : -y_a + y_b \leq -2$
$d_5 : -y_a \leq 0$	$\neg d_5 : -y_a > 0$	$\neg d_5 : y_a \leq -1$
$d_6 : -y_b \leq 0$	$\neg d_6 : -y_b > 0$	$\neg d_6 : y_b \leq -1$

Agora, produzimos os sistemas descritos a seguir e verificamos em cada um deles, a existência de solução.

$$\Delta m \mid m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \neg d_i, i = 1, \dots, 6 \quad (5.1)$$

em que:

- $\Delta m = (\Delta y_a, \Delta y_b)$  é a solução para o sistema formado
- $m = (y_a, y_b)$  é solução para o conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$
- $m' = (y_a + \Delta y_a, y_b + \Delta y_b) \geq 0$  é uma solução tal que  $m' \not\models \mathcal{S}_A$  e  $m' \models \mathcal{S}_B$
- $d_i$  é uma desigualdade de  $\mathcal{S}_A$

A Tabela 5.3 mostra as desigualdades  $m \models \mathcal{S}_A$ ,  $m \models \mathcal{S}_B$  e  $m' \models \mathcal{S}_B$ . Cada sistema é formado com todas as desigualdades da Tabela 5.3 e uma negativa de desigualdade do conjunto  $\mathcal{S}_A$  mostrado na Tabela 5.2.

Tabela 5.3: Desigualdades  $m \models \mathcal{S}_A$ ,  $m \models \mathcal{S}_B$  e  $m' \models \mathcal{S}_B$

$m \models \mathcal{S}_A$	$m \models \mathcal{S}_B$	$m' \models \mathcal{S}_B$
$y_a \leq 2$	$y_a \leq 1$	$(y_a + \Delta y_a) \leq 1$
$y_b \leq 1$	$y_b \leq 2$	$(y_b + \Delta y_b) \leq 2$
$-y_a + y_b \leq 0$	$-2y_a + y_b \leq 0$	$-2(y_a + \Delta y_a) + (y_b + \Delta y_b) \leq 0$
$y_a - y_b \leq 1$	$-y_a + y_b \leq 1$	$-(y_a + \Delta y_a) + (y_b + \Delta y_b) \leq 1$
$-y_a \leq 0$	$-y_a \leq 0$	$-(y_a + \Delta y_a) \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$	$-(y_b + \Delta y_b) \leq 0$

Para verificar a diagnosticabilidade da linguagem gerada pela rede de Petri em análise é necessário verificar se pelo menos um sistema da tabela 5.4 tem solução. Neste caso, observamos que o segundo sistema tem solução. Desta forma, a linguagem gerada pela rede de Petri representada na figura 5.1 é diagnosticável em relação a  $P_o$  e  $E_f$ . Note, outra vez, que não precisamos encontrar as soluções, só precisamos testar a se os sistemas formados tem solução. Mostramos na tabela 5.4 todos os resultados dos testes de verificação para solução dos sistemas 3 a 6, embora não sendo necessários porque como o sistema 2 tem solução, seria suficiente para a conclusão em relação à diagnosticabilidade

Tabela 5.4: Resultados dos Sistemas Gerados

Sistema	Desigualdades	Solução
1	Tabela 5.3 $\oplus m' \models \neg d_1 : -(y_a + \Delta y_a) \leq -3$	sem solução
2	Tabela 5.3 $\oplus m' \models \neg d_2 : -(y_b + \Delta y_b) \leq -2$	três soluções: $m = (0, 0), m' = (1, 2)$ e $\Delta m = (1, 2)$ $m = (1, 0), m' = (1, 2)$ e $\Delta m = (0, 2)$ $m = (1, 1), m' = (1, 2)$ e $\Delta m = (0, 1)$
3	Tabela 5.3 $\oplus m' \models \neg d_3 : (y_a + \Delta y_a) - (y_b + \Delta y_b) \leq -1$	três soluções: $m = (0, 0), m' = (1, 2)$ e $\Delta m = (1, 2)$ $m = (1, 0), m' = (1, 2)$ e $\Delta m = (0, 2)$ $m = (1, 1), m' = (1, 2)$ e $\Delta m = (0, 1)$
4	Tabela 5.3 $\oplus m' \models \neg d_4 : -(y_a + \Delta y_a) + (y_b + \Delta y_b) \leq -2$	sem solução
5	Tabela 5.3 $\oplus m' \models \neg d_5 : (y_a + \Delta y_a) \leq -1$	sem solução
6	Tabela 5.3 $\oplus m' \models \neg d_6 : (y_b + \Delta y_b) \leq -1$	sem solução

**Observação 3** *O Algoritmo 6 assume que o sistema tem apenas um evento de falha associado a uma transição. Se considerarmos um evento de falha associado a mais de uma transição, devemos testar o Algoritmo 6 para cada transição de falha separadamente.*

**Exemplo 19** *Considere a rede de Petri rotulada  $(P, T, F, W, E, \ell, M_0)$  mostrada na figura 5.2, em que  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7\}$ ,  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ ,  $F = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_1, t_3), (t_1, p_2)(t_2, p_3), (t_3, p_4), (p_2, t_4), (p_3, t_5), (p_4, t_6), (t_4, p_5), (t_5, p_6), (t_6, p_7)\}$ ,  $w(i, j) = 1, \forall (i, j) \in F$ ,  $E = \{a, b, c, f_1, f_2\}$ ,  $M_0 = [1000000]^T$ . A função de rotulagem de transições  $\ell$  é definida como se segue:  $\ell(t_1) = f_1, \ell(t_2) = a, \ell(t_3) = f_2, \ell(t_4) = b, \ell(t_5) = b$  e  $\ell(t_6) = c$ . A linguagem gerada é  $\mathcal{L}(\mathcal{N}, M_0) = \{\varepsilon, f_1, f_1b, a, ab, f_2, f_2c\}$  e a equação de estado é dada por:*

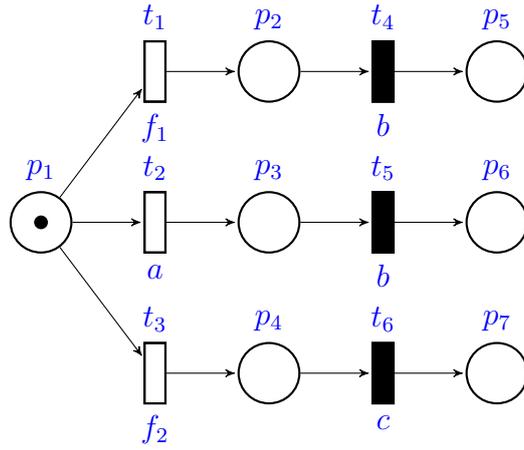


Figura 5.2: Rede de Petri com 2 transições de falhas

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Para verificação do evento de falha  $f_1$  consideraremos o conjunto de eventos observados como  $E_o = \{b, c\}$ , o conjunto de eventos não observados como  $E_{uo} = \{a, f_1, f_2\}$  e o conjunto de eventos de falha como  $E_f = \{f_1\}$ .

A tabela 5.5 mostra o conjunto de desigualdades que representa os conjuntos  $\mathcal{S}_N$  e  $\mathcal{S}_F$  com a inclusão das desigualdades relativas a mudança de variáveis.

Os conjuntos  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  obtidos de acordo com o passo 1 do algoritmo 6 são mostrados na Tabela 5.6 e executando o passo 2, verificamos que  $\mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$  tem solução, portanto não temos, ainda, uma conclusão sobre a diagnosticabilidade da rede de Petri com relação a projeção  $P_o$  e  $E_f = \{f_1\}$ .

Tabela 5.5: Conjuntos  $\mathcal{S}_N$  e  $\mathcal{S}_F$  do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_1\}$

Conjunto $\mathcal{S}_N$	Conjunto $\mathcal{S}_F$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$
$-x_1 + x_4 \leq 0$	$-x_1 + x_4 \leq 0$
$-x_2 + x_5 \leq 0$	$-x_2 + x_5 \leq 0$
$-x_3 + x_6 \leq 0$	$-x_3 + x_6 \leq 0$
$c : x_1 \leq 0$	$c' : -x_1 \leq -1$
$-x_i \leq 0$	$-x_i \leq 0$
$i \in \{1, \dots, 6\}$	$i \in \{1, \dots, 6\}$
$x_4 + x_5 - y_b \leq 0$	$x_4 + x_5 - y_b \leq 0$
$y_b - x_4 - x_5 \leq 0$	$y_b - x_4 - x_5 \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$
$x_6 - y_c \leq 0$	$x_6 - y_c \leq 0$
$y_c - x_6 \leq 0$	$y_c - x_6 \leq 0$
$-y_c \leq 0$	$-y_c \leq 0$

Tabela 5.6: Conjunto  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_1\}$

Conjunto $\mathcal{S}_A$	Conjunto $\mathcal{S}_B$
$y_b \leq 1$	$y_b \leq 1$
$y_c \leq 1$	$y_c \leq 0$
$y_b + y_c \leq 1$	$-y_b \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_c \leq 0$
$-y_c \leq 0$	

*Continuando o algoritmo 6 no passo 3, devemos produzir a negação de todas as desigualdades do conjunto  $\mathcal{S}_A$  que está mostrado na Tabela 5.7.*

Tabela 5.7: Negativas da desigualdades do conjunto  $\mathcal{S}_A$  do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_1\}$

$d_1 : y_b \leq 1$	$\neg d_1 : y_b > 1$	$\neg d_1 : -y_b \leq -2$
$d_2 : y_c \leq 1$	$\neg d_2 : y_c > 1$	$\neg d_2 : -y_c \leq -2$
$d_3 : y_b + y_c \leq 1$	$\neg d_3 : y_b + y_c > 1$	$\neg d_3 : -y_b - y_c \leq -2$
$d_4 : -y_b \leq 0$	$\neg d_4 : -y_b > 0$	$\neg d_4 : y_b \leq -1$
$d_5 : -y_c \leq 0$	$\neg d_5 : -y_c > 0$	$\neg d_5 : y_c \leq -1$

Agora, produzimos os sistemas descritos a seguir e verificamos em cada um deles, a existência de solução.

$$\Delta m \mid m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \neg d_i, \quad i = 1, \dots, 5$$

em que:

- $\Delta m = (\Delta y_b, \Delta y_c)$  é a solução para o sistema formado
- $m = (y_b, y_c)$  é solução para o conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$
- $m' = (y_b + \Delta y_b, y_c + \Delta y_c) \geq 0$  é uma solução tal que  $m' \not\models \mathcal{S}_A$  e  $m' \models \mathcal{S}_B$
- $d_i$  é uma desigualdade de  $\mathcal{S}_A$

A Tabela 5.8 mostra as desigualdades  $m \models \mathcal{S}_A$ ,  $m \models \mathcal{S}_B$  e  $m' \models \mathcal{S}_B$ . Cada sistema é formado com todas as desigualdades da Tabela 5.8 e uma negativa de desigualdade do conjunto  $\mathcal{S}_A$  mostrado na Tabela 5.7.

Tabela 5.8: Desigualdades  $m \models \mathcal{S}_A$ ,  $m \models \mathcal{S}_B$  e  $m' \models \mathcal{S}_B$  do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_1\}$

$m \models \mathcal{S}_A$	$m \models \mathcal{S}_B$	$m' \models \mathcal{S}_B$
$y_b \leq 1$	$y_b \leq 1$	$(y_b + \Delta y_b) \leq 1$
$y_c \leq 1$	$y_c \leq 0$	$(y_c + \Delta y_c) \leq 0$
$y_b + y_c \leq 1$	$-y_b \leq 0$	$-(y_b + \Delta y_b) \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_c \leq 0$	$-(y_c + \Delta y_c) \leq 0$
$-y_c \leq 0$		

Para verificar a diagnosticabilidade da linguagem gerada pela rede de Petri em análise é necessário verificar se pelo menos um sistema da tabela 5.9 tem solução. Neste caso, observamos que o nenhum sistema tem solução. Desta forma, a linguagem gerada pela rede de Petri representada na figura 5.2 não é diagnosticável em relação a  $P_o$  e  $E_f = \{f_1\}$ .

Tabela 5.9: Resultados dos sistemas gerados do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_1\}$

Sistema	Desigualdades	Solução
1	Tabela 5.8 $\oplus m' \models \neg d_1 : -(y_b + \Delta y_b) \leq -2$	sem solução
2	Tabela 5.8 $\oplus m' \models \neg d_2 : -(y_c + \Delta y_c) \leq -2$	sem solução
3	Tabela 5.8 $\oplus m' \models \neg d_3 : -(y_b + \Delta y_b) - (y_c + \Delta y_c) \leq -2$	sem solução
4	Tabela 5.8 $\oplus m' \models \neg d_4 : (y_b + \Delta y_b) \leq -1$	sem solução
5	Tabela 5.8 $\oplus m' \models \neg d_5 : (y_c + \Delta y_c) \leq -1$	sem solução

Agora, para completar o teste de diagnosticabilidade do sistema precisamos aplicar o algoritmo 6 considerando que o conjunto de eventos de falha seja  $E_f = \{f_2\}$ . Neste caso, continuamos com o mesmo conjunto de eventos observados  $E_o = \{b, c\}$ .

A tabela 5.10 mostra o conjunto de desigualdades que representa os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  com a inclusão das desigualdades relativas a mudança de variáveis.

Os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  obtidos de acordo com o passo 1 do algoritmo 6 são mostrados na Tabela 5.11 e executando o passo 2, verificamos que  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  tem solução, portanto não temos, ainda, uma conclusão sobre a diagnosticabilidade da rede de Petri com relação a projeção  $P_o$  e  $E_f = \{f_2\}$ .

Tabela 5.10: Conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_2\}$

Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$	Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$	$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$
$-x_1 + x_4 \leq 0$	$-x_1 + x_4 \leq 0$
$-x_2 + x_5 \leq 0$	$-x_2 + x_5 \leq 0$
$-x_3 + x_6 \leq 0$	$-x_3 + x_6 \leq 0$
$c : x_3 \leq 0$	$c' : -x_3 \leq -1$
$-x_i \leq 0$	$-x_i \leq 0$
$i \in \{1, \dots, 6\}$	$i \in \{1, \dots, 6\}$
$x_4 + x_5 - y_b \leq 0$	$x_4 + x_5 - y_b \leq 0$
$y_b - x_4 - x_5 \leq 0$	$y_b - x_4 - x_5 \leq 0$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$
$x_6 - y_c \leq 0$	$x_6 - y_c \leq 0$
$y_c - x_6 \leq 0$	$y_c - x_6 \leq 0$
$-y_c \leq 0$	$-y_c \leq 0$

Tabela 5.11: Conjuntos  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_2\}$

Conjunto $\mathcal{S}_A$	Conjunto $\mathcal{S}_B$
$y_b \leq 1$	$y_b \leq 0$
$y_c \leq 0$	$y_c \leq 1$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$
$-y_c \leq 0$	$-y_c \leq 0$

Continuando o algoritmo 6 no passo 3, devemos produzir a negação de todas as desigualdades do conjunto  $\mathcal{S}_A$  que está mostrado na Tabela 5.12.

Tabela 5.12: Negativa das desigualdades do conjunto  $\mathcal{S}_A$  do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_2\}$

$d_1 : y_b \leq 1$	$\neg d_1 : y_b > 1$	$\neg d_1 : -y_b \leq -2$
$d_2 : y_c \leq 0$	$\neg d_2 : y_c > 0$	$\neg d_2 : -y_c \leq -1$
$d_3 : -y_b \leq 0$	$\neg d_3 : -y_b > 0$	$\neg d_3 : y_b \leq -1$
$d_4 : -y_c \leq 0$	$\neg d_4 : -y_c > 0$	$\neg d_4 : y_c \leq -1$

Agora, produzimos os sistemas descritos a seguir e verificamos em cada um deles, a existência de solução.

$$\Delta m \mid m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \neg d_i, i = 1, \dots, 4$$

A Tabela 5.13 mostra as desigualdades  $m \models \mathcal{S}_A$ ,  $m \models \mathcal{S}_B$  and  $m' \models \mathcal{S}_B$ . Cada sistema é formado com todas as desigualdades da Tabela 5.13 e uma negativa de desigualdade do conjunto  $\mathcal{S}_A$  mostrado na Tabela e 5.12.

Tabela 5.13: Desigualdades  $m \models \mathcal{S}_A$ ,  $m \models \mathcal{S}_B$  e  $m' \models \mathcal{S}_B$  do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_2\}$

$m \models \mathcal{S}_A$	$m \models \mathcal{S}_B$	$m' \models \mathcal{S}_B$
$y_b \leq 1$	$y_b \leq 0$	$(y_b + \Delta y_b) \leq 0$
$y_c \leq 0$	$y_c \leq 1$	$(y_c + \Delta y_c) \leq 1$
$-y_b \leq 0$	$-y_b \leq 0$	$-(y_b + \Delta y_b) \leq 0$
$-y_c \leq 0$	$-y_c \leq 0$	$-(y_c + \Delta y_c) \leq 0$

Para verificar a diagnosticabilidade da linguagem gerada pela rede de Petri em

análise é necessário verificar se pelo menos um sistema da tabela 5.14 tem solução. Neste caso, observamos que o sistema 2 tem solução e desta forma, a linguagem gerada pela rede de Petri representada na figura 5.2 é diagnosticável em relação a projeção  $P_o$  e  $E_f = \{f_2\}$ . Portanto, se considerarmos as duas falhas, concluímos que rede de Petri não é diagnosticável em relação a projeção  $P_o$  e  $E_f = \{f_1, f_2\}$ .

Tabela 5.14: Resultados dos Sistemas Gerados do exemplo da figura 5.2 em que  $E_f = \{f_2\}$

Sistema	Desigualdades	Solução
1	Tabela 5.13 $\oplus m' \models \neg d_1 : -(y_b + \Delta y_b) \leq -2$	sem solução
2	Tabela 5.13 $\oplus m' \models \neg d_2 : -(y_c + \Delta y_c) \leq -1$	tem solução
3	Tabela 5.13 $\oplus m' \models \neg d_3 : (y_b + \Delta y_b) \leq -1$	sem solução
4	Tabela 5.13 $\oplus m' \models \neg d_4 : (y_c + \Delta y_c) \leq -1$	sem solução

## Capítulo 6

# Utilização do Método a um Sistema de Manufatura

Vamos considerar o sistema de manufatura mostrado na figura 6.1 cujo processo está descrito na figura 6.2, sendo composto de uma máquina  $M$  que pode ser programada para processar as peças em dois trabalhos diferentes denominados  $J1$  e  $J2$  produzindo os produtos  $A$  e  $B$ , respectivamente. Os produtos são rotulados após

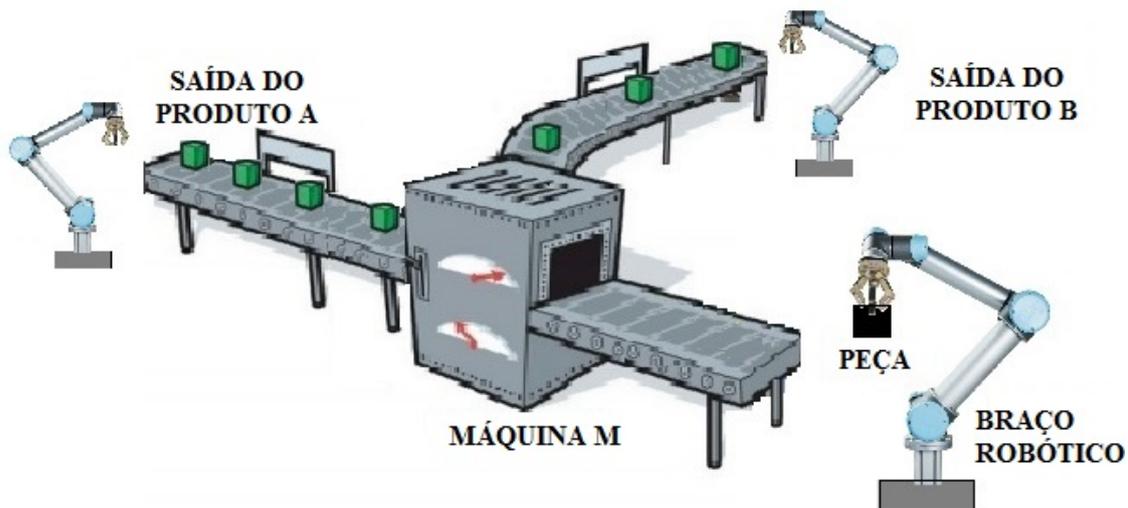


Figura 6.1: Sistema de Manufatura

o término dos trabalhos. Um leitor óptico é usado para ler o rótulo do produto e direcioná-lo para uma linha em que ao final braços robóticos os encaminham para o empacotamento. A máquina  $M$  pode produzir 4 produtos do tipo  $A$  e 3 produtos do tipo  $B$  por dia. Uma falha na leitura do rótulo do produto pode ocorrer e direcioná-lo para a linha errada. Esse sistema de manufatura pode ser modelado por uma rede de Petri, como mostrado na figura 6.3, com um conjunto de transições observadas  $T_o = \{t_5, t_6, t_9, t_{10}, t_{13}, t_{14}\}$  e um conjunto de transições não observadas

$T_{uo} = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_7, t_8, t_{11}, t_{12}, t_{15}, t_{16}\}$ . Em particular,  $t_{15}$  e  $t_{16}$  modelam a falha de leitura do rótulo do produto ( $T_f = \{t_{15}, t_{16}\}$ ). O número inicial de fichas em  $p_1$  e  $p_2$  modela o fato de que a máquina  $M$  pode produzir quatro unidades do produto  $A$  e três unidades do produto  $B$  por dia, respectivamente.

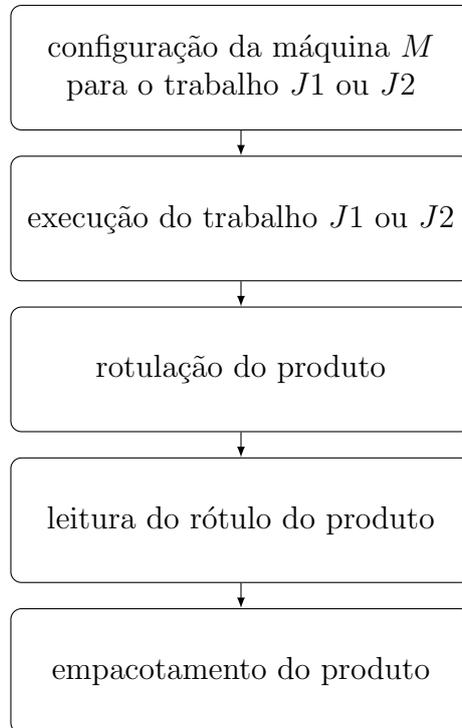


Figura 6.2: Processo do sistema de manufatura

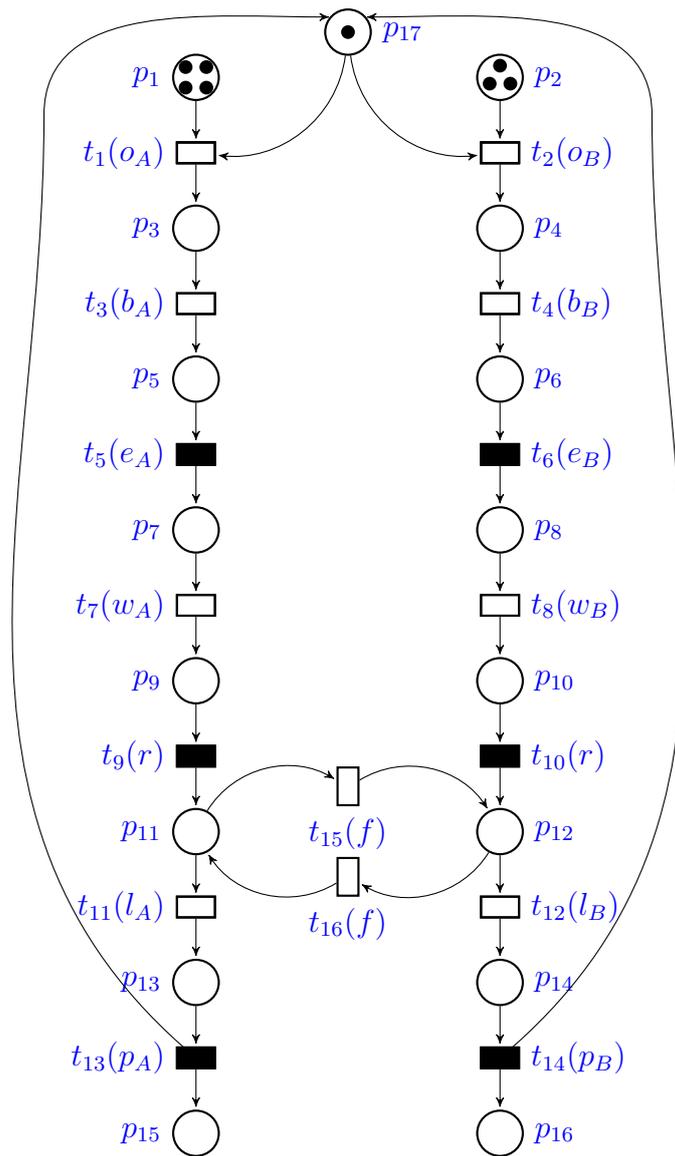


Figura 6.3: Modelo de rede de Petri do sistema de manufatura da fig 6.1

Os eventos associados às transições podem ser descritos como:

- Evento  $o_A(o_B)$ : programar a máquina  $M$  para produzir o produto  $A(B)$ ;
- Evento  $b_A(b_B)$ : iniciar a produção do produto  $A(B)$ ;
- Evento  $e_A(e_B)$ : finalizar a produção do produto  $A(B)$ ;
- Evento  $w_A(w_B)$ : escrever o rótulo no produto  $A(B)$ ;
- Evento  $r$ : ler o rótulo do produto;

- Evento  $l_A(l_B)$ : transportar o produto pela linha  $A(B)$ ;
- Evento  $p_A(p_B)$ : empacotar o produto na linha  $A(B)$ .

A rede de Petri mostrada na figura 6.3 apresenta  $E = \{e_A, e_B, r, p_A, p_B\}$ ,  $E_o = \{o_A, o_B, b_A, b_B, w_A, w_B, l_A, l_B\}$  e  $E_f = \{f\}$  como os conjuntos de eventos, eventos observados e de falhas, respectivamente. Para esta rede de Petri, o diagnosticador apresentado na seção 4.1.3 não poderia ser utilizado pois não atende a hipótese **H1**, ou seja, de que se existe sequências de falha  $s_F$  e normal  $s_N$ , em que  $f \in E_f$ ,  $f \in s_F$ ,  $f \notin s_N$ ,  $P_o(s_F) \neq P_o(s_N)$  compartilhando os mesmos eventos observados, então o número de ocorrências de pelo menos um evento observável em  $s_F$  e  $s_N$  deve ser diferente. Podemos citar as sequências  $s_F = o_A b_A e_A w_A r f l_B p_B o_B b_B e_B w_B r f l_A p_A$  e  $s_N = o_B b_B e_B w_B r f l_A p_A o_A b_A e_A w_A r f l_B p_B$  em que  $P_o(s_F) = e_A r p_B e_B r p_A \neq P_o(s_N) = e_B r p_A e_A r p_B$  mas o número de ocorrências dos eventos  $e_A, e_B, r, p_A$  e  $p_B$  são iguais, portanto, não temos a hipótese **H1** sendo atendida. Devido o sistema de manufatura analisado produzir e empacotar um produto por vez, a modelagem através de uma rede de Petri deste processo pode ser representado pelas figuras 6.4 e 6.5 que atendem a hipótese **H1**. Portanto, podemos optar pelo diagnosticador apresentado na seção 4.1.3 ao invés do diagnosticador apresentado na seção 4.2.4 devido a sua simplicidade como descreveremos a seguir.

Considere que a máquina  $M$  esteja programada para realizar o trabalho  $J1$  e produzir o produto  $A$ , então podemos utilizar a rede de Petri mostrada na figura 6.4 para modelar este trabalho em que poderá ocorrer uma falha na leitura do rótulo e o produto pode ser encaminhado para a linha errada. Para esta situação temos que verificar se a falha pode ser diagnosticada. Nesta rede de Petri podemos utilizar o diagnosticador apresentado na seção 4.1.3 porque a hipótese **H1** é atendida. Para a verificação da diagnosticabilidade do evento de falha  $f$  consideraremos o conjunto de eventos observados como  $E_o = \{e_A, r, p_A, p_B\}$ , o conjunto de eventos não observados como  $E_{uo} = \{o_A, b_A, w_A, l_A, l_B, f\}$  e o conjunto de eventos de falha como  $E_f = \{f\}$ . A tabela 6.1 mostra o conjunto de desigualdades que representa os conjuntos  $\mathcal{S}_N$  e  $\mathcal{S}_F$ . Os conjuntos  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  obtidos de acordo com o passo 1 do algoritmo 6 são mostrados na Tabela 6.2 e executando o passo 2, verificamos que  $\mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$  tem solução, portanto não temos, ainda, uma conclusão sobre a diagnosticabilidade da rede de Petri com relação a projeção  $P_o$  e  $E_f = \{f\}$ .

Continuando o algoritmo 6 no passo 3, devemos produzir a negação de todas as desigualdades do conjunto  $\mathcal{S}_A$  que está mostrado na Tabela 6.3.

Agora, produzimos os sistemas descritos a seguir e verificamos em cada um deles, a existência de solução.

$$\Delta m \mid m \models \mathcal{S}_A \wedge m \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \mathcal{S}_B \wedge m' \models \neg d_i, \quad i = 1, \dots, 16 \quad (6.1)$$

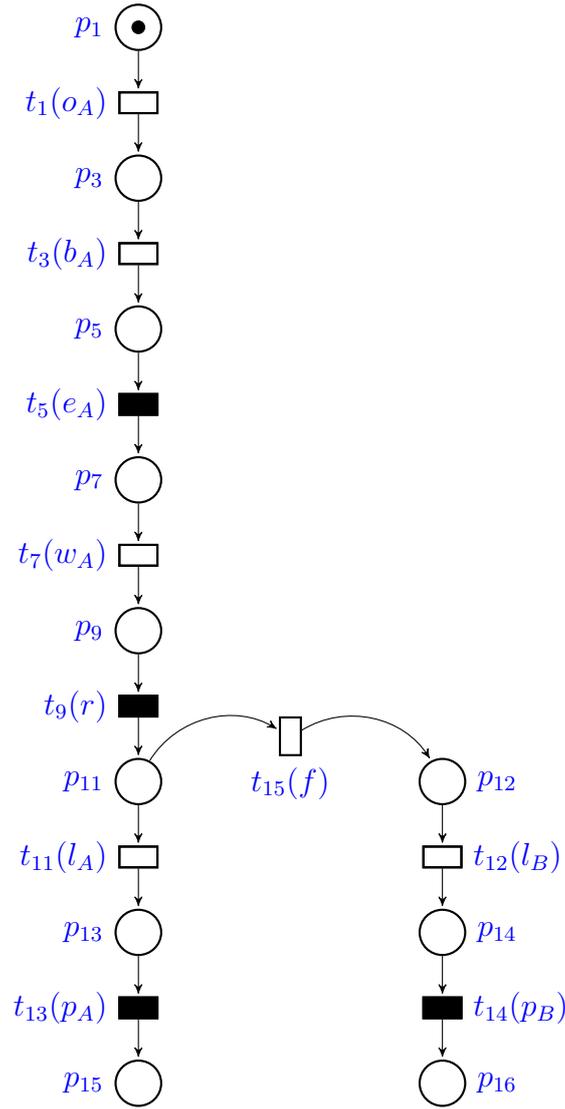


Figura 6.4: Modelo de rede de Petri do sistema de manufatura do produto A

em que:

- $\Delta m = (\Delta y_{e_A}, \Delta y_{p_A}, \Delta y_{p_B}, \Delta y_r)$  é a solução para o sistema formado
- $m = (y_{e_A}, y_{p_A}, y_{p_B}, y_r)$  á solução para o conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$
- $m' = (y_{e_A} + \Delta y_{e_A}, y_{p_A} + \Delta y_{p_A}, y_{p_B} + \Delta y_{p_B}, y_r + \Delta y_r) \geq 0$  é uma solução tal que  $m' \not\models \mathcal{S}_A$  e  $m' \models \mathcal{S}_B$
- $d_i$  é uma desigualdade de  $\mathcal{S}_A$

Como apresentado no capítulo 5, para verificar a diagnosticabilidade da linguagem gerada pela rede de Petri em análise é necessário que pelo menos um sistema

Tabela 6.1: Conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$  da rede de Petri da figura 6.4

Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$	Conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$
$+x_1 \leq 1$	$+x_1 \leq 1$
$-x_1 + x_3 \leq 0$	$-x_1 + x_3 \leq 0$
$-x_3 + x_5 \leq 0$	$-x_3 + x_5 \leq 0$
$-x_5 + x_7 \leq 0$	$-x_5 + x_7 \leq 0$
$-x_7 + x_9 \leq 0$	$-x_7 + x_9 \leq 0$
$-x_9 + x_{11} + x_{15} \leq 0$	$-x_9 + x_{11} + x_{15} \leq 0$
$-x_{11} + x_{13} \leq 0$	$-x_{11} + x_{13} \leq 0$
$-x_{13} \leq 0$	$-x_{13} \leq 0$
$+x_{12} - x_{15} \leq 0$	$+x_{12} - x_{15} \leq 0$
$-x_{12} + x_{14} \leq 0$	$-x_{12} + x_{14} \leq 0$
$-x_{14} \leq 0$	$-x_{14} \leq 0$
$c : +x_{15} \leq 0$	$c' : -x_{15} \leq -1$
$-x_i \leq 0$	$-x_i \leq 0$
$i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15\}$	$i \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15\}$

em (6.1) tenha solução. Neste caso, observamos que o sistema

$$\Delta m \models m \models \mathcal{S}_{\mathcal{A}} \wedge m \models \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \wedge m' \models \mathcal{S}_{\mathcal{B}} \wedge m' \models \neg d_8,$$

tem solução, ou seja,  $m = (1, 0, 0, 1)$ ,  $m' = (1, 0, 1, 1)$  e  $\Delta m = (0, 0, 1, 0)$ . Desta forma, a linguagem gerada pela rede de Petri representada na figura 6.4 é diagnosticável em relação a  $P_o$  e  $E_f = \{f\}$ .

Considere que a máquina  $M$  esteja programada para realizar o trabalho  $J2$  e produzir o produto  $B$ , então podemos utilizar a rede de Petri mostrada na figura 6.5 para modelar este trabalho em que poderá, também, ocorrer uma falha na leitura do rótulo e o produto pode ser encaminhado para a linha errada. Para esta situação temos que verificar se a falha pode ser diagnosticada. Para a verificação da diagnosticabilidade do evento de falha  $f$  consideraremos o conjunto de eventos observados como  $E_o = \{e_B, r, p_A, p_B\}$ , o conjunto de eventos não observados como  $E_{uo} = \{o_B, b_B, w_B, l_A, l_B, f\}$  e o conjunto de eventos de falha como  $E_f = \{f\}$ . Por similaridade com a rede de Petri da figura 6.4, a linguagem gerada pela rede de Petri também é diagnosticável em relação a  $P_o$  e  $E_f = \{f\}$ . Nesta rede de Petri podemos, também, utilizar o diagnosticador apresentado na seção 4.1.3 e os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  obtidos são mostrados na Tabela 6.4.

Utilizando as tabelas 6.2 e 6.4, podemos eliminar algumas desigualdades por elas não interferirem na diagnose de falha e devido ao fato que a máquina  $M$  pode produzir produtos do tipo  $A$  ou do tipo  $B$  sem uma sequência definida. Desta forma, obtemos os conjuntos  $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$  que pode ser utilizado na diagnose da rede de Petri

Tabela 6.2: Conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  da rede de Petri da figura 6.4

Conjunto $\mathcal{S}_A$	Conjunto $\mathcal{S}_B$
$-y_{e_A} \leq 0$	$-y_{e_A} \leq -1$
$-y_r \leq 0$	$-y_r \leq -1$
$-y_{p_A} \leq 0$	$-y_{p_A} \leq 0$
$-y_{p_B} \leq 0$	$-y_{p_B} \leq 0$
$y_{e_A} \leq 1$	$y_{e_A} \leq 1$
$-y_{e_A} + y_r \leq 0$	$-y_{e_A} + y_r \leq 0$
$y_r \leq 1$	$y_r \leq 1$
$y_{p_B} \leq 0$	$-y_r + y_{p_B} \leq 0$
$-y_r + y_{p_B} \leq 0$	$-y_{e_A} + y_{p_B} \leq 0$
$-y_{e_A} + y_{p_B} \leq 0$	$y_{p_B} \leq 1$
$-y_r + y_{p_A} \leq 0$	$-y_r + y_{p_A} \leq -1$
$-y_r + y_{p_A} + y_{p_B} \leq 0$	$-y_r + y_{p_A} + y_{p_B} \leq 0$
$-y_{e_A} + y_{p_A} \leq 0$	$-y_{e_A} + y_{p_A} \leq -1$
$-y_{e_A} + y_{p_A} + y_{p_B} \leq 0$	$-y_{e_A} + y_{p_A} + y_{p_B} \leq 0$
$y_{p_A} \leq 1$	$y_{p_A} \leq 0$
$y_{p_A} + y_{p_B} \leq 1$	$y_{p_A} + y_{p_B} \leq 1$

da figura 6.3 e que está mostrado na tabela 6.5.

Vamos agora ilustrar a aplicação do diagnosticador proposto aqui na diagnose do evento de falha  $f$  da rede de Petri mostrado na Figura 6.3. A ocorrência da sequência de eventos  $s_1 = o_A b_A e_A w_A r f l_B p_B$  produz a sequência de eventos observados  $s_o = e_A r p_B$ , então  $v(s_o) = [y_{e_A} y_{p_A} y_{e_B} y_{p_B} y_r]^T = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]^T$ . Da tabela 6.5, verificamos que o conjunto  $R'$  é satisfeito, mas o conjunto  $R$  não é, obtendo um estado de diagnose  $D(s_o) = F$ . Desta forma, o diagnosticador está certo de que a falha ocorreu.

A ocorrência de sequência de eventos  $s_2 = o_B b_B e_B w_B r f l_A p_A$  produz sequência de eventos observados  $s_o = e_B r p_A$ , e assim  $v(s_o) = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ . Da tabela 6.5, verificamos que o conjunto  $R'$  está satisfeito, mas o conjunto  $R$  não está, obtendo um estado de diagnose  $D(s_o) = F$ . Desta forma, o diagnosticador está certo de que a falha ocorreu.

A ocorrência de sequência de eventos  $s_3 = o_A b_A e_A w_A r l_A p_A$  produz sequência de eventos observados  $s_o = e_A r p_A$ , e assim  $v(s_o) = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . Da tabela 6.5, verificamos que o set  $R$  está satisfeito, mas o set  $R'$  não está, obtendo um estado de diagnose  $D(s_o) = N$ . Desta forma, o diagnosticador está certo de que a falha não ocorreu.

A ocorrência da sequência de eventos  $s_4 = o_A b_A e_A w_A r$  ou  $s_5 = o_A b_A e_A w_A r f l_B$  produz sequência  $s_o = e_A r$  de eventos observados, e assim  $v(s_o) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . Da tabela 6.5, verificamos que os conjuntos  $R$  e  $R'$  estão satisfeitos, o que implica

Tabela 6.3: Negativa das desigualdades do conjunto  $\mathcal{S}_A$  da rede de Petri da figura 6.4

$d_1 : -y_{e_A} \leq 0$	$\neg d_1 : -y_{e_A} > 0$	$\neg d_1 : y_{e_A} \leq -1$
$d_2 : -y_r \leq 0$	$\neg d_2 : -y_r > 0$	$\neg d_2 : y_r \leq -1$
$d_3 : -y_{p_A} \leq 0$	$\neg d_3 : -y_{p_A} > 0$	$\neg d_3 : y_{p_A} \leq -1$
$d_4 : -y_{p_B} \leq 0$	$\neg d_4 : -y_{p_B} > 0$	$\neg d_4 : y_{p_B} \leq -1$
$d_5 : y_{e_A} \leq 1$	$\neg d_5 : y_{e_A} > 1$	$\neg d_5 : -y_{e_A} \leq -2$
$d_6 : -y_{e_A} + y_r \leq 0$	$\neg d_6 : -y_{e_A} + y_r > 0$	$\neg d_6 : y_{e_A} - y_r \leq -1$
$d_7 : y_r \leq 1$	$\neg d_7 : y_r > 1$	$\neg d_7 : -y_r \leq -2$
$d_8 : y_{p_B} \leq 0$	$\neg d_8 : y_{p_B} > 0$	$\neg d_8 : -y_{p_B} \leq -1$
$d_9 : -y_r + y_{p_B} \leq 0$	$\neg d_9 : -y_r + y_{p_B} > 0$	$\neg d_9 : y_r - y_{p_B} \leq -1$
$d_{10} : -y_{e_A} + y_{p_B} \leq 0$	$\neg d_{10} : -y_{e_A} + y_{p_B} > 0$	$\neg d_{10} : y_{e_A} - y_{p_B} \leq -1$
$d_{11} : -y_r + y_{p_A} \leq 0$	$\neg d_{11} : -y_r + y_{p_A} > 0$	$\neg d_{11} : y_r - y_{p_A} \leq -1$
$d_{12} : -y_r + y_{p_A} + y_{p_B} \leq 0$	$\neg d_{12} : -y_r + y_{p_A} + y_{p_B} > 0$	$\neg d_{12} : y_r - y_{p_A} - y_{p_B} \leq -1$
$d_{13} : -y_{e_A} + y_{p_A} \leq 0$	$\neg d_{13} : -y_{e_A} + y_{p_A} > 0$	$\neg d_{13} : y_{e_A} - y_{p_A} \leq -1$
$d_{14} : -y_{e_A} + y_{p_A} + y_{p_B} \leq 0$	$\neg d_{14} : -y_{e_A} + y_{p_A} + y_{p_B} > 0$	$\neg d_{14} : y_{e_A} - y_{p_A} - y_{p_B} \leq -1$
$d_{15} : y_{p_A} \leq 1$	$\neg d_{15} : y_{p_A} > 1$	$\neg d_{15} : -y_{p_A} \leq -2$
$d_{16} : y_{p_A} + y_{p_B} \leq 1$	$\neg d_{16} : y_{p_A} + y_{p_B} > 1$	$\neg d_{16} : -y_{p_A} - y_{p_B} \leq -2$

que  $D(s_o) = FN$ . Desta forma, o diagnosticador não tem certeza de que a falha ocorreu.

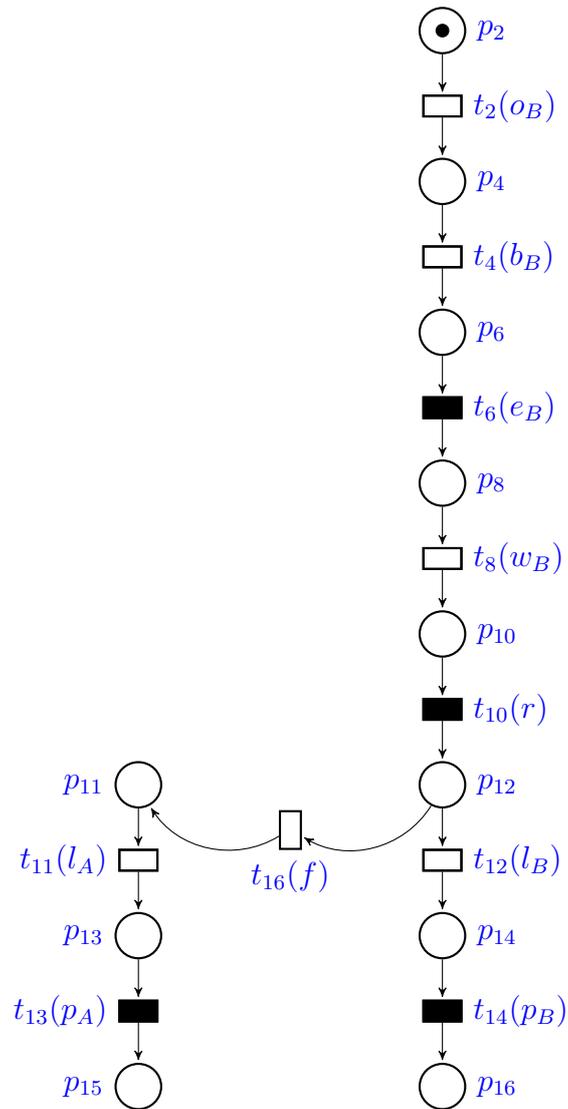


Figura 6.5: Modelo de rede de Petri do sistema de manufatura do produto B

Tabela 6.4: Conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  da rede de Petri da figura 6.5

Conjunto $\mathcal{S}_A$	Conjunto $\mathcal{S}_B$
$-y_{e_B} \leq 0$	$-y_{e_B} \leq -1$
$-y_r \leq 0$	$-y_r \leq -1$
$-y_{p_B} \leq 0$	$-y_{p_B} \leq 0$
$-y_{p_A} \leq 0$	$-y_{p_A} \leq 0$
$y_{e_B} \leq 1$	$y_{e_B} \leq 1$
$-y_{e_B} + y_r \leq 0$	$-y_{e_B} + y_r \leq 0$
$y_r \leq 1$	$y_r \leq 1$
$y_{p_A} \leq 0$	$-y_r + y_{p_A} \leq 0$
$-y_r + y_{p_A} \leq 0$	$-y_{e_B} + y_{p_A} \leq 0$
$-y_{e_B} + y_{p_A} \leq 0$	$y_{p_A} \leq 1$
$-y_r + y_{p_B} \leq 0$	$-y_r + y_{p_B} \leq -1$
$-y_r + y_{p_B} + y_{p_A} \leq 0$	$-y_r + y_{p_B} + y_{p_A} \leq 0$
$-y_{e_B} + y_{p_B} \leq 0$	$-y_{e_B} + y_{p_B} \leq -1$
$-y_{e_B} + y_{p_B} + y_{p_A} \leq 0$	$-y_{e_B} + y_{p_B} + y_{p_A} \leq 0$
$y_{p_B} \leq 1$	$y_{p_B} \leq 0$
$y_{p_B} + y_{p_A} \leq 1$	$y_{p_B} + y_{p_A} \leq 1$

Tabela 6.5: Conjunto de desigualdades  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$  para o exemplo da figura 6.3

Conjunto $\mathcal{S}_A$	Conjunto $\mathcal{S}_B$
$-1y_{e_A} + 1y_{p_A} \leq 0$	$-1y_{e_A} + 1y_{p_A} \leq -1$
$-1y_{e_B} + 1y_{p_B} \leq 0$	$-1y_{e_B} + 1y_{p_B} \leq -1$
	$-1y_r \leq -1$

# Capítulo 7

## Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho, uma nova abordagem foi proposta para a diagnose de falhas em SEDs modelados por redes de Petri rotuladas acíclicas em que transições podem ser indistinguíveis. Além disso, foi proposto uma nova forma de verificar a diagnosticabilidade de uma classe de redes de Petri rotuladas acíclicas que atende a hipótese **H1**. Nesse sentido, o diagnosticador proposto toma como base somente os eventos que possam ser observados e toma sua decisão imediatamente após cada ocorrência de um evento observável utilizando a quantidade de ocorrências dos eventos observados até o momento da diagnose em dois conjuntos de desigualdades denominados de  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$ , verificando se eles são satisfeitos ou não para a obtenção da diagnose de falhas. Entretanto, o método proposto está restrito a redes de Petri que não apresentem sequências de falha e normal compartilhando o mesmo número de ocorrências dos eventos observados. Com a nova abordagem proposta neste trabalho para a diagnose de falhas foi encontrada uma condição necessária e suficiente para verificar a diagnosticabilidade em sistemas modelados por estas redes de Petri.

Para podermos retirar a hipótese **H1** foi proposto verificar a evolução da rede de Petri desde a marcação inicial  $M_0$ , identificando todas as sequências de eventos que podem alcançar marcações terminais com o auxílio da árvore de alcançabilidade. O diagnosticador modificado toma como base somente os eventos que possam ser observados e toma sua decisão imediatamente após cada ocorrência de um evento observável utilizando a quantidade de ocorrências dos eventos observados até o momento da diagnose em conjuntos de desigualdades denominados  $AF_z$ ,  $PF_z$  e  $SF_d$  em que  $z \in I_Z$  e  $d \in I_W$ , verificando se eles são satisfeitos e obtendo os resultados  $D_{nf}^z$  e  $D_{nn}^d$  para a obtenção da diagnose de falhas..

Possíveis trabalhos futuros poderão validar o método para outras sub-classes além das redes de Petri rotuladas acíclicas . A dificuldade vem da equação de estado na qual podemos ter soluções que não levam a marcações alcançáveis pelo sistema caso ele não seja acíclico como pode ser visto em MURATA [23]. Pela teoria de redes de Petri, usando a equação de estado, temos uma condição suficiente para

alcançar as marcações nas redes de Petri e a partir desta condição suficiente, mostra-se que é possível derivar condições necessárias e suficientes para a acessibilidade em determinadas sub-classes de uma rede de Petri e são nestes resultados que o trabalho de extensão pode estar voltado.

# Referências Bibliográficas

- [1] AL-AJELI, A., BORDBAR, B., 2016, “Fourier-Motzkin Method for Failure Diagnosis in Petri Net Models of Discrete Event Systems”. In: *Proc. of 13th International Workshop on Discrete Event Systems*, pp. 165–170.
- [2] BASILE, F., CHIACCHIO, P., DE TOMMASI, G., 2009, “An Efficient Approach for Online Diagnosis of Discrete Event Systems”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 54, n. 4 (abr.), pp. 748–759.
- [3] BASILIO, J. C., CARVALHO, L. K., MOREIRA, M. V., 2010, “Diagnose de falhas em sistemas a eventos discretos modelados por autômatos finitos”, *Revista Controle & Automação*, v. 21, n. 5, pp. 510–533.
- [4] BENVENISTE, A., FABRE, E., HAAR, S., et al., 2003, “Diagnosis of asynchronous discrete-event systems: a net unfolding approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 5, pp. 714–727.
- [5] CABASINO, M. P., GIUA, A., POCCI, M., et al., 2011, “Discrete event diagnosis using labeled Petri nets. An application to manufacturing systems”, *Control Engineering Practice*, v. 19, n. 9, pp. 989–1001.
- [6] CABASINO, M. P., GIUA, A., SEATZU, C., 2014, “Diagnosability of discrete-event systems using labeled petri nets”, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, v. 11, n. 1, pp. 144–153.
- [7] CABRAL, F. G., MOREIRA, M. V., DIENE, O., et al., 2015, “A Petri Net Diagnoser for Discrete Event Systems Modeled by Finite State Automata”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 60, n. 1, pp. 59–71.
- [8] CARVALHO, L. K., BASILIO, J. C., MOREIRA, M. V., 2012, “Robust diagnosis of discrete-event systems against intermittent loss of observations”, *Automatica*, v. 48, n. 9, pp. 2068–2078.
- [9] CASSANDRAS, C. G., LAFORTUNE, S., 2008, *Introduction to Discrete Event Systems*. 2nd ed. New York, Springer.

- [10] CHUNG, S.-L., WU, C.-C., JENG, M., 2003, “Failure diagnosis: A case study on modeling and analysis by Petri nets”. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, v. 3, pp. 2727–2732, Washington.
- [11] DANTZIG, G. B., 1972, *Fourier-Motzkin elimination and its dual*. Relatório técnico, DTIC Document.
- [12] DEBOUK, R., LAFORTUNE, S., TENEKETZIS, D., 2000, “Coordinated decentralized protocols for failure diagnosis of discrete event systems”, *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, v. 10, pp. 33–86.
- [13] DOTOLI, M., FANTI, M. P., MANGINI, A. M., et al., 2009, “On-line fault detection in discrete event systems by Petri nets and integer linear programming”, *Automatica*, v. 45, n. 11 (nov.), pp. 2665–2672.
- [14] DUFFIN, R., 1974, “On Fourier’s analysis of linear inequality systems”. In: *Pivoting and Extension*, Springer, pp. 71–95.
- [15] GENÇ, S., LAFORTUNE, S., 2007, “Distributed diagnosis of place-bordered Petri nets”, *IEEE Trans. on Automation Science and Engineering*, v. 4, n. 2, pp. 206–219.
- [16] HADJICOSTIS, C. N., VERGHESE, G. C., 1999, “Monitoring Discrete Event Systems Using Petri Net Embeddings”. In: Donatelli, S., Kleijn, J. (Eds.), *Application and Theory of Petri Nets 1999: 20th International Conference, ICATPN’99 Williamsburg, Virginia, USA, June 21–25, 1999 Proceedings*, pp. 188–207, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg.
- [17] KESSLER, C. W., 1996, “Parallel Fourier-Motzkin elimination”. In: Bougé, L., Fraigniaud, P., Mignotte, A., et al. (Eds.), *Euro-Par’96 Parallel Processing*, Springer, pp. 66–71, Berlin, Heidelberg.
- [18] KHACHIYAN, L., 2009, “Fourier-Motzkin Elimination Method”. In: Floudas, C. A., Pardalos, P. M. (Eds.), *Encyclopedia of Optimization*, 2nd ed., Springer, pp. 1074–1077.
- [19] LEFEBVRE, D., DELHERM, C., 2007, “Diagnosis of DES With Petri Net Models”, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, v. 4, n. 1, pp. 114–118.
- [20] LIN, F., 1994, “Diagnosability of discrete event systems and its applications”, *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, v. 4, pp. 197–212.

- [21] MANYARI-RIVERA, M., BASILIO, J. C., BHAYA, A., 2007, “Integrated fault diagnosis based on Petri net models”. In: *Proc. of the 16th IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 958–963, Singapore.
- [22] MIYAGI, P., RIASCOS, L., 2006, “Modeling and analysis of fault-tolerant systems for machining operations based on Petri nets”, *Control Engineering Practice*, v. 14, n. 4, pp. 397–408.
- [23] MURATA, T., 1989, “Petri nets - properties, analysis and applications”, *Proc. of the IEEE*, v. 77, n. 4, pp. 541–580.
- [24] PAIVA, P. R. R., CARVALHO, L. K., BASILIO, J. C., 2017, “DIAGNOSE ONLINE EM SISTEMAS A EVENTOS DISCRETOS MODELADOS POR REDES DE PETRI ACÍCLICAS ROTULADAS”. In: *Anais XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, pp. 1597–1603.
- [25] PAIVA, P. R., CARVALHO, L. K., BASILIO, J. C., 2017, “Diagnosability and online diagnosis of discrete-event systems modeled by acyclic labeled Petri nets”, *IFAC-PapersOnLine*, v. 50, n. 1, pp. 13630 – 13635. 20th IFAC World Congress.
- [26] PROCK, J., 1991, “A new technique for fault detection using Petri nets”, *Automatica*, v. 27, n. 2, pp. 239 – 245.
- [27] RAMÍREZ-TREVIÑO, A., RUIZ-BELTRÁN, E., RIVERA-RANGEL, I., et al., 2007, “Online fault diagnosis of discrete event systems. A Petri net-based approach”, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, v. 4, n. 1, pp. 31–39.
- [28] RAO, S. S., 1996, *Engineerion optimization: theory and practice*. Third ed. USA, Wiley-Interscience Publication.
- [29] SAMPATH, M., SENGUPTA, R., LAFORTUNE, S., et al., 1995, “Diagnosability of discrete-event systems”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 40, pp. 1555–1575.
- [30] SAMPATH, M., SENGUPTA, R., LAFORTUNE, S., et al., 1996, “Failure diagnosis using discrete event models”, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, v. 4, pp. 105–124.
- [31] SCHRIJVER, A., 1986, *Theory of Linear and Integer Programming*. New York, NY, USA, John Wiley & Sons, Inc.

- [32] USHIO, T., ONISHI, I., OKUDA, K., 1998, “Fault detection based on Petri net models with faulty behaviors”. In: *Proc. of the IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, v. 1, pp. 113–118, San Diego.
- [33] WANG, Y., YOO, T. S., LAFORTUNE, S., 2007, “Diagnosis of discrete event systems using decentralized architectures”, *Discrete Event Dynamic Systems: Theory And Applications*, v. 17, n. 2, pp. 233–263.
- [34] WEN, Y., JENG, M., 2005, “Diagnosability analysis based on T-invariants of Petri nets”. In: *Proceedings. 2005 IEEE Networking, Sensing and Control, 2005.*, pp. 371–376.
- [35] WEN, Y., LI, C., JENG, M., 2005, “A polynomial algorithm for checking diagnosability of Petri nets”. In: *2005 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, v. 3, pp. 2542–2547 Vol. 3.
- [36] WILLIAMS, H. P., 1976, “Fourier-Motzkin elimination extension to integer programming problems”, *Journal of combinatorial theory, series A*, v. 21, n. 1, pp. 118–123.
- [37] WU, Y., HADJICOSTIS, C. N., 2005, “Algebraic approaches for fault identification in discrete-event systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 12, pp. 2048–2055.
- [38] ZAD, S. H., KWONG, R. H., WONHAM, W. M., 2003, “Fault diagnosis in discrete-event systems: framework and model reduction”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 48, n. 7, pp. 1199–1212.
- [39] ZAYTOON, J., LAFORTUNE, S., 2013, “Overview of fault diagnosis methods for discrete event systems”, *Annual Reviews in Control*, v. 37, n. 2, pp. 308–320.