



ALGORITMOS DE FILTRAGEM ADAPTATIVA EM SUBBANDAS COM REÚSO DE DADOS

Elias Lawrence Marques

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Mariane Rembold Petraglia
Diego Barreto Haddad

Rio de Janeiro
Dezembro de 2016

ALGORITMOS DE FILTRAGEM ADAPTATIVA EM SUBBANDAS COM
REÚSO DE DADOS

Elias Lawrence Marques

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Mariane Rembold Petraglia, Ph.D.

Prof. Diego Barreto Haddad, D.Sc.

Prof. Julio Cesar Boscher Torres, D.Sc.

Prof. Amaro Azevedo de Lima, Ph.D.

Prof. Roberto Aizik Tenenbaum, D.Sc.

Prof. Tadeu Nagashima Ferreira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2016

Marques, Elias Lawrence

Algoritmos de Filtragem Adaptativa em Subbandas com Reúso de Dados/Elias Lawrence Marques. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XIX, 129 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Mariane Rembold Petraglia

Diego Barreto Haddad

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 119 – 129.

1. Filtragem Adaptativa. 2. Estruturas em Subbandas. I. Petraglia, Mariane Rembold *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Bem-aventurada é a nação cujo
Deus é o Senhor, e o povo ao
qual escolheu para sua herança.
Busquei ao Senhor, e ele me
respondeu; livrou-me de todos os
meus temores. Clamou este
pobre, e o Senhor o ouviu, e o
salvou de todas as suas
angústias. Provai, e vede que o
Senhor é bom; bem-aventurado o
homem que nele confia.
Salmos 33:12; 34:4, 6 e 8*

Agradecimentos

A Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

A minha querida esposa Angela Mafra, por estar sempre ao meu lado e dedicar seu tempo a me ajudar no que fosse possível.

Aos meus filhos Priscilla, Caroline e Elias Júnior, por pacientemente se privarem da minha atenção enquanto estive imerso nos estudos.

À minha orientadora, professora Mariane, pela sua paciência, tranquilidade, dedicação, capacidade profissional, e principalmente, por ter acreditado em mim;

Também ao meu co-orientador, Diego Haddad, explico minha alegria por seu auxílio incessante, por suas contribuições e por sua amizade.

Agradeço ao Instituto Nacional de Propriedade Industrial (INPI), por ter autorizado a minha capacitação e desenvolvimento da tese.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ALGORITMOS DE FILTRAGEM ADAPTATIVA EM SUBBANDAS COM REÚSO DE DADOS

Elias Lawrence Marques

Dezembro/2016

Orientadores: Mariane Rembold Petraglia

Diego Barreto Haddad

Programa: Engenharia Elétrica

Esta tese propõe uma nova estrutura e algoritmos em subbandas para filtragem adaptativa, na qual os subfiltros adaptativos são esparsos. Para os algoritmos adaptativos derivados é considerada a conjugação dos princípios de perturbação mínima e de otimização com múltiplas restrições. É derivada uma implementação simplificada da abordagem proposta (nomeada de NSAF-SF), que apresenta uma taxa de convergência similar à do algoritmo NSAF, mas com a vantagem de demandar um custo computacional inferior. Usando o princípio da conservação de energia, é obtida uma expressão para o MSE em regime permanente para o NSAF-SF. Em seguida, é proposto um novo algoritmo, nomeado filtro adaptativo de projeção afim em subbandas (APSAF), que emprega o cancelamento de um número selecionado das mais recentes amostras (decimadas) do erro *a posteriori* nas subbandas, de sorte a promover a adaptação a uma taxa inferior à do sinal de entrada. Explorando as propriedades da decorrelação entre os sinais em diferentes subbandas, a proposta simplifica a complexidade comparativamente ao Filtro Adaptativo em Subbandas Estruturado em Multibandas (IMSAF), proposto recentemente. São propostos também um algoritmo que automatiza a escolha do número de vetores de entrada em função do desempenho quanto à taxa de convergência, e algoritmos que empregam um escalonador de tamanho de passo, proporcionando melhorias na robustez perante ruído impulsivo. Por fim, é apresentada uma análise teórica do erro quadrático médio em regime permanente para algoritmos de projeção afim em subbandas, cuja formalização baseou-se em argumentos de conservação de energia.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

SUBBAND ADAPTIVE FILTERING ALGORITHMS WITH DATA REUSE

Elias Lawrence Marques

December/2016

Advisors: Mariane Rembold Petraglia

Diego Barreto Haddad

Department: Electrical Engineering

In this thesis are a new structure and algorithms for subband adaptive filtering are proposed, in which the adaptive subfilters are sparse. In the derivation of the adaptive algorithms the combination of minimal disturbance and optimization principles with multiple restrictions are considered. A simplified implementation of the proposed approach (named NSAF-SF) is derived, which presents a convergence rate similar to that of the NSAF algorithm, but with the advantage of requiring a lower computational cost. Using the energy conservation principle, an expression for the steady-state MSE of the NSAF-SF is obtained. A new adaptive algorithm in subband, named Affine Projection Subband Adaptive Filter (APSAF), is also proposed, which employs the cancellation of a selected number of the most recent samples (decimated) of *a posteriori* error in the subband, so as to promote adaptation at a rate lower than that of the input signal. Exploring the properties of decorrelation between signals in different subbands, the proposed APSAF simplifies the complexity compared to the recently derived Improved Multiband-Structured Subband Adaptive Filter (IMSAF). An adaptation algorithm that automates the choice of the number of input vectors depending on the error performance and adaptive algorithms that employ step size scheduler in order to provide in robustness against impulsive noise are proposed. Finally, a theoretical analysis of the mean square error in steady-state is presented for the affine projection algorithms in subbands, based on energy conservation arguments.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Símbolos	xv
Lista de Abreviaturas	xvii
1 Introdução	1
1.0.1 Sinal de Voz	3
1.0.2 Aplicações	4
1.1 Algoritmo da média quadrática mínima (LMS)	7
1.2 Algoritmo NLMS	11
1.3 Estrutura da Tese	13
2 Reúso de Dados	15
2.1 Introdução	15
2.2 Revisão Bibliográfica do APA	15
2.3 Conceitos Básicos do APA	17
2.4 Interpretação Geométrica do APA	20
2.5 Considerações Finais	23
3 Processamento em Subbandas	25
3.1 Introdução	25
3.2 Sistemas Multitaxas	26
3.2.1 Decimação e Interpolação	26
3.3 Banco de Filtros	29
3.3.1 Banco de Filtros Digitais Maximamente Decimado	33
3.3.2 Banco de Filtros Não Maximamente Decimado	35
3.4 Banco de Filtros Modulados por Cosseno	35
3.5 Filtro Adaptativo em Subbandas Normalizado (NSAF)	35
3.5.1 Complexidade Computacional	39

3.6	Avanços do Algoritmo NSAF	40
3.7	Conclusão	40
4	Fatores de Aprendizagem e de Regularização Adaptativos	41
4.1	Introdução	41
4.2	Fator de Aprendizagem para Algoritmo em Subbandas	42
4.3	Fator de Regularização	45
4.3.1	Parâmetro de Regularização	45
4.3.2	Matriz de Regularização Adaptativa	45
4.4	Conclusão	48
5	Estrutura do Filtro em Subbandas Proposta	49
5.1	Introdução	49
5.2	Algoritmo em Subbandas NSAF-SF	50
5.2.1	Derivação da Equação de Atualização para o Algoritmo NSAF-SF	51
5.3	Análise do MSE em Regime Permanente do NSAF-SF	53
5.4	Análise da Complexidade do NSAF-SF	56
5.5	Resultados de Simulações com o NSAF-SF	59
5.5.1	Predição do MSE	59
5.5.2	Problema de Identificação	60
5.6	Filtro Adaptativo em Subbandas com Filtros Esparsos e Seleção de Subbandas (NSAF-SF-SS)	61
5.6.1	Resultado das Simulações	64
5.7	Conclusão	65
6	Estrutura em Subbandas Proposta com Algoritmo Adaptativo APA	67
6.1	Introdução	67
6.2	APA em Subbandas com Filtros Esparsos - (APSAF)	68
6.2.1	Algoritmo em Subbandas APSAF	68
6.2.2	Complexidade Computacional do APSAF	70
6.2.3	Tamanho de Passo Variável para o APSAF	72
6.2.4	Resultados das Simulações com o APSAF	73
6.3	APSAF com ordem Evolutiva	76
6.3.1	APA Evolutivo	76
6.3.2	Resultados das Simulações do APA Evolutivo	78
6.3.3	APSAF Evolutivo (E-APSAF)	79
6.3.4	Resultados das Simulações do E-APSAF	80
6.4	Conclusões	83

7	Algoritmo APSAF para Filtragem Adaptativa Robusta a Ruído Impulsivo	85
7.1	Introdução	85
7.2	NSAF-SF com Escalonador de Passo de Adaptação para Ruído Impulsivo	86
7.2.1	Função Custo baseada no Erro Quadrático Limitado	87
7.2.2	Escalonador de Tamanho de Passo	87
7.2.3	Resultados das Simulações	88
7.3	APSAF Robusto ao Ruído Impulsivo em Filtragem Adaptativa	91
7.3.1	Escalonador de Tamanho de Passo	93
7.3.2	Parâmetros de Regularização	93
7.3.3	Complexidade Computacional	94
7.3.4	Resultados Simulados	95
7.4	Conclusão	98
8	Análise de Desempenho em Regime Permanente	100
8.1	Introdução	100
8.2	Comportamento Estatístico Médio do algoritmo APSAF	100
8.3	Avaliação do EMSE	107
8.4	Resultados das Simulações	111
8.5	Conclusões	113
9	Conclusões e Sugestões	114
9.1	Conclusões	114
9.2	Trabalhos Futuros	117
	Referências Bibliográficas	119

Lista de Figuras

1.1	Estrutura de Filtragem Adaptativa	3
1.2	Identificação de Sistemas	5
1.3	Equalização de Canal	5
1.4	Predição de Sinais	6
1.5	Principais características dos capítulos da tese (excluindo-se os capítulos de introdução e de conclusões). Os capítulos que contêm contribuições estão assinalados em vermelho.	14
2.1	Interpretação geométrica do algoritmo NLMS	20
2.2	Interpretação geométrica do APA	22
3.1	Decimador por um fator L	26
3.2	Espectro original do sinal $x(n)$	27
3.3	Espectro do sinal da Fig. 3.2 subamostrado com $L = 2$	27
3.4	Interpolador pelo fator L	27
3.5	Espectro do sinal da Fig. 3.2 sobre-amostrado, em $L = 2$	28
3.6	Conversor Série-Paralelo.	28
3.7	Implementação do Conversor Série-Paralelo	29
3.8	Diagrama do esquema de compressão do formato MP3.	32
3.9	Banco de Filtros (i -ésima subbanda).	32
3.10	Exemplo de decomposição em subbandas	33
3.11	Bancos de filtros digitais de análise e de síntese.	34
3.12	Resposta típica dos filtros de análise	34
3.13	Estrutura da Família NSAF.	38
5.1	Estrutura em subbandas com subfiltros esparsos $G_i(z^L)$ e filtros de análise $\{H_i(z)\}$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$, proposta em [1], indicada pelo quadro tracejado. A decomposição do sinal de erro $e(n)$ pelos filtros $H_i(z)$ é o primeiro passo para a obtenção do algoritmo proposto.	50
5.2	O i -ésimo ramo da estrutura proposta.	51
5.3	Complexidade Computacional dos algoritmos NSAF e NSAF-SF.	59

5.4	MSEs simulados e os teóricos em regime permanente, em função de β : (a) sinal de entrada branco; (b) sinal de entrada colorido.	60
5.5	NMSDs do NSAF (em vermelho) e NSAF-SF (em azul tracejado) para a simulação de identificação de sistema. (a) $M = 2$, $\beta = 1$; (b) $M = 2$, VSS; (c) $M = 8$, $\beta = 1$; (d) $M = 8$, VSS.	61
5.6	Exemplo de atualização de coeficientes no algoritmo proposto para $N = 2$, $M_s = 1$, e $M = 2$	63
5.7	MSD do NSAF-SF-SS	65
6.1	Complexidade Computacional dos algoritmos APSAF e IMSAF.	72
6.2	Evolução do NMSD para identificação de um sistema com entrada AR(10) e $M = 512$. (a) $\beta = 1$; (b) VSS.	75
6.3	Evolução NMSD para o cancelamento de eco acústico com entrada de voz com $N = 2048$ e VSS.	76
6.4	Desempenho do APA e do APA evolutivo	79
6.5	Desempenho dos algoritmos APA, E-APA, APSAF e E-APSAF para $K_{\max} = 4$	81
6.6	Desempenho dos algoritmos APA, E-APA, APSAF e E-APSAF para $N = 512$ e $K_{\max} = 8$	81
6.7	Desempenho dos algoritmos APSAF e E-APSAF para $K_{\max} = 16$	82
6.8	Variação do fator de reuso K no processo de aprendizagem do algoritmo E-APA.	82
6.9	Variações dos fatores de reuso K_i no processo de aprendizagem do algoritmo E-APSAF.	83
7.1	Evolução do NMSD para $M = 4$, entrada AR(1), $P = 0,001$ e $N = 512$ para os algoritmos da Tabela 7.1.	90
7.2	Evolução do NMSD para $M = 4$, entrada AR(1), $P_r = 0,001$ e $N = 512$	90
7.3	Complexidade Computacional dos algoritmos RAPSAF e APMSAF.	95
7.4	Caminho acústico do eco: (a) $N = 512$, (b) $N = 2048$	96
7.5	Evolução do NMSD do RAPSAF com $M=4$ e $K=1, 2, 4$ e 8 , para entrada AR(1), $P_r=0.001$ e $N=512$	97
7.6	Evolução do NMSD do RAPSAF, APMSAF, APSSAF, APSA e IWFSSAF, com $M=4$ e $K=3$ para entrada AR(1), $P_r=0.001$ e $N=512$	97
7.7	Evolução do NMSD do RAPSAF, APMSAF, APSSAF, APSA e IWFSSAF, com $M=8$ e $K=4$ para entrada de voz, $P_r=0.0001$ and $N=2048$	98

8.1	MSE em regime permanente considerando a aproximação para β pequeno	112
8.2	MSE em regime permanente considerando $\mathbf{S}_2 = 0$	112
8.3	MSE em regime permanente considerando a aproximação para β grande.	113

Lista de Tabelas

3.1	Resumo do Algoritmo NSAF	39
5.1	Algoritmo NSAF-SF	58
5.2	Complexidade Computacional	58
6.1	Algoritmo APSAF	70
6.2	Complexidade Computacional	72
7.1	Algoritmos Adaptativos em Subbandas com Escalonador de Tamanho de Passo	89
7.2	Complexidade Computacional	94

Lista de Símbolos

$(\cdot)^T$	transposta de um vetor ou uma matriz, p. 8
F_s	taxa de amostragem, p. 39
J	função custo, p. 10
K	número de vetores de entrada consecutivos, p. 15
L	fator de decimação/interpolação, p. 26
M	número de subbandas, p. 57
N	número de coeficientes adaptativos, p. 8
N_p	comprimento do filtro protótipo, p. 50
T_s	período de amostragem, p. 39
Δ	atraso introduzido pelo banco de filtros, p. 34
$\Psi(n)$	representa o lugar geométrico (hiperplano) de todos os vetores que produzem a saída $y(n)$ igual a $d(n)$ na topologia de estimação linear para o vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$, p. 21
β	fator (ou passo) de aprendizagem, p. 10
$\Gamma(n)$	matriz de passo variável, p. 43
$\Phi(n)$	matriz diagonal da norma quadrática de amostras do sinal de entrada, p. 43
$e_a(n)$	erro <i>a priori</i> , p. 53
\mathbf{w}	vetor de coeficientes do filtro adaptativo, p. 8
\mathbf{w}^0	vetor coeficientes do filtro ótimo, p. 11
δ	fator de regularização, p. 23

δ_e	fator de esquecimento, p. 89
γ	valor limite do erro de subbanda, p. 43
λ	multiplicadores de Lagrange, p. 10
$\mathbb{E}(\cdot)$	operador de expectativa estatística, p. 8
$\nu(n)$	representa as imprecisões e os erros de medição no instante n , p. 4
σ	parâmetro de regularização, p. 45
$x_D(n)$	sinal decimado, p. 26
$x_I(n)$	sinal interpolado, p. 28
$d(n)$	sinal de referência, p. 2
$e(n)$	sinal de erro, p. 2
$e_p(n)$	erro <i>a posteriori</i> , p. 10
$f_M(n)$	função de transferência do banco de filtro de síntese, p. 35
$h_M(n)$	função de transferência do banco de filtro de análise, p. 35
$x(n)$	sinal de entrada, p. 2
$y(n)$	sinal de saída do filtro adaptativo, p. 2
R	matriz de autocorrelação do sinal de entrada, p. 9
q	vetor de correlação cruzada entre o sinal desejado e o vetor de entrada, p. 9

Lista de Abreviaturas

AAC	Codificação de Áudio Avançada, p. 30
ADPCM	Modulação Adaptativa por Codificação de Pulso Diferencial, p. 5
AEC	Canceladores de Eco Acústico, p. 42
AP-SSAF	Filtro Adaptativo em Subbandas de Sinal com Projeção Afim, p. 40
APA	Algoritmo de Projeção Afim, p. 15
APSAF	APA em Subbandas com Filtros Esparsos, p. 67
AP	Projeção Afim, p. 15
CMFB	Banco de Filtro Modulado por Cosseno, p. 35
DCT	Transformação Discreta de Cosseno, p. 31
E-APA	APA evolutivo, p. 76
E-APSAF	APSAF Evolutivo, p. 77
EMSE	Erro Quadrático Médio em Excesso, p. 103
FAP	Projeção Afim Rápida, p. 23
FIR	Resposta ao Impulso Finita, p. 3
IIR	Resposta ao Impulso Infinita, p. 3
IMSAF	Algoritmo de Filtragem Adaptativa em Subbandas Estruturado em Multibanda Melhorado, p. 66
IPNLMS	NLMS Melhorado Proporcionalmente, p. 42
LC	Critério do Logaritmo Mínimo, p. 40

LMS	Algoritmo da Média Quadrática Mínima, p. 7
MCC	Crítério da Correntropia Máxima, p. 40
MDCT	Transformada de Cosseno Discreto Modificada, p. 31
MFCC	<i>Mel-Frequency Cepstral Coefficient</i> , p. 31
MPEG	<i>Moving Picture Experts Group</i> , p. 30
MSE	Erro Quadrático Médio, p. 49
NLMS	Algoritmo da Média Quadrática Mínima Normalizada, p. 8
NMSD	Desvio Quadrático Médio Normalizado, p. 60
NSAF-SF-SS	Filtro Adaptativo em Subbandas com Filtros Esparsos e Seleção de Subbandas, p. 60
NSAF-SF	Estrutura em Subbandas com Filtros Esparsos, p. 50
NSAF	Filtro Adaptativo em Subbandas Normalizado, p. 35
P-SSAF	Filtro Adaptativo em Subbandas Proporcional, p. 40
PAPA	Pseudo Algoritmo de Projeção Afim, p. 16
RLS	Quadrados Mínimos Recursivos, p. 7
SF	Estrutura em Subbandas com Filtros Esparsos, p. 49
SM-NSAF	NSAF com Associação Definida, p. 41
SNR	Razão Sinal Ruído, p. 68
SPU-SAF	Filtro Adaptativo Seletivo em Subbandas com Atualização Parcial, p. 50
SR-IPNLMS	NLMS Melhorado Proporcionalmente com Regressor Atribuído, p. 42
SR-NLMS	NLMS com Regressor Atribuído, p. 42
SSAF	Filtro Adaptativo em Subbandas de Sinal, p. 40
VRP-SSAF	Filtro Adaptativo em Subbandas com Parâmetro de Regularização Variável, p. 40

VSSM-NSAF	Filtro Adaptativo em Subbandas Normalizado com Matriz de Tamanho de Passo, p. 42
WMA	<i>Windows Media Audio</i> , p. 30
WSS	<i>Wide Sense Stationary Process</i> , p. 9

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, as técnicas de processamento digital de sinais e, particularmente, as de processamento adaptativo de sinais alcançaram um inaudito patamar de maturidade. Entre as causas desse fenômeno, destaca-se a emergência dos processadores digitais de sinais de alto desempenho, os quais proporcionam precisão, dimensões pequenas, flexibilidade e capacidade de implementação robusta de algoritmos no estado da arte.

Um segmento importante nessa área de pesquisa consiste na filtragem adaptativa, a qual contempla uma ampla gama de aplicações, tais como sistemas de som digitais, cancelamento de ecos acústicos, controle, equipamentos e instrumentação médica, dentre outras [2], [3], [4].

Sempre que haja necessidade de processar sinais resultantes de ambientes com estatísticas desconhecidas, a utilização de filtros adaptativos constitui uma solução atrativa, caso confrontada com o emprego de um sistema fixo projetado pelos métodos convencionais. Isso se dá porque a filtragem adaptativa obtém melhor aproveitamento da filtragem digital, por ensejar uma modificação dos parâmetros da filtragem ao longo do tempo. Um exemplo de aplicação em que se faz necessária tal técnica ocorre nas comunicações telefônicas, nas quais o canal de comunicação envolvido se altera, na melhor das hipóteses, a cada ligação efetuada.

Um filtro adaptativo é um sistema variante no tempo, dotado de um mecanismo de ajuste dos coeficientes consoante algum critério específico [2], [5]. Quanto à forma de resolução do problema de filtragem adaptativa, diferentes pontos de vista são empregados, destacando-se as abordagens de aproximação estocástica e de minimização de funções custo determinísticas [2], [3], [5].

Os filtros podem ser entendidos como dispositivos capazes de remover componentes indesejados de um sinal. Dessa maneira, conhecidas as características do sinal a ser filtrado (sinal de entrada), as especificações da filtragem requerida e a estrutura do filtro a ser utilizada, é possível projetar um filtro que satisfaça algum critério de desempenho suficientemente realista.

Deve-se ressaltar que a estrutura do filtro a ser empregada é de fundamental importância no processo adaptativo, pois pode engendrar alterações significativas na taxa de convergência, no desempenho em regime permanente ou mesmo a existência de um ou mais mínimos locais da função custo. Atualmente, sistemas adaptativos são empregados com sucesso em identificação de sistemas, equalização de canais, cancelamento de interferências, cancelamento de eco e no controle ativo de ruído e vibrações, em campos tão diversos como comunicações digitais, controle, radar, sonar, sismologia e engenharia biomédica [2], [5]. Em cada uma dessas aplicações, é necessária a obtenção de uma taxa de convergência alta, de modo que a saída do filtro adaptativo apresente propriedades desejáveis o quanto antes.

Tais algoritmos costumam empregar ajustes sucessivos dos parâmetros do filtro, os quais operam iterativamente por meio da seguinte regra geral:

$$\begin{pmatrix} \text{nova estimativa} \\ \text{dos parâmetros} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{antiga estimativa} \\ \text{dos parâmetros} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{termo de} \\ \text{correção} \end{pmatrix},$$

onde o termo de correção depende dos antigos parâmetros do sistema e do sinal de entrada e , não raro, de um sinal de referência.

Os algoritmos adaptativos podem ser classificados quanto à metodologia de geração do *termo de correção* que será utilizado para ajuste dos parâmetros do processo de filtragem, do seguinte modo:

- *algoritmos supervisionados*: exigem um sinal de referência para obtenção do termo de correção.
- *algoritmos não-supervisionados*: não exigem um sinal de referência para obtenção do termo de correção. Algoritmos que devem atuar na ausência deste sinal de referência são também denominados cegos ou autodidatas [6].

Em geral os algoritmos adaptativos podem ser desmembrados em duas partes:

- *processo de filtragem*: cuja saída é a resposta para um ou vários sinais de entrada;
- *processo adaptativo*: provê um mecanismo de controle adaptativo, através de algum algoritmo de ajuste dos parâmetros usados no processo de filtragem.

A Fig. 1.1 apresenta o diagrama em blocos esquemático de um algoritmo de filtragem adaptativa, onde $d(n)$ é o sinal de referência ou sinal desejado, $x(n)$ é o sinal de entrada, $y(n)$ é o sinal de saída do filtro adaptativo (que deve emular o sinal de referência $d(n)$) e $e(n) \triangleq d(n) - y(n)$, chamado de sinal de erro, reflete a discrepância entre os sinais $d(n)$ e $y(n)$.

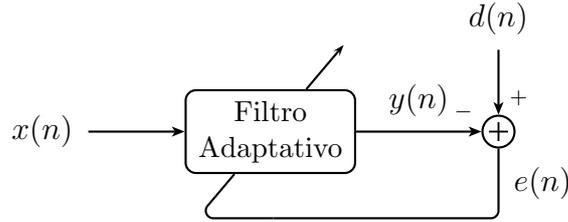


Figura 1.1: Estrutura de Filtragem Adaptativa

Os parâmetros do filtro são atualizados na n -ésima iteração pelo algoritmo adaptativo, de modo a minimizar alguma figura de mérito, em geral baseada no erro $e(n)$. Os filtros adaptativos podem ser implementados usando estruturas com respostas ao impulso de duração finita ou infinita. Assim, têm-se os filtros FIR (Resposta ao Impulso Finita) e os filtros IIR (Resposta ao Impulso Infinita), respectivamente. Nesta tese a discussão será restrita aos filtros adaptativos FIR devido à relativa facilidade que estes apresentam no tocante ao controle de estabilidade.

1.0.1 Sinal de Voz

A maioria dos experimentos que utilizam sinais reais apresentados nesta tese empregam sinais de voz. A preferência pela voz se deve à elevada variedade de aplicações que empregam esse tipo de sinal (por exemplo, reconhecimento automático de voz, o qual viabiliza a interação humana com as máquinas por meio da fala). Outra aplicação se dá em cancelamento de eco, que é uma técnica de processamento de sinais que remove sinais indesejados na fala ou no áudio, com o objetivo de melhorar a qualidade do sinal. Um exemplo em que se aplica o cancelamento de eco é em teleconferências, onde a presença de eco prejudica a interação entre os participantes.

Alguns pesquisadores diferenciam o termo “fala” do termo “voz”, considerando a fala como produção sonora de informação inteligível, e a voz como uma característica individual da emissão da fala.

A comunicação por voz se refere a todo processo de transmissão da informação por meio da fala [7]. Tal processo apresenta um largo campo para estudo de técnicas de processamento de sinais, possibilitando o surgimento de ferramentas que promovam uma melhoria da comunicação [8].

O espectro de um sinal de voz apresenta um caráter colorido, o que pode ser inferido a partir da modelagem física do fenômeno de geração da fala. Como veremos, sinais coloridos costumam reduzir a taxa de convergência de algoritmos de filtragem adaptativa. Esta tese contemplará técnicas que almejam atenuar tal problema.

Os sinais de voz são codificados mediante sons da linguagem falada. Estes sons podem ser considerados aleatórios, representados por uma série de amostras temporais e caracterizados mediante funções de densidade de probabilidade multidimensio-

nais. Por essa razão, o sinal de voz pode ser modelado como um processo estocástico. Entretanto, esse processo é não estacionário, dado que as propriedades estatísticas do sinal de voz variam com o tempo, de acordo com a conformação do aparelho fonador. Porém, pode-se assumir, por meio de estimações de curto prazo, a obtenção de blocos com propriedades estatisticamente constantes (quasi-estacionários) permitindo-se analisar e processar o sinal de voz como um sinal estacionário (como efetuado em [9]). Para atingir a quasi-estacionariedade do sinal de voz, o tamanho da janela temporal de estimação deverá ser escolhido convenientemente, de forma que esta seja suficientemente curta para que apresente as características espectrais instantâneas da estimação e suficientemente longa para minimizar a variância na estimação dos parâmetros. Em geral, blocos de 20 a 30 ms são adequados para a maior parte das aplicações [10].

1.0.2 Aplicações

As estratégias supervisionadas de filtragem adaptativa em geral requerem um vetor de entrada e um sinal desejado, os quais são utilizados juntamente com o sinal de erro para ajustar os coeficientes do filtro, objetivando uma otimização de seu desempenho. Algumas das aplicações clássicas da filtragem adaptativa são classificadas em:

- *Identificação de sistemas:* Nessa classe de aplicações, o filtro adaptativo é usado para prover o modelo linear que melhor represente uma planta desconhecida. A Fig. 1.2 apresenta um diagrama em blocos desse tipo de aplicação. O sistema desconhecido e o filtro adaptativo são alimentados pelo mesmo sinal de entrada e a saída do sistema desconhecido consiste na resposta desejada para o filtro adaptativo. O ruído aditivo representa algum ruído interno da planta ou mesmo a incerteza inerente ao processo de medição. Por meio da adaptação dos coeficientes do filtro através de um algoritmo iterativo é possível obter uma boa aproximação para o modelo da planta desconhecida. A identificação adaptativa é frequentemente utilizada em sistemas de comunicações, sistemas de controle e em identificação de estruturas. Por exemplo, nos sistemas de controle tal identificação pode ser utilizada para modelar uma planta com a finalidade de projetar um controlador.
- *Equalização de Canal:* consiste na aplicação em sinais transmitidos distorcidos pelo canal e acrescidos de ruído ambiente, na qual o sinal desejado é o sinal original atrasado. A Fig. 1.3 apresenta um diagrama em blocos para este tipo de aplicação. Como pode ser visto nesta figura, o sinal atrasado, em geral, está disponível no receptor por meio de uma sequência de treinamento padrão.

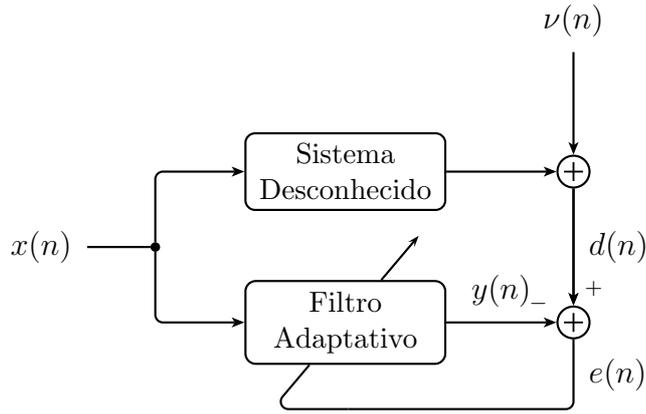


Figura 1.2: Identificação de Sistemas

Quando o equalizador de canal atinge um erro quadrático reduzido, é esperada uma razoável reversão dos efeitos do canal.

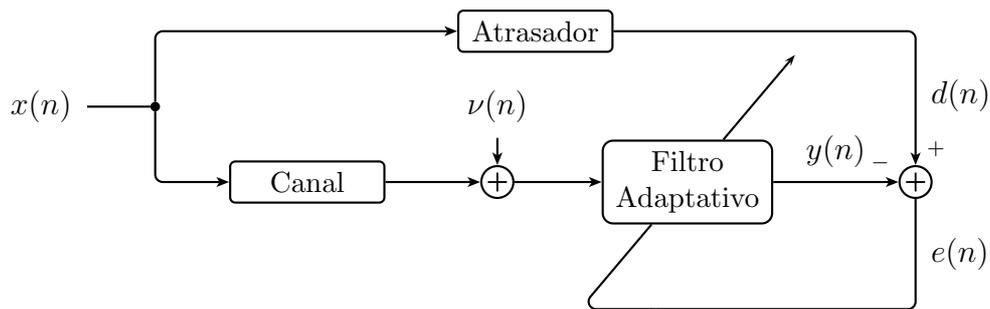


Figura 1.3: Equalização de Canal

- *Predição de Sinais*: consiste na previsão de amostras de um sinal, a partir de amostras pregressas, de modo que $y(n)$ se aproxime de $x(n)$ – que, nesta configuração, equivale ao sinal de referência. Aplicações usuais são códigos preditores para sinais de voz, remoção de interferências de sinais em banda estreita e ADPCM (*Modulação Adaptativa por Codificação de Pulso Diferencial*). A Fig. 1.4 apresenta um diagrama em blocos para este tipo de aplicação.

Quanto ao método de estimação dos parâmetros do filtro adaptativo, os algoritmos podem ser classificados em:

- *Algoritmos baseados no método do gradiente estocástico*: Esses algoritmos inspiram-se no filtro de Wiener, estimando o gradiente de uma função custo, baseada geralmente no erro quadrático médio (valor quadrático médio da diferença entre a resposta desejada e a saída do filtro). No caso de implementações

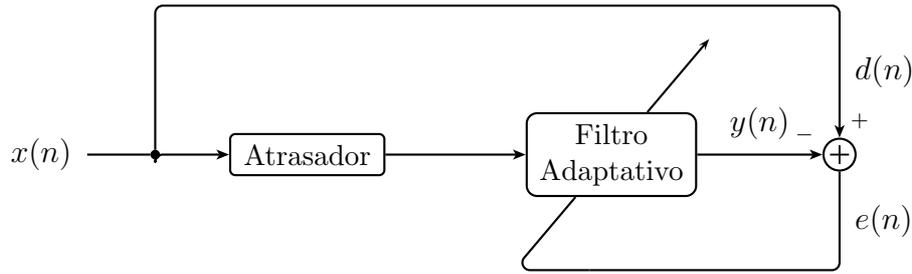


Figura 1.4: Predição de Sinais

usando estruturas de filtragem FIR transversais, a dependência do erro quadrático médio com relação aos coeficientes assume a forma de uma superfície paraboloide dotada de um único mínimo global. Os coeficientes que determinam o mínimo global da superfície correspondem à solução ótima de Wiener. Algoritmos dessa classe têm como principais qualidades a baixa complexidade computacional e robustez a variações nas condições de operação. O termo gradiente estocástico visa distingui-los do método de otimização pelo gradiente de descida mais íngreme [2]. O procedimento de atualização nesse caso consiste em:

$$\begin{pmatrix} \text{Coeficientes} \\ \text{atualizados} \\ \text{do Filtro} \\ \text{Adaptativo} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Coeficientes} \\ \text{do Filtro} \\ \text{Adaptativo} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Ponderação} \\ \text{da} \\ \text{atualização} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Direção} \\ \text{de} \\ \text{atualização} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

onde “*Ponderação da atualização*” denota o passo do algoritmo, o qual permite controlar a magnitude da alteração empreendida pela busca pela solução ótima.

- *Algoritmos baseados no método dos mínimos quadrados*: Enquanto a solução empregada pelo método do gradiente estocástico se baseia em uma formulação estocástica para o problema de filtragem, a solução pelo método dos mínimos quadrados representa uma perspectiva determinística, fundamentada na redução da soma ponderada dos quadrados dos erros das estimativas. Os algoritmos de mínimos quadrados podem ser relacionados ao filtro de Kalman [6]. Têm como vantagem a baixa sensibilidade a mínimos locais das superfícies da função custo e uma maior velocidade de convergência (medida em número de iterações) comparados com os algoritmos do gradiente, ou seja, estes algoritmos não são demasiadamente sensíveis à função densidade espectral do sinal de excitação. Porém, tais algoritmos demandam uma maior complexidade computacional, podendo tornar-se numericamente instáveis [5]. Um exemplo de algoritmo baseado nesse método é o RLS (Quadrados Mínimos

Recursivos) [11].

1.1 Algoritmo da média quadrática mínima (LMS)

Os algoritmos de filtragem adaptativa apresentam diferentes velocidades de convergência e características de desajuste em regime permanente. Alguns algoritmos tendem a apresentar um aumento na taxa de convergência, conjuntamente com um aumento da complexidade computacional. Além disso, um algoritmo pode apresentar diferentes velocidades de convergência, a depender dos valores dos seus parâmetros de projeto, como o passo de aprendizagem ou o fator de regularização. Normalmente, há um compromisso entre a velocidade de convergência atingível e o desajuste em regime permanente, de sorte que um ajuste dos parâmetros que pretenda maximizar a taxa de convergência implica um maior desajuste em regime permanente, e vice-versa. Um algoritmo que provê convergência rápida e desajuste mínimo é o ideal. O desempenho de um algoritmo adaptativo pode ser avaliado por um conjunto de características. Segundo [2] as principais são:

- Taxa de convergência: define o número de iterações necessárias para o algoritmo levar os coeficientes do filtro para um valor em torno da solução ótima de Wiener, no sentido quadrático médio;
- Desvio: é definido como a razão entre o valor do erro quadrático médio em excesso no estado estacionário e o erro quadrático médio mínimo;
- Rastreamento: capacidade do algoritmo de acompanhar as variações das funções de transferência dos sinais em um meio não-estacionário. Seu desempenho é influenciado pela taxa de convergência e pelas flutuações em regime permanente;
- Robustez: capacidade do algoritmo operar satisfatoriamente com sinal de entrada mal condicionado;
- Complexidade computacional: número de operações por iteração do algoritmo. Este fator pode determinar a viabilidade de sua implementação em tempo real;
- Estabilidade numérica: A implementação do algoritmo adaptativo em um processador digital pode fazer com que o algoritmo se desvie da operação ideal, determinada em precisão infinita, produzindo acumulação de erros de quantização. É possível que os erros se acumulem sem limite. Se esta situação persistir sem controle, diz-se que o algoritmo é numericamente instável. Portanto,

considera-se que um algoritmo é numericamente estável se o erro permanece limitado ao longo do processamento.

Em decorrência da ampla gama de aplicações dos algoritmos LMS e NLMS (Algoritmo da Média Quadrática Mínima Normalizada) e de seu uso como padrão na comparação de desempenho com outros filtros adaptativos, apresenta-se a seguir uma discussão sobre ambos.

Os algoritmos adaptativos para filtros lineares supervisionados possibilitam o ajuste iterativo dos parâmetros do filtro em direção à solução ótima através da minimização de alguma função custo, sendo esta dependente da estrutura e do critério de desempenho utilizado.

O algoritmo LMS é largamente utilizado em aplicações de filtragem adaptativa devido à sua simplicidade computacional, convergência em ambientes estacionários e comportamento estável quando implementado com aritmética de precisão finita [6], [12]. No caso de sinais estacionários, a velocidade de convergência é dependente da distribuição dos autovalores na matriz de autocorrelação do sinal de entrada [11], [12].

Suponha que a saída $y(n)$ de um filtro adaptativo consista da seguinte combinação linear:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x_i(n) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n), \quad (1.2)$$

onde $\mathbf{x}(n) \triangleq [x_0(n) \ x_1(n) \ \cdots \ x_{N-1}(n)]^T$ e $\mathbf{w}(n) \triangleq [w_0(n) \ w_1(n) \ \cdots \ w_{N-1}(n)]^T$ são os vetores do sinal de entrada e de coeficientes do filtro adaptativo, respectivamente, e N é o número de coeficientes adaptativos.

Em diversas situações, cada elemento do vetor $\mathbf{x}(n)$ consiste de uma versão atrasada do mesmo sinal, de modo que $x_0(n) = x(n)$, $x_1(n) = x(n-1)$, \cdots , $x_{N-1}(n) = x(n-N+1)$. Note que neste caso o sinal $y(n)$ é resultado da aplicação de um sinal de entrada $x(n)$ a um filtro FIR (possivelmente variante no tempo).

No caso de combinador linear e filtro FIR, a *função objetivo* referente ao erro quadrático médio pode ser escrita como

$$\mathbb{E}[e^2(n)] = \mathbb{E}[d^2(n)] - 2\mathbb{E}[d(n)\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)] + \mathbb{E}[\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)], \quad (1.3)$$

onde $\mathbb{E}[\cdot]$ é o operador de média estatística.

Para um filtro com coeficientes fixos \mathbf{w} , o erro quadrático médio (MSE) em um ambiente estacionário é dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^2(n)] &= \mathbb{E}[d^2(n)] - 2\mathbf{w}^T\mathbb{E}[d(n)\mathbf{x}(n)] + \mathbf{w}^T\mathbb{E}[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\mathbf{w}, \\ &= \mathbb{E}[d^2(n)] - 2\mathbf{w}^T\mathbf{q} + \mathbf{w}^T\mathbf{R}\mathbf{w}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde $\mathbf{R} \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]$ é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada e $\mathbf{q} \triangleq \mathbb{E}[d(n)\mathbf{x}^T(n)]$ é o vetor de correlação cruzada entre o sinal desejado e o vetor de entrada.

A matriz de autocorrelação desempenha um papel importante na análise de filtros lineares e adaptativos, pois influencia tanto a velocidade de convergência quanto a estabilidade. Três propriedades podem ser definidas em um processo estocástico com estacionaridade assintótica no sentido amplo:

- *simetria*: para o caso de sinais reais, a matriz é idêntica à sua transposta;
- *estrutura Toeplitz*: todos elementos em qualquer diagonal paralela à diagonal principal possuem valores iguais;
- *ser positiva semi-definida*: a matriz de autocorrelação é positiva semi-definida, ou seja, $\mathbf{v}^T \mathbf{R} \mathbf{v} \geq 0$, para qualquer vetor \mathbf{v} . Na prática, tal matriz pode ser considerada positiva definida.

O uso do critério de erro quadrático médio como função custo para o projeto de um filtro linear seletivo requer o conhecimento *a priori* das estatísticas conjuntas de segunda ordem dos sinais estacionários no sentido amplo de excitação e desejado. Através da Eq. (1.4) verifica-se que $\mathbb{E}[e^2(n)]$ é uma função quadrática dos coeficientes do filtro [2]. Outras funções de custo podem ser utilizadas, como por exemplo o módulo médio do erro. As seguintes vantagens podem ser listadas para a utilização da superfície de desempenho segundo o MSE [13]:

- a função custo é um parabolóide com N graus de liberdade e apresenta apenas um único mínimo global, sem ocorrência de mínimos locais, já que corresponde a uma superfície quadrática convexa, devido ao fato de a matriz de autocorrelação ser positiva definida;
- o filtro resultante é ótimo se os sinais $x(n)$ e $d(n)$ apresentarem distribuição gaussiana e forem ergódicos e estacionários no sentido amplo (*Wide Sense Stationary Process* - WSS).

A solução para o conjunto ótimo de coeficientes segundo o critério do mínimo erro quadrático médio é denominada solução de Wiener-Hopf [2]. No ponto de mínimo dessa superfície, a função custo atinge seu menor valor $\mathbb{E}[e_{\min}^2]$.

Portanto, uma importante propriedade do filtro de Wiener pode ser deduzida ao se analisar o gradiente da superfície de erro na solução ótima (solução de Wiener-Hopf). Então, o vetor gradiente pode ser expresso por

$$\nabla_{\mathbf{w}}(\mathbb{E}[e^2(n)]) = \frac{\nabla \mathbb{E}[e^2(n)]}{\nabla \mathbf{w}} = \mathbb{E} \left[2e(n) \frac{\nabla e(n)}{\nabla \mathbf{w}} \right] = -\mathbb{E}[2e(n)\mathbf{x}(n)], \quad (1.5)$$

supondo intercambiáveis os operadores de derivação e de esperança estatística.

Apesar de ótima no sentido quadrático médio, o emprego da solução de Wiener-Hopf apresenta alguns inconvenientes:

- possui custo computacional elevado para um número grande de coeficientes, o que pode inviabilizar algumas aplicações em tempo real;
- pode resultar em problemas de estabilidade, devido à inversão da matriz de correlação;
- supõe a estacionariedade dos sinais envolvidos.

De modo a evitar os problemas mencionados, diferentes estratégias iterativas podem ser empregadas. Dentre os métodos iterativos de otimização existentes, o método do gradiente é bastante difundido por sua simplicidade, consistindo em um procedimento recursivo para encontrar o valor mínimo de uma função custo, tal como segue:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \beta \nabla_{\mathbf{w}}[e^2(n)]. \quad (1.6)$$

Observe que o estabelecimento do erro quadrático instantâneo $e^2(n)$ como função custo permite associar a equação de atualização acima a uma estimativa estocástica do vetor gradiente da função custo, dado por:

$$\nabla_{\mathbf{w}}(e^2(n)) = \frac{\nabla e^2(n)}{\nabla \mathbf{w}} = 2e(n) \frac{\nabla e(n)}{\nabla \mathbf{w}} = -2e(n)\mathbf{x}(n). \quad (1.7)$$

O resultado do algoritmo baseado no gradiente é conhecido como algoritmo *Least-Mean-Square*, cuja equação de atualização é

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \beta e(n)\mathbf{x}(n), \quad (1.8)$$

onde o passo de aprendizagem β deve estar abaixo de um limiar por vezes desconhecido, de sorte a não induzir divergência no processo de aprendizagem.

Outra forma de obtermos o algoritmo adaptativo LMS é solucionando um problema de otimização com restrições, através da minimização da norma euclidiana da variação dos parâmetros do filtro adaptativo, $\min \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2$, sujeito a [4]:

$$e_p(n) \triangleq d(n) - \mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n) = (1 - \beta\|\mathbf{x}(n)\|^2)e(n). \quad (1.9)$$

Utilizando multiplicadores de Lagrange, o problema com restrições (1.9) pode ser convertido na minimização da seguinte função custo:

$$J = \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2 + \lambda[e_p(n) - (1 - \beta\|\mathbf{x}(n)\|^2)e(n)]. \quad (1.10)$$

No propósito de minimizar a função custo supracitada, importa igualar seu gradiente com relação a $\mathbf{w}(n+1)$ ao vetor nulo:

$$\frac{\nabla J}{\nabla \mathbf{w}(n+1)} = 2\mathbf{w}(n+1) - 2\mathbf{w}(n) - \lambda \mathbf{x}(n) = \mathbf{0}, \quad (1.11)$$

obtendo-se

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\lambda}{2} \mathbf{x}(n). \quad (1.12)$$

Aplicando (1.12) em (1.9), resulta em:

$$\begin{aligned} d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) - \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{x}(n)\|^2 &= e(n) - \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{x}(n)\|^2, \\ \Rightarrow \frac{\lambda}{2} &= \beta e(n), \end{aligned} \quad (1.13)$$

e aplicando (1.13) em (1.12), encontramos a Eq. (1.8).

1.2 Algoritmo NLMS

A principal desvantagem do algoritmo LMS reside em sua grande sensibilidade ao espalhamento da matriz de autocorrelação do sinal de entrada $x(n)$. Isso torna difícil a escolha de uma taxa de aprendizado β que garanta a estabilidade do algoritmo [14]. Uma variante do algoritmo LMS é o NLMS, que resolve este problema através da normalização do vetor de entrada [14].

O algoritmo LMS normalizado pode ser visto como uma implementação especial do algoritmo LMS que contempla a variação de energia do sinal de entrada no filtro na determinação do tamanho do passo. O algoritmo NLMS pode ser obtido a partir de pontos de vista diferentes. [15] apresenta o algoritmo NLMS como resultante de um problema de otimização com restrições; ver também [2]. Aqui, começamos com uma derivação bastante simples da recursão NLMS e mais tarde mostramos que a recursão obtida satisfaz o critério de otimização de [15] e também que ela corresponde ao resultado de [16].

Considerando o erro *a priori* dado por

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n), \quad (1.14)$$

em que

$$d(n) = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}^0 + \nu(n), \quad (1.15)$$

onde \mathbf{w}^0 é um vetor que contém os coeficientes do filtro ótimo e $\nu(n)$ representa as imprecisões e os erros de medição. A função custo associada ao NLMS consiste em minimizar a norma quadrada da variação do vetor que contém os coeficientes

adaptativos

$$\|\delta\mathbf{w}(n+1)\|^2 = \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2, \quad (1.16)$$

sujeita a

$$d(n) = \mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n). \quad (1.17)$$

Desenvolvendo a Eq. (1.16), obtém-se:

$$\|\delta\mathbf{w}(n+1)\|^2 = \|\mathbf{w}(n+1)\|^2 - 2\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{w}(n) + \|\mathbf{w}^T(n)\|^2. \quad (1.18)$$

Utilizando os multiplicadores de Lagrange, forma-se a seguinte função custo:

$$J = \|\delta\mathbf{w}(n+1)\|^2 + \lambda(d(n) - \mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)). \quad (1.19)$$

Substituindo a Eq. (1.18) na Eq. (1.19), temos:

$$J = \|\mathbf{w}(n+1)\|^2 - 2\mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{w}(n) + \|\mathbf{w}^T(n)\|^2 + \lambda(d(n) - \mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n)). \quad (1.20)$$

Igualando ao vetor nulo o gradiente de J em relação a $\mathbf{w}(n+1)$, obtém-se

$$\frac{\nabla J}{\nabla \mathbf{w}(n+1)} = 2\mathbf{w}(n+1) - 2\mathbf{w}(n) - \lambda\mathbf{x}(n) = \mathbf{0}, \quad (1.21)$$

chegando-se a:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\lambda}{2}\mathbf{x}(n). \quad (1.22)$$

Substituindo a Eq. (1.22) na Eq. (1.17), temos:

$$\begin{aligned} d(n) - \left(\mathbf{w}(n) + \frac{\lambda}{2}\mathbf{x}(n)\right)^T \mathbf{x}(n) &= 0, \\ d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) - \frac{\lambda}{2}\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) &= 0, \\ \frac{\lambda}{2} &= \frac{d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Substituindo a Eq. (1.23) na Eq. (1.22), tem-se:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}\mathbf{x}(n), \quad (1.24)$$

resultando em:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{e(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}\mathbf{x}(n). \quad (1.25)$$

Acrescentando ao denominador do termo de correção da Eq. (1.25) uma pequena constante δ para evitar instabilidade quando a energia do sinal de entrada for baixa

e uma variável β para controlar o tamanho do passo de aprendizagem, encontramos:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \beta \frac{\mathbf{x}(n)}{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) + \delta} e(n), \quad (1.26)$$

que descreve a equação de atualização do algoritmo NLMS.

1.3 Estrutura da Tese

Esta tese tem como foco o emprego de técnicas de filtragem adaptativa em subbandas com reuso de dados aplicadas a sinais de voz. A especificação do tipo de sinal a processar permite a inserção de características ou modificações nas diferentes técnicas de modo a contemplar suas características peculiares. A seguir, resumimos o conteúdo dos capítulos seguintes. O Capítulo 2 apresenta conceitos que visam fundamentar o entendimento dos algoritmos que reutilizam os dados de entrada. Para esta finalidade, abordaremos o algoritmo de projeções afins (APA), que atualiza o vetor de coeficientes numa direção pertencente ao subespaço dos últimos vetores de entrada. O Capítulo 3 apresenta uma breve introdução aos sistemas multitaxas, na qual os conceitos de decimação, interpolação e banco de filtros são apresentados, juntamente com a discussão a respeito de suas principais características. Este conteúdo é contemplado para motivar a apresentação da nova estrutura em subbandas detalhada nos capítulos posteriores. O Capítulo 4 apresenta conceitos sobre fatores de aprendizagem e regularização adaptativos, visando fundamentar o entendimento dos algoritmos adaptativos propostos. No Capítulo 5 é proposto um novo algoritmo adaptativo para uma estrutura em subbandas na qual os subfiltros adaptativos são esparsos e responsáveis pela identificação de sistema desconhecido, bem como pela reconstrução do sinal de saída. Usando o princípio da conservação de energia, obtemos uma expressão para o MSE em regime permanente relacionada ao algoritmo proposto. O Capítulo 6 apresenta a estrutura proposta de algoritmo adaptativo em subbandas combinada com as vantagens do algoritmo de projeção afim, com base no princípio da perturbação mínima. Também são expostos os principais conceitos sobre a automatização do número de vetores de entrada no algoritmo de projeção da estrutura em subbandas. O Capítulo 7 estuda a variação do tamanho do passo em algoritmos adaptativos em subbandas e seu impacto na robustez perante ruído impulsivo, tendo em vista a promoção de melhorias na robustez dos algoritmos. O método usa o conceito de um escalonador de tamanho de passo que dimensiona instantaneamente para baixo o tamanho do passo quando a presença de um ruído de medição impulsivo é inferida. O Capítulo 8 fornece um tratamento do erro quadrático médio em regime permanente para algoritmos de projeção afim em subbandas, cuja formalização fundamenta-se em argumentos da conservação de energia. O Ca-

pítulo 9 apresenta as conclusões da tese.

A Fig. 1.5 resume as características principais de seus capítulos centrais.

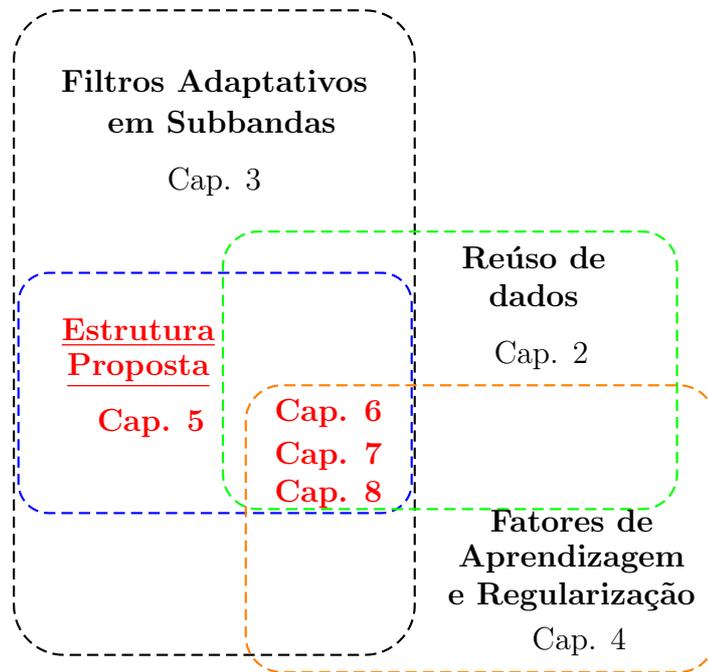


Figura 1.5: Principais características dos capítulos da tese (excluindo-se os capítulos de introdução e de conclusões). Os capítulos que contêm contribuições estão assinalados em vermelho.

Capítulo 2

Reúso de Dados

2.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados conceitos que visam motivar e descrever o emprego de reúso de dados nos algoritmos adaptativos. O algoritmo clássico de reúso de dados é o algoritmo de projeção afim (APA) proposto por Ozeki e Umeda em 1984 [17]. Esse algoritmo atualiza o vetor de coeficientes numa direção ortogonal aos K últimos vetores de entrada, sendo K conhecido como *fator de reúso*. Essa estratégia tende a descorrelacionar os efeitos dos vetores de entrada, acelerando a convergência [17] e tornando o algoritmo atrativo para aplicações com sinais de entrada altamente correlacionados. A melhoria no desempenho é obtida ao custo de uma maior complexidade computacional e de um aumento no erro quadrático médio em excesso, em comparação ao algoritmo LMS normalizado (NLMS). Com a redução progressiva das limitações à complexidade computacional na implementação de filtros adaptativos, devido aos avanços tecnológicos, o algoritmo AP e suas versões rápidas [18], [19], [20] são hoje bastante difundidos. A despeito dos diversos trabalhos publicados sobre o comportamento do algoritmo AP, seu completo entendimento ainda é um desafio. Isso ocorre em função do processo de estimação subdeterminado implicitamente incorporado em suas equações, o que dificulta significativamente sua análise [21].

2.2 Revisão Bibliográfica do APA

Apesar do algoritmo LMS ter sido bastante difundido principalmente devido ao seu baixo custo computacional e robustez, esse algoritmo apresenta uma convergência lenta para sinais de entrada fortemente coloridos. Além disso, variações na

potência de entrada podem ensejar significativas variações indesejadas no ajuste dos coeficientes. Para contornar esse problema, o algoritmo LMS normalizado (NLMS) empreende uma normalização da entrada através de um mecanismo de controle automático de ganho [22]. Segundo [22], a melhor atualização dos pesos ocorre quando os vetores entrada sucessivos são ortogonais. Quando tais vetores não são ortogonais, [22] propõe gerar direções ortogonais apropriadas, de modo a prover um deslocamento do filtro adaptativo no subespaço engendrado por estas direções. Este procedimento é semelhante ao método de Rosenbrock [2], o qual minimiza funções não lineares através da minimização sucessiva ao longo das direções ortogonais. Assim, a equação de atualização pode equivalentemente assumir a forma seguinte:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \beta_0 \mathbf{x}(n) + \beta_1 \mathbf{x}^1(n) + \dots + \beta_{K-1} \mathbf{x}^{K-1}(n), \quad (2.1)$$

onde os vetores $\mathbf{x}(n), \mathbf{x}^1(n), \mathbf{x}^2(n), \dots, \mathbf{x}^{K-1}(n)$ são ortogonais entre si e K é o número de vetores de entrada consecutivos.

Como previamente assinalado, a convergência pode ser comprometida pela correlação do sinal de entrada. Uma alternativa para contornar essa dificuldade reside no recurso ao algoritmo dos quadrados mínimos recursivos (RLS), que apresenta uma maior robustez à dispersão dos autovalores da matriz de correlação do sinal de entrada. Porém, tal alternativa apresenta um elevado custo computacional, assim como possibilidade de instabilidade numérica.

O algoritmo de projeção afim surgiu como uma solução atrativa para reduzir o efeito de correlação do sinal de entrada sobre o processo de adaptação. Dentre os algoritmos da família APA, dois se destacam pelo custo computacional reduzido: o algoritmo de projeção afim rápido [18] e o pseudo algoritmo de projeção afim (PAPA) [23].

Ozeki e Umeda [17] apresentaram uma demonstração geométrica que resultou em um algoritmo de projeções afins de segunda ordem e constataram que ele atualizava o vetor de coeficientes na direção ortogonal aos últimos vetores de entrada. Posteriormente, Markus Rupp [23] demonstrou que o mecanismo dos mínimos quadrados incorporado na atualização dos coeficientes desse algoritmo descorrelaciona o sinal de entrada, acelerando a convergência e garantindo que o concurso da reutilização de dados resulte em vantagens em aplicações com sinais fortemente coloridos. Bouitelle et al. [24], por sua vez, estendeu o algoritmo de Ozeki e Umeda para a aplicação de cancelamento de eco. Apesar de não haver evidências de alguma relação na derivação desses trabalhos, o algoritmo analisado por Rupp [23] e o apresentado por Bouitelle et al. [24] são equivalentes.

Em virtude da crescente utilização da família APA, diversos trabalhos vêm sendo publicados sobre o seu comportamento médio, em regime transitório e permanente,

estabilidade e custo computacional [23, 25, 26, 27]. Shin e Sayed [27] propuseram um modelo para o APA convencional nos regimes transitório e permanente, a partir de argumentos fundamentados numa relação de conservação de energia.

Baseado na análise determinística de Rupp [23], [25] propõe um modelo analítico para o erro quadrático médio do APA no caso de sinais autoregressivos (AR). Além disso, considerou-se o uso de passo unitário (escolha correspondente a uma taxa máxima de convergência), situação em que o APA e PAPA apresentariam o mesmo desempenho, segundo [24]. Esse modelo foi posteriormente incrementado por [26], resultando em equações recursivas para a descrição do comportamento médio e quadrático médio do APA, assumindo-se um número elevado de coeficientes. Essa modelagem resultou em um aumento na acurácia das predições em relação a [25].

2.3 Conceitos Básicos do APA

A formulação do APA é derivada a partir da solução de um sistema em geral subdeterminado de equações, conforme descrito em [17]. Dessa forma, deseja-se determinar o vetor de coeficientes $\mathbf{w}(n+1)$, ou seja, que resulta, em sua formulação mais simples, em:

$$\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n+1) = d(n). \quad (2.2)$$

Este é um sistema de uma única equação com N incógnitas, onde N é o número de elementos de $\mathbf{w}(n)$. No entanto, o sistema acima ainda não apresenta equações adicionais. Dada a sua natureza subdeterminada, tal sistema apresenta infinitas soluções. Dentro do contexto de infinitas soluções, cabe agregar restrições que imponham características desejáveis ao vetor de solução. Uma possibilidade é a escolha da solução com a menor norma euclidiana entre vetores de coeficientes consecutivos, seguindo o princípio da distorção mínima [28]. Outra possibilidade, assumindo-se a disponibilidade de K vetores de entrada passados, consiste em expandir a restrição do erro nulo gerado pelo vetor de coeficientes *a posteriori*, de sorte a contemplar um horizonte temporal maior:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n+1) = d(n), \\ \mathbf{x}^T(n-1)\mathbf{w}(n+1) = d(n-1), \\ \mathbf{x}^T(n-2)\mathbf{w}(n+1) = d(n-2), \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(n-K+1)\mathbf{w}(n+1) = d(n-K+1). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Assumindo-se que ambas as características são desejáveis, pode-se expandir a Eq. (2.2) como

$$\mathbf{e}_p(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(n) &= [\mathbf{x}(n) \quad \mathbf{x}(n-1) \quad \dots \quad \mathbf{x}(n-K+1)], \\ \mathbf{d}^T(n) &= [d(n) \quad d(n-1) \quad \dots \quad d(n-K+1)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{X}(n)$ é uma matriz formada por K vetores de entrada consecutivos e $\mathbf{d}(n)$ é um vetor de K amostras do sinal desejado na iteração n . Dessa forma, tem-se que $\mathbf{e}_p(n)$ é um vetor coluna com K elementos. Definindo-se um vetor de erro

$$\mathbf{e}(n) = [e(n) \quad e(n-1) \quad e(n-2) \quad \dots \quad e(n-K+1)]^T,$$

tem-se que o vetor de erro gerado pelo vetor de coeficientes *a priori* é dado por

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{w}(n). \quad (2.6)$$

Partindo da minimização da norma ℓ_2 da alteração do vetor de coeficientes

$$\delta\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n), \quad (2.7)$$

sujeita às K restrições

$$d(n-k) = \mathbf{w}^T(n-k)\mathbf{x}(n-k), k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (2.8)$$

podemos, via técnica dos multiplicadores de Lagrange, definir uma função custo sem restrições, dada por:

$$J(n) = \|\delta\mathbf{w}(n+1)\|^2 + \sum_{k=0}^{K-1} \lambda_k [d(n-k) - \mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}(n-k)]. \quad (2.9)$$

Aplicando as definições de $\mathbf{X}(n)$, $\mathbf{d}(n)$ e $\boldsymbol{\lambda}(n)$ em (2.9), temos

$$J(n) = \|\delta\mathbf{w}(n+1)\|^2 + \boldsymbol{\lambda}^T(n)[\mathbf{d}(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{w}(n+1)], \quad (2.10)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}^T(n) = [\lambda_0 \ \lambda_1 \ \dots \ \lambda_{K-1}]$.

A solução ótima é obtida fazendo

$$\nabla J(\mathbf{w}(n+1)) = \mathbf{0} \Rightarrow \delta\mathbf{w}(n+1) = -\frac{1}{2}\mathbf{X}(n)\boldsymbol{\lambda}(n).$$

Por meio das K restrições, encontramos:

$$\mathbf{d}(n) = \mathbf{X}^T\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{X}^T\mathbf{w}(n) + \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)\boldsymbol{\lambda}(n), \quad (2.11)$$

e

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{X}^T\mathbf{w}(n) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)\boldsymbol{\lambda}(n). \quad (2.12)$$

Substituindo (2.11) em (2.12), os coeficientes de Lagrange podem ser expressos por:

$$\boldsymbol{\lambda}(n) = 2[\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)]^{-1}\mathbf{e}(n). \quad (2.13)$$

Substituindo $\boldsymbol{\lambda}(n)$ na expressão de $\delta\mathbf{w}(n+1)$, onde

$$\delta\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{X}(n)\frac{\boldsymbol{\lambda}(n)}{2}, \quad (2.14)$$

obtemos:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{X}(n)[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}(n)]^{-1}\mathbf{e}(n). \quad (2.15)$$

De forma similar aos algoritmos LMS e NLMS, é desejável a inclusão de um passo de adaptação β , com a finalidade de controlar o compromisso entre taxa de convergência e MSE em regime permanente. Assim, a equação de atualização do algoritmo de projeções afins convencional é definida como

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \beta\mathbf{X}(n)[\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)]^{-1}\mathbf{e}(n). \quad (2.16)$$

A complexidade do APA é $K(K^3 + K^2 + (KN)^2 + N)$. Implementações rápidas e de menor custo computacional foram propostas [18], [19]. Devido à reutilização de regressores e do sinal desejado, os algoritmos da família de projeções afins são também denominados *algoritmos de reuso de dados* [27].

A seguir apresentamos o algoritmo APA com fator de regularização δ , cuja finalidade é evitar a singularidade na inversão de matrizes.

Algoritmo de Projeções Afins

Etapa 1. Inicialização:

$$\mathbf{w}(0) = [0 \dots 0]^T$$

escolha β satisfazendo $0 < \beta < 2$.

Etapa 2. Recursão:

Para $n \geq 0$ faça

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{w}(n)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \beta\mathbf{X}(n)[\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n) + \delta\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{e}(n)$$

2.4 Interpretação Geométrica do APA

Nesta seção é apresentada a interpretação geométrica do APA, com base em [4]. Com o objetivo de tornar a explanação mais clara, discute-se primeiro o algoritmo NLMS, que é um caso particular do algoritmo APA que recorre a apenas um vetor de dados de entrada a cada iteração, conforme mostra a Eq. (2.16).

A Fig. 2.1 apresenta uma interpretação geométrica do procedimento de atualização do vetor de coeficientes $\mathbf{w}(n)$ no algoritmo NLMS, mostrando seu traçado até atingir o valor ótimo \mathbf{w}^0 , valor que só se atinge na ausência de ruído. O hiperplano

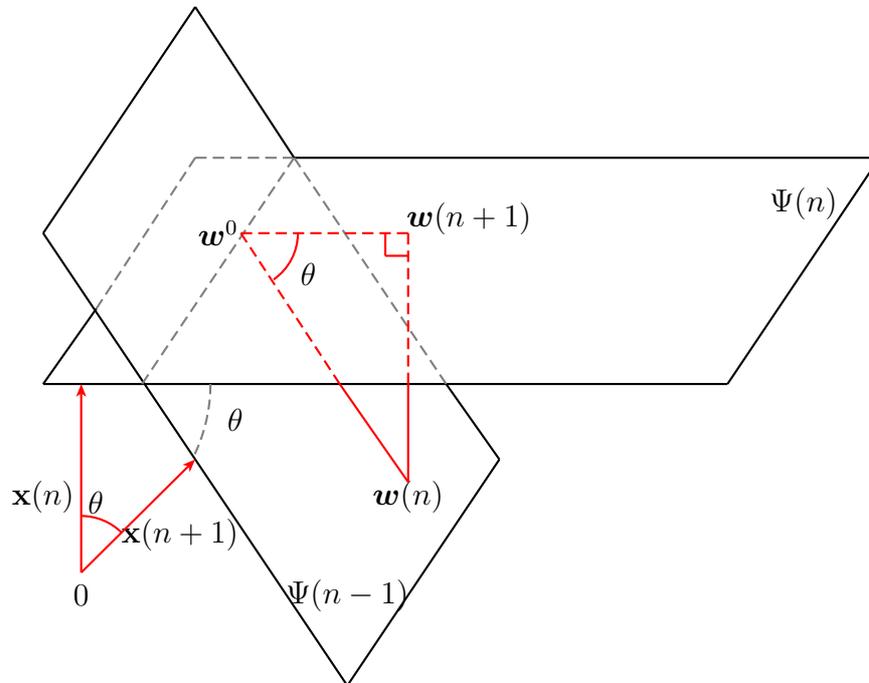


Figura 2.1: Interpretação geométrica do algoritmo NLMS

definido por $\Psi(n)$ representa o lugar geométrico (hiperplano) de todos os vetores que produzem a saída $y(n)$ igual a $d(n)$ na topologia de estimação linear para o vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$, os quais formam um hiperplano no espaço euclidiano N -dimensional.

Note que, o vetor ótimo \mathbf{w}^0 , por não apresentar ruído, pertence necessariamente ao hiperplano $\Psi(n)$.

Em outras palavras, definindo o hiperplano onde o erro *a posteriori* é nulo, a atualização $\mathbf{w}(n+1)$ será uma projeção de $\mathbf{w}(n)$ em $\Psi(n)$, pois é a atualização de menor norma (mínima perturbação), desde que consideremos $\beta = 1$. Isso também nos diz que $\mathbf{x}(n) \perp \Psi(n)$, pois a direção de atualização é dada por $\mathbf{x}(n)$:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{\beta}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} e(n) \mathbf{x}(n). \quad (2.17)$$

A Fig. 2.1 resume a interpretação geométrica da atualização do NLMS no \mathbb{R}^3 , inspirada na abordagem de [29]. Através da Eq. (2.17) pode-se notar que o β influencia a análise geométrica da Fig. 2.1. Neste caso, o processo de atualização pode ser descrito da seguinte modo:

- $\beta = 0 \rightarrow \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n)$;
- $0 < \beta < 1 \rightarrow \mathbf{w}(n+1) \notin \Psi(n)$;
- $\beta = 1 \rightarrow \mathbf{w}(n+1) \in \Psi(n)$;
- $1 < \beta < 2 \rightarrow \mathbf{w}(n+1) \notin \Psi(n)$, ultrapassando o hiperplano $\Psi(n)$;
- $\beta \geq 2 \rightarrow \|\mathbf{w}^0 - \mathbf{w}(n+1)\|^2 \geq \|\mathbf{w}^0 + \mathbf{w}(n)\|^2$, isto é, tende a se distanciar de \mathbf{w}^0 (o algoritmo não converge).

Portanto, para que o NLMS convirja, é importante escolher $\beta \in (0, 2)$. Na prática, escolhe-se $\beta \in (0, 1]$, pois os resultados obtidos para $\beta \in (1, 2)$ podem também ser obtidos no intervalo $\beta \in (0, 1)$ (vide Fig. 2.1) e, ademais, escolher $\beta \in (1, 2)$ gera um desnecessária amplificação do ruído.

A equação de atualização de $\mathbf{w}(n)$ é dada por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \Delta\mathbf{w}(n), \quad (2.18)$$

em que $\Delta\mathbf{w}(n)$ é função da entrada $\mathbf{x}(n)$ e das saídas $d(n)$ e $y(n)$. Assim,

$$\Delta\mathbf{w}(n) = f(x(n), \dots, x(n-M+1)). \quad (2.19)$$

No NLMS, como o ajuste de $\mathbf{w}(n)$ é feito de forma a minimizar a norma de $\delta\mathbf{w}(n)$, $\delta\mathbf{w}(n)$ deve ser ortogonal ao subespaço $\Psi(n)$. O subespaço $\Psi(n-1)$ está defasado do subespaço $\Psi(n)$ por θ , como mostra a Fig. 2.1. Isto permite observar que, dado o vetor $\mathbf{w}(n)$, a velocidade de convergência estará diminuindo quando o ângulo θ aproximar-se de 0 ou π radianos, contrariamente ao caso em que θ aproxima-se de

$\pi/2$ ou $3\pi/2$ radianos. Através da Fig. 2.1, verifica-se ainda que

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) \cos \theta. \quad (2.20)$$

Portanto, uma redução do ângulo θ provoca um distanciamento de $\mathbf{w}(n+1)$ em relação a \mathbf{w}^0 no plano $\Psi(n)$.

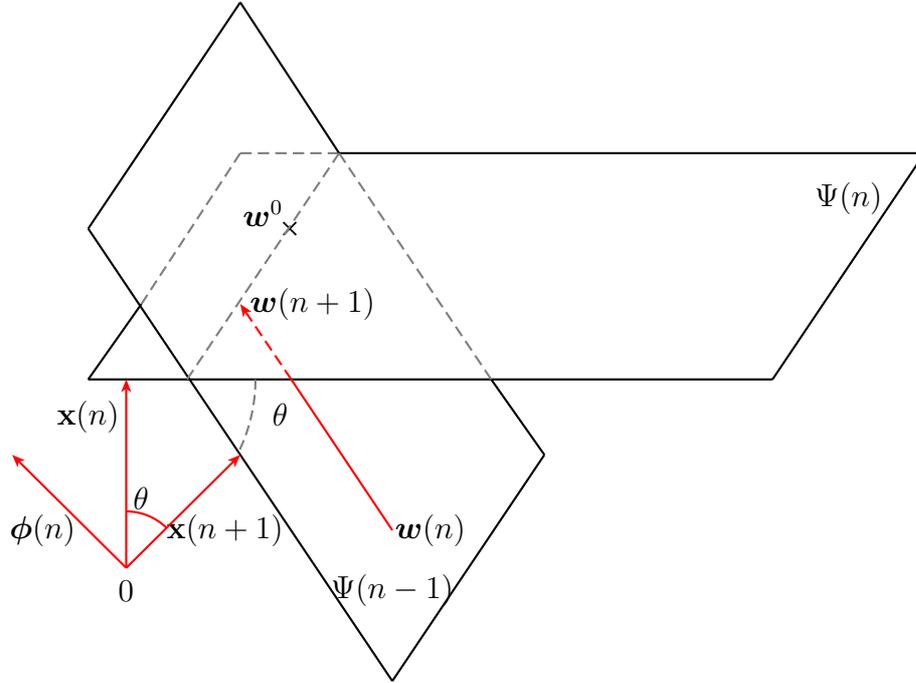


Figura 2.2: Interpretação geométrica do APA

O parâmetro $\phi(n)$ na Fig. 2.2 denota a *direção de atualização*.

Esse fenômeno é resultado da direção de ajuste do vetor de coeficientes ser função da direção imposta pelo vetor de entrada $\mathbf{x}(n)$. Para melhorar a situação, a direção de modificação do vetor de coeficientes precisa ser reconsiderada.

No APA, \mathbf{w}^0 pertencerá a todos os hiperplanos $\Psi(n-k)$ associados aos seus vetores de entrada respectivos $\mathbf{x}(n-k)$. Assim, \mathbf{w}^0 pertence à interseção de todos os hiperplanos $\Psi(n-k), \forall k$. Formalmente, o hiperplano $\Psi(n)$ é definido por

$$\Psi(n-k) = \{\mathbf{w}; \mathbf{w} \in \mathbb{R}^N \mid \mathbf{x}^T(n-k)\mathbf{w} = d(n-k), k = 0, 1, 2, \dots, K-1\}. \quad (2.21)$$

Outro ponto importante é a relação entre o ângulo θ e o ângulo entre $\mathbf{x}(n-1)$ e $\mathbf{x}(n)$. Pela definição do hiperplano $\Psi(n)$ na Eq. (2.21), $\Psi(n-1)$ é caracterizado pela expressão $\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) = d(n-1)$ e $\Psi(n)$ pela expressão $\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n+1) = d(n)$. Assim, $\Psi(n-1)$ é o subespaço que contém todos os vetores em \mathbb{R}^N que apresentam um produto escalar com relação a $\mathbf{x}(n-1)$ igual a $d(n-1)$. Assim, $\mathbf{x}(n-1)$ é perpendicular a $\Psi(n-1)$ e da mesma forma, $\mathbf{x}(n)$ é perpendicular a $\Psi(n)$. Então o ângulo entre $\Psi(n)$ e $\Psi(n-1)$ é o mesmo ângulo entre $\mathbf{x}(n)$ e $\mathbf{x}(n-1)$.

A partir da Fig. 2.1 fica evidente que para manter a velocidade de convergência independente do ângulo entre $\mathbf{x}(n)$ e $\mathbf{x}(n-1)$, a linha que vai de $\mathbf{w}(n)$ a $\mathbf{w}(n+1)$ deve ser traçada diretamente de $\mathbf{w}(n)$ para $\Psi(n) \cap \Psi(n-1)$ (conforme a ilustração da Fig. 2.2), e não perpendicularmente a $\Psi(n)$, como na Fig. 2.1.

Em outras palavras, analisando a Fig. 2.1, nota-se que a velocidade de convergência poderia aumentar caso a atualização fosse uma projeção em $\Psi(n) \cap \Psi(n-1)$. Na Fig. 2.2, temos um exemplo de atualização no espaço dos coeficientes $\mathbf{w}(n-1) \in \mathbb{R}^3$ realizada pelo algoritmo APA com reuso de dados $K > 1$ e com $\beta = 1$. Generalizando essa idéia, podemos adotar

$$\Delta \mathbf{w}(n) = -\mathbf{X}(n)[\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)]^{-1}\mathbf{e}(n), \quad (2.22)$$

onde a matriz $\mathbf{X}(n)$ é a matriz de entrada que contém o vetor atual de entrada $\mathbf{x}(n)$ e K vetores de entrada passados. Portanto, a equação de atualização do APA baseada na Fig. 2.2 é

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) - \beta \delta \mathbf{w}(n) \\ &= \mathbf{w}(n) + \beta \mathbf{X}(n)[\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)]^{-1}\mathbf{e}(n). \end{aligned} \quad (2.23)$$

A Eq. (2.23) pode ser representada somando-se à sua diagonal principal um fator de regularização (δ), conforme segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(n+1) &= \mathbf{w}(n) - \beta \delta \mathbf{w}(n) \\ &= \mathbf{w}(n) + \mathbf{X}(n)[\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n) + \delta \mathbf{I}]^{-1}\mathbf{e}(n). \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.5 Considerações Finais

Arbitrando-se K (vide Eq. (2.9)), k vai de 0 a $K-1$. Se $K=1$, o APA se degenera no algoritmo NLMS. Analogamente, o APA com $K=2$ recai num caso particular conhecido como BNLMS [3]. Sabe-se que velocidade de convergência desse algoritmo aumenta com K , em conjunção com um incremento do desajuste [3], [30]. Obviamente, para o APA, devido à necessidade de inverter uma matriz, esse número de multiplicações cresce com K (proporcionalmente a K^3). Em [18], é apresentada uma implementação rápida para o APA, denominada de FAP (Projeção Afim Rápida), baseada numa técnica conhecida como janela deslizante (*sliding window*) utilizada em [31] para o RLS.

Existem trabalhos (por exemplo, [32]) que propõem um fator de aprendizagem β variável para o APA de forma que o algoritmo apresente uma alta velocidade de

convergência ($\beta \rightarrow 1$) no início da operação, porém um desajuste pequeno após a convergência ($\beta \rightarrow 0$).

Um outro fator relevante em pesquisas consiste no fator de regularização. Existem trabalhos que buscam encontrar um fator de regularização δ que possibilite uma boa relação entre velocidade de convergência e desajuste, pois para aumentar a velocidade de convergência é exigido um δ pequeno e para diminuir o desajuste após a convergência é exigido um δ maior (vide [33]). Este tópico será abordado mais detalhadamente no Capítulo 4.

Capítulo 3

Processamento em Subbandas

3.1 Introdução

Há muitas aplicações nas quais filtros adaptativos em subbandas são exigidos, como em cancelamento de eco acústico, onde o sistema desconhecido apresenta uma resposta impulsiva longa, comumente na ordem de milhares de amostras [34], [35], [36], [37], [38]. Em tais aplicações, a implementação de um algoritmo de filtragem adaptativa implica num elevado número de operações. Além disso, o aumento da ordem dos filtros adaptativos concorre, em geral, para uma redução da taxa de convergência [39]. Adicionalmente, no contexto de filtragem adaptativa com sinais de entrada coloridos, vimos que vetores de entrada consecutivos podem implicar modestas melhorias ao longo de iterações sucessivas [30]. Para contemplar tais desafios, o concurso de técnicas de filtragem adaptativa em subbandas pode incrementar a taxa de convergência, dentre outros benefícios adicionais, como redução da complexidade computacional e menor erro quadrático médio em regime permanente [40]. Com o aumento do comprimento das respostas impulsivas dos filtros, geralmente torna-se mais vantajosa a utilização de estruturas em subbandas [3]. Técnicas em subbandas no estado da arte podem ser encontradas em [1], [41], [42], [43], [35], [44], [45]. Em filtragem adaptativa em subbandas, o sinal de entrada (e por vezes o sinal desejado) é dividido em subbandas por meio de um banco de filtros de análise. Assumindo que a decomposição do sinal em subcanais seja eficiente, pode-se decimar (subamostrar) estes sinais em subbandas e aplicar alguma modalidade de filtragem adaptativa aos sinais resultantes. Se um algoritmo do tipo gradiente é usado para atualizar os filtros adaptativos, pode-se ajustar o tamanho do passo do algoritmo de adaptação individualmente para cada subbanda, o que costuma levar a um incremento na velocidade de convergência, caso efetuemos uma comparação com algoritmos adaptativos em banda completa. A decimação permite a redução na complexidade computacional, principalmente se a subamostragem crítica (decima-

ção por um fator equivalente ao número de subbandas) é empregada. Nesse caso, o efeito do *aliasing* pode prejudicar o processo de reconstrução. Isso será discutido durante este capítulo. Além disso, por meio da filtragem adaptativa em subbandas, pode-se obter a redução da complexidade computacional, bem como aumentar a velocidade de convergência do algoritmo [1], [34], [35], [36], [37], [38], [46], [45]. Este capítulo se inicia com uma breve introdução aos sistemas multitaxas, na qual os conceitos de decimação, interpolação e banco de filtros são apresentados. Então, um algoritmo de filtragem adaptativa no estado da arte será apresentado. Este conteúdo motivará a nova estrutura em subbandas detalhada no próximo capítulo.

3.2 Sistemas Multitaxas

Nesta seção são apresentados os fundamentos dos sistemas multitaxas, essenciais na implementação dos filtros adaptativos em subbandas.

3.2.1 Decimação e Interpolação

A decimação (também conhecida como compressão ou subamostragem) de um sinal digital $x(n)$ por um fator L implica uma redução da quantidade de amostras pelo mesmo fator L . A Fig. 3.1 mostra o símbolo de um compressor de amostragem, também chamado de decimador. Supondo um sinal $x(n)$ presente na entrada, pode-se definir a saída $x_D(n)$, como sendo:

$$x_D(n) = x(nL), \forall n, \quad (3.1)$$

onde L é um número inteiro.

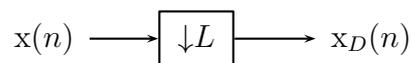


Figura 3.1: Decimador por um fator L .

No domínio da frequência, se o espectro de $x(n)$ é $X(e^{j\omega})$, o espectro do sinal subamostrado $X_D(e^{j\omega})$ é dado por [47]

$$X_D(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} X(e^{j\frac{\omega-2\pi n}{L}}). \quad (3.2)$$

A equação acima indica que o espectro de $x_D(n)$ é composto de cópias do espectro de $x(n)$ expandido por L e repetido em um período de 2π . As Figs. 3.2 e 3.3

descrevem o efeito da subamostragem sobre o espectro de $x(n)$ para $L = 2$. Isto implica que, a fim de evitar o *aliasing* após a subamostragem, a largura de banda ω_P do sinal $x(n)$ deve ser limitada ao intervalo $[-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]$. De fato, a operação de subamostragem é geralmente precedida por um filtro passa-baixas, cuja resposta em frequência aproxima-se de:

$$H_D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega + 2\pi k \in [-\frac{\pi}{L} + 2\pi k, \frac{\pi}{L} + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.3)$$

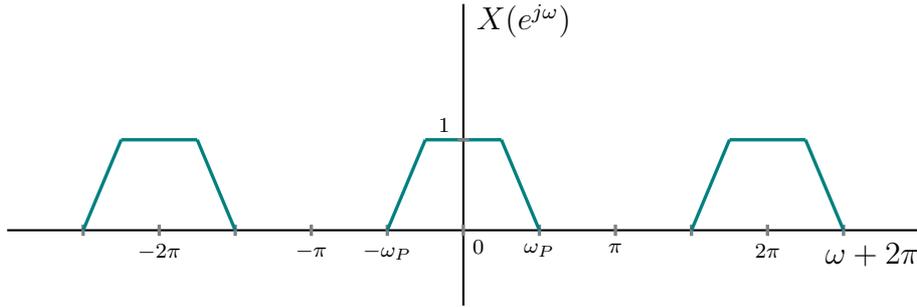


Figura 3.2: Espectro original do sinal $x(n)$.

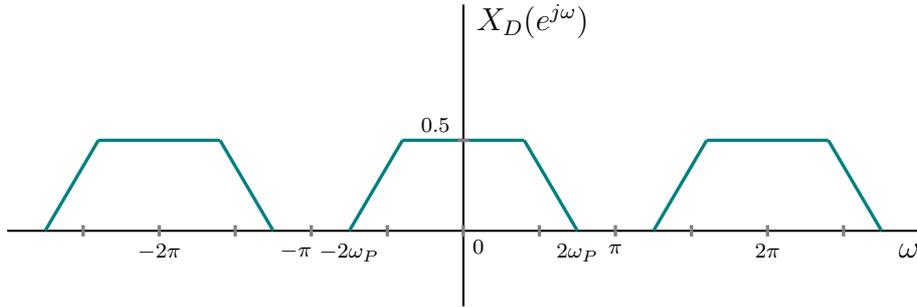


Figura 3.3: Espectro do sinal da Fig. 3.2 subamostrado com $L = 2$.

A Fig. 3.4 mostra o símbolo de um expensor de taxa de amostragem, também chamado de interpolador. A interpolação (ou sobre-amostragem) de um sinal $x(n)$



Figura 3.4: Interpolador pelo fator L .

por um fator L acarreta a inclusão de $L - 1$ zeros entre amostras consecutivas do sinal original.

O sinal interpolado pode, portanto, ser expresso como:

$$\mathbf{x}_I(n) = \begin{cases} x(\frac{n}{L}), & \text{se } n = mL, m \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

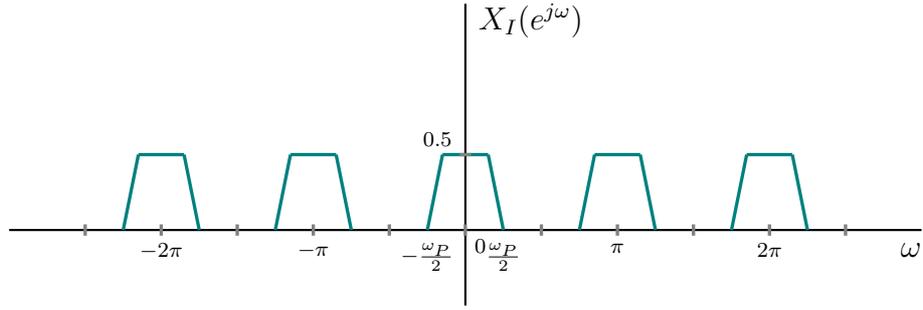


Figura 3.5: Espectro do sinal da Fig. 3.2 sobre-amostrado, em $L = 2$.

Se o espectro de $x(n)$ é $X(e^{j\omega})$, é fácil mostrar que o espectro do sinal sobre-amostrado $x_I(n)$ é $X(e^{j\omega L})$. Como o espectro de $x(n)$ é periódico com período 2π , o espectro do sinal interpolado terá período $\frac{2\pi}{L}$. A Fig. 3.5 ilustra como o espectro do sinal da Fig. 3.2 é modificado após a operação de sobre-amostragem com $L = 2$. Se quisermos obter uma versão interpolada suave de $x(n)$, o espectro do sinal interpolado deve ter o mesmo formato do espectro de $x(n)$. Isto pode ser obtido filtrando-se as repetições do espectro, entre $-\pi$ e π , fora do intervalo $[-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L}]$. Então, a operação de sobre-amostragem é geralmente sucedida por um filtro passa-baixa cuja resposta em frequência se aproxima de:

$$H_I(e^{j\omega}) = \begin{cases} L, & \text{se } \omega + 2\pi k \in [-\frac{\pi}{L} + 2\pi k, \frac{\pi}{L} + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.5)$$

O bloco decimador e o bloco interpolador são fundamentais para representar (ou implementar) conversores serial-paralelo e paralelo-serial, respectivamente. Isto é, dado um sinal $x(n)$, cujas amostras encontram-se dispostas serialmente, pode-se transformar esta sequência em blocos de comprimento M pelo uso de operadores de atraso e decimação, cuja representação é descrita pela Fig. 3.6.

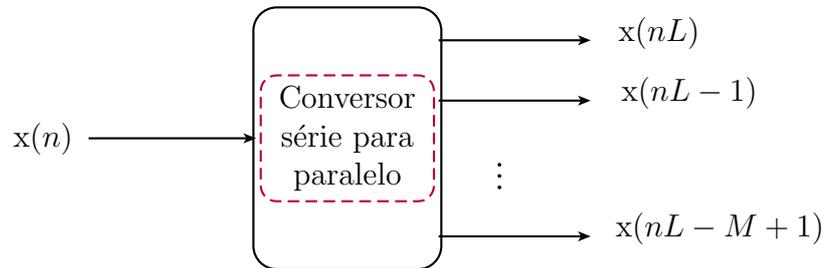


Figura 3.6: Conversor Série-Paralelo.

O bloco de sinal na saída conserva M amostras consecutivas do sinal de entrada como se segue:

$$\mathbf{x}(n) = [x(nL) \ x(nL - 1) \ \dots \ x(nL - M + 1)]^T, \quad (3.6)$$

onde M denota o número do bloco e não o índice dos elementos recentes $x(n)$. A implementação do conversor série para paralelo em termos de decimadores e atrasos é ilustrado na Fig. 3.7. Se por um lado o processamento em subbandas apresenta

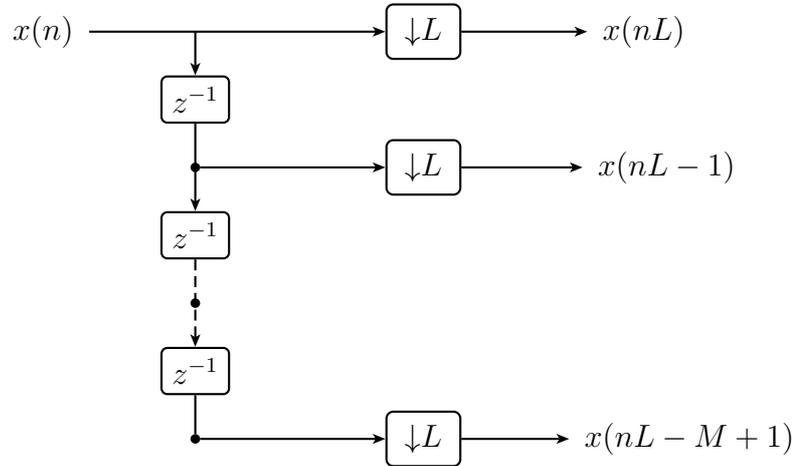


Figura 3.7: Implementação do Conversor Série-Paralelo

uma característica bastante desejável, a redução da taxa de amostragem (que possibilita a utilização de processadores de menor velocidade e, conseqüentemente, menor complexidade), por outro, esta mesma característica pode acarretar um tipo de erro bastante significativo: o *aliasing* (ou recobrimento de espectro) [43]. O espectro de frequência dos sinais discretos apresenta uma característica de periodicidade [48, 49, 50], verificável a cada 2π radianos. Considerando o teorema da amostragem, sabe-se que a taxa mínima de amostragem de um sinal, para que este seja completamente caracterizado, é de duas vezes sua largura de faixa. Portanto, com a redução da taxa de amostragem, as réplicas da banda passante (que aparecem a cada 2π radianos) tendem a se aproximar, podendo haver a sobreposição (*aliasing*) de uma sobre a outra, o que engendra degradações na informação.

3.3 Banco de Filtros

Um banco de filtros de análise é um arranjo de filtros que decompõem o sinal em componentes diversas, cada uma das quais contendo apenas uma subbanda de frequência do sinal original. É desejável que o projeto do banco de filtros seja tal que permita uma recombinação das subbandas capaz de recuperar o sinal original. Enquanto o primeiro processo (separação das subbandas) é associado à análise, o segundo é associado à síntese.

O banco de filtros isola as diferentes componentes de frequência de um sinal. Não raro isto é adequado, já que em muitas aplicações as informações em determinadas

frequências são mais relevantes do que as demais. Nesse caso, as faixas de frequências mais importantes podem ser codificadas com uma resolução maior [46, 51]. Por outro lado, as faixas de frequências menos importantes não precisam de reconstrução exata e uma codificação mais grosseira poderia ser usada, ainda que se percam detalhes na codificação. A seguir comentaremos algumas aplicações de codificação que empregam processamento multitaxas em sua estrutura:

- **Compressão de Dados:** Músicas na internet são disponibilizadas no formato de compressão de áudio MP3. O MP3 foi desenvolvido pela *Moving Picture Experts Group* (MPEG) como padrão MPEG-1, mais tarde estendido para o padrão MPEG-2. Nessa codificação pode-se chegar a uma taxa de compressão de até 99,9% em testes já realizados entre áudio comprimido e não comprimido [52]. Algoritmos de compressão de áudio geram sinais de áudio com alta fidelidade e taxa de bits reduzida, para aplicações em armazenamento, transmissão em tempo real pela internet e radiodifusão. A compressão de dados é classificada em duas categorias principais: sem perdas (*lossless*) e com perdas (*lossy*). A compressão sem perdas produz a cópia exata do arquivo original depois de realizada a descompressão, enquanto na com perdas o resultado pode ser praticamente indistinguível do original [53]. Comprimir imagens e áudio através do formato sem perdas não é tão eficiente, uma vez que a informação nesse tipo de dados é redundante em termos perceptuais, o que justifica o emprego da compressão com perdas. Na aplicação de imagens, tem-se como exemplo o formato JPEG e, em áudio, a codificação MP3, *Windows Media Audio* (WMA) e Codificação de Áudio Avançada (AAC). O formato MP3 é baseado, principalmente, na psicoacústica, a qual considera o comportamento da percepção do ouvido humano [53]. Os algoritmos MPEG-1/2 envolvem três camadas distintas para a compressão. A camada 1 forma o algoritmo de compressão mais básico (codificação de subbandas simples), enquanto a camada 2 (banco de filtros com baixo atraso) e 3 (banco de filtros híbrido) são melhorias que usam alguns elementos da camada 1. Cada camada sucessiva melhora o desempenho de compressão, mas ao custo de uma complexidade maior do codificador e decodificador [54]. Essencialmente, a camada 3 do algoritmo MPEG-1/2, conhecido como padrão MP3, tornou-se a tecnologia chave para realizar a decodificação de áudio para várias plataformas: distribuição de música pela Internet, *players* de MP3 portáteis e sistemas multimídia [54]. A arquitetura do codificador MP3 opera com frames que consistem de 1152 amostras de áudio. Cada frame é dividido em 2 subframes de 576 amostras, chamados grãos (*granules*) [52], [53].
- **O Banco de Filtros Híbrido e a MDCT:** O banco de filtros inclui seg-

mentação adaptativa (bloco longo ou curto) e consiste de filtros de subbanda seguidos pela transformada de cosseno discreto modificada (MDCT). O banco de filtros e a MDCT realizam a análise tempo-frequência com resolução adaptativa (baseada na análise psicoacústica humana), consistindo de filtros de 32 canais com largura de banda fixa, seguidos pela MDCT [52], [53]. Os dados são segmentados e processados com blocos de sobreposição de 50%. Na camada 3, existem dois tamanhos possíveis de blocos para a MDCT chamados de bloco curto (12 amostras) e de bloco longo (36 amostras) [52], [54]. A MDCT é uma transformada com sobreposição que possui como saídas metade dos valores referentes ao número de entradas. Ela é baseada na Transformada Discreta de Cossenos tipo IV (Transformação Discreta de Cosseno - DCT), com 50% de sobreposição entre as janelas adjacentes de tempo. Dessa forma, a transformada MDCT se estende através de dois blocos no tempo, eliminando os artefatos entre blocos. Apesar da sobreposição de 50%, a MDCT é amostrada criticamente e somente n amostras são geradas a cada $2n$ amostras do bloco de entrada. Portanto, são produzidos 18 componentes de frequência a cada 36 amostras no domínio do tempo, obtendo assim no formato MP3 um *frame* com 576 coeficientes de frequência [55], [52], [53]. Os módulos MDCT empregam blocos curtos (para uma melhor resolução de tempo) para transientes rápidos e blocos longos (para uma melhor resolução de frequência) para sinais com variação lenta. Para evitar transições rápidas, janelas intermediárias, longa para curta e curta para longa, são fornecidas pelo padrão [52]. Em resumo, para obter os coeficientes MDCT do arquivo WAV a ser analisado os seguintes passos são realizados:

1. Divisão em *frames* de 1152 amostras com 50% de sobreposição;
 2. Para cada *frames*, as amostras de áudio são separadas em 32 subbandas pelo banco de filtros de análise. Então, a janela MDCT divide cada uma das 32 subbandas em 18 subbandas (janela longa) ou 6 subbandas (janela curta). Portanto, 18 coeficientes podem ser obtidos. É importante destacar que 3 janelas curtas serão combinadas;
 3. Finalmente, um total de 576 ($32 \times 18 = 576$) coeficientes MDCT para cada *frames* podem ser obtido. As operações abordadas anteriormente são exatamente as mesmas no processamento da compressão MP3 antes da quantização dos coeficientes e da codificação [56]. Na Fig. 3.8 é possível observar exatamente esse ponto de extração dos coeficientes MDCT.
- **Mel-Frequency Cepstral Coefficient (MFCC):** O coeficiente cepstral na escala de frequência Mel (*Mel Frequency Cepstral Coefficient* - MFCC) é uma

DCT de espectro modificado, na qual a frequência e amplitude são escaladas de forma logarítmica. A distorção de frequência é realizada de acordo com as bandas críticas da audição humana [57].

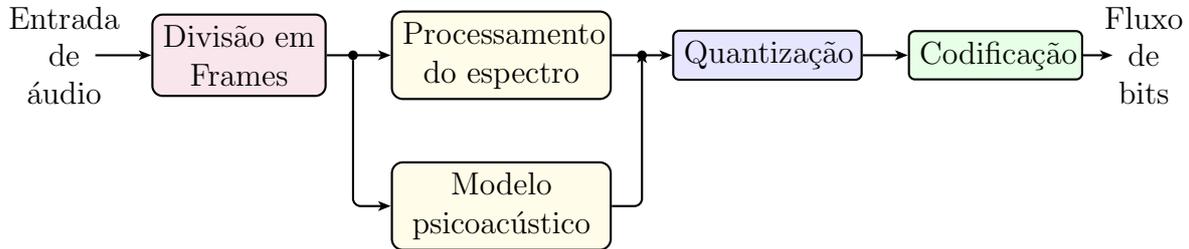


Figura 3.8: Diagrama do esquema de compressão do formato MP3.

Uma estrutura de filtragem em subbandas é geralmente caracterizada por três blocos: o bloco de análise (filtro decimador), o bloco de subfiltros e o bloco de síntese (filtro interpolador) [5], sendo uma opção frequentemente considerada para contornar o problema de velocidade de convergência de algoritmos adaptativos tradicionais. O bloco de análise é formado por dois sub-blocos: o banco de filtros de análise (que decompõe o sinal de entrada em M subbandas), composto por M filtros, cada um dos quais denotado por $H_i(z)$ (vide Fig. 3.9), e o decimador (operador que subamostra o sinal por um fator L). O bloco de subfiltros é encarregado de modificar o conteúdo harmônico do sinal de cada subbanda e, geralmente, é a parte adaptativa do sistema. Cada subfiltro é representado por $G_i(z)$. O bloco de síntese é também formado por dois sub-blocos: o interpolador (que eleva a taxa de amostragem por um fator L) e, finalmente, o banco de filtros de síntese $F_i(z)$, cujas funções são: filtrar as réplicas indesejáveis do espectro de frequência criadas no processo de decimação e interpolação e reagrupar as subbandas para formar um sinal único de saída.

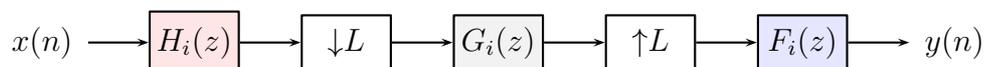


Figura 3.9: Banco de Filtros (i -ésima subbanda).

Se o fator de decimação e o fator de interpolação forem iguais ao número de subbandas, temos uma estrutura criticamente amostrada (*critically sampled*). Esse esquema tende a apresentar um efeito indesejável de recobrimento de espectro (*aliasing*). Assim, é preciso incluir filtros, conhecidos como filtros transversais que, embora tenham como entrada o sinal de uma subbanda, contribuem para a saída em outra subbanda [35, 46, 58]. Um importante resultado, mencionado em [35], estabelece que o esquema criticamente amostrado, considerando filtros cruzados, quando

aplicado a um problema de identificação de sistemas apresenta um comportamento de convergência pior do que o de um filtro em banda completa.

Devido à impossibilidade de sistemas em subbandas criticamente amostrados sem filtros transversais modelarem de forma adequada funções de transferência na presença de *aliasing*, [46, 51] consideram a sobre-amostragem (*oversampling*) dos sinais de subbandas como um meio de eliminar os efeitos de *aliasing*. Essa alternativa consiste em utilizar fatores de decimação e de interpolação inferiores ao número de subbandas. Esse tipo de banco de filtros tem como característica uma menor sobreposição das respostas em frequência dos filtros de análise, permitindo transições mais suaves da faixa de passagem para a faixa de rejeição [59]. Como desvantagem, a sobre-amostragem apresenta complexidade computacional maior do que necessária, porque após a decimação o número de amostras retidas nas subbandas é maior do que o número de entradas do banco de filtros [13].

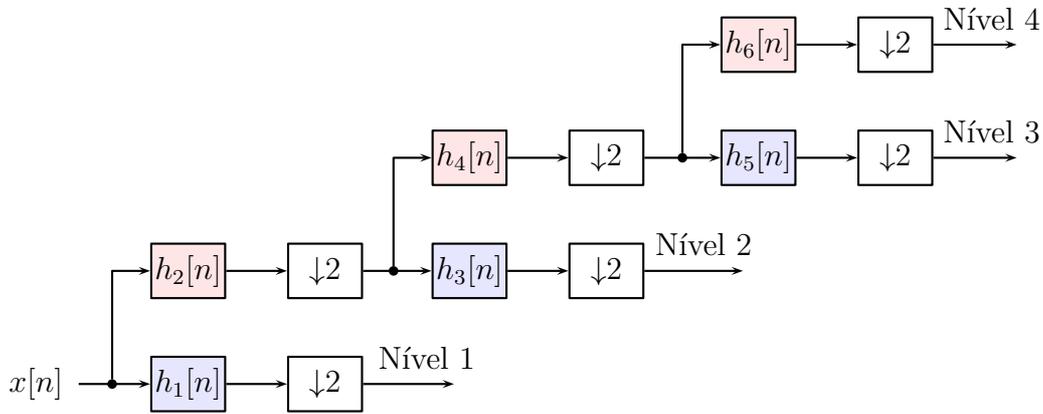


Figura 3.10: Exemplo de decomposição em subbandas

3.3.1 Banco de Filtros Digitais Maximamente Decimado

O banco de filtros digitais $H_0(z) \dots H_{M-1}(z)$ mostrado na Fig. 3.11 divide o sinal $x(n)$ em M sinais $x_i(n)$, comumente chamados de sinais em subbandas. Esse conjunto de filtros é denominado “banco de análise”, e o conjunto de filtros $F_0(z), F_1(z) \dots F_{M-1}(z)$ é denominado “banco de síntese”. Estes últimos combinam os sinais das M subbandas em um único sinal $\hat{x}(n)$ o qual, quando filtros de reconstrução perfeita são empregados, deve ser igual a uma versão atrasada de $x(n)$, quando nenhuma alteração é introduzida pelo processamento. A Fig. 3.12 mostra respostas em frequência típicas dos filtros de análise.

Além do erro causado pelo processamento, o qual não pode ser corrigido, existe ainda o erro de reconstrução do próprio banco de filtros, para cuja existência concorrem três causas distintas: distorção de amplitude, distorção de fase e *aliasing*.

Felizmente, esses erros podem ser evitados durante o projeto dos bancos de filtros, o que nos leva à reconstrução perfeita do sinal de entrada. Normalmente, o sinal reconstruído $\hat{x}(n)$ é uma versão atrasada do sinal de entrada, ou seja, $\hat{x}(n) = \frac{1}{L}x(n-\Delta)$, onde Δ é o atraso introduzido pelo banco de filtros e o fator $\frac{1}{L}$ é decorrente do processo de decimação; pode-se desconsiderar o impacto do fator de escala $\frac{1}{L}$, já que este pode ser facilmente compensado na fase de projeto do filtros de análise e de síntese.

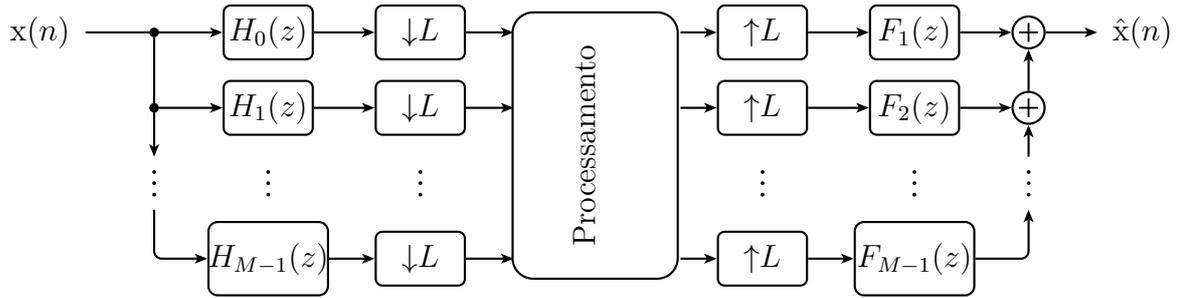


Figura 3.11: Bancos de filtros digitais de análise e de síntese.

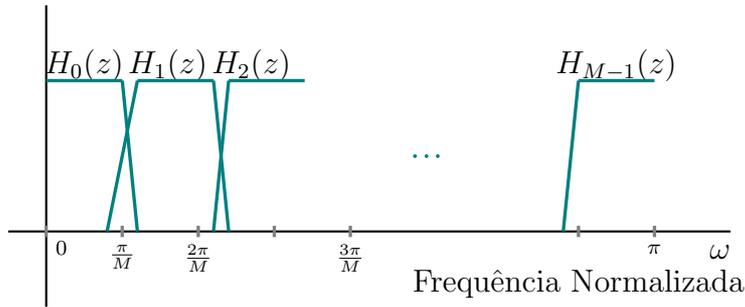


Figura 3.12: Resposta típica dos filtros de análise

Historicamente, pode-se dizer que a teoria de reconstrução perfeita (PR) teve início em [60] com banco de filtros tipo *Quadrature Mirror Filter* (QMF), mas somente em [61] e [62] foi mostrado como eliminar os três tipos de distorção para banco de filtros QMF de dois canais ($M = 2$). Note-se que para o caso de um banco de filtros de $M > 2$ canais as condições de projeto para reconstrução perfeita são bem mais complicadas. Uma técnica para o projeto de sistemas de M canais com reconstrução perfeita foi desenvolvida em [63], [64], baseada na propriedade paraunitária de matrizes polifásicas.

Em [65] foram apresentadas estruturas para bancos de filtros QMF de reconstrução perfeita que cobrem uma subclasse de sistemas que fornece filtros de análise de fase linear para M canais ($M > 2$). Os parâmetros dessas estruturas podem ser otimizados a fim de projetar filtros de análise com energia mínima na faixa de rejeição que, ao mesmo tempo, oferecem fase linear e satisfazem a propriedade da reconstrução perfeita.

3.3.2 Banco de Filtros Não Maximamente Decimado

Considerando M o número de subbandas e L o fator de decimação, dizemos que um banco de filtros é não maximamente decimado se $L < M$. A vantagem, nesse caso, é a menor sobreposição de espectros na saída dos filtros de análise, além de possibilitar transições da faixa de passagem para faixa de rejeição mais suaves.

3.4 Banco de Filtros Modulados por Cosseno

Na literatura são encontradas diversas formas de projeto e implementação de banco de filtros [47, 66]. Descreveremos apenas o banco de filtros modulado por cosseno CMFB (Banco de Filtro Modulado por Cosseno), que será utilizado neste trabalho. Portanto, todos os M filtros de análise e de síntese são obtidos via modulação por cosseno de um único filtro protótipo. Algumas vantagens desse procedimento são:

- O custo computacional para implementação dos bancos de análise e de síntese é igual ao custo computacional de um único filtro e de uma transformada DCT;
- Durante a fase do projeto do banco de filtros, o número de parâmetros a serem otimizados é reduzido porque somente o filtro protótipo tem que ser otimizado;
- Se o protótipo possuir coeficientes reais, todos os filtros dos bancos de análise e de síntese também terão coeficientes reais.

Supondo que o filtro protótipo tenha comprimento N_p e $p(n)$ seja a sua resposta ao impulso, os filtros que comporão os bancos de análise e síntese são obtidos da seguinte forma:

$$h_M(n) = 2p(n)\cos\left(\frac{\pi}{L}(M+0,5)\left(n-\frac{D}{2}\right)+\theta_M\right); \quad (3.7)$$

$$f_M(n) = 2p(n)\cos\left(\frac{\pi}{L}(M+0,5)\left(n-\frac{D}{2}\right)-\theta_M\right), \quad (3.8)$$

onde $D = N_p - 1$ e $\theta_M = (-1)^M \frac{\pi}{4}$, para $0 \leq n \leq N_P - 1$.

3.5 Filtro Adaptativo em Subbandas Normalizado (NSAF)

O objetivo de apresentarmos a filtragem adaptativa em subbandas normalizada (*Normalized Subband Adaptive Filter* - NSAF) é de mostrar que a abordagem em subbandas acelera a taxa de convergência em relação à do algoritmo NLMS, caso

os sinais de entrada sejam coloridos, ou alcança um bom desempenho, obtendo uma complexidade computacional próxima à do algoritmo NLMS [67]. O NSAF foi proposto em [40]. Para um tamanho de passo fixo, o NSAF também requer um compromisso entre a taxa de convergência rápida e um baixo desajuste [67].

Com base no princípio de perturbação mínima dos coeficientes [2], o critério proposto pelo NSAF para solucionar o problema consiste na adoção do princípio da mínima distorção num contexto de múltiplas restrições, minimizando a norma euclidiana da mudança no vetor de peso, sendo dado por

$$\min \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2, \quad (3.9)$$

sujeito ao conjunto de M restrições impostas à saída do filtro decimada:

$$d_{i,D}(n) = \mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}_i(n) \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{x}_i(n) = [x_i(n) \ x_i(n-1) \ x_i(n-2) \ \dots \ x_i(n-N+1)]^T$.

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange, combinamos as equações (3.9) e (3.10), formando a função

$$J(n) = \|\Delta\mathbf{w}(n+1)\|^2 + \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_i [\mathbf{d}_{i,D}(n) - \mathbf{w}^T(n+1)\mathbf{x}_i(n)]. \quad (3.11)$$

Nessa função quadrática, os termos λ_i são os multiplicadores de Lagrange pertencentes às várias restrições descritas em (3.10). Tomando o gradiente da Eq. (3.11) em relação ao vetor de pesos $\mathbf{w}(n+1)$ e impondo a condição de gradiente nulo, obtemos

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda_i \mathbf{x}_i(n). \quad (3.12)$$

Para encontrar os M multiplicadores desconhecidos λ_i , substituímos a Eq. (3.12) nas M restrições da Eq. (3.10), formando um sistema de M equações lineares. Colocando essas equações em forma matricial e resolvendo para os multiplicadores de Lagrange, temos

$$\boldsymbol{\lambda} = 2[\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)]^{-1}\mathbf{e}_D(n), \quad (3.13)$$

onde $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}]^T$ é um vetor contendo os multiplicadores de Lagrange de dimensão $M \times 1$, $\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}_0(n), \mathbf{x}_1(n), \dots, \mathbf{x}_{M-1}(n)]^T$ é a matriz de dimensão $M \times N$ contendo o sinal de entrada nas M subbandas, e o vetor de erro $\mathbf{e}_D(n) = [e_{0,D}^T(n), e_{1,D}^T(n), \dots, e_{M-1,D}^T(n)]^T$ é um vetor coluna de dimensão $M \times 1$. É mostrado em [44] que se as respostas em frequência dos filtros de análise não se sobrepõem de forma significativa, os elementos fora da diagonal da matriz são insignificantes.

Com esse pressuposto, a Eq. (3.13), se reduz à forma simples

$$\lambda_i = 2 \frac{e_{i,D}(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|^2} \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, M - 1. \quad (3.14)$$

Combinando os resultados das Eqs. (3.12) e (3.14), obtém-se a seguinte relação recursiva de atualização do vetor de coeficientes:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \beta \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|^2} e_{i,D}(n), \quad (3.15)$$

que consiste na equação de atualização do vetor de coeficientes para a estrutura de filtro de subbandas adaptativa NSAF mostrada na Fig. 3.13, derivada do princípio da perturbação mínima [2], que é semelhante aos de [44], [68] e [69].

O passo de adaptação β é introduzido na Eq. (3.15) para permitir um controle da dinâmica da alteração dos coeficientes do filtro. Importa notar que o critério de otimização com restrições definido acima envolve M igualdades; assim, o número M de subbandas (isto é, número de restrições) deve ser menor ou igual ao comprimento N do vetor de coeficientes adaptativos. Este requisito estabelece um limite máximo para o número de subbandas permitidas no algoritmo NSAF.

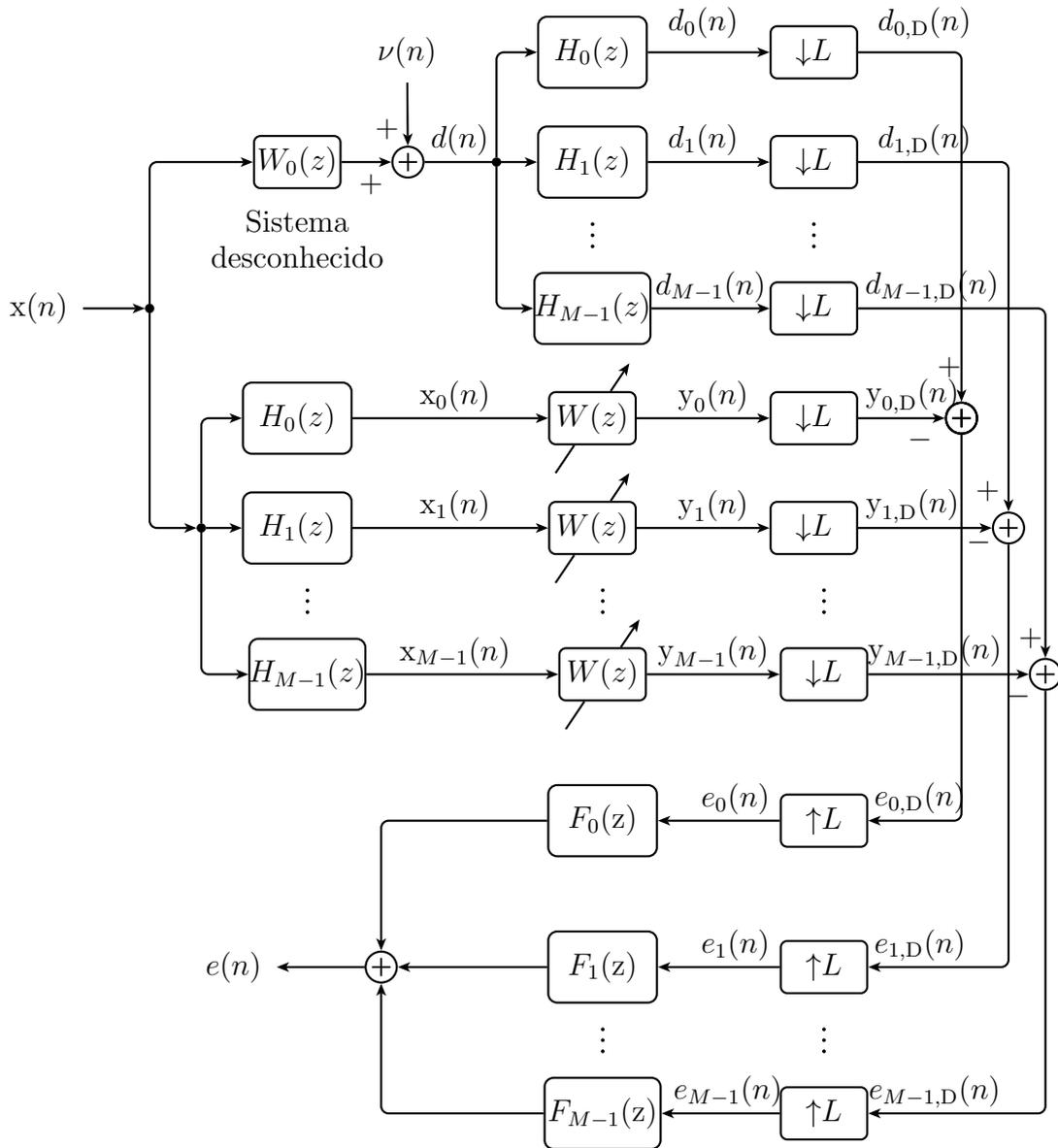


Figura 3.13: Estrutura da Família NSAF.

A Fig. 3.13 mostra a estrutura da família NSAF [44], onde $W(z)$ representa o filtro adaptativo cujo vetor de coeficientes é $\mathbf{w}(n)$ (de comprimento N), $d_{i,D}(n)$, e $y_{i,D}(n)$ para $i = 0, 1, \dots, M - 1$ são as respostas desejadas e os sinais de saída das subbandas respectivamente, $H_i(z)$ e $F_i(z)$ para $i = 0, 1, \dots, M - 1$ são os filtros de análise e os filtros de síntese. As relações entre essas quantidades são explicitadas na Fig. 3.13.

Tabela 3.1: Resumo do Algoritmo NSAF

Cálculo	Multiplicações/ T_s
Para $n = 1, 2, \dots$ e taxa de processamento $1/(MT_s)$	
<i>Particionamento da Banda</i>	
$\mathbf{x}_i(n) = \mathbf{h}_i^T \mathbf{x}(n), i = 0, \dots, M - 1$	MN_p
$d_i(n) = \mathbf{h}_i^T \mathbf{d}(n), i = 0, \dots, M - 1$	MN_p
<i>Sintetizando:</i>	
$e(n) = \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{f}_i^T \mathbf{e}_i(n)$	MN_p
para $k = 0, 1, 2, \dots$ e taxa de processamento $1/T_s$	
<i>Estimando o erro:</i>	
$e_{i,D}(n) = d_{i,D}(n) - \mathbf{w}^T(n) \mathbf{x}(n), i = 0, \dots, M - 1$	$\frac{(N \times M)}{M} = N$
<i>Adaptação dos coeficientes do filtro:</i>	
$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \beta \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\ \mathbf{x}_i(n)\ ^2 + \delta} e_{i,D}(n)$	$\approx \frac{(2N \times M)}{M} = 2N$

onde

N = comprimento do filtro

M = número de subbandas

N_p = comprimento do filtro de análise $H_i(z)$

$F_i(z)$ = filtro de síntese

β = parâmetro referente ao tamanho de passo, $0 < \beta < 2$

δ = fator de regularização.

3.5.1 Complexidade Computacional

O algoritmo NSAF está resumido na Tabela 3.1. Uma pequena constante positiva foi introduzida no denominador da equação de adaptação dos coeficientes para evitar indefinições numéricas quando a energia do sinal de entrada for muito baixa. Em virtude da subamostragem crítica, o vetor de coeficientes é adaptado a uma taxa de $1/MT_s$, inferior à taxa de amostragem em banda cheia $F_s = 1/T_s$. Assim, o número de multiplicações requerido para a estimativa de erro e adaptação dos coeficientes durante um único período de amostragem T_s é $3N$ para um número arbitrário M de subbandas. Além disso, o NSAF requer $3MN_p$ multiplicações adicionais para os bancos do filtro de análise e de síntese, resultando num total de $3N + 3MN_p$ multiplicações durante um único período de amostragem. Assim, em comparação com o algoritmo NLMS em banda cheia, o algoritmo NSAF requer $3MN_p$ multiplicações adicionais.

3.6 Avanços do Algoritmo NSAF

Para superar o compromisso do NSAF entre a rápida taxa de convergência e o baixo erro em regime permanente, foram propostos vários algoritmos NSAF com tamanho de passo variável [70], [67], [71], [72], [73]. A maioria dos algoritmos referidos propõem a otimização baseada na norma ℓ_2 . Assim, a sua convergência será seriamente prejudicada por interferências impulsivas (que são frequentemente encontradas em aplicações práticas). Foi demonstrado que alguns algoritmos de filtragem adaptativa que minimizam a norma ℓ_1 do sinal de erro oferecem robustez perante a interferências impulsivas [74], [75]. Ni e outros [76] propuseram um algoritmo SAF de sinal (SSAF), o qual adota o princípio da minimização da norma ℓ_1 em cada subbanda, apresentando uma boa robustez contra interferências impulsivas e rápida convergência para sinais de entrada coloridos. Os mesmos autores também propuseram um algoritmo SSAF (VRP-SSAF) com parâmetro de regularização variável para reduzir o erro em regime permanente. Na sequência desses trabalhos, muitos pesquisadores desenvolveram diversas variantes, melhorando ainda mais o desempenho do algoritmo SSAF, tais como algoritmos SSAF com tamanho do passo variáveis [77], [78], algoritmo SSAF com projeção afim (AP-SSAF) [79] e algoritmo SSAF proporcional (P-SSAF) [79]. Recentemente, foram aplicados aos algoritmos de filtragem adaptativa que utilizam a regra do gradiente, o critério de correntropia máxima (MCC) [80], [81] e o critério de logaritmo mínimo (LC) [82], [82]. Estas duas estratégias refletem uma característica comum na adaptação dos algoritmos resultantes (mesmo com princípios diferentes), a saber: o tamanho do passo tornar-se-á muito pequeno imediatamente, quando uma interferência impulsiva for detectada. Basicamente, esta é a razão pela qual algoritmos baseados em LC e MCC possuem robustez a interferências impulsivas.

3.7 Conclusão

O grande destaque que o processamento adaptativo em multitaxas vem alcançando, principalmente em modelagem de sistemas, cancelamento de ecos acústicos e equalização de sinais, motivou a investigação de métodos de filtragem adaptativa em subbandas. A escolha da filtragem em subbandas foi motivada pelo fato dos filtros adaptativos em subbandas proporcionarem redução da alta complexidade computacional inerente às aplicações nas quais longas respostas impulsivas são exigidas. Além disso, o efeito da separação efetiva dos sinais internos em subbandas leva a uma convergência mais rápida. O Capítulo 5 detalha uma nova proposta de estrutura em subbandas para filtragem adaptativa.

Capítulo 4

Fatores de Aprendizagem e de Regularização Adaptativos

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta alguns conceitos relativos a fatores de aprendizagem e regularização adaptativos, visando motivar alguns algoritmos que serão propostos. Uma das abordagens úteis para acelerar a taxa de convergência dos algoritmos de filtragem adaptativa, discutida no Capítulo 1, consiste na filtragem adaptativa em subbandas [83], [84]. Com base em uma estrutura de amostragem crítica similar à utilizada no algoritmo de filtragem adaptativa em subbandas (SAFs) de [44], [68] e [69], no Capítulo 3 foi apresentado o Filtro Adaptativo Normalizado em Subbandas (NSAF), cujo desempenho se revelou competitivo, exigindo uma complexidade computacional similar à do algoritmo NLMS [44]. A ideia central do NSAF consiste em usar os sinais de subbandas, normalizados por suas respectivas energias, para atualizar os pesos do filtro adaptativo de banda completa. Essa estratégia se vale da propriedade da decorrelação do NSAF [85], [86]. No entanto, como o NSAF original utiliza um tamanho de passo fixo, é incontornável o compromisso entre uma alta taxa de convergência e um baixo desajuste em regime permanente. Para atenuar esse problema, uma versão do NSAF, chamado de NSAF com associação definida (SM-NSAF) foi desenvolvida [87]. O SM-NSAF apresenta a vantagem adicional de não atualizar o filtro a cada iteração, o que reduz a complexidade computacional. A cada iteração, somente se alteram os coeficientes adaptativos quando a magnitude do erro ultrapassa um limiar definido pelo projetista. A determinação desse limiar, no entanto, requer o conhecimento da potência do ruído aditivo do sistema σ_ν^2 , já que o limiar é proporcional a σ_ν , com a constante de proporcionalidade τ sendo também definida pelo projetista. Mesmo em situações nas quais a variância do ruído de medição é conhecida, pode-se ver nas simulações em [67] que o desem-

penho da convergência é sensível à seleção do limiar do erro, pois cumpre definir a constante de proporcionalidade τ que limita o emprego do SM-NSAF em aplicações práticas. Além disso, tanto o NSAF original quanto o SM-NSAF não consideram o cenário de sub-modelagem, o qual muitas vezes é encontrado em aplicações como Cancelamento de Eco Acústico (AEC) [88]. Entretanto, o algoritmo NSAF com Matriz de Tamanho de Passos Variável (Filtro Adaptativo em Subbandas Normalizado com Matriz de Tamanho de Passo - VSSM-NSAF) [67] apresenta um método para estimar o ruído do sistema, o qual também pode ser aplicado para o contexto de cenários submodelados, não necessitando conhecer as potências do ruído nas subbandas antecipadamente.

Um outro parâmetro fundamental em filtragem adaptativa é a regularização. Um filtro adaptativo que não está devidamente regularizado é propenso a apresentar um desempenho inadequado. Apesar disso, a regularização, conforme [89], é subestimada e pouco discutida na literatura de filtragem adaptativa. Diversas estratégias de regularização de filtros adaptativos coexistem na literatura técnica. Em [89] é proposta uma maneira para implementá-la com base em uma condição intuitiva demonstrada para quatro algoritmos: o NLMS, o *Signed-Regressor* NLMS (SR-NLMS), o *Improved Proportionate* NLMS (IPNLMS), e o SR-IPNLMS. Segundo [89], o problema de regularização não tem sido discutido, do ponto de vista teórico, de uma forma profunda na literatura, tais como [2] e [4], que se referem ao fator de regularização como “um número positivo pequeno”, o que pode não ser verdade. Com efeito, como relatado em [89], o parâmetro de regularização pode excursionar numa faixa muito ampla de valores, a depender do nível de energia do ruído aditivo.

4.2 Fator de Aprendizagem para Algoritmo em Subbandas

Como embasamento para melhoria da convergência e do desajustes nos algoritmos propostos nos capítulos posteriores, iniciamos nossos estudos concernentes ao fator de aprendizagem, estendendo o conceito *set-membership* (SM-NSAF) [90] aos algoritmos adaptativos em subbandas, como se segue

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \sum_{i=0}^{M-1} \beta_i(n) \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|^2} e_{i,D}(n), \quad (4.1)$$

onde

$$\beta_i(n) = \begin{cases} 1 - \frac{\gamma}{|e_{i,D}(n)|}, & \text{se } |e_{i,D}(n)| > \gamma, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e γ é o limite de erro que está relacionado com a potência do ruído do sistema. A Eq. (4.1) pode ser derivada a partir de um problema de otimização com restrições, cabendo recorrer à técnica dos multiplicadores de Lagrange.

Para derivar o NSAF com passo variável (VSSM-NSAF), J. Ni e F. Li [67] inspiraram-se no algoritmo de tamanho de passo variável não-paramétrico NLMS (NVSS-NLMS), proposto em [91]. A ideia fundamental do VSSM-NSAF é estimar as potências de ruído dos sinais em cada subbanda. Na sequência da apresentação, primeiro considera-se o cenário da modelagem exata ($N = N_p$) e, em seguida, amplia-se o resultado para o cenário submodelado ($N_p < N$). Reescrevendo $\beta_i(n)$ na forma matricial [87], temos

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{X}(n)\Phi^{-1}(n)\Gamma(n)\mathbf{e}_D(n), \quad (4.2)$$

onde:

$$\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}_0(n), \mathbf{x}_1(n), \dots, \mathbf{x}_{M-1}(n)]; \quad (4.3)$$

$$\Phi(n) = \text{diag}\{\|\mathbf{x}_0(n)\|^2, \|\mathbf{x}_1(n)\|^2, \dots, \|\mathbf{x}_{M-1}(n)\|^2\}; \quad (4.4)$$

$$\mathbf{e}_D(n) = [e_{0,D}(n), e_{1,D}(n), \dots, e_{M-1,D}(n)]^T; \quad (4.5)$$

$$\Gamma(n) = \text{diag}\{\beta_0(n), \beta_1(n), \dots, \beta_{M-1}(n)\}. \quad (4.6)$$

Aqui, $\Gamma(n)$ é a matriz de passo variável (VSSM), cuja expressão será doravante derivada. Empregando a Eq. (4.1) e tomando o modelo linear para $d(n)$, podemos escrever

$$\mathbf{e}_D(n) = \mathbf{d}_D(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{w}(n) = \mathbf{X}^T(n)[\mathbf{w}^0 - \mathbf{w}(n)] + \boldsymbol{\nu}_D(n), \quad (4.7)$$

onde:

$$\mathbf{d}_D(n) = [d_{0,D}(n), d_{1,D}(n), \dots, d_{M-1,D}(n)]^T, \quad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\nu}_D(n) = [\nu_{0,D}(n), \nu_{1,D}(n), \dots, \nu_{M-1,D}(n)]^T; \quad (4.9)$$

e $\nu_{i,D}(n)$ é o ruído do sistema na i -ésima subbanda [40].

Define-se o vetor erro *a posteriori* de subbanda como:

$$\mathbf{e}_p(n) = \mathbf{d}_D(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{X}^T(n)[\mathbf{w}^0 - \mathbf{w}(n+1)] + \boldsymbol{\nu}_D(n), \quad (4.10)$$

onde

$$\mathbf{e}_p(n) = [e_{0,p}(n), e_{1,p}(n), \dots, e_{M-1,p}(n)]^T, \quad (4.11)$$

e

$$e_{i,p}(n) = d_{i,D}(n) - \mathbf{x}_i^T(n)\mathbf{w}(n+1), \quad (4.12)$$

para $i = 0, 1, \dots, M - 1$ é definido como o erro *a posteriori* na i -ésima subbanda.

Substituindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.10), e usando a Eq. (4.7), temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_p(n) &= \mathbf{X}^T(n)[\mathbf{w}^0 - \mathbf{w}(n)] \\
&\quad - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n)\mathbf{\Gamma}(n)\mathbf{e}_D(n) + \boldsymbol{\nu}_D(n), \\
&= \mathbf{e}_D(n) - \boldsymbol{\eta}_D(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n)\mathbf{\Gamma}(n)\mathbf{e}_D(n) + \boldsymbol{\nu}_D(n) \\
&= \mathbf{e}_D(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)\mathbf{\Phi}^{-1}(n)\mathbf{\Gamma}(n)\mathbf{e}_D(n). \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Empregando a *aproximação diagonal* $\mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n) \approx \mathbf{\Phi}(n)$ de [44], [85] na Eq. (4.13), temos

$$\mathbf{e}_p(n) = \mathbf{e}_D(n) - \mathbf{\Gamma}(n)\mathbf{e}_D(n) = [\mathbf{I}_{M \times M} - \mathbf{\Gamma}(n)]\mathbf{e}_D(n), \tag{4.14}$$

onde $\mathbf{I}_{M \times M}$ é uma matriz identidade. A Eq. (4.14) pode ser reescrita na seguinte formulação escalar:

$$e_{i,p}(n) = [1 - \beta_i(n)]e_{i,D}(n), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1. \tag{4.15}$$

Na derivação de (4.1), [44] assume que os erros *a posteriori* satisfatórios de subbandas sejam $e_{i,p}(n) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, M - 1$. Na presença de ruído de medição, essas condições introduzirão ruído em $\mathbf{w}(n + 1)$ [91]. Um procedimento razoável consiste em permitir que as potências dos erros *a posteriori* nas subbandas sejam iguais às potências de ruído nas subbandas durante a atualização dos coeficientes do filtro adaptativo; isto é, esperamos achar a matriz de tamanho de passo $\mathbf{\Gamma}(n)$ de tal forma que

$$\mathbb{E}[e_{i,p}^2(n)] = \mathbb{E}[\nu_{i,p}^2(n)], \quad i = 0, 1, \dots, M - 1. \tag{4.16}$$

Substituindo (4.15) em (4.16), obtemos

$$\beta_i(n) = 1 - \frac{\sigma_{\nu_{i,p}}(n)}{\sigma_{e_{i,p}}(n)}, \quad i = 0, 1, \dots, M - 1, \tag{4.17}$$

onde $\sigma_{e_{i,D}}(n)$ e $\sigma_{\nu_{i,p}}(n)$ satisfazem a $\sigma_{e_{i,D}}^2(n) = \mathbb{E}[e_{i,D}^2(n)]$ e $\sigma_{\nu_{i,D}}^2(n) = \mathbb{E}[\nu_{i,D}^2(n)]$, sendo ambos positivos. Note-se que a forma de (4.17) é semelhante à do VSS-APA em [88]. Isso ocorre porque tanto o APA quanto o NSAF podem ser vistos como generalizações do algoritmo NLMS. O APA generaliza o algoritmo NLMS ao longo do eixo do tempo, se valendo de diversas restrições temporais, enquanto que o NSAF generaliza o algoritmo NLMS ao longo do eixo das frequências, recorrendo a várias restrições nas subbandas respectivas [92].

4.3 Fator de Regularização

Nesta seção, é apresentada a regularização de algoritmos adaptativos por um parâmetro fixo, previamente escolhido, e numa forma matricial adaptativa.

4.3.1 Parâmetro de Regularização

A regularização desempenha um papel fundamental em diversos contextos nos quais a filtragem adaptativa se revela útil. Em filtragem adaptativa sempre temos um sistema de equações lineares (sobredeterminado ou subdeterminado) para resolver, explícita ou implicitamente, de modo que enfrentamos um problema mal-condicionado [93]. Como resultado, a regularização é uma parte importante do projeto em qualquer filtro adaptativo, se queremos que este se comporte corretamente. A princípio, denotemos o parâmetro de regularização por δ . Em alguns filtros adaptativos [94], [95], esse parâmetro de regularização é escolhido como:

$$\delta = \alpha\sigma_x^2, \quad (4.18)$$

onde $\sigma_x^2 = \mathbb{E}[x^2(n)]$ é a variância do sinal de entrada $x(n)$, assumindo média zero e α uma constante positiva arbitrária. Na prática, porém, esta variável depende da potência de ruído aditivo. Quanto maior a energia do ruído, maior deverá ser o valor de α . Normalmente, α é conhecido como um parâmetro de regularização normalizado (com respeito à variação do sinal de entrada). A regularização supracitada, com uma boa escolha de α como proposta em [89], parece funcionar bem na prática uma vez que o desajuste, que é a distância entre a resposta impulsiva real e a estimada por um algoritmo adaptativo, diminui e converge para um valor estável e pequeno e, sem isso, o desajuste do filtro adaptativo pode oscilar, podendo mesmo nunca convergir. Neste trabalho, estamos interessados em um parâmetro de regularização adaptativo que garanta um comportamento estável do filtro adaptativo.

4.3.2 Matriz de Regularização Adaptativa

Em [96] é revelado que com o emprego do passo fixo e de parâmetro de regularização constante se consegue resolver a exigência de alta taxa de convergência e de baixo desajuste para o NSAF. Assim [96] propõe um ajuste dinâmico dos parâmetros, que será aqui empregado no algoritmo NSAF. A equação de atualização do vetor de coeficientes do NSAF com regularização é dada por

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \beta \sum_{i=0}^{M-1} \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|^2 + \delta_i(n)} e_{i,D}(n), \quad (4.19)$$

onde $\delta_i(n)$ é o parâmetro de regularização variável para $i = 0, 1, \dots, M - 1$ em cada subbanda. Aqui o recurso a diversos parâmetros de regularização variável permite que cada subbanda possa convergir quase independentemente, obtendo, assim, um bom desempenho. A Eq. (4.19) pode ser reescrita na forma matricial, como segue

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{X}(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\mathbf{e}_D(n), \quad (4.20)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda}(n) = \mathbf{\Phi}(n) + \mathbf{\Delta}(n), \quad (4.21)$$

e

$$\mathbf{\Delta}(n) = \text{diag}\{\delta_0(n), \delta_1(n), \dots, \delta_{M-1}(n)\}. \quad (4.22)$$

A Eq. (4.20) pode ser escrita em termos do vetor de erro dos coeficientes, $\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \mathbf{w}_o - \mathbf{w}(n)$, como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n+1) = \boldsymbol{\varepsilon}(n) - \mathbf{X}(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\mathbf{e}_D(n). \quad (4.23)$$

Define-se o vetor de erro *a priori* $\mathbf{e}_a(n)$ e o desvio quadrático médio (MSD), respectivamente, como

$$\mathbf{e}_a(n) = \mathbf{X}(n)\boldsymbol{\varepsilon}(n) = \mathbf{X}(n)[\mathbf{w}_o - \mathbf{w}(n)]; \quad (4.24)$$

$$\text{MSD}(n) = \mathbb{E}[\|\boldsymbol{\varepsilon}(n)\|^2] = \mathbb{E}[\|\mathbf{w}_o - \mathbf{w}(n)\|^2]. \quad (4.25)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da Eq. (4.23), tomando o valor esperado, e empregando o pressuposto de que $\mathbf{X}(n)$ é diagonal e $\boldsymbol{\mathcal{X}}(n) \triangleq \mathbf{X}^T(n)\mathbf{X}(n)$, temos

$$\boldsymbol{\varepsilon}(n+1) = \boldsymbol{\varepsilon}(n) - 2\mathbb{E}[\mathbf{e}_a^T(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\mathbf{e}_D(n)] + \mathbb{E}[\mathbf{e}_D(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\boldsymbol{\mathcal{X}}(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\mathbf{e}_D(n)]. \quad (4.26)$$

Denotando $\boldsymbol{\nu}_D(n) = [\nu_{0,D}(n), \nu_{1,D}(n), \dots, \nu_{M-1,D}(n)]^T$, onde $\nu_{i,D}(n)$ é o ruído decimado em cada subbanda e, por hipótese, independente do sinal de entrada $x(n)$, chegamos à seguinte expressão

$$\mathbf{e}_D(n) = \mathbf{e}_a(n) + \boldsymbol{\nu}_D(n). \quad (4.27)$$

Sob a hipótese de que o ruído de medição $\boldsymbol{\nu}(n)$ possui média zero e é independente de $\mathbf{x}(n)$, e negligenciando a fraca correlação entre $\boldsymbol{\nu}_D(n)$ e $\mathbf{e}_a(n)$, podemos provar que

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{\nu}_D^T(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\mathbf{e}_a(n)] = \mathbb{E}[\boldsymbol{\nu}_D^T(n)]\mathbb{E}[\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\mathbf{e}_a(n)] = 0. \quad (4.28)$$

Definindo $\Omega(n+1) = \text{MSD}(n) - \text{MSD}(n+1)$ e substituindo em (4.27) e (4.28)

em (4.26), temos

$$\begin{aligned}\Omega(n+1) &= 2\mathbb{E}[\mathbf{e}_D^T(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\mathbf{e}_D(n) - \boldsymbol{\nu}_D^T(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\boldsymbol{\nu}_D(n)] \\ &\quad - \mathbb{E}[\mathbf{e}_D^T(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\boldsymbol{\chi}(n)\mathbf{\Lambda}^{-1}(n)\mathbf{e}_D(n)].\end{aligned}\quad (4.29)$$

Expandindo (4.29), temos

$$\Omega(n+1) = \sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{E} \left[2 \frac{e_{i,D}^2(n) - \nu_{i,D}^2(n)}{\delta_i(n) + \|\mathbf{x}_i(n)\|^2} - \frac{e_{i,D}^2(n)\|\mathbf{x}_i(n)\|^2}{[\delta_i(n) + \|\mathbf{x}_i(n)\|^2]^2} \right]. \quad (4.30)$$

Se maximizarmos $\Omega(n+1)$ em relação a $\delta_i(n)$, obtemos o melhor desempenho de convergência, porque o MSD sofre a maior queda da iteração n para iteração $n+1$. Já que os elementos ideais da matriz a regularização variável $\Delta(n)$ satisfazem

$$\frac{\partial \Omega(n+1)}{\partial \delta_i(n)} = \mathbb{E} \left[-2 \frac{e_{i,D}^2(n) - \nu_{i,D}^2(n)}{(\delta_i(n) + \|\mathbf{x}_i(n)\|^2)^2} + 2 \frac{e_{i,D}^2(n)\|\mathbf{x}_i(n)\|^2}{(\delta_i(n) + \|\mathbf{x}_i(n)\|^2)^3} \right] = 0. \quad (4.31)$$

A Eq. (4.31) pode ser simplificada para

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\frac{(e_{i,D}^2(n) - \nu_{i,D}^2(n))(\delta_i(n) + \|\mathbf{x}_i(n)\|^2) - e_{i,D}^2(n)\|\mathbf{x}_i(n)\|^2}{(\delta_i(n) + \|\mathbf{x}_i(n)\|^2)^3} \right] &= \\ = \mathbb{E} \left[\frac{(e_{i,D}^2(n) - \nu_{i,D}^2(n))\delta_i(n) - \nu_{i,D}^2(n)\|\mathbf{x}_i(n)\|^2}{(\delta_i(n) + \|\mathbf{x}_i(n)\|^2)^3} \right] &= 0.\end{aligned}\quad (4.32)$$

Para um filtro adaptativo de alta ordem, as flutuações de $\|\mathbf{x}_i(n)\|^2$ de uma iteração para a próxima podem ser consideradas modestas [92], de modo que (4.32) pode ser aproximada para

$$\frac{\mathbb{E}[(e_{i,D}^2(n) - \nu_{i,D}^2(n))\delta_i(n) - \nu_{i,D}^2(n)\|\mathbf{x}_i(n)\|^2]}{\mathbb{E}[(\delta_i(n) + \|\mathbf{x}_i(n)\|^2)^3]} = 0. \quad (4.33)$$

Como $\nu(n)$ é independente de $x(n)$, pode-se provar que $\nu_{i,D}(n)$ é independente de $\|\mathbf{x}_i(n)\|^2$. Então, resolvendo a Eq. (4.33), obtemos

$$\delta_i(n) = \frac{\mathbb{E}[\nu_{i,D}^2(n)]\mathbb{E}[\|\mathbf{x}_i(n)\|^2]}{\mathbb{E}[e_{i,D}^2(n)] - \mathbb{E}[\nu_{i,D}^2(n)]} = \frac{\sigma_{\mathbf{x}_i}^2(n)}{\frac{\sigma_{e_{i,D}}^2(n)}{\sigma_{\nu_{i,D}}^2} - 1}, \quad (4.34)$$

onde $\sigma_{\mathbf{x}_i}^2(n) = \mathbb{E}[\|\mathbf{x}_i(n)\|^2]$, $\sigma_{e_{i,D}}^2(n) = \mathbb{E}[e_{i,D}^2(n)]$ e $\sigma_{\nu_{i,D}}^2 = \mathbb{E}[\nu_{i,D}^2(n)]$, para $i = 0, 1, \dots, M-1$. A partir de (4.34), podemos ver que o denominador é grande no início da adaptação, quando $\sigma_{e_{i,D}}^2(n) \gg \sigma_{\nu_{i,D}}^2(n)$, o que faz com que a taxa de convergência seja rápida. À medida em que o número de iterações aumenta, o erro

diminui, e, por conseguinte, $\delta_i(n)$ aumenta, o que torna baixo o desajuste.

4.4 Conclusão

Este capítulo teve por objetivo detalhar fatores de aprendizagem e de regularização adaptativos, enfatizando-se os algoritmos em subbandas e baseando-se em recentes estudos na literatura. Um princípio importante observado é a existência da conflitante exigência da taxa de convergência rápida e do baixo desajuste em regime permanente. Tal princípio será alvo de análises teóricas e de extensões no Capítulo 6.

Capítulo 5

Estrutura do Filtro em Subbandas Proposta

5.1 Introdução

Este capítulo propõe um novo algoritmo adaptativo para a estrutura em subbandas (apresentada em [1]) na qual os subfiltros adaptativos são esparsos e responsáveis pela identificação de um sistema desconhecido, bem como pela reconstrução do sinal de saída. O algoritmo adaptativo é derivado mediante a conjugação dos princípios de perturbação mínima [2] e de otimização com múltiplas restrições, também empregados nos algoritmos normalizados de filtragem adaptativa em subbandas, como o NSAF [44]. Usando o princípio da conservação de energia [27], obtemos uma expressão para o MSE em regime permanente do algoritmo resultante. Em seguida, apresentamos uma implementação simplificada da abordagem proposta, que apresenta uma taxa de convergência similar à do algoritmo NSAF, mas com a vantagem de demandar um custo computacional inferior. O algoritmo resultante é denominado Algoritmo em Subbandas Normalizado com Filtros Esparsos (NSAF-SF).

Por fim, é também proposto um novo algoritmo que seleciona um subconjunto de subbandas e as utiliza para atualizar os coeficientes do filtro adaptativo, que chamamos de NSAF com Seleção de Subbandas (NSAF-SF-SS). À medida que o número de subbandas cresce, a velocidade de convergência tende a aumentar. No entanto, o aumento do número de subbandas implica incrementar a complexidade computacional. Para melhorar a velocidade de convergência, primeiramente ampliamos o número de subbandas e então empregamos um esquema seletivo que explora um subconjunto adequado das subbandas, de modo a manter a complexidade computacional num patamar apropriado. Para isso, elegemos como critério de seleção a subbanda cujo erro quadrático é maior. Idealmente, embora selecionemos apenas uma subbanda para efetuar a atualização, o algoritmo de seleção proposto deve

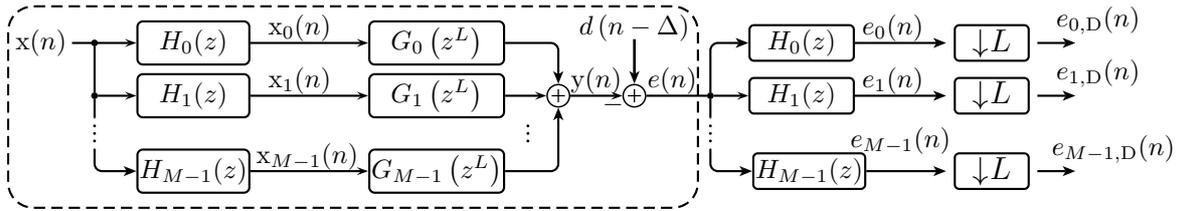


Figura 5.1: Estrutura em subbandas com subfiltros esparsos $G_i(z^L)$ e filtros de análise $\{H_i(z)\}$, $i = 0, 1, \dots, M-1$, proposta em [1], indicada pelo quadro tracejado. A decomposição do sinal de erro $e(n)$ pelos filtros $H_i(z)$ é o primeiro passo para a obtenção do algoritmo proposto.

apresentar um desempenho similar ao do algoritmo original que, mais exigente em termos de custo computacional, emprega informação de todas as subbandas para efetuar a atualização. O desempenho do algoritmo proposto é avaliado em cenários de identificação de funções de transferência acústicas.

5.2 Algoritmo em Subbandas NSAF-SF

Após a apresentação dos conceitos básicos de bancos de filtros e de sistemas multitaxas, descrevemos a nova estrutura em subbandas (NSAF-SF) e suas principais características. Considere que a saída do sistema a ser modelado é dada por

$$d(n) \triangleq \begin{bmatrix} h_0^o & h_1^o & \dots & h_{N-1}^o \end{bmatrix} \mathbf{x}(n) + \nu(n), \quad (5.1)$$

onde $\mathbf{x}(n) \triangleq [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$ e $\nu(n)$ incorpora as imprecisões de modelagem e erros de medição. A estrutura proposta deriva de uma estrutura em laço-fechado [45], mostrada na Fig. 5.1, e utiliza um banco de filtros de análise $\{H_i(z)\}$, seguido por um banco de filtros esparsos $\{G_i(z^L)\}$, para $i = 0, 1, \dots, M-1$. Os bancos de filtros são escolhidos de sorte a garantir a propriedade de reconstrução perfeita.

Em vez de usar o erro global $e(n)$ (como em [1]), decompomos o erro em subbandas, usando um banco de filtros de análise para-unitário, o que garante a equivalência entre a soma dos erros quadráticos em cada subbanda e o erro quadrático em banda completa [47]. Considerando que os filtros de análise e os correspondentes filtros de síntese $F_i(z)$ tenham o mesmo comprimento N_p do filtro protótipo, para identificação de um filtro FIR de comprimento N , o número de coeficientes adaptativos de cada subfiltro deve ser pelo menos $D = \left\lfloor \frac{N+N_p}{L} \right\rfloor$ [97]. Assumindo que os subfiltros adaptativos variam lentamente, então podemos mover esses filtros para o lado esquerdo de $G_i(z)$, como mostra a Fig. 5.2.

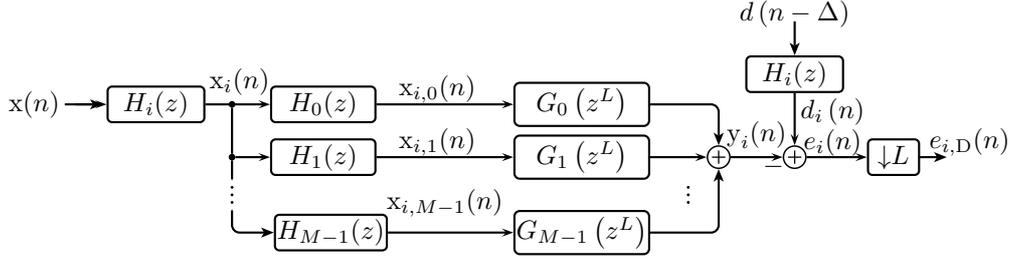


Figura 5.2: O i -ésimo ramo da estrutura proposta.

5.2.1 Derivação da Equação de Atualização para o Algoritmo NSAF-SF

Da Fig. 5.2 temos os M sinais para o i -ésimo ramo da estrutura resultante dados por

$$\mathbf{x}_{i,j}(n) = \mathbf{h}_i(n) * \mathbf{h}_j(n) * \mathbf{x}(n), \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{h}_l(n)$ é a resposta ao impulso do l -ésimo filtro de análise. Esses sinais em subbandas passam pelos filtros esparsos, cujas funções de transferência são descritas por

$$G_i(z) = \sum_{n=0}^{D-1} g_i(n) z^{-nL}. \quad (5.3)$$

Definindo os vetores

$$\mathbf{x}_{i,j}(n) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,j}(n) & \mathbf{x}_{i,j}(n-1) & \dots & \mathbf{x}_{i,j}(n-D+1) \end{bmatrix}^T \quad (5.4)$$

e

$$\mathbf{g}_i(n) \triangleq \begin{bmatrix} g_i(0) & g_i(1) & \dots & g_i(D-1) \end{bmatrix}^T, \quad (5.5)$$

é possível escrever o sinal de saída do i -ésimo ramo da estrutura (Fig. 5.2) como

$$y_i(nL) = \mathbf{x}_i^T(nL) \mathbf{g}(n), \quad (5.6)$$

onde

$$\mathbf{g}(n) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0^T(n) & \mathbf{g}_1^T(n) & \dots & \mathbf{g}_{M-1}^T(n) \end{bmatrix}^T, \quad (5.7)$$

e

$$\mathbf{x}_i(n) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,0}^T(n) & \mathbf{x}_{i,1}^T(n) & \dots & \mathbf{x}_{i,M-1}^T(n) \end{bmatrix}^T. \quad (5.8)$$

Para garantir uma redução progressiva dos erros da estrutura adaptativa, empregamos uma estratégia de otimização que zera os erros *a posteriori* em cada subbanda $e_{p,i}(nL) = d_i(nL) - \mathbf{x}_i^T(nL) \mathbf{g}(n+1)$, sob a égide do princípio da mínima perturbação.

Assim, pretendemos resolver o seguinte problema:

$$\min \|\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2, \text{ sujeito a } d_i(nL) - \mathbf{x}_i^T(nL)\mathbf{g}(n+1) = 0, \quad (5.9)$$

para $i = 0, 1, \dots, M-1$. Pelo uso dos multiplicadores de Lagrange, a otimização (5.9) pode ser reformulada como a minimização da função custo sem restrições $J[\mathbf{g}(n+1)]$, definida como

$$J[\mathbf{g}(n+1)] \triangleq \|\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2 + \boldsymbol{\lambda}^T \overbrace{[\mathbf{d}(nL) - \mathbf{X}^T(nL)\mathbf{g}(n+1)]}^{\triangleq \bar{\mathbf{e}}(nL)}, \quad (5.10)$$

onde

$$\mathbf{X}(n) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0(n) & \mathbf{x}_1(n) & \dots & \mathbf{x}_{M-1}(n) \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

e

$$\mathbf{d}(n) = \begin{bmatrix} d_0(n) & d_1(n) & \dots & d_{M-1}(n) \end{bmatrix}^T. \quad (5.12)$$

A Eq. (5.10) pode ser reescrita como

$$J[\mathbf{g}(n+1)] = [\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)]^T [\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)] + [\mathbf{d}^T(nL) - \mathbf{g}^T(n+1)\mathbf{X}(nL)] \boldsymbol{\lambda}. \quad (5.13)$$

Zerando o gradiente de $J[\mathbf{g}(n+1)]$ com relação a $\mathbf{g}(n+1)$ e usando as restrições de erros *a posteriori* em subbandas nulos para derivar $\boldsymbol{\lambda}$, ou seja,

$$\frac{\nabla J[\mathbf{g}(n+1)]}{\nabla \mathbf{g}(n+1)} \triangleq 2\mathbf{g}(n+1) - 2\mathbf{g}(n) - \mathbf{X}(nL)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (5.14)$$

obté-m-se

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \mathbf{X}(nL)\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}. \quad (5.15)$$

Substituindo em $\bar{\mathbf{e}}_p(nL) = \mathbf{d}(nL) - \mathbf{X}^T(nL)\mathbf{g}(n+1)$, tem-se

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}}{2} = [\mathbf{X}^T(nL)\mathbf{X}(nL)]^{-1} \mathbf{e}(nL). \quad (5.16)$$

Finalmente, substituindo (5.16) em (5.15), chegamos a

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \beta \mathbf{X}(nL) \overbrace{[\mathbf{X}^T(nL)\mathbf{X}(nL)]^{-1} \mathbf{e}(nL)}^{\triangleq \boldsymbol{\chi}(nL)}, \quad (5.17)$$

onde

$$\mathbf{e}(nL) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{X}^T(nL)\mathbf{g}(n). \quad (5.18)$$

A inserção do tamanho do passo β na Eq. (5.17) nos permite equilibrar a taxa

de convergência e o desajuste em regime permanente do sistema adaptativo [2].

5.3 Análise do MSE em Regime Permanente do NSAF-SF

O desempenho em regime permanente quantifica a capacidade do sistema em estudo de seguir referências padrões e a rejeitar assintoticamente perturbações. Iremos nesta seção detalhar uma estimativa teórica que desenvolvemos para estimar o erro quadrático médio (MSE) em regime permanente do algoritmo NSAF-SF por meio de argumentos de balanceamento de energia [27], sem assumir qualquer modelo particular para os sinais de entrada.

Seja $\tilde{\mathbf{g}}(n) = \mathbf{g}^o - \mathbf{g}(n)$ o desvio entre o vetor que contém os coeficientes ideais dos filtros esparsos \mathbf{g}^o e $\mathbf{g}(n)$. Assim, a Eq. 5.17) pode ser escrita como

$$\tilde{\mathbf{g}}(n+1) = \tilde{\mathbf{g}}(n) - \beta \mathbf{X}(nL) \boldsymbol{\chi}^{-1}(nL) \mathbf{e}(nL). \quad (5.19)$$

Multiplicando ambos os lados de (5.19) por $\mathbf{X}^T(nL)$, obtemos

$$\underbrace{\mathbf{X}^T(nL) \tilde{\mathbf{g}}(n+1)}_{\triangleq \mathbf{e}_p(nL)} = \underbrace{\mathbf{X}^T(nL) \tilde{\mathbf{g}}(n)}_{\triangleq \mathbf{e}_a(nL)} - \beta \mathbf{e}(nL), \quad (5.20)$$

onde $\mathbf{e}_p(nL)$ e $\mathbf{e}_a(nL)$ são os vetores de erro *a posteriori* e *a priori*, respectivamente. Combinando (5.19) e (5.20), obtemos

$$\tilde{\mathbf{g}}(n+1) + \mathbf{X}(nL) \boldsymbol{\chi}^{-1}(nL) \mathbf{e}_a(nL) = \tilde{\mathbf{g}}(n) + \mathbf{X}(nL) \boldsymbol{\chi}^{-1}(nL) \mathbf{e}_p(nL). \quad (5.21)$$

Avaliando a energia de ambos os lados de (5.21) e aplicando o valor esperado, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{g}}(n+1)\|^2] + \mathbb{E} [\mathbf{e}_a^T(nL) \boldsymbol{\chi}^{-1}(nL) \mathbf{e}_a(nL)] = \\ \mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{g}}(n)\|^2] + \mathbb{E} [\mathbf{e}_p^T(nL) \boldsymbol{\chi}^{-1}(nL) \mathbf{e}_p(nL)]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

De (5.1) segue-se que $\mathbf{d}(nL) = \mathbf{X}^T(nL) \mathbf{g}^o + \boldsymbol{\nu}(nL)$, em cada subbanda, e, conseqüentemente,

$$\mathbf{e}(nL) = \mathbf{e}_a(nL) + \boldsymbol{\nu}(nL). \quad (5.23)$$

São feitas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- **A1:** o algoritmo adaptativo converge;
- **A2:** o ruído $\boldsymbol{\nu}(n)$ é independente e identicamente distribuído (i.i.d.), de média zero e estatisticamente independente de $\mathbf{x}(n)$;

- A3: no regime permanente, $\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)$ é independente de $\mathbf{e}_a(nL)$;
- A4: os elementos de $\mathbf{e}_a(nL)\mathbf{e}_a^T(nL)$ são processos estacionários conjuntos de forma que os elementos de $\boldsymbol{\mathcal{X}}(nL)$ variam lentamente em relação a $\mathbf{e}_a(nL)\mathbf{e}_a^T(nL)$; como resultado, $\mathbb{E}[\mathbf{e}_a(nL)\mathbf{e}_a^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}(nL)] \approx \mathbb{E}[\mathbf{e}_a(nL)\mathbf{e}_a^T(nL)] \mathbb{E}[\boldsymbol{\mathcal{X}}(nL)]$.
- A5: sinais em diferentes subbandas não estão correlacionados.

Os pressupostos A1 e A2 são fracos e usualmente adotados. O pressuposto A3 pode ser justificado pela observação de que cada elemento de $\boldsymbol{\mathcal{X}}(nL)$ é obtido de D amostras de seu correspondente sinal de entrada do subfiltro, em que cada elemento de $\mathbf{e}_a(nL)\mathbf{e}_a^T(nL)$ é obtido de uma amostra de seu respectivo erro de subbanda e, portanto, pode ser utilizado o princípio de cálculo da média [98]. O pressuposto A4 exige que as respostas de frequência dos filtros de análise não se sobreponham de forma significativa [40], implicando, assim, que os elementos fora das diagonais das matrizes $\mathbb{E}[\boldsymbol{\nu}_a(nL)\boldsymbol{\nu}_a^T(nL)]$, $\mathbb{E}[\mathbf{e}_a(nL)\mathbf{e}_a^T(nL)]$ e $\mathbb{E}[\boldsymbol{\mathcal{X}}(nL)]$ podem ser negligenciados.

Na seguinte análise, assumimos regime permanente ($n \rightarrow \infty$). De A1, temos $\mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{g}}(n+1)\|^2] = \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{g}}(n)\|^2]$, considerando

$$\mathbf{e}_p(nL) = \mathbf{e}_a(nL) - \beta\mathbf{e}(nL), \quad (5.24)$$

e empregando (5.22) combinado com (5.24), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{e}_a^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)\mathbf{e}_a(nL)] = \\ \mathbb{E}[(\mathbf{e}_a(nL) - \beta\mathbf{e}(nL))^T \boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)(\mathbf{e}_a(nL) - \beta\mathbf{e}(nL))]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Expandindo a equação acima, chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{e}_a^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)\mathbf{e}_a(nL)] = \mathbb{E}[\mathbf{e}_a^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)\mathbf{e}_a(nL)] - \\ \beta\mathbb{E}[\mathbf{e}_a^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)(\mathbf{e}(nL))] - \mathbb{E}[(\beta\mathbf{e}^T(nL))\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)(\mathbf{e}_a(nL))] + \\ \beta^2\mathbb{E}[\mathbf{e}^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)(\mathbf{e}(nL))] \end{aligned} \quad (5.26)$$

e cancelando-se os termos $\mathbb{E}[\mathbf{e}_a^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)\mathbf{e}_a(nL)]$ dos dois lados de (5.26), tem-se

$$\begin{aligned} \beta\mathbb{E}[\mathbf{e}_a^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)\mathbf{e}(nL)] - \beta\mathbb{E}[\mathbf{e}^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)(\mathbf{e}_a(nL))] + \\ \beta^2\mathbb{E}[\mathbf{e}^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)\mathbf{e}(nL)], \end{aligned} \quad (5.27)$$

ou

$$2\mathbb{E}[\mathbf{e}_a^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)\mathbf{e}(nL)] = \beta\mathbb{E}[\mathbf{e}^T(nL)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nL)\mathbf{e}(nL)]. \quad (5.28)$$

Utilizando A4, podemos desmembrar a Eq. (5.28), obtendo para a i -ésima subbanda a seguinte identidade

$$2\mathbb{E}[e_{a,i}^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)e_i(nL)] = \beta\mathbb{E}[e_i^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)e_i(nL)], \quad (5.29)$$

onde $e_{a,i}(nL)$ e $e_i(nL)$ são os i -ésimos elementos de $\mathbf{e}_a(nL)$ e $\mathbf{e}(nL)$, respectivamente, e $\mathcal{X}_{i,i}(nL)$ é o i -ésimo elemento de $\mathcal{X}(nL)$.

Usando A2 e (5.23) em (5.29), encontramos

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}[e_{a,i}^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)(e_{a,i}(nL) + \nu_i(nL))] = \\ \beta\mathbb{E}[(e_{a,i}(nL) + \nu_i(nL))^T \mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)(e_{a,i}(nL) + \nu_i(nL))]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Desenvolvendo a equação acima, temos

$$\begin{aligned} 2(\mathbb{E}[e_{a,i}^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)e_{a,i}(nL)] + \mathbb{E}[e_{a,i}^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)\nu_i(nL)]) = \\ \beta\mathbb{E}[e_{a,i}^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)e_{a,i}(nL)] + \beta\mathbb{E}[e_{a,i}^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)\nu_i(nL)] + \\ \beta\mathbb{E}[\nu_i^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)e_{a,i}(nL)] + \beta\mathbb{E}[\nu_i^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)\nu_i(nL)]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Simplificando (5.31), encontramos

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}[e_{a,i}^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)e_{a,i}(nL)] = \\ \beta\mathbb{E}[e_{a,i}^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)e_{a,i}(nL)] + \beta\mathbb{E}[\nu_i^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)\nu_i(nL)], \end{aligned} \quad (5.32)$$

de onde obtém-se

$$\mathbb{E}[e_{a,i}^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)e_{a,i}(nL)] = \frac{\beta}{2-\beta}\mathbb{E}[\nu_i^T(nL)\mathcal{X}_{i,i}^{-1}(nL)\nu_i(nL)], \quad (5.33)$$

que pode ser escrito, aplicando os pressupostos A2 e A3, como

$$\frac{\mathbb{E}\{|e_{a,i}(nL)|^2\}}{\mathbb{E}\{\mathcal{X}_{i,i}(nL)\}} = \frac{\beta}{2-\beta} \frac{\sigma_{\nu_i}^2}{\mathbb{E}\{\mathcal{X}_{i,i}(nL)\}}, \quad (5.34)$$

onde $\sigma_{\nu_i}^2$ é a variância do i -ésimo componente de subbanda do ruído de medição, a partir do qual, em estado estacionário,

$$\mathbb{E}\{|e_{a,i}(nL)|^2\} = \frac{\beta}{2-\beta}\sigma_{\nu_i}^2. \quad (5.35)$$

Desde que bancos de filtros para-unitários sejam empregados, obtemos

$$\mathbb{E}\{\|\mathbf{e}_a(nL)\|^2\} = \frac{\beta}{2-\beta}\sigma_{\nu}^2. \quad (5.36)$$

De (5.23) e A2, temos

$$\mathbb{E} \{ \|\mathbf{e}(nL)\|^2 \} = \mathbb{E} \{ \|\mathbf{e}_a(nL)\|^2 \} + \mathbb{E} \{ \|\boldsymbol{\nu}(nL)\|^2 \}. \quad (5.37)$$

Finalmente, de (5.36) e (5.37), encontramos uma estimativa da energia média de erro no estado estacionário, dada por

$$\mathbb{E} \{ \|\mathbf{e}(nL)\|^2 \} = \frac{\beta}{2-\beta} \sigma_\nu^2 + \sigma_\nu^2, \quad (5.38)$$

de onde resulta a expressão teórica para o MSE em estado estacionário

$$\text{MSE} = \mathbb{E} \{ \|\mathbf{e}(nL)\|^2 \} = \frac{2}{2-\beta} \sigma_\nu^2, \quad (5.39)$$

que revela que o MSE em regime permanente é relativamente independente do número de subbandas. Portanto, a utilização da estrutura adaptativa em subbandas proposta com $M \geq 2$ pode produzir um aumento na taxa de convergência para sinais de entrada coloridos sem degradar o MSE em estado estacionário. Cumpre aduzir a constatação de que a fórmula teórica de MSE (5.39) coincide com a do NLMS.

5.4 Análise da Complexidade do NSAF-SF

A fim de minimizar a carga computacional, uma estrutura maximamente decimada é escolhida ($M = L$), de sorte que as iterações são realizadas a uma taxa M vezes menor do que a taxa de amostragem do sinal de entrada. Nesse caso, os comprimentos dos subfiltros são¹ $D = (N + N_p)/M$ que, para $N \gg N_p$, temos $D \approx N/M$. Utilizando filtros seletivos $H_i(z)$, as respostas de frequência de filtros não-adjacentes não se sobrepõem e a seguinte aproximação pode ser feita:

$$x_{i,j}(n) \approx 0 \text{ para } |i - j| > 1. \quad (5.40)$$

A matriz \mathbf{X} definida em (5.11) se torna²

$$\mathbf{X} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{0,0} & \mathbf{x}_{0,1} & \mathbf{0}_{D,1} & \mathbf{0}_{D,1} & \dots & \mathbf{0}_{D,1} \\ \mathbf{x}_{1,0} & \mathbf{x}_{1,1} & \mathbf{x}_{1,2} & \mathbf{0}_{D,1} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{D,1} & \mathbf{x}_{2,1} & \mathbf{x}_{2,2} & \mathbf{x}_{2,3} & \ddots & \mathbf{0}_{D,1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{D,1} & \mathbf{0}_{D,1} & \dots & \mathbf{0}_{D,1} & \mathbf{x}_{M-2,M-1} & \mathbf{x}_{M-1,M-1} \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

¹Para simplicidade de notação, $N_p + N$ foi assumido como múltiplo de M .

²O índice de tempo foi omitido para todos os elementos por concisão; $\mathbf{0}_{D,1}$ é um vetor de dimensão $D \times 1$ totalmente preenchido por zeros.

que tem no máximo três elementos diferentes de zero em cada uma das suas linhas. À semelhança do que é relatado em [44], pode ser mostrado que os elementos fora da diagonal de $\mathbf{X}(nM) = \mathbf{X}^T(nM)\mathbf{X}(nM)$ podem ser desprezados. Portanto, podemos aplicar a aproximação

$$\mathbf{X}(nM) \approx \text{diag} \{ \|\mathbf{x}_{i,i}(nM)\|^2 \}, \quad (5.42)$$

onde $\text{diag} \{ \mathbf{u}_i \}$ é uma matriz diagonal cujo i -ésimo elemento é u_i . O algoritmo proposto resultante, denominado NSAF-SF (Filtragem Adaptativa em Subbandas Normalizada usando Filtros Esparsos), é resumido na Tabela 5.1, juntamente com o número de divisões/multiplicações requeridas em cada um dos seus passos, para N amostras de entrada. Nessa tabela, $\mathbf{x}_{2N_p-1}(nM)$ é o vetor de entrada de dimensão $(2N_p - 1) \times 1$, $\mathbf{d}(nM - \Delta)$ é o vetor resposta desejada atrasada de dimensão $N_p \times 1$, $\mathbf{e}_i(nM)$ é um vetor coluna com M amostras dos erros da i -ésima subbanda, \mathbf{h}_i é o vetor de dimensão $N_p \times 1$ com os coeficientes de $H_i(z)$, $\mathbf{h}_{i,j}$ é o vetor com os coeficientes $H_i(z)H_j(z)$ de dimensão $(2N_p - 1) \times 1$, e $\mathbf{f}_{i,j}$ é o vetor de dimensão $(N_p/M) \times 1$ relativo ao j -ésimo componente polifásico do banco de filtros de síntese [41]. Deve-se observar que $\mathbf{x}_{i+1,i}(nM) = \mathbf{x}_{i,i+1}(nM)$.

A Tabela 5.1 inclui o cálculo do sinal de erro em banda completa, requerido em aplicações como cancelador de eco acústico. Para outras aplicações, o sinal de saída, que é geralmente necessário, pode ser obtido utilizando um procedimento semelhante. Assumimos que os bancos de filtros são implementados diretamente, sem explorar as relações entre os seus filtros [47]. Parâmetros de regularização δ_i foram empregados para evitar problemas numéricos. Influenciado pelo ruído de medição, δ_i pode ser constante [70] ou variável [99].

A Tabela 5.2 apresenta a complexidade computacional dos algoritmos NSAF e NSAF-SF, considerando o número de multiplicações por amostra de entrada. Nas principais aplicações de algoritmos adaptativos em subbandas, tais como cancelamento de eco, tem-se $N \gg N_p$ e $N \gg M$. Em tais casos, a complexidade computacional do algoritmo NSAF é de aproximadamente $2N$ e do algoritmo de NSAF-SF é $6N/M$. Portanto, a proposta NSAF-SF apresenta uma diminuição de complexidade (em relação ao NSAF) por um fator de $M/3$, o que corresponde a uma redução de mais de 50% para $M = 8$ e aproximadamente 70% para $M = 16$.

Tamanhos de passos variáveis no tempo $\beta_i(n)$ podem ser aplicados nas subbandas, permitindo assim aliar uma convergência rápida a um baixo desajuste em regime permanente. Vários algoritmos de tamanho de passo variáveis têm sido propostos recentemente para o NSAF [67], [72], [100], que também podem ser utilizados no algoritmo NSAF-SF.

Se o sinal de erro em banda completa (ou o sinal de saída) do algoritmo NSAF-

Tabela 5.1: Algoritmo NSAF-SF

Passos	Multiplicações por N amostras de entrada
$\mathbf{x}_{i,i}(nM) = \mathbf{h}_{i,i}^T \mathbf{x}_{2N_p-1}(nM)$	$(2N_p - 1)M \approx 2N_p M$
$\mathbf{x}_{i,i+1}(nM) = \mathbf{h}_{i,i+1}^T \mathbf{x}_{2N_p-1}(nM)$	$(2N_p - 1)M \approx 2N_p M$
$d_i(nM) = \mathbf{h}_i^T \mathbf{d}(nM)$	$N_p M$
$\mathbf{e}(nM) = \mathbf{d}(nM) - \mathbf{X}^T(nM)\mathbf{g}(n)$	$3DM = 3(N + N_p)$
$\mathcal{X}(nM) = \text{diag} \{ \ \mathbf{x}_{i,i}\ ^2 + \delta_i \}$	$3M$
$\tilde{\mathbf{e}}(nM) = \beta \mathcal{X}(nM)\mathbf{e}(nM)$	$2M^\dagger$
$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \mathbf{X}(nM)\tilde{\mathbf{e}}(nM)$	$3DM = 3(N + N_p)$
$e(nM - j - \Delta_T) = \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{f}_{i,j}^T \mathbf{e}_i(nM)$	MN_p

$^\dagger M$ multiplicações e M divisões

Tabela 5.2: Complexidade Computacional

Algoritmo	Multiplicações por amostras de entrada
NSAF-SF	$6(N + N_p)/M + 6N_p + 5$
NSAF	$2N + 3N_p M + 2M + 2$

SF é obtido por um banco de filtros de síntese, tal como indicado na Tabela 5.1, existe um atraso global de $\Delta_T = \Delta_T + N_p - 1 = 2N_p + M - 1$ amostras no que tange ao cálculo de uma forma direta. O atraso correspondente para o algoritmo NSAF é $\Delta_T = N_p - 1$. Em aplicações que necessitam de atrasos muito baixos, o número de subbandas M e o comprimento do filtro protótipo N_p devem ser escolhidos suficientemente pequenos para atenderem à especificação de atraso máximo. Por outro lado, esse atraso pode ser evitado através da filtragem do sinal de entrada na taxa do sinal original, o que requer N multiplicações adicionais por amostra de entrada para ambos os algoritmos. Deve ser observado que o cálculo dos coeficientes do sistema em banda completa no algoritmo NSAF demanda DN_p/M multiplicações adicionais, o que pode ser reduzido através da realização de um mapeamento mais esparsos dos coeficientes, em vez de a cada M amostras.

Partindo da formulação matemática da Tabela 5.2, apresentamos a Fig. 5.3 que mostra a relação, em termos de complexidade computacional, entre os algoritmos NSAF-SF e o NSAF, onde foi considerado $N_p = 32$, $N = 1024$ e $M \in \{2, 4, 8, \dots, 32\}$.

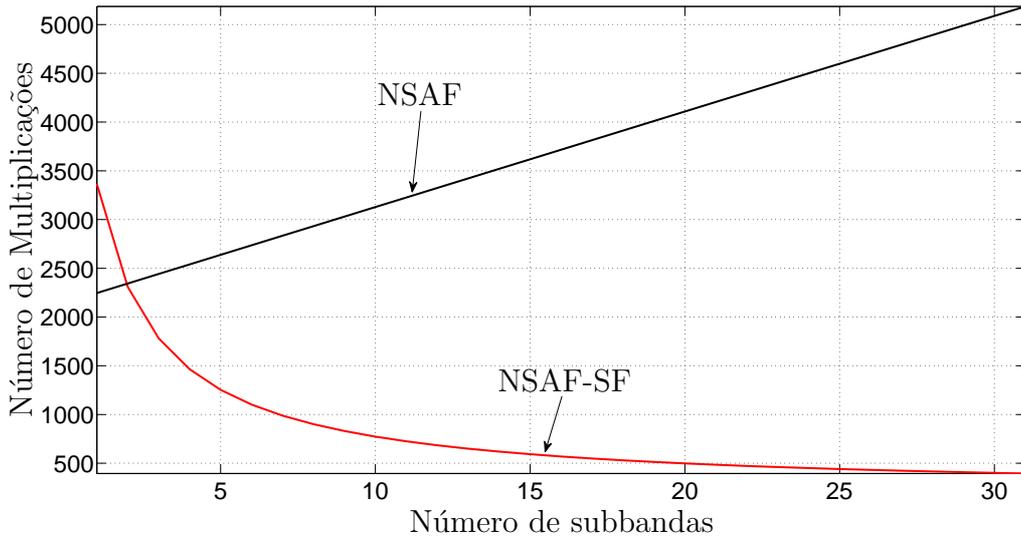


Figura 5.3: Complexidade Computacional dos algoritmos NSAF e NSAF-SF.

5.5 Resultados de Simulações com o NSAF-SF

Em todas as simulações apresentadas a seguir, filtros modulados por cosseno foram projetados de acordo com a abordagem de [101] com $N_p = 32$ coeficientes.

5.5.1 Predição do MSE

Nessa simulação, avaliou-se o estado estacionário MSE do algoritmo proposto (com a média de 20.000 valores de erro em regime permanente) com $M \in \{2, 4, 8\}$ e $N_p = 32$. O MSE empírico resultante foi comparado ao teórico da Eq. (5.39). A função de transferência a ser identificada é o modelo 4 da norma ITU G.168 [102], com $N = 128$ coeficientes. Para o MSE da simulação, β foi variado no intervalo $(0, 1]$. Usamos o parâmetro de regularização $\delta = 10^{-6}$ e adicionamos a $d(n)$ um ruído gaussiano branco $\nu(n)$ com variância $\sigma_\nu^2 = 10^{-3}$. Foram utilizados dois sinais de entrada diferentes. A Fig. 5.4(a) apresenta os resultados produzidos para um sinal de entrada gaussiano branco de variância unitária. A Fig. 5.4(b) mostra os resultados para um sinal de entrada obtido pela aplicação de um sinal branco gaussiano de variância unitária como entrada de um filtro com função de transferência $\frac{1+0,5z^{-1}+0,81z^{-2}}{1-0,59z^{-1}+0,4z^{-2}}$. Em ambos os casos, a Fig 5.4 mostra uma boa concordância entre os MSEs das simulações e os teóricos no estado estacionário, especialmente para um sinal de entrada branco.

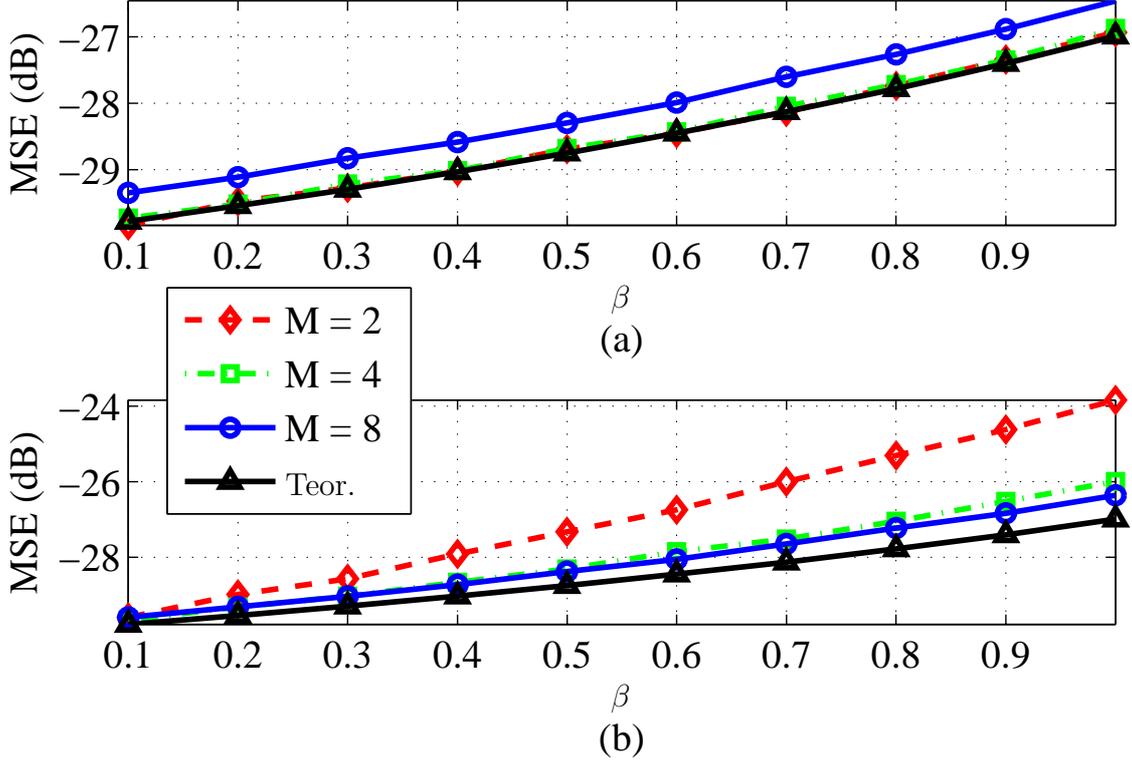


Figura 5.4: MSEs simulados e os teóricos em regime permanente, em função de β : (a) sinal de entrada branco; (b) sinal de entrada colorido.

5.5.2 Problema de Identificação

Nessas simulações, os desempenhos dos algoritmos NSAF [44] e NSAF-SF são comparados no problema de identificação de sistema para uma aplicação de cancelamento de eco acústico. A entrada foi um sinal AR(1), produzido pela filtragem de uma sequência aleatória gaussiana branca com média zero através do sistema de primeira ordem $\frac{1}{1-0.95z^{-1}}$. Um ruído branco gaussiano foi adicionado ao sinal desejado $d(n)$, com SNR de 30 dB. O vetor de coeficientes ótimo \mathbf{h}^o foi formado, tendo as primeiras $N = 1024$ amostras da resposta ao impulso medida de uma sala de aula disponível no “*Institute of Communication System and Data Processing*”³. Os algoritmos foram implementados usando $\beta = 1$ e o tamanho de passo variável (VSS) proposto em [67]. Os parâmetros de regularização δ_i foram mantidos constantes com valores escolhidos de acordo com [100]. A Fig. 5.5 mostra a evolução da média do desvio normalizado $\text{NMSD} = 10\log_{10} \{\mathbb{E} [\|\tilde{\mathbf{g}}(n)\|^2 / \|\mathbf{g}^o\|^2]\}$ para os algoritmos testados, com $M = 2$ e $M = 8$. O NMSD foi obtido pela média ao longo de 30 ensaios independentes. Os algoritmos NSAF e NSAF-SF apresentaram taxas de convergência semelhantes, as quais foram mais rápidas para 8 subbandas e tamanhos de passos

³<http://www.ind.rwth-aachen.de/en/research/tools-downloads/aachen-impulse-response-database>

variáveis. Considerando $M = 8$ subbandas, o número necessário de multiplicações por amostra de entrada é de 1637 para o NSAF-SF e 5138 para o NSAF, correspondendo aproximadamente a uma redução de 2 vezes no custo computacional quando o algoritmo proposto NSAF-SF é empregado. Para uma taxa de amostragem de 8 kHz, o atraso do sinal de erro é de 16 ms ($\delta_T = 127$) para o NSAF e de 31 ms ($\delta_T = 247$) para o NSAF-SF.

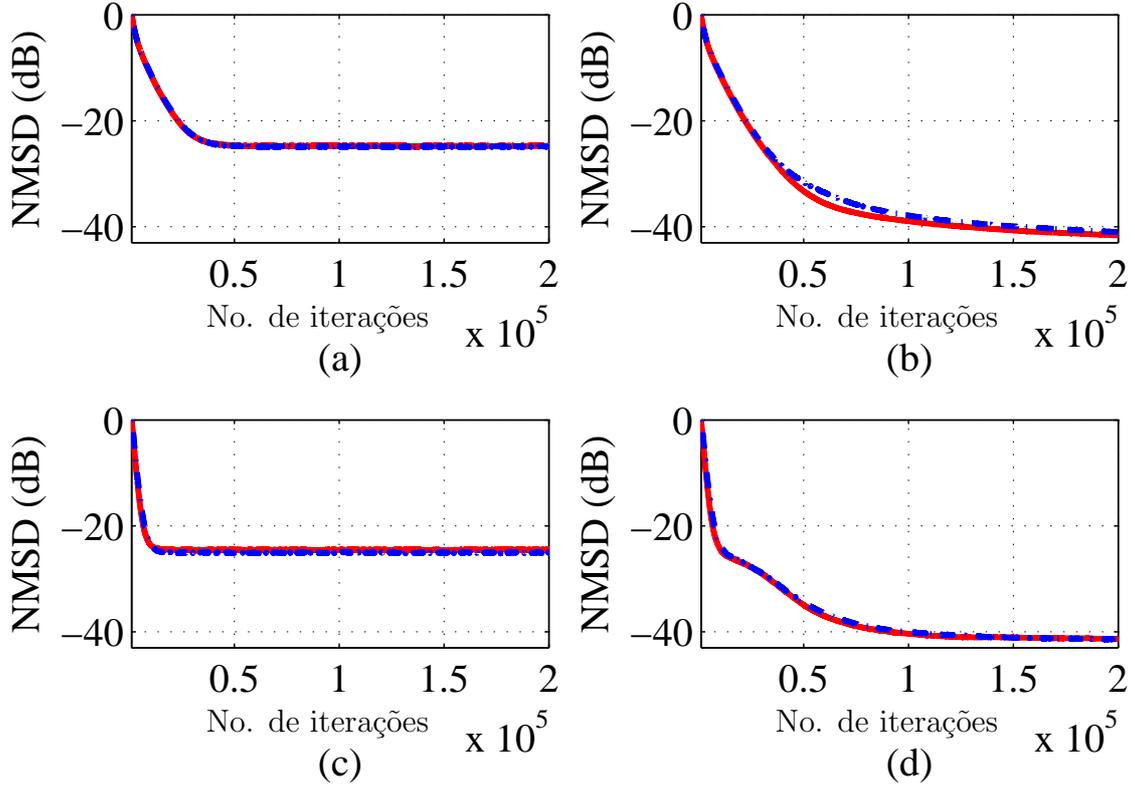


Figura 5.5: NMSDs do NSAF (em vermelho) e NSAF-SF (em azul tracejado) para a simulação de identificação de sistema. (a) $M = 2$, $\beta = 1$; (b) $M = 2$, VSS; (c) $M = 8$, $\beta = 1$; (d) $M = 8$, VSS.

5.6 Filtro Adaptativo em Subbandas com Filtros Esparsos e Seleção de Subbandas (NSAF-SF-SS)

Embora o NSAF-SF (algoritmo proposto) seja vantajoso com relação ao NSAF no que tange ao custo computacional, propomos nesta seção um critério de seleção de subbandas capaz de reduzir ainda mais o custo computacional. Lee e Gan mostraram que filtros com mais subbandas apresentam taxas de convergência mais altas [44]. Suponha que o algoritmo NSAF-SF adota um número de subbandas $M > M_s$.

A proposta de seleção consiste em empregar apenas M_s subbandas (do total de M subbandas). Tendo como restrição o emprego de $M_s < M$ subbandas, cabe adotar algum critério que escolha um subconjunto do total de subbandas que maximize a taxa de convergência. Fazemos $T_{M_s} = \{t_1, \dots, t_{M_s-1}, t_{M_s}\}$ denotar um subconjunto M_s de $\{1, 2, \dots, M\}$, onde t_i indica os índices das subbandas selecionadas. Definimos uma matriz de seleção de subbandas $\mathbf{S}_{T_{M_s}}$ como uma matriz diagonal com M_s elementos iguais à unidade nas posições indicadas por T_{M_s} , sendo os outros elementos iguais a zero. Assim, a equação de atualização do NSAF-SF seletivo pode ser escrita como

$$\mathbf{g}_{M_s}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \beta \mathbf{X}(nM) \overbrace{[\mathbf{X}^T(nM)\mathbf{X}(nM)]^{-1}}^{\triangleq \mathbf{x}(nM)} \mathbf{S}_{T_{M_s}} \mathbf{e}(nM). \quad (5.43)$$

A abordagem proposta pretende buscar um subconjunto T_{M_s} que minimize a degradação do desempenho em comparação com o NSAF-SF usando M subbandas. Se assumirmos que a correlação de $\mathbf{x}_i(n)$ se reduz por causa do efeito de pré-branqueamento (o que é explicado em [44]), podemos facilmente obter

$$\|\mathbf{g}_{M_s}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2 = \beta^2 [\mathbf{X}^T(nM)\mathbf{X}(nM)]^{-1} \mathbf{e}^T(nM) \mathbf{S}_{T_{M_s}} \mathbf{e}(nM). \quad (5.44)$$

Para uma compreensão mais qualitativa de seleção das subbandas, adaptamos a interpretação geométrica na Fig. 5.6. Pelo teorema de Pitágoras, o quadrado da norma do erro *a posteriori* para M subbandas é

$$\|\mathbf{g}_{M_s}(n+1) - \mathbf{g}(n+1)\|^2 = \|\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2 - \|\mathbf{g}_{M_s}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2. \quad (5.45)$$

Substituindo a Eq. (5.45) na Eq. (5.44), temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_{M_s}(n+1) - \mathbf{g}(n+1)\|^2 &= \|\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2 - \\ &\quad \beta^2 [\mathbf{X}^T(nM)\mathbf{X}(nM)]^{-1} \mathbf{e}^T(nM) \mathbf{S}_{T_{M_s}} \mathbf{e}(nM). \end{aligned} \quad (5.46)$$

Considerando que os sinais de entrada são descorrelacionados, a equação acima pode ser simplificada como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_{M_s}(n+1) - \mathbf{g}(n+1)\|^2 &= \|\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2 - \\ &\quad \beta^2 \tilde{\mathbf{X}}(nM) \mathbf{e}^T(nM) \mathbf{S}_{T_{M_s}} \mathbf{e}(nM), \end{aligned} \quad (5.47)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{X}}(nM) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{x}_1(nM)\|^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\|\mathbf{x}_M(nM)\|^2} \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

Esta equação pode ser simplificada na forma não-matricial

$$\|\mathbf{g}_{M_s}(n+1) - \mathbf{g}(n+1)\|^2 = \|\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2 - \beta^2 \sum_{i=1}^{M_s} \frac{e_{t_i}^2(nM)}{\|\mathbf{x}_{t_i}(nM)\|^2}.$$

Como podemos ver na Fig. 5.6, um valor maior de (5.44) garante que a velocidade de convergência seja maior. Em outras palavras, quando (5.44) tem o valor máximo entre todos os subgrupos M_s e o vetor de erro *a priori* é dado, a norma quadrada do vetor de erro *a posteriori* é minimizada.

$$d_1(n) = \mathbf{x}_1(n)\mathbf{g}(n+1)$$

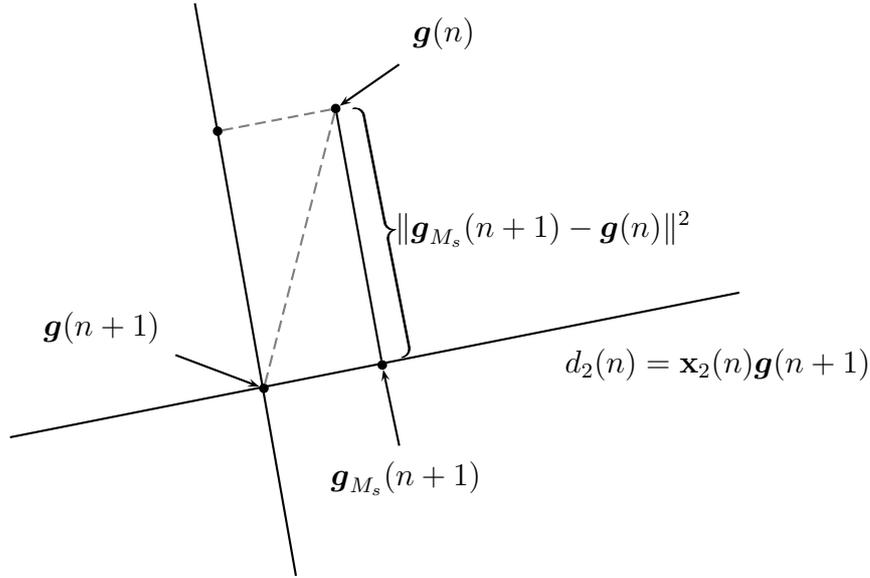


Figura 5.6: Exemplo de atualização de coeficientes no algoritmo proposto para $N = 2$, $M_s = 1$, e $M = 2$.

O algoritmo proposto atualiza o vetor de coeficientes de modo a maximizar a diminuição do desvio quadrático entre todos os M_s subconjuntos possíveis. Assim, encontramos os subconjuntos que satisfaçam

$$\max \arg T_{M_s} \sum_{i=1}^{M_s} \frac{e_{t_i}^2(nM)}{\|\mathbf{x}_{t_i}(nM)\|^2}. \quad (5.49)$$

Podemos ver que o valor de atualização resultante é a soma independente de termos associados às M_s subbandas. Para selecionar o conjunto T_{M_s} que maximiza a

taxa de convergência do algoritmo proposto, primeiro reordenamos as subbandas segundo o valor de $e_{t_i}^2(nM)/\|\mathbf{x}_{t_i}(nM)\|^2$. Por selecionar as subbandas que apresentam os maiores valores $e_{t_i}^2(nM)/\|\mathbf{x}_{t_i}(nM)\|^2$, podemos dizer que o algoritmo proposto seleciona as subbandas ideais que maximizam a velocidade de convergência. Assim, a diminuição do desvio quadrático do algoritmo proposto será

$$\sum_{i=1}^{M_s} \frac{e_{t_i}^2(nM)}{\|\mathbf{x}_{t_i}(nM)\|^2} = \frac{e_{t_1}^2(nM)}{\|\mathbf{x}_{t_1}(nM)\|^2} + \frac{e_{t_2}^2(nM)}{\|\mathbf{x}_{t_2}(nM)\|^2} + \dots + \frac{e_{t_{M_s}}^2(nM)}{\|\mathbf{x}_{t_{M_s}}(nM)\|^2}. \quad (5.50)$$

O SS-APSAF (APSAF com Seleção de Subbanda) proposto seleciona os M_s subconjuntos de bandas para cada atualização maximizando o valor de (5.50), obtendo um subconjunto T_{M_s} ótimo de $\{1, 2, \dots, M\}$. A matriz de seleção $\mathbf{S}_{T_{M_s}}$ é definida com base no T_{M_s} , como anteriormente explicado. Finalmente, a equação de atualização proposta para o SS-APSAF fica

$$\mathbf{g}_{M_s}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \beta \mathbf{X}(nM) \tilde{\mathbf{X}}(nM) \mathbf{e}^T(nM) \mathbf{S}_{T_{M_s}} \mathbf{e}(nM), \quad (5.51)$$

onde $T_{M_s} = \{t_1, t_2, \dots, t_{M_s}\}$ e $1 \leq M_s < M$.

5.6.1 Resultado das Simulações

O desempenho do algoritmo proposto é ilustrado através da realização das simulações computacionais de estimativa de canal de 1024 coeficientes. Assume-se que o filtro adaptativo e o canal desconhecido possuem o mesmo número de coeficientes. O sinal de entrada $x(n)$ é obtido por filtragem de uma sequência aleatória gaussiana branca de média nula e variância unitária através de um sistema de primeira ordem autorregressivo $G(z) = 1/(1 - 0.9z^{-1})$. Como resultado, um sinal de entrada gaussiano altamente correlacionado é obtido. A razão sinal-ruído (SNR) é calculada como $\text{SNR} = 10 \log(\mathbb{E}[y^2(n)]/\mathbb{E}[\nu^2(n)])$, onde $y(n) = (\mathbf{g}^0)^T(n) \mathbf{x}_i(n)$. O ruído de medição $\nu(n)$ é adicionado a $y(n)$ com $\text{SNR} = 20$ dB. O tamanho do passo foi definido como $\beta = 1$. Os resultados das simulações são obtidos tomando a média do conjunto de desvios médios quadráticos normalizados (NMSD) de 100 ensaios independentes. Bancos de filtros modulados por cosseno com $M_s = 4$ e $M = 8$ subbandas são usados nessas simulações. O comprimento do filtro protótipo é 32.

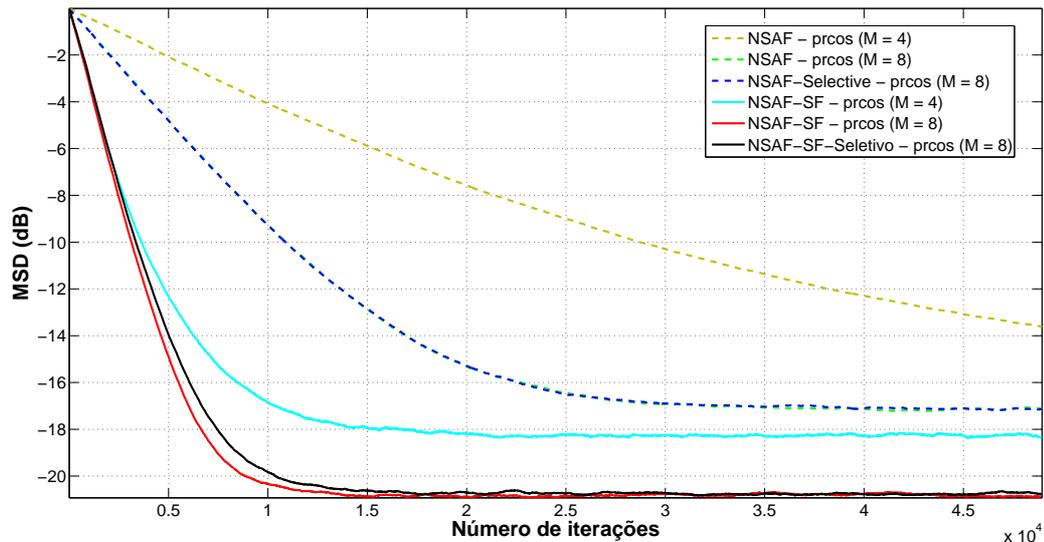


Figura 5.7: MSD do NSAF-SF-SS

A Fig. 5.7 mostra o desempenho (MSD) entre os algoritmos NSAF com 4 subbandas, NSAF com 8 subbandas, NSAF-Seleativo, NSAF-SF com 4 subbandas, NSAF-SF com 8 subbandas e NSAF-SF-Seleativo. Como pode ser visto, o NSAF-Seleativo apresentou desempenho equivalente ao NSAF com 8 subbandas e o mesmo comportamento foi apresentado também pelo NSAF-SF-SS com relação ao NSAF-SF com 8 subbandas. Portanto, podemos inferir que a metodologia empregada de redução do número de subbandas possibilita redução da complexidade computacional mantendo o desempenho.

5.7 Conclusão

Neste capítulo, foi proposto um novo algoritmo adaptativo em subbandas que recorre a uma decomposição nas subbandas do erro em banda cheia, utilizando o mesmo banco de filtros de análise empregado na decomposição do sinal de entrada. A equação de atualização foi obtida por meio de uma abordagem de perturbação mínima com restrições dos erros *a posteriori* nas subbandas. Tal estrutura proporciona uma redução na complexidade computacional conforme apresentado na Tabela 5.2 e ilustrado na Fig. 5.3.

Nas simulações foi demonstrado que, quando o fator de decimação é igual ao número de subbandas M , o algoritmo proposto apresenta uma taxa de convergência comparável à taxa de convergência do algoritmo NSAF, com uma redução da complexidade computacional da ordem de $M/3$, o que implica para $M = 8$, o número de multiplicações por amostra de entrada para o NSAF-SF foi de 1637 multiplicações e

para o NSAF foi de 5138 multiplicações. Os resultados da simulação (vide Fig. 5.5) confirmam tal constatação de que não há perda visível no desempenho de algoritmo proposto.

Foi desenvolvida também uma análise teórica para prever o MSE em estado estacionário do algoritmo proposto, a qual forneceu uma fórmula analítica razoavelmente aderente aos resultados das simulações.

Por fim, apresentamos o algoritmo NSAF-SF com seleção de subbandas, cuja derivação se dá por meio da avaliação da distância entre os coeficientes atualizados dos subfiltros adaptativos contendo todas as subbandas com os coeficientes da solução proposta, ou seja, contendo um número reduzido de subbandas. Este processo proporcionou um desempenho melhor do que o algoritmo convencional (vide Fig. 5.7).

Capítulo 6

Estrutura em Subbandas Proposta com Reúso de Dados

6.1 Introdução

Este capítulo apresenta um novo algoritmo adaptativo em subbandas, denominado filtro adaptativo de projeção afin em subbandas (APSAF), o qual insere a estrutura do Capítulo 5 no paradigma do reúso de dados por meio de projeções afins. À semelhança do Capítulo 5, os subfiltros são esparsos e responsáveis tanto por identificar o sistema desconhecido quanto por reconstruir o sinal de saída. O APSAF emprega o princípio da perturbação mínima dos coeficientes adaptativos e o cancelamento de um número selecionado das mais recentes amostras (decimadas) do erro *a posteriori* nas subbandas, de sorte a promover a adaptação a uma taxa inferior à do sinal de entrada. Explorando a propriedade da decorrelação entre os sinais em diferentes subbandas, a proposta resulta numa complexidade computacional reduzida quando comparada com o recentemente proposto Filtro Adaptativo em Subbandas Estruturado em Multibandas Adaptativas (IMSAF) [103]. Diferentemente do APA em subbandas de [104] e [105], o APSAF emprega uma abordagem de subbandas em malha fechada [83], na qual o erro global e todos os coeficientes adaptativos são simultaneamente considerados na função custo de otimização.

Por fim será exposto o algoritmo de adaptação com projeção evolutiva [106] e também o algoritmo adaptativo em subbandas na estrutura proposta que emprega a automatização dinâmica do número de vetores de entrada em função da dinâmica do erro quadrático apresentado pelo algoritmo.

6.2 APA em Subbandas com Filtros Esparsos - (APSAF)

6.2.1 Algoritmo em Subbandas APSAF

A estrutura de subbandas utilizada, mostrada na Fig. 5.1 para M subbandas, é composta de um banco de filtro de análise $H_i(z)$ seguido por subfiltros esparsos $G_i(z^L)$ [1]. A função de transferência de banda cheia pode ser expressa como $H(z) = \sum_{i=0}^{M-1} H_i(z)G_i(z^L)$. Como visto no Capítulo 5, o uso de um banco de filtros de análise com reconstrução perfeita permite à estrutura modelar exatamente qualquer sistema FIR. Para a identificação de um filtro FIR de comprimento N empregando fator de esparsidade L igual ao número de subbandas N , o número de coeficientes de adaptação de cada subfiltro deve ser pelo menos $D = (N + N_p)/M$, onde N_p é o comprimento dos filtros de análise $H_i(z)$.

Da mesma forma que o algoritmo NSAF-SF apresentado no Capítulo 5, o APSAF deriva do diagrama de malha fechada mostrado na Fig. 5.2. A fim de minimizar a complexidade computacional, as iterações são realizadas a uma taxa M vezes mais lenta do que a taxa de amostragem do sinal de entrada, empregando uma função de custo dependente dos erros de subbanda maximamente decimados $e_{i,D}(n)$.

Com base no princípio da perturbação mínima [2], podemos garantir a redução progressiva do erro da estrutura adaptativa zerando K_i amostras dos erros *a posteriori* decimados nas subbandas

$$\epsilon_{i,k}(nM) = d_i(nM - kM) - \mathbf{x}_i^T(nM - kM)\mathbf{g}(n + 1), \quad (6.1)$$

para $k = 0, 1, \dots, K_i - 1$ e $i = 0, 1, \dots, M - 1$.

Definindo-se a matriz de entrada da i -ésima subbanda (de dimensão $DM \times K_i$) como:

$$\mathbf{X}_i(n) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(n) & \mathbf{x}_i(n-1) & \dots & \mathbf{x}_i(n-K_i+1) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

e o vetor desejado (de dimensão $K_i \times 1$) da i -ésima subbanda

$$\mathbf{d}_i(n) \triangleq \begin{bmatrix} d_i(n) & d_i(n-1) & \dots & d_i(n-K_i+1) \end{bmatrix}^T, \quad (6.3)$$

e utilizando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, o problema de otimização com restrições pode ser transformado na minimização da seguinte função custo sem restrições:

$$\mathcal{F}[\mathbf{g}(n+1)] = \|\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2 + \boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{d}(nM) - \mathbf{X}^T(nM)\mathbf{g}(n+1)], \quad (6.4)$$

onde $\boldsymbol{\lambda}$ é o vetor com multiplicadores de Lagrange,

$$\mathbf{X}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(n) & \mathbf{X}_1(n) & \dots & \mathbf{X}_{M-1}(n) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

e

$$\mathbf{d}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^T(n) & \mathbf{d}_1^T(n) & \dots & \mathbf{d}_{M-1}^T(n) \end{bmatrix}^T. \quad (6.6)$$

Zerando o gradiente de $\mathcal{F}[\mathbf{g}(n+1)]$ em relação a $\mathbf{g}(n+1)$ e recorrendo à imposição de que os erros *a posteriori* nas subbandas sejam nulos para derivar $\boldsymbol{\lambda}$, obtém-se

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \beta \mathbf{X}(nM) \overbrace{[\mathbf{X}^T(nM) \mathbf{X}(nM)]^{-1}}^{\triangleq \boldsymbol{\mathcal{X}}(nM)} \mathbf{e}(nM), \quad (6.7)$$

onde $\mathbf{e}(nM) \triangleq \mathbf{d}(nM) - \mathbf{X}^T(nM) \mathbf{g}(n)$. A inserção do tamanho do passo β permite equilibrar a taxa de convergência e o desajuste do algoritmo adaptativo no estado estacionário [2].

Empregando-se filtros seletivos $H_i(z)$, de modo que as respostas de frequência dos filtros não-adjacentes não se sobreponham, temos $x_{ij}(n) \approx 0$ para $|i-j| > 1$, e as linhas da matriz $\mathbf{X}_i(nM)$ definida em (6.5) assumem a forma

$$\left[\mathbf{0}_{i,i-2}^T \ \mathbf{x}_{i,i-1}^T(nM - kM) \ \mathbf{x}_{i,i}^T(nM - kM) \ \mathbf{x}_{i,i+1}^T(nM - kM) \ \mathbf{0}_{i,i+2}^T \right]^T, \quad (6.8)$$

o que significa que há no máximo três elementos por linha diferentes de zero. À semelhança do que é relatado em [44] e [107], pode ser demonstrado que as correlações cruzadas $\mathbf{x}_i^T(nM) \mathbf{x}_j(nM - kM)$ são insignificantes para $i \neq j$. Portanto, temos $\mathbf{X}_i^T(nM) \mathbf{X}_j(nM) \approx \mathbf{0}$, para $i \neq j$, motivando a seguinte aproximação diagonal em bloco

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}(nM) \approx \text{blk-diag} \{ \boldsymbol{\mathcal{X}}_i(nM) \}, \quad (6.9)$$

onde os blocos diagonais (blk-diag) são matrizes ao longo da diagonal da matriz de $\boldsymbol{\mathcal{X}}_i(nM)$ de dimensão $K_i \times K_i$.

O algoritmo APSAF proposto é resumido na Tabela 6.1, juntamente com o número de multiplicações requeridas para implementar cada um dos seus passos. Da mesma forma que no Capítulo 5, também é explicitado o cálculo do sinal de erro em banda cheia, que é exigido no cancelamento de eco acústico. Partimos do princípio de que os bancos de filtros são implementados diretamente¹; a j -ésima coluna $\left[\mathbf{f}_{0,j}^T \dots \mathbf{f}_{N_p/M-1,j}^T \right]$ da matriz \mathbf{F} , de dimensão $M \times N_p$, é formada pelos coeficientes da j -ésima componente polifásica dos filtros de síntese $F_i(z) = \sum_{n=0}^{N_p-1} f_i(n) z^{-n}$,

¹Menos multiplicações seriam necessárias, explorando as relações entre esses filtros [47]. Note que $x_{i+1,i}(nM) = x_{i,i+1}(nM)$.

Tabela 6.1: Algoritmo APSAF

Passos	Multiplicações
$n = 1, 2, \dots; i = 0, 1, \dots, M - 1$	para M amostras de entrada
$\mathbf{x}_{i,i}(nM) = \mathbf{h}_{i,i}^T \mathbf{x}_{2N_p-1}(nM)$	$2N_p M$
$\mathbf{x}_{i,i+1}(nM) = \mathbf{h}_{i,i+1}^T \mathbf{x}_{2N_p-1}(nM)$	$2N_p M$
$d_i(nM) = \mathbf{h}_i^T \mathbf{d}_P(nM)$	$N_p M$
$\mathbf{e}_i(nM) = \mathbf{d}_i(nM) - \mathbf{X}_i^T(nM) \mathbf{g}(n)$	$3D (\sum_{i=0}^{M-1} K_i)$
$\mathcal{X}_i(nM) = \mathbf{X}_i^T(nM) \mathbf{X}_i(nM) + \delta_i \mathbf{I}$	$3 (\sum_{i=0}^{M-1} 2K_i)$
$\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) = \beta \mathcal{X}_i^{-1}(nM) \mathbf{e}_i(nM)$	$\sum_{i=0}^{M-1} \mathcal{O}(K_i^3)$
$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \mathbf{X}(nM) \tilde{\mathbf{e}}(nM)$	$3D (\sum_{i=0}^{M-1} K_i)$
$e(nM - j) = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{e}}_i(nM)$	$N_p M$

onde

$\mathbf{h}_{i,j}$: vetor de dimensão $(2N_p - 1) \times 1$ com coeficientes de $H_i(z)H_j(z)$

$\mathbf{x}_{2N_p-1}(nM) = [x(nM) \ x(nM - 1) \ \dots \ x(nM - 2N_p + 1)]^T$

\mathbf{h}_i : vetor de dimensão $N_p \times 1$ com coeficientes de $H_i(z)$

$\mathbf{d}_{N_p}(nM) = [d(nM - \Delta) \ d(nM - \Delta - 1) \ \dots \ d(nM - \Delta - N_p + 1)]^T$

$\mathbf{X}_i(nM), \mathbf{d}_i(n), \mathbf{X}(n)$: definidos, respectivamente, em (6.2), (6.5), (6.6)

$\tilde{\mathbf{e}}(nM) = [\tilde{\mathbf{e}}_0^T(nM) \ \tilde{\mathbf{e}}_1^T(nM) \ \dots \ \tilde{\mathbf{e}}_{M-1}^T(nM)]^T$

$\mathbf{e}(nM) = [e(nM) \ e(nM - 1) \ \dots \ e(nM - N + 1)]^T$

\mathbf{F} : matriz $M \times N_p$ formada pelos componentes polifásicos de $F_i(z)$

$\mathbf{e}_i(nM) = [e_i(nM) \ e_i((n - 1)M) \ \dots \ e_i((n - N_p/M + 1)M)]^T$

$\tilde{\mathbf{e}}(nM) = [\mathbf{e}_0^T(nM) \ \mathbf{e}_1^T(nM) \ \dots \ \mathbf{e}_{M-1}^T(nM)]^T$

que é descrita por $\mathbf{f}_{i,j} = [f_i(j) \ f_i(j + M) \ \dots \ f_i(j + (N_p/M - 1)M)]^T$. Os parâmetros de regularização δ_i foram empregados para evitar problemas numéricos. Em [108], uma expressão ótima para o parâmetro de regularização do APA, expressa por $\delta = N\sigma_x^2(1 + \sqrt{1 + \text{SNR}})/\text{SNR}$ foi obtida, onde $\text{SNR} \triangleq \sigma_d^2/\sigma_v^2$. A derivação apresentada em [108] pode ser facilmente estendida para o APSAF, resultando em

$$\delta_i = N\sigma_{x_i}^2 \left(1 + \sqrt{1 + \text{SNR}_i}\right) / \text{SNR}_i, \quad (6.10)$$

onde $\text{SNR}_i \triangleq \sigma_{d_i}^2/\sigma_{v_i}^2$. O emprego de parâmetros de regularização distintos, calculados usando a energia de entrada e a razão sinal-ruído em cada subbanda, podem ser vantajosos para as propriedades de convergência. As variâncias podem ser estimadas *a priori*, obtidas recursivamente ou por meio de blocos [88].

6.2.2 Complexidade Computacional do APSAF

Uma vez que no APSAF os coeficientes são atualizados apenas a cada M amostras, a Tabela 6.1 mostra o número de multiplicações necessárias para implementar cada passo para cada M amostras de entrada. A forma simplificada de $\mathbf{X}_i(n)$, cujas

colunas são definidas em [109], foi empregada no cálculo de $\mathbf{e}_i(nM)$ e $\mathbf{X}(nM)$, e a aproximação de diagonais em bloco de [27] foi empregada na equação de atualização. Como em [103], é assumido que $\mathbf{X}_i(n)$ é calculado recursivamente e que $\tilde{\mathbf{e}}(nM)$ é obtido pela solução direta do sistema linear de K_i equações.

A Tabela 6.2 apresenta o número de multiplicações por amostra de entrada exigido pelo APSAF, considerando que a mesma ordem de projeção K é empregada em todas as subbandas. Essa expressão foi obtida substituindo $D = (N + N_p)/M$ e $K_i = K$ nos termos da segunda coluna da Tabela 6.1, adicionando-os e dividindo o resultado por M . Para efeito de comparação, os números de multiplicações requeridas pelo IMSAF e APA, dados em [103], são também mostrados na Tabela 6.2. Nas principais aplicações de algoritmos adaptativos em subbandas, tais como cancelamento de eco, temos que $N \gg M$ e $N \gg N_p$. Quando K é suficientemente pequeno para que o primeiro termo de cada expressão da Tabela 6.2 seja muito maior do que os outros, o número de multiplicações por iteração do IMSAF e APA é aproximadamente $2KN$, enquanto que a do APSAF é de $6KN/M$. Portanto, o APSAF proposto reduz a complexidade por um fator de aproximadamente $M/3$. Quando K não é tão pequeno, os segundos termos, que são iguais para o APA e o APSAF e M^2 vezes maiores que os do IMSAF, devem ser levados em consideração.

A técnica de filtragem recursiva e atualização de filtro pelas iterações em descida coordenada dicotômica (DCD)², empregada em [109] para obter uma implementação do APA com baixa complexidade, também pode ser aplicada para reduzir o número de multiplicações do APSAF. Com a introdução da filtragem recursiva, os primeiros termos das expressões da Tabela 6.2 são $(3K + 1)(N + N_p)/M + K^2 + 2$ para o APSAF e $(K + 1)N + K^2 + 2$ para o IMSAF e o APA, resultando, para $N \gg K$, uma redução de duas vezes no número de multiplicações para os três algoritmos.

Se o sinal de erro de banda cheia (ou saída) do algoritmo APSAF é obtido por um banco de filtros de síntese, tal como indicado na Tabela 6.1, um atraso global de $2N_p$ amostras é produzido nesse sinal. O atraso correspondente para o algoritmo IMSAF é N_p . Em aplicações que necessitam de atrasos mais baixos, o número de subbandas M e o comprimento N_p do filtro protótipo devem ser escolhidos pequenos o suficiente de modo a atender à especificação de atraso máximo. Alternativamente, esse atraso pode ser evitado através da filtragem do sinal de entrada a uma taxa elevada, o que requer N multiplicações adicionais por amostra de entrada para ambos os algoritmos. O cálculo dos coeficientes do sistema banda cheia no algoritmo APSAF exige DN_p/M multiplicações adicionais, que podem ser minoradas através da realização do cálculo de tais coeficientes mais esparsamente.

²O algoritmo DCD é adequado principalmente para implementação de *hardware*, por empregar um procedimento iterativo para substituir multiplicações por troca de bits [109]. Deve-se ressaltar a dependência de sua taxa de convergência com relação ao número de iterações.

Tabela 6.2: Complexidade Computacional

Algoritmo	Multiplicações por amostra de entrada
APSAF	$6K(N + N_p)/M + \mathcal{O}(K^3) + 6N_p + 6K$
IMSAF	$2KN + \mathcal{O}(M^2K^3) + K(2M^2 + 1) + N_p(M + 2)$
APA	$2KN + \mathcal{O}(K^3) + 3K$

Partindo da formulação matemática da Tabela 6.2, apresentamos a Fig. 6.1 que mostra a relação, em termos de complexidade computacional, entre os algoritmos APSAF e o IMSAF, onde foi considerado $N_p = 32$, $N = 1024$, $K = 4$ e $M = 2 \dots 32$.

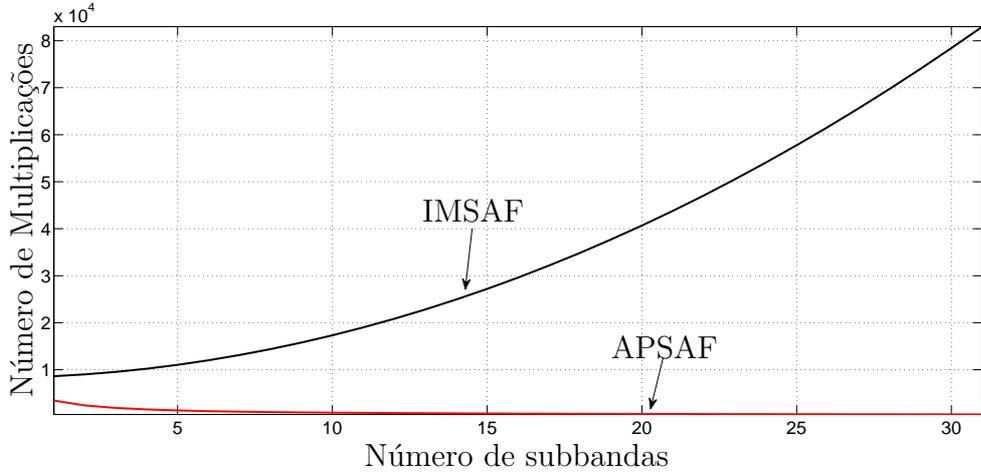


Figura 6.1: Complexidade Computacional dos algoritmos APSAF e IMSAF.

6.2.3 Tamanho de Passo Variável para o APSAF

O emprego de tamanho de passo variável (VSS) em algoritmos de projeção afim foi proposto de modo a encontrar uma boa solução para os requisitos conflitantes de rápida convergência/rastreamento e baixo desajuste em regime permanente/robustez à variação de ruído de fundo [32, 88, 110]. Inspirado pelo algoritmo VSS-APA descrito em [88] e pelo algoritmo VSSM-NSAF descrito em [67], derivamos uma versão VSS para o algoritmo APSAF. Introduzindo uma matriz diagonal de tamanho de passo variável $\mathbf{\Gamma}(n)$ na Eq. (6.7), obtemos

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \mathbf{X}(nM)\mathbf{X}^{-1}(nM)\mathbf{\Gamma}(nM)\mathbf{e}(nM), \quad (6.11)$$

onde

$$\mathbf{\Gamma}(nM) = \text{blk-diag}\{\mathbf{\Gamma}_i(nM)\}, \quad (6.12)$$

com $\mathbf{\Gamma}_i(nM) = \text{diag}\{\beta_{i,0}(nM), \dots, \beta_{i,K_i-1}(nM)\}$, para $i = 0, \dots, M-1$.

O vetor de erro *a posteriori*, formado por $\epsilon_{i,k}(nM)$ na Eq. (6.1) para $i =$

$0, \dots, M - 1$ e $k = 0, \dots, K_i - 1$, pode ser expresso como

$$\boldsymbol{\epsilon}(nM) = \mathbf{d}(nM) - \mathbf{X}^T(nM)\mathbf{g}(n+1). \quad (6.13)$$

Usando a Eq. (7.20) e assumindo $\mathbf{X}^T(nM)\mathbf{X}(nM)\boldsymbol{\mathcal{X}}^{-1}(nM) \approx \mathbf{I}$, obtém-se

$$\boldsymbol{\epsilon}(nM) = [\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma}(nM)] \mathbf{e}(nM), \quad (6.14)$$

ou, equivalentemente, na formulação escalar,

$$\epsilon_{i,k}(nM) = [1 - \beta_{i,k}(nM)] e_{i,k}(nM), \quad (6.15)$$

onde $e_{i,k}(nM) = d_i(nM) - \mathbf{x}_i^T(nM - kM)\mathbf{g}(n)$. A fim de obter a solução ótima, é razoável igualar as potências dos erros de subbanda *a posteriori* $\epsilon_{i,k}(nM)$ às potências dos componentes de ruído de subbandas correspondentes $\nu_{i,k}(nM) = \nu_i(nM - kM)$ [67], o que, quando combinado com a Eq. (6.15), resulta em

$$\beta_{i,k}(nM) = 1 - \sqrt{\frac{\mathbb{E}[\nu_i^2(nM)]}{\mathbb{E}[e_{i,k}^2(nM)]}}. \quad (6.16)$$

As variâncias dos erros nas subbandas podem ser estimadas por meio da equação

$$\hat{\sigma}_{e_{i,k}}^2(nM) = \alpha \sigma_{e_{i,k}}^2(nM - M) + (1 - \alpha) e_{i,k}^2(nM), \quad (6.17)$$

e a variância do ruído de subbanda $\sigma_{\nu_i}^2(nM)$ pode ser estimada tanto em trechos nos quais somente o ruído está presente ou recursivamente, como sugerido em [88]. O fator de ponderação α pode ser escolhido como $\alpha = 1 - M/\kappa D$, onde $\kappa > 1$. O emprego de passos variáveis no APSAF exige K multiplicações adicionais por amostra de entrada para calcular $\boldsymbol{\Gamma}(nM)\mathbf{e}(nM)$ usado na Eq. (6.14), K divisões e K raízes quadradas para obter $\beta_{i,k}(nM)$ pela Eq. (6.16), e $2K$ multiplicações para implementar a atualização da variância do erro de subbandas da Eq. (6.17). As realizações do VSS em ambos APA e IMSAF requerem o mesmo número de operações adicionais. Como nas aplicações usuais $N \gg K$, o aumento da complexidade computacional empregando VSS não é significativo.

6.2.4 Resultados das Simulações com o APSAF

Os desempenhos dos algoritmos APSAF, IMSAF e APA são comparados através da evolução do desvio quadrático médio normalizado NMSD = $10 \log_{10} \|\tilde{\mathbf{g}}(n)\|^2 / \|\mathbf{g}^o\|^2$, onde os vetores $\tilde{\mathbf{g}}(n)$ e \mathbf{g}^o contêm, respectivamente, os erros dos coeficientes da função de transferência e os coeficientes ótimos do sistema des-

conhecido. Nos algoritmos de subbandas foi empregado o banco de filtros modulado por cosseno projetado de acordo com a abordagem em [101], com $N_p = 16M$. O valor típico $\kappa = 6$ [67] foi utilizado em nossas simulações. Os parâmetros de regularização do APA e APSAF foram definidos de acordo com a discussão da Seção 6.2. Para o IMSAF, os parâmetros de regularização δ_i da Eq. (6.10) foram multiplicados por K_i , de forma que a convergência pudesse ser alcançada em todas as simulações.

Sinal de Entrada AR

Nessa simulação, a entrada foi um processo AR(10) com coeficientes $\{0, 99; -1, 28; 0, 39; -1, 1; 0, 88; -0, 69; 0, 42; -0, 43; 0, 21; -0, 41\}$. Um ruído branco gaussiano foi adicionado ao sinal desejado $d(n)$, produzindo-se uma SNR de 40 dB. O filtro ideal foi um sistema FIR tendo $N = 512$ coeficientes gerados pela filtragem de uma sequência aleatória gaussiana branca de média zero e variância unitária através de um sistema de primeira ordem autorregressivo com polo em 0.9. O fator de espalhamento dos autovalores da matriz de autocorrelação é $1,16 \times 10^4$. A Fig. 6.2 mostra as evoluções do NMSD, obtidas pela média de 10 ensaios independentes, para o APSAF e o IMSAF com $M = 4$ e $K = 8$, utilizando passos variáveis (VSS) e passo fixo. Para a implementação com passo fixo, empregou-se $\beta = 1$, que fornece a mais rápida convergência, e $\beta = 0,05$, que resultou no mesmo valor de NMSD em estado permanente com a introdução do VSS. Considerando que ambos os algoritmos apresentaram semelhantes propriedade de convergência, o APSAF proposto exigiu 7.856 multiplicações por amostra de entrada, e o IMSAF demandou 17.032 multiplicações. Taxa de convergência semelhante poderia ser alcançada com o APA banda completa com ordem de projeção $K = 13$, o que exigiria 15.548 multiplicações para a sua implementação.

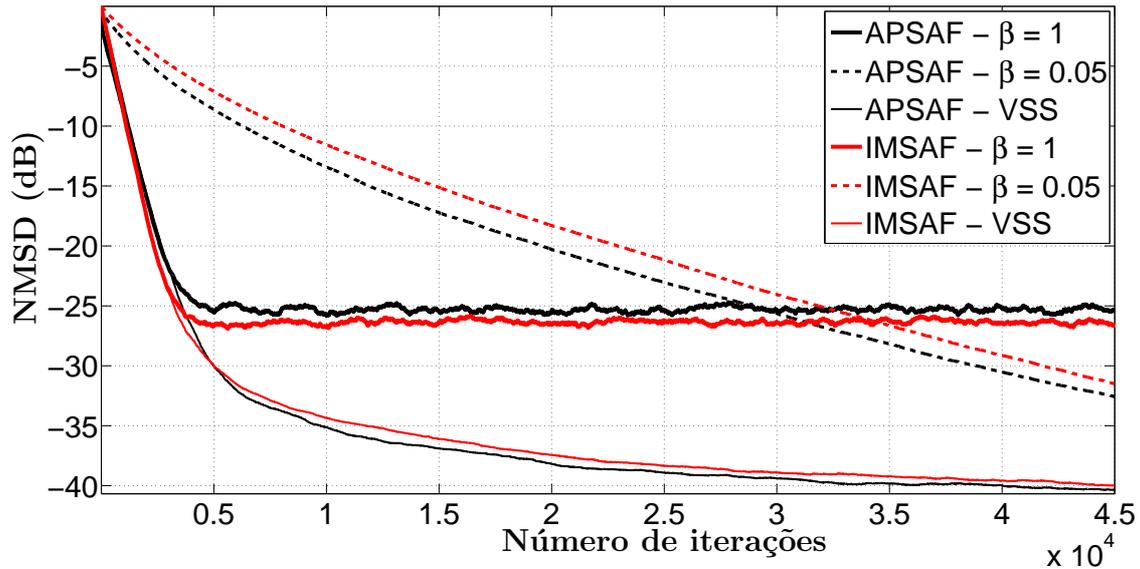


Figura 6.2: Evolução do NMSD para identificação de um sistema com entrada AR(10) e $M = 512$. (a) $\beta = 1$; (b) VSS.

Voz como Sinal de Entrada

Nessa simulação, a entrada foi um sinal de voz amostrado a 8 kHz. Um ruído branco gaussiano foi adicionado ao sinal desejado $d(n)$, produzindo-se uma SNR de 30 dB. O vetor de coeficientes ótimo \mathbf{g}^o foi formado tomando as primeiras $N = 2048$ amostras da resposta ao impulso medida em uma sala de aula disponível do “*Institute of Communication System and Data Processing*”³. Um cenário que compreende uma mudança abrupta do caminho do eco foi simulado pela introdução de um atraso de 20 amostras na resposta ao impulso acústico no meio da simulação, com o propósito de aferir a capacidade de rastreamento. A Fig. 6.3 mostra a evolução média do NMSD do APA com $K = 4$ e $K = 16$ e para o IMSAF e o APSAF com $K = 8$ e $K = 4$, para quatro diferentes sinais de entradas compostos de vozes masculinas e femininas. Os algoritmos APSAF, IMSAF e APA com $K = 16$ apresentaram taxas de convergência iniciais semelhantes, enquanto o APA com $K = 4$ apresentou convergência consideravelmente mais lenta. O APSAF proposto e o IMSAF exigiram, respectivamente, 7.384 e 22.276 multiplicações por amostra de entrada. Os algoritmos AP com $K = 4$ e $K = 16$ exigiram, respectivamente, 16.460 e 69.680 multiplicações por amostra.

³<http://www.ind.rwth-aachen.de/en/research/tools-downloads/aachen-impulse-response-database>

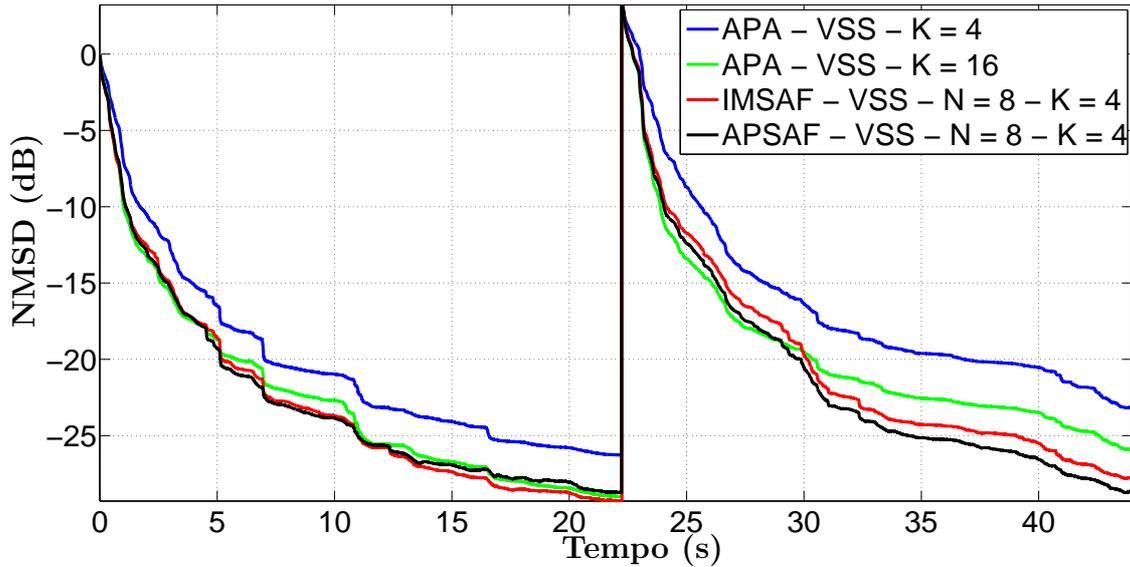


Figura 6.3: Evolução NMSD para o cancelamento de eco acústico com entrada de voz com $N = 2048$ e VSS.

6.3 APSAF com ordem Evolutiva

Conforme observado em [27] e [30], o número de vetores de entrada afeta o desempenho da convergência, isto é, um K elevado garante uma maior taxa de convergência às custas da degradação do MSE em regime permanente. Por outro lado, para K pequeno, observa-se um MSE menor em regime permanente, bem como uma taxa de convergência inferior no transiente. Tal observação motiva o emprego de um fator K variável, de sorte a adotar uma ordem de projeção consentânea com as peculiaridades do processo adaptativo, ou seja, cumpre ajustar dinamicamente a ordem de projeção e definir um número de subbandas adequadamente. Uma estratégia razoável consiste em empregar um fator K elevado nas primeiras iterações – de modo a promover uma taxa de convergência maior – e garantir uma adequada redução desse fator ao longo do tempo, à medida em que o regime permanente se aproxima. Em regime permanente, dever-se-ia adotar um fator de projeção bem baixo (idealmente unitário), de modo a garantir um erro quadrático médio reduzido e um menor custo computacional.

6.3.1 APA Evolutivo

Empregando um método evolutivo que determina automaticamente o número de vetores de entrada de acordo com os estados do filtro adaptativo, baseado em [30], tem-se

$$K(n) = f(e^2(n), K(n - 1)), \quad (6.18)$$

onde $K(n)$ é o número de vetores de entrada usados na iteração n .

A Eq. (6.18) implica que o número de novos vetores de entrada é determinado através do método evolutivo, o qual deve ser função do valor imediatamente anterior de K , bem como do último erro quadrático. O método evolutivo proposto em [30] é dado como segue:

$$K(n) = \begin{cases} \min(K(n-1) + 1, K_{\max}), & \text{se } \eta(n) < e^2(n); \\ K(n-1), & \text{se } \theta_n < e^2(n) \leq \eta(n); \\ \max(K(n-1) - 1, 1), & \text{se } e^2(n) \leq \theta(n), \end{cases} \quad (6.19)$$

onde $\eta(n)$ denota o limiar superior e $\theta(n)$ o limiar inferior, ambos relativos à n -ésima iteração. Importa ressaltar que $K(n) \in \mathbb{N}$ deve se adequar à restrição $1 \leq K(n) \leq K_{\max}$, onde K_{\max} é definido arbitrariamente pelo projetista.

Em [32] é demonstrado, assumindo que o ruído é estatisticamente independente da matriz de regressão dos vetores de entrada $\mathbf{X}(n)$ e que a matriz de regressão é estatisticamente independente de $e(n)$ no estado estacionário, que o MSE em regime permanente do APA converge para

$$\text{MSE} = \frac{\beta\sigma_v^2}{2-\beta} \text{Tr}(\mathbf{R}_x) \mathbb{E} \left[\frac{K(n)}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} \right] + \sigma_v^2, \quad (6.20)$$

onde $\mathbf{R}_x = \mathbb{E}[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$. A Eq. (6.20) sugere que o MSE do APA no estado estacionário é proporcional ao número de vetores de entrada. Isso pode ser usado para escolher o número apropriado de vetores de entrada para melhorar o desempenho do APA. Uma vez que não é possível calcular o valor esperado em (6.20), adotaremos um valor instantâneo. Para um N grande, $\mathbb{E}[K/\|\mathbf{x}(n)\|^2]$ pode ser aproximado como [111]

$$\mathbb{E} \left[\frac{K(n)}{\|\mathbf{x}(n)\|^2} \right] \approx \frac{K(n)}{\mathbb{E}[\|\mathbf{x}(n)\|^2]}. \quad (6.21)$$

Como $\text{Tr}(\mathbf{R}_x) = \mathbb{E}[\|\mathbf{x}(n)\|^2]$, a Eq. (6.20) será simplificada para

$$\text{MSE} \approx \frac{\beta\sigma_v^2 K(n)}{2-\beta} + \sigma_v^2 = \sigma_v^2 \frac{\beta(K(n)-1) + 2}{2-\beta} \triangleq \varepsilon(K(n)). \quad (6.22)$$

Pela Eq. (6.22) pode-se dizer que o APA, cuja ordem de projeção é $K(n-1)$ convergirá para $\varepsilon(K(n-1))$ no estado estacionário. De (6.19) conclui-se que se $e^2(n)$ for menor que $\varepsilon(K(n-1))$, $K(n)$ deve ser $K(n-1)$ reduzido de um, para se obter um menor erro no estado estacionário. Por outro lado, quando $e^2(n)$ for maior que $\varepsilon(K(n-1))$, $K(n)$ deve ser $K(n-1)$ incrementado de um, para que imponhamos uma convergência mais rápida. Em [106] é mostrado que os limiares empregados na Eq. (6.19) estão associados às estimativas instantâneas do MSE no

estado estacionário, sendo definidos por

$$\eta(n) = \varepsilon(K(n-1) + 1) = \sigma_v^2 \frac{\beta(K(n-1)) + 2}{2 - \beta} \quad (6.23)$$

e

$$\theta(n) = \varepsilon(K(n-1)) = \sigma_v^2 \frac{\beta(K(n-1) - 1) + 2}{2 - \beta}. \quad (6.24)$$

Com esse método evolutivo, a equação de atualização fica

$$\mathbf{g}(n) = \mathbf{g}(n-1) + \beta \mathbf{X}(n) (\mathbf{X}^T(n) \mathbf{X}(n))^{-1} \mathbf{e}(n), \quad (6.25)$$

onde

$$\mathbf{X}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n) & \mathbf{x}(n-1) & \mathbf{x}(n-2) & \dots & \mathbf{x}(n - (K(n) - 1)) \end{bmatrix}; \quad (6.26)$$

$$\mathbf{e}(n) = \begin{bmatrix} e(n) & e(n-1) & e(n-2) & \dots & e(n - (K(n) - 1)) \end{bmatrix}^T, \quad (6.27)$$

e

$$e(n-l) = d(n-l) - \mathbf{x}^T(n-l) \mathbf{g}(n-l), \quad (6.28)$$

para $l = 0, 1, \dots, K(n) - 1$.

6.3.2 Resultados das Simulações do APA Evolutivo

Para verificar o comportamento o método evolutivo, é apresentado o resultado de uma simulação utilizando, para comparação, o algoritmo APA com $K = 8$ e o E-APA com $K_{max} = 8$, para solucionar um problema de identificação de canal em que o canal desconhecido possui uma função de transferência do modelo 4 de [102], com $N = 32$. Assume-se que o filtro adaptativo e o canal desconhecido apresentam o mesmo número de coeficientes. Na simulação é usado o sinal de entrada gerado filtrando uma sequência aleatória gaussiana, de média zero, por um sistema de primeira ordem $F(z) = (1 + 0,5z^{-1} + 0,81z^{-2}) / (1 - 0,59z^{-1} + 0,4z^{-2})$ e acrescido de um ruído branco gaussiano cuja energia encontra-se 30 dB abaixo do sinal gerado. O desvio quadrático médio (MSD) é tomado em 40 ensaios independentes. O resultado dessa simulação é mostrado na Fig. 6.4, onde pode-se verificar que o E-APA apresenta um menor desajuste dos coeficientes em regime permanente do que o APA com ordem de projeção fixa.

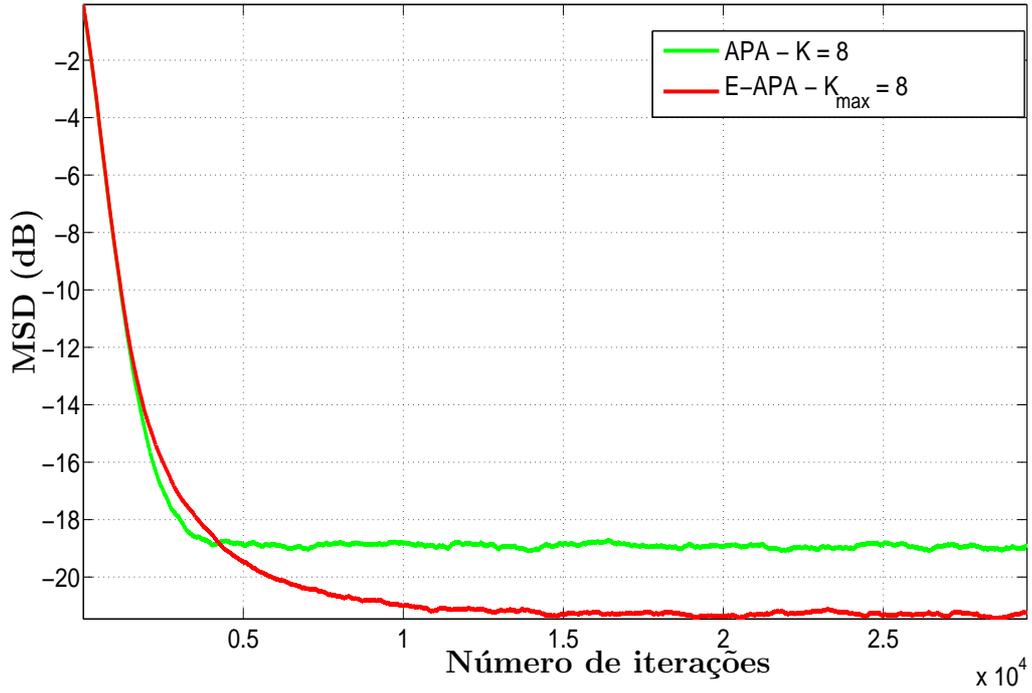


Figura 6.4: Desempenho do APA e do APA evolutivo

6.3.3 APSAF Evolutivo (E-APSAF)

A seguir apresentaremos a derivação do algoritmo APSAF evolutivo, cujo propósito é reduzir a complexidade computacional e aumentar a velocidade de convergência do E-APSAF para sinais de entrada correlacionados.

Considerando que os sinais nas diferentes subbandas são descorrelacionados, o erro quadrático médio em regime permanente em cada subbanda pode ser obtido da Eq. (6.22) aplicada a cada subbanda, ou seja:

$$\text{MSE}_i = \sigma_{v_i}^2 \frac{\beta(K_i(n) - 1) + 2}{2 - \beta} \triangleq \varepsilon(K_i(n)). \quad (6.29)$$

Pela Eq. (6.29) pode-se dizer que o MSE da i -ésima subbanda do algoritmo APSAF, cuja ordem de projeção é $K_i(n-1)$, convergirá para $\varepsilon(K_i(n-1))$ no estado estacionário.

A seguir, apresentamos os limiares a serem empregados na Eq. (6.19), adaptados para a estrutura em subbandas

$$\eta_i(n) = \varepsilon(K_i(n-1) + 1) = \sigma_{v_i}^2 \frac{\beta(K_i(n-1)) + 2}{2 - \beta} \quad (6.30)$$

e

$$\theta_i(n) = \varepsilon(K_i(n-1)) = \sigma_{v_i}^2 \frac{\beta(K_i(n-1) - 1) + 2}{2 - \beta}. \quad (6.31)$$

Os limiares $\eta_i(n)$ e $\theta_i(n)$, por consequência, podem ser adotados de modo independente a cada subbanda, o que engendra grande flexibilidade na estrutura do algoritmo adaptativo.

6.3.4 Resultados das Simulações do E-APSAF

Para verificar o comportamento do modelo proposto, primeiramente apresentamos o resultado de uma simulação utilizando, para comparação, os algoritmos APA, E-APA, APSAF e E-APSAF, sendo os dois últimos baseados na estrutura proposta. Nessa comparação, foi considerado um problema de identificação de canal. A função de transferência a ser identificada é o modelo 4 de [102], com $N = 512$. Assume-se que o filtro adaptativo e o canal desconhecido apresentam o mesmo número de coeficientes. Nessa simulação é usado um sinal de entrada gerado filtrando-se uma sequência aleatória gaussiana de média zero através de um sistema de primeira ordem $F(z) = 1/(1 - 0,9z^{-1})$ e acrescido de um ruído branco gaussiano cuja energia encontra-se 30 dB abaixo da energia do sinal de entrada. O desvio quadrático médio (MSD) foi calculado ao longo de 100 ensaios independentes. Os resultados dessa simulação são mostrados nas Figs. 6.5 a 6.7 para $K_{max} = 4, 8$ e 16 , respectivamente. As Figs. 6.8 e 6.9 apresentam a evolução do $K(n)$ do E-APA e do $K_i(n)$ do E-APSAF, respectivamente. Como pode ser verificado nas Figs. 6.5 a 6.7, que apresentam a evolução do MSD ao longo das iterações, o E-APSAF proposto apresenta taxa de convergência ligeiramente menor e desajuste em regime permanente equivalente aos algoritmos em banda cheia.

Finalmente, nós apresentamos a Fig. 6.9 que mostra o número de coeficientes atualizados pelo algoritmo E-APSAF em cada subbanda versus número de amostras para uma única realização. Estes números são atualizados durante a adaptação. Pela Fig. 6.9 pode-se concluir que há uma redução do custo computacional em função da diminuição das ordens K_i a medida que o filtro adaptativo se aproxima da solução ótima.

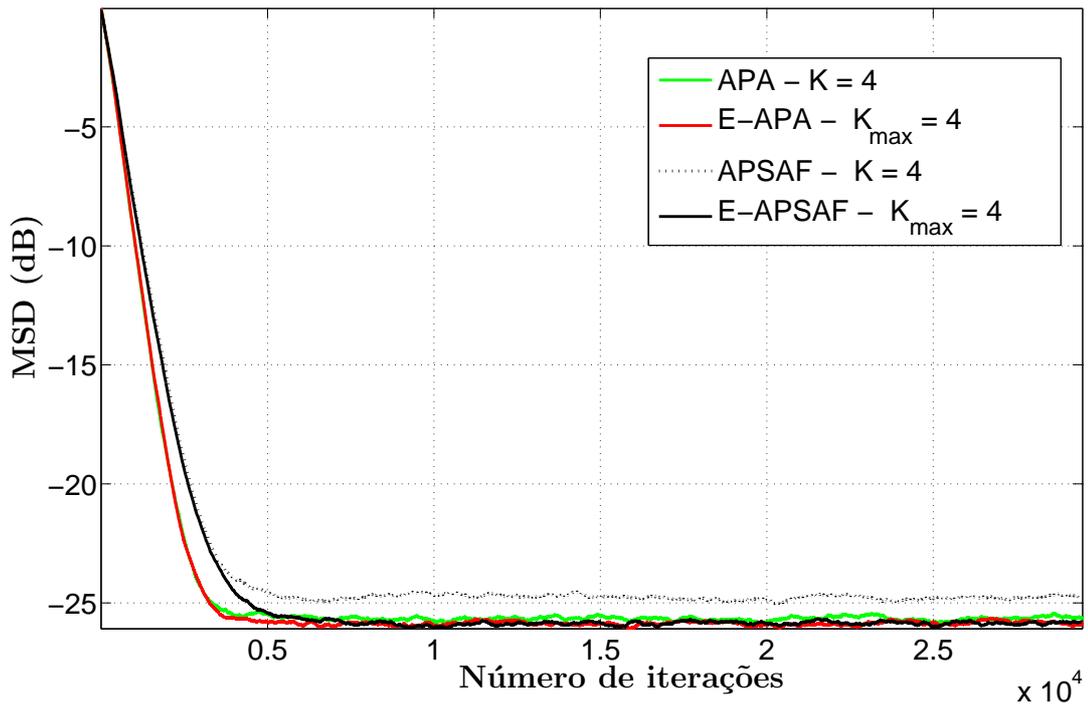


Figura 6.5: Desempenho dos algoritmos APA, E-APA, APSAF e E-APSAF para $K_{\max} = 4$.

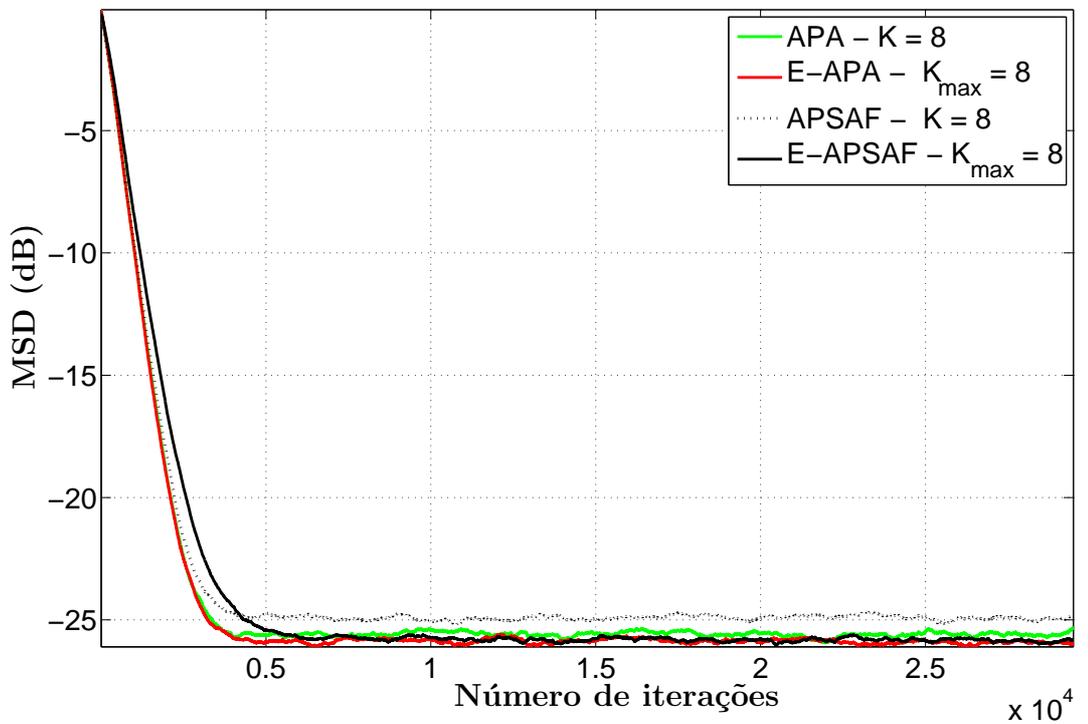


Figura 6.6: Desempenho dos algoritmos APA, E-APA, APSAF e E-APSAF para $N = 512$ e $K_{\max} = 8$.

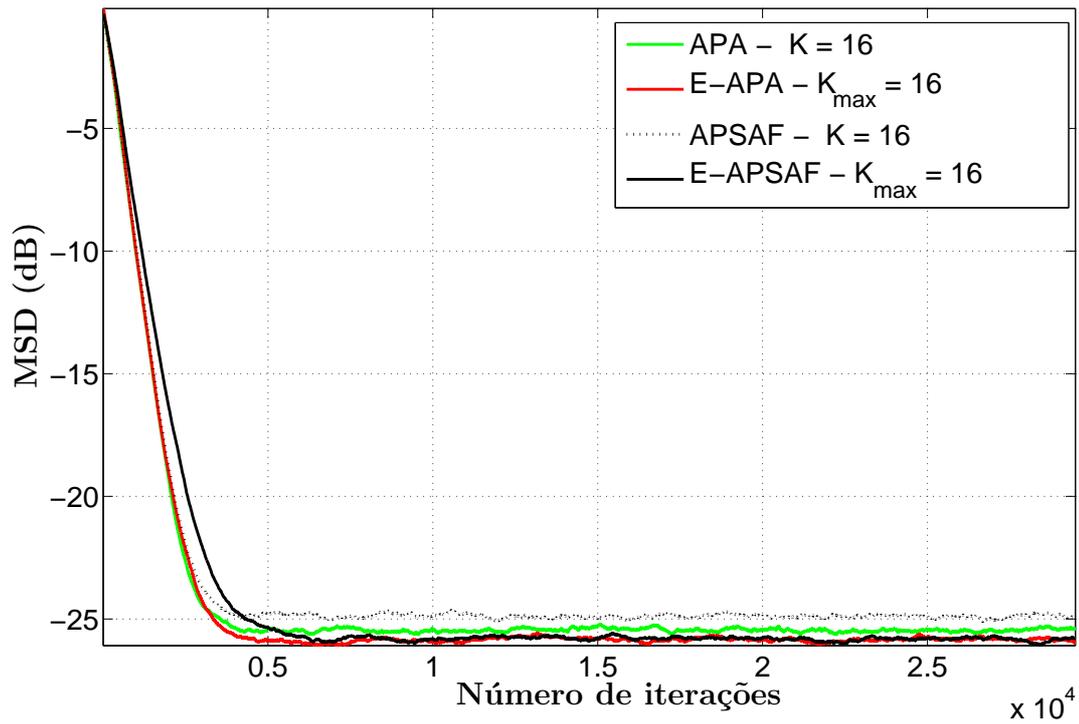


Figura 6.7: Desempenho dos algoritmos APSAF e E-APSAF para $K_{\max} = 16$.

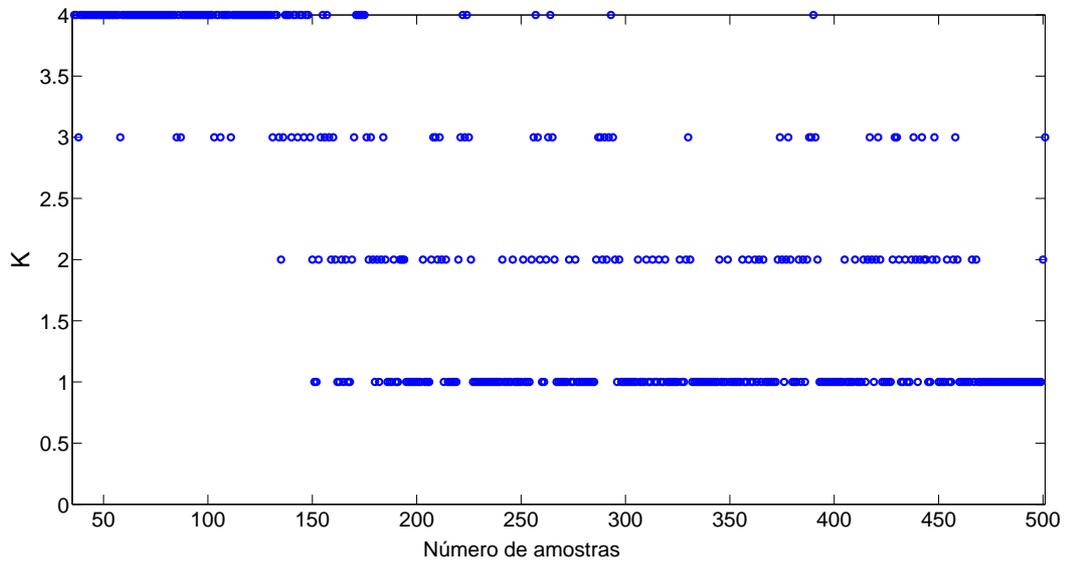


Figura 6.8: Variação do fator de reuso K no processo de aprendizagem do algoritmo E-APA.

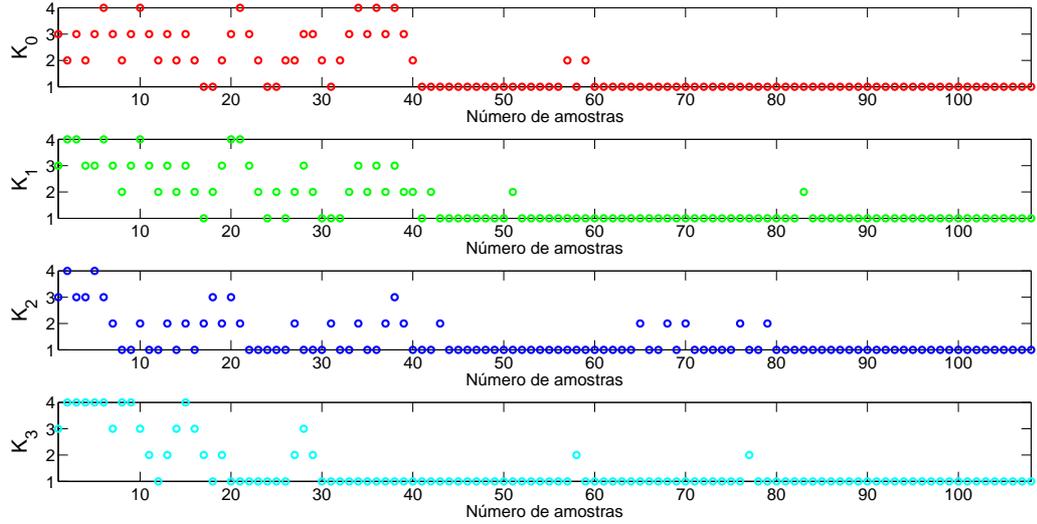


Figura 6.9: Variações dos fatores de reúso K_i no processo de aprendizagem do algoritmo E-APSAF.

6.4 Conclusões

Este capítulo detalhou um novo algoritmo de projeção afim em subbandas, que emprega subfiltros esparsos e uma configuração de erro de malha fechada. A equação de atualização foi derivada por meio de uma abordagem de minimização da perturbação dos coeficientes do filtro adaptativo, acrescida de restrições de cancelamento dos erros *a posteriori* nas subbandas, empregando uma função custo que contempla todos os coeficientes adaptativos e componentes de erro nas subbandas simultaneamente. Devido a uma atualização na menor taxa e à propriedade de decorrelação dos sinais nas subbandas, significativa redução da complexidade computacional é obtida com o algoritmo proposto, quando comparado com o APA em banda cheia e com IMSAF, recentemente proposto. A redução na complexidade computacional proporcionada por esta estrutura foi apresentada na Tabela 6.2 e ilustrada na Fig. 6.1. Como dito, a redução da complexidade computacional é da ordem de $M/3$, o que implica para $M = 4$ e $K = 8$ que o número de multiplicações por amostra de entrada para o APSAF é de 7.856 multiplicações e para o IMSAF é de 17.032 multiplicações. Os resultados das simulações (vide Figs. 6.2 e 6.3) confirmam que tal redução não resulta em perda visível de desempenho no algoritmo proposto.

Foi proposto o emprego de tamanho de passo variável no APSAF, de modo a encontrar uma boa solução para os requisitos conflitantes de rápida convergência/rastreamento e baixo desajuste em regime permanente/robustez à variação de ruído de fundo. Os resultados das simulações (vide Fig. 6.2) confirmaram a melhoria esperada no desempenho, quando os algoritmos são implementados com tamanho

de passo variável.

Por fim, foi proposta uma variação automática do número de projeções para o APSAF, com o objetivo de melhorar o desempenho. Conforme pode ser visto nas Figs. 6.6 e 6.7, foi obtida uma melhoria no desvio médio quadrático em regime permanente devido ao emprego do número de projeções variante no tempo, consoante ao critério evolutivo proposto. Um outro fator relevante constatado a partir da Fig. 6.9 é a redução do custo computacional em função da diminuição das ordens de projeção K_i à medida que o filtro adaptativo se aproxima da solução ótima, baseado no número de multiplicações por amostra de entrada do APSAF, mostrado na Tabela 6.2, que é proporcional a $6K(N + N_p)/M$. Portanto, verifica-se uma redução de 75% no número de multiplicações quando o número de projeções varia de $K = 4$ para $K = 1$.

Capítulo 7

Algoritmo APSAF para Filtragem Adaptativa Robusta a Ruído Impulsivo

7.1 Introdução

Em ambientes reais, o processo de aprendizagem de diversos algoritmos de filtragem adaptativa pode sofrer severa degradação na presença de ruído de fundo impulsivo. Em cancelamento de eco, o *double-talk* também pode ser visto como ruído impulsivo, resultando em alto desajuste ou instabilidade. Para superar esse problema, muitos algoritmos têm sido propostos [112], [113], nos quais a estimativa dos coeficientes do filtro é determinada ao reduzir a função custo associada aos erros de saída por meio de seu gradiente em relação ao vetor de coeficientes atual. Importa notar que o tamanho do passo de aprendizagem desses algoritmos impacta a taxa de convergência, o desempenho em regime permanente e as propriedades de estabilidade do processo de aprendizagem. Cabe acrescentar que a escolha da função custo apresenta um papel crucial, seja na taxa de convergência, seja na robustez perante perturbações impulsivas. A solução mais comum para lidar com o ruído de medição impulsivo consiste em se adotar uma função custo adequada e robusta perante distúrbios de medição intensos e temporalmente localizados. Várias funções custo robustas que utilizam a norma ℓ_1 têm sido desenvolvidas para ambientes com ruído impulsivo [112] - [114]. Os algoritmos de desvio médio absoluto normalizado (NLMAD) [112], o algoritmo de sinal dual [115], os algoritmos de tamanho de passo variável (VSS) [116],[117], bem como o algoritmo de projeção afim *sign* [118] são baseados na minimização da norma ℓ_1 . O algoritmo adaptativo de norma mista robusto baseia-se numa função de custo que emprega uma combinação convexa das normas ℓ_1 e ℓ_2 [119]. O algoritmo VSS NLMS robusto [120] utiliza uma função

custo que alterna entre as normas ℓ_1 e ℓ_2 [114], associada com a forma como o algoritmo restringe a energia de atualização dos coeficientes do filtro a cada iteração. Vários algoritmos adaptativos utilizam outras funções custo para melhoria da robustez contra ruído de medição impulsivo [121], [122], [123], [124]. A função custo estimativa- M de norma mista de Huber usa a minimização da norma ℓ_1 e ℓ_2 [121], quando a magnitude do erro de saída supera um limiar pré-estabelecido. Por outro lado, a função custo de estimativa- M descendente em três partes de Hampel atribui ao sinal de erro um valor constante [82], [122], [123], [124]. Como mencionado acima, há um outro fator, além da função custo, que determina o desempenho dos algoritmos adaptativos baseados no gradiente: o tamanho do passo. Neste capítulo é estudada a variação do tamanho do passo em algoritmos adaptativos em subbandas e seu impacto na robustez perante ruído impulsivo, tendo em vista a promoção de melhorias na robustez dos algoritmos. O método usa o conceito de um escalonador de tamanho de passo que dimensiona instantaneamente para baixo o tamanho do passo quando um ruído de medição impulsivo é detectado. Tal procedimento elimina a possibilidade da atualização dos coeficientes adaptativos se valer de dados severamente corrompidos pela eventual presença de ruído impulsivo. Neste estudo implementamos o algoritmo denominado NSAF-SF-VSSI (Algoritmo em Subbandas Normalizado com Filtros Esparsos com Tamanho de Passo Variável para Ruído Impulsivo).

Por fim, propomos o algoritmo de projeção afim em subbandas robusto a ruído impulsivo com complexidade computacional reduzida, que denominamos APSAF-VSSI (Filtro Adaptativo em Subbandas com Projeção Afim com Tamanho de Passo Variável para Ruído Impulsivo). Tal algoritmo emprega uma função custo que considera simultaneamente todos os coeficientes de adaptação e os componentes de erro de subbandas que estão abaixo dos limiares adaptativos. O desempenho do algoritmo proposto é avaliado em cenários de cancelamento de eco acústico com ruído impulsivo.

7.2 NSAF-SF com Escalonador de Passo de Adaptação para Ruído Impulsivo

Partindo de (5.1), para um modelo de identificação de sistemas, temos o sinal desejado $d_i(n)$ representado por

$$d_i(n) = \mathbf{x}_i^T(n)\mathbf{g}^0(n) + \nu_i(n), \quad (7.1)$$

onde $\mathbf{g}^0(n)$ é um vetor que contém os coeficientes correspondentes à função de transferência do sistema desconhecido a identificar, $\mathbf{x}_i(n)$ é um sinal possivelmente colo-

rido com variância $\sigma_{\mathbf{x}_i}^2$ e a variável $\nu_i(n) = b_i(n) + \eta_i(n)$ é um escalar que denota a soma de um ruído de medição $b_i(n)$ branco e gaussiano, de média zero e variância $\sigma_{b_i}^2$, e de um ruído de medição impulsivo $\eta_i(n)$.

7.2.1 Função Custo baseada no Erro Quadrático Limitado

Utilizando o conceito de função custo *tanh* apresentado por Hampel [125] e utilizado em [82] e [126], empregamos a função custo baseada no erro quadrático *a posteriori* de cada subbanda limitado em relação à potência do sinal de entrada correspondente, dada por

$$\begin{aligned} J[\hat{\mathbf{g}}(n)] &= \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{M-1} \tanh \left(\frac{\beta}{2} (e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1 - \exp(-\beta(e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)^2)}{1 + \exp(-\beta(e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)^2)}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde $\beta > 0$ influencia o formato da não-linearidade introduzida.

Quando $(e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)^2$ é pequeno, a expansão de Taylor fornece a seguinte aproximação:

$$J(\hat{\mathbf{g}}(n)) \cong \sum_{i=0}^{M-1} (e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)^2, \quad (7.3)$$

a qual revela um comportamento semelhante à soma dos erros ao quadrado.

7.2.2 Escalonador de Tamanho de Passo

Analisando a Eq. (7.2), notamos que, na ocorrência de ruído impulsivo, $(e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)^2$ torna-se muito grande, o que faz com que $J(\hat{\mathbf{g}}(n)) \cong \frac{1}{\beta}$, cuja derivada aproximadamente nula evita alterações bruscas nos coeficientes adaptativos, desempenhando um papel crucial para a robustez do processo de aprendizagem. Desenvolvemos o seguinte algoritmo de adaptação baseado no gradiente estocástico da função custo supracitada:

$$\hat{\mathbf{g}}(n+1) = \hat{\mathbf{g}}(n) - \sum_{i=0}^{M-1} \mu_i \nabla_i J[\hat{\mathbf{g}}(n)], \quad (7.4)$$

onde μ_i é o tamanho do passo na subbanda i e $\nabla_i J[\hat{\mathbf{g}}(n)]$ denota o gradiente do i -ésimo termo de $J[\hat{\mathbf{g}}(n)]$ dado por

$$\nabla_i J[\hat{\mathbf{g}}(n)] = -s(\beta, (e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)) \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|} e_i(n), \quad (7.5)$$

onde

$$s(\beta, (e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)) \triangleq \frac{1}{\beta} \frac{4\exp(-\beta(e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)^2)}{(1 + \exp(-\beta(e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)^2))^2}. \quad (7.6)$$

O algoritmo resultante, que denominaremos NSAF-SF-VSSI, é descrito por:

$$\hat{\mathbf{g}}(n+1) = \hat{\mathbf{g}}(n) + \sum_{i=0}^{M-1} \mu_i s(\beta, (e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|)) \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|} e_i(n).$$

7.2.3 Resultados das Simulações

Nessa simulação, a entrada é um processo AR(1) com pólo em 0.8, com os resultados das simulações sendo obtidos a partir de 50 ensaios numéricos independentes. A resposta ao impulso a identificar (a qual tem comprimento $N = 512$), correspondente à resposta ao impulso de um caminho acústico [127], [128]. O ruído de medição é composto de ruído gaussiano $b(n)$, com 30 dB de razão sinal-ruído (SNR) [129], e de ruído impulsivo $\eta(n)$, com probabilidade de ocorrência de 0.1% ($Pr = 0.001$). $\eta(n) = \omega(n)\psi(n)$ é gerado como em [114], onde $\omega(n)$ é um processo de Bernoulli com $Pr(\omega(n) = 1) = Pr$ e $\psi(n)$ [130] é uma variável aleatória gaussiana de média zero e potência $\sigma_\psi^2 = 1000\sigma_y^2$, onde σ_y^2 é a potência na saída do filtro adaptativo. É usado na simulação um banco de filtros modulado por cosseno com $M = 4$ subbandas [42] com comprimento igual a 32. Os desempenhos dos algoritmos são comparados por meio da evolução do desvio quadrático médio normalizado NMSD.

Como mencionado, o propósito do escalonador de tamanho de passo $s\left(\beta, \frac{e_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|}\right)$ consiste em incrementar a robustez do processo de identificação na presença do ruído impulsivo. São mostrados na Fig. 7.1 os resultados de três diferentes versões do algoritmo NSAF com escalonador de tamanho de passo, denominados NSAF-VSSI-2 [115], [120], NSAF-VSSI-3 [112], [120] e NSAF-VSSI-4 [114], [120], e do algoritmo com subfiltros esparsos com escalonador de tamanho de passo proposto, NSAF-SF-VSSI. Esses algoritmos estão resumidos na Tabela 7.1. Nos algoritmos NSAF o vetor \mathbf{x}_i é dado por $\mathbf{x}_i(n) = [x_i(n) \ x_i(n-1) \ \dots \ x_i(n-N+1)]^T$.

Tabela 7.1: Algoritmos Adaptativos em Subbandas com Escalonador de Tamanho de Passo

NSAF-VSSI-1: [120]

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \sum_{i=0}^{M-1} s(\beta, e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|) \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|^2} e_i(n)$$

NSAF-VSSI-2 [115], [120]:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \sum_{i=0}^{M-1} \mu_i(n) s(\beta, e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|) \times \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|^2} e_i(n)$$
onde: $\beta'_i(n+1) = \alpha\beta_i(n) + \gamma e_i^2(n)$,

$$\mu_i(n+1) = \begin{cases} \mu_{\max}, & \text{se } \mu'_i(n+1) > \beta_{\max}, \\ \mu_{\min}, & \text{se } \mu'_i(n+1) \leq \beta_{\min}, \\ \mu'_i(n+1), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$\mu_{\max} = 1, \mu_{\min} = 10^{-5}, \alpha = 0.9999, \gamma = 0.1$

NSAF-VSSI-3 [112], [120]:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mu \sum_{i=0}^{M-1} s(\beta, e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|) \times \text{sign}(e_i(n)) \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|_1}$$

NSAF-VSSI-4 [114], [120]:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \sum_{i=0}^{M-1} \mu_i(n) s(\beta, e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|) \times \text{sign}(e_i(n)) \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|}$$
onde: $\alpha = 1 - 1/N$,

$$\delta_i(n+1) = \alpha\delta_i(n) + (1 - \alpha) \min \left[\frac{e_i^2(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|^2}, \delta_i(n) \right] \text{ e}$$

$$\mu_i(n) = \min \left[\frac{|e_i(n)|}{\|\mathbf{x}_i(n)\|}, \sqrt{\delta_i(n)} \right]$$

NSAF-SF-VSSI

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \sum_{i=0}^{M-1} \mu_i(n) \times s(\beta, e_i(n)/\|\mathbf{x}_i(n)\|) \frac{\mathbf{x}_i(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|}$$
onde: $\alpha = 1 - 1/N$,

$$\delta_i(n+1) = \alpha\delta_i(n) + (1 - \alpha) \min \left[\frac{e_i^2(n)}{\|\mathbf{x}_i(n)\|^2}, \delta_i(n) \right] \text{ e}$$

$$\mu_i(n) = \min \left[\frac{|e_i(n)|}{\|\mathbf{x}_i(n)\|}, \sqrt{\delta_i(n)} \right]$$

onde: $\alpha = 1 - 1/N$,

$$\delta_i(n+1) = \alpha\delta_i(n) + (1 - \alpha) \min \left[\frac{e_i^2(n)}{\|\mathbf{x}_i(n-K_i)\|^2}, \delta_i(n) \right] \text{ e}$$

$$\mu_i(n) = \min \left[\frac{|e_i(n)|}{\|\mathbf{x}_i(n-K_i)\|}, \sqrt{\delta_i(n)} \right]$$

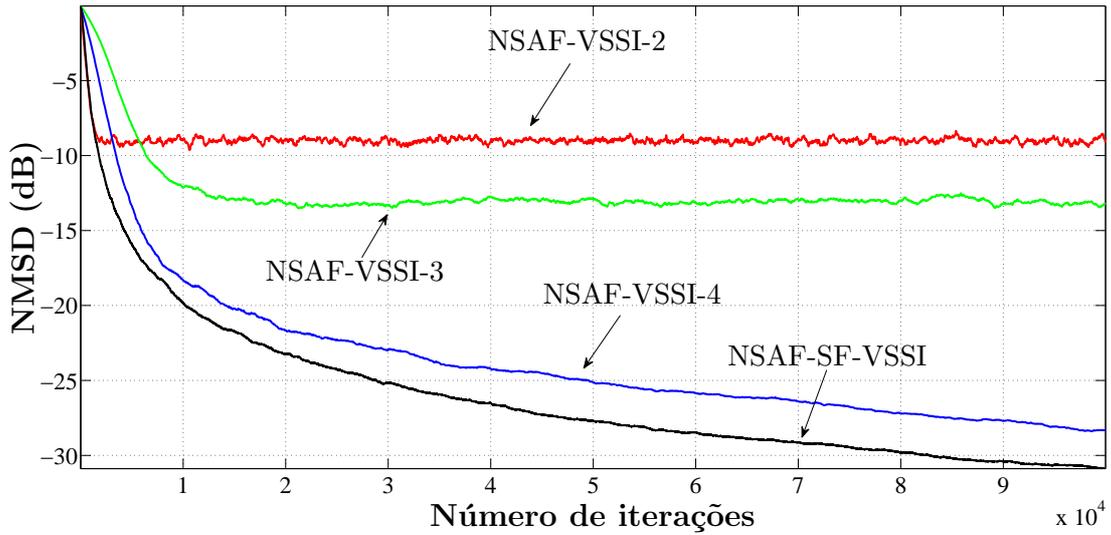


Figura 7.1: Evolução do NMSD para $M = 4$, entrada AR(1), $P = 0,001$ e $N = 512$ para os algoritmos da Tabela 7.1.

Da Fig. 7.1 pode-se observar o desempenho superior dos algoritmos baseados na estrutura com filtros esparsos em relação aos algoritmos NSAF. Na Fig. 7.2 é apresentada a evolução do NMSD do algoritmo NSAF-SF-VSSI e dos algoritmos em subbandas IWF-SSAF (*Individual Weighting Factor Sign Subband Adaptive Filter*) [73] e APM-SAF (*Affine Projection M-estimate Subband Adaptive Filter*) [131].

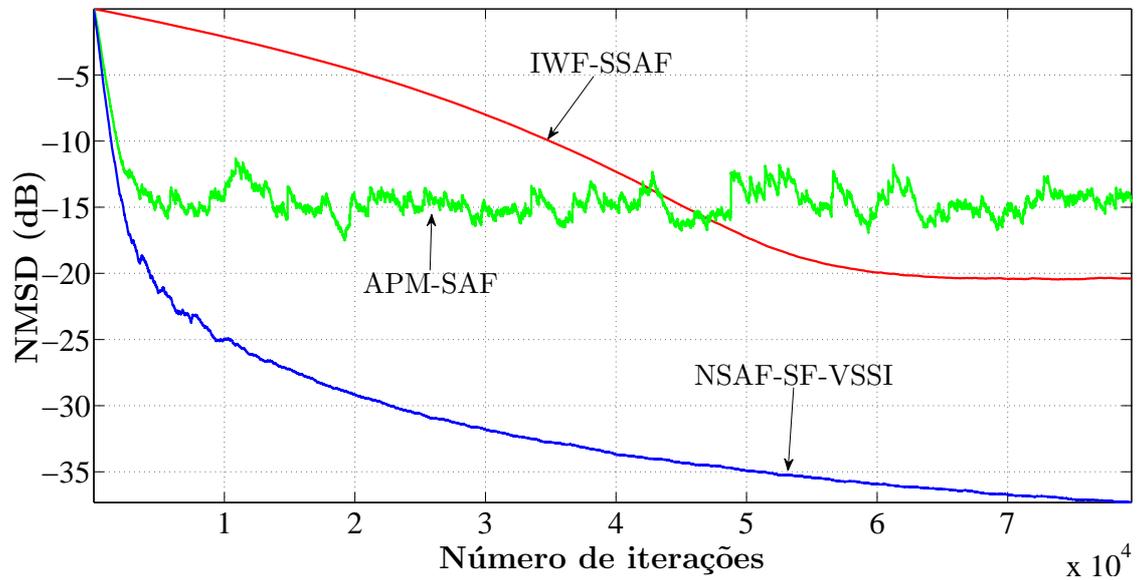


Figura 7.2: Evolução do NMSD para $M = 4$, entrada AR(1), $Pr = 0,001$ e $N = 512$.

7.3 APSAF Robusto ao Ruído Impulsivo em Filtragem Adaptativa

Partindo de (7.1), onde o filtro adaptativo de comprimento N do sistema (FIR) \mathbf{g}_n^o emula a saída $d(n)$ de sistema com resposta ao impulso finita, dado o sinal de entrada de $x(n)$ e uma versão corrompida $\hat{d}(n)$ de $d(n)$, definida por

$$\hat{d}(n) = \underbrace{\mathbf{x}^T(n)\mathbf{g}^o(n)}_{\triangleq d(n)} + \nu(n) + \zeta(n), \quad (7.7)$$

onde $\mathbf{x}(n)=[x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-N+1)]^T$, $\nu(n)$ refere-se ao ruído branco gaussiano e $\zeta(n)$ para interferência impulsiva.

O algoritmo APSAF do Capítulo 6 foi desenvolvido com base no princípio de perturbação mínima [2], observando a redução progressiva do erro na estrutura adaptativa pode ser assegurada zerando as K_i amostras dos erros *a posteriori* decimados da i -ésima subbanda [132].

No entanto, o algoritmo resultante é muito sensível a interferências impulsivas. Para fornecer filtragem robusta em ambiente sujeito a ruído impulsivo, propomos incluir no problema de otimização restrita apenas amostras de erro com valores abaixo dos limiares adaptativos. Além disso, observando que um impulso é espalhado por mais de N_p amostras devido à decomposição pela filtragem em subbandas, as amostras vizinhas das amostras onde ocorrem erros de elevada magnitude são também descartadas.

Usando a técnica de multiplicadores de Lagrange, esse problema de otimização restrita pode ser transformado na minimização irrestrita da função custo

$$\mathcal{F}[\mathbf{g}(n+1)] = \|\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K_i-1} \lambda_{i,k} \rho(\epsilon_{i,k}(n)), \quad (7.8)$$

onde $\lambda_{i,k}$ são multiplicadores de Lagrange e

$$\rho(\epsilon_{i,k}(n)) = \begin{cases} \epsilon_{i,k}(n), & \text{se } \bar{\epsilon}_{i,k}(n) < \xi_{i,k}(n), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (7.9)$$

onde $\bar{\epsilon}_{i,k}(n) = \max(|\epsilon_{i,k}(n - N_s/2)|, \dots, |\epsilon_{i,k}(n + N_s/2)|)$ e N_s é o número de amostras vizinhas descartadas em todas amostras de interferência impulsiva. Uma vez que os erros *a posteriori* de subbanda são decimados por M , uma seleção adequada para este parâmetro é de $N_s = \lceil N_p/M \rceil$. Os valores do limiar devem ser fixados de modo a impedir que a atualização dos coeficientes seja afetada pelo sinal desejado corrompido pelo ruído impulsivo. Um estimador robusto para o limiar é dado por [133]

$$\xi_{i,k}(n) = 2,576\hat{\sigma}_{i,k}(n), \quad (7.10)$$

onde $\hat{\sigma}_{i,k}^2(n)$ é a variância estimada do erro de subbanda “livre de impulso” $\epsilon_{i,k}(n)$, o qual pode ser obtido recursivamente por

$$\hat{\sigma}_{i,k}^2(n) = \delta\hat{\sigma}_{i,k}^2(n-1) + C(1-\delta_e)\text{med}(\epsilon_{i,k}^2(n), \dots, \epsilon_{i,k}^2(n-N_w)) \quad (7.11)$$

onde $\text{med}(\cdot)$ denota o operador mediana, δ_e é o fator de esquecimento, e $C = 1,483(1 + 5/(N_w - 1))$ é um fator de correção de amostra finito.

Definindo o vetor desejado e a matriz de entrada, como no Capítulo 6, segue

$$\hat{\mathbf{d}}_i(n) = \begin{bmatrix} \hat{d}_{i,D}(n) & \hat{d}_{i,D}(n-1) & \dots & \hat{d}_{i,D}(n-K_i+1) \end{bmatrix}^T, \quad (7.12)$$

$$\mathbf{X}_i(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(n) & \mathbf{x}_i(n-1) & \dots & \mathbf{x}_i(n-K_i+1) \end{bmatrix}, \quad (7.13)$$

respectivamente, e o vetor multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ como $\lambda_{i,k}$ elementos, a função custo (7.8) pode ser reescrita como

$$\mathcal{F}[\mathbf{g}(n+1)] = \|\mathbf{g}(n+1) - \mathbf{g}(n)\|^2 + \boldsymbol{\lambda}^T \rho(\hat{\mathbf{d}}(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{g}(n+1)), \quad (7.14)$$

onde:

$$\mathbf{X}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_0(n) & \mathbf{X}_1(n) & \dots & \mathbf{X}_{N-1}(n) \end{bmatrix}; \quad (7.15)$$

$$\hat{\mathbf{d}}(n) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_0^T(n) & \hat{\mathbf{d}}_1^T(n) & \dots & \hat{\mathbf{d}}_{N-1}^T(n) \end{bmatrix}^T. \quad (7.16)$$

Zerando o gradiente de $\mathcal{F}[\mathbf{g}(n+1)]$ com relação a $\mathbf{g}(n+1)$ e utilizando as restrições de erros *a posteriori* de subbanda nulos para derivar $\boldsymbol{\lambda}$, obtemos

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \overbrace{\bar{\mathbf{X}}(n)}^{\triangleq \bar{\mathbf{X}}(n)} [\bar{\mathbf{X}}^T(n)\bar{\mathbf{X}}(n)]^{-1} \bar{\mathbf{e}}(n), \quad (7.17)$$

onde $\bar{\mathbf{X}}(n)$ é a matriz de entrada (7.15) com sua coluna de índice $(iK_i + k)$ multiplicada por

$$\psi(\epsilon_{i,k}(n)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \bar{\epsilon}_{i,k}(n) < \xi_{i,k}(n) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (7.18)$$

e $\bar{\mathbf{e}}(n)$ é o vetor $\mathbf{e}(n) = \hat{\mathbf{d}}(n) - \mathbf{X}^T(n)\mathbf{g}(n)$ com seu elemento de índice $(iK_i + k)$ multiplicado por $\psi(\epsilon_{i,k}(n))$. Como o erro *a posteriori* $\epsilon_{i,k}(n)$ é inacessível, $\psi(\epsilon_{i,k}(n))$ é substituído por $\psi(e_{i,D}(n-k))$, onde $e_{i,D}(n-k)$ é o erro *a priori* correspondente.

Usando filtros seletivos $H_i(z)$, podemos obter $x_{i,j}(n) \approx 0$ para $|i-j| > 1$, e, conseqüentemente, as colunas da matriz $\mathbf{X}_i(n)$ terão no máximo $3L$ elementos sig-

nificativos. Além disso, como relatado em [44] e [103], $\mathbf{X}_i^T(n)\mathbf{X}_j(n) \approx \mathbf{0}$, para $i \neq j$, de tal modo que a aproximação seguinte possa ser aplicada

$$\mathcal{X}(n) \approx \text{blk-diag} \{ \mathcal{X}_i(n) \}. \quad (7.19)$$

7.3.1 Escalonador de Tamanho de Passo

Os algoritmos de projeção afim de tamanho-passo variável (VSS) são empregados, de modo a encontrar uma boa solução para as exigências conflitantes de rápida convergência/rastreamento e baixo desajuste/robustez para variação de ruído de fundo [71], [88] e [110]. Introduzindo tamanho de passo variável através da matriz diagonal em (7.17) $\mathbf{\Gamma}(n)$, encontramos

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \bar{\mathbf{X}}(n)\bar{\mathcal{X}}^{-1}(n)\mathbf{\Gamma}(n)\bar{\mathbf{e}}(n), \quad (7.20)$$

onde $\mathbf{\Gamma}(n) = \text{blk-diag} \{ \mathbf{\Gamma}_i(n) \}$, com

$$\mathbf{\Gamma}_i(n) = \text{diag} \{ \beta_{i,0}(n), \dots, \beta_{i,K_i-1}(n) \}, \quad (7.21)$$

para $i=0, \dots, N-1$.

Impondo que a potência dos erros *a posteriori* de subbanda $\epsilon_{i,k}(n)$ e os correspondentes componentes de ruído “livre de impulso” nas subbandas sejam iguais, resulta, de [67] e [132]

$$\beta_{i,k}(n) = 1 - \sqrt{\sigma_{\nu_i}^2(n)/\sigma_{e_{i,k}}^2(n)}, \quad (7.22)$$

onde a variância do erro de subbanda num ambiente de ruído impulsivo pode ser estimada por

$$\hat{\sigma}_{e_{i,k}}^2(n) = \alpha \hat{\sigma}_{e_{i,k}}^2(n-1) + (1-\alpha) \bar{e}_{i,D}^2(n-k), \quad (7.23)$$

sendo $\bar{e}_{i,D}(n) = \text{med}(|e_{i,D}(n)|, \dots, |e_{i,D}(n-N_w)|)$. O fator de peso α pode ser escolhido como $\alpha = 1 - N/\kappa L$, onde $\kappa > 1$. O valor típico $\kappa=6$ [67] foi utilizado em nossas simulações.

7.3.2 Parâmetros de Regularização

Para evitar instabilidade numérica, os parâmetros de regularização δ_i são adicionados aos elementos da diagonal principal das matrizes $\mathcal{X}_i(n)$. Em [132], a expressão ideal para o parâmetro de regularização do APA [108] foi estendida para o APSAF, resultando em

$$\delta_i = L\sigma_{x_i}^2 \left(1 + \sqrt{1 + \text{SNR}_i} \right) / \text{SNR}_i, \quad (7.24)$$

onde $\text{SNR}_i \triangleq \sigma_{d_i}^2 / \sigma_{v_i}^2$.

7.3.3 Complexidade Computacional

A Tabela 7.2 apresenta o número de multiplicações por amostra de entrada exigidos pelo RAPSAF, considerando que a mesma ordem de projeção K é usada em todas as subbandas. Essa expressão foi derivada em [132] para o APSAF, exceto para o último termo, que corresponde à atualização dos limiares. Para fins de comparação, o número de multiplicações requeridas pelo APMSAF, semelhante ao IMSAF de [103], é também mostrada na Tabela 7.2. Nas principais aplicações dos algoritmos adaptativos em subbandas, como cancelamento de eco, $N \gg M$ e $N \gg N_p$. Quando K é suficientemente pequeno para que o primeiro termo de cada expressão da Tabela 7.2 seja muito maior do que os outros, a complexidade computacional do APMSAF é de aproximadamente $2KN$, enquanto que a do RAPSAF é $6KN/M$. Portanto, o RAPSAF proposto reduz a complexidade APMSAF por um fator de $M/3$. Quando K não é tão pequeno, os termos de segunda ordem, que são M^2 vezes maiores para o APMSAF do que para o RAPSAF, devem ser levados em conta.

Tabela 7.2: Complexidade Computacional

Algoritmo	Multiplicações por amostra de entrada
RAPSAF	$6K(N + N_p)/M + \mathcal{O}(K^3) + 6N_p + 6K + 3K$
APMSAF	$2KN + \mathcal{O}(M^2K^3) + K(2M^2 + 1) + N_p(M + 2) + 5$

Partindo da formulação matemática da Tabela 7.2, apresentamos a Fig. 7.3 que mostra a relação, em termos de complexidade computacional, entre os algoritmos RAPSAF e o APMSAF, onde foi considerado $N_p = 32$, $N = 1024$, $K = 4$ e $M = 2 \dots 32$.

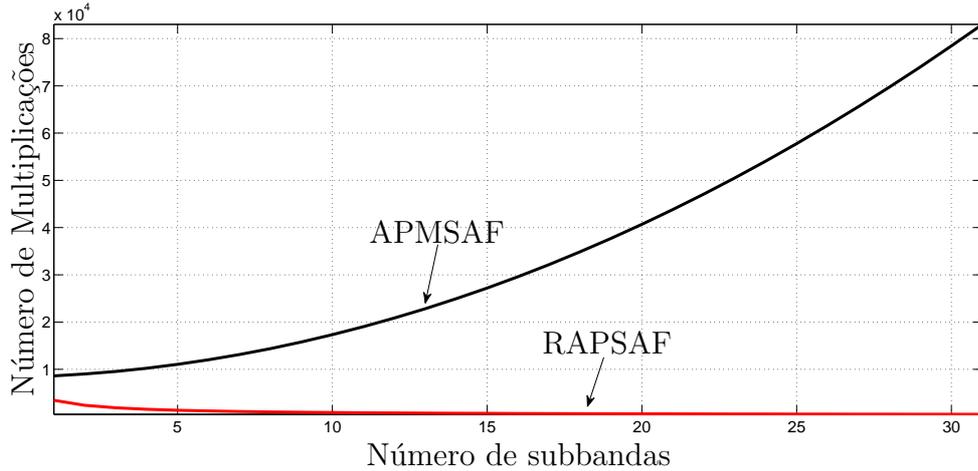


Figura 7.3: Complexidade Computacional dos algoritmos RAPSAF e APMSAF.

7.3.4 Resultados Simulados

Os desempenhos do RAPSAF proposto, APMSAF [131], APSSAF [130], IWFS-SAF [134] e APSA [118] são comparados na aplicação em cancelamento de ecos acústicos (AEC), através da evolução do desvio quadrático médio normalizado NMSD. Nos algoritmos de subbanda, bancos de filtros modulados por cosseno projetados de acordo com a abordagem em [101] foram empregados, com $N_p = 8M$. Os parâmetros de regularização do RAPSAF foram definidos como discutido na Seção 7.3.2, enquanto que para os outros algoritmos, os valores recomendados nas referências correspondentes foram aplicados. O tamanho de passo variável da Seção 7.3.1 foi utilizado no RAPSAF, enquanto que os valores de tamanho do passo fixos foram ajustados de tal modo que todos os algoritmos produziram aproximadamente o mesmo desajuste no estado estacionário. As respostas ao impulso desconhecidas são os caminhos de eco acústico medidos mostrados na Fig. 7.4 ¹. O ruído de fundo $\nu(n)$ é branco gaussiano com razão sinal-ruído (SNR) de 30 dB, e a interferência $\zeta(n)$ é um ruído impulsivo com probabilidade de ocorrência Pr e SNR de -10 dB, gerada como o produto de um processo de Bernoulli e uma variável aleatória gaussiana [114]. Um cenário que compreende uma alteração abrupta do caminho de eco foi simulado através da introdução de um atraso de 20 amostras na resposta ao impulso acústico na metade das simulações, a fim de examinar a capacidade de rastreamento dos algoritmos. Os outros parâmetros do RAPSAF foram $\delta = 0.99$, $N_w = 16$ and $N_s = 8$.

¹<http://www.ind.rwth-aachen.de/en/research/tools-downloads/aachen-impulse-response-database>

Sinal de entrada AR

Neste experimento, a entrada é um processo AR(1) com o pólo em 0.9, a probabilidade de ocorrência da interferência impulsiva é $Pr = 0.001$ e a resposta ao impulso com $N = 512$ coeficientes é mostrada na Fig. 7.4(a).

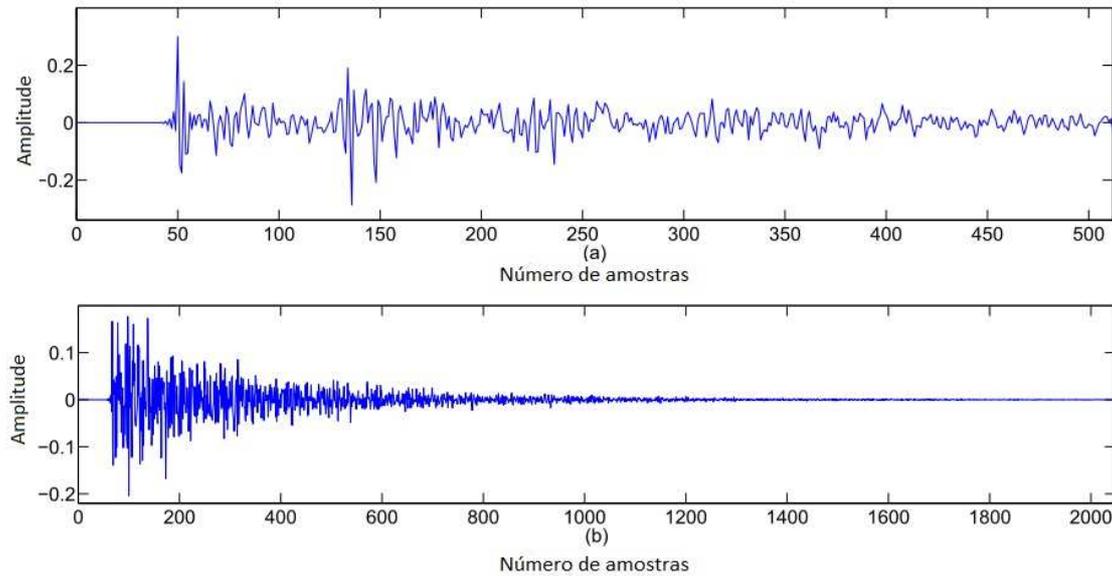


Figura 7.4: Caminho acústico do eco: (a) $N = 512$, (b) $N = 2048$.

A Fig. 7.5 mostra as evoluções do NMSD para o RAPSAF com $M = 4$ subbandas e $K = 1, 2, 4$ e 8 ordens de projeção (mesma ordem de projeção é usada em todas as subbandas), obtidas pela média de 10 ensaios independentes. Como esperado, a convergência mais rápida é obtido quando K aumenta, ao custo do aumento dos desajustes em regime permanente e da complexidade computacional. Considerando que a melhoria da taxa de convergência não é significativa quando aumentamos K de 4 para 8, empregamos $K = 4$ na próxima simulação.

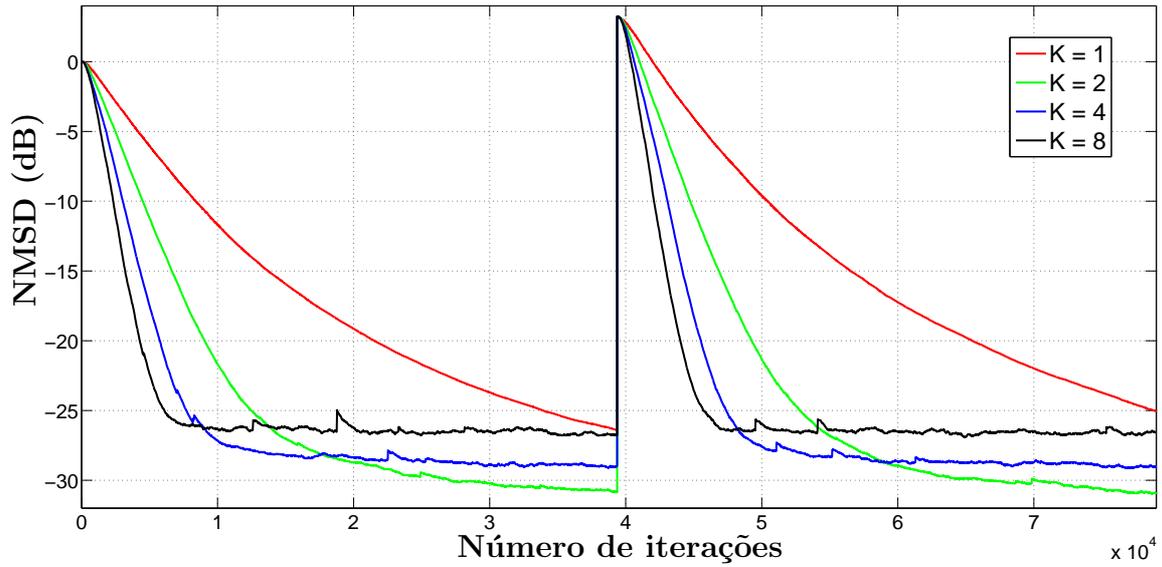


Figura 7.5: Evolução do NMSD do RAPSAF com $M=4$ e $K=1, 2, 4$ e 8 , para entrada AR(1), $Pr=0.001$ e $N=512$.

A Fig. 7.6 apresenta as evoluções do NMSD para o RAPSAF, APMSAF e APSSAF com $M = 4$ e $K = 4$, e do IWFSSAF com $M = 4$ e APSA com $K = 4$, obtidos tomando médias de 50 eventos independentes. Considerando que os algoritmos RAPSAF e APMSAF apresentam propriedades de convergência semelhantes, o RAPSAF proposto exige 3.556 multiplicações por amostra de entrada, enquanto o APMSAF exige 5.449 multiplicações. O APSSAF, o IWFSSAF e o AAPS, apesar de terem complexidade inferior aos RAPSAF e APMSAF, apresentam convergência muito mais lenta.

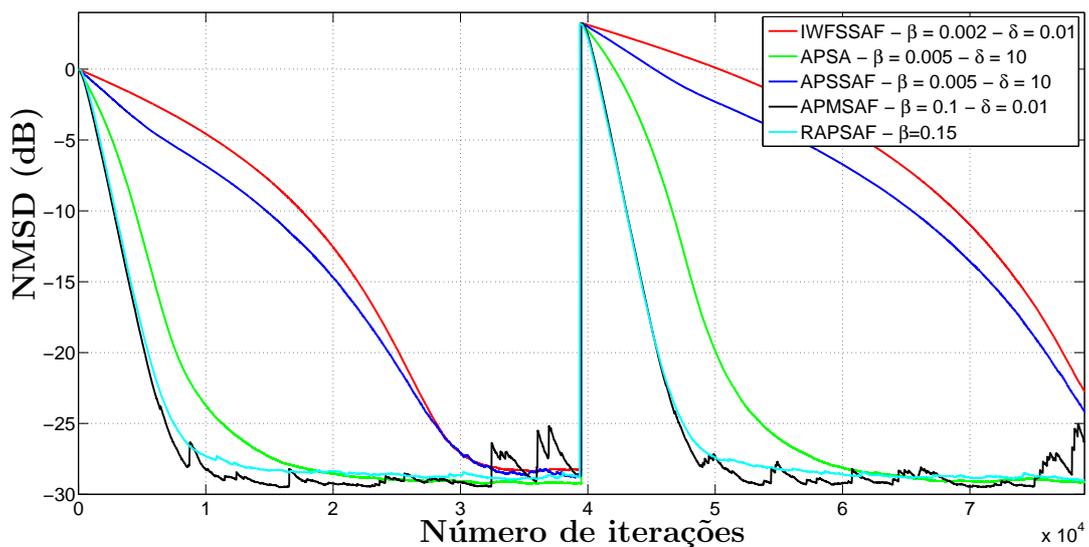


Figura 7.6: Evolução do NMSD do RAPSAF, APMSAF, APSSAF, APSA e IWFSSAF, com $M=4$ e $K=3$ para entrada AR(1), $Pr=0.001$ e $N=512$.

Sinal de entrada de voz

Nessa simulação, a entrada é um sinal de voz amostrado a 8 kHz e a probabilidade de ocorrência da interferência impulsiva é $Pr = 0.0001$. O vetor de coeficientes ótimo \mathbf{g}^o foi formado a partir das $M = 2048$ amostras, mostradas na Fig. 7.4(b), da resposta ao impulso medido de uma sala de aula. A Fig. 7.7 mostra a evolução do NMSD para o RPSAF, APMSAF e APSSAF com $M=8$ e $K=4$, e do IWSSAF e a APSA com $N=8$ and $K = 4$, respectivamente, para quatro sinais de entrada diferentes compostos de vozes masculinas e femininas. O RPSAF e APMSAF têm taxas de convergência iniciais semelhantes, enquanto o APSSAF, IWSSAF e APSA apresentam convergência consideravelmente mais lenta. Os algoritmos propostos RPSAF e o APMSAF requerem, respectivamente, 7.396 e 22.281 multiplicações por amostra de entrada.

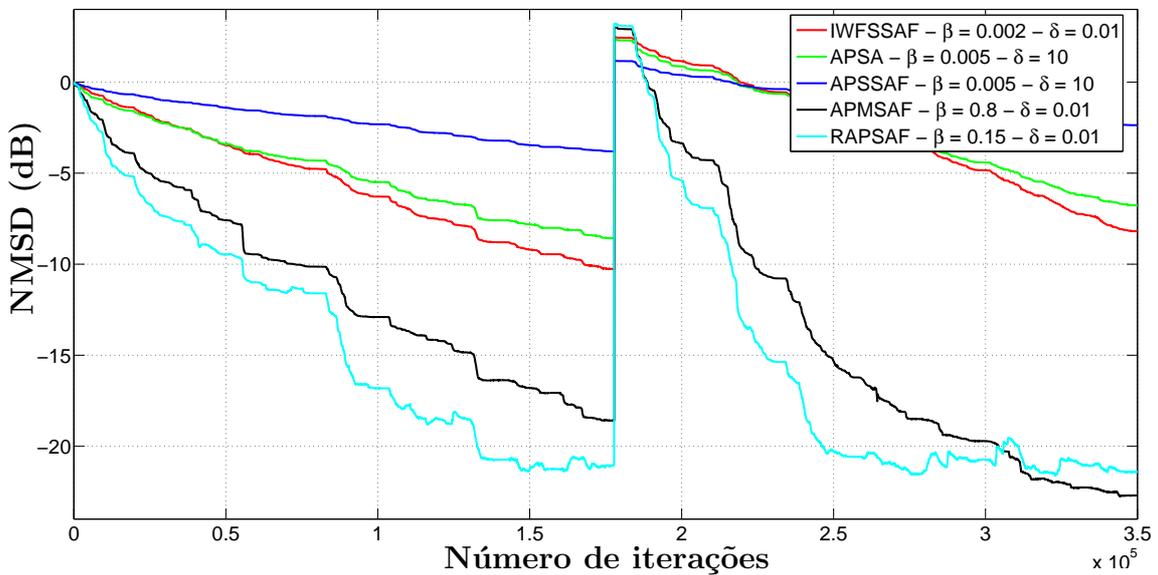


Figura 7.7: Evolução do NMSD do RPSAF, APMSAF, APSSAF, APSA e IWSSAF, com $M = 8$ e $K=4$ para entrada de voz, $Pr=0.0001$ and $N=2048$.

7.4 Conclusão

Neste capítulo foi proposto um escalonador de tamanho de passo que consiste em incrementar a robustez do processo de identificação na presença de ruído impulsivo. Implementamos esse escalonador em 3 versões do NSAF, que denominamos de NSAF-VSSI-2, NSAF-VSSI-3 e NSAF-VSSI-4, bem como no NSAF-SF desenvolvido no Capítulo 5, que denominamos de NSAF-SF-VSSI, cujos resultados podem ser constatados na Fig. 7.1. Comparamos também o desempenho do NSAF-SF-VSSI com algoritmos robustos a ruído impulsivo mais recentes na literatura, tais como IWF-SSAF e o APM-SAF, conforme pode ser visto na Fig. 7.2. Em todas si-

mulações realizadas, o NSAF-SF-VSSI apresentou melhor desempenho no que tange à convergência e ao desajuste.

Foi apresentado também um algoritmo de projeção afim em subbandas robusto (RPSAF) que considera simultaneamente todos os coeficientes adaptativos e os componentes de erro de subbanda que estão abaixo dos limiares adaptativos. Devido à atualização na taxa mais baixa e à propriedade de correlação dos sinais de subbanda, é obtida uma redução significativa da complexidade computacional. A Fig. 7.7 apresenta as evoluções do NMSD para o RPSAF, APMSAF, APSSAF, APSA e IWFS-SAF. Considerando que os algoritmos RPSAF e APMSAF apresentam propriedades de convergência semelhantes, o RPSAF proposto exige 3.556 multiplicações por amostra de entrada, enquanto o APMSAF exige 5.449 multiplicações. A redução na complexidade computacional proporcionada para o RPSAF foi apresentada na Tabela 7.2 e ilustrada na Fig. 7.3 que mostra a relação, em termos de complexidade computacional, entre os algoritmos RPSAF e o APMSAF. Como dito, a redução da complexidade computacional é da ordem de $M/3$.

Capítulo 8

Análise de Desempenho em Regime Permanente

8.1 Introdução

O desempenho de um filtro adaptativo é geralmente medido em termos do seu comportamento transitório e em regime estacionário. O primeiro fornece informações sobre a estabilidade e a taxa de convergência, enquanto o segundo fornece informações sobre o erro quadrático médio do filtro uma vez que este tenha atingido o estado estacionário. O valor do MSE obtido após a convergência é uma medida de desempenho importante em algoritmos adaptativos. Este capítulo fornece um tratamento do erro quadrático médio para algoritmos de projeção afim em subbandas, cuja formalização baseou-se em argumentos da conservação de energia. Os resultados da simulação corroboram a análise efetuada.

8.2 Comportamento Estatístico Médio do algoritmo APSAF

Considere o algoritmo APSAF, com equação de atualização dos coeficientes dada por

$$\mathbf{g}(n+1) = \mathbf{g}(n) + \beta \mathbf{X}(nM) \tilde{\mathbf{e}}(nM), \quad (8.1)$$

onde $\tilde{\mathbf{e}}(nM) = \mathcal{X}^{-1}(nM) \mathbf{e}(nM)$.

Para o desenvolvimento da análise consideramos as seguintes hipóteses:

- Hipótese **A1**: o algoritmo adaptativo converge;
- Hipótese **A2**: o ruído $\nu_i(nM)$ é independente e identicamente distribuído

(i.i.d.) e estatisticamente independente da matriz de regressão $\mathbf{X}_i^{-1}(nM)$ e de $\mathbf{e}_{a,i}(nM)$;

- Hipótese **A3**: no regime permanente, $\mathbf{X}^{-1}(nM)$ é independente de $\mathbf{e}_{a,i}(nM)$;
- Hipótese **A4**: no limite quando $n \rightarrow \infty$, consideramos $\mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{g}}_i(n+1)\|^2] = \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{g}}_i(n)\|^2]$ no estado permanente.

Empregando-se filtros seletivos $H_i(z)$, de modo que as respostas em frequência dos filtros não-adjacentes não se sobreponham, temos $x_{ij}(n) \approx 0$ para $|i - j| > 1$ e as linhas da matriz $\mathbf{X}(nM)$ da Eq. (8.1) apresentam no máximo três elementos diferentes de zero. Então, a equação de atualização dos coeficientes do i -ésimo subfiltro, após a simplificação, é dada por

$$\mathbf{g}_i(n+1) = \mathbf{g}_i(n) + \beta [\mathbf{X}_{i,i-1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM) + \mathbf{X}_{i,i}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) + \mathbf{X}_{i,i+1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM)], \quad (8.2)$$

onde a matriz $\mathbf{X}_{i,j}(n)$, de dimensão $D \times K_i$, é formada por amostras dos sinais $\mathbf{x}_{i,j}(n)$, ou seja, $\mathbf{X}_{i,j}(n) = [\mathbf{x}_{i,j}(n) \ \mathbf{x}_{i,j}(n-M) \ \dots \ \mathbf{x}_{i,j}(n-M(K_i-1)+1)]$, $\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) = \mathbf{X}_i^{-1}(nM)\mathbf{e}_i(nM)$.

Subtraindo-se de \mathbf{g}_i^0 ambos os lados da equação acima, definindo $\tilde{\mathbf{g}}_i(n+1) = \mathbf{g}_i^0 - \mathbf{g}_i(n+1)$ e multiplicando ambos os lados da equação resultante por $\mathbf{X}_{i,i}^T(n)$ à esquerda, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i,i}^T(nM)\tilde{\mathbf{g}}_i(n+1) &= \mathbf{X}_{i,i}^T(nM)\tilde{\mathbf{g}}_i(n) - \beta \left[\mathbf{X}_{i,i}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i-1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM) + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{X}_{i,i}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) + \mathbf{X}_{i,i}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i+1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM) \right]. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Considerando as contribuições dos filtros adjacentes no erro da i -ésima subbanda, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM)\tilde{\mathbf{g}}_{i-1}(n+1) &= \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM)\tilde{\mathbf{g}}_{i-1}(n) - \beta \left[\mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i-2}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i-2}(nM) + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i-1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM) + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) \right] \end{aligned} \quad (8.4)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM)\tilde{\mathbf{g}}_{i+1}(n+1) &= \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM)\tilde{\mathbf{g}}_{i+1}(n) - \beta \left[\mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) + \right. \\ &\quad \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i+1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM) + \\ &\quad \left. \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i+2}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i+2}(nM) \right]. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Somando-se as três equações anteriores e introduzindo os vetores de erro *a posteriori* e erro *a priori* da i -ésima subbanda $\{\mathbf{e}_{p,i}(nM), \mathbf{e}_{a,i}(nM)\}$, dados por

$$\mathbf{e}_{a,i}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(n)\tilde{\mathbf{g}}_i(n-1) \\ \mathbf{x}_i(n-1)\tilde{\mathbf{g}}_i(n-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i(n-K_i+1)\tilde{\mathbf{g}}_i(n-1) \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

e

$$\mathbf{e}_{p,i}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i(n)\tilde{\mathbf{g}}_i(n) \\ \mathbf{x}_i(n-1)\tilde{\mathbf{g}}_i(n) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i(n-K_i+1)\tilde{\mathbf{g}}_i(n) \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

chegamos a

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{p,i}(nM) &= \mathbf{e}_{a,i}(nM) - \beta \left[\mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i-2}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i-2}(nM) + \right. \\ &\quad \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i-1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM) + \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) + \\ &\quad \mathbf{X}_{i,i}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i-1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM) + \mathbf{X}_{i,i}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) + \\ &\quad \mathbf{X}_{i,i}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i+1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM) + \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) + \\ &\quad \left. \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i+1}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM) + \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM)\mathbf{X}_{i,i+2}(nM)\tilde{\mathbf{e}}_{i+2}(nM) \right]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Agrupando os termos com $\tilde{\mathbf{e}}_{i-2}(nM)$, $\tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM)$, $\tilde{\mathbf{e}}_i(nM)$, $\tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM)$ e $\tilde{\mathbf{e}}_{i+2}(nM)$

respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{p,i}(nM) = & \mathbf{e}_{a,i}(nM) - \beta \left[\mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i-2}(nM) \tilde{\mathbf{e}}_{i-2}(nM) + \right. \\
& (\mathbf{X}_{i,i}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i-1}(nM) + \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i-1}(nM)) \tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM) + \\
& (\mathbf{X}_{i,i}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i}(nM) + \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i}(nM) + \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i}(nM)) \tilde{\mathbf{e}}_i(nM) + \\
& (\mathbf{X}_{i,i}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i+1}(nM) + \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i+1}(nM)) \tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM) + \\
& \left. \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i+2}(nM) \tilde{\mathbf{e}}_{i+2}(nM) \right].
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Considerando que os filtros são seletivos e não há sobreposição de frequências diferentes subbandas, apenas os termos com $\tilde{\mathbf{e}}_i(nM)$ da Eq. (8.9) é mantida. Então, a Eq. (8.9) fica

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{p,i}(nM) = & \mathbf{e}_{a,i}(nM) - \\
& -\beta [\mathbf{X}_{i,i}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i}(nM) + \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i}(nM) + \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i}(nM)] \tilde{\mathbf{e}}_i(nM).
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Podemos utilizar a Eq. (8.10) para encontrar $\tilde{\mathbf{e}}_i(nM)$. Visando facilitar o desenvolvimento da Eq. (8.10), introduziremos $\mathbf{\Omega}_i$, conforme segue:

$$\begin{aligned}
& \overbrace{[\mathbf{X}_{i,i}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i}(nM) + \mathbf{X}_{i,i-1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i}(nM) + \mathbf{X}_{i,i+1}^T(nM) \mathbf{X}_{i,i}(nM)]}^{\triangleq \mathbf{\Omega}_i} \tilde{\mathbf{e}}_i(nM) = \\
& = \frac{1}{\beta} [\mathbf{e}_{a,i}(nM) - \mathbf{e}_{p,i}(nM)],
\end{aligned} \tag{8.11}$$

resultando em

$$\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) = \frac{1}{\beta} \mathbf{\Omega}_i^{-1} [\mathbf{e}_{a,i}(nM) - \mathbf{e}_{p,i}(nM)]. \tag{8.12}$$

Substituindo a Eq. (8.12) na Eq. (8.2), temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{g}}_i(n+1) = & \tilde{\mathbf{g}}_i(n) + \mathbf{X}_{i,i-1}(nM) \mathbf{\Omega}_{i-1}^{-1} [\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) - \mathbf{e}_{p,i-1}(nM)] + \\
& \mathbf{X}_{i,i}(nM) \mathbf{\Omega}_i^{-1} [\mathbf{e}_{a,i}(nM) - \mathbf{e}_{p,i}(nM)] + \mathbf{X}_{i,i+1}(nM) \mathbf{\Omega}_{i+1}^{-1} [\mathbf{e}_{a,i+1}(nM) - \mathbf{e}_{p,i+1}(nM)].
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Reescrevendo a Eq. (8.13), encontramos

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbf{g}}_i(n+1) - \{ \mathbf{X}_{i,i-1}(nM)\boldsymbol{\Omega}_{i-1}^{-1}\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \\
& \mathbf{X}_{i,i}(nM)\boldsymbol{\Omega}_i^{-1}\mathbf{e}_{a,i}(nM) + \mathbf{X}_{i,i+1}(nM)\boldsymbol{\Omega}_{i+1}^{-1}\mathbf{e}_{a,i+1}(nM) \} = \\
& \tilde{\mathbf{g}}_i(n) - \{ \mathbf{X}_{i,i-1}(nM)\boldsymbol{\Omega}_{i-1}^{-1}\mathbf{e}_{p,i-1}(nM) + \\
& \mathbf{X}_{i,i}(nM)\boldsymbol{\Omega}_i^{-1}\mathbf{e}_{p,i}(nM) + \mathbf{X}_{i,i+1}(nM)\boldsymbol{\Omega}_{i+1}^{-1}\mathbf{e}_{p,i+1}(nM) \}.
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Avaliando a energia de ambos os lados dessa equação, obtemos

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{\mathbf{g}}_i(n+1)\|^2 + \mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i-1}\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{a,i}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i}\mathbf{e}_{a,i}(nM) + \\
& \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i+1}\mathbf{e}_{a,i+1}(nM) = \\
& \|\tilde{\mathbf{g}}_i(n)\|^2 + \mathbf{e}_{p,i-1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i-1}\mathbf{e}_{p,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{p,i}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i}\mathbf{e}_{p,i}(nM) + \\
& \mathbf{e}_{p,i+1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i+1}\mathbf{e}_{p,i+1}(nM),
\end{aligned} \tag{8.15}$$

onde $\mathbf{B}_{i,j} \triangleq (\boldsymbol{\Omega}_i^{-1})^T \mathbf{X}_{i,j}^T(nM) \mathbf{X}_{i,j}(nM) \boldsymbol{\Omega}_i^{-1}$.

O fato importante a enfatizar é que não foram utilizadas aproximações para estabelecer a relação de energia da Eq. (8.15) a partir da Eq. (8.14). Essa relação mostra como as energias dos vetores coeficientes dos filtros em duas iterações sucessivas estão relacionadas às energias dos vetores de erro *a priori* e *a posteriori*.

A relevância da Eq. (8.15) para análise do erro quadrático médio pode ser vista tomando o valor esperado de ambos os lados e aplicando a hipótese **A4**, como segue:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{g}}_i(n+1)\|^2] + \\
& \mathbb{E}[\mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i-1}\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{a,i}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i}\mathbf{e}_{a,i}(nM) + \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i+1}\mathbf{e}_{a,i+1}(nM)] = \\
& \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{g}}_i(n)\|^2] + \\
& \mathbb{E}[\mathbf{e}_{p,i-1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i-1}\mathbf{e}_{p,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{p,i}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i}\mathbf{e}_{p,i}(nM) + \mathbf{e}_{p,i+1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i+1}\mathbf{e}_{p,i+1}(nM)].
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, e usando a condição de convergência no estado permanente em que $\mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{g}}_i(n+1)\|^2] = \mathbb{E}[\|\tilde{\mathbf{g}}_i(n)\|^2]$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i-1}\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{a,i}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i}\mathbf{e}_{a,i}(nM) + \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i+1}\mathbf{e}_{a,i+1}(nM)] = \\
& \mathbb{E}[\mathbf{e}_{p,i-1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i-1}\mathbf{e}_{p,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{p,i}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i}\mathbf{e}_{p,i}(nM) + \mathbf{e}_{p,i+1}^T(nM)\mathbf{B}_{i,i+1}\mathbf{e}_{p,i+1}(nM)].
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Da Eq. (8.12), temos que

$$\mathbf{e}_{p,i}(nM) = \mathbf{e}_{a,i}(nM) - \beta \boldsymbol{\Omega}_i \tilde{\mathbf{e}}_i(nM), \tag{8.18}$$

e, substituindo essa relação no lado direito (LD) da Eq. (8.17), obtém-se

$$\begin{aligned}
& \text{(LD) da Eq. (8.17) =} \\
& \mathbb{E} \left[(\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) - \beta \boldsymbol{\Omega}_{i-1} \tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM))^T \mathbf{B}_{i,i-1} (\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) - \beta \boldsymbol{\Omega}_{i-1} \tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM)) + \right. \\
& (\mathbf{e}_{a,i}(nM) - \beta \boldsymbol{\Omega}_i \tilde{\mathbf{e}}_i(nM))^T \mathbf{B}_{i,i} (\mathbf{e}_{a,i}(nM) - \beta \boldsymbol{\Omega}_i \tilde{\mathbf{e}}_i(nM)) + \\
& \left. (\mathbf{e}_{a,i+1}(nM) - \beta \boldsymbol{\Omega}_{i+1} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM))^T \mathbf{B}_{i,i+1} (\mathbf{e}_{a,i+1}(nM) - \beta \boldsymbol{\Omega}_{i+1} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM)) \right]. \tag{8.19}
\end{aligned}$$

Desenvolvendo a equação anterior

$$\begin{aligned}
& \text{(LD) da Eq. (8.17) =} \\
& \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i-1} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) - \beta \mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i-1} \boldsymbol{\Omega}_{i-1} \tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM) - \right. \\
& \beta \tilde{\mathbf{e}}_{i-1}^T(nM) \boldsymbol{\Omega}_{i-1}^T \mathbf{B}_{i,i-1} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \beta^2 \tilde{\mathbf{e}}_{i-1}^T(nM) \boldsymbol{\Omega}_{i-1}^T \mathbf{B}_{i,i-1} \boldsymbol{\Omega}_{i-1} \tilde{\mathbf{e}}_{i-1}(nM) + \\
& \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) - \beta \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i} \boldsymbol{\Omega}_i \tilde{\mathbf{e}}_i(nM) - \\
& \beta \tilde{\mathbf{e}}_i(nM)^T \boldsymbol{\Omega}_i \mathbf{v} \mathbf{B}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \beta^2 \tilde{\mathbf{e}}_i^T(nM) \boldsymbol{\Omega}_i^T \mathbf{B}_{i,i} \boldsymbol{\Omega}_i \tilde{\mathbf{e}}_i(nM) + \\
& \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) - \beta \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i+1} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM) - \\
& \left. \beta \tilde{\mathbf{e}}_{i+1}^T(nM) \boldsymbol{\Omega}_{i+1} \mathbf{v} \mathbf{B}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) + \beta^2 \tilde{\mathbf{e}}_{i+1}^T(nM) \boldsymbol{\Omega}_{i+1}^T \mathbf{B}_{i,i+1} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} \tilde{\mathbf{e}}_{i+1}(nM) \right]. \tag{8.20}
\end{aligned}$$

Uma vez que $\tilde{\mathbf{e}}_i(nM) = \boldsymbol{\mathcal{X}}_i^{-1}(nM) \mathbf{e}_i(nM)$ e $\mathbf{e}_i(nM) = \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \mathbf{v}_i(nM)$, tem-se

(LD) da Eq. (8.17) =

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i-1} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) - \right. \\
& \beta \mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i-1} \boldsymbol{\Omega}_{i-1} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{i-1}^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \boldsymbol{\nu}_{i-1}(nM)] - \\
& \beta (\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i-1}^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \boldsymbol{\nu}_{i-1}(nM)])^T \boldsymbol{\Omega}_{i-1}^T \mathbf{B}_{i,i-1} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \\
& \beta^2 (\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i-1}^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \\
& \boldsymbol{\nu}_{i-1}(nM)])^T \boldsymbol{\Omega}_{i-1}^T \mathbf{B}_{i,i-1} \boldsymbol{\Omega}_{i-1} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{i-1}^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \boldsymbol{\nu}_{i-1}(nM)] + \\
& \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) - \beta \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i} \boldsymbol{\Omega}_i \boldsymbol{\mathcal{X}}_i^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i}(nM) + \boldsymbol{\nu}_i(nM)] - \\
& \beta (\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i}(nM) + \boldsymbol{\nu}_i(nM)])^T \boldsymbol{\Omega}_i^T \mathbf{B}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \\
& \beta^2 (\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i}(nM) + \boldsymbol{\nu}_i(nM)])^T (nM) \boldsymbol{\Omega}_i^T \mathbf{B}_{i,i} \boldsymbol{\Omega}_i \boldsymbol{\mathcal{X}}_i^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i}(nM) + \boldsymbol{\nu}_i(nM)] + \\
& \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) - \\
& \beta \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i+1} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{i+1}^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i+1}(nM) + \boldsymbol{\nu}_{i+1}(nM)] - \\
& \beta (\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i+1}^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i+1}(nM) + \boldsymbol{\nu}_{i+1}(nM)])^T (nM) \boldsymbol{\Omega}_{i+1}^T \mathbf{B}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) + \\
& \left. \beta^2 (\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i+1}^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i+1}(nM) + \boldsymbol{\nu}_{i+1}(nM)])^T \boldsymbol{\Omega}_{i+1}^T \mathbf{B}_{i,i+1} \boldsymbol{\Omega}_{i+1} \boldsymbol{\mathcal{X}}_{i+1}^{-1}(nM) [\mathbf{e}_{a,i+1}(nM) + \boldsymbol{\nu}_{i+1}(nM)] \right]. \tag{8.21}
\end{aligned}$$

Definindo $\mathbf{C}_{i,j} = \mathbf{B}_{i,j} \boldsymbol{\Omega}_i \boldsymbol{\mathcal{X}}_i^{-1}(nM)$ e $\mathbf{D}_{i,j} = (\boldsymbol{\mathcal{X}}_j^{-1}(nM))^T \boldsymbol{\Omega}_i^T \mathbf{C}_{i,j}$, aplicando a hipótese **A2** que define que o ruído $\boldsymbol{\nu}_i(nM)$ é i.i.d. e estatisticamente independente da matriz de regressão $\boldsymbol{\mathcal{X}}_i^{-1}(nM)$ e de $\mathbf{e}_{a,i}(nM)$, tem-se

(LD) da Eq. (8.17) =

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i-1} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) - \beta \mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i-1} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) - \right. \\
& \beta \mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i-1}^T \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \beta^2 \boldsymbol{\nu}_{i-1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i-1} \boldsymbol{\nu}_{i-1}(nM) + \\
& \beta^2 \mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) - \\
& \beta \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) - \beta \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i}^T \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \\
& \beta^2 \boldsymbol{\nu}_i^T(nM) \mathbf{D}_{i,i} \boldsymbol{\nu}_i(nM) + \beta^2 \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{B}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) - \\
& \beta \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) - \beta \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i+1}^T \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) + \\
& \left. \beta^2 \boldsymbol{\nu}_{i+1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i+1} \boldsymbol{\nu}_{i+1}(nM) + \beta^2 \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) \right]. \tag{8.22}
\end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (8.22) na Eq. (8.17), tem-se

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\beta \mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i-1} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \beta \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \beta \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) \right] = \\
& -\beta \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i-1}^T \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i}^T \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i+1}^T \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) - \right. \\
& \beta \boldsymbol{\nu}_{i-1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i-1} \boldsymbol{\nu}_{i-1}(nM) - \beta \boldsymbol{\nu}_i^T(nM) \mathbf{D}_{i,i} \boldsymbol{\nu}_i(nM) - \beta \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) - \\
& \left. \beta \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) - \beta \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) \right], \tag{8.23}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i-1}^T \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i}^T \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i+1}^T \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) \right] + \\
& \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i-1} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{C}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) \right] - \\
& \beta \mathbb{E} \left[\mathbf{e}_{a,i-1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i-1} \mathbf{e}_{a,i-1}(nM) + \mathbf{e}_{a,i}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i} \mathbf{e}_{a,i}(nM) + \mathbf{e}_{a,i+1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i+1} \mathbf{e}_{a,i+1}(nM) \right] = \\
& \beta \mathbb{E} \left[\boldsymbol{\nu}_{i-1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i-1} \boldsymbol{\nu}_{i-1}(nM) + \boldsymbol{\nu}_i^T(nM) \mathbf{D}_{i,i} \boldsymbol{\nu}_i(nM) + \boldsymbol{\nu}_{i+1}^T(nM) \mathbf{D}_{i,i+1} \boldsymbol{\nu}_{i+1}(nM) \right]. \tag{8.24}
\end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$ essa equação pode agora ser usada para avaliar o desempenho quadrático médio (MSE) do algoritmo de projeção afim em subbandas ou, de forma equivalente, para o Erro Quadrático Médio em Excesso (EMSE) do filtro.

8.3 Avaliação do EMSE

Dos vetores de erro *a posteriori* e erro *a priori* da i -ésima subbanda dados pelas Eqs. 8.6 e 8.7, e sabendo que $\mathbf{e}_{p,i}(n) = \mathbf{e}_{a,i}(n) - \beta \mathbf{e}_i(n) = (1 - \beta)^2 \mathbf{e}_{a,i}(n) - \beta \boldsymbol{\nu}_i$, podemos seguir a seguinte relação para todos valores de K_i

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n) \tilde{\mathbf{g}}_i(n)|^2] = (1 - \beta)^2 \mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n) \tilde{\mathbf{g}}_i(n-1)|^2] + \beta^2 \sigma_i^2 \\
& \mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n-1) \tilde{\mathbf{g}}_i(n)|^2] = (1 - \beta)^2 \mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n-1) \tilde{\mathbf{g}}_i(n-1)|^2] + \beta^2 \sigma_i^2 \\
& \vdots \\
& \mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n - K_i + 1) \tilde{\mathbf{g}}_i(n)|^2] = (1 - \beta)^2 \mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n - K_i + 1) \tilde{\mathbf{g}}_i(n-1)|^2] + \beta^2 \sigma_i^2 \tag{8.25}
\end{aligned}$$

Dessa relação chegamos a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n)\tilde{\mathbf{g}}_i(n-1)|^2] &= (1-\beta)^2\mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n)\tilde{\mathbf{g}}_i(n-2)|^2] + \beta^2\sigma_i^2 \\
\mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n-1)\tilde{\mathbf{g}}_i(n-1)|^2] &= (1-\beta)^2\mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n-1)\tilde{\mathbf{g}}_i(n-2)|^2] + \beta^2\sigma_i^2 \\
&\vdots \\
\mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n-K_i+1)\tilde{\mathbf{g}}_i(n-1)|^2] &= (1-\beta)^2\mathbb{E} [|\mathbf{x}_i(n-K_i+1)\tilde{\mathbf{g}}_i(n-2)|^2] + \beta^2\sigma_i^2
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Sabemos que no estado permanente

$$\mathbb{E} [|e_{a,i}(n)|^2] = \mathbb{E} [|e_{a,i}(n-1)|^2] = \dots = \mathbb{E} [|e_{a,i}(n-K_i+1)|^2], \tag{8.27}$$

associando Eqs. 8.25 e 8.26 e negligenciando os termos fora da diagonal em $\mathbb{E} [\mathbf{e}_{a,i}(n)\mathbf{e}_{a,i}^T(n)]$, encontramos

$$\mathbb{E} [\mathbf{e}_{a,i}(n)\mathbf{e}_{a,i}^T(n)] = \mathbb{E} [|e_{a,i}(n)|^2 \mathbf{S}_{1,i}] + \beta^2\sigma^2 \mathbf{S}_{2,i}, \tag{8.28}$$

onde as matrizes diagonais $\mathbf{S}_{1,i}$ e $\mathbf{S}_{2,i}$ são dadas por

$$\mathbf{S}_{1,i} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (1-\beta)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1-\beta)^{2(K_i-1)} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{S}_{2,i} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + \dots + (1-\beta)^{2(K_i-2)} \end{pmatrix}.$$

Aplicando as matrizes $\mathbf{S}_{1,i}$ e $\mathbf{S}_{2,i}$ na Eq. (8.24), temos:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} [|e_{a,i-1}(nM)|^2] \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i-1}^T]) + \mathbb{E} [|e_{a,i}(nM)|^2] \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i}^T]) + \\
& \mathbb{E} [|e_{a,i+1}(nM)|^2] \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i+1}^T]) + \\
& \mathbb{E} [|e_{a,i-1}(nM)|^2] \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i-1}]) + \mathbb{E} [|e_{a,i}(nM)|^2] \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i}]) + \\
& \mathbb{E} [|e_{a,i+1}(nM)|^2] \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i+1}]) - \beta \{ \mathbb{E} [|e_{a,i-1}(nM)|^2] \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,i-1}]) + \\
& \mathbb{E} [|e_{a,i}(nM)|^2] \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,i}]) - \mathbb{E} [|e_{a,i+1}(nM)|^2] \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,i+1}]) \} = \\
& \beta \{ \sigma_{\nu,i-1}^2 \text{Tr}(\mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,i-1}]) + \sigma_{\nu,i}^2 \text{Tr}(\mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,i}]) + \sigma_{\nu,i+1}^2 \text{Tr}(\mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,i+1}]) \} - \\
& \beta^2 \{ \sigma_{\nu,i-1}^2 \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i-1}^T]) + \sigma_{\nu,i}^2 \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i}^T]) + \sigma_{\nu,i+1}^2 \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i+1}^T]) \} - \\
& \beta^2 \{ \sigma_{\nu,i-1}^2 \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i-1}]) + \sigma_{\nu,i}^2 \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i}]) + \sigma_{\nu,i+1}^2 \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,i+1}]) \} + \\
& \beta^2 \{ \beta \sigma_{\nu,i-1}^2 \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,i-1}]) + \beta \sigma_{\nu,i}^2 \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,i}]) + \beta \sigma_{\nu,i+1}^2 \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,i+1}]) \}
\end{aligned} \tag{8.29}$$

onde, em regime permanente $\mathbf{C}_{i,j}$ e $\mathbf{D}_{i,j}$ são estatisticamente independentes de $\mathbf{e}_{a,i}(nM)$, portanto, $\mathbb{E}[\mathbf{e}_{a,i}(nM)\mathbf{e}_{a,i}^T(nM)] = \mathbb{E}[e_{a,i}(nM)]^2 \mathbf{S}_{1,i} + \beta^2 \sigma^2 \mathbf{S}_{2,i}$. Para encontrarmos a expressão do EMSE em uma forma compacta, definiremos alguns termos da Eq. 8.29, conforme segue

$$\begin{aligned}
\gamma_{1i,j} &\triangleq \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,j}^T]); \\
\gamma_{2i,j} &\triangleq \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,j}^T]); \\
\delta_{1i,j} &\triangleq \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,j}]); \\
\delta_{2i,j} &\triangleq \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,j}]); \\
\rho_{1i,j} &\triangleq \text{Tr}(\mathbf{S}_{1,i} \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,j}]); \\
\rho_{2i,j} &\triangleq \text{Tr}(\mathbf{S}_{2,i} \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,j}]), \\
\zeta_{i,j} &\triangleq \text{Tr}(\mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,j}]).
\end{aligned}$$

A Eq. (8.29) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} M_{10,0} & M_{10,1} & 0 & \dots & 0 \\ M_{11,0} & M_{11,1} & M_{11,2} & \dots & 0 \\ 0 & M_{12,1} & M_{12,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{1M-1,M-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{E}[|e_{a,0}(nM)|^2] \\ \mathbb{E}[|e_{a,1}(nM)|^2] \\ \mathbb{E}[|e_{a,2}(nM)|^2] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[|e_{a,M-1}(nM)|^2] \end{pmatrix} = \\
& = \beta \begin{pmatrix} M_{20,0} & M_{20,1} & 0 & \dots & 0 \\ M_{21,0} & M_{21,1} & M_{21,2} & \dots & 0 \\ 0 & M_{22,1} & M_{22,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{2M-1,M-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_{\nu_0}^2 \\ \sigma_{\nu_1}^2 \\ \sigma_{\nu_2}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{\nu_{M-1}}^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

onde

$$M_{1,i,j} = \gamma_{1,i,j} + \delta_{1,i,j} - \beta \rho_{1,i,j}$$

e

$$M_{2,i,j} = \zeta_{i,j} - \beta \gamma_{2,i,j} - \beta \delta_{2,i,j} + \beta^2 \rho_{2,i,j}.$$

Deixando a equação anterior em função do erro *a priori*, chegamos a

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}[|e_{a,0}(nM)|]^2 \\ \mathbb{E}[|e_{a,1}(nM)|]^2 \\ \mathbb{E}[|e_{a,2}(nM)|]^2 \\ \vdots \\ \mathbb{E}[|e_{a,M-1}(nM)|]^2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} M_{10,0} & M_{10,1} & 0 & \dots & 0 \\ M_{11,0} & M_{11,1} & M_{11,2} & \dots & 0 \\ 0 & M_{12,1} & M_{12,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{1M-1,M-1} \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} M_{20,0} & M_{20,1} & 0 & \dots & 0 \\ M_{21,0} & M_{21,1} & M_{21,2} & \dots & 0 \\ 0 & M_{22,1} & M_{22,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{2M-1,M-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_{\nu_0}^2 \\ \sigma_{\nu_1}^2 \\ \sigma_{\nu_2}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{\nu_{M-1}}^2 \end{pmatrix}.$$

Através da expressão anterior, encontramos o $\mathbb{E}[|e_{a,i}(nM)|^2]$ de todas subbandas, então, calculamos o erro médio quadrático em excesso (EMSE), tal como segue

$$\text{EMSE} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{E}[|e_{a,i}(nM)|^2]. \quad (8.30)$$

Considerando que o sistema é ortogonal, obtemos a expressão do Erro Quadrático Médio em regime permanente, conforme segue

$$\text{MSE} = \text{EMSE} + \sum_{i=0}^{M-1} \sigma_{\nu_i}^2. \quad (8.31)$$

Além disso, podemos considerar as seguintes aproximações:

1. **Para β pequeno:** $\mathbf{S}_{1,i} \approx \mathbf{I}$ e $\mathbf{S}_{2,i}$ será

$$\mathbf{S}_{2,i} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & K_i - 2 \end{pmatrix}$$

2. **Para β grande:** Fazemos $\beta = 1$, $\mathbf{S}_{1,i} \approx \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T$ onde $\mathbf{1}^T = [1 \ 0 \dots 0]$ e $\mathbf{S}_{2,i} = \mathbf{0}$. Conseqüentemente teremos:

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,i,j} &= \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,j}^T(1, 1)]; \\
\gamma_{2,i,j} &= 0, \\
\delta_{1,i,j} &= \mathbb{E}[\mathbf{C}_{i,j}(1, 1)]; \\
\delta_{2,i,j} &= 0, \\
\rho_{1,i,j} &= \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,j}(1, 1)]; \\
\rho_{2,i,j} &= 0, \\
\zeta_{i,j} &\approx K_i \cdot \mathbb{E}[\mathbf{D}_{i,j}(1, 1)].
\end{aligned}$$

Então

$$M_{1,i,j} = \gamma_{1,i,j} + \delta_{1,i,j} - \beta \rho_{1,i,j}$$

e

$$M_{2,i,j} = \zeta_{i,j},$$

resultando em

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \mathbb{E}[|e_{a,0}(nM)|]^2 \\ \mathbb{E}[|e_{a,1}(nM)|]^2 \\ \mathbb{E}[|e_{a,2}(nM)|]^2 \\ \vdots \\ \mathbb{E}[|e_{a,M-1}(nM)|]^2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} M_{10,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{11,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_{12,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{1M-1,M-1} \end{pmatrix}^{-1} \times \\
&\times \begin{pmatrix} M_{20,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{21,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M_{22,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{2M-1,M-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_{\nu_0}^2 \\ \sigma_{\nu_1}^2 \\ \sigma_{\nu_2}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{\nu_{M-1}}^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

8.4 Resultados das Simulações

Nesta simulação, avaliou-se no estado estacionário o MSE do algoritmo proposto (com a média de 20.000 valores de erro em regime permanente) com $M = 4$ subbandas e $N_p = 32$. O MSE empírico resultante foi comparado ao teórico. A função de transferência a ser identificada é o modelo 4 da norma ITU G.168 [102], com $N = 128$. Para o MSE experimental, β variou no intervalo $(0, 1]$. Usamos o parâmetro de regularização $\delta = 10^{-6}$ e adicionamos a $d(n)$ um ruído gaussiano branco $\nu(n)$, com variância $\sigma_\nu^2 = 10^{-3}$. Os resultados das si-

mulações foram obtidos a partir de 100 ensaios independentes. As Figs. 8.1 - 8.3 mostram as curvas do MSE em regime permanente do APSAF com ordens das projeções $K = 1, 2$ e 3 (a mesma ordem de projeção é usada em todas subbandas), considerando correlação apenas entre subfiltros adjacentes. Para fins comparativos as Figs. 8.1 - 8.3 apresentam também a curva gerada pela Eq. (5.39), que não leva em consideração a iteração entre as subbandas.

Os resultados das simulações mostrados pelas Figs. 8.1 - Fig. 8.3 apresentaram boa concordância com os resultados teóricos, destacando-se os da Fig. 8.2, cuja discrepância com relação aos resultados de simulação ficou em torno de 1 dB.

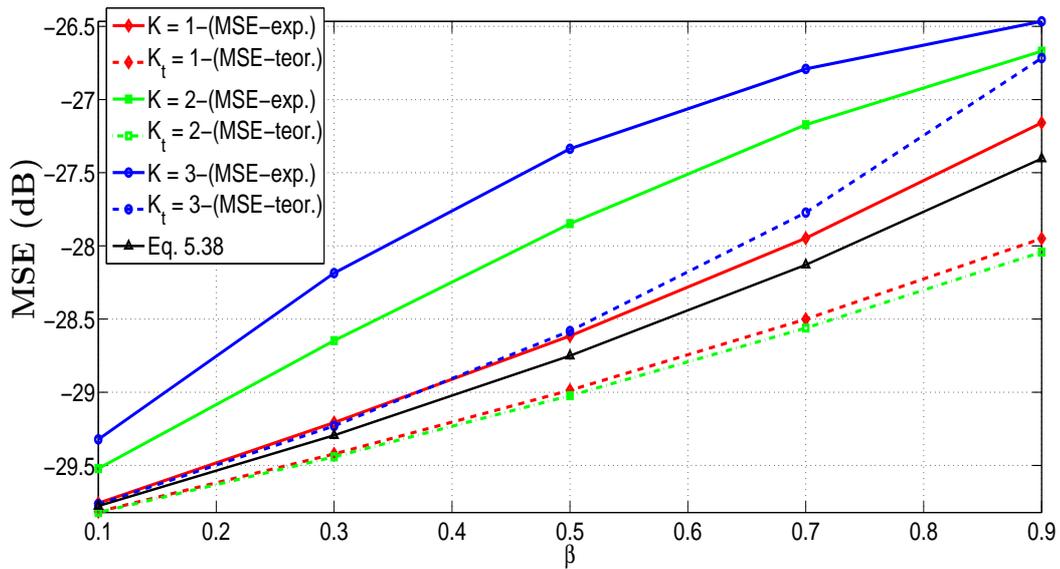


Figura 8.1: MSE em regime permanente considerando a aproximação para β pequeno

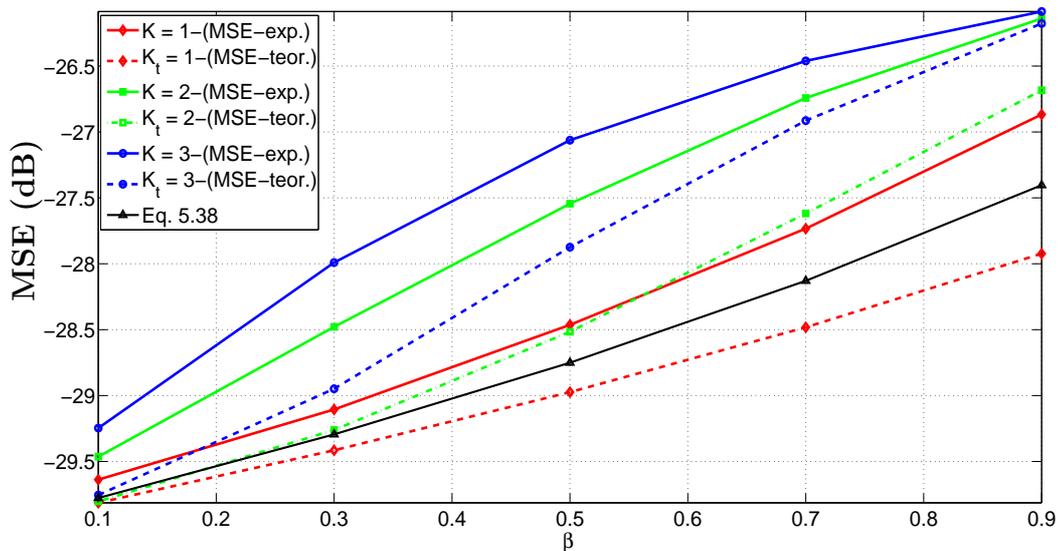


Figura 8.2: MSE em regime permanente considerando $S_2 = 0$.

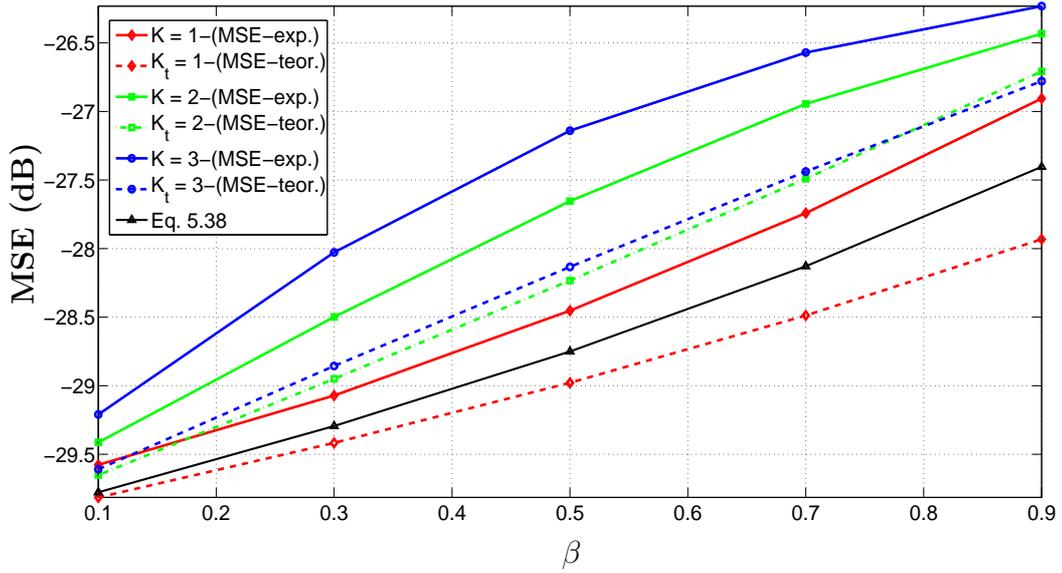


Figura 8.3: MSE em regime permanente considerando a aproximação para β grande.

8.5 Conclusões

Neste capítulo, apresentamos uma análise estatística teórica do erro médio quadrático para análise de desempenho do APSAF. Usando argumentos de conservação de energia, derivamos a expressão para o erro médio quadrático em regime permanente. Os resultados das simulações foram incluídos para ilustrar a aplicação da teoria, apresentando uma razoável aderência entre os resultados teóricos e simulados.

Capítulo 9

Conclusões e Sugestões

Neste capítulo objetivamos efetuar um panorama das contribuições efetuadas, almejando promover uma visão global da tese, assim como algumas sugestões que poderão ser investigadas oportunamente. Consideramos como principais resultados: a obtenção de novos algoritmos adaptativos para uma estrutura em subbandas na qual os subfiltros adaptativos são esparsos, que apresentam complexidade computacional reduzida e uma taxa de convergência comparável ao atual estado da arte em um mesmo desempenho quanto à convergência; implementação de um algoritmo de adaptação com projeção evolutiva na estrutura proposta, que emprega a automatização dinâmica do número de vetores de entrada em função da dinâmica do erro quadrático; a derivação de dois métodos que empregam o conceito de escalonador de tamanho de passo com vista à promoção de melhorias na robustez dos algoritmos propostos perante ruído impulsivo; por fim, a análise teórica do erro quadrático médio em regime permanente para algoritmos de projeção afim em subbandas, cuja formalização baseou-se em argumentos da conservação de energia.

9.1 Conclusões

O Capítulo 2 apresentou conceitos que visam fundamentar o entendimento dos algoritmos que reutilizam os dados de entrada. Para esta finalidade, foi abordado o algoritmo de projeção afim (APA), o qual atualiza o vetor de coeficientes numa direção ortogonal aos K últimos vetores de entrada. Com o objetivo de tornar a explanação mais clara, foi apresentada a interpretação geométrica do APA, iniciando pelo algoritmo NLMS, que é um caso particular do APA.

O Capítulo 3 apresentou uma breve introdução aos sistemas multitaxas, na qual os conceitos de decimação, interpolação e banco de filtros são descritos, juntamente com a discussão a respeito de suas principais características. Ao final do capítulo, um algoritmo de filtragem adaptativa no estado da arte foi apresentado. Esse conteúdo foi contemplado para motivar a apresentação da nova estrutura em subbandas detalhada nos capítulos posteriores.

O Capítulo 4 apresentou conceitos sobre fatores de aprendizagem e regularização, vi-

sando fundamentar o entendimento dos algoritmos adaptativos propostos. Como embasamento para melhoria da convergência e dos desajustes, iniciamos nossos estudos concernentes ao fator de aprendizagem em algoritmos adaptativos em subbandas, estendendo o conceito do *Set-membership* NSAF [90] para o NSAF original [87]. Um outro parâmetro fundamental em filtragem adaptativa estudado foi o fator de regularização, por desempenhar papel fundamental em diversos contextos nos quais a filtragem adaptativa se revela útil, especialmente quando os dados de observação são ruidosos. Um filtro adaptativo que não está devidamente regularizado é propenso a apresentar um desempenho inadequado.

No Capítulo 5 foi proposta uma nova estrutura em subbandas na qual os subfiltros adaptativos esparsos não empregam o erro global $e(n)$ em sua atualização, e sim a sua decomposição em subbandas, usando um banco de filtros de análise $H_i(z)$ paraunitário que garante a equivalência entre a soma dos erros quadráticos em cada subbanda e o erro quadrático em banda completa. O emprego da informação de erros nas subbandas foi justificado por um aumento na taxa de convergência e por um desajuste inferior em regime permanente, vantagens que derivam de um tratamento que contempla as peculiaridades de cada subbanda. Assumindo que os subfiltros adaptativos variam lentamente, foi possível mover os subfiltros de análise, responsáveis pela decomposição do erro em subbanda, que estavam à direita dos subfiltros adaptativos, para cada ramo do lado esquerdo dos subfiltros adaptativos. É importante destacar que o banco de filtros de análise deslocado é exatamente igual ao banco de filtros de análise responsável pela decomposição do sinal de entrada, e que devido a isto foi possível desconsiderar os componentes dos subfiltros não adjacentes, quando associamos todos os subfiltros em uma única matriz. Além disso, a fim de minimizar ainda mais a complexidade computacional, as iterações são realizadas em uma taxa M vezes menor do que a taxa de amostragem do sinal de entrada.

Para esta estrutura implementamos um algoritmo adaptativo responsável pela identificação de um sistema desconhecido, bem como pela reconstrução do sinal de saída, o qual denominamos NSAF-SF. Este algoritmo foi derivado mediante a conjugação dos princípios de perturbação mínima [2] e de otimização com múltiplas restrições. Os resultados mostraram que, quando o fator de decimação é igual ao número de subbandas M , o algoritmo proposto apresenta uma taxa de convergência comparável à taxa de convergência do algoritmo NSAF, com uma redução da complexidade computacional da ordem de $M/3$.

Usando o princípio da conservação de energia [27], foi desenvolvida uma análise teórica para prever o MSE em regime permanente do algoritmo resultante proposto, a qual forneceu uma fórmula analítica razoavelmente aderente aos resultados das simulações.

Desenvolvemos também o algoritmo NSAF-SF com seleção de subbandas que apresentou um desempenho melhor do que o algoritmo convencional através de uma seleção eficaz do número de subbandas em cada iteração. A seleção ideal de subbandas foi derivada comparando a distância entre os coeficientes atualizados com todas as subbandas com os coeficientes da solução proposta de seleção da quantidade de subbandas. Como resultado, o algoritmo proposto apresentou um desempenho de convergência comparável ao NSAF-SF com todas subbandas, com a vantagem de apresentar um custo computacional inferior.

No Capítulo 6 desenvolvemos um algoritmo adaptativo em subbandas para a estrutura proposta, combinada com as vantagens do algoritmo de projeção afim, que nominamos de RPSAF, com base no princípio da perturbação mínima, acrescida de restrições de cancelamento dos erros *a posteriori* nas subbandas, empregando uma função custo que contempla todos os coeficientes adaptativos e componentes de erro nas subbandas simultaneamente. Explorando a propriedade da decorrelação entre os sinais em diferentes subbandas, a proposta resultou numa complexidade computacional reduzida quando comparada com o recentemente proposto IMSAF [103]. Diferentemente do APA em subbandas de [104] e [105], o APSAF emprega uma abordagem de subbandas em malha fechada [83], na qual o erro global e todos os coeficientes adaptativos são simultaneamente considerados na função custo de otimização. Por fim foi implementado o algoritmo de adaptação com projeção evolutiva baseado nos conceitos apresentados por [106] e o algoritmo de adaptação empregando automatização dinâmica do número de vetores de entrada em função da dinâmica do erro quadrático apresentado pelo algoritmo. Quanto ao emprego da variação automática do número de projeções, obtivemos uma melhoria no desvio quadrático médio em regime permanente e redução na complexidade computacional, por considerar que o número de projeções se reduz à medida em que o algoritmo se aproxima do ponto ótimo, conforme mostrado nos resultados das simulações.

No Capítulo 7 implementamos um escalonador de tamanho do passo no algoritmo adaptativo em subbandas com Reúso de Dados proposto (RPSAF), tendo em vista a promoção de melhorias na robustez do algoritmo na presença de ruído impulsivo. O método proposto dimensiona instantaneamente para baixo o tamanho do passo quando um ruído de medição impulsivo é detectado. Tal procedimento visa eliminar a influência que dados corrompidos por ruído impulsivo possam apresentar na atualização dos coeficientes adaptativos por dados severamente corrompidos pela eventual presença de ruído impulsivo. Por fim, propomos o algoritmo de projeção afim em subbandas robusto a ruído impulsivo com complexidade computacional reduzida, que emprega uma função custo restrita apenas às amostras de erro com valores abaixo dos limiares adaptativos. Além disso, observando que um impulso é espalhado por mais de N_p amostras devido à decomposição pela filtragem em subbandas, as amostras vizinhas das amostras onde ocorrem erros de elevada magnitude são também descartadas. Devido à atualização na taxa mais baixa e à propriedade de correlação dos sinais de subbanda, foi obtida uma redução significativa da complexidade computacional. Os resultados das simulações em cenários de cancelamento de eco acústico ilustraram as propriedades de convergência superiores do algoritmo proposto, quando comparado com outros algoritmos recentemente apresentados para filtragem robusta ao ruído impulsivo.

Por fim, no Capítulo 8, realizamos uma avaliação de desempenho médio quadrático bastante detalhada para algoritmos de projeção afim em subbandas (RPSAF) considerando as interações das subbandas adjacentes. Baseando-se nos argumentos de conservação de energia, pudemos derivar a expressão para o erro quadrático médio em regime permanente sem restringir a distribuição dos dados de entrada. Os resultados de simulação foram

incluídos para ilustrar a aplicação da teoria. Em particular, verificou-se que os resultados teóricos predizem de modo razoavelmente acurado os resultados advindos das simulações computacionais.

9.2 Trabalhos Futuros

As inovações apresentadas são passíveis de serem desmembradas em trabalhos futuros, dentre os quais poderíamos citar:

- Aplicar os algoritmos estudados em estruturas não-uniformes com amostragem crítica para aplicações em separação cega de fontes;
- Avaliar os algoritmos na estrutura em subbandas em cancelamento de ecos acústicos com dados medidos;
- Investigar o uso de estatísticas de ordens superiores na função custo nos algoritmos estudados;
- Desenvolver um tratamento do erro quadrático médio em regime transitório para algoritmos de projeção afim em subbandas.

Referências do Autor em Temas Relacionados à Tese

Trabalhos completos publicados em anais de congressos

- P1** M. R. Petraglia, D. B. Haddad, Elias L. Marques. Filtro Adaptativo de Projeção Afim em Subbandas. XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT2015, 1-4, 2015.
- P2** Elias L. Marques, M. R. Petraglia, D. B. Haddad. Filtro Adaptativo em Subbandas com Subfiltros Esparsos Robusto a Ruído Impulsivo. XXXIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações - SBrT2016, 1-5, 2016.
- P3** M. R. Petraglia; Elias L. Marques ; D. B. Haddad. *Low-complexity Affine Projection Subband Algorithm for Robust Adaptive Filtering in Impulsive Noise*. In: *2016 IEEE 9th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, 2016, Rio de Janeiro. *Proceedings of the 2016 IEEE 9th Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM)*, 2016 IEEE, v. 1. p. 1-5, July 2016.

Artigos completos publicados em periódicos

- P4** M. R. Petraglia, D. B. Haddad, Elias L. Marques. *Normalized Subband Adaptive Filtering Algorithm with Reduced Computational Complexity*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, (Volume: 62 , Número: 12), Page(s): 1164 - 1168, Dec. 2015.
- P5** Petraglia, Mariane R.; Haddad, Diego B. ; Marques, Elias L. *Affine Projection Subband Adaptive Filter with Low Computational Complexity*. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, (Volume: 63 , Número: 10), Page(s): 989 - 993, Oct. 2016.

Referências Bibliográficas

- [1] PETRAGLIA, M. R., MITRA, S. K. “Adaptive FIR filter structure based on the generalized subband decomposition of FIR filters”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 40, n. 6, pp. 354–362, Jun. 1993.
- [2] HAYKIN, S. *Adaptive Filter Theory*. 3 ed. Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 2002.
- [3] DINIZ, P. S. R. *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementations*, v. 1. 4 ed. Boston, MA, Springer, 2013.
- [4] SAYED, A. H. *Fundamentals of Adaptive Filtering*. Hoboken, New Jersey, J. Wiley and Sons, 2003.
- [5] FARHANG-BOROUJENY, B. *Adaptive Filter Theory*. Upper Saddle River, NJ, John Wiley and Sons, 1998.
- [6] KALMAN, F. “A new approach to linear filtering and prediction problem”, *ASME Journal of Basic Engineering*, v. 82, pp. 34–45, Mar. 1960.
- [7] DENES, P., PINSON, E. *The Speech Chain: The Physics and Biology of Spoken Language*. New York, Worth Publishers, 1993.
- [8] LEE, T., CHING, P. C. “Dealing with Imperfections in Human Speech Communication with Advanced Speech Processing Techniques”, *10th Inter. Symp. on Signals, Circuits and Systems (ISSCS)*, pp. 1–6, Jun. 2011.
- [9] HADDAD, D. B. *Estruturas em Subbandas para Filtragem Adaptativa e Separação Cega e Semi-Cega de Sinais de Voz*. Tese de D.Sc., Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Jun. 2013.
- [10] ESQUEF, P. A. A., BISCAINHO, L. W. P. “Spectral-Based Analysis and Synthesis of Audio Signals”. In: *Advances in Audio and Speech Signal Processing: Technologies and Applications*, 1 ed., cap. 3, pp. 56–92, Hershey, Idea Group, 2007.
- [11] DINIZ, P. S. R., DA SILVA, E. A. B., NETTO, S. L. *Digital Signal Processing: System Analysis and Design*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 2002.

- [12] DIMITRIS G. MANOLAKIS, V. K. I., KOGON, S. M. *Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing*. Boston, McGraw-Hill, Apr. 2005.
- [13] DINIZ, P. S. R. *Adaptive Filtering - Algorithms and Practical Implementation*. 3 ed. New York, NY, Springer Science, 2008.
- [14] LIM, J. S., OPPENHEIM, A. V. *Advanced Topics in Signal Processing*. Upper Saddle River, NJ, USA, Prentice-Hall, 1987.
- [15] GOODWIN, G. C., PECADO, K. S. *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1984.
- [16] NITZBERG, R. “Application of the normalized LMS algorithm to MSLC”, *IEEE Trans. Aer. Electronics Sys.*, v. 21, n. 1, pp. 24–31, Jan. 1985.
- [17] OZEKI, K., UMEDA, T. “An adaptive filtering algorithm using orthogonal projection to an affine subspace and its properties”, *Electron. Commun. Jpn.*, v. 67-A, n. 5, pp. 19–27, Feb. 1984.
- [18] GAY, S. L., TAVATHIA, S. “The fast affine projection algorithm”, *IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 5, pp. 3023–3026, May 1995.
- [19] BOUCHARD, M. “Multichannel affine and fast affine projection algorithms for active noise control and acoustic equalization systems”, *IEEE Trans. Speech and Audio Processing*, v. 11, n. 1, pp. 54–60, Jan. 2003.
- [20] ALBERTO GONZALEZ, MIGUEL FERRER, F. A., DE DIEGO, M. “Affine projection algorithms: evolution to smart and fast algorithms and applications”, *Proc. European Signal Process. Conf. Bucharest*, v. 8, n. s.n., pp. 1965–1969, Aug. 2012.
- [21] COSTA, M. H., AT AL. “Efeito da inicialização no modelo do comportamento dos coeficientes do algoritmo de projeções afins”, *XXX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações-SBrT’12*, pp. 13–16, Sep. 2012.
- [22] SUNDAR, G., A.SANKARAN, A. “Normalized LMS algorithm with orthogonal correction factors”, *IEEE Signal, Systems and Computers*, v. 2, pp. 1670–1673, Nov. 1997.
- [23] RUPP, M. “Pseudo-affine projection algorithms revisited: robustness and stability analysis”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 49, n. 5, pp. 2017–2023, May 2011.
- [24] BOUTEILLE, F., SCALART, P., CORAZZA, M. “Pseudo affine projection algorithm: new solution for adaptive identification”, *Proc. Eurospeech*, pp. 427–430, Sep. 1999.

- [25] BERSHAD, N. J., LINEABARGER, D., MACLUGHLIN, S. “A stochastic analysis of the affine projection algorithm for gaussian autoregressive inputs”, *Proc. IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing*, v. 6, pp. 3837–3840, May 2001.
- [26] ALMEIDA, S., ET AL. “A Statistical Analysis of the Affine Projection Algorithm for Unity Step Size and Autoregressive Inputs”, *IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 52, pp. 1394–1405, Jul. 2005.
- [27] SHIN, H. C., SAYED, A. H. “Mean-square performance of a family of affine projection algorithms”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 52, n. 1, pp. 90–102, Jan. 2004.
- [28] ALMEIDA, S. *Análise Estatística do Comportamento de uma Classe de Algoritmos de Projeções Afins*. Tese de D.Sc., Universidade Federal de Santa Catarina, Apr. 2004.
- [29] LIMA, M. V. S. *Análise do algoritmo set-membership affine projection*. Dissertação de mestrado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, Sep. 2009.
- [30] SANKARAN, S. G., BEEEX, A. A. L. “Convergence behavior of affine projection algorithms”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 48, n. 4, pp. 1086–1096, Apr. 2000.
- [31] CIOFFI, J. M., KAILATH, T. “Windowed fast transversal filters adaptive algorithms with normalization”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing Magazine*, v. 33, pp. 607–625, Jun. 1985.
- [32] SHIN, H. C., SAYED, A. H., SONG, W. J. “Variable step-size NLMS and affine projection algorithms”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 11, n. 2, pp. 132–135, Feb. 2004.
- [33] YIN, W., MEHR, A. S. “A variable regularization method for affine projection algorithm”, *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, v. 57, n. 6, pp. 476–480, Jun. 2010.
- [34] GILLOIRE, A. “Experiments with sub-band acoustic echo cancellation for teleconferencing”, *IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, v. 2, pp. 2141–2144, Apr. 1987.
- [35] GILLOIRE, A., VETTERLI, M. “Adaptive filtering in subbands with critical sampling: Analysis experiments, and application to acoustic echo cancellation”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 40, n. 8, pp. 1862–1875, Aug. 1992.
- [36] KELLERMANN, W. “Analysis and design of multirate system for cancellation of acoustic echoes”, *IEEE Intern. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, v. 40, n. 8, pp. 2570–2573, Apr. 1988.
- [37] LU, Y., MORRIS, J. M. “Gabor expansion for adaptive echo cancellation”, *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 16, pp. 68–80, Mar. 1999.

- [38] HANSLER, E., SCHMIDT, G. U. “Hands-free telephones - joint control of echo cancellation and post filtering”, *Signal Processing*, v. 80, pp. 2295–2305, Nov. 2000.
- [39] WOO, T.-K. “Fast hierarchical least mean square algorithm”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 8, n. 11, pp. 289–291, Nov. 2001.
- [40] LEE, K., GAM, W., KUO, S. M. *Subband Adaptive Filtering - Theory and Implementation*, v. 1. 4 ed. Natick, MA, John Wiley & Sons, 2009.
- [41] PETRAGLIA, M. R., BATALHEIRO, P. B. “Projeto de Bancos de Filtros para Estruturas Adaptativas em Subbandas”, *SBA. Sociedade Brasileira de Automática, Campinas, SP*, v. 14, n. 2, pp. 187–198, 2003.
- [42] PETRAGLIA, M. R., B.TORRES, J. C. “Performance Analysis of an Adaptive Filter Structure Employing Wavelets and Sparse Subfilters”, *IEE Proceedings - Vision, Image and Signal Processing*, v. 149, n. 2, pp. 115–119, Jan. 2002.
- [43] VAIDYANATHAN, P. “Multirate Digital Filters, Filter Banks, Polyphase Networks and Applications”, *Proceedings of the IEEE*, v. 78, n. 1, pp. 56–93, Jan. 1990.
- [44] LEE, K. A., GAM, W. “Improving convergence of the NLMS algorithm using constrained subband updates”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 11, n. 9, pp. 736–739, Sep. 2004.
- [45] PETRAGLIA, M. R., ALVES, R. G., DINIZ, P. S. “New structure for adaptive filtering in subbands with critical sampling”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 48, n. 12, pp. 3316–3327, Dec. 2000.
- [46] P. L. DE LEON, I., ETTER, D. M. “Experimental results with increased bandwidth analysis filter in oversampled, subband acoustic echo cancellation”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 2, pp. 2295–2305, Jan. 1995.
- [47] VAIDYANATHAN, P. P. *Multirate Systems and Filter Banks Englewood Cliffs*. New Jersey, Prentice-Hall, 1993.
- [48] OPPENHEIM, A. V. *Discret-Time Signal Processing*. New Jersey, Prentice-Hall, 1989.
- [49] OPPENHEIM, A. V. *Signal and Systems*. New Jersey, Prentice-Hall, 1983.
- [50] OPPENHEIM, A. V. *Digital Signal Processing*. New Jersey, Prentice-Hall, 1975.
- [51] MORGAN, D. R. “Slow asymptotic convergence of LMS acoustic echo cancellers”, *IEEE Trans. Speech and Audio Processing*, v. 3, n. 2, pp. 126–136, Mar. 1995.
- [52] THIAGARAJAN, J., SPANIAS, A. *Analysis of the MPEG - 1 Layer III (MP3) Algorithm Using MATLAB*. 1 ed. Berlin, Germany, Morgan & Claypool, Nov. 2011.

- [53] JACABA, J. S. “Audio compression using modified discrete cosine transform: The MP3 coding standard”, *The University of the Philippines*, Oct. 2001.
- [54] BRITANAK, V. “A survey of efficient MDCT implementations in MP3 audio coding standard: Retrospective and state-of-the-art”, *Signal Processing*, v. 91, n. 4, pp. 624–672, Apr. 2011.
- [55] GAINSFORD, P. *MDCT/IMDCT - Properties and Applications, Discrete Transforms and their Applications*. Department of Electrical Engineering, the University of Texas, Texas, 7 2014.
- [56] ISO/IEC. *Information technology - Coding of moving pictures and associated audio for digital storage media at up to about 1,5 Mbit/s*. Relatório Técnico 2, ISO/IEC JTC 1/SC 29, Aug. 1993.
- [57] HIROKO, T. *A hybrid model for timbre perception: quantitative representations of sound color and density*. Tese de D.Sc., Department of Music, Stanford University, Dec. 2009.
- [58] SHYNK, J. J. “Frequency domain and multirate adaptive filtering”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 9, pp. 14–37, Jan. 1992.
- [59] STRANG, G., NGUYEN, T. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley, MA, Wellesley, Cambridge Press, 1996.
- [60] CROISER, A., ESTEBAN, D., GALAND, C. “Perfect channel splitting by use of interpolation-decimation tree decomposition techniques”, *Int. Conf. Information Sciences and Systems*, v. 48, n. 1, pp. 443–446, Aug. 1976.
- [61] SMITH, M. J., BARNWELL, T. P. “Exact reconstruction techniques for tree-structured subband coders”, *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 34, n. 3, pp. 434–441, Jun. 1986.
- [62] MINTZER, F. “Filters for distortion-free two-band multirate filter banks”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing*, pp. 626–630, Jun. 1985.
- [63] VAIDYANATHAN, P. P. “Theory and design of M-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary M, having perfect reconstruction property”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing*, v. ASSP-35, n. 4, pp. 476–492, Apr. 1987.
- [64] VAIDYANATHAN, P. P. “Quadrature mirror filter banks, M-band extensions and perfect-reconstruction techniques”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. SP-40, n. 2, pp. 770–783, Apr. 1992.
- [65] NGUYEN, T. Q., VAIDYANATHAN, P. P. “Structures for M-channel perfect-reconstruction FIR QMF banks which yield linear-phase analysis filters”, *IEEE*

- Trans. Acoust., Speech, and Signal Processing*, v. 38, n. 3, pp. 433–446, Mar. 1990.
- [66] STRANG, G., NGUYEN, T. Q. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley, MA, Wellesley - Cambridge Press, Oct. 1996.
- [67] NI, J., LI, F. “A variable step-size matrix normalized subband adaptive filters”, *IEEE Trans. Signal Language Process.*, v. 18, n. 6, pp. 1290–1299, Aug. 2010.
- [68] COURVILLE, M. D., DUHAMEL, P. “Adaptive filtering in subbands using a weighted criterion”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 46, n. 9, pp. 2359–2371, Sep. 1998.
- [69] PRADHAN, S. S., REDDY, V. U. “A new approach to subband adaptive filtering”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 47, n. 3, pp. 655–664, Mar. 1999.
- [70] JEONG, J. J., KOO, K., CHOI, G. T., et al. “A variable step size for normalized subband adaptive filters”, *Electronics Letters*, v. 19, n. 12, pp. 1047–1050, Jun. 2014.
- [71] SHIN, J., N.KONG, PARK, P. “Normalised subband adaptive filter with variable step size”, *Electronics Letters*, v. 48, n. 4, pp. 204–206, Feb. 2012.
- [72] SEO, J.-H., PARK, P. “A variable individual step-size subband filtering algorithm”, *Electronics Letters*, v. 50, pp. 177–178, Sep. 1995.
- [73] YU, Y., ZHAO, H., HE, Z., et al. “A robust band-dependent variable step size NSAF algorithm against impulsive noise”, *Signal Processing*, v. 119, pp. 203–208, Feb. 2016.
- [74] MATHEWS, V. J., CHO, S. H. “Improved convergence analysis of stochastic gradient adaptive filters using the sign algorithm”, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Processing*, v. 35, n. 4, pp. 450–454, Apr. 1987.
- [75] SHAO, T., ZHENG, Y. R., BENESTY, J. “An affine projection sign algorithm robust against impulsive interferences”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 17, n. 4, pp. 327–330, Apr. 2010.
- [76] NI, J., LI, F. “Variable regularisation parameter sign subband adaptive filter”, *Electronics Letters*, v. 46, n. 24, pp. 1605–1607, Nov. 2010.
- [77] SHIN, J. W., YOO, J. W., PARK, P. G. “Variable step-size sign subband adaptive filter”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 20, n. 2, pp. 173–176, Jan. 2013.
- [78] YOO, J. W., SHIN, J. W., PARK, P. G. “A band-dependent variable step-size sign subband adaptive filter”, *Signal Processing*, v. 104, n. 2, pp. 407–411, May 2014.
- [79] NI, J., CHEN, X., YANG, J. “Two variants of the sign subband adaptive filter with improved convergence rate”, *Signal Pocessing*, v. 96, pp. 325–331, Mar. 2014.

- [80] SINGH, A., PRINCIPE, J. C. “Using correntropy as a cost function in linear adaptive filters”, *In Proc. Int. Joint Conf. Neural Networks (IJCNN)*, v. 96, pp. 2950–2955, Jun. 2009.
- [81] HADDAD, D. B., PETRAGLIA, M. R., PETRAGLIA, A. “A unified approach for sparsity-aware and maximum correntropy adaptive filters”, *European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pp. 170–174, Aug. 2016.
- [82] SAYIN, M. O., VANLI, N. D., KOZAT, S. S. “A novel family of adaptive filtering algorithms based on the logarithmic cost”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, v. 62, n. 17, pp. 4411–4423, Sep. 2014.
- [83] DINIZ, P. S. R. *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementations*. 4 ed. Boston, MA, Springer, 2013.
- [84] BREINING, C., DREISEITEL, P., HANSLER, E., et al. “Acoustic echo control - an application of very-high-order adaptive filters”, *IEEE Signal Processing*, v. 16, n. 4, pp. 42–69, Jul. 1999.
- [85] LEE, K. A., GAN, W. S. “On the subband orthogonality of cosine-modulated filter banks”, *IEEE Trans. Circuits Sys. II, Exp. Briefs*, v. 53, n. 8, pp. 677–681, Aug. 2006.
- [86] LEE, K. A., GAN, W. S. “Inherent decorrelating and least perturbation properties of the normalized subband adaptive filter”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 54, n. 11, pp. 4475–4480, Nov. 2006.
- [87] ABADI, M. S. E., HUSOY, J. H. “Selective partial update and set-membership subband adaptive filters”, *IEEE Signal Processing*, v. 88, n. 10, pp. 2463–2471, Oct. 2008.
- [88] PALEOLOGU, C., BENESTY, J., CIOCHINA, S. “A variable step-size affine projection algorithm designed for acoustic echo cancellation”, *IEEE Trans. Audio, Speech, Language Processing*, v. 16, n. 8, pp. 1466–1478, Aug. 2008.
- [89] BENESTY, J., PALEOLOGU, C., CIOCHINA, S. “On regularization in adaptive filtering”, *IEEE Int. Conf. Acoust, Speech, and Signal Processing*, v. 19, n. 6, pp. 1734–1742, Aug. 2011.
- [90] GOLLAMUDI, S., NAGARAJ, S., KAPOOR, S., et al. “Set-membership filtering and a Set-membership normalized LMS algorithm with an adaptive step-size”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 5, n. 5, pp. 111–114, May 1998.
- [91] BENESTY, J., REY, H., VEGA, L. R., et al. “A non-parametric VSS-NLMS algorithm”, *IEEE Trans. Signal Processing Letters*, v. 13, n. 10, pp. 581–584, Oct. 2006.

- [92] LEE, K. A., GAM, W., KUO, S. M. “Mean-square performance analysis of the normalized subband adaptive filter”, *Proc. 40th Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers*, Oct. 2006.
- [93] HANSEN, P. C. *Rank-Deficient and Discrete III-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*. 4 ed. Philadelphia, SIAM, 1998.
- [94] BENESTY, J., GAENSLER, T., MORGAN, D. R., et al. *Advances in Network and Acoustic Echo Cancellation*. 4 ed. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 2001.
- [95] PALEOLOGU, C., BENESTY, J., CIOCHINA, S. *Sparse Adaptive Filters for Echo Cancellation*. 1 ed. Berlin, Germany, Morgan and Claypool Publishers, 2010.
- [96] NI, J., LI, F. “A variable regularization matrix normalized subband adaptive filters”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 16, n. 2, pp. 1290–1299, Feb. 2009.
- [97] PETRAGLIA, M. R., BATALHEIRO, P. B. “Filterbank design for a subband adaptive filtering structure with critical sampling”, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, v. 51, n. 6, pp. 1194–1202, 2004.
- [98] SAMSON, C. G., REDDY, U. “Fixed point error analysis of the normalized ladder algorithm”, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, v. 31, n. 5, pp. 1177–1191, Oct. 1983.
- [99] NI, J., LI, F. “Normalized subband adaptive filter with new variable regularization matrix”, *Electronics Letters*, v. 46, n. 18, pp. 1293–1295, Sep. 2010.
- [100] JEONG, J. J., KOO, K., CHOI, G. T., et al. “Regularization parameter of normalized subband adaptive filters”, *IEEE Int. Symp. Ind. Electron.*, pp. 906–909, Dec. 2012.
- [101] NGUYEN, T. Q. “Digital filter banks design quadratic - constrained formulation”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 43, n. 9, pp. 2103–2108, Sep. 1995.
- [102] NGUYEN, T. Q. “Digital networks echo cancellers - Recommendation G.168”, *Tech. Rep. G.168, ITU*, 2004.
- [103] YANG, F., WU, M., JI, P., et al. “An improved multiband-structured subband adaptive filter algorithm”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 19, n. 10, pp. 647–650, Oct. 2012.
- [104] ALVES, R. G., PETRAGLIA, M. R., JR., J. A. A. “Subband adaptive filtering with critical sampling using data selective affine projection algorithm”, *IEEE Int. Symp. Circuits Sys.*, v. 3, pp. 257–260, May 2004.
- [105] GORDY, J. D., GOUBRAN, A. H. “Fast system identification using affine projection and a critically sampled subband adaptive filter”, *IEEE Trans. Inst. Measurem.*, v. 55, n. 4, pp. 1242–1249, Aug. 2006.

- [106] KIM, S.-E. “An Affine Projection Algorithm With Evolving Order”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 16, n. 11, pp. 937–940, Dec. 2009.
- [107] YANG, Y. G., CHO, N. I., LEE, S. U. “On the performance analysis and applications of subband adaptive digital filters”, *Signal Processing*, v. 41, pp. 295–307, Feb. 1995.
- [108] PALEOLOGU, C., BENESTY, J., CIOCHINA, S. “Regularization of affine projection algorithm”, *IEEE Trans. Circuits Sys. II: Express Briefs*, v. 58, n. 6, pp. 366–370, Jun. 2011.
- [109] ZAKHAROV, Y. V. “Low-complexity implementation of the affine projection algorithm”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 15, n. 10, pp. 557–560, Oct. 2008.
- [110] LEE, C. H., PARK, P. “Scheduled step size affine projection algorithm”, *IEEE Trans. Circuits Sys. I: Reg. Papers*, v. 59, n. 9, pp. 2034–2043, Sep. 2012.
- [111] TANDON, A., SWAMY, M. N. S., AHMAD, M. O. “Partial-update l_∞ -norm based algorithms”, *IEEE Trans. Circuits Syst. 1*, pp. 411–419, Feb. 2007.
- [112] ARIKAN, O., CETIN, A. E., ERZIN, E. “Adaptive filtering for non-Gaussian stable processes”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 1, n. 11, pp. 163–165, Nov. 1994.
- [113] BHOTTO, M. Z. A., ANTONIOU, A. “Robust quasi-Newton adaptive filtering algorithms”, *IEEE Trans. Circuits Sys. II, Exp. Briefs*, v. 58, n. 8, pp. 537–541, Aug. 2011.
- [114] VEGA, L. H., REY, J., BENESTY, J., et al. “A new robust variable step-size nlms algorithm”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 56, n. 5, pp. 1878–1893, May 2008.
- [115] KWONG, C. “Dual sign algorithm for adaptive filtering”, *IEEE Trans. Commun.*, v. COM-34, n. 12, pp. 1272–1275, Dec. 1986.
- [116] SHAO, T., ZHONG, Y. R. “A new variable step-size fractional lower order moment algorithm for non-Gaussian interference environments”, *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Sys.*, pp. 2065–2068, May 2009.
- [117] ZHENG, Y. R., SHAO, T. “A variable step-size LMP algorithm for heavy-tailed interference suppression in phased array radar”, *Proc. IEEE Aerosp. Conf.*, v. 120, pp. 1–6, Mar. 2009.
- [118] SHAO, T., ZHENG, Y. R., BENESTY, J. “An affine projection sign algorithm robust against impulsive interferences”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 17, n. 4, pp. 327–330, Apr. 2010.
- [119] CHAMBERS, J., AVLONITIS, A. “A robust mixed-norm adaptive filter algorithm”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 4, n. 2, pp. 46–48, Feb. 1997.

- [120] SONG, P. P., NEWCOMB, R. W. “A normalized least mean squares algorithm with a stepsize scalar against impulsive measurement noise”, *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Exp. Briefs*, v. 60, n. 7, pp. 442–445, Jun. 2013.
- [121] PETRUS, P. “Robust huber adaptive filter”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 47, n. 4, pp. 1129–1133, Apr. 1999.
- [122] ZOU, Y. X., CHAN, T. C., NG, T.-S. “Least mean M -estimate algorithms for robust adaptive filtering in impulsive noise”, *IEEE Trans. Circuits Sys. II, Analog Digit. Signal Processing*, v. 47, n. 12, pp. 1564–1569, Dec. 2000.
- [123] ZOU, Y., CHAN, S. C., NG, T. S. “A recursive least M -estimate (RLM) adaptive filter for robust filtering in impulse noise”, *IEEE Signal Processing Letters*, v. 7, n. 11, pp. 324–326, Nov. 2000.
- [124] ZOU, Y., CHAN, S. C. “A robust quasi-Newton adaptive filtering algorithm for impulse noise suppression”, *IEEE Int. Symp. Circuits Sys.*, pp. 677–680, May 2001.
- [125] HAMPEL, F. R., RONCHETTI, E. M., ROUSSEEUW, P. J., et al. *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*. 1 ed. New York, John Wiley & Sons, 1986.
- [126] WANG, C., WU, H. C., PRINCIPLE, J. C. “A cost function for robust estimation of PCA”, *Proc. SPIE*, v. 2760, pp. 120–127, Nov. 1996.
- [127] YU, Y., ZHAO, H. “An efficient memory-improved proportionate affine projection sign algorithm based on l_0 -norm for sparse system identification”, in: *Proceedings of the Eighth International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering, Shenzhen, China*, pp. 509–518, Nov. 2013.
- [128] YU, Y., ZHAO, H. “Sparseness-controlled proportionate affine projection sign algorithms for acoustic echo cancellation”, *Circuits Sys. Signal Processing*, pp. 1–16, 2015.
- [129] ZHAO, H., YU, Y., GAO, S., et al. “Memory proportionate APA with individual activation factory for acoustic echo cancellation”, *IEEE/ACM Trans. Audio Speech Lang. Processing*, v. 22, n. 6, pp. 1047–1055, Apr. 2014.
- [130] NI, J., CHEN, X., YANG, J. “Two variants of the sign subband adaptive filter with improved convergence rate”, *Signal Processing*, v. 96, pp. 325–331, Dec. 2014.
- [131] ZHENG, Z., ZHAO, H. “Affine projection m -estimate subband adaptive filters for robust adaptive filtering in impulsive noise”, *Signal Processing*, v. 120, pp. 64–70, Mar. 2016.

- [132] PETRAGLIA, M. R., HADDAD, D. B., MARQUES, E. L. “Affine projection sub-band adaptive filter with low computational complexity”, *IEEE Trans. Circuits Sys. II: Express Briefs*, v. 63, n. 10, pp. 989–993, Oct. 2016.
- [133] CHAN, T. C., ZOU, Y. X. “Least mean m-estimate algorithms for robust adaptive filtering in impulsive noise”, *IEEE Trans. Signal Processing*, v. 52, n. 4, pp. 975–991, Apr. 2004.
- [134] ZHENG, Z., ZHAO, H. “Novel sign subband adaptive filter algorithms with individual weighting factors”, *Signal Processing*, v. 122, pp. 14–23, May 2016.