



## REDUÇÃO DA INSTABILIDADE NUMÉRICA EM MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

Paulo Eduardo Darski Rocha

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Antonio Carlos Siqueira de Lima

Rio de Janeiro  
Julho de 2013

REDUÇÃO DA INSTABILIDADE NUMÉRICA EM MODELOS DE LINHAS DE  
TRANSMISSÃO

Paulo Eduardo Darski Rocha

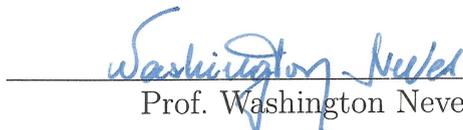
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

  
Prof. Antonio Carlos Siqueira de Lima, D.Sc.

  
Prof. Robson Francisco da Silva Dias, D.Sc.

  
Prof. Fernando Augusto Moreira, Ph.D.

  
Prof. Washington Neves, Ph.D.

  
Dr. João Clávio Salari Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
JULHO DE 2013

Rocha, Paulo Eduardo Darski

Redução da instabilidade numérica em modelos de linhas de transmissão/Paulo Eduardo Darski Rocha. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XII, 85 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Antonio Carlos Siqueira de Lima

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 71 – 77.

1. Modelos de linhas de transmissão. 2. Parâmetros unitários de linhas de transmissão. 3. Transitórios eletromagnéticos . I. Lima, Antonio Carlos Siqueira de. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*A Deus e aos meus pais pelo  
dom da vida e pelo amparo ao  
longo desses anos. À memória  
da minha querida avô Margarida  
Taveiros Darski*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades impostas pelo alto nível de exigência do curso de doutorado, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro, incentivo fundamental para a concretização deste tão sonhado trabalho. E a todos que cooperaram e contribuíram de alguma forma para a concretização deste trabalho, principalmente:

- ao meu orientador e amigo Antonio Carlos Siqueira de Lima pela pessoa humana e pela paciência e dedicação com que conduziu os trabalhos no decorrer do curso de doutorado, além da valiosa e dedicada orientação;
- aos meus pais: Paulo Rocha e Eloisa Helena, ao meu irmão Jan Andrei, minha cunhada Bianca Camargo, a minha amada prima Danielle Darski e aos meus amigos: Jadir Figueira, Nelzita Figueira, Kelyn Fialho, Andre Delgado, José Evangelista, Dna. Maria, José Gomes e Antunes, pelo incentivo constante;
- aos companheiros: Rafael Oliveira, Joyce Mendonça, Danilo Malafaia, Marcio Barbosa, Flavio Bergamaschi, Diego Rocha e Luiza Martins por estarem sempre ao meu lado; e
- aos colegas: Carolina Borges, Otto Gambini, Mirko Yanque, Ivanko Yanque, Thassiana Costa, Camilo Oliveros, entre outros, pela colaboração prestada;
- aos companheiros oficiais da Base de Fuzileiros Navais do Rio Meriti (BFNRM) pela paciência na fase final de elaboração deste documento, e ao Capitão de Fragata (T) Manoel Alexandre da Rosa Neto pelo apoio prestado para a conclusão do curso; e
- àqueles que de alguma forma contribuíram de maneira direta ou indireta para a conclusão deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## REDUÇÃO DA INSTABILIDADE NUMÉRICA EM MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

Paulo Eduardo Darski Rocha

Julho/2013

Orientador: Antonio Carlos Siqueira de Lima

Programa: Engenharia Elétrica

O objetivo dessa tese é analisar o comportamento dos parâmetros unitários de linhas de transmissão em larga faixa de frequência e o impacto dos mesmos na estabilidade numérica dos modelos computacionais de linhas de transmissão. Primeiro verifica-se o comportamento dos parâmetros unitários e as aproximações dos mesmos a partir de um modelo de onda completa, incluindo aproximações que não foram apresentadas ainda na literatura técnica. Detalha-se o procedimento para o cálculo da constante de propagação do modelo de onda completa empregando um método numérico para a solução da equação integral. No caso do emprego de expressões aproximadas para as matrizes de parâmetros unitários, para o caso de linhas de extra alta tensão, verificamos que as instabilidades numéricas podem ocorrer em frequências próximas à frequência industrial. A fim de minimizar essas instabilidades propomos o emprego de formulações baseadas em funções especiais que permitem a extensão da faixa de frequência de validade para frequências acima de dez MHz.

O efeito das instabilidades numéricas é analisado através de testes de simulação onde a linha de transmissão é tanto representada no domínio do tempo como no domínio da frequência. A Transformada Numérica de Laplace é empregada para obtenção da resposta temporal no caso das simulações realizadas no domínio da frequência. Para as respostas empregando o domínio do tempo é utilizado o Método das Características e a síntese por funções racionais empregando o Ajuste Vetorial.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## REDUCTION OF NUMERICAL INSTABILITY IN TRANSMISSION LINES MODELS

Paulo Eduardo Darski Rocha

July/2013

Advisor: Antonio Carlos Siqueira de Lima

Department: Electrical Engineering

In this work, we analyze the behavior of per-unit of length (pul) parameters of overhead lines in wideband modelling and their impact on the numerical stability of a transmission line. First we consider the so-called full wave model and use this model to derive several approximations including some not previously reported in the technical literature. The evaluation of the propagation constant in a full wave model demands a solution of an integral equation using a root finding scheme. In this work, we present in detail how one can achieve this solution. If the approximate expression are used for modelling three-phase lines, such as the one in Extra-High Voltage, numerical instabilities might occur in the low frequency range close to the industrial frequency. In order to mitigate this instabilities we propose to use some Special Functions leading to passivity violation only in the high frequency range, typically above ten MHz.

The effect of the numerical instabilities was verified by simulations carried out in frequency domain and time domain. The Numerical Laplace Transform was used for the former while the Method of Characteristics and rational synthesis using Vector Fitting was applied in the latter.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	3
1.3 Motivação . . . . .	3
1.4 Estrutura do trabalho . . . . .	5
<b>2 Identificação do problema</b>	<b>6</b>
2.1 Considerações iniciais . . . . .	6
2.2 Parâmetros unitários calculados a partir de $MI_1$ . . . . .	8
2.3 Parâmetros unitários calculados a partir de $MI_2$ . . . . .	11
2.4 Análise de estabilidade no domínio da frequência . . . . .	12
2.5 Discussão dos resultados . . . . .	17
<b>3 Aspectos numéricos envolvendo propagação de ondas eletromagnéticas em um fino condutor considerando o solo</b>	<b>18</b>
3.1 Solução da equação modal . . . . .	18
3.2 Cálculo da constante de propagação em sistemas de condutores aéreos	21
3.2.1 Aproximação Quase-TEM . . . . .	22
3.2.2 Aproximação pelo método das imagens . . . . .	23
3.2.3 Aproximação parcial do método de onda completa . . . . .	23
3.2.4 Aplicação das aproximações na solução da equação modal . . . . .	24
3.2.5 Verificação com resultados anteriormente publicados . . . . .	29
3.3 Cálculo de parâmetros unitários . . . . .	31
3.3.1 Cálculo de parâmetros unitários pelo modo de onda completa	32
3.3.2 Cálculo de parâmetros unitários pela aproximação quase-TEM	34
3.3.3 Cálculo de parâmetros unitários pela aproximação do método das imagens . . . . .	35
3.3.4 Redução à formulação de Carson . . . . .	36

3.4	Estabilidade numérica . . . . .	36
3.4.1	Análise da estabilidade através da admitância nodal . . . . .	36
3.4.2	Avaliação da resposta temporal para os pontos de instabilidade analisados . . . . .	41
3.5	Discussão dos resultados . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Aproximação dos parâmetros unitários em linhas de transmissão</b>	<b>47</b>
4.1	Aproximação quase-TEM . . . . .	47
4.2	Aproximação pelo método das imagens . . . . .	48
4.3	Aproximação proposta para o modelo quase-TEM . . . . .	48
4.3.1	Aproximação da impedância de retorno pelo solo . . . . .	49
4.3.2	Aproximação da admitância do solo . . . . .	50
4.3.3	Aproximação da definição de diferença de potencial entre o condutor e o solo para sistemas contendo $n$ -condutores . . . . .	51
4.4	Verificação do modelo proposto e suas limitações . . . . .	52
4.5	Avaliação da estabilidade e resposta temporal em linhas trifásicas . . . . .	57
4.5.1	Análise da Estabilidade numérica . . . . .	57
4.5.2	Resposta no domínio do tempo . . . . .	62
4.6	Discussão dos resultados . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>67</b>
5.1	Conclusões Gerais . . . . .	67
5.2	Trabalhos Futuros . . . . .	69
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>71</b>
<b>A</b>	<b>Revisão de calculo de parâmetros em linhas de transmissão</b>	<b>78</b>
A.1	Modelagem dos parâmetros longitudinais . . . . .	80
A.2	Modelagem dos parâmetros transversais . . . . .	82
<b>B</b>	<b>Transformada Numérica de Laplace</b>	<b>84</b>

# Lista de Figuras

1.1	Modelos de linhas de transmissão . . . . .	4
2.1	Disposição geométrica de dois condutores aéreos . . . . .	9
2.2	Linha de transmissão trifásica compacta de 500kV . . . . .	13
2.3	Violação da passividade do modelo $MI_1$ na região de operação . . . . .	14
2.4	Violação da passividade do modelo $MI_1$ para linha compacta de 500kV . . . . .	14
2.5	Violação da passividade do modelo $MI_2$ para linha compacta de 500kV . . . . .	15
2.6	Linha de transmissão trifásica simples . . . . .	16
2.7	Análise da estabilidade em linha trifásica simples - $MI_1$ . . . . .	16
2.8	Análise da estabilidade em linha trifásica simples - $MI_2$ . . . . .	17
3.1	Arranjo do condutor próximo a interface. . . . .	19
3.2	Comparação da parte real de $j\hat{\gamma}$ para distintas abordagens . . . . .	27
3.3	Parte imaginária de $j\hat{\gamma}$ para distintas abordagens . . . . .	28
3.4	Correção do fator de amortecimento, $\alpha$ . . . . .	30
3.5	Correção do fator de fase, $\beta$ . . . . .	30
3.6	Correção do real de $\gamma$ simulado . . . . .	31
3.7	Definições dos parâmetros por unidade de comprimento . . . . .	32
3.8	Sistema monofásico com condutor de: $r = 2$ cm e $h = 15$ m . . . . .	38
3.9	Sistema monofásico com condutor de: $r = 1$ cm e $h = 20$ m . . . . .	39
3.10	Sistema monofásico com condutor de: $r = 2$ cm e $h = 20$ m . . . . .	39
3.11	Comportamento de H para um caso de violação da passividade . . . . .	40
3.12	Comportamento de H para um caso de não violação da passividade . . . . .	40
3.13	Comportamento de $Y_c$ para um caso de violação da passividade . . . . .	41
3.14	Sistema monofásico alimentado por uma fonte alternada de 1 p.u. . . . .	41
3.15	Resposta a senóide 1 p.u.: $r = 2$ cm e $h = 15$ m, $f = 17,24$ MHz . . . . .	44
3.16	Resposta a senoide 1 p.u.: $r = 2$ cm e $h = 15$ m, $f = 7,00$ MHz . . . . .	44
3.17	Resposta a senoide 1 p.u.: $r = 1$ cm e $h = 20$ m, $f = 9,77$ MHz . . . . .	45
3.18	Resposta a senoide 1 p.u.: $r = 1$ cm e $h = 20$ m, $f = 3,00$ MHz . . . . .	45
3.19	Resposta a senoide 1 p.u.: $r = 2$ cm e $h = 20$ m, $f = 10,05$ MHz . . . . .	46
3.20	Resposta a senoide 1 p.u.: $r = 2$ cm e $h = 20$ m, $f = 3,00$ MHz . . . . .	46

4.1	Resistências própria e mútuas . . . . .	53
4.2	Erro relativo no cálculo das resistências própria e mútuas . . . . .	54
4.3	Indutâncias próprias . . . . .	54
4.4	Indutâncias mútuas . . . . .	55
4.5	Erro relativo no cálculo das indutâncias própria e mútuas . . . . .	55
4.6	Condutância . . . . .	56
4.7	Capacitância própria . . . . .	56
4.8	Capacitâncias mútuas . . . . .	57
4.9	Análise da estabilidade em linha trifásica - QT . . . . .	59
4.10	Análise da estabilidade em linha trifásica - MP . . . . .	59
4.11	Análise da estabilidade em linha trifásica - MP-QT . . . . .	60
4.12	Análise da estabilidade em linha trifásica - MP-DP2 . . . . .	60
4.13	Análise da estabilidade em linha trifásica - MP-DP3 . . . . .	61
4.14	Análise da estabilidade em linha trifásica - Método proposto DP4 . . . . .	61
4.15	Sistema trifásico alimentado por uma fonte alternada de 1 p.u. . . . .	62
4.16	Resposta no terminal da fase B - Modelo MP, $f=3$ MHz . . . . .	63
4.17	Resposta no terminal da fase B - Modelo MP, $f=17$ MHz . . . . .	63
4.18	Comparação da parte real de $\tilde{S}_1$ . . . . .	64
4.19	Comparação da parte imaginária de $\tilde{S}_1$ . . . . .	65
4.20	Comparação da parte real de $\tilde{S}_2$ . . . . .	65
4.21	Comparação da parte imaginária de $\tilde{S}_2$ . . . . .	66

# Lista de Tabelas

2.1	Análise de violação de passividade em função da frequência . . . . .	15
3.1	Tempo computacional para avaliação de $\gamma$ pelo método de onda completa . . . . .	27
3.2	Tempo computacional para avaliação de $\gamma$ pelos métodos aproximados	27
3.3	Erro RMS das soluções aproximadas . . . . .	29
3.4	Definições de parâmetros por unidade de comprimento (p.u.l.) . . . .	31
3.5	Valores mínimos da parte real dos autovalores de $\mathbf{Y}_n$ . . . . .	37
4.1	Definições de parâmetros por unidade de comprimento (pul) . . . . .	57

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

A relação entre as tensões terminais e correntes injetadas em um condutor sobre uma interface ar-solo com perdas é um dos problemas clássicos da teoria do campo eletromagnético. Tradicionalmente, em estudos de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão ou cabos subterrâneos, assumimos que a propagação de onda se dá no modo quase-TEM (Quase-Transverse Electromagnetic Mode). Isto implica no uso das formulações de Carson ou Pollaczek [1, 2] na avaliação da impedância em série, isto é, usando integrais infinitas.

Embora ambos procedimentos tenham sido desenvolvidos assumindo o solo como bom condutor (ou seja, onde são desprezadas as correntes de deslocamento), a inclusão da permissividade do solo no cálculo das impedâncias série é bastante simples [3].

Um ponto de pesquisa ativa é a avaliação do comportamento de circuitos de transmissão em situações de surtos atmosféricos [4-6], por ser um tipo de fenômeno que envolve altas frequências (normalmente na gama de alguns MHz), próximo ao limite de aplicabilidade do modelo de propagação quase-TEM e onde pode não ser razoável assumir o solo com perdas como um condutor ideal. Além disso, este tipo de análise é largamente utilizada em projetos de linhas de transmissão e pode afetar consideravelmente o custo total de construção da rede. Por isso, é de vital importância inferir com mais precisão o limite de aplicação de alguns resultados destes estudos.

Desde os trabalhos pioneiros de Kikuchi [7] e Sunde [8], houve basicamente duas abordagens para a modelagem de linhas aéreas em larga faixa de frequência. A primeira consiste em utilizar o vetor potencial magnético como a fonte de ondas TE (Transversal Electric) e TM (Transversal Magnetic) [9, 10], e a segunda usa potencial de Hertz dos tipos elétrico e magnético [11]. Todas estas abordagens apresentam dificuldade para a solução da equação modal.

Em uma solução de campo completa, também conhecida como onda completa, a equação modal é uma equação integral, isto é, a constante de propagação a ser determinada aparece como um argumento de uma integral infinita. A maioria das equações integrais exige uma solução iterativa. No caso da equação modal este processo pode ser realizado pelo método de Newton-Raphson (NR). Em [12, 13] é mencionado que uma solução iterativa foi utilizada para obter a constante de propagação do sistema, apesar de ambas as obras não apresentarem maiores detalhes sobre a forma de implementação do procedimento iterativo para solução da equação integral. Neste trabalho, propomos apresentar um maior esclarecimento sobre o assunto, e investigar o comportamento numérico da equação modal. Propomos a utilização dos resultados das aproximações conhecidas no cálculo da constante de propagação como um ponto de partida para realização da iteração numérica.

Para obtermos os parâmetros transversais e longitudinais da linha de transmissão por unidade de comprimento (p.u.l.), precisamos definir o caminho de integração utilizado para a definição de tensão [12]. Aqui optamos em utilizar as mesmas definições adotadas por Pettersson [13], pois elas são particularmente comuns na engenharia elétrica. Estas definições são: potencial escalar no condutor, diferença de potencial escalar entre o condutor e o solo, e da tensão do condutor. Se o solo é assumido como sendo um bom condutor, estas três formulações serão essencialmente coincidentes.

A análise da estabilidade de um modelo de linha de transmissão é previamente verificada com base no comportamento da parte real da impedância característica, sendo que um modelo de linha estável deve apresentar uma impedância característica com parte real positiva em toda a faixa de frequência. Como será apresentado neste trabalho, este cenário pode não ser suficiente para garantir um modelo estável. Vamos demonstrar que, dependendo da definição dos parâmetros por unidade de comprimento, haverá violação de passividade e conseqüentemente instabilidade nas respostas no domínio do tempo.

Com a finalidade de eliminar as integrais infinitas e a dependência da obtenção da constante de propagação para realização dos cálculos de parâmetros longitudinais e transversais, diversos autores apresentaram formulações aproximadas para solução das integrais infinitas de Carson e Pollaczek [12–17]. Neste trabalho, propomos uma formulação de forma fechada para o cálculo de parâmetros longitudinais, e uma solução aproximada para o cálculo de parâmetros transversais em linhas de transmissão. São apresentadas as suas limitações de aplicação e a verificação da estabilidade é realizada com base no comportamento da parte real dos autovalores da matriz de admitância nodal.

## 1.2 Objetivos

Esta tese tem como objetivos principais:

- analisar o comportamento dos parâmetros unitários de linhas de transmissão em larga faixa de frequência, e o impacto dos mesmos na estabilidade numérica dos modelos computacionais de linhas de transmissão.
- apresentar os problemas de instabilidade numérica da modelagem pelo método das imagens [12, 13] em sistemas monofásicos e trifásico em frequências onde ocorrem os principais fenômenos de estudos de transitórios eletromagnéticos;
- apresentar quatro metodologias numéricas de cálculo da constante de propagação que utilizam o modo de onda completa, com valor inicial da constante de propagação perturbado e calculado, e quatro metodologias propostas, sendo: duas iterativas que utilizam o modo quase-onda completa, com valor inicial da constante de propagação calculado pelo método das imagens, uma analítica que utiliza o modo quase-TEM, e uma analítica que utiliza o método das imagens;
- apresentar um modelo de forma fechada para o cálculo de parâmetros longitudinais em linhas de transmissão e um modelo aproximado para o cálculo de parâmetros transversais;
- analisar a estabilidade numérica das definições utilizadas no cálculo de parâmetros em linhas de transmissão [13] e da metodologia proposta para o cálculo de parâmetros.

## 1.3 Motivação

Na modelagem de linhas de transmissão, o modelo de onda completa é a referência para obtenção dos parâmetros da rede. Este modelo, de difícil solução, apresenta integrais infinitas e depende do valor desconhecido da constante de propagação, usualmente obtido por meio de iteração numérica, que exige um elevado tempo computacional.

Uma investigação de oito tipos soluções da equação integral por meio de iteração numérica foi realizada, sendo quatro soluções utilizando o modelo de onda completa com valor inicial da constante de propagação perturbado e calculado, e outras quatro metodologias propostas utilizando aproximações do modelo de onda completa. Estas investigações apresentaram algumas alternativas viáveis de cálculo da constante de propagação do sistema.

As aproximações do modelo de onda completa, tem sido extensamente utilizadas desde os trabalhos precursores de Carson e Pollaczek [1, 2] para a avaliação das impedâncias de retorno pelo solo, e por Wise [18] onde são consideradas as correntes de dispersão. Estas formulações não dependem da constante de propagação, mas apresentam integrais infinitas.

Entre os trabalhos desenvolvidos nas últimas década, o método das imagens [12, 13] apresenta-se como o método de maior sucesso, pois independe do valor da constante de propagação e substitui as integrais infinitas por funções logarítmicas de rápido processamento computacional. Porém, neste trabalho, identificamos que o modelo não é confiável por apresentar problemas de instabilidade numérica em frequências próximas a de operação da rede, e em uma faixa onde ocorrem os principais fenômenos de estudos transitórios. Na fig. 1.1 apresentamos a problemática relacionada aos modelos aproximados de linhas de transmissão.

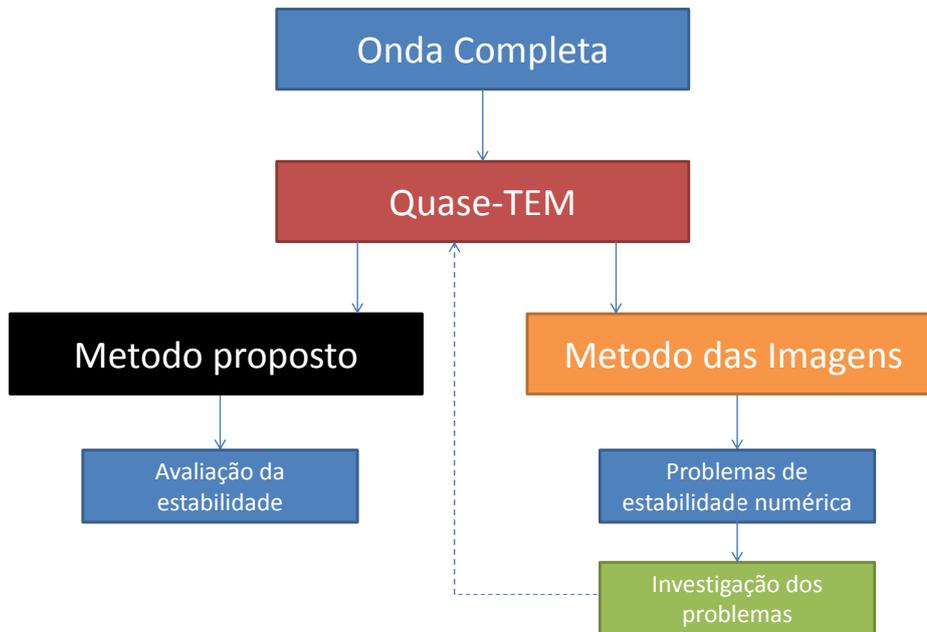


Figura 1.1: Modelos de linhas de transmissão

Após a identificação do problema, foi realizada uma investigação minuciosa, partindo do mais simples modelo monofásico, e estendendo modelo para sistemas multicondutores de configuração usual em linhas de transmissão. Observamos que o método das imagens apresentou instabilidade em todos os casos estudados.

Desta forma, este trabalho tem como motivação apresentar um modelo capaz de minimiza as limitações encontradas nos modelos consagrados na literatura técnica. Desta forma, temos como proposta simplificar as formulações de Carson e

Wise [1, 18], eliminando as integrais infinitas e a dependência do valor da constante de propagação no cálculo de parâmetros unitários. A metodologia proposta eliminou o problema de instabilidade numérica em faixas importantes de frequência, levando-a a um limite inferior acima de 10 MHz.

## 1.4 Estrutura do trabalho

O trabalho está dividido em cinco capítulos, incluindo este capítulo introdutório. A seguir apresenta-se uma descrição dos demais capítulos.

O Capítulo 2 apresenta uma breve investigação dos problemas de instabilidade numérica na modelagem de linhas de transmissão, decorrentes da implementação do método das imagens [12, 13]. A identificação do problema de instabilidade numérica do método das imagens ocorreu em frequências que vão de algumas dezenas de Hz até algumas centenas de kHz.

O Capítulo 3 representa o início de uma investigação da origem dos problemas identificados no Capítulo 2. É apresentada uma análise das propriedades de propagação de tensão e corrente em um condutor próximo a uma interface entre dois meios considerando o modelo de onda completa e suas simplificações como: propagação quase-TEM, método das imagens e quase-onda completa. É realizada uma breve revisão da formulação da equação modal, sendo descritas metodologias para o cálculo da constante de propagação em condutores aéreos. São apresentadas seis metodologias iterativas e duas metodologias analíticas de cálculo da constante de propagação, sendo seus respectivos erros RMS avaliados. Verificou-se três definições de tensão distintas para o cálculo de parâmetros: do potencial escalar, da diferença de potencial e da tensão no condutor. É apresentado um estudo da estabilidade numérica e o impacto da instabilidade no domínio do tempo é avaliado.

No Capítulo 4 apresentamos uma metodologia de forma fechada para o cálculo de parâmetros longitudinais e uma metodologia aproximada para o cálculo de parâmetros transversais, utilizadas para simplificar as integrais de Carson e Wise [1, 18], respectivamente, substituindo a integral infinita pelo seu equivalente integral. A verificação dos modelos propostos é realizada comparando o comportamento em larga faixa de frequência e suas limitações numéricas são apresentadas. São realizadas análises de estabilidade e resposta temporal para uma rede trifásica, onde foram comparados os impactos de oito metodologias distintas.

O Capítulo 5 trata da conclusão do trabalho. São descritas as conclusões baseadas nos resultados obtidos ao longo do trabalho. São feitas também as propostas de trabalhos futuros levando-se em conta alguns fatores que não puderam ser considerados.

# Capítulo 2

## Identificação do problema

Conforme mencionado no capítulo anterior, o principal objetivo da presente pesquisa é a identificação e mitigação de instabilidades numéricas ocorridas nos modelos de linha de transmissão aéreas quando da inclusão da condutividade do solo. Nesse capítulo é mostrado que o emprego de fórmulas aproximadas dos parâmetros unitários (impedância e admitância por unidade de comprimento), levando-se em consideração que o efeito de um solo com condutividade e permissividade, pode apresentar instabilidades numéricas no domínio da frequência. É importante ressaltar que, por se tratar de um elemento passivo, a linha de transmissão deve ser estável para qualquer faixa de frequência. Outrossim, as instabilidades numéricas são causadas por imprecisões no cálculo de parâmetros unitários e não por erros de ajustes de funções no domínio da frequência, como ocorre no modelo de linhas de transmissão empregado em programas no domínio do tempo, como EMTP/ATP, PSCAD, EMTP-RV.

### 2.1 Considerações iniciais

Para a obtenção do modelo de linha de transmissão é necessário ter, no caso de uma rede composta por  $n$ -condutores, a matriz de impedância por unidade de comprimento,  $\mathbf{Z}$  e a matriz de admitância por unidade de comprimento,  $\mathbf{Y}$ . O comportamento da linha de transmissão é descrito pelo par de equações diferenciais dadas por (2.1),

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{V}}{dx} &= -\mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} \\ \frac{d\mathbf{I}}{dx} &= -\mathbf{Y} \cdot \mathbf{V}\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $\mathbf{V}$  é o vetor de tensão fase-neutro dos condutores,  $\mathbf{I}$  é o vetor de corrente, e  $dx$  é o diferencial de comprimento do circuito.

Os primeiros modelos de linha de transmissão a considerar o efeito do solo o fizeram através da suposição que o mesmo é um bom condutor, i.e., no solo  $\sigma \gg \omega\epsilon$ . Como resultado, o solo impacta  $\mathbf{Z}$  mas não há efeito significativo em  $\mathbf{Y}$ . Para o cálculo dos parâmetros unitários são ainda consideradas as seguintes hipóteses:

- O modo quase-TEM é o modo dominante de propagação;
- O solo é considerado como um meio linear, isotrópico e homogêneo, com permeabilidade magnética relativa unitária;
- O comprimento do circuito é de pelo menos uma ordem de grandeza maior que a maior altura dos condutores;
- A altura dos condutores é constante ao longo de todo o circuito;
- Os condutores são cilíndricos, sendo o efeito de proximidade entre condutores desconsiderado.

A partir dessas hipóteses é possível obter a impedância de retorno pelo solo através da solução do comportamento do campo elétrico no ar e no solo. Esse procedimento foi desenvolvido de forma independente por Carson [1, 19] e Pollaczek [2]. A expressão da impedância do solo leva a necessidade de avaliação de integrais infinitas. De fato, no trabalho original de 1926, o próprio Carson sugere o emprego de aproximação por série da integral infinita. Atualmente, o custo computacional da avaliação dessa integral reduziu muito, mas há uma grande variedade de trabalhos onde se busca empregar expressões simplificadas, como por exemplo [14, 15, 17, 20], apenas para citar alguns.

Uma metodologia desenvolvida de forma independente por vários pesquisadores consiste na aproximação do comportamento do solo através do uso de imagens. A grande vantagem dessa abordagem está na possibilidade de se obter expressões fechadas empregando distâncias complexas. Considerando o solo bom condutor, esse procedimento vem sendo empregado em sistemas de potência, recebendo também o nome de método do plano complexo [15]. Mais recentemente foi proposto inclusive o emprego do duplo plano complexo [21].

A consequência de assumir o solo como bom condutor, limita a aplicabilidade das expressões a frequências inferiores a 2 MHz, não representando de forma adequada os fenômenos muito rápidos. Uma forma de se estender essa limitação é possível através da consideração das correntes de deslocamento no solo, como realizado inicialmente por Wise na década de 1930 [18, 22]. Nesses trabalhos foram propostas correções para a admitância transversal por unidade de comprimento obtidas a partir do formalismo do Vetor de Hertz e adotando o solo como condutor imperfeito. Uma outra abordagem proposta em [23] apresenta termos de correção na matriz de

coeficientes de potencial para um sistema contendo  $n$ -condutores. Nesse trabalho também é suposto que a tensão do condutor seja numericamente igual a tensão ao que o mesmo está submetido. São apresentadas expressões bastante complexas e de difícil implementação numérica.

Um ponto importante relacionado à inclusão da admitância do solo é com relação a definição da tensão do condutor. Ao incluir as correntes de deslocamento no solo, há uma componente do campo elétrico transversal no solo elevando o potencial a que o mesmo está submetido. Nos trabalhos [18, 22], a tensão do condutor é considerada numericamente igual ao potencial escalar. Esse procedimento não é exatamente correto e como será mostrado adiante ainda nesse capítulo, a inclusão da admitância do solo leva a diferentes possibilidades para a definição de  $\mathbf{V}$  na eq. (2.1).

Atualmente há na literatura duas abordagens para a inclusão da impedância e admitância do solo em modelos de linha de transmissão. A formulação desenvolvida em [12, 24, 25] é baseada no emprego de vetor de Hertz para o cálculo dos campos associados com a linha de transmissão, e está baseada no formalismo desenvolvido por Wait em [11]. Por uma questão de simplificação de notação, essa abordagem receberá, no restante do documento, o nome de Método das Imagens 1,  $MI_1$ . A segunda abordagem, apresentada em [13], é uma extensão do formalismo apresentada por Kikuchi em [7] baseada no emprego do potencial escalar,  $\varphi$  e do potencial vetor magnético,  $\mathbf{A}$ . Esse formalismo leva em conta as diferentes definições de  $\mathbf{V}$ , conforme será visto em maiores detalhes adiante. Essa abordagem receberá, no restante do documento, o nome de Método das Imagens 2,  $MI_2$ . Apresentamos nas seções a seguir duas possíveis formulações desenvolvidas na literatura técnica baseadas no emprego de distâncias complexas, denominadas  $MI_1$  e  $MI_2$ .

## 2.2 Parâmetros unitários calculados a partir de

### $MI_1$

Considere um conjunto de  $n$ -condutores onde as distâncias entre o condutor  $i$  e o condutor  $j$  são representadas esquematicamente na fig. 2.1. Para a obtenção da impedância e admitância do solo, a distância  $D_{ij}$  é multiplicada por um número complexo que depende da constante de propagação do solo e do ar. A formulação necessária ao cálculo da matriz de impedância por unidade de comprimento é dada por (2.2),

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_e + \mathbf{Z}_s \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{Z}_i$  é uma matriz diagonal contendo a impedância interna dos condutores de fase e/ou cabos pára-raios,  $\mathbf{Z}_e$  é a matriz de impedância espacial supondo o solo como condutor ideal, e  $\mathbf{Z}_s$  é a matriz da impedância de retorno pelo solo.

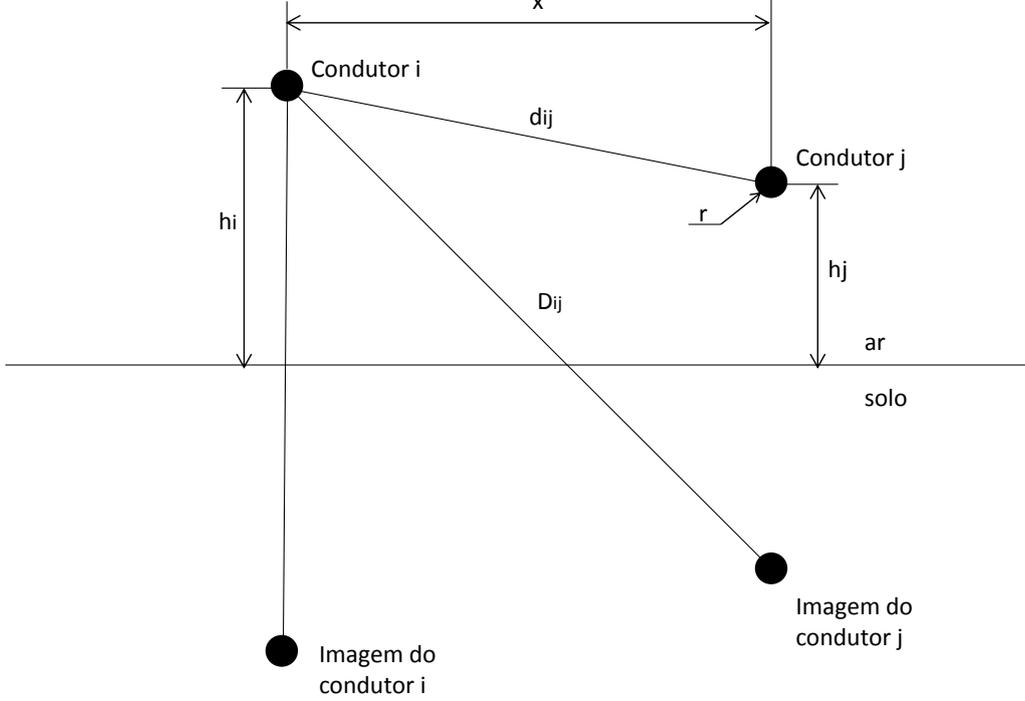


Figura 2.1: Disposição geométrica de dois condutores aéreos

Para a determinação de  $\mathbf{Z}_s$  é preciso avaliar o comportamento de integrais infinitas associadas ao modo quase-TEM de propagação. Conforme dito anteriormente, tal procedimento pode ser evitado sem grande perda de precisão através de métodos baseados na aproximação por imagens a uma distância complexa do solo. Esse procedimento traz a vantagem que permite o emprego de expressões fechadas envolvendo logarítmicos no cálculo de  $\mathbf{Z}_s$ .

Nessa abordagem, a impedância de retorno pelo solo com perdas  $\mathbf{Z}_s$  é dada por (2.3),

$$\mathbf{Z}_s = \frac{j\omega\mu_0}{\pi} \mathbf{F}_1 - \frac{1}{j\omega\epsilon_0\pi} \mathbf{F}_3 \vartheta_t \quad (2.3)$$

onde os elementos das matrizes  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_3$  são dados pelas equações:

$$\begin{aligned} F_{1ii} &= \frac{1}{2} \ln \frac{2h_i + jr + \xi_1}{2h_i + jr} & F_{1ij} &= \frac{1}{2} \ln \frac{h_i + h_j + jx + \xi_1}{h_i + h_j + jx} \\ F_{3ii} &= \xi_2 \ln \frac{h_i + jr + \xi_3}{h_i + jr} & F_{3ij} &= \xi_2 \ln \frac{h_i + jx + \xi_3}{h_i + jx} \end{aligned} \quad (2.4)$$

sendo  $h_i$  a altura do condutor  $i$ ,  $h_j$  a altura do condutor  $j$ ,  $r$  o raio mais externo

do condutor,  $x$  a distância axial entre os condutores  $i$  e  $j$  e os termos  $\xi_i$  obtidos a partir da relação entre as constantes de propagação do ar,  $k_a$  e do solo,  $k_s$ , conforme definido em (2.5).

$$\begin{aligned} k_a &= \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0} & k_s &= k_a\sqrt{\frac{\epsilon_s}{\epsilon_0} - j\frac{\sigma_s}{\omega\epsilon_s}} \\ \xi_1 &= \frac{2}{\sqrt{k_a^2 - k_s^2}} & \xi_2 &= \frac{k_a^2}{k_a^2 + k_s^2} & \xi_3 &= \frac{k_a^2 + k_s^2}{k_a^2\sqrt{k_a^2 - k_s^2}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

A matriz  $\vartheta_t$  é a transposta da matriz de propagação  $\vartheta$  dada por,

$$\vartheta = (\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_e + \widehat{\mathbf{Z}}_s)(\mathbf{Y}_e^{-1} + \widehat{\mathbf{Y}}_s^{-1})^{-1} \quad (2.6)$$

sendo  $\mathbf{Y}_e$  a matriz de admitância transversal espacial supondo o solo como condutor ideal, e as matrizes  $\mathbf{Z}_e$ ,  $\widehat{\mathbf{Z}}_s$  e  $\widehat{\mathbf{Y}}_s$  mostradas abaixo.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_e &= \frac{j\omega\mu_0}{2\pi}\overline{\mathbf{\Lambda}} \\ \mathbf{Y}_e &= j\omega\epsilon_0 2\pi\overline{\mathbf{\Lambda}}^{-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Z}}_s &= \frac{j\omega\mu_0}{\pi}\mathbf{F}_1 \\ \widehat{\mathbf{Y}}_s &= j\omega\epsilon_0\pi\mathbf{F}_2^{-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nesse caso a matriz de admitância transversal é dada por (2.9),

$$\mathbf{Y} = j\omega\epsilon_0 2\pi (\overline{\mathbf{\Lambda}} - 2(\mathbf{F}_3 - \mathbf{F}_2))^{-1} \quad (2.9)$$

onde os elementos das matrizes  $\mathbf{F}_2$  e  $\overline{\mathbf{\Lambda}}$  são representados, respectivamente, por (2.10) e (2.11),

$$F_{2ii} = \xi_2 \ln \frac{2h_i + jr + \xi_3}{2h_i + jr} \quad F_{2ij} = \xi_2 \ln \frac{h_i + h_j + jx + \xi_3}{h_i + h_j + jx} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda}_{ii} &= \ln \frac{2h_i}{r} \\ \overline{\Lambda}_{ij} &= \ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

sendo  $D_{ij}$  a distância entre o condutor  $i$  e a imagem do condutor  $j$  e  $d_{ij}$  a distância entre os condutores  $i$  e  $j$ .

## 2.3 Parâmetros unitários calculados a partir de $MI_2$

Conforme mencionado anteriormente, a formulação  $MI_2$  foi desenvolvida apenas para condutores monofásicos, contudo a extensão dos mesmos para o caso  $n$ -fásico é direta. O interessante dessa abordagem é que permite avaliar o emprego de diferentes definições para  $\mathbf{V}$ . Como o objetivo desse capítulo é apenas identificar o problema, é apresentado a seguir apenas o caso onde os parâmetros unitários são definidos em função de  $\mathbf{V}$ , quando esse representa a tensão fase-neutro dos condutores. Nesse caso, a matriz de impedância de retorno pelo solo é representada pela expressão,

$$\mathbf{Z}_s = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 - \mathbf{T})^{-1} \quad (2.12)$$

onde os elementos das matrizes  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$  são dados respectivamente pela eqs. (2.13) e (2.14),

$$\begin{aligned} \overline{\overline{S}}_{1_{ii}} &= \ln \left( 1 + \frac{2}{\eta\sqrt{4h_i^2 + r^2}} \right) \\ \overline{\overline{S}}_{1_{ij}} &= \ln \left( 1 + \frac{2}{\eta D_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{S}}_{2_{ii}} &= \frac{2}{n^2 + 1} \ln \left( 1 + \frac{n^2 + 1}{2\eta\sqrt{4h_i^2 + r^2}} \right) \\ \overline{\overline{S}}_{2_{ij}} &= \frac{2}{n^2 + 1} \ln \left( 1 + \frac{n^2 + 1}{2\eta D_{ij}} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

A matriz de admitância transversal é dada por (2.15),

$$\mathbf{Y} = j\omega 2\pi\epsilon_0 (\overline{\overline{\Lambda}} - \mathbf{T})^{-1} \quad (2.15)$$

estando os elementos da matriz  $\mathbf{T}$  representados em (2.16), onde  $\eta = \sqrt{k_s^2 - k_a^2}$  e  $n = k_s^2/k_a^2$ .

$$\begin{aligned} T_{ii} &= 2 \ln(2) + \frac{2n^2}{1 + n^2} \ln \left( \frac{1 + \frac{n^2+1}{2h_i\eta}}{1 + \frac{n^2+1}{h_i\eta}} \right) \\ T_{ij} &= 2 \ln(2) + \frac{2n^2}{1 + n^2} \ln \left( \frac{1 + \frac{n^2+1}{2\eta D_{ij}}}{1 + \frac{n^2+1}{\eta D_{ij}}} \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

## 2.4 Análise de estabilidade no domínio da frequência

No passado, o estudo da viabilidade de um modelo de linha de transmissão era realizado utilizando a impedância característica  $\mathbf{Z}_c$ , verificando se a parte real dos elementos de  $\mathbf{Z}_c$  é positiva definida (PD). Um modelo de linha viável deve apresentar uma impedância característica com parte real positiva, mas isso não é suficiente para assegurar um modelo estável. A estabilidade numérica pode ser assegurada se o modelo é passivo, ou seja, absorve potência ativa para toda faixa de frequência.

Em um sistema contendo  $n$ -condutores o cálculo da matriz  $\mathbf{Y}_n$  é realizado por (2.17),

$$\mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{A}_m \cdot \mathbf{T}_v^{-1} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{T}_v^{-1} \\ \mathbf{A}_m &= \text{diag} \left( \gamma_m \frac{1 + H_m^2}{1 - H_m^2} \right) \\ \mathbf{B}_m &= -2 \text{diag} \left( \gamma_m \frac{H_m}{1 - H_m^2} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

sendo  $H_m = \exp(-\gamma_m \ell)$ ,  $\ell$  o comprimento da linha,  $\mathbf{T}_v$  a transposta da matriz dos autovetores de  $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}$ , e  $\gamma_m$  a constante de propagação modal.

A potência absorvida  $\mathbf{P}$  por este modelo para qualquer vetor complexo  $\mathbf{V}$  é dada por (2.19),

$$\mathbf{P} = \Re[\mathbf{V}^* \mathbf{Y}_n \mathbf{V}] = \Re[\mathbf{V}^* \mathbf{G} \mathbf{V}] \quad (2.19)$$

onde  $\mathbf{V}^*$  é o transposto conjugado de  $\mathbf{V}$ , e  $\mathbf{G}$  é a matriz de condutâncias. Assim, para verificar a estabilidade de qualquer modelo da linha, um procedimento simples, mas eficiente, é o de identificar se a parte real dos autovalores de  $\mathbf{Y}_n$  são positivos ( $y_\lambda > 0$ ). Isto significa que devemos nos certificar de que  $\mathbf{G}$  é positiva definida (PD) [26]. Isto é, todos os autovalores de  $\mathbf{G}$  tem que ser positivos.

Com o objetivo de verificar a estabilidade dos modelos  $MI_1$  e  $MI_2$ , duas configurações de linhas de transmissão foram analisadas. Na fig. 2.2 é apresentada uma rede trifásica compacta (500 kV), de comprimento  $\ell = 500$  m, contendo: dois condutores pára-raios de raio  $r = 0,46$  cm, e resistividade  $\rho_r = 2,74914 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ ; três

feixes de quatro condutores de raio externo  $r_e = 1,47$  cm, raio interno  $r_i 0,37$  cm, e resistividade  $\rho_c = 0,39425 \cdot 10^{-7}$   $\Omega$ .m. O solo possui uma permissividade relativa  $\epsilon_{rs} = 5,0$  e uma resistividade  $\rho_s = 1/\sigma_s = 1000$   $\Omega$ .m.

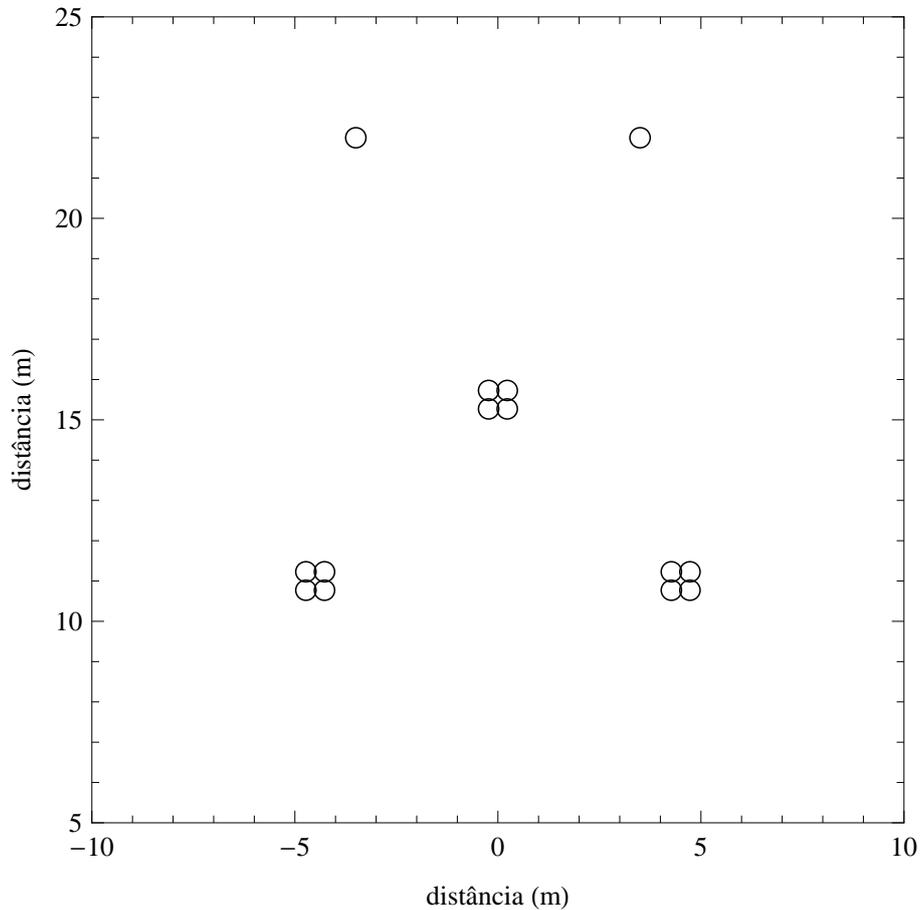


Figura 2.2: Linha de transmissão trifásica compacta de 500kV

Para este caso, a metodologia  $MI_1$  apresentou violação da passividade para valores próximos ao da frequência de operação da rede, tais como: 58,55 Hz e 61,32 Hz, conforme mostrado na fig. 2.3. Na fig. 2.4 são apresentados os pontos de violação para uma faixa de frequência compreendida entre 100 kHz-100 MHz, onde são verificadas violações para frequências da ordem de alguns kHz. Estas violações foram identificadas para uma região onde ocorrem os principais fenômenos transitórios.

Na fig. 2.5 são apresentadas as violações de passividade do modelo  $MI_2$  para linha compacta de 500kV. A metodologia  $MI_2$  apresentou violação para valores de frequência a partir de 2,93045 MHz, sendo estável para valores de frequência abaixo de 2 MHz.

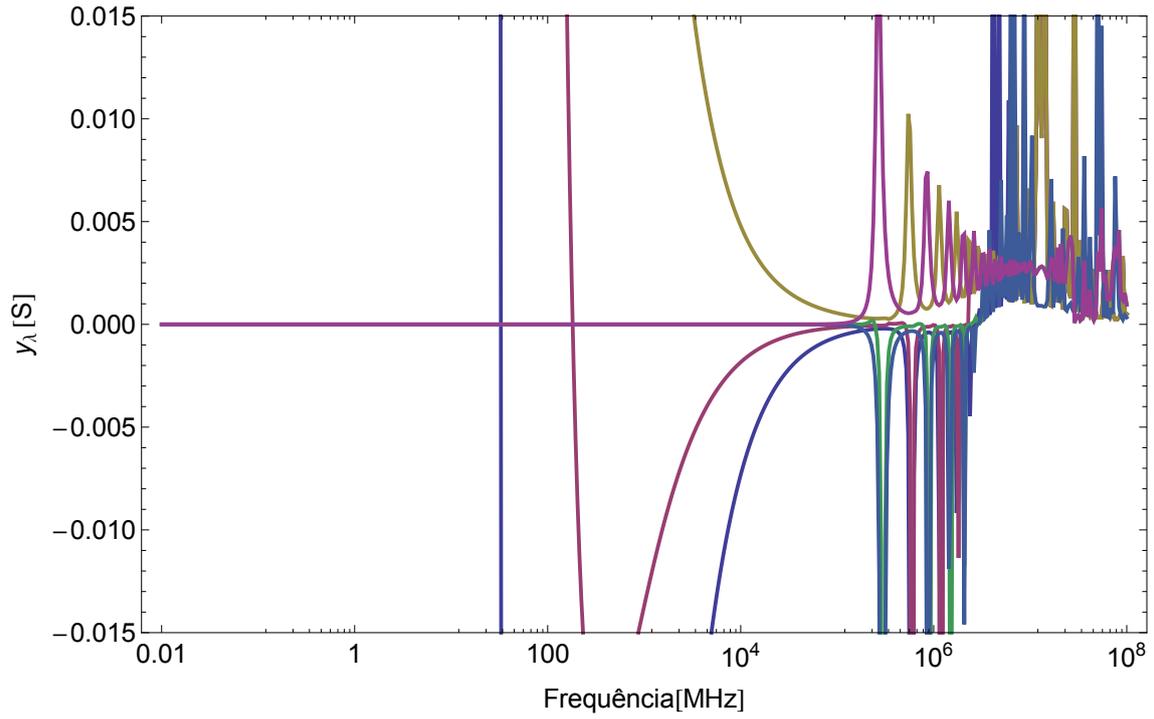


Figura 2.3: Violação da passividade do modelo  $MI_1$  na região de operação

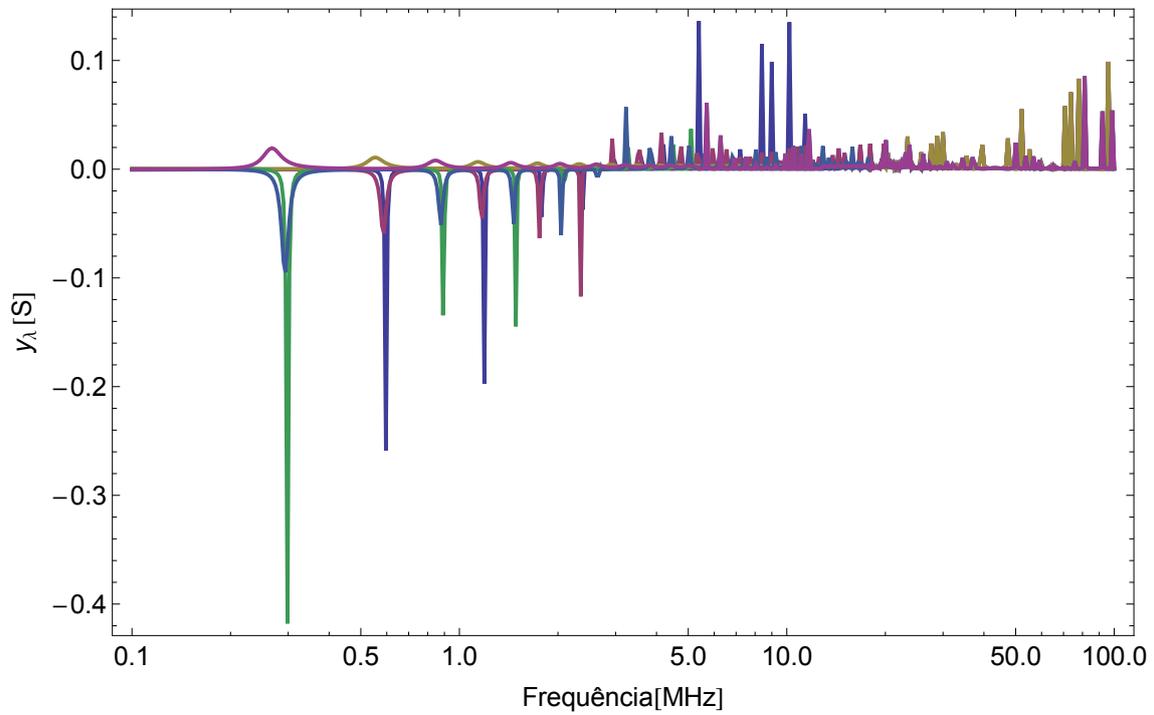


Figura 2.4: Violação da passividade do modelo  $MI_1$  para linha compacta de 500kV

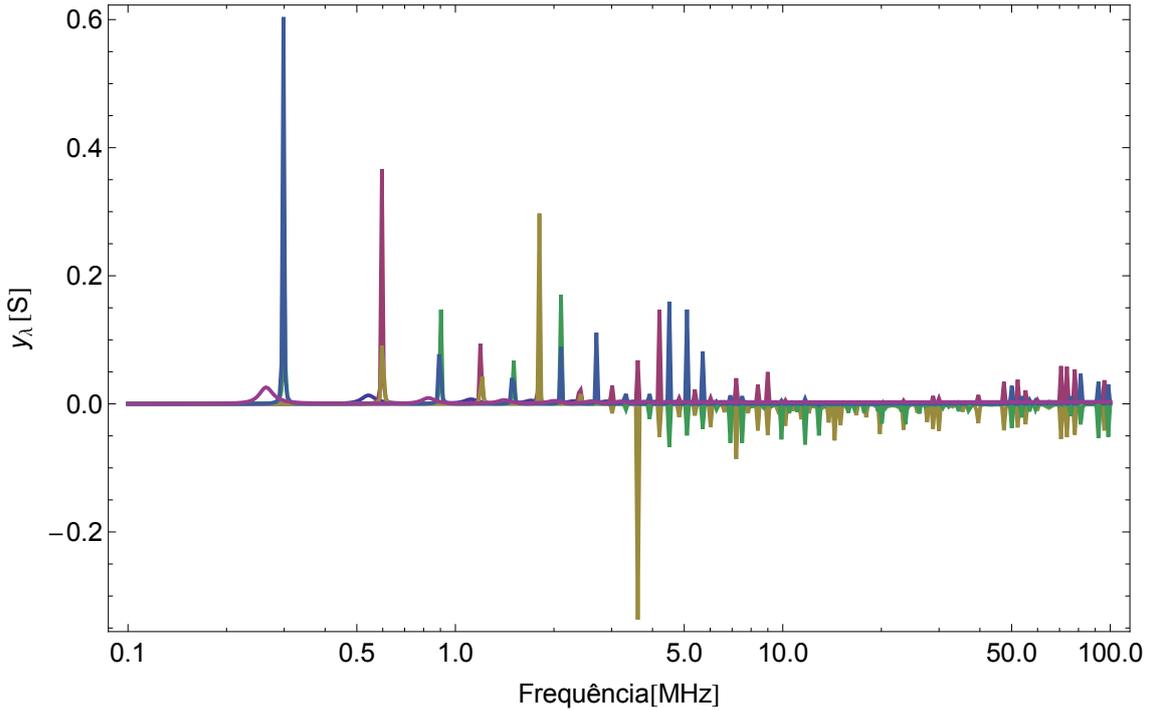


Figura 2.5: Violação da passividade do modelo  $MI_2$  para linha compacta de 500kV

Na fig. 2.6 é apresentada uma linha trifásica simples de comprimento  $\ell = 500$  m, contendo três condutores singelos de raio  $r = 1,0$  cm, espaçados horizontalmente entre si à distância  $d = 3,0$  m, a uma altura  $h = 10$  m, e resistividade  $\rho_c = 3,365 \cdot 10^{-7} \Omega.m$ . O solo possui resistividade  $\rho_2 = 1/\sigma_s = 1000 \Omega.m$ , permissividade  $\epsilon_s = \epsilon_0$ , e permeabilidade magnética relativa unitária. A avaliação do comportamento dos modelos é realizada para uma faixa de frequência compreendida entre 100 kHz-100 MHz.

Tabela 2.1: Análise de violação de passividade em função da frequência

Modelo	Menor $\text{Re}(\lambda)$	f (MHz) de violação
$MI_1$	-0,267909	2,09800
$MI_2$	-0,290400	0,89779

Na tabela 2.1, são apresentados os maiores valores de violação dos métodos  $MI_1$  e  $MI_2$ , e seus respectivos pontos de frequência, para uma linha de transmissão simples. Neste sistema, o método das imagens  $MI_1$ , apresenta problemas de estabilidade para valores à partir de 100 kHz, conforme podemos observar na fig. 2.7. O método das imagens  $MI_2$ , viola a passividade à partir de 492 kHz, conforme mostrado na fig. 2.8.

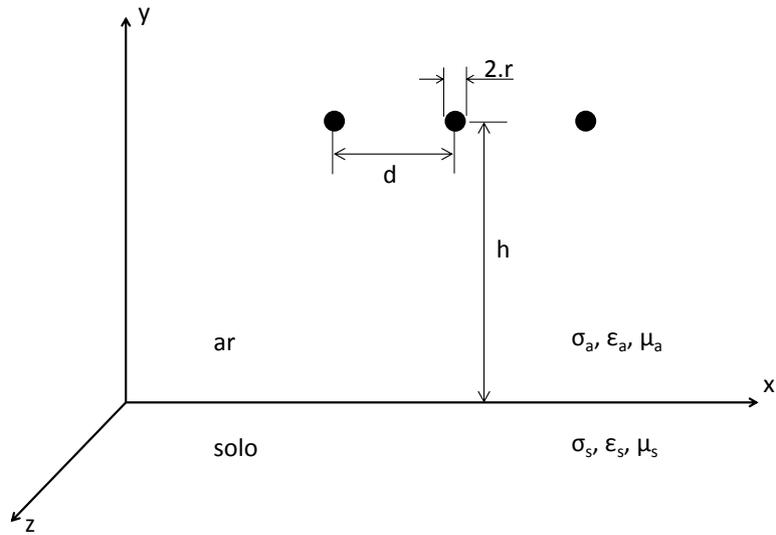


Figura 2.6: Linha de transmissão trifásica simples

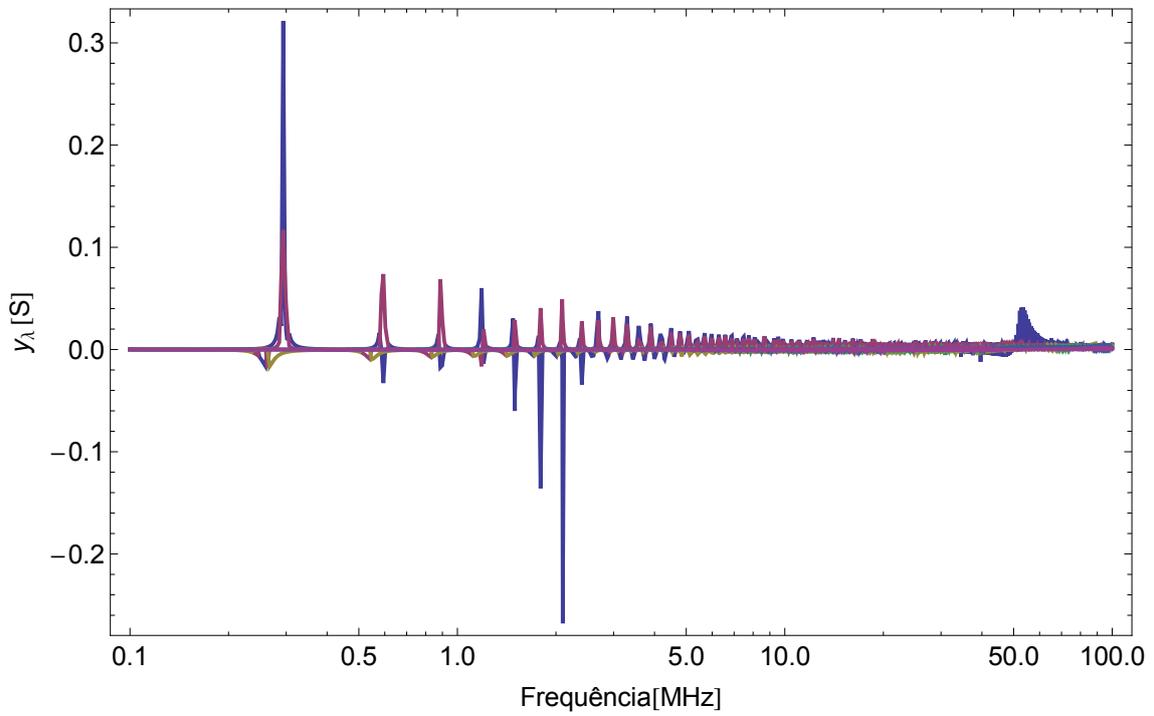


Figura 2.7: Análise da estabilidade em linha trifásica simples -  $MI_1$

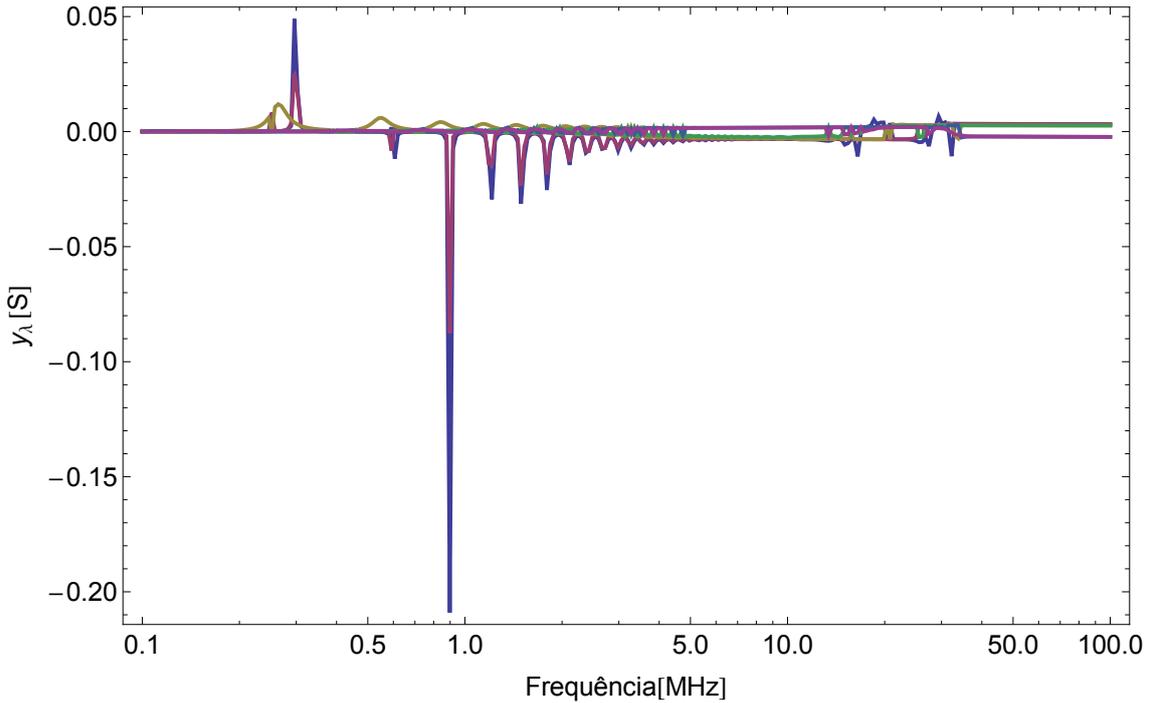


Figura 2.8: Análise da estabilidade em linha trifásica simples -  $MI_2$

## 2.5 Discussão dos resultados

Neste capítulo foi verificado que os modelos propostos por [13, 25] apresentam instabilidade em função da configuração da rede e das características do meio. Em uma linha de transmissão trifásica compacta de 500 kV, o método  $MI_1$  apresentou violação da passividade para valores muito próximos ao da frequência de operação e para valores da ordem de centenas de kHz, em pontos onde ocorrem os principais fenômenos transitórios. Para o mesmo sistema, o método  $MI_2$  apresentou violação para valores acima de 2 MHz, porém para a linha de transmissão com condutores singelos, apresentou instabilidade para frequências a partir de 300 kHz. Ambos os modelos não retratam a realidade para representação da rede em frequências da ordem de kHz.

O impacto da estabilidade dos modelos no domínio do tempo será verificado nos capítulos posteriores, a partir de uma análise minuciosa, partindo de sistemas monofásicos até sistemas contendo  $n$ -condutores.

# Capítulo 3

## Aspectos numéricos envolvendo propagação de ondas eletromagnéticas em um fino condutor considerando o solo

Este capítulo apresenta uma análise das propriedades de propagação de tensão e corrente em um condutor próximo a uma interface entre dois meios, considerando o modelo de onda completa e suas simplificações como: propagação quase-TEM, método das imagens e quase-FW (quase onda completa). É realizada uma breve revisão da formulação da equação modal, sendo descritas metodologias para o cálculo da constante de propagação em condutores aéreos. Avalia-se o impacto nos parâmetros unitários onde são consideradas três definições distintas: do potencial escalar, da diferença de potencial e da tensão entre o condutor e o solo. É apresentado um estudo da estabilidade numérica onde pode-se observar que, embora as aproximações produzam erros aceitáveis no que se refere ao comportamento dos valores unitários, instabilidades numéricas podem ocorrer quando da avaliação da resposta temporal do modelo de linha de transmissão associado.

### 3.1 Solução da equação modal

Nesta seção é realizada uma breve explanação sobre a equação modal para um sistema contendo um condutor singelo e nú, imerso em um meio “1” sobre uma interface plana com o meio “2”, ambos supostamente homogêneos, lineares e de dimensões infinitas. É assumido que o condutor é infinitamente longo, com o raio  $r$  de dimensão infinitesimal quando comparado com a sua distância da interface  $y = h$ . Ambos os meios são caracterizados por ter permissividade  $\epsilon_i = \epsilon_{r_i}\epsilon_0$ , condutividade

$\sigma_i$  e permeabilidade  $\mu_i = \mu_{ri}\mu_0$ , sendo  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m,  $\epsilon_{ri}$  a permissividade relativa do meio  $i$ , e  $\mu_{ri}$  a permeabilidade relativa do meio  $i$ .

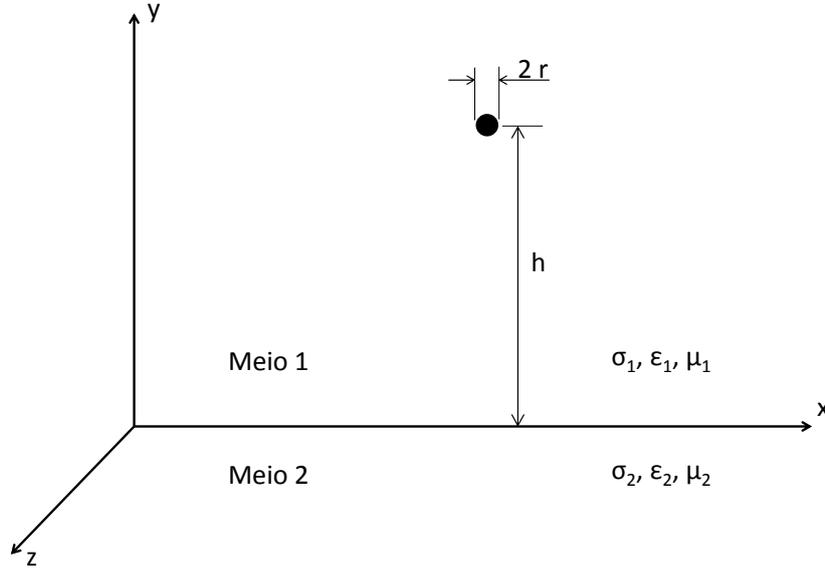


Figura 3.1: Arranjo do condutor próximo a interface.

Na fig. 3.1 é apresentada a configuração do modelo monofásico. Assumimos uma excitação harmônica, isto é,  $e^{j\omega t}$ , assim a constante de propagação de cada meio é dada por (3.1),

$$k_i = \sqrt{\omega^2 \mu_i \epsilon_i - j\omega \mu_i \sigma_i} \quad (3.1)$$

com  $i = 1, 2$ , e assumindo a parte imaginária de  $k_i$  negativa. No domínio da frequência, a corrente que se propaga ao longo do condutor, excitada por uma fonte externa é dada por<sup>1</sup>,

$$I = I_0 \exp(-j\hat{\gamma} z) \quad (3.2)$$

onde  $j\hat{\gamma}$  é a constante de propagação desconhecida da configuração.

A análise em onda completa da característica da propagação de uma onda eletromagnética em um condutor próximo à uma interface entre meios homogêneos é convenientemente derivada por meio de potencial vetor. A expressão para o campo eletromagnético em ambos os meios pode ser obtida através do uso dos vetores potencial elétrico e magnético de Hertz,  $\mathbf{\Pi}_E$  e  $\mathbf{\Pi}_M$ , respectivamente [11, 12, 27].

Os vetores  $\mathbf{\Pi}_E$  e  $\mathbf{\Pi}_M$ , tem somente uma componente  $z$ . A expressão geral para

<sup>1</sup>Neste capítulo utilizamos a notação de [12, 20], onde a constante de propagação é dada como  $\gamma = j\hat{\gamma}$  e as constantes de propagação dos meios são dadas por  $jk_i$ .

os campos elétrico e magnético são demonstradas nas expressões abaixo:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_{E_i} - j\omega\mu_i \nabla \times \mathbf{\Pi}_{M_i} \\ \mathbf{H}_i &= \left( \frac{-k_i^2}{j\omega\mu_i} \right) \nabla \times \mathbf{\Pi}_{E_i} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_{M_i}\end{aligned}\quad (3.3)$$

onde  $i = 1, 2$ , e  $k_i$  é a constante de propagação dos meios  $i$  definida na eq. (3.1).

O vetor potencial magnético,  $\mathbf{A}$ , pode ser definido como,

$$\mathbf{A} = \mu(\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{\Pi}_E \quad (3.4)$$

e o potencial elétrico escalar,  $\varphi$  é dado por,

$$\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_E \quad (3.5)$$

A solução da eq. (3.3) pode ser encontrada utilizando a transformada bi-dimensional de Fourier [28]. A condição de contorno na interface meio i-condutor e na interface entre os dois meios é necessária para definição da expressão dos campos elétrico e magnético. Um esboço dessa solução é apresentado no apêndice de [12].

Originalmente, a equação modal foi obtida assumindo um condutor ideal infinitesimalmente fino, isto é,  $Z_i = 0$  e o campo na superfície do condutor é constante [20]. Como é demonstrado abaixo, a inclusão das perdas do condutor na equação modal pode ser facilmente adicionada, de forma a tornar a modelagem mais próxima da realidade [12], onde a impedância interna do condutor com permeabilidade magnética  $\mu_c$  e condutividade  $\sigma_c$  é dada por (3.6),

$$Z_i = \frac{1}{2\pi r} \frac{\omega\mu_c}{k_c} \frac{I_0(jk_c r)}{I_1(jk_c r)} \quad (3.6)$$

sendo,  $r$  o raio do condutor,  $\omega = 2\pi f$  a frequência angular,  $k_c = \sqrt{\omega\mu_c\sigma_c} \gg k_1$  a constante de propagação no condutor,  $I_0$  e  $I_1$  funções modificadas de Bessel de primeira espécie, com ordens 0 e 1, respectivamente.<sup>2</sup>

Neste cenário, a equação modal  $M$  é definida como,

$$M = \frac{2\pi}{j\omega\mu_1} Z_i + \left( 1 - \frac{\gamma^2}{k_1^2} \right) \Lambda + 2 \left( S_1 - \frac{\gamma^2}{k_1^2} S_2 \right) \quad (3.7)$$

onde,

$$\Lambda = K_0(r\eta_1) - K_0(2h\eta_1) \quad (3.8)$$

---

<sup>2</sup>Os cálculos da impedância interna em condutores nas suas mais variadas configurações é descrito com detalhes em [29–31].

sendo  $\eta_1 = \sqrt{\gamma^2 - k_1^2}$ . As integrais de Sommerfeld,  $S_1$  e  $S_2$ , derivadas das soluções de campo [11] são definidas pelas equações:

$$S_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-2hu_1}}{u_1 + u_2} \cos(r\lambda) d\lambda \quad (3.9)$$

$$S_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-2hu_1}}{n^2u_1 + u_2} \cos(r\lambda) d\lambda \quad (3.10)$$

com  $n = k_2/k_1$  o índice de refração,  $u_1 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma^2 - k_1^2}$ ,  $u_2 = \sqrt{\lambda^2 + \gamma^2 - k_2^2}$ , sendo  $k_1$  e  $k_2$  as constantes de propagação dos meios “1” e “2”, respectivamente. Visto que até o momento não foram definidas as características dos meios “1” e “2”, estas características serão descritas na próxima seção.

## 3.2 Cálculo da constante de propagação em sistemas de condutores aéreos

Em sistemas de potência, a aproximação do modo de onda completa, denominada quase-TEM tem sido extensamente utilizada desde os trabalhos precursores de Carson e Pollaczek [2, 19] para a avaliação das impedâncias de retorno pelo solo. As deduções das expressões de onda completa e quase-TEM são derivadas das equações de Maxwell. Carson apresentou a solução por meio de integrais infinitas em 1926 [1]. Em seu trabalho, ele calculou os valores de parâmetros distribuídos para uma linha de transmissão em modo quase-TEM.

Originalmente propostas por Carson [19] para linhas telefônicas aéreas e por Pollaczek para cabos enterrados [2], a modelagem convencional de linhas de transmissão é baseada em algumas hipóteses principais válidas para baixas frequências [32, 33]<sup>3</sup>:

1. O modo quase-TEM é o modo dominante de propagação;
2. A constante de propagação não difere de maneira significativa da encontrada no ar;
3. Solo como meio linear isotrópico e homogêneo com permeabilidade magnética relativa unitária e permissividade relativa unitária;
4. O comprimento do circuito é de pelo menos uma ordem de grandeza maior que a maior altura dos condutores;

---

<sup>3</sup>Para a superação da hipótese 6, ao invés da representação analítica, é necessário o emprego de métodos numéricos como o Método de Elementos Finitos [34], FEM–*Finite Element Method*. Há na literatura diversos trabalhos sobre o emprego de FEM para o suprimento das impedâncias e admitâncias unitárias em linhas de transmissão e em cabos subterrâneos [35–39].

5. A altura dos condutores é constante ao longo de todo o circuito;
6. Os condutores são cilíndricos perfeitos e o efeito de proximidade (distribuição não uniforme da corrente ao longo da superfície do condutor) pode ser desprezado;
7. A condutividade do solo é muito maior que  $\omega\epsilon_0$ , ou seja,  $\sigma_2 \gg \omega\epsilon_0$ .

As restrições da formulação inicial de Carson implicam em soluções com razoável precisão até 2 MHz, dependendo ainda da configuração de condutores na torre, características do solo, dimensões do circuito e comprimento de onda do sinal.

Um dos métodos de maior sucesso é o de aproximação das imagens [12, 13]. Nesta aproximação a formulação quase-TEM é ainda mais simplificada, permitindo obter-se formulações de forma fechada com base em logaritmos neperianos.

### 3.2.1 Aproximação Quase-TEM

A aproximação quase-TEM faz com que tanto a impedância quanto a admitância por unidade de comprimento (p.u.l.) não dependam de  $\gamma$ , o que pode ser realizado se  $\gamma$  é definido igual a  $k_1$  em  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . Onde passamos a ter  $u_1 \rightarrow \lambda$ ,  $u_2 \rightarrow \sqrt{\lambda^2 + k_1^2 - k_2^2}$ ,  $\eta_1 \rightarrow 0$  e  $\eta_2 \rightarrow \sqrt{k_1^2 - k_2^2}$ . Assim,  $\Lambda$  da eq. (3.8) pode ser aproximada como<sup>4</sup>,

$$\bar{\Lambda} = \ln \frac{2h}{r} \quad (3.11)$$

e as integrais infinitas de Sommerfeld, que simplificam as eqs. (3.9) e (3.10), são dadas por,

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \int_0^\infty \frac{e^{-2h\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k_1^2 - k_2^2}} \cos(r\lambda) d\lambda \\ \bar{S}_2 &= \int_0^\infty \frac{e^{-2h\lambda}}{n^2\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k_1^2 - k_2^2}} \cos(r\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (3.12)$$

Embora a expressão para  $\bar{S}_2$  tenha sido apresentada por Wise [18],  $\bar{S}_1$  foi apresentada por Carson [1] para linhas aéreas assumindo  $|k_2| \gg |k_1|$  e, em seguida, foi proposta por Carson [19] e Pollaczek [2] no caso de cabos subterrâneos. Wise apresentou correções com a inclusão da permissividade do solo nas formulações de

---

<sup>4</sup>Nesta seção, consideramos, no modelo com interface ar-solo da fig. 3.1, a região  $y > 0$  é tratada como “ar” de permissividade  $\epsilon_1$ , permeabilidade  $\mu_1$ , e condutividade  $\sigma_1 \rightarrow 0$ . A região  $y < 0$  é tratada como “solo” de permissividade  $\epsilon_2$ , permeabilidade  $\mu_2$  e condutividade  $\sigma_2$ . As geometrias são especificadas para um condutor nú com raio  $r$ , permissividade  $\epsilon_c$ , permeabilidade  $\mu_c$  e condutividade  $\sigma_c$ . Sendo, para o sistema da fig 3.1,  $k_1$  a constante de propagação no ar e  $k_2$  a constante de propagação no solo.

Carson, resolvendo o problema da condição de baixa frequência. Embora não seja conhecida, uma solução de forma fechada para  $\overline{S_1}$  foi proposta em [17] para linhas de transmissão. A solução de forma fechada para  $\overline{S_1}$ , no caso de cabos subterrâneos, foi proposta em [16].

Para evitar lidar com a avaliação da referida integral infinita, inúmeras pesquisas de expressões simplificadas foram realizadas, tais como [14, 15, 17, 20], que são algumas poucas citações dentre o imenso número de trabalhos publicados desde o século passado.

### 3.2.2 Aproximação pelo método das imagens

O método das imagens apresenta-se como uma solução satisfatória para o problema das integrais infinitas, levando às seguintes simplificações de  $\overline{S_1}$  e  $\overline{S_2}$ , como mostrado abaixo [13],

$$\begin{aligned}\overline{\overline{S_1}} &= \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{2}{d\sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right) \\ \overline{\overline{S_2}} &= \frac{1}{1+n^2} \ln \left( 1 + \frac{1+n^2}{d\sqrt{k_1^2 - k_2^2}} \right)\end{aligned}\tag{3.13}$$

onde  $d = \sqrt{4h^2 + r^2}$ .

### 3.2.3 Aproximação parcial do método de onda completa

Neste trabalho, apresentamos como proposta uma técnica de aproximação parcial das integrais de Sommerfeld. A simplificação parcial da integral infinita  $S_1$ , eq. (3.9), pode ser realizada através da manipulação do integrando, multiplicando-se o mesmo por  $v$  e expandindo-o, onde,

$$v = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2}\tag{3.14}$$

sendo o produto descrito em (3.15).

$$\begin{aligned}I_v &= \frac{e^{-2hu_1}}{u_1 + u_2} \cos(r\lambda) \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_2} \\ &= \frac{1}{k_2^2 - k_1^2} (u_1 e^{-2hu_1} - u_2 e^{-2hu_1}) \cos(r\lambda)\end{aligned}\tag{3.15}$$

Após a expansão do integrando, a integral divide-se em duas partes distintas  $i_1$  e  $i_2$ , representadas por,

$$i_1 = \int_0^{\infty} u_1 e^{-2hu_1} \cos(r\lambda) d\lambda \quad (3.16)$$

$$i_2 = \int_0^{\infty} u_2 e^{-2hu_1} \cos(r\lambda) d\lambda \quad (3.17)$$

desta maneira,  $S_1$  pode ser representada por (3.18).

$$S_1 = \frac{1}{k_2^2 - k_1^2} (i_1 - i_2) \quad (3.18)$$

A partir da definição integral da função modificada de Bessel de segundo tipo, eq. (3.914.2) de [40], ou como apresentado em [16], podemos escrever,

$$i_1 = \frac{4h^2\eta_1}{d} K_0(\eta_1 d) + \frac{\eta_1}{d} \left( \frac{4h^2}{d^2} - 1 \right) K_1(\eta_1 d) \quad (3.19)$$

onde  $d = \sqrt{4h^2 + r^2}$ . Infelizmente não há solução de forma fechada para a eq. (3.17), sendo necessário a aplicação de métodos numéricos, ou mesmo adotar hipóteses simplificativas para manipulação do integrando.

### 3.2.4 Aplicação das aproximações na solução da equação modal

Na obtenção dos parâmetros de linhas de transmissão, é necessário solucionar a equação modal, eq. (3.7), isto é, encontrar  $M = 0$  à partir da solução de  $\gamma$ . Como foi demonstrado em [12, 13] a solução da eq. (3.7) não é obtida de maneira direta, tendo em vista que tanto  $\Lambda$  quanto as integrais  $S_1$  e  $S_2$  são dependentes de  $\gamma$ .

Tipicamente para solução da equação modal utilizam-se técnicas de iteração numérica. Desta forma, podemos usar o método de Newton-Raphson (NR) aplicando uma técnica de perturbação como sugestão para o ponto de partida da iteração, adotando um pequeno valor inicial sobre  $k_1(\omega)$ . Este processo apresenta um tempo computacional de convergência bastante lento e alguns problemas numéricos podem ocorrer quando o argumento da função de Bessel tender a zero,  $\eta_1 \rightarrow 0$  em (3.8), além disso há uma grande dificuldade na solução das integrais infinitas que por sua vez já apresentam uma baixa taxa de convergência, mesmo se algoritmos “especiais” de integração forem utilizados, tais como Gauss-Kronrod (GK).

No passado foi utilizado com sucesso GK para avaliação das integrais infinitas envolvidas no cálculo da impedância de retorno pelo solo para cabos subterâneos [3, 17, 28]. Neste trabalho, notamos que se transformações integrais forem utilizadas para simplificação das integrais infinitas, uma melhoria no desempenho numérico é observada, sendo que para alguns casos, pode ocorrer um inesperado comportamento na estabilidade da admitância nodal  $\mathbf{Y}_n$ , especialmente para altos valores de frequência da ordem de  $10^7$  Hz. Esta melhoria no desempenho numérico é a principal razão pela qual propomos a simplificação de  $S_1$  em (3.9).

Como foi mostrado em [12] é possível utilizar as expressões aproximadas para uma avaliação do comportamento de  $\gamma$  ao longo de uma larga faixa de frequência. Isto nos levou a investigar o desempenho numérico da obtenção das raízes da equação modal,  $M = 0$ , como uma função do ponto de partida inserido na iteração numérica.

Neste trabalho, consideramos quatro abordagens possíveis para o valor inicial  $\gamma_{guess}$  aplicados no modo onda completa, que se seguem:

- o Método #1 (M1) adota como “estimativa” inicial o valor de perturbação da constante de propagação do meio “1”  $k_1$ , sendo  $\gamma_{guess} = k_1 + j 10^{-4}$ ;
- o Método #2 (M2) utiliza o valor de  $\gamma$  obtido no passo de frequência anterior como ponto de partida (sendo  $k_1$  perturbado necessário para calcular o  $\gamma$  da primeira frequência);
- o Método #3 (M3) utiliza como o valor inicial o  $\gamma$  calculado previamente pela aproximação do método das imagens para cada ponto de frequência;
- o Método #4 (M4) utiliza como o valor inicial o  $\gamma$  calculado previamente pela aproximação quase-TEM para cada ponto de frequência.

Na avaliação de cada um destes métodos os valores iniciais adotados foram muito próximos de  $j\hat{\gamma} = jk_1$ , mas não iguais, afim de evitar problemas numéricos com as equações de Bessel, devido ao valor nulo do argumento.

Neste trabalho viemos propor duas formulações alternativas da equação modal para o cálculo da constante de propagação. Estas abordagens foram denominadas de quase-FW (ou quase-onda completa), representadas por FW#1 e FW#2, pois mantivemos as características de  $\Lambda$  em (3.8), composta por funções de Bessel de segunda espécie, e implementamos em (3.7) as aproximações das integrais de Sommerfeld.

Postulamos que uma solução aproximada para a equação modal pode ser encontrada resolvendo  $\widetilde{M} = 0$  em (3.20), onde  $\widetilde{S}_1$  e  $\widetilde{S}_2$  são aproximações de  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, sendo  $u_1$  e  $u_2$  substituídos por  $\widetilde{u}_1$  e  $\widetilde{u}_2$ . Nessas integrais, a constante

de propagação pode ser substituída pelo valor estimado de  $\gamma$ .

$$\widetilde{M} = \frac{2\pi}{j\omega\mu_1} Z_i + \left(1 - \frac{\gamma^2}{k_1^2}\right) \Lambda + 2 \left(\widetilde{S}_1 - \frac{\gamma^2}{k_1^2} \widetilde{S}_2\right) \quad (3.20)$$

onde temos  $\widetilde{u}_1$  e  $\widetilde{u}_2$  expressos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_1 &= \sqrt{\lambda^2 + \gamma_{guess}^2 - k_1^2} \\ \widetilde{u}_2 &= \sqrt{\lambda^2 + \gamma_{guess}^2 - k_2^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

com  $\gamma_{guess}$  o valor inicial obtido pelo método de imagem. Cabe observar que podemos utilizar qualquer um dos métodos acima para obter o valor inicial para  $\gamma_{guess}$ . Optou-se por utilizar o método de imagens pois ele é mais simples de ser implementado. Denominamos este método como quase-onda completa #1 (FW#1).

Outra possibilidade é a de expandir a integral  $S_1$ , como foi realizado em 3.2.3. Neste caso, a equação modal é dada por (3.22), sendo  $i_2$  aproximado do mesmo modo que em FW#1,  $\widetilde{i}_2$ , com  $u_1 \rightarrow \widetilde{u}_1$ . Nós chamamos este método como quase-onda completa #2 (FW#2). O valor inicial  $\gamma_{guess}$  da constante de propagação em FW#2 também foi obtido usando o método das imagens.

$$\widetilde{\widetilde{M}} = \frac{2\pi}{j\omega\mu_1} Z_i + \left(1 - \frac{\gamma^2}{k_1^2}\right) \Lambda + \frac{2}{k_2^2 - k_1^2} \left(i_1 - \widetilde{i}_2\right) - \frac{2\gamma^2}{k_1^2} \widetilde{S}_2 \quad (3.22)$$

Estas metodologias foram avaliadas considerando uma linha monofásica de  $\ell = 500$  m de comprimento, com um condutor de raio  $r = 1$  cm a uma altura de  $h = 10$  m acima do solo, e condutividade  $\sigma_c = 64,94$  S/m. Os parâmetros do solo são  $\sigma_2 = 1$  mS/m,  $\epsilon_2 = 5 \epsilon_1$  com  $\epsilon_1 = \epsilon_0$  e  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , sendo a condutividade do ar  $\sigma_1$  igual a zero. A equação modal é solucionada para uma faixa de frequência de 100 kHz até 100 MHz, utilizando 500 pontos de amostras de frequência logaritmicamente espaçados.

As tabelas 3.1 e 3.2 mostram o tempo computacional do cálculo da constante de propagação para cada abordagem proposta. A tabela 3.1 apresenta as comparações para os métodos de onda completa e a tabela 3.2 apresenta as comparações para os métodos aproximados. Todos estes resultados foram obtidos utilizando um computador desktop com 16 GB de RAM e um processador de núcleo quadri-core 2,9 GHz da Intel.

Ambos M3 e M4 proporcionaram ganhos sensíveis no tempo de computação quando comparados com o método de  $\gamma_{guess}$  perturbado, M1 e M2, que foram tratados como procedimentos de referência. Este ganho foi obtido devido ao cálculo do valor inicial por meio de métodos aproximados. A abordagem utilizando o método das imagens é mais rápida em algumas ordens de magnitude do que o método de

Tabela 3.1: Tempo computacional para avaliação de  $\gamma$  pelo método de onda completa

Met. onda completa	Valor inicial $\gamma_{guess}$	Tempo total(s)
M1	$\gamma_{guess} = k_1 + j 10^{-4}$	1003,93
M2	$\gamma_{guess}$ obtido no passo anterior	4168,84
M3	$\gamma_{guess}$ obtido pelo método das imagens	826,61
M4	$\gamma_{guess}$ obtido pelo método das quase-TEM	840,08

Tabela 3.2: Tempo computacional para avaliação de  $\gamma$  pelos métodos aproximados

Met. onda completa	Valor inicial $\gamma_{guess}$	Tempo total(s)
FW#1	$\gamma_{guess}$ obtido pelo método das imagens	781,28
FW#2	$\gamma_{guess}$ obtido pelo método das imagens	339,47
Quase-TEM	Não necessita de $\gamma_{guess}$	10,32
Imagens	Não necessita de $\gamma_{guess}$	0,0156

onda completa. Embora FW#1 e FW#2 tenham apresentado uma melhoria significativa com relação ao tempo total, ainda é muito mais lento do que a abordagem que utiliza o modo quase-TEM. A utilização de um ponto de partida com base em uma abordagem pelo método das imagens parece ser o método mais adequado. Embora o método quase-TEM esteja mais próximo da solução real, exige a desvantagem da necessidade da avaliação de integrais infinitas no passo de frequência.

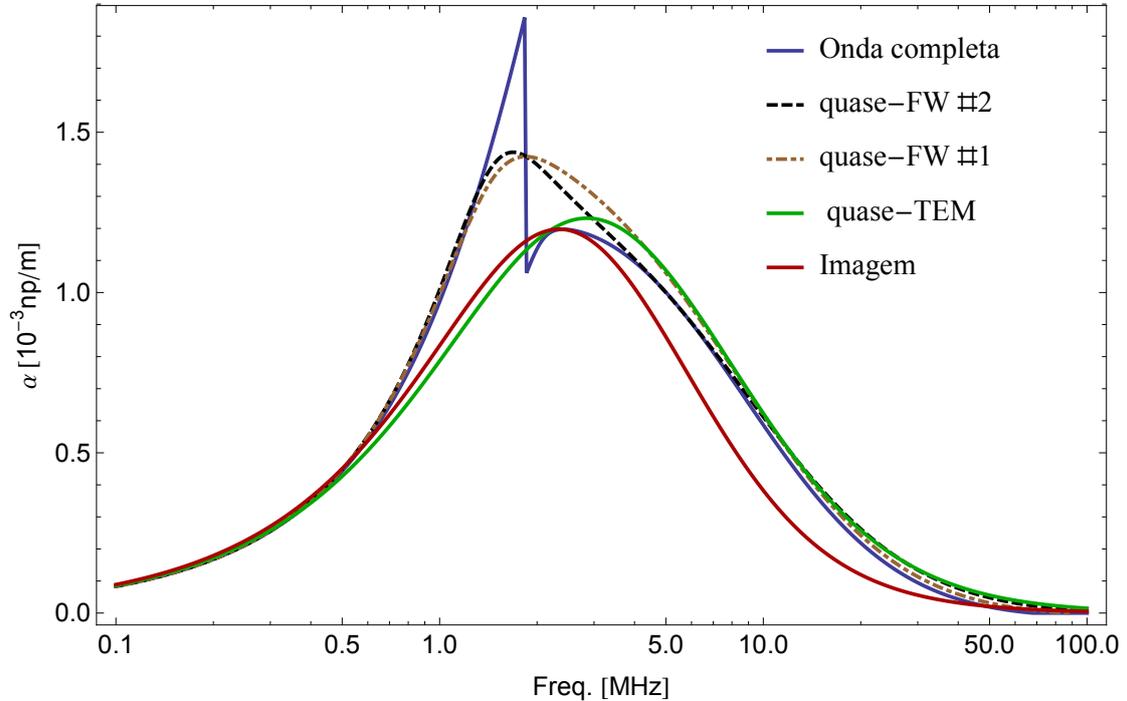


Figura 3.2: Comparação da parte real de  $j\hat{\gamma}$  para distintas abordagens

A fig. 3.2 mostra a parte real de  $j\hat{\gamma}$ , denominada fator de amortecimento  $\alpha$ , para a solução de onda completa e soluções aproximadas. Conforme relatado na lite-

ratura técnica [12], pode-se identificar: uma alteração no comportamento, devido à transição de possíveis raízes da equação modal; e que a abordagem de imagens tende para a o mesmo comportamento do quase-TEM, com divergência mínima à partir de 2,5 MHz. Comparando o método quase-TEM com os métodos de onda completa, podemos observar que o comportamento é similar em toda faixa de frequência, apresentando uma leve divergência para faixa compreendida entre 0,7-2 MHz. Os métodos FW#1 e FW#2 apresentaram comportamento similar ao dos métodos M1 à M4 com divergência mínima entre 1 e 5 MHz. Os métodos M1 à M4 tiveram o mesmo comportamento em toda faixa de frequência.

Os resultados da parte imaginária de  $j\hat{\gamma}$ , denominados fator de fase  $\beta$ , são mostrados na fig. 3.3. Todas as abordagens que consideramos forneceram resultados idênticos com o modo de onda completa para toda faixa de frequência.

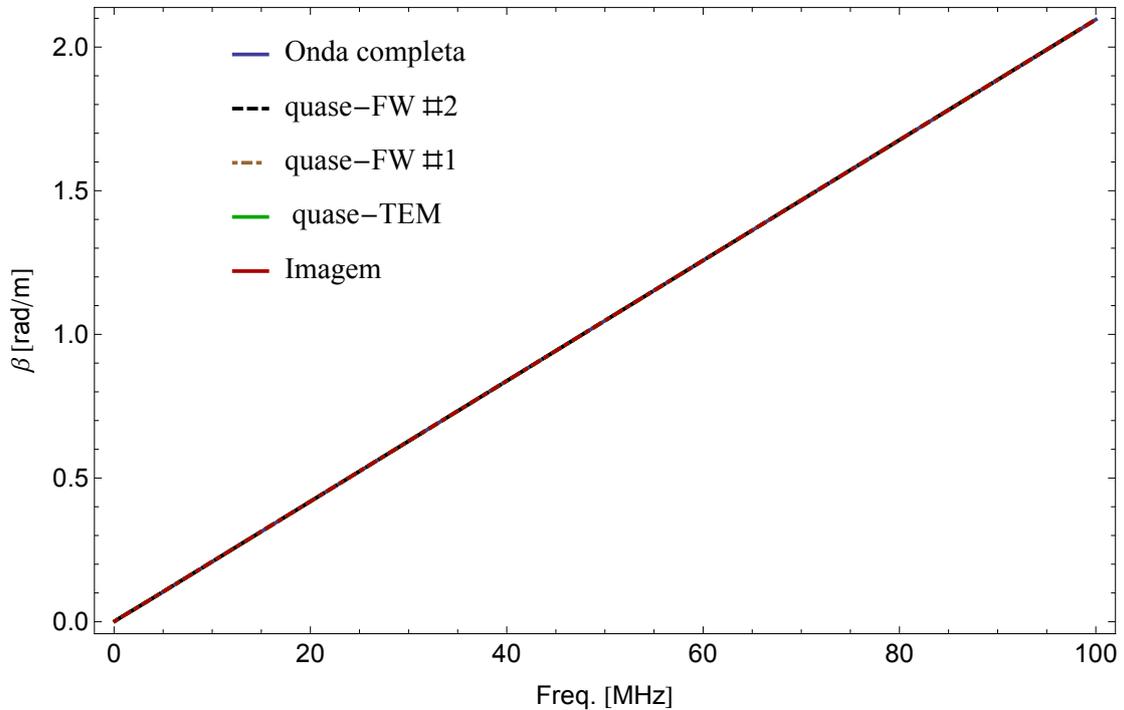


Figura 3.3: Parte imaginária de  $j\hat{\gamma}$  para distintas abordagens

Para avaliar o erro destas aproximações, foi utilizado o conceito de erro RMS (*Root Mean Square*), tendo como referência o métodos de onda completa,  $M_1$  e  $M_2$ . Para qualquer vetor complexo o erro médio quadrático (RMS) pode ser definido como,

$$e_r = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \|\gamma - \gamma_{aprox}\|^2}}{\sqrt{N_s}} \quad (3.23)$$

onde  $N_s$  é o número de amostras de frequências utilizadas no cálculo de  $\gamma$  e suas

aproximações  $\gamma_{approx}$ . A Tabela 3.3 mostra os erros RMS para cada aproximação considerada. Como esperado a partir das figs. 3.2 e 3.3, FW#1 e FW#2 apresentaram um desempenho muito similar, e apesar das diferenças na faixa de alta frequência entre os métodos quase-TEM e imagem, as aproximações foram muito parecidas no erro RMS inclusive.

Tabela 3.3: Erro RMS das soluções aproximadas

Imagem	Quase-Tem	FW#1	FW#2
$0,2157 \cdot 10^{-3}$	$0,2227 \cdot 10^{-3}$	$0,1148 \cdot 10^{-3}$	$0,1047 \cdot 10^{-3}$

### 3.2.5 Verificação com resultados anteriormente publicados

Em [10] foi apresentado um modelo para o cálculo da constante de propagação em uma linha com condutor infinitamente longo sobre uma interface ar-solo. Foram calculadas as constantes de propagação levando-se em consideração a sensibilidade do solo e os resultados foram demonstrados e relacionados com a constante de propagação do ar ( $\gamma_{ideal}$ ). As figs. 3.4 e 3.5 apresentam os resultados das correções do fator de amortecimento,  $\alpha$  e do fator de fase,  $\beta$ , respectivamente.

Para um sistema com condutor de raio  $r = 5$  cm, altura  $h = 10$  m, solo com condutividade  $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{-3}$  S/m e meios com permissividade e permeabilidade iguais às do vácuo, verificamos que as curvas obtidas com o modelo proposto apresentam similaridade no seu comportamento para toda faixa de frequência quando comparadas com as curvas obtidas em [10]. A correção do fator de amortecimento, denominada  $\Delta_\alpha$ , é calculada pela relação,

$$\Delta_\alpha = \frac{\Re(\gamma)}{\gamma_{ideal}} 100\% \quad (3.24)$$

enquanto que a correção do fator de fase, denominada  $\Delta_\beta$ , é calculada por,

$$\Delta_\beta = \frac{\Im(\gamma) - \gamma_{ideal}}{\gamma_{ideal}} 100\% \quad (3.25)$$

onde,  $\Re(\gamma)$  e  $\Im(\gamma)$  são as partes real e imaginária de  $j\hat{\gamma}$ .

Em [12] foi apresentado um modelo para o cálculo da constante de propagação. Na fig. 3.6, verificamos que as curvas apresentam similaridade no seu comportamento para toda faixa de frequência. Os resultados obtidos em [12] são representados em linha trecejada, enquanto que o modelo proposto foi representado em linha contínua. Estas metodologias foram avaliadas considerando o mesmo sistema estudado em 3.2.4.

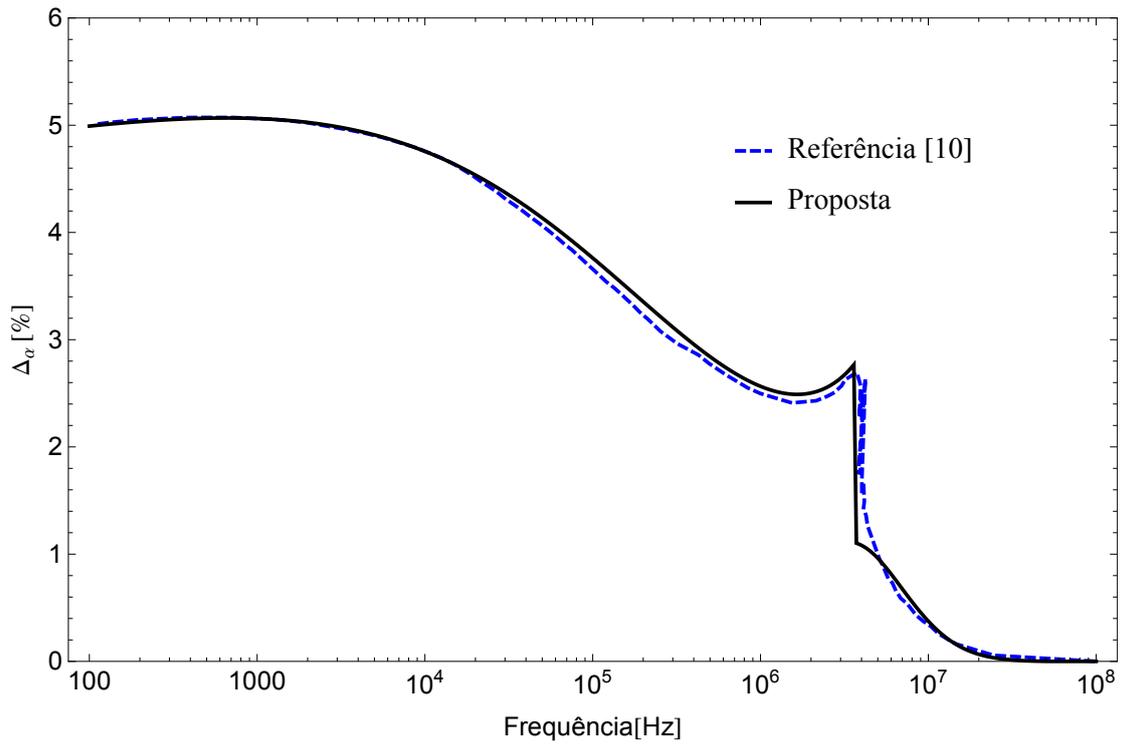


Figura 3.4: Correção do fator de amortecimento,  $\alpha$

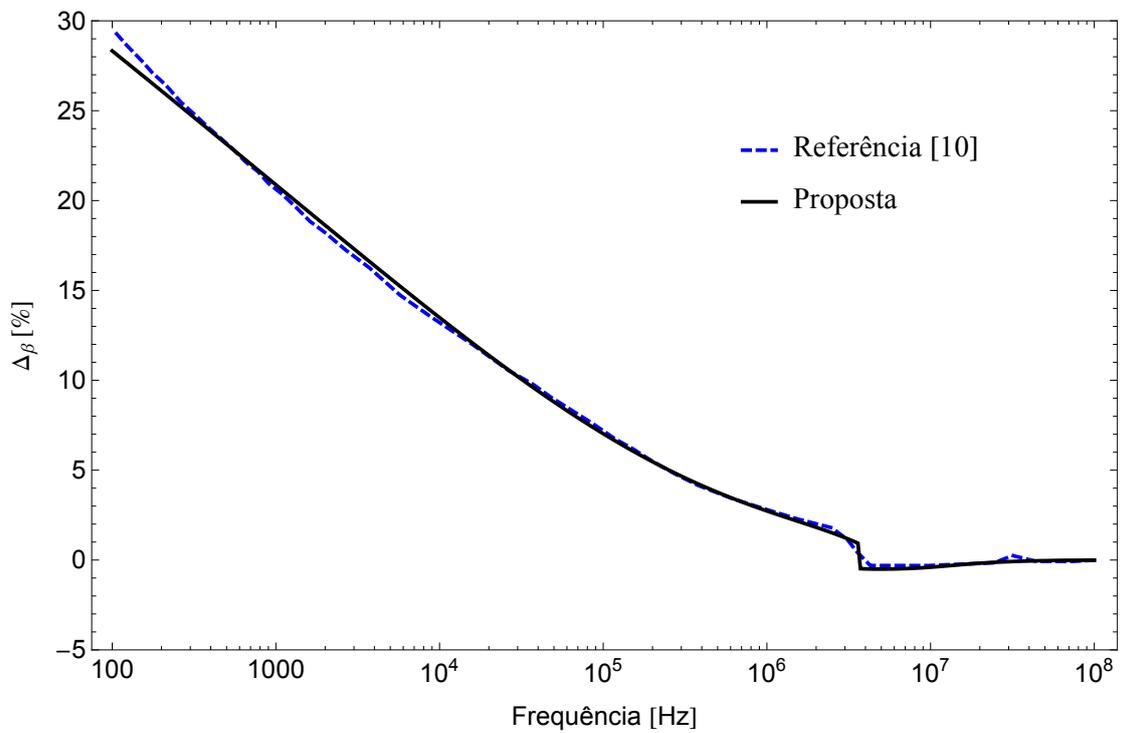


Figura 3.5: Correção do fator de fase,  $\beta$

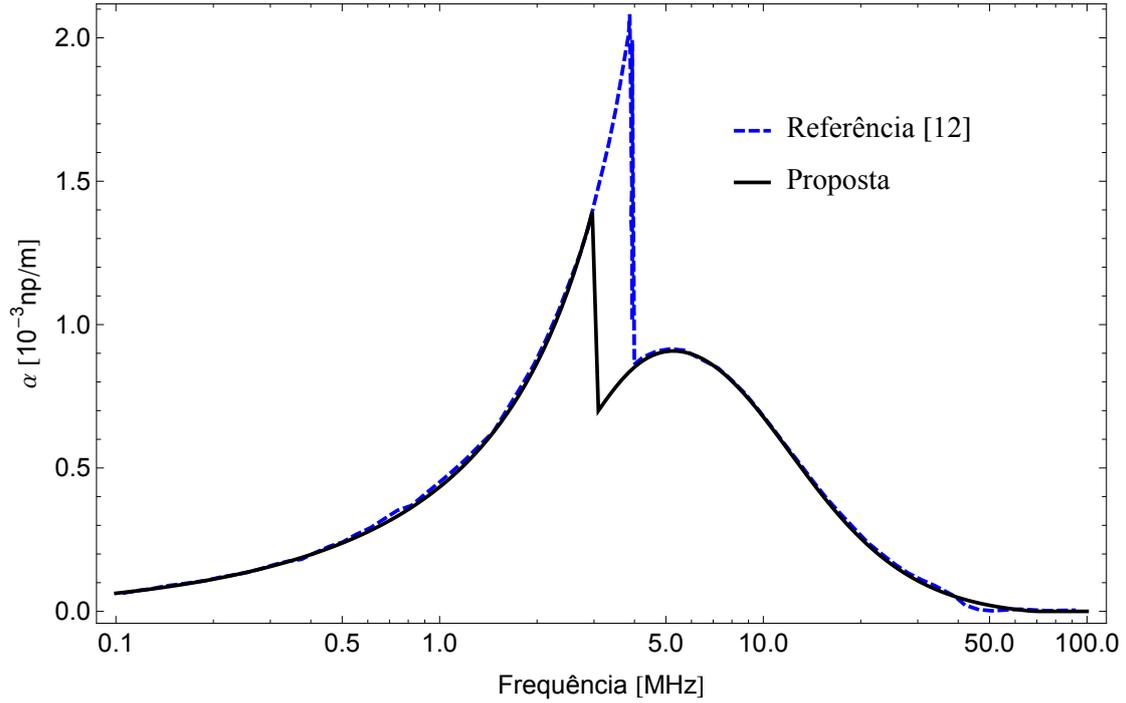


Figura 3.6: Correção do real de  $\gamma$  simulado

### 3.3 Cálculo de parâmetros unitários

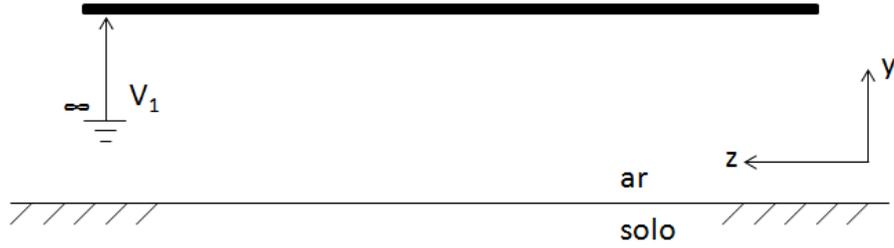
No cálculo de parâmetros de linhas de transmissão, considerando a inclusão de um solo com perdas, com condutividade e permissividade, os parâmetros da linha por unidade de comprimento (p.u.l.) podem ser definidos de três formas distintas [13], conforme a definição utilizada para  $\mathbf{V}$  na eq. (2.1). Tipicamente é empregada a definição de tensão, contudo é possível usar as definições de potencial escalar e de diferença de potencial. Na tabela 3.4, são apresentadas as nomenclaturas utilizadas neste trabalho para as definições de p.u.l. Estes parâmetros, em suas respectivas definições podem ser calculados tanto pelo modo de onda completa, quanto pelas suas aproximações.

Tabela 3.4: Definições de parâmetros por unidade de comprimento (p.u.l.)

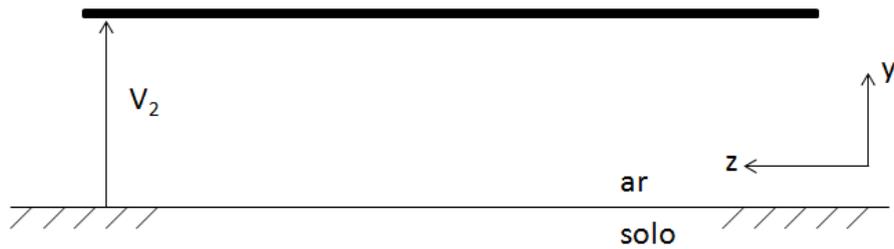
Nomeclatura	Parâmetros	Definição
$DP_1$	$Z_1$ e $Y_1$	Potencial Escalar
$DP_2$	$Z_2$ e $Y_2$	Diferença de potencial
$DP_3$	$Z_3$ e $Y_3$	Tensão entre o condutor e o solo

Na fig. 3.7(a) é representado o modelo  $DP_1$  que tem referência no infinito, na fig. 3.7(b) é representado o modelo  $DP_2$  que tem referência no solo, e na fig. 3.7(c) é

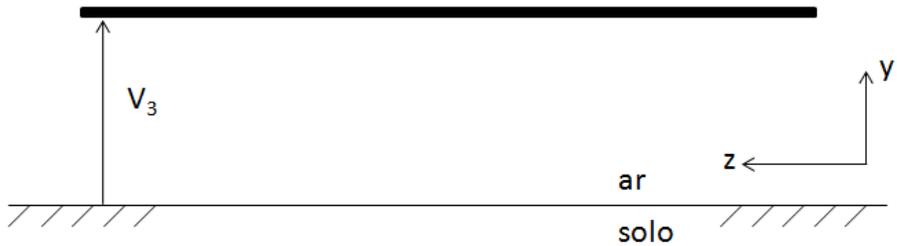
representado o modelo  $DP_3$  que tem referência no solo levando-se em consideração o efeito do vetor potencial magnético  $\mathbf{A}$ .



(a) Definição de p.u.l. do potencial escalar



(b) Definição de p.u.l. da diferença de potencial



(c) Definição de p.u.l. da tensão

Figura 3.7: Definições dos parâmetros por unidade de comprimento

### 3.3.1 Cálculo de parâmetros unitários pelo modo de onda completa

O modelo referência para o cálculo de parâmetros por unidade de comprimento (p.u.l.) é o modelo de onda completa, sendo os demais comparados para fins de verificação do real funcionamento da aproximação, dentro de uma faixa de erro aceitável em uma banda de frequência que varia normalmente de  $10^{-4}$  Hz à 100 MHz.

Com a inclusão de um solo com perdas, considerando a sua condutividade e permissividade, os parâmetros da linha por unidade de comprimento podem ser calculados pelas definições de p.u.l. anteriormente citadas. Neste caso, a constante de propagação do sistema é definida como

$$\gamma = j\hat{\gamma} = \sqrt{Z_n \cdot Y_n} \quad (3.26)$$

sendo o sub-índice  $n = 1, 2, 3$ , para as metodologias  $DP_1$ ,  $DP_2$  e  $DP_3$ , respectivamente. Porém, independentemente das definições utilizadas, a constante de propagação pode ser definida por,

$$\gamma = \sqrt{Z_1 \cdot Y_1} = \sqrt{Z_2 \cdot Y_2} = \sqrt{Z_3 \cdot Y_3} \quad (3.27)$$

onde, pela definição do potencial escalar, temos,

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_i + \frac{j\omega\mu_1}{2\pi} (\Lambda + 2 S_1) \\ Y_1 &= 2\pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left( \frac{1}{\Lambda + 2 S_2} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para a definição de diferença de potencial, isto é

$$V_2 = \Delta V(x, y) = V(x, y) - V(x, 0) \quad (3.29)$$

os parâmetros da linha por unidade de comprimento são dados por,

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_i + \frac{j\omega\mu_1}{2\pi} \left[ \Lambda + S_1 - \left( \frac{\gamma}{k_1} \right)^2 (T_1 + S_2) \right] \\ Y_2 &= 2\pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left( \frac{1}{\Lambda - T_1} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde,  $T_1$  é definido abaixo.

$$T_1 = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-h u_1} - e^{-2h u_1}}{\left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 u_1 + u_2} \cos(r\lambda) d\lambda \quad (3.31)$$

A definição de tensão em um ponto  $x, y$  é dada por,

$$V_3 = U(x, y) = V(x, y) - V(x, 0) + j\omega \int_0^y A_y(x, \xi) d\xi \quad (3.32)$$

então a tensão no condutor é dada por  $U(0, h - r)$  e neste caso os parâmetros da linha por unidade de comprimento são,

$$\begin{aligned} Z_3 &= Z_i + \frac{j\omega\mu_1}{2\pi} \left[ \Lambda + S_1 - \left( \frac{\gamma}{k_1} \right)^2 (T_2 + S_2) \right] \\ Y_3 &= 2\pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left( \frac{1}{\Lambda - T_2} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde,  $T_2$  é definido abaixo.

$$T_2 = 2 \int_0^\infty \frac{u_2 (e^{-h u_1} - e^{-2h u_1})}{u_1 \left[ \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 u_1 + u_2 \right]} \cos(r\lambda) d\lambda \quad (3.34)$$

### 3.3.2 Cálculo de parâmetros unitários pela aproximação quase-TEM

As expressões aproximadas para o cálculo da impedância e admitância por unidade de comprimento de cada definição são demonstradas abaixo. Assumindo a propagação quase-TEM, a definição pelo potencial escalar no condutor é dada por,

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_i + \frac{j\omega\mu_1}{2\pi} (\bar{\Lambda} + 2\bar{S}_1) \\ Y_1 &= 2\pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left( \frac{1}{\bar{\Lambda} + 2\bar{S}_2} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

sendo as expressões de  $\bar{\Lambda}$ ,  $\bar{S}_1$  e  $\bar{S}_2$ , apresentadas em 3.2.1. Considerando a definição da diferença de potencial, temos,

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_i + \frac{j\omega\mu_1}{2\pi} [\bar{\Lambda} + \bar{S}_1 - (\bar{T}_1 + \bar{S}_2)] \\ Y_2 &= 2\pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left( \frac{1}{\bar{\Lambda} - \bar{T}_1} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde,  $\bar{T}_1$  é definido abaixo.

$$\bar{T}_1 = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-h\lambda} - e^{-2h\lambda}}{\left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \lambda + u_2} \cos(r\lambda) d\lambda \quad (3.37)$$

e finalmente os parâmetros por unidade de comprimento considerando a definição tensão são representados por,

$$\begin{aligned} Z_3 &= Z_i + \frac{j\omega\mu_1}{2\pi} [\bar{\Lambda} + S_1 - (T_2 + S_2)] \\ Y_3 &= 2\pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left( \frac{1}{\bar{\Lambda} - T_2} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde,  $\bar{T}_2$  é definido abaixo.

$$\bar{T}_2 = 2 \int_0^\infty \frac{u_2 (e^{-h\lambda} - e^{-2h\lambda})}{\lambda \left[ \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^2 \lambda + u_2 \right]} \cos(r\lambda) d\lambda \quad (3.39)$$

### 3.3.3 Cálculo de parâmetros unitários pela aproximação do método das imagens

Quando pela aproximação por imagens se considera a definição de potencial escalar, as expressões de impedância e admitância são dadas por,

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_i + \frac{j\omega\mu_1}{2\pi} \left( \overline{\overline{\Lambda}} + 2 \overline{\overline{S_1}} \right) \\ Y_1 &= 2\pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left( \frac{1}{\overline{\overline{\Lambda}} + 2 \overline{\overline{S_2}}} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

sendo as expressões de  $\overline{\overline{\Lambda}} = \overline{\Lambda}$ ,  $\overline{\overline{S_1}}$  e  $\overline{\overline{S_2}}$ , apresentadas em 3.2.2.

Considerando a definição da diferença de potencial entre o condutor e o solo temos,

$$\begin{aligned} Z_2 &= Z_i + \frac{j\omega\mu_1}{2\pi} \left[ \overline{\overline{\Lambda}} + \overline{\overline{S_1}} - \left( \overline{\overline{T_1}} + \overline{\overline{S_2}} \right) \right] \\ Y_2 &= 2\pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left( \frac{1}{\overline{\overline{\Lambda}} - \overline{\overline{T_1}}} \right) \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde,  $\overline{\overline{T_1}}$  é definido abaixo.

$$\overline{\overline{T_1}} = \frac{2}{n^2 + 1} \ln \left( \frac{1 + \frac{n^2+1}{d\sqrt{k_1^2 - k_2^2}}}{1 + \frac{2(n^2+1)}{d\sqrt{k_1^2 - k_2^2}}} \right) \quad (3.42)$$

e finalmente os parâmetros por unidade de comprimento considerando a definição tensão no condutor são dados por,

$$\begin{aligned} Z_3 &= Z_i + \frac{j\omega\mu_1}{2\pi} \left[ \overline{\overline{\Lambda}} + \overline{\overline{S_1}} - \left( \overline{\overline{T_2}} + \overline{\overline{S_2}} \right) \right] \\ Y_3 &= 2\pi (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \left( \frac{1}{\overline{\overline{\Lambda}} - \overline{\overline{T_2}}} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde,  $\overline{\overline{T_2}}$  é definido abaixo<sup>5</sup>.

$$\overline{\overline{T_2}} = 2 \ln(2) + \frac{2n^2}{n^2 + 1} \ln \left( \frac{1 + \frac{n^2+1}{d\sqrt{k_1^2 - k_2^2}}}{1 + \frac{2(n^2+1)}{d\sqrt{k_1^2 - k_2^2}}} \right) \quad (3.44)$$

<sup>5</sup>A eq. (3.44) na referência [13], originalmente estava com o sinal negativo no primeiro termo da equação, sendo  $2 \ln(2) - \dots$ , desta forma, neste trabalho corrigimos para  $2 \ln(2) + \dots$

### 3.3.4 Redução à formulação de Carson

Para reduzir as expressões de  $Z_2$  e  $Z_3$  do modo de onda completa para a formulação de Carson, são adotadas as hipóteses de que  $k_2 \gg k_1$ ,  $k_1 \rightarrow \gamma$  e  $h \gg a$ . Desta forma as expressões de  $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow 0$ ,  $S_2 \rightarrow 0$ , as expressões de  $Z_2$  e  $Z_3$  tendem à  $Z_1$  da eq. (3.35). Com estas hipóteses simplificativas, as expressões de  $Y_1$ ,  $Y_2$  e  $Y_3$  podem ser aproximadas por funções logarítmicas [20].

## 3.4 Estabilidade numérica

Um modelo de linha de transmissão monofásico pode ser representado em frequência por sua matriz admitância nodal, isto é,

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_n \cdot \mathbf{V} \quad (3.45)$$

sendo  $\mathbf{I}$  o vetor de injeção de corrente,  $\mathbf{V}$  o vetor das tensões nos terminais e  $\mathbf{Y}$  a matriz de admitância nodal dada por (3.46).

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Em uma linha de transmissão monofásica, os elementos da matriz de admitância nodal são dados por,

$$\begin{aligned} y_{11} &= Y_c (1 + H^2) (1 - H^2)^{-1} \\ y_{12} &= -2Y_c (1 - H^2)^{-1} \end{aligned} \quad (3.47)$$

sendo  $y_{22} = y_{11}$ ,  $Y_c = Z_c^{-1}$  é a admitância característica da linha de transmissão e  $H = \exp(-j\hat{\gamma}\ell)$  a função de propagação,  $\ell$  é o comprimento da linha, e  $j\hat{\gamma}$  a constante de propagação<sup>6</sup>.

### 3.4.1 Análise da estabilidade através da admitância nodal

Como descrito anteriormente, a viabilidade de um modelo de linha de transmissão pode ser avaliada verificando se a parte real dos autovalores de  $\mathbf{Y}_n$  é positiva. Para o caso da linha monofásica, temos várias alternativas possíveis para calcular a matriz de admitância nodal. Utilizando os valores de  $\gamma$  obtidos nas seções anteriores, temos um total de nove possíveis expressões para a impedância característica e também para a admitância nodal. Em todos estes cenários a impedância característica apresentou parte real positiva. Se o solo é assumido como sendo um

---

<sup>6</sup>A potência absorvida  $P$  por este modelo para qualquer vetor complexo  $\mathbf{V}$  é dada em (2.19).

bom condutor, em todos os casos testados não foram apresentadas qualquer violação de passividade. Como estamos considerando um elemento passivo no domínio da frequência é esperado que todas definições de tensão apresentem respostas estáveis independentemente das definições utilizadas. De fato, o modelo de onda completa apresentou valores positivos, independentemente da definição utilizada. O mesmo ocorreu para os métodos aproximados FW#1, FW#2 e quase-TEM. No entanto, quando considerado o método das imagens, notamos algumas pequenas violações quando utilizada a definição de tensão.

Desta forma, com o objetivo de verificar os pontos de estabilidade numérica do modelo de linha, utilizamos um sistema monofásico com condutor a uma altura  $h$  variando de 10 à 20 m sobre o solo, com raio  $r$  variando de 0,5 cm à 2 cm, de resistividade igual a do alumínio  $\rho_c = 3,365 \cdot 10^{-7} \Omega \text{ m}$ , e permeabilidade magnética igual a do vácuo. Os parâmetros do solo adotados foram  $\sigma_2 = 1 \text{ mS/m}$ ,  $\epsilon_2 = 5 \epsilon_1$ , com  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ , e  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , sendo a condutividade do ar igual a zero. Os parâmetros do solo não sofreram variação.

Após o cálculo da parte real da matriz de autovalores de  $\mathbf{Y}_n$ , foi verificado que ao utilizarmos o método das imagens para definição  $DP_3$ , houve violação de passividade para algumas geometrias de rede, conforme apresentado na tabela 3.5. O mesmo modelo, utilizando a aproximação quase-TEM e o método das imagens para as definições  $DP_1$  e  $DP_2$ , não apresentou instabilidade.

Tabela 3.5: Valores mínimos da parte real dos autovalores de  $\mathbf{Y}_n$

h(m)	Raio (cm)					
	0,5		1,0		2,0	
	$y_\lambda (\mu S)$	MHz	$y_\lambda (\mu S)$	MHz	$y_\lambda (\mu S)$	MHz
10,0	10,75	0,1	11,86	0,1	13,870	0,1
15,0	8,590	0,1	9,290	0,1	-14,69	17,24
20,0	7,140	0,1	-8,50	10,05	-61,99	9,77

As figs. 3.8, 3.9 e 3.10 apresentam o menor valor das partes reais dos autovalores da matriz de admitância nodal, nas configurações que apresentaram violação da passividade da rede. O maior valor de  $y_\lambda$  apresentado foi de  $-61,99 \mu S$  na frequência de 9,77 MHz. Onde  $nm$  varia de 1 à 500 pontos de amostra frequência, e  $y_{\lambda 1}$  e  $y_{\lambda 2}$  são dados por (3.48).

$$\begin{aligned}
 y_{\lambda 1} &= \Re \left( Y_c \frac{1+H}{1-H} \right) \\
 y_{\lambda 2} &= \Re \left( Y_c \frac{1-H}{1+H} \right)
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

As violações ocorreram em ambos autovalores da matriz de admitância nodal. Foi observado que com aumento do raio e da altura condutor, o modelo tende a ser

instável. Para uma dada altura do condutor a frequência em que o valor da violação ocorre é basicamente a mesma, independente da variação do raio. A violação da passividade para a definição de tensão ocorre devido ao comportamento da função de propagação  $H$  e da admitância característica  $Y_c$ . Na fig. 3.11 apresentamos o comportamento de  $H$  para um caso de não violação da passividade, onde o condutor de raio 1 cm encontra-se a uma altura de 10 m. Neste caso verificamos que o modelo quase-TEM e o método das imagens apresentam um comportamento similar em toda faixa de frequência. Para um caso onde encontramos violação de passividade, com condutor de raio 2 cm a uma altura de 20 m do solo, verificamos na fig. 3.12 que, o  $H$  calculado pelo modelo quase-TEM apresenta uma curva bastante distinta daquela obtida empregando o método das imagens não converge com  $H$  calculado pelo método das imagens. Com isto concluímos que a violação da passividade, com base na eq. (3.48), sofre forte influência do comportamento da função de propagação.

Na fig. 3.13, verificamos que na região onde ocorrem as maiores violações,  $Y_c$  apresenta uma leve distinção entre as respostas obtidas pelos métodos quase-TEM e imagens.

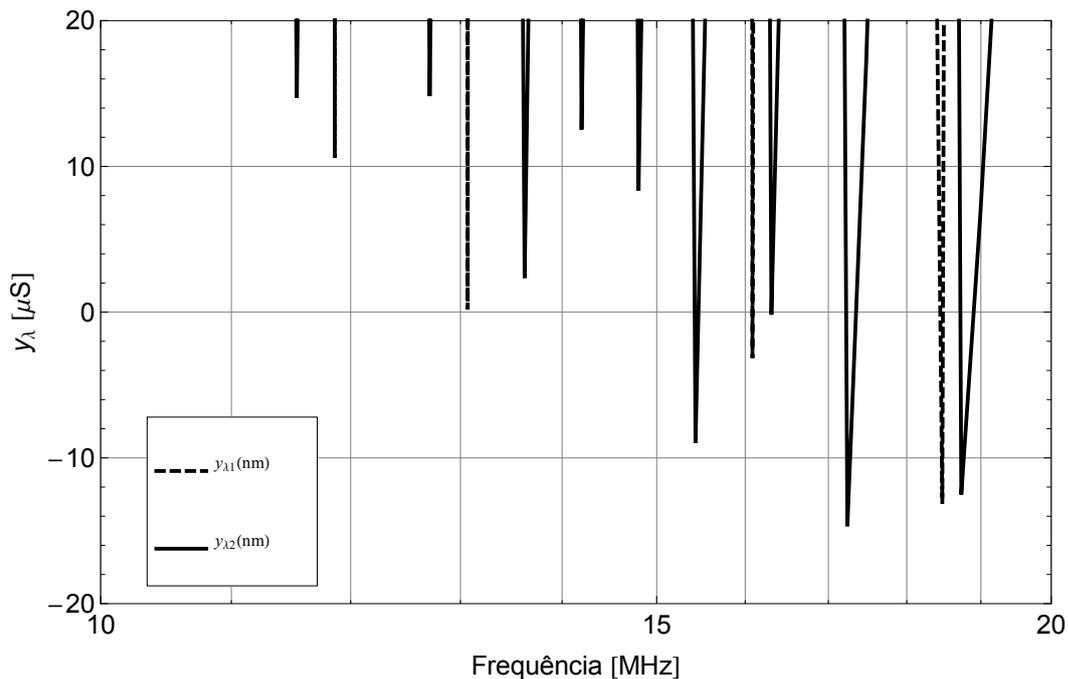


Figura 3.8: Sistema monofásico com condutor de:  $r = 2$  cm e  $h = 15$  m

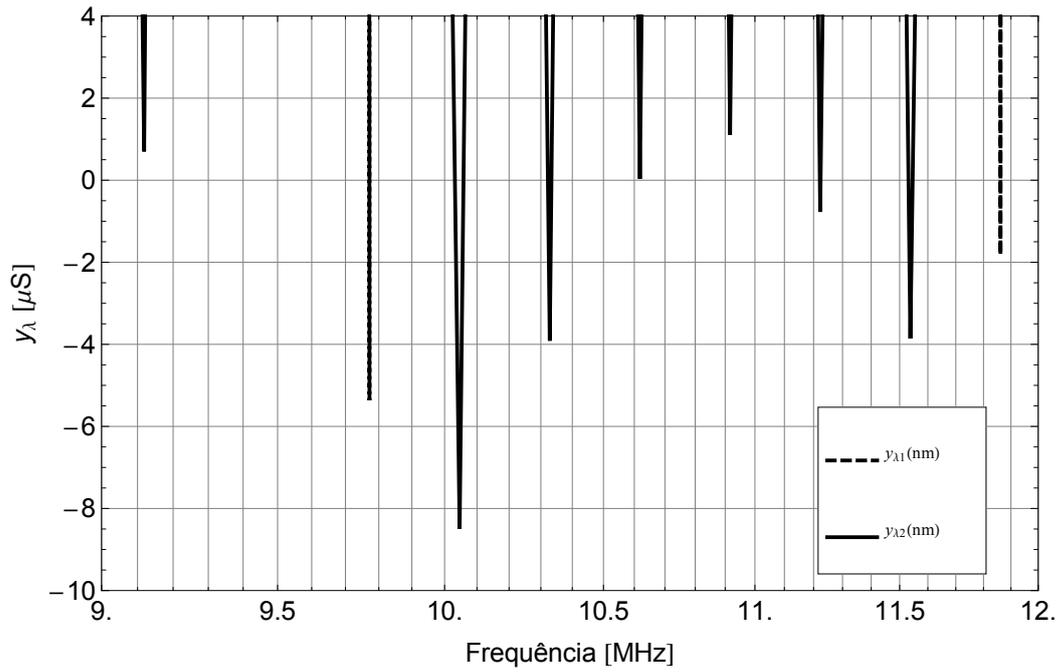


Figura 3.9: Sistema monofásico com condutor de:  $r = 1$  cm e  $h = 20$  m

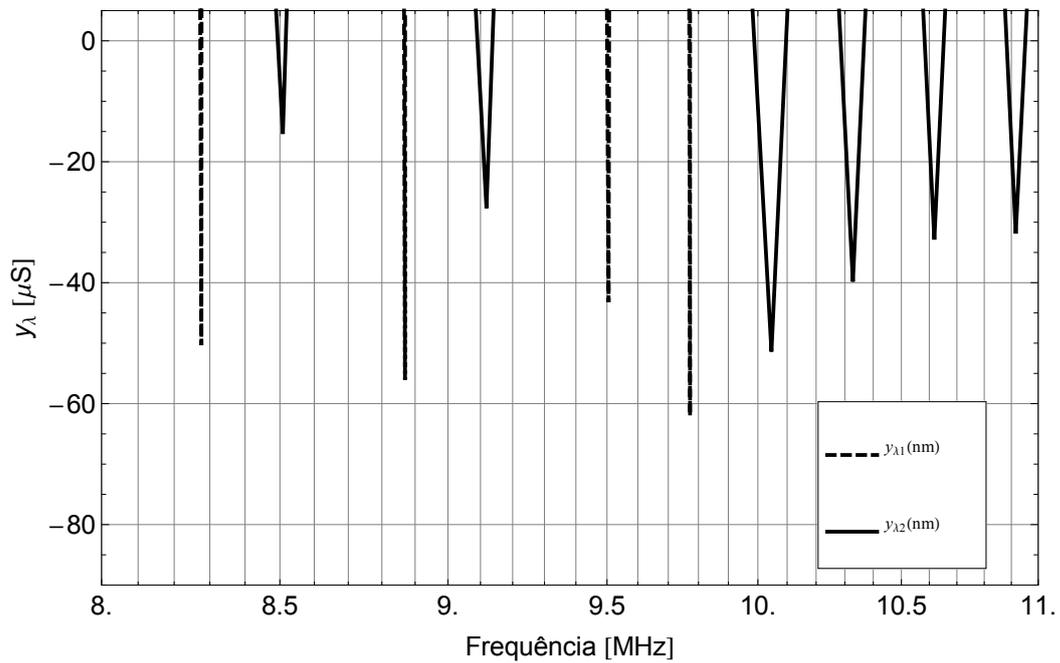


Figura 3.10: Sistema monofásico com condutor de:  $r = 2$  cm e  $h = 20$  m

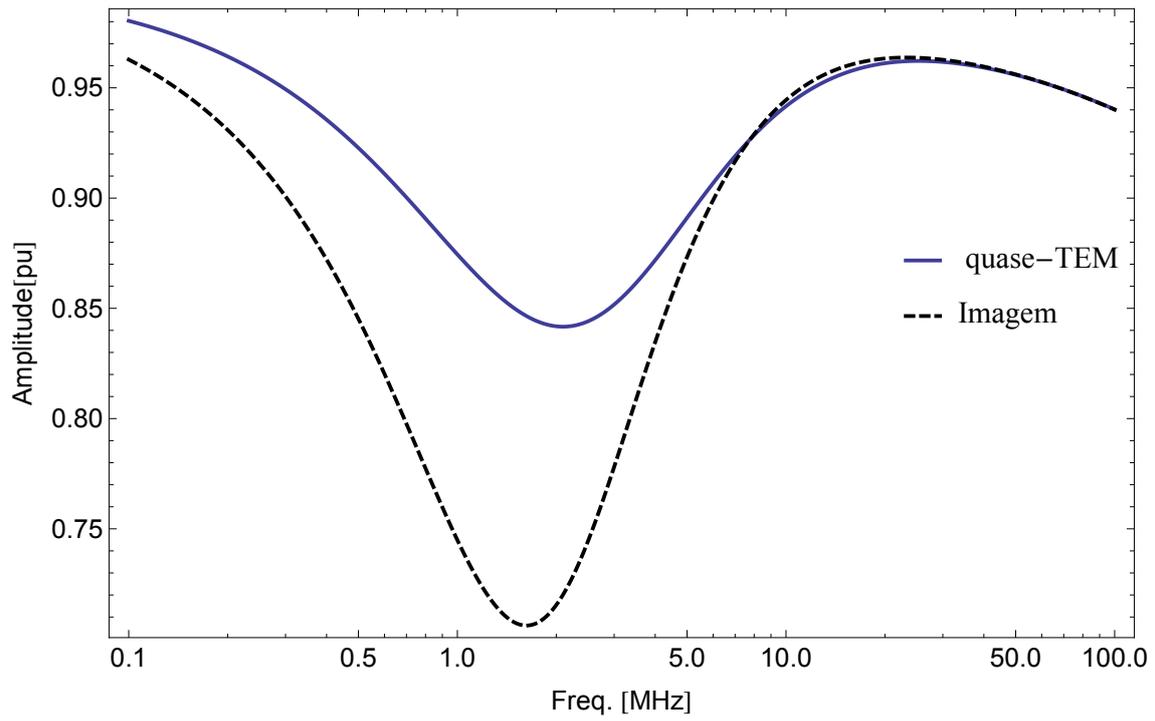


Figura 3.11: Comportamento de H para um caso de violação da passividade

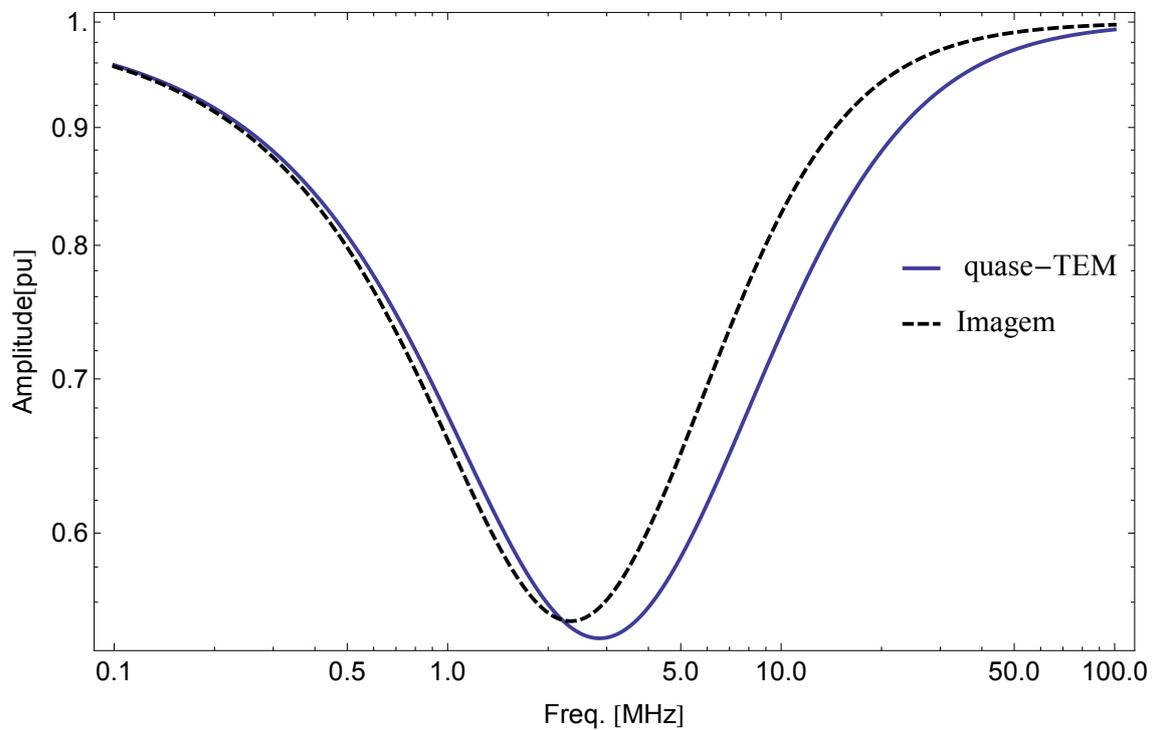


Figura 3.12: Comportamento de H para um caso de não violação da passividade

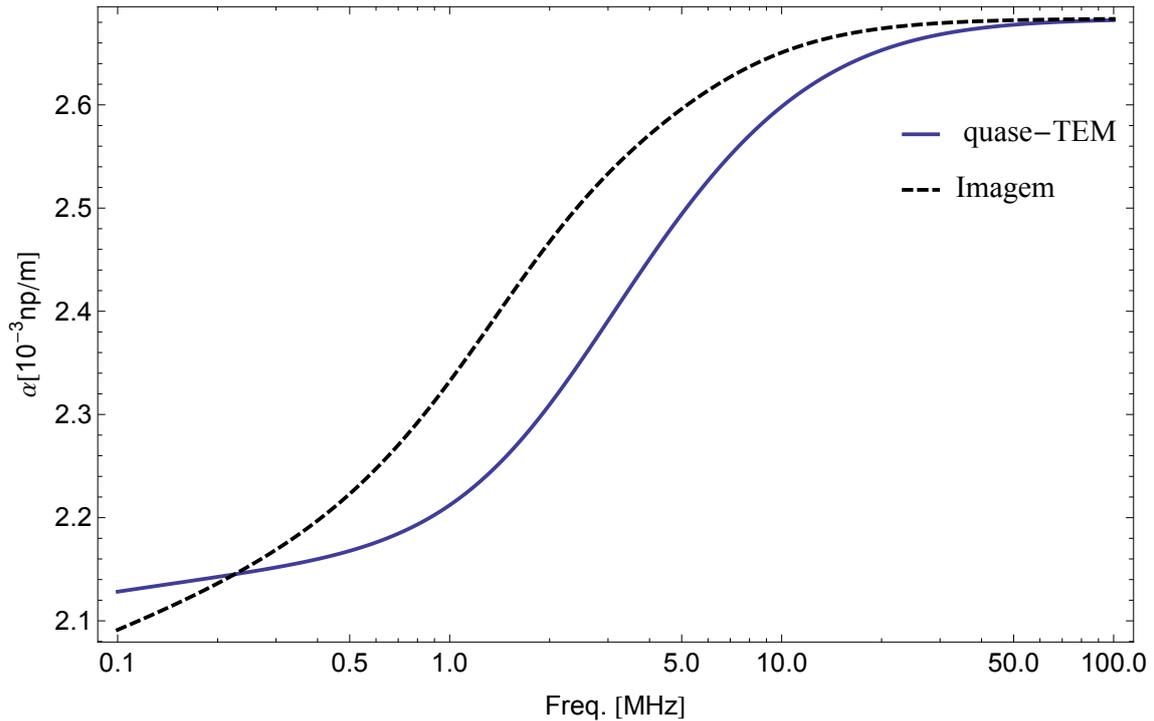


Figura 3.13: Comportamento de  $Y_c$  para um caso de violação da passividade

### 3.4.2 Avaliação da resposta temporal para os pontos de instabilidade analisados

Para os pontos de violação da passividade, foram analisadas as respostas à um sinal senoidal de 1 p.u. injetado no terminal emissor da linha monofásica, sendo o esquema apresentado na fig. 3.14, com receptor em aberto.

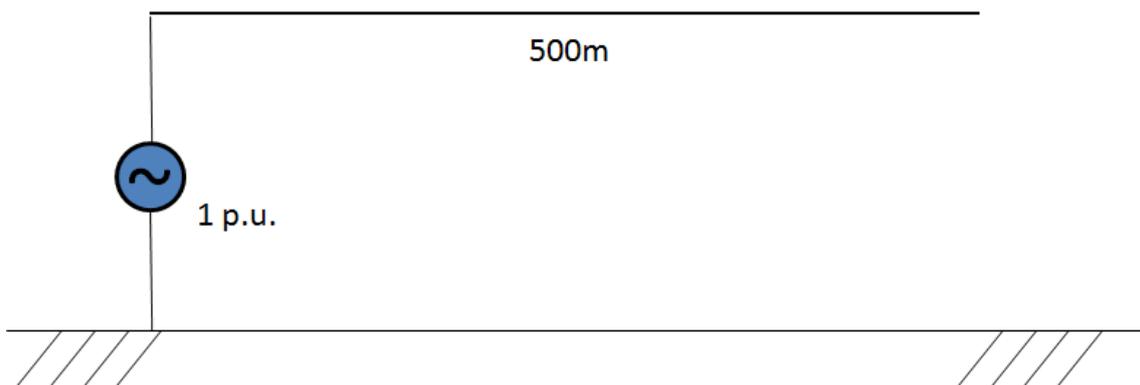


Figura 3.14: Sistema monofásico alimentado por uma fonte alternada de 1 p.u.

As respostas foram avaliadas para sinais com: frequência igual a do ponto de violação da passividade; e frequência diferente da do ponto de violação da passividade. As três geometrias estudadas são referentes àquelas que apresentaram instabilidade,

tabela 3.5, sendo elas:

- (a) Condutor de raio  $r = 2$  cm,  $h = 15$  m.
- (b) Condutor de raio  $r = 1$  cm,  $h = 20$  m.
- (c) Condutor de raio  $r = 2$  cm,  $h = 20$  m.

Para investigar o impacto da violação da passividade no domínio do tempo, optou-se por utilizar a Transformada Numérica de Laplace (TNL) [41, 42], vista no apêndice B.

### **Resposta no domínio do tempo para o ponto de violação da passividade - caso (a)**

A fig. 3.15 representa a resposta da rede à um sinal de frequência igual a 17,24 MHz, onde há um ponto de violação da passividade para uma linha com condutor a uma altura de 15 m e raio igual a 2 cm. Notamos que o impacto da estabilidade do modelo no domínio do tempo faz com que não haja regime permanente, e o sinal torna-se crescente tendendo a infinito. A fig. 3.16 representa a resposta do mesmo sistema para um sinal injetado com uma frequência de 7 MHz, sendo esta uma frequência de não violação da passividade, onde a parte real do autovalor de  $\mathbf{Y}_n$  é positiva. Notamos que após regime transitório a resposta estabiliza em um valor permanente como esperado de um sistema passivo.

### **Resposta no domínio do tempo para o ponto de violação da passividade - caso (b)**

A fig. 3.17 representa a resposta da rede à um sinal de frequência igual a 9,77 MHz, onde há um ponto de violação da passividade para uma linha com condutor a uma altura de 20 m com raio igual a 1 cm. A fig. 3.18 representa a resposta do mesmo sistema para um sinal injetado com uma frequência de 3 MHz, sendo esta uma frequência de não violação da passividade, onde a parte real do autovalor de  $\mathbf{Y}_n$  é positiva. Para esta configuração do sistema, o comportamento dos sinais foi similar ao das figs. 3.15 e 3.16.

### **Resposta no domínio do tempo para o ponto de violação da passividade - caso (c)**

A fig. 3.19 representa a resposta da rede à um sinal de frequência igual a 10,05 MHz, onde há um ponto de violação da passividade para uma linha com condutor a uma altura de 20 m com raio igual a 2 cm. A fig. 3.20 representa a resposta do mesmo sistema para um sinal injetado com uma frequência de 3 MHz,

sendo esta uma frequência de não violação da passividade, onde a parte real do autovalor de  $\mathbf{Y}_n$  é positiva. Para esta configuração do sistema, o comportamento dos sinais foram similares aos das figs. 3.15 à 3.18.

### 3.5 Discussão dos resultados

Neste capítulo foram analisados alguns modelos utilizados na obtenção da constante de propagação através da equação modal. Os modelos tratados como referência foram aqueles que utilizaram o modo de onda completa M1 à M4. A utilização de um ponto de partida com base em uma abordagem pelo método das imagens pareceu ser o método mais adequado. Embora o método quase-TEM esteja mais próximo da solução real, existe a desvantagem da necessidade da avaliação de integrais infinitas no passo de frequência. O modo quase-TEM apresentou comportamento similar em toda faixa de frequência quando comparado com o modo de onda completa, apresentando uma leve divergência na faixa de 0,7 à 2 MHz. Os métodos quase-onda completa convergiram assintoticamente com divergência mínima entre 1 e 5 MHz.

No cálculo de parâmetros unitários foram apresentadas três definições de tensão para três métodos de cálculo de parâmetros, apresentando 9 possibilidades de parametrização de rede. Após inúmeras simulações foi constatado um erro de sinal na bibliografia de referência [13] para  $\overline{T}_2$ , que foi corrigido e aplicado nas simulações em que utilizaram a definição de tensão no cálculo de parâmetros unitários.

Na análise da estabilidade de uma linha monofásica foi constatado que para a definição de tensão ( $Z_3$  e  $Y_3$ ) utilizando o método das imagens [13], houve violação da passividade com aumento da altura e raio dos condutores, apresentando parte real dos autovalores de  $\mathbf{Y}_n$  negativa em alguns casos. Para os pontos de violação da passividade foi avaliado o impacto da instabilidade no domínio do tempo e um comportamento inesperado foi apresentado.

É importante ressaltar que as violações de passividade dependem da geometria da configuração empregada bem como das características elétricas do condutor utilizado. Para o mesmo caso base,  $h = 10$  m,  $a = 0,01$  m,  $\ell = 500$  m, caso o condutor seja suposto ideal, haverá violações de passividade a partir de 20 MHz. Foi verificado que a causa da instabilidade no modelo ocorre em função do comportamento de  $H$  e  $Y_c$ .

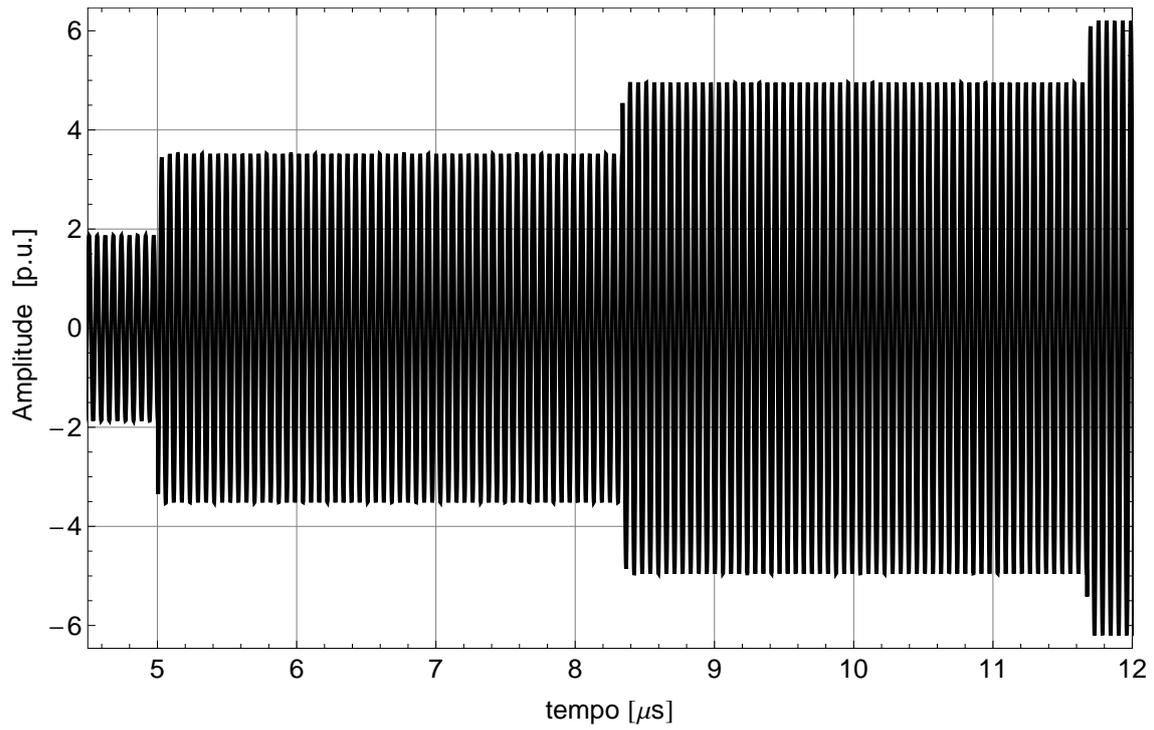


Figura 3.15: Resposta a senóide 1 p.u.:  $r = 2$  cm e  $h = 15$  m,  $f = 17,24$  MHz

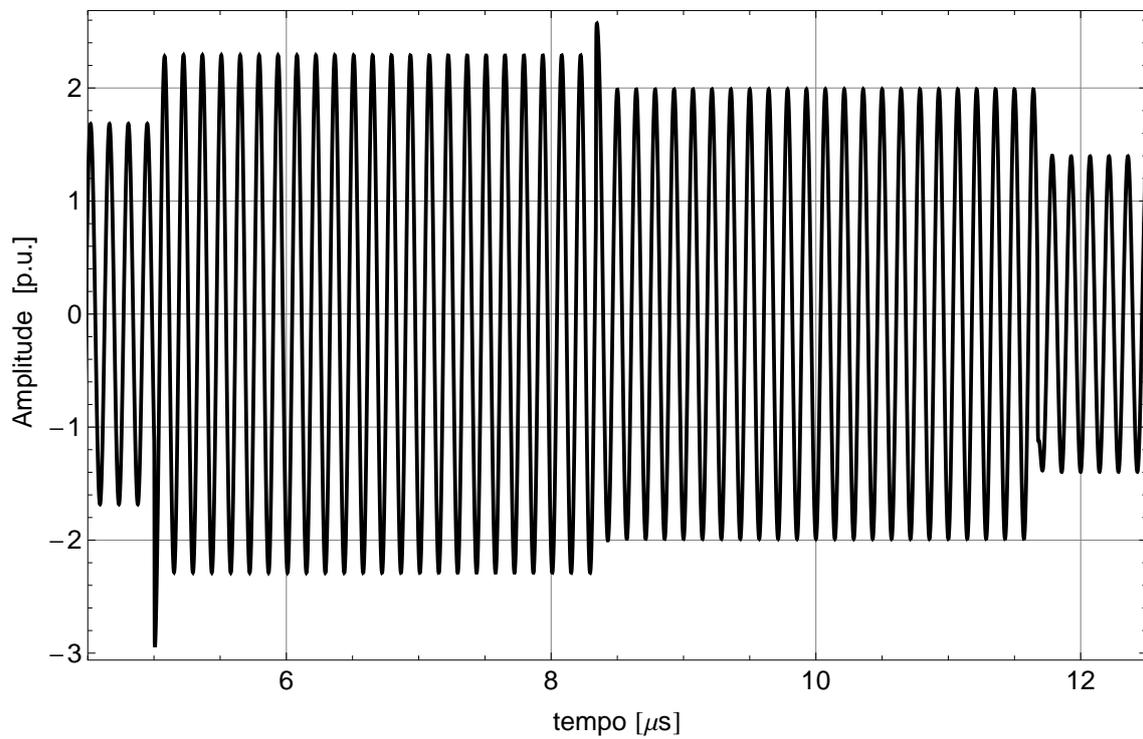


Figura 3.16: Resposta a senoide 1 p.u.:  $r = 2$  cm e  $h = 15$  m,  $f = 7,00$  MHz

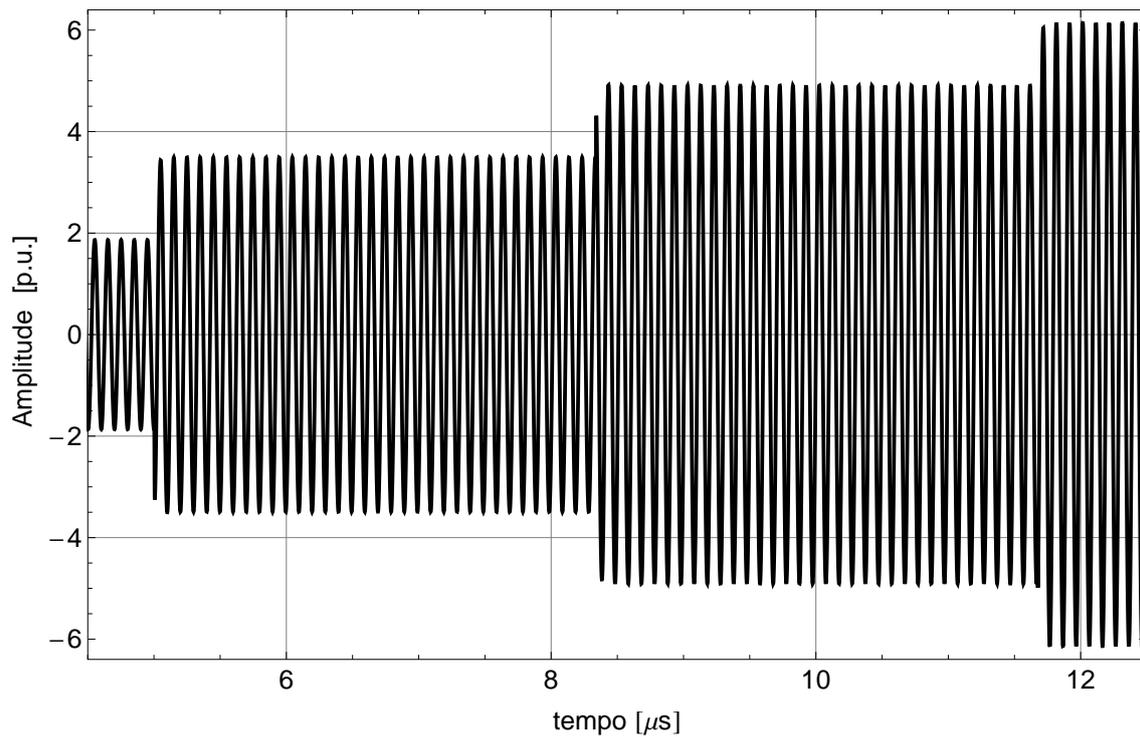


Figura 3.17: Resposta a senoide 1 p.u.:  $r = 1$  cm e  $h = 20$  m,  $f = 9,77$  MHz

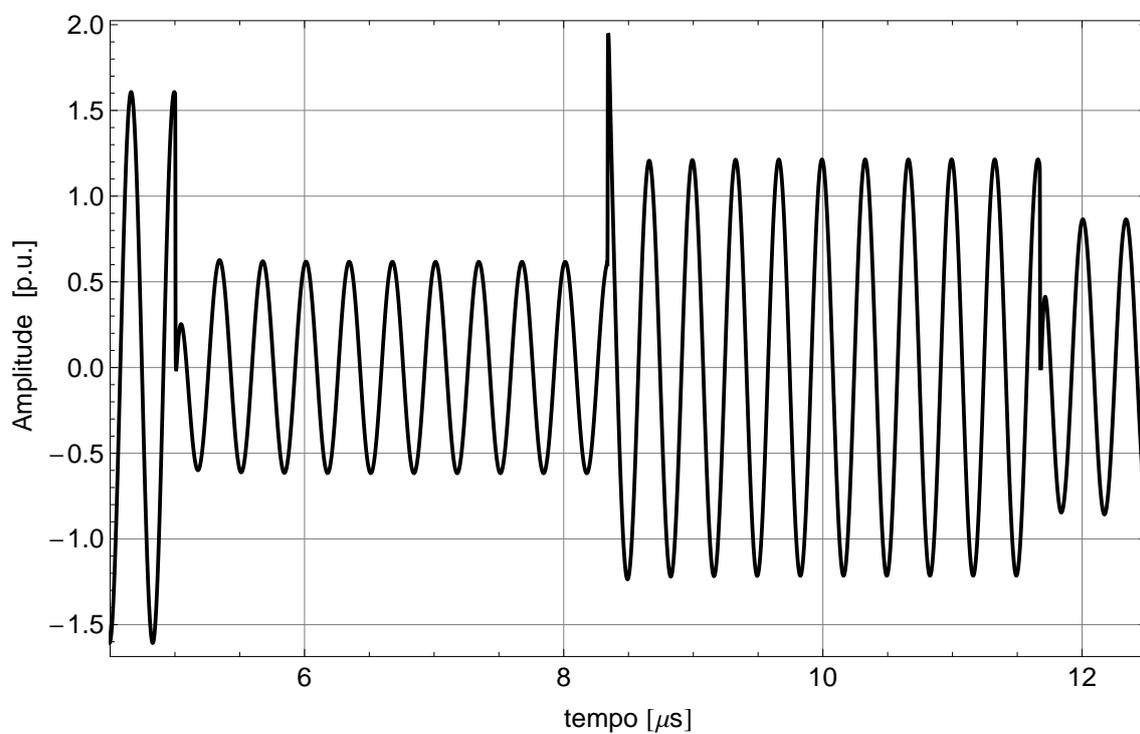


Figura 3.18: Resposta a senoide 1 p.u.:  $r = 1$  cm e  $h = 20$  m,  $f = 3,00$  MHz

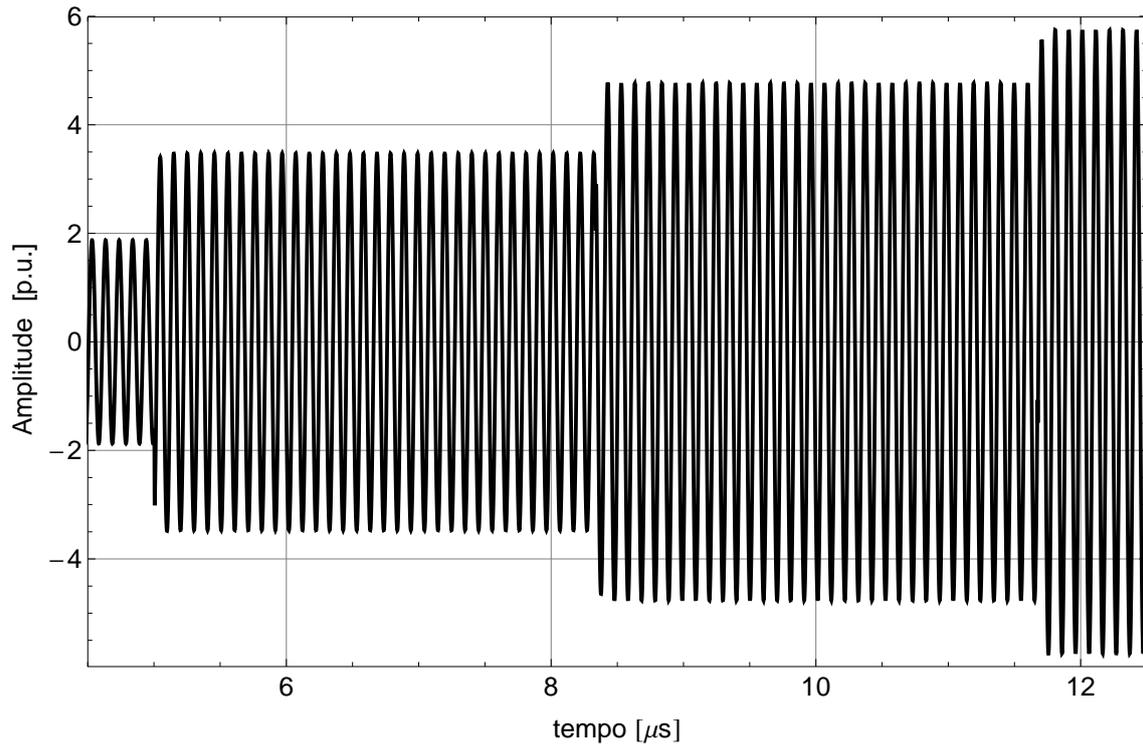


Figura 3.19: Resposta a senoide 1 p.u.:  $r = 2$  cm e  $h = 20$  m,  $f = 10,05$  MHz

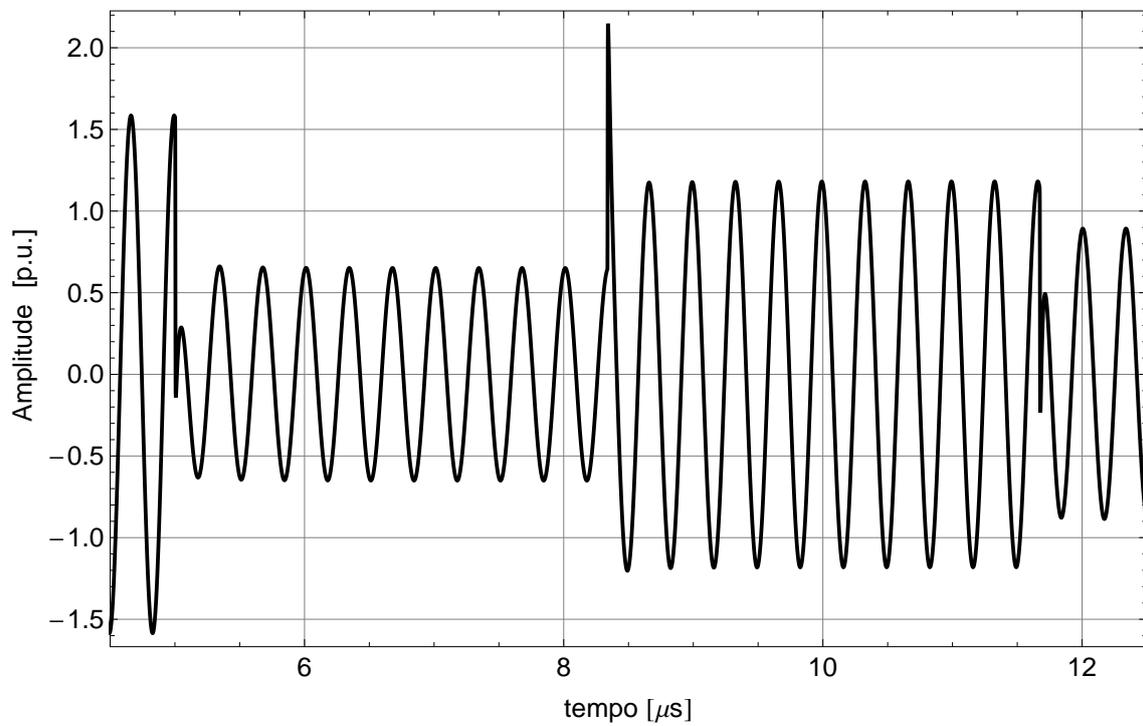


Figura 3.20: Resposta a senoide 1 p.u.:  $r = 2$  cm e  $h = 20$  m,  $f = 3,00$  MHz

# Capítulo 4

## Aproximação dos parâmetros unitários em linhas de transmissão

Neste capítulo apresentamos um novo modelo de cálculo de parâmetros longitudinais e transversais em linhas de transmissão como alternativa para simplificação das integrais infinitas de Sommerfeld. Este modelo tem como proposta reduzir os problemas de instabilidade numérica apresentados pelo método das imagens.

No Capítulo 2 verificamos que o método das imagens, dependendo da formulação empregada, apresenta instabilidade para algumas dezenas de kHz, podendo ocorrer em frequências próximas a frequência de operação da rede. No Capítulo 3 verificamos que para obtermos a constante de propagação de forma precisa necessitamos da aplicação de procedimentos numéricos que exigem um elevado tempo computacional. O modelo proposto apresenta-se como uma solução que independente do valor da constante de propagação, podendo ser considerado como uma aproximação dos métodos baseados em propagação quase-TEM.

### 4.1 Aproximação quase-TEM

Consideremos um sistema bifásico com condutores a uma altura  $h_i$  e  $h_j$  sobre uma interface ar-solo, homogêneos, conforme mostra a fig. 2.1. Os condutores tem comprimento infinito e raio  $r$ , condutividade  $\sigma_c$ , e permeabilidade magnética  $\mu_c$ , o solo tem condutividade  $\sigma_s$ , permissividade  $\epsilon_s$  e permeabilidade magnética  $\mu_s = \mu_0$ , e o ar tem condutividade  $\sigma_a$  nula, permissividade  $\epsilon_a$  e permeabilidade magnética  $\mu_a = \mu_0$ .

A aproximação quase-TEM faz com que tanto a impedância quanto a admitância por unidade de comprimento não dependam de  $\gamma$ , o que pode ser realizado se  $\gamma$  é definido igual a  $k_1$ . Supomos também as dimensões do condutor muito menores que a altura dos condutores  $h_i$  e  $h_j$ , e as distâncias  $x$ ,  $d_{ij}$  e  $D_{ij}$ . Desta forma, para o

método quase-TEM, temos as seguintes expressões derivadas da eqs. (A.11), (A.14) e (A.21):

$$\begin{aligned}\Lambda_{ii} &\rightarrow \overline{\Lambda}_{ii} = \ln \frac{2h_i}{r} \\ \Lambda_{ij} &\rightarrow \overline{\Lambda}_{ij} = \ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}}\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_{1ii} &= \int_0^\infty \frac{e^{-2h_i \lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}} \cos(\lambda r) d\lambda \\ \overline{S}_{1ij} &= \int_0^\infty \frac{e^{-(h_i+h_j) \lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}} \cos(\lambda x) d\lambda\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_{2ii} &= \int_0^\infty \frac{e^{-2h_i \lambda}}{n^2 \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}} \cos(\lambda r) d\lambda \\ \overline{S}_{2ij} &= \int_0^\infty \frac{e^{-(h_i+h_j) \lambda}}{n^2 \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}} \cos(\lambda x) d\lambda\end{aligned}\tag{4.3}$$

## 4.2 Aproximação pelo método das imagens

As formulações simplificadas pelo método das imagens foram apresentadas em detalhes no Capítulo 2 [12, 13]. As eqs. (2.13) e (2.14) são simplificações das eqs. (4.2) e (4.3), respectivamente. Com a finalidade de esclarecer melhor o assunto, repetimos abaixo as eqs. (2.13) e (2.14).

$$\begin{aligned}\overline{\overline{S}}_{1ii} &= \ln \left( 1 + \frac{2}{\eta \sqrt{4h_i^2 + r^2}} \right) & \overline{\overline{S}}_{1ij} &= \ln \left( 1 + \frac{2}{\eta D_{ij}} \right) \\ \overline{\overline{S}}_{2ii} &= \frac{2}{n^2 + 1} \ln \left( 1 + \frac{n^2 + 1}{2\eta \sqrt{4h_i^2 + r^2}} \right) & \overline{\overline{S}}_{2ij} &= \frac{2}{n^2 + 1} \ln \left( 1 + \frac{n^2 + 1}{2\eta D_{ij}} \right)\end{aligned}$$

## 4.3 Aproximação proposta para o modelo quase-TEM

Nesta seção, apresentamos um modelo aproximado como solução das integrais de Wise e Carson, que tem como finalidade eliminar os problemas de instabilidade numérica em frequências onde ocorrem os principais fenômenos transitórios apresen-

tado pelo método das imagens.

### 4.3.1 Aproximação da impedância de retorno pelo solo

A segunda integral da eq. (4.2) pode ser dividida em duas partes obtidas através de manipulação do integrando. Este artifício é feito multiplicando-se o numerador e o denominador por  $\lambda - \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}$ . Desta forma,  $\overline{S}_{1_{ij}}$  pode ser reescrita como,

$$\widetilde{S}_{1_{ij}} = -\frac{1}{\eta_s^2}(I_1 - I_2) \quad (4.4)$$

onde  $I_1$  e  $I_2$  são mostrados abaixo.

$$I_1 = \int_0^{\infty} \lambda e^{-(h_i+h_j)\lambda} \cos(x \lambda) d\lambda \quad (4.5)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2} e^{-(h_i+h_j)\lambda} \cos(x \lambda) d\lambda \quad (4.6)$$

Utilizando a propriedade da formulação de Euler, relacionando  $\cos(x)$  e  $e^{jx}$ , i.e.,

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (4.7)$$

temos, com os equivalentes integrais de (3.381.4) e (3.387.7) em [40],

$$\begin{aligned} \overline{I}_1 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\infty} \lambda e^{-q_1\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} \lambda e^{-q_2\lambda} d\lambda \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{q_1^2 + q_2^2}{q_1^2 q_2^2} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \overline{I}_2 &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2} e^{-q_1\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2} e^{-q_2\lambda} d\lambda \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \frac{\sqrt{\pi}}{q_m} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \eta_s [\mathbf{H}_1(\eta_s q_m) - Y_1(\eta_s q_m)] \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde,  $q_1 = (h_i + h_j) - jx$  e  $q_2 = (h_i + h_j) + jx$ ,  $\mathbf{H}_1$  é a função de Struve,  $Y_1$  é a função de Bessel de segunda espécie e ordem 1,  $\eta_s q_m$  o argumento das funções de Struve e Bessel, com  $m = 1, 2$ , e  $\Gamma$  é a função gamma. A eq. (4.9) é válida sempre que  $|\arg(\eta_s)| < \pi$ , o que é válido em se tratando de linhas de transmissão, pois  $\eta_s$

corresponde a constante de propagação do solo, cuja parte real é sempre positiva.

A impedância própria dos condutores  $i$  ou  $j$ , é dada pela primeira integral da eq. (4.2), onde para o condutor de raio infinitesimal  $r$  quando comparado com a altura  $h \gg r \rightarrow 0$ , temos  $\cos(r \lambda) \rightarrow 1$ . Desta forma temos,

$$\overline{S_{1ii}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h_i \lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}} d\lambda \quad (4.10)$$

logo, utilizando (3.368) de [40] leva a expressão abaixo.

$$\widetilde{S_{1ii}} = \frac{\pi}{4\eta_s h_i} [\mathbf{H}_1(2\eta_s h_i) - Y_1(2\eta_s h_i)] - \frac{1}{4\eta_s^2 h_i^2} \quad (4.11)$$

### 4.3.2 Aproximação da admitância do solo

Na simplificação do integrando das integrais da eq. (4.3) adotamos as hipóteses de que  $k_s \gg k_a$  e  $k_1 \rightarrow \gamma$ , assim como feito por Carson. Desta forma, as integrais podem ser reescritas conforme mostrado nas eqs. (4.12) e (4.13).

$$\widetilde{S_{2ii}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h_i \lambda}}{n^2 \lambda + \sqrt{\lambda^2 - k_s^2}} \cos(r \lambda) d\lambda \quad (4.12)$$

$$\widetilde{S_{2ij}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(h_i+h_j)\lambda}}{n^2 \lambda + \sqrt{\lambda^2 - k_s^2}} \cos(x \lambda) d\lambda \quad (4.13)$$

A simplificação do integrando pode ser realizada através de uma manipulação algébrica que promove a sua divisão em duas partes. Este artifício é feito multiplicando-se o numerador e o denominador por  $(n^2 \lambda - \sqrt{\lambda^2 - k_s^2})$ . Desta forma as eqs. (4.12) e (4.13) podem ser reescritas por,

$$M_{pt} = M_1 - M_2 \quad (4.14)$$

onde para (4.13) temos,

$$M_1 = \int_0^{\infty} \frac{R \lambda e^{-(h_i+h_j)\lambda}}{\lambda^2 + V^2} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (4.15)$$

$$M_2 = \int_0^{\infty} \frac{W \sqrt{\lambda^2 - k_s^2} e^{-(h_i+h_j)\lambda}}{\lambda^2 + V^2} \cos(\lambda r) d\lambda \quad (4.16)$$

sendo,  $R = \frac{n^2}{n^4-1}$ ,  $W = \frac{1}{n^4-1}$  e  $V = \sqrt{\frac{k_s^2}{n^4-1}}$ . Na eq. (4.16), adotamos a hipótese de que  $k_s \gg \lambda$  para simplificação do integrando, desta forma a equação é reescrita como,

$$M_2 = W j k_s \int_0^{\infty} \frac{e^{-(h_i+h_j)\lambda}}{\lambda^2 + V^2} \cos(\lambda r) d\lambda \quad (4.17)$$

Aplicando a propriedade de Euler, dada na eq. (4.7) e os equivalentes integrais das eqs. (3.354.1) e (3.354.2) de [40], temos

$$M_1 = \frac{R}{2} \sum_{m=1}^2 -ci(q_m V) \cos(q_m V) - si(q_m V) \sin(q_m V) \quad (4.18)$$

$$M_2 = \frac{S j k_2}{2M} \sum_{m=1}^2 -ci(q_m V) \sin(q_m V) - si(q_m V) \cos(q_m V) \quad (4.19)$$

sendo, o equivalente (3.354.1) utilizado para simplificar a eq. (4.17) e (3.354.2) para simplificar a eq. (4.15),  $ci$  a função cosseno integral,  $si$  a função seno integral,  $q_1 = (h_i + h_j) - j x$  e  $q_2 = (h_i + h_j) + j x$ . As eqs. (4.18) e (4.19) são válidas sempre que  $\Re(k_2) > 0$ . Repetindo o mesmo processo para simplificação da eq. (4.12), temos as eqs. (4.18) e (4.19) com  $q_1 = 2 h_i - j r$  e  $q_2 = 2 h_i + j r$ .

### 4.3.3 Aproximação da definição de diferença de potencial entre o condutor e o solo para sistemas contendo $n$ -condutores

Com base na eq. (4.14), a expansão da eq. (3.37) para sistemas contendo  $n$ -condutores abaixo apresentada, pode ser simplificada pela mesma metodologia de aproximação dos parâmetros transversais.

$$\overline{T_{1ii}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-h_i \lambda} - e^{-2 h_i \lambda}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 \lambda + u_2} \cos(r \lambda) d\lambda \overline{T_{1ij}} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{h_i+h_j}{2} \lambda} - e^{-(h_i+h_j)\lambda}}{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 \lambda + u_2} \cos(r \lambda) d\lambda \quad (4.20)$$

Para a componente própria, temos  $\overline{T_{1ii}}$  reescrita como,

$$\widetilde{T_{1ii}} = M_p - M_q \quad (4.21)$$

onde,  $M_p$  e  $M_q$  são dadas pela eq. (4.14), sendo que para a componente própria  $q_1 = h_i - j r$  e  $q_2 = h_i + j r$ .

Para a componente mútua temos  $\overline{T_{1_{ij}}}$  reescrita como na eq. (4.21) com  $q_1 = \frac{h_i+h_j}{2} - j x$  e  $q_2 = \frac{h_i+h_j}{2} + j x$ .

Infelizmente, utilizando o procedimento descrito nessa seção, não foi possível criar uma aproximação para  $\overline{T_{2_{ii}}}$  e  $\overline{T_{2_{ij}}}$ .

## 4.4 Verificação do modelo proposto e suas limitações

Com o objetivo de verificar o desempenho do modelo proposto em larga faixa de frequência, nesta seção são apresentados os comportamentos dos parâmetros frente a modelos já consagrados na literatura técnica. É comparado o desempenho no cálculo de parâmetros entre as metodologias proposta (MP) e quase-TEM (QT) para um sistema trifásico. A avaliação do comportamento dos modelos é realizada para uma faixa de frequência de 10 Hz à 100 MHz para uma linha de transmissão trifásica com condutores de raio igual à 1,0 cm, comprimento de 500 m e resistividade igual à  $\rho_c = 3,365 \cdot 10^{-7} \Omega.m$ , espaçados horizontalmente entre si à distância de 3 m, estando à altura de 10 m sobre um solo de resistividade  $\rho_s = 1/\sigma_s = 1000 \Omega.m$ , sendo as permeabilidades magnéticas relativas do solo e do ar unitárias. Na fig. 2.6 é apresentado o “layout” da rede.

Na fig. 4.1 são comparados os valores das resistências próprias e mútuas do sistema descrito. Verificamos que os valores reais de  $Z_{ii}$  e  $Z_{ij}$  calculados tanto para MP quanto para QT coincidem em toda faixa de frequência analisada. O erro relativo para verificação da precisão do modelo é apresentado na fig. 4.2 e é calculado pela expressão,

$$er_p(\%) = \frac{|\Re(Z_{QT}) - \Re(Z_{MP})|}{|\Re(Z_{QT})|} \times 100 \quad (4.22)$$

onde verificamos que o maior erro percentual é da ordem de  $10^{-6} \%$  para a resistência própria. Desta forma avaliamos a precisão do modelo, verificando que quando comparado com a referência quase-TEM, apresenta um erro desprezível.

Nas figs. 4.3 e 4.4 são comparados os valores das indutâncias próprias e mútuas, respectivamente. Verificamos que os valores imaginários de  $Z_{ii}$  e  $Z_{ij}$  calculados tanto para MP quanto para QT coincidem em toda faixa de frequência analisada. O erro relativo para verificação da precisão do modelo é apresentado na fig. 4.5 e é calculado

pela expressão,

$$er_m(\%) = \frac{|\Im(Z_{QT}) - \Im(Z_{MP})|}{|\Im(Z_{QT})|} \times 100 \quad (4.23)$$

onde verificamos que o maior erro percentual é da ordem de  $10^{-7}$  % para a indutância mútua entre as fases 1-3. Apresentando um erro desprezível quando comparado com a referência quase-TEM.

Na verificação do comportamento do modelo proposto para o cálculo de  $\mathbf{Y}$ , realizamos o mesmo procedimento anterior, sendo que na fig. 4.6 avaliamos o comportamento das condutâncias própria e mútuas, com erros da ordem de  $10^4$  % para as condutâncias mútuas a partir de 12 MHz. Desta forma o modelo proposto (MP) é limitado a partir do valor de frequência apontado, sendo que este valor pode variar de acordo com a morfologia da rede. Isto ocorre, pois diferente da aproximação de  $\mathbf{Z}$ , desenvolvida através de uma expressão de forma fechada, em  $\mathbf{Y}$  adotamos hipóteses que não são válidas para altos valores de frequência.

Nas figs. 4.7 e 4.8 são comparados os valores das capacitâncias próprias e mútuas, respectivamente. Verificamos que os valores imaginários de  $Y_{ii}$  e  $Y_{ij}$  calculados tanto para MP quanto para QT coincidem para valores de frequência de até 17 MHz, de onde passam a apresentar erros da ordem de  $10^4$ %.

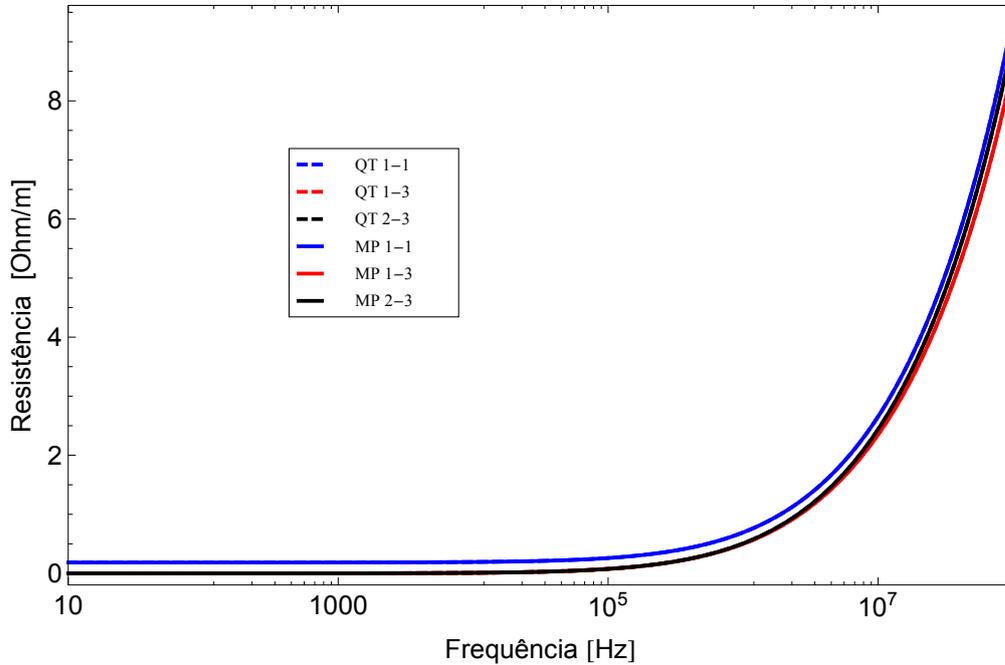


Figura 4.1: Resistências própria e mútuas

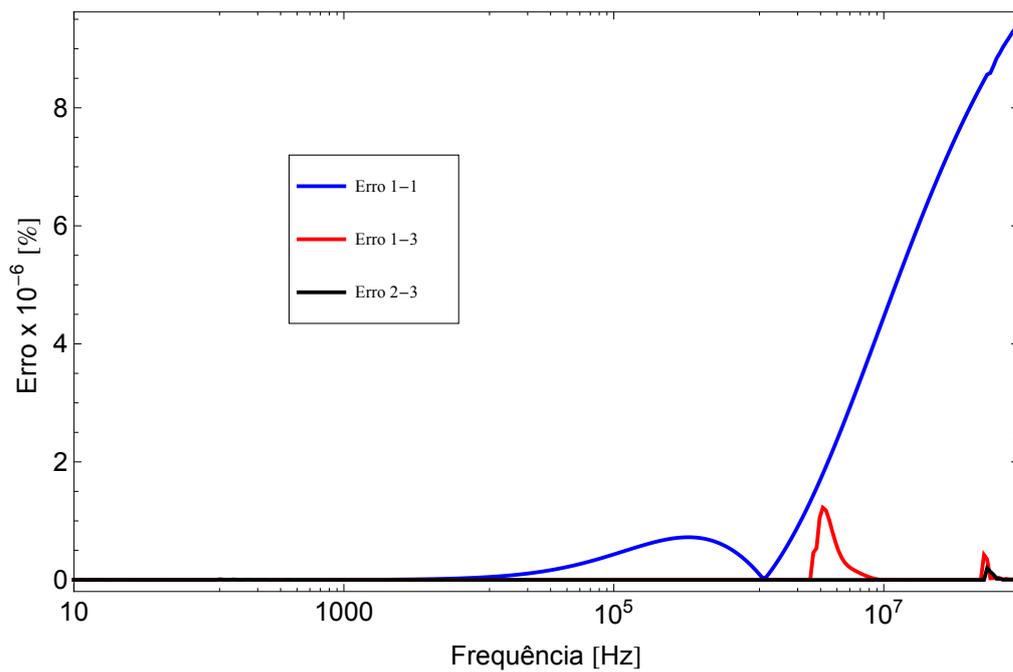


Figura 4.2: Erro relativo no cálculo das resistências própria e mútuas

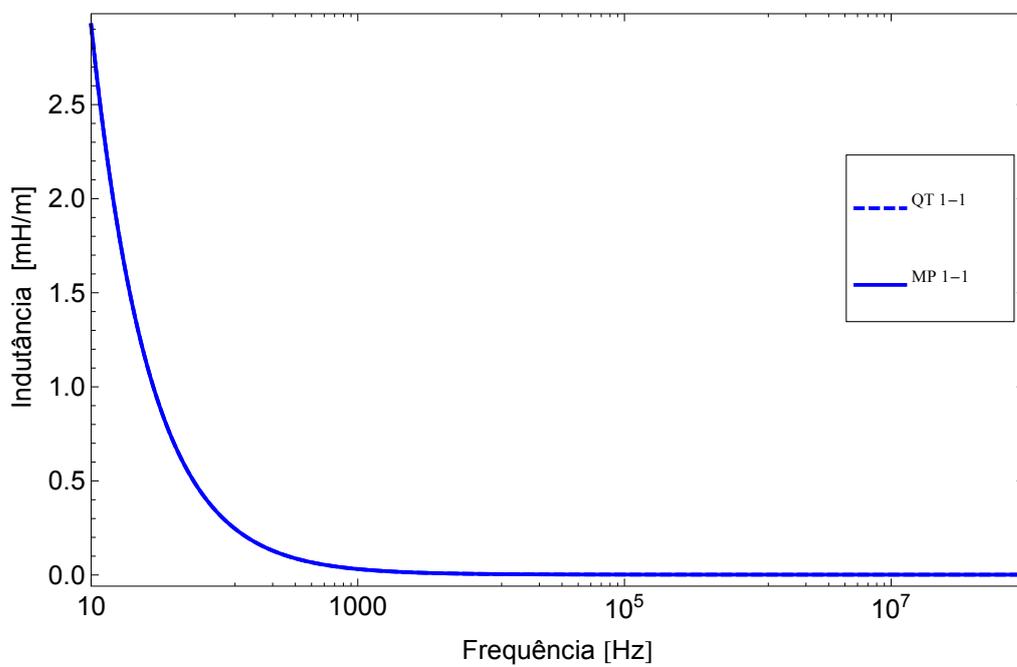


Figura 4.3: Indutâncias próprias

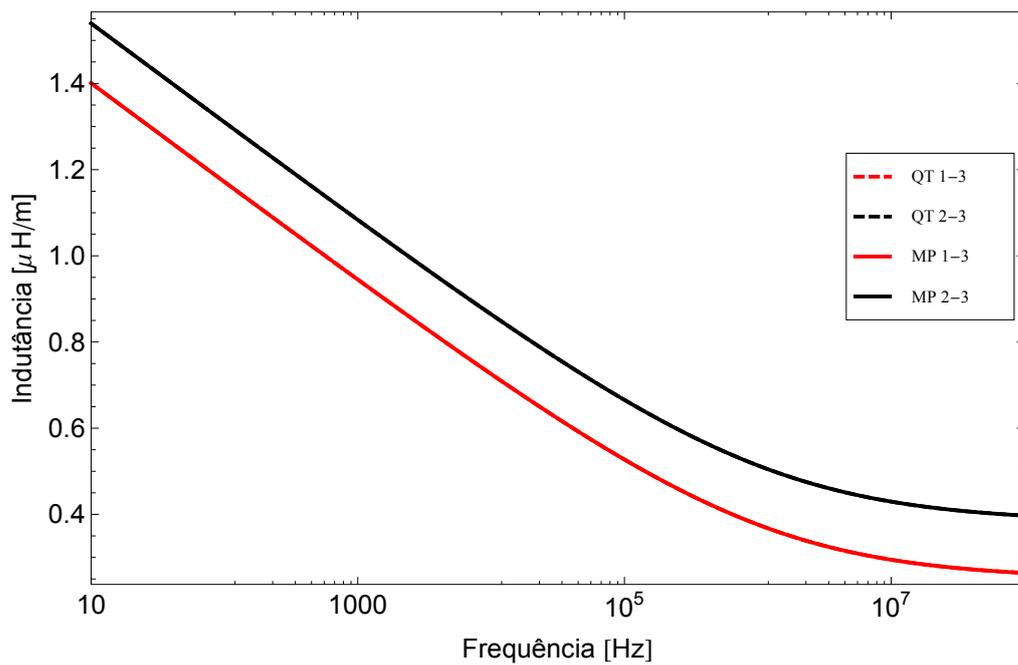


Figura 4.4: Indutâncias mútuas

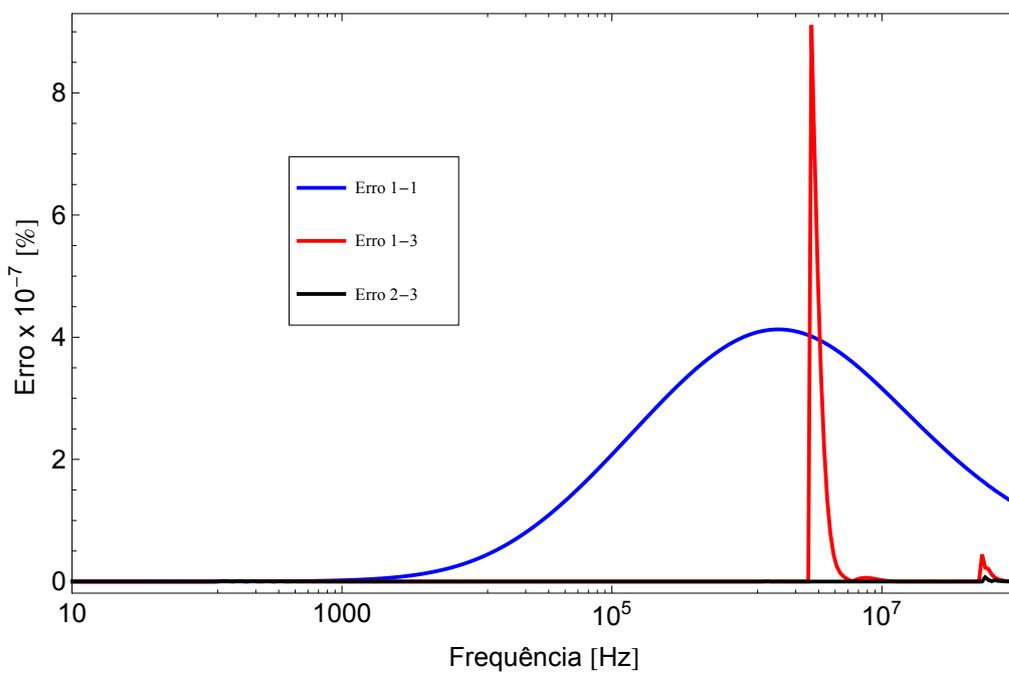


Figura 4.5: Erro relativo no cálculo das indutâncias própria e mútuas

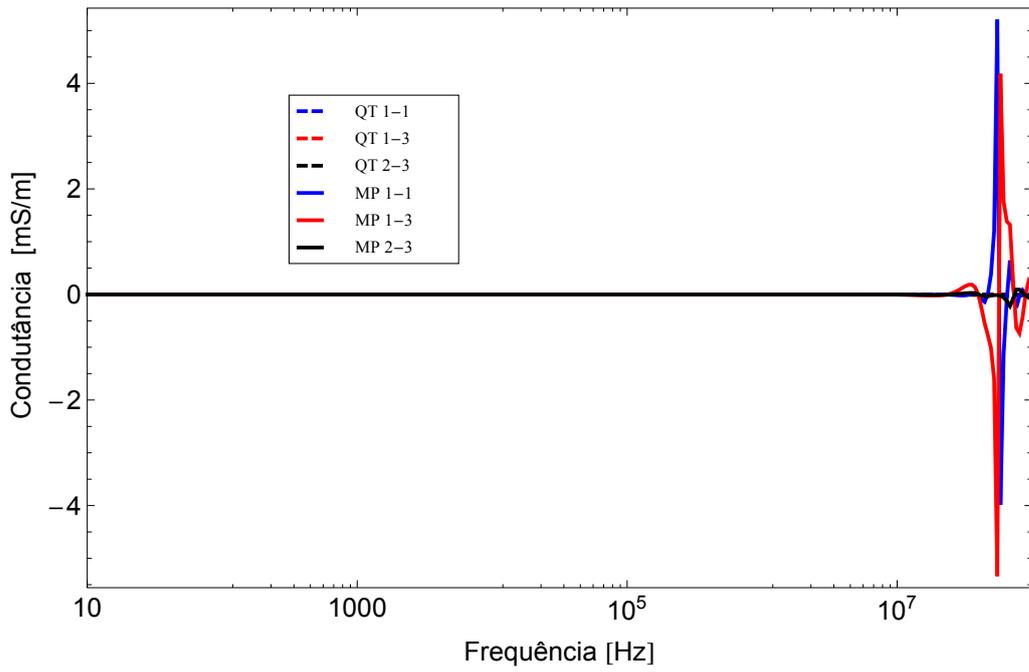


Figura 4.6: Condutância

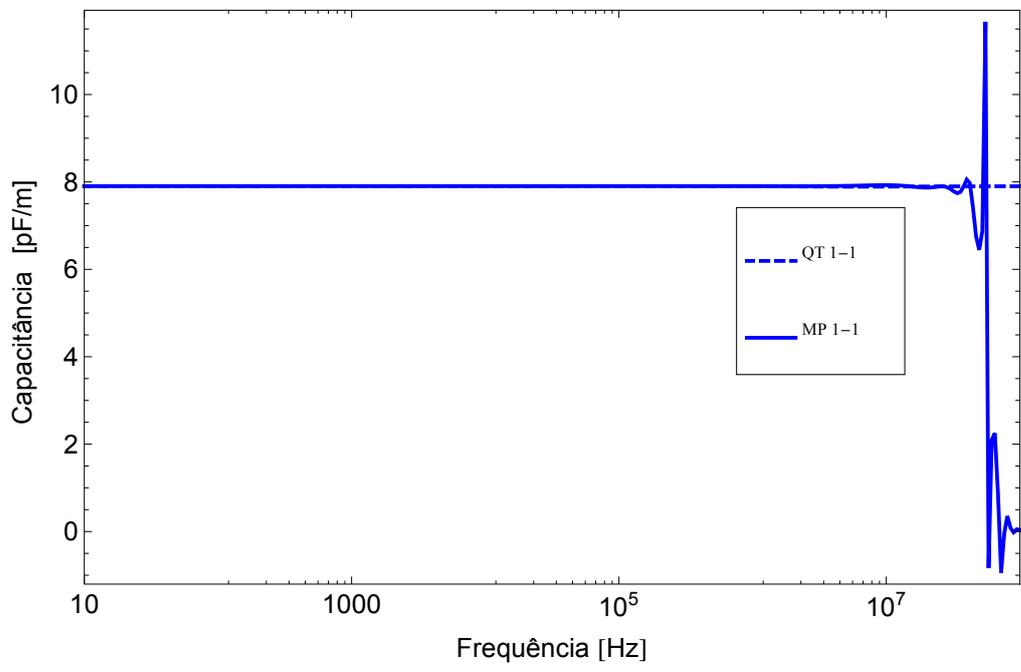


Figura 4.7: Capacitância própria

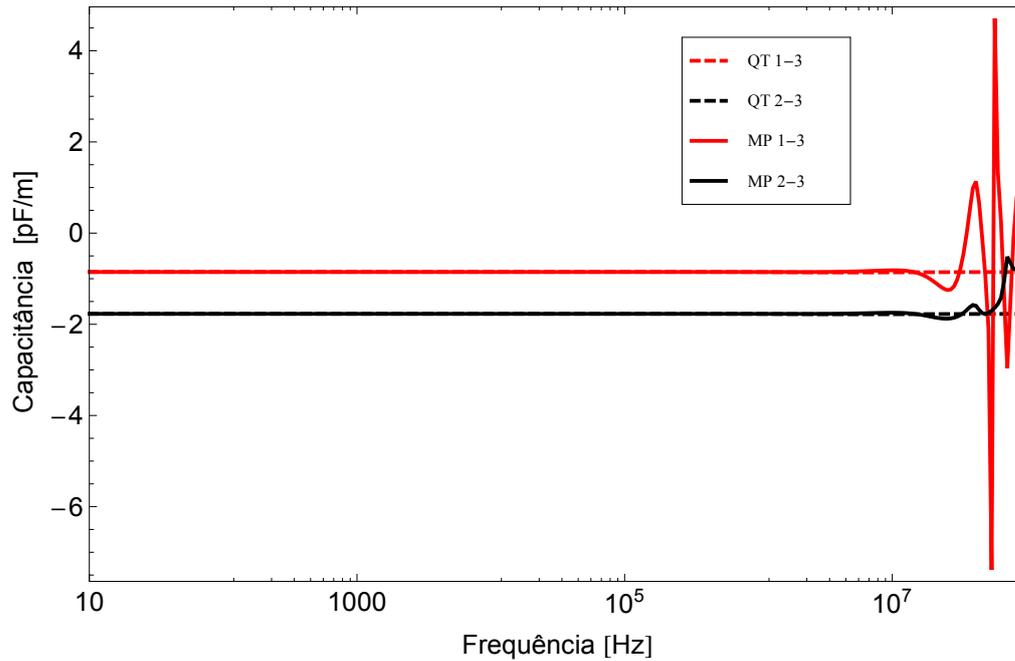


Figura 4.8: Capacitâncias mútuas

## 4.5 Avaliação da estabilidade e resposta temporal em linhas trifásicas

### 4.5.1 Análise da Estabilidade numérica

Para o sistema descrito na seção 4.4, referente a configuração apresentada na fig. 2.6, na avaliação da estabilidade numérica, foram verificados os valores mínimos da parte real dos autovalores de  $\mathbf{Y}_n$  para uma faixa de frequência compreendida entre 100 kHz à 100 MHz, sendo estes valores calculados por oito metodologias diferentes e apresentados na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Definições de parâmetros por unidade de comprimento (pul)

Modelo	Menor $\text{Re}(\lambda)$	f (MHz) de violação
QT	$1,28587 \cdot 10^{-6}$	Nenhuma
$MI_1$	-0,267909	2,09800
$MI_2$	-0,290400	0,89779
MP	-0,29749	17,6804
MP-QT	$1,28587 \cdot 10^{-6}$	Nenhuma
MP-DP2	-0,245553	0,897795
MP-DP3	-0,245553	0,897795
MP-T1	-0,296143	17,6804

As figs. 4.9 à 4.14 apresentam o comportamento dos autovalores de  $\mathbf{Y}_n$  de algumas das metodologias apresentadas na tabela 4.1. Sendo, QT a metodologia quase-TEM que utiliza as integrais infinitas de Carson e Wise [1, 18, 19, 22],  $MI_1$  o método das imagens de [12],  $MI_2$  o método das imagens de [13], MP a metodologia que utiliza as aproximações propostas na seção 4.3 para as integrais infinitas de Carson e Wise, MP-QT a metodologia que utiliza a aproximação proposta da integral de Carson e a integral infinita de Wise, MP-DP2 a metodologia que utiliza a aproximação proposta da integral de Carson e em  $\mathbf{Y}$  a extensão para sistemas trifásicos do método das imagens para definição de diferença de potencial, MP-DP3 a metodologia que utiliza a aproximação proposta da integral de Carson e em  $\mathbf{Y}$  a extensão para sistemas trifásicos do método das imagens para definição de tensão e MP-T1 a metodologia que utiliza a aproximação proposta da integral de Carson e em  $\mathbf{Y}$  a aproximação proposta para integral infinita de T1, apresentada na subseção 4.3.2. Sendo  $MI_2$  uma extensão do trabalho de [13] para sistemas trifásicos, não apresentado anteriormente na literatura técnica.

Na fig. 4.9 observamos que o método quase-TEM (QT) não viola passividade para toda faixa de frequência. O menor valor da parte real do autovalor de  $\mathbf{Y}_n$  é positivo e igual a  $1,28587 \mu S$  para uma frequência de 100 kHz.

As metodologias  $MI_1$  e  $MI_2$  foram analisadas para o mesmo sistema na seção 2.4, onde as violações de passividade foram visualizadas respectivamente nas figs. 2.7 [12] e 2.8 [13]. Na tabela 4.1 são apresentadas as maiores violações, porém, o método  $MI_1$ , já apresenta problemas de estabilidade para valores a partir de 100 kHz, e método  $MI_2$ , viola a passividade a partir de 492 kHz.

A metodologia proposta, que utiliza a definição do potencial escalar para cálculo de p.u.l., apresenta os maiores valores de violação em 17,68 MHz, fig. 4.10, sendo o primeiro valor de violação ocorrendo apenas em 13,71 MHz. Estes valores estão bem acima da região onde ocorrem os principais fenômenos transitórios, o que justifica a viabilidade da aproximação proposta. Porém, tendo em vista que na simplificação de  $\mathbf{Y}$  verificamos elevadas imprecisões em frequências a partir de 13 MHz para as condutâncias mútuas, utilizamos a metodologia MP-QT para verificar a validade da simplificação da integral infinita de Carson (QT). Verificamos na fig. 4.11 que a metodologia MP-QT apresentou-se estável para toda faixa de frequência tendo um comportamento similar ao de QT, com menor valor da parte real do autovalor de  $\mathbf{Y}_n$  igual a  $1,28587 \mu S$  para uma frequência de 100 kHz.

As metodologias MP-DP2 e MP-DP3, que utilizam as definições de diferença de potencial e tensão, respectivamente, violaram a passividade em em torno de 450 kHz, figs. 4.12 e 4.13. O menor valor de violação de ambos os métodos é de  $-0,245553 S$  e ocorrem em uma frequência de 898 kHz.

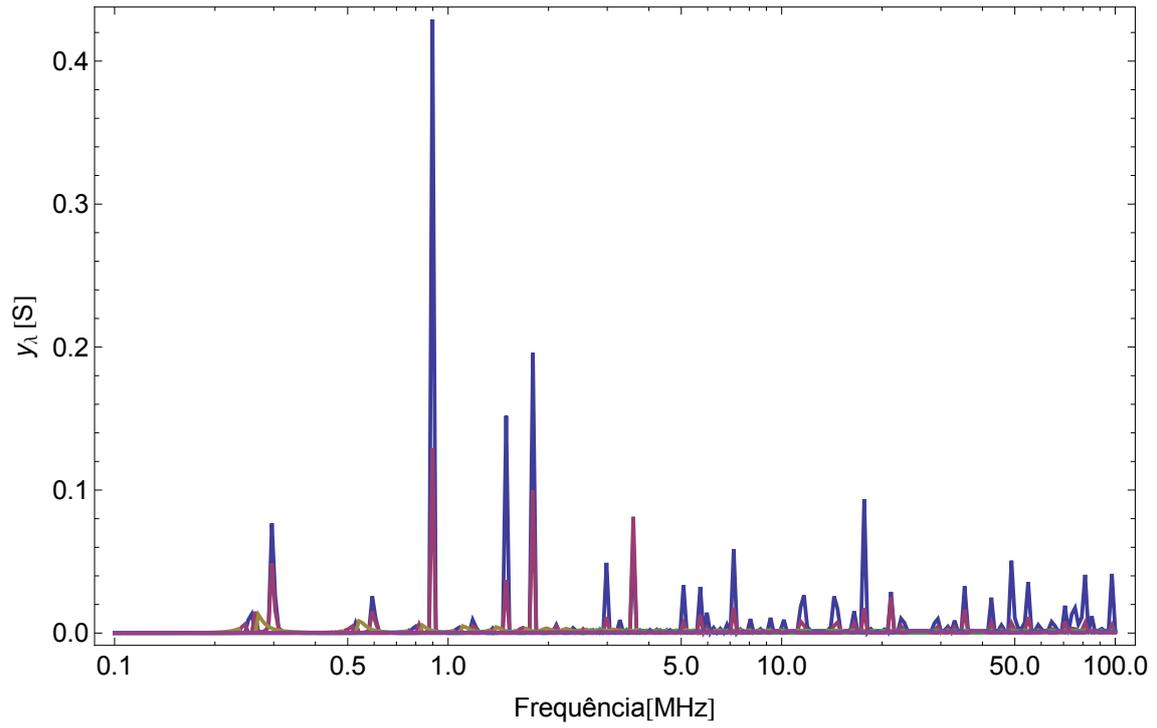


Figura 4.9: Análise da estabilidade em linha trifásica - QT

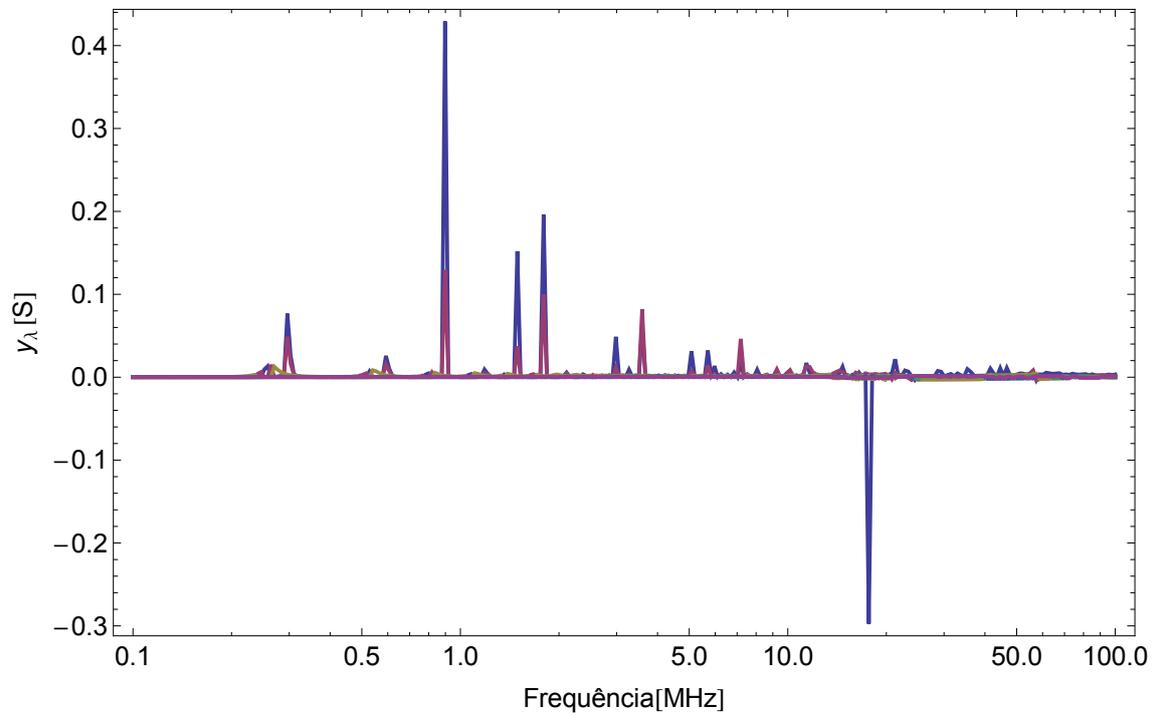


Figura 4.10: Análise da estabilidade em linha trifásica - MP

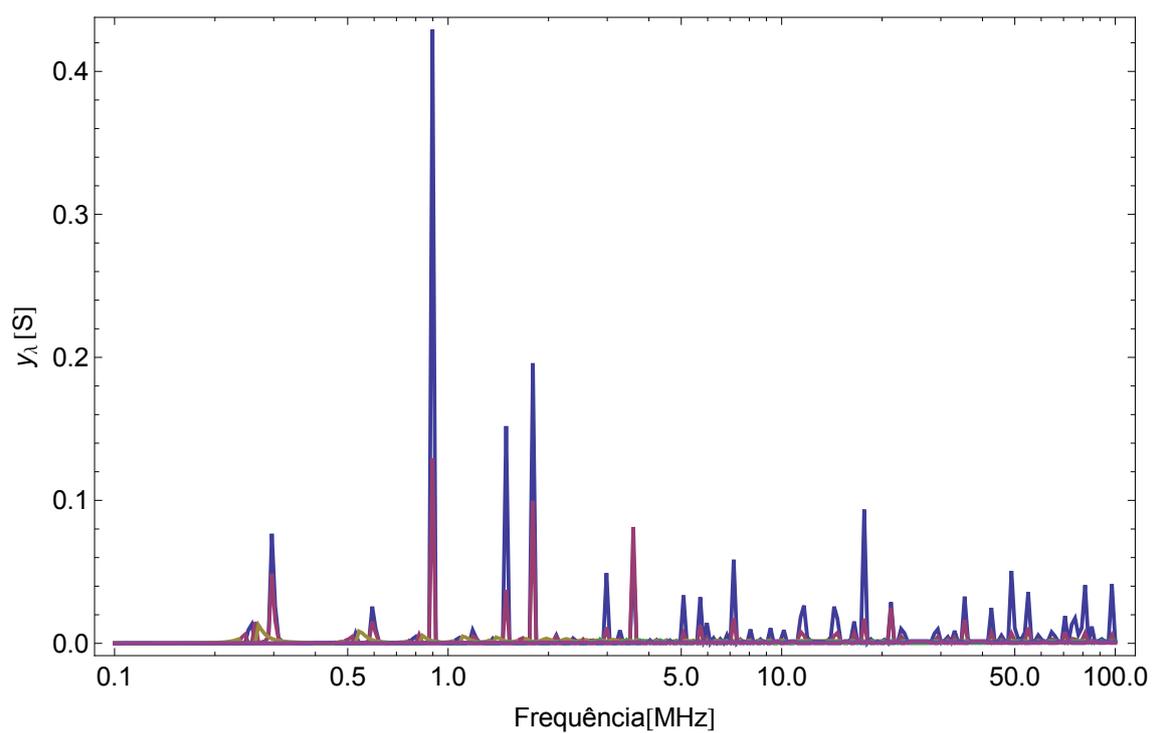


Figura 4.11: Análise da estabilidade em linha trifásica - MP-QT

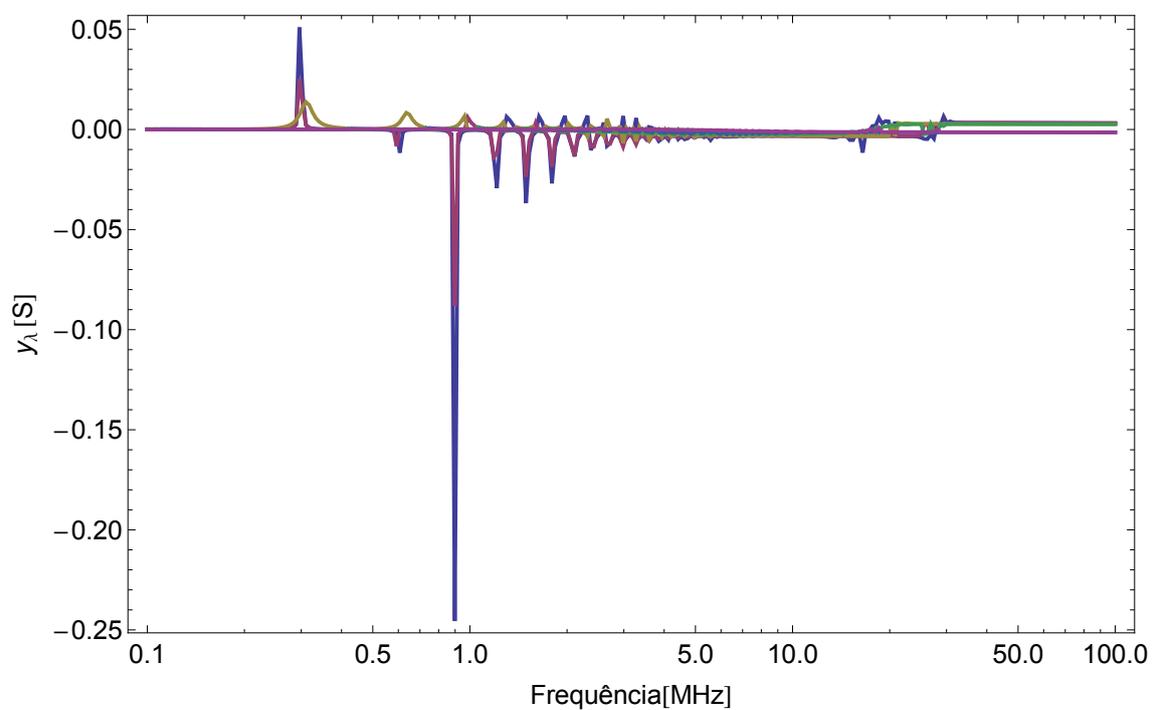


Figura 4.12: Análise da estabilidade em linha trifásica - MP-DP2

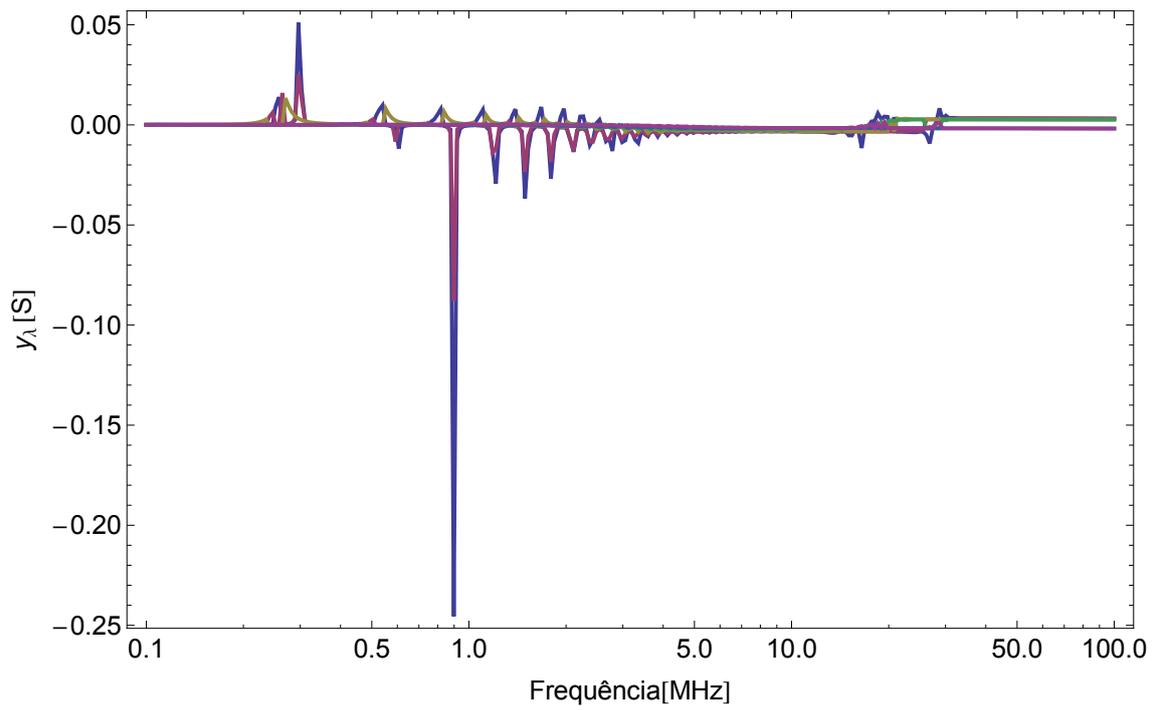


Figura 4.13: Análise da estabilidade em linha trifásica - MP-DP3

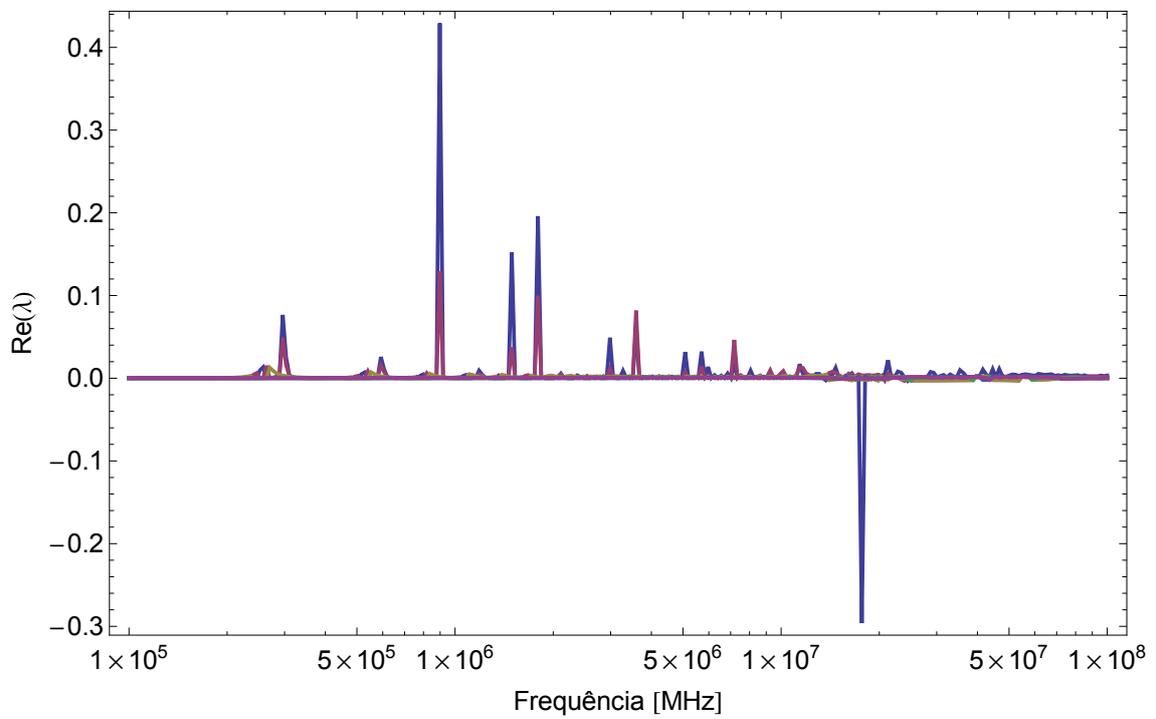


Figura 4.14: Análise da estabilidade em linha trifásica - Método proposto DP4

É importante observar que a metodologia utilizada na simplificação de  $\overline{T}_1$  apresentou comportamento similar ao da metodologia proposta, isso faz com que a nova simplificação de  $\overline{T}_1$  seja apresentada como uma alternativa de maior confiabilidade que a proposta em [13]. Desta forma, a metodologia MP-T1 é uma aplicação da metodologia proposta para definição de diferença de potencial, apresentando os mesmos resultados, fig. 4.14<sup>1</sup>.

## 4.5.2 Resposta no domínio do tempo

Assim como na seção 3.4, realizamos nesta sub-seção uma verificação do impacto da instabilidade no domínio do tempo. Avaliamos o sistema trifásico, onde injetamos um sinal senoidal no terminal emissor da fase A e verificamos as resposta no terminal receptor (R1) da fase B para valores de frequência em pontos de violação e de não violação da passividade. Os terminais emissores B e C foram aterrados e todos os terminais receptores ficaram em aberto. A configuração da rede é apresentada na fig. 4.15. A modelagem da linha utiliza o modelo proposto para  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{Y}$ , pois o mesmo apresenta instabilidade a partir de 17 MHz, enquanto que os modelos QT e MP-QT não apresentam instabilidade para toda banda de frequência analisada, e os demais modelos apresentam instabilidade para frequências inferiores ao MP, inclusive os apresentados em [12, 13].

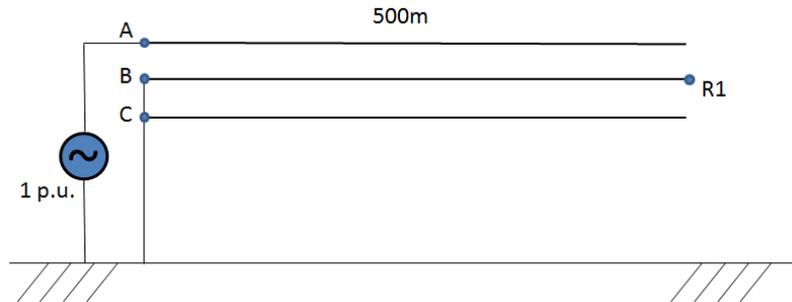


Figura 4.15: Sistema trifásico alimentado por uma fonte alternada de 1 p.u.

Na fig.4.16 temos a resposta no terminal da fase B em regime permanente para um sinal de frequência igual a 3 MHz, sendo esta uma frequência de não violação da passividade. Na fig.4.17 temos a resposta no terminal da fase B para um sinal de frequência igual a 17,68 MHz, sendo esta uma frequência onde ocorre a maior violação da passividade. Notamos que para o ponto de instabilidade, a resposta da rede apresenta um comportamento inesperado. Com essas observações verificamos que o modelo apresenta um bom desempenho, em especial para a faixa de frequências onde ocorrem os principais fenômenos transitórios (até 2 MHz).

<sup>1</sup>Cabe ressaltar que os valores das frequências de violação podem variar de acordo com a morfologia da rede.

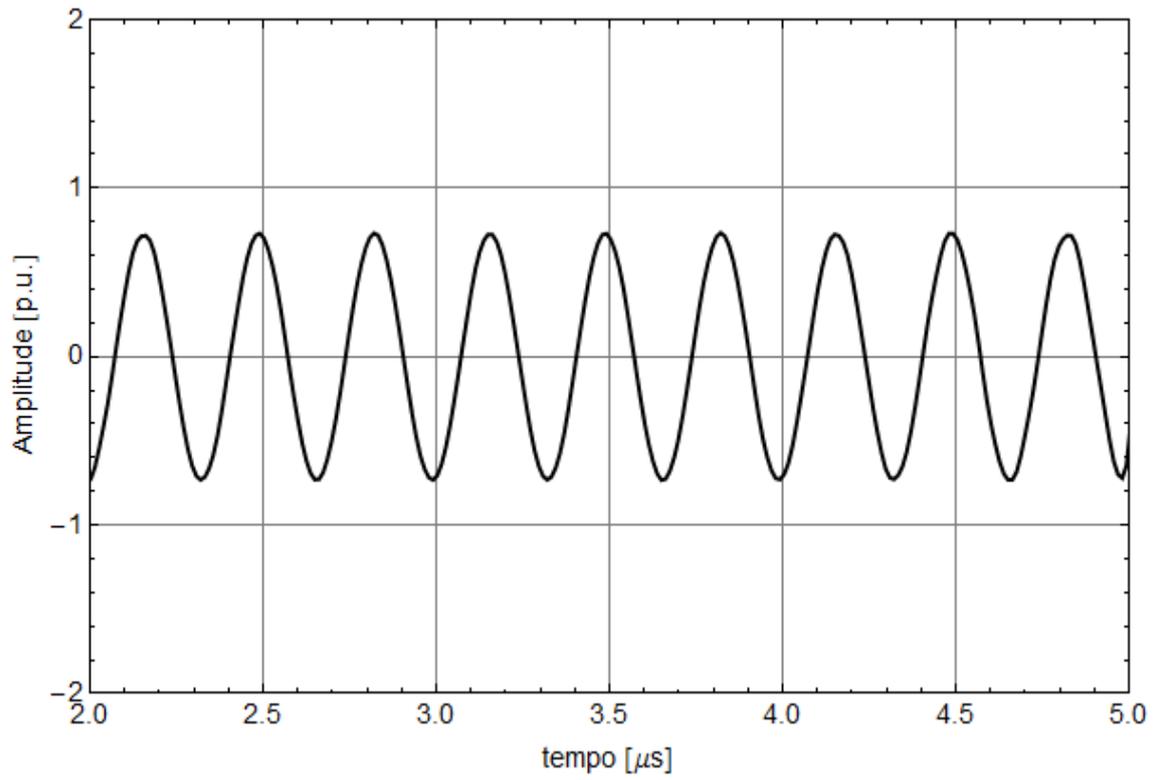


Figura 4.16: Resposta no terminal da fase B - Modelo MP,  $f=3$  MHz

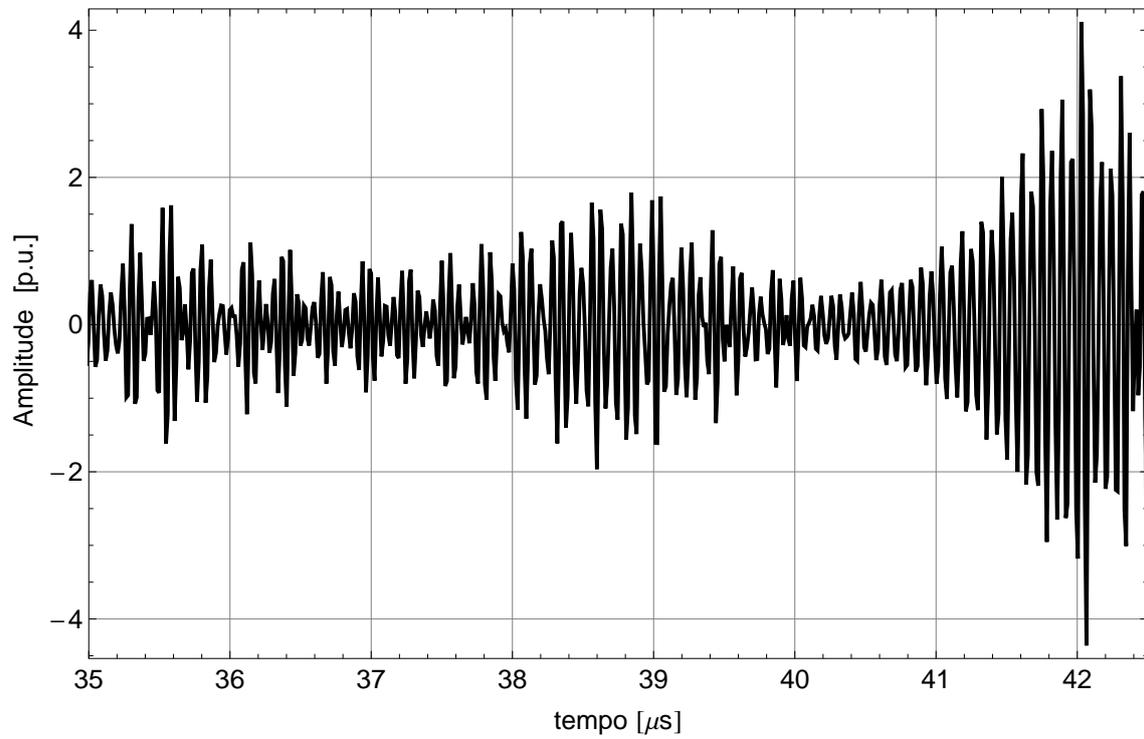


Figura 4.17: Resposta no terminal da fase B - Modelo MP,  $f=17$  MHz

## 4.6 Discussão dos resultados

Neste capítulo foi apresentado um modelo proposto para aproximação das integrais de Sommerfeld  $\overline{S}_1$  e  $\overline{S}_2$ . Foi verificado que o modelo aproximado para o cálculo de parâmetros longitudinais apresentou um bom desempenho para toda faixa de frequência estudada apresentando erros relativos da ordem de  $10^{-6}$  %. Os valores das resistências e indutâncias do modelo proposto apresentaram comportamento idêntico ao do modelo quase-TEM, tanto para as componentes próprias quanto para as mútuas, fazendo com que o modelo proposto para o cálculo de parâmetros longitudinais apresente-se como uma alternativa viável para linhas aéreas de transmissão. Isso ocorre pois a metodologia foi desenvolvida analiticamente sem manipulação do integrando por meio de hipóteses simplificativas.

Para o cálculo dos parâmetros transversais, o modelo apresentou um bom comportamento para valores de frequência de até 13 MHz. Esta discrepância, na aproximação de  $\overline{S}_2$ , ocorre por causa das hipóteses adotadas para a simplificação do integrando, tais como  $k_2 \gg k_1$ ,  $k_1 \rightarrow \gamma$  e  $k_2 \gg \lambda$  no numerador do integrando.

Nas figs. 4.18 e 4.19 são apresentados os comportamentos das partes real e imaginária da aproximação de  $\overline{S}_1$ , respectivamente. Sendo analisadas as suas componentes próprias e mútuas.

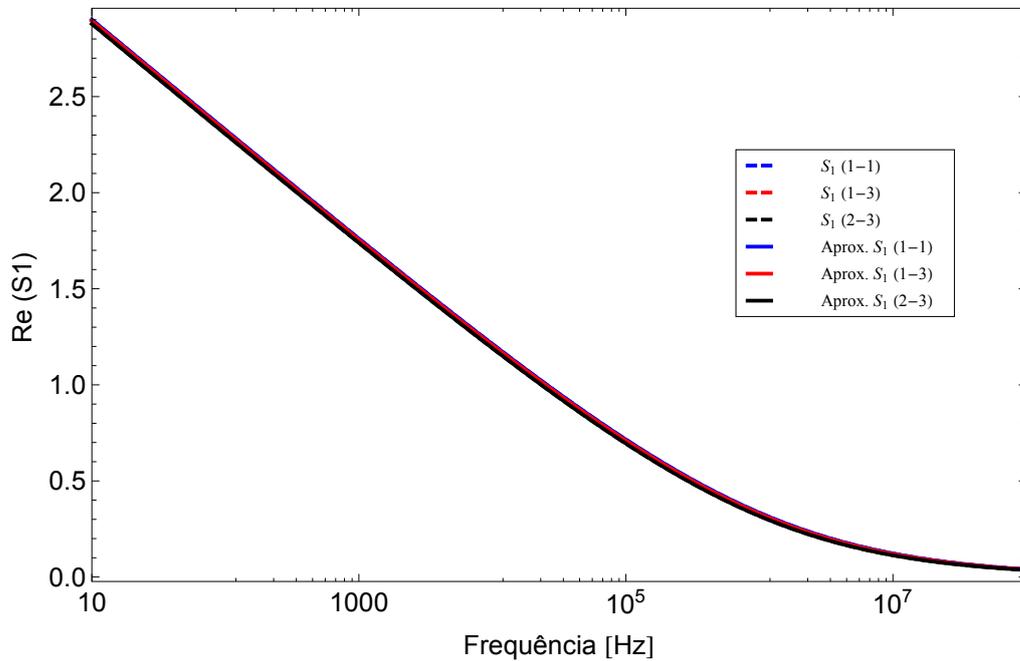


Figura 4.18: Comparação da parte real de  $\tilde{S}_1$

Nas figs. 4.20 e 4.21 são apresentados os comportamentos das partes real e imaginária da aproximação de  $\overline{S}_2$ , respectivamente. Sendo analisadas as suas compo-

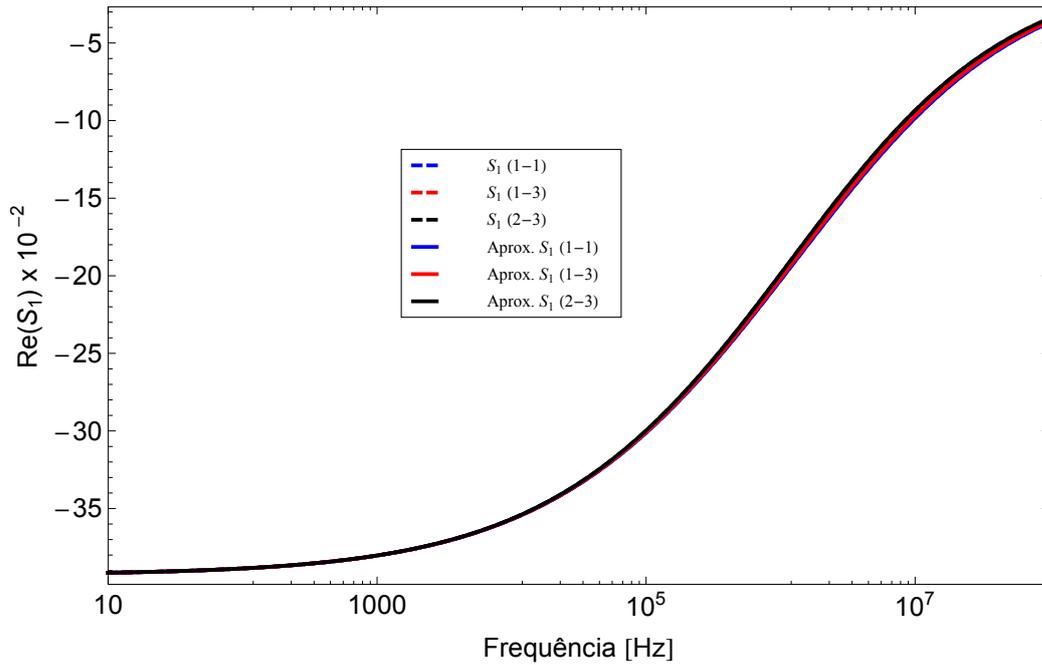


Figura 4.19: Comparação da parte imaginária de  $\tilde{S}_1$

nentes próprias e mútuas. Onde para está última é verificada uma discrepância para frequências a partir de 13 MHz, o que mostra a limitação do modelo a partir deste ponto.

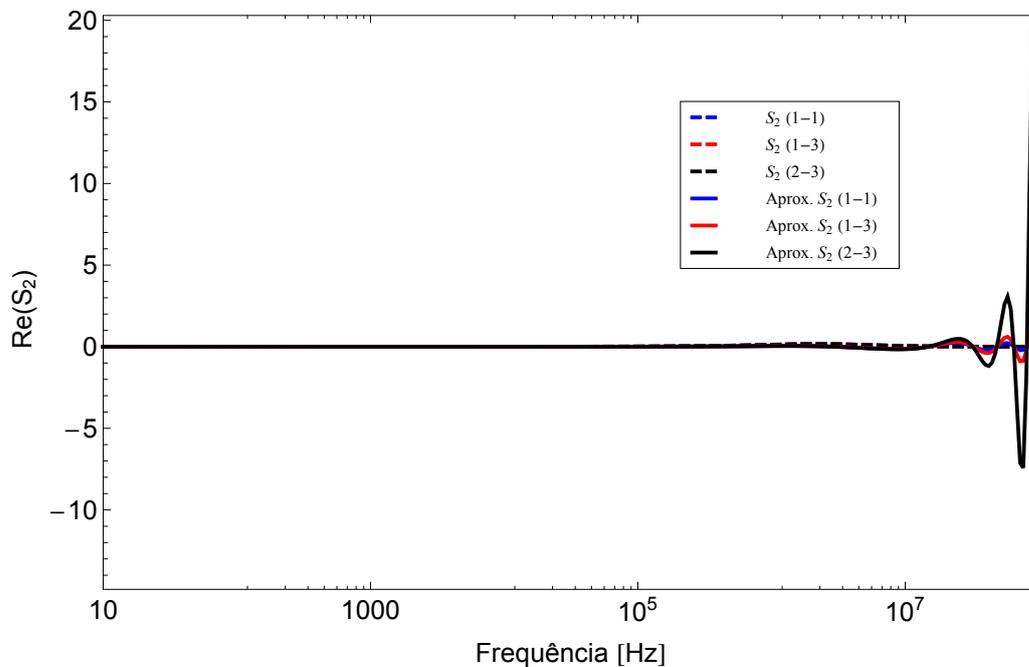


Figura 4.20: Comparação da parte real de  $\tilde{S}_2$

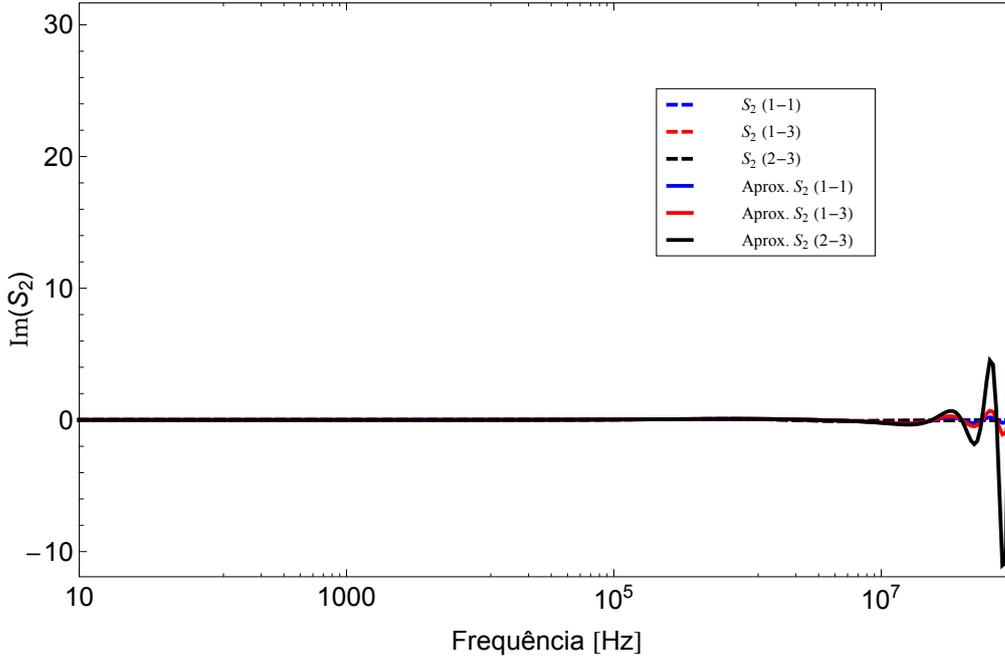


Figura 4.21: Comparação da parte imaginária de  $\tilde{S}_2$

De uma forma geral, para os valores de frequência onde ocorrem os principais fenômenos transitórios (até 2 MHz), foi observado que a metodologia proposta apresentou um bom desempenho quando comparada com a metodologia quase-TEM, tendo como vantagem a eliminação das integrais infinitas e um tempo computacional até 6 vezes menor. Para o cálculo de parâmetros transversais o modelo é viável, porém com limitações de aplicação.

Cabe ressaltar que para definição de diferença de potencial, a simplificação de  $\overline{T}_1$  apresentou excelente desempenho coincidindo com a definição de potencial escalar da metodologia proposta, violando a passividade a partir de 13 MHz. As simplificações de  $\overline{S}_1$ ,  $\overline{S}_2$  e  $\overline{T}_1$  apresentaram melhor precisão, quando comparada com aquelas encontradas na literatura técnica [12, 13].

Observamos que o método QT não viola passividade para toda faixa de frequência, enquanto que a metodologia propostas apresenta violação a partir de 13 MHz. A violação do modelo proposto ocorre devido a instabilidade no cálculo de parâmetros transversais a partir deste valor de frequência, sendo esta conclusão verificada no método MP-QT. As combinações entre a metodologia de cálculo de parâmetros longitudinais proposta e as formulações de cálculo de parâmetros transversais para definição de diferença de potencial e tensão, denominadas respectivamente como, MP-DP2 e MP-DP3, violaram a passividade em torno de 500 kHz.

# Capítulo 5

## Conclusão

### 5.1 Conclusões Gerais

Neste trabalho, foi verificado que método das imagens apresentou instabilidade em função da configuração da rede e das características do meio. Em uma linha de transmissão trifásica compacta de 500 kV, o método  $MI_1$  apresentou violação da passividade para valores muito próximos ao da frequência de operação e para valores de frequência da ordem de centenas de kHz, pontos onde ocorrem os principais fenômenos transitórios. Para o mesmo sistema, o método  $MI_2$  apresentou violação para valores acima de 2 MHz, porém para a linha de transmissão com condutores singelos, apresentou instabilidade para frequências a partir de 300 kHz. Verificamos que ambos os modelos não retratam a realidade para representação da rede em frequências da ordem de kHz.

Para verificar este problema, realizamos uma investigação relacionada com o desempenho da iteração numérica para solução da equação modal  $M$ , em modo de onda completa, de um sistema monofásico sobre uma interface ar-solo com perdas, e apresentamos alguns detalhes de como melhorar a taxa de convergência e o tempo de processamento para obtenção da raiz de  $M$ . Também apresentamos dois modelos alternativos simplificados que se comportam como onda completa durante a maior parte da larga faixa de frequência estudada, mas com um aumento apreciável no tempo computacional de cálculo.

Foram analisados alguns modelos para linhas aéreas de transmissão utilizados na obtenção da constante de propagação através da equação modal. Os modelos tratados como referência foram aqueles que utilizaram o modo de onda completa, M1 à M4. A utilização de um ponto de partida com base em uma abordagem pelo método das imagens pareceu ser o método mais adequado. Embora o método quase-TEM esteja mais próximo da solução real, existe a desvantagem da necessidade da avaliação de integrais infinitas no passo de frequência. O modo quase-TEM apresentou

comportamento similar em toda faixa de frequência quando comparado com o modo de onda completa, apresentando uma leve divergência na faixa compreendida entre 0,7 a 2 MHz. Os modelos apresentam comportamento próximos ao da literatura técnica.

No cálculo de parâmetros unitários foram apresentadas três diferentes definições de “tensão” para o cálculo de parâmetros. Após inúmeras simulações, foi constatado um erro de sinal na aproximação, no método das imagens, de uma das integrais infinitas.

No passado, foram analisados os chamados modelos de onda completa em relação à presença ou não de condutâncias negativas para uma dada frequência. No entanto, isto não é suficiente para assegurar ou não se um modelo de linha é estável. Assim, nos investigamos o impacto na estabilidade numérica das definições da linha por unidade de comprimento. Isto pode ser realizado pela investigação da presença ou não de autovalores da matriz de admitância nodal com parte real negativa. Observou-se que, para o modelo de onda completa e modelos quase-FW aqui proposto, independentemente da definição de parâmetro por unidade de comprimento, o modelo da linha é sempre estável.

Na análise da estabilidade de uma linha monofásica foi constatado que para a definição de tensão ( $Z_3$  e  $Y_3$ ) utilizando o método das imagens, houve violação da passividade com aumento da altura e raio dos condutores, apresentando parte real dos autovalores de  $Y_n$  negativa em alguns casos. Para os pontos de violação da passividade, foi avaliado o impacto da instabilidade no domínio do tempo em testes de energização simples e um comportamento inesperado foi apresentado. Observou-se que a origem da instabilidade está diretamente relacionada ao comportamento de  $Y_c$  e  $H$ .

$$y_{\lambda 1} = \Re \left( Y_c \frac{1 + H}{1 - H} \right) \quad y_{\lambda 2} = \Re \left( Y_c \frac{1 - H}{1 + H} \right)$$

Para linhas de transmissão composta por  $n$ -condutores, foi proposto um modelo para o cálculo de parâmetros longitudinais e transversais e avaliada a sua estabilidade numérica. De uma forma geral, para os valores de frequência onde ocorrem os principais fenômenos transitórios (até 2 MHz), foi observado que a metodologia proposta apresentou um bom desempenho quando comparada com a metodologia quase-TEM, tendo como vantagem a eliminação das integrais infinitas e um tempo computacional até 6 vezes menor. Para o cálculo de parâmetros transversais o modelo é viável, porém com limitações de aplicação.

Foi verificado que o modelo aproximado para o cálculo de parâmetros longitudinais apresentou um bom desempenho para toda faixa de frequência estudada apresentando erros relativos da ordem de  $10^{-6}$  %. Os valores das resistências e in-

dutâncias do modelo proposto apresentaram comportamento idêntico ao do modelo quase-TEM tanto para as componentes próprias quanto para as mútuas, fazendo com que o modelo proposto para o cálculo de parâmetros longitudinais apresenta-se como uma alternativa viável para linhas aéreas de transmissão. Isso ocorre pois a metodologia foi desenvolvida analiticamente sem simplificações do integrando por meio de hipóteses simplificativas. Para o cálculo dos parâmetros transversais, o modelo apresentou um bom comportamento para valores de frequência de até 12 MHz. O modelo utilizado no cálculo de parâmetros transversais apresenta uma limitação para altas frequências que ocorre por causa das simplificações adotadas para o integrando.

Cabe ressaltar que para definição de diferença de potencial, a simplificação de  $\overline{T}_1$  apresentou excelente desempenho coincidindo com a definição de potencial escalar da metodologia proposta, violando a passividade a partir de 13 MHz. As simplificações de  $\overline{S}_1$ ,  $\overline{S}_2$  e  $\overline{T}_1$  apresentaram melhor precisão quando comparada com aquelas encontradas na literatura técnica.

Com o objetivo de verificar o desempenho e estabilidade do modelo, foram realizadas algumas comparações com modelos consagrados na literatura técnica. Observamos que o método QT não viola passividade para toda faixa de frequência, enquanto que a metodologia proposta apresenta violação a partir de 13 MHz. A violação do modelo proposto ocorre devido a instabilidade no cálculo de parâmetros transversais a partir deste valor de frequência, sendo esta conclusão verificada no método MP-QT. As combinações entre a metodologia de cálculo de parâmetros longitudinais proposta e as formulações de cálculo de parâmetros transversais para definição de diferença de potencial e tensão, denominadas respectivamente como, MP-DP2 e MP-DP3, violaram a passividade em torno de 500 kHz.

## 5.2 Trabalhos Futuros

Neste trabalho foram feitos alguns estudos para o cálculo de constante de propagação em linhas aéreas de transmissão. No cálculo de parâmetros transversais, o modelo proposto apresentou limitações devido as simplificações do integrando adotadas, enquanto que o modelo proposto para o cálculo de parâmetros longitudinais apresentou desempenho satisfatório para toda faixa de frequência. No cálculo da constante de propagação, para o método de onda completa, foram realizadas iterações numéricas para solução da equação modal devido a dependência de  $\gamma$  e de integrais infinitas do modelo.

Em virtude do exposto acima, acreditamos que seja importante para uma maior contribuição da tese de doutorado, tendo em vista algumas necessidades observadas ao longo do curso, verificar os seguintes tópicos:

- Desenvolver uma expressão analítica para  $Z$  e  $Y$ , calculados pelo modo de onda completa, de forma a obter resultados precisos independentes da constante de propagação e das integrais infinitas de difícil solução;
- Refinar e implementar as formulações aproximadas da admitância em derivação no domínio de frequência, tendo em vista que o modelo proposto é limitado;
- Desenvolver uma expressão analítica para  $Z$  e  $Y$ , calculados pelo modo de onda completa, para sistemas de cabos enterrados e avaliar a estabilidade numérica de um modelo, e o impacto deste modelo no estudo de transitórios no domínio do tempo;
- Desenvolver uma expressão analítica simplificação de  $\overline{T}_2$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] CARSON, J. R. “Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return”, *Bell Syst. Technical Journal*, v. 5, pp. 539–554, 1926.
- [2] POLLACZEK, F. “Über das Feld einer unendlich langen wechsel stromdurchflossenen Einfachleitung”, *Elektrische Nachrichten Technik*, v. 3, pp. 339–360, 1926.
- [3] LIMA, A. C. S., PORTELA, C. “Inclusion of Frequency-Dependent Soil Parameters in Transmission-Line Modeling”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 22, n. 1, pp. 481–491, 2007.
- [4] SALARI FILHO, J., PORTELA, C. “A Methodology for Electromagnetic Transients Calculation –An Application for the Calculation of Lightning Propagation in Transmission Lines”, *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 22, n. 01, pp. 527–536, Jan. 2007.
- [5] VISACRO, S., ALIPIO, R. “Frequency Dependence of Soil Parameters: Experimental Results, Predicting Formula and Influence on the Lightning Response of Grounding Electrodes”, *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 27, n. 2, pp. 927–935, 2012. ISSN: 0885-8977. doi:10.1109/TPWRD.2011.2179070.
- [6] ALIPIO, R., VISACRO, S. “Frequency Dependence of Soil Parameters: Effect on the Lightning Response of Grounding Electrodes”, *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, v. 55, n. 1, pp. 132–139, 2013. ISSN: 0018-9375. doi:10.1109/TEMPC.2012.2210227.
- [7] KIKUCHI, H. “Wave Propagation Along an Infinite Wire Above Ground at High Frequencies”, *Eletrotech. J. Japan*, v. 2, pp. 73–78, 1956.
- [8] SUNDE, E. *Earth Conduction Effects in Transmission Line Systems*. New York, Van Nostrand, 1949.
- [9] WEDEPOHL, L. M., EFTHYMIADIS, A. “Wave propagation in transmission lines over lossy ground: a new, complete field solution”, *Proceedings of the*

*Institution of Electrical Engineers*, v. 125, n. 6, pp. 505–510, 1978. ISSN: 0020-3270. doi:10.1049/piee.1978.0123.

- [10] EFTHYMIADIS, A., WEDEPOHI, L. “Propagation characteristics of infinitely-long single-conductor lines by the complete field solution method”, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, v. 125, n. 6, pp. 511–517, 1978. ISSN: 0020-3270. doi:10.1049/piee.1978.0124.
- [11] WAIT, J. R. “Theory of wave propagation along a thin wire parallel to an interface”, *Radio Sci.*, v. 7, pp. 675–679, June 1972.
- [12] D’AMORE, M., SARTO, M. S. “Simulation Models of a Dissipative Transmission Line Above a Lossy Ground for a Wide-Frequency Range—Part II: Multiconductor Configuration”, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, v. 38, n. 2, pp. 139–149, May 1996.
- [13] PETTERSSON, P. “Propagation of waves on a wire above a lossy ground—different formulations with approximations”, *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 14, n. 3, pp. 1173–1180, 1999. ISSN: 0885-8977. doi:10.1109/61.772389.
- [14] WEDEPOHL, L. M., WILCOX, D. J. “Transient analysis of underground power-transmission system – System model and wave propagation characteristics”, *Proceedings of IEE*, v. 120, n. 2, pp. 253–260, 1973.
- [15] DERI, A., TEVAN, G., SEMLYEN, A., et al. “The complex ground return plane: A simplified model for homogeneous and multi-layer earth return”, *IEEE Trans. on PAS*, v. 100, n. 8, pp. 3686–3693, Aug 1981.
- [16] THEODOULIDIS, T. “Exact Solution of Pollaczek’s Integral for Evaluation of Earth-Return Impedance for Underground Conductors”, *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, v. 54, n. 4, pp. 806–814, 2012. ISSN: 0018-9375. doi:10.1109/TEMPC.2011.2181849.
- [17] LIMA, A. C. S., PORTELA, C. “Closed-form expressions for ground return impedances of overhead lines and underground cables”, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 38, n. 1, pp. 20–26, 2012. ISSN: 0142-0615. doi:10.1016/j.ijepes.2011.12.016.
- [18] WISE, W. H. “Effect of Ground Permeability on Ground Return Circuits”, *Bell Syst. Tech J.*, v. 3, n. 10, pp. 472–484, 1931.
- [19] CARSON, J. R. “Ground Return Impedance: Underground Wire with Earth Return”, *Bell System Technical Journal*, v. 8, n. 1, pp. 94–98, 1929.

- [20] OLSEN, R. G., YOUNG, J. L., CHANG, D. C. “Electromagnetic Wave Propagation on a Thin Wire Above Earth”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 48, n. 9, pp. 1413–1419, September 2000.
- [21] NODA, T., NAGAOKA, N., AMETANI, A. “Phase-domain modeling of frequency-dependent transmission lines by means of an ARMA model”, *IEEE Trans. on Power Delivery*, v. 11, n. 1, pp. 401–411, Jan 1996.
- [22] WISE, W. H. “Propagation of HF currents in ground return circuits”, *Proc. Inst. Elec. Eng. (London)*, v. 4, n. 22, pp. 522–527, 1934.
- [23] ARISMUNANDAR, A. “Capacitive Correction Factors for Transmission Lines to Include Finite Conductivity and Dielectric of the Earth”, *Proceedings of the IEEE Summer General Meeting and Nuclear Radiation Effects Conference*, pp. 436–455, 16-21 de Junho 1963. Toronto, Ont., Canadá.
- [24] D’AMORE, M., SARTO, M. “Simulation models of a dissipative transmission line above a lossy ground for a wide-frequency range. I. Single conductor configuration”, *Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions on*, v. 38, n. 2, pp. 127–138, 1996. ISSN: 0018-9375. doi:10.1109/15.494615.
- [25] D’AMORE, M., SARTO, M. S. “A New Formulation os Lossy Ground Return Parameters for Transient Analysis of Multiconductor Dissipative Lines”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 12, n. 1, pp. 303–314, January 1997.
- [26] GUSTAVSEN, B., SEMLYEN, A. “Enforcing Passivity for Admittance Matrices Approximated by Rational Functions”, *Power Engineering Review, IEEE*, v. 21, n. 2, pp. 97–104, 2001. ISSN: 0272-1724. doi:10.1109/MPER.2001.4311280.
- [27] STRATTON, J. A. *Electromagnetic Theory*. N.Y., McGraw-Hill Co., 1941.
- [28] LIMA, A. C. S. “Campos & Ondas — Notas de Aula”. COPPE/UFRJ, Março 2007. Apostila do curso COE761, Campos e Ondas.
- [29] ROCHA, P. E. D., LIMA, A., CARNEIRO JR., S. “Propagation Characteristics and Overvoltage Analysis on Unconventional Submarine Cables”. In: *IPST 2007 – International Power Systems Transients Conference*, Lyon, France, June 2007.
- [30] PORTELA, C. *Regimes Transitórios*. Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ–ELETROBRAS, 1983.

- [31] MANHÃES, R. S. T. *Formulação e Cálculo dos Parâmetros Elétricos de um Sistema de Cabos em Função da Frequência*. Dissertação de mestrado em engenharia elétrica, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, 1992.
- [32] SUNDE, E. D. *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*. New York, Dover, 1968.
- [33] PERZ, M. C., RAGHUVVEER, M. R. “Generalized derivation of fields and impedance correction factors of lossy transmission lines – Part I. Lossy conductors above lossless ground”, *IEEE Transactions on PAS*, v. PAS-93, pp. 1827–1831, 1974.
- [34] SILVESTER, P., FERRARI, R. *Finite Elements for Electrical Engineers*. U.K., Cambridge University Press, 1990.
- [35] YIN, Y., DOMMEL, H. W. “Calculation of Frequency-Dependent Impedances of Underground Power Cables with Finite Element Method”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 25, n. 4, pp. 3025–3027, July 1989.
- [36] CRISTINA, S., FELIZIANI, M. “A finite element technique for multi-conductor cable calculations”, *IEEE Trans. Magnetics*, v. 25, n. 4, pp. 2986–2988, Jul. 1989.
- [37] GUSTAVSEN, B. *A Study of overvoltages in high voltage cables with emphasis on shath overvoltages*. Tese de Doutorado, NTH, Institutt for Elkraftteknikk Trondheim, 1993.
- [38] GUSTAVSEN, B., SLETBAK, J., HENRIKSEN, T. “Simulation of Transient Sheath Overvoltage in the Presence of Proximity Effects”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 10, n. 2, pp. 1066–1075, April 1995.
- [39] GUSTAVSEN, B., BRUASET, A., BREMNES, J. J., et al. “A Finite-Element Approach for Calculating Electrical Parameters of Umbilical Cables”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 24, n. 4, pp. 2375–2384, 2009.
- [40] GRADSHTEYN, I. S., RYZHIK, I. M. *Table of Integrals, Series and Products*. 6th ed. San Diego, Academic Press, 2000.
- [41] WEDEPOHL, L. M., MOHAMED, S. E. “Multiconductor transmission lines – Theory of Natural Modes and Fourier Integral applied to transient analysis”, *Proceedings of IEE*, v. 116, n. 9, pp. 1553–1563, September 1969.

- [42] GOMEZ, P., URIBE, F. A. “The numerical laplace transform: An accurate technique for analyzing electromagnetic transients on power system devices,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. vol. 31, n. 2-3, pp. 116–123, 2009.
- [43] AMETANI, A. “A General Formulation of Impedance and Admittance of Cables”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. PAS-99, n. 3, pp. 902–910, May/June 1980.
- [44] AMETANI, A. “Generalized program for line and cable constants”, *Bonneville Power Administration*, v. 1, n. 2, 1977.
- [45] RIVAS, R. A. *Calculation of frequency-dependent parameters of power cables with digital images and partial subconductors*. Tese de Doutorado, The University of British Columbia, 2001.
- [46] SCHELKUNOFF, S. A. “The Electromagnetic Theory of Coaxial Transmission Line and Cylindrical Shields”, *Bell Syst. Tech J.*, v. 13, pp. 532–579, 1934.
- [47] NODA, T. *Development of a transmission line model considering the skin effect and corona effects for power system transient analysis*. Tese de Doutorado, Doshisha University, 1996.
- [48] PAPAGIANNIS, G., TSIAMITROS, D., LABRIDIS, D., et al. “A systematic approach to the evaluation of the influence of multilayered Earth on overhead power transmission lines”, *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 20, n. 4, pp. 2594–2601, 2005. ISSN: 0885-8977. doi:10.1109/TPWRD.2005.855448.
- [49] DIMITRIOS, A., GRIGORIS, K. P., L., D. P., et al. “Earth Return Path Impedances on Underground Cables for the Two-Layers Earth Cases”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 20, n. 3, pp. 2174–2181, 2005.
- [50] DIMITRIOS, A., GRIGORIS, K. P., PETROS, S. D. “Earth Return Impedances of Conductor Arrangements in /multilayer Soils - Part I: Theoretical Model”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 23, n. 4, pp. 2392–2400, 2008.
- [51] BIANCHI, G., LUONI, G. “Induced Currents and Losses in Single-Core Submarine Cables”, *IEEE Trans. on Power App. and Syst.*, v. PAS-95, n. 1, pp. 49–58, 1976.

- [52] BROWN, G. W., ROCAMORA, R. G. “Surge propagation in three-phase pipe-type cables, Part I - Unsaturated pipe”, *IEEE Trans. on Power App. & Syst.*, v. PAS-95, pp. 89–95, 1976.
- [53] TRIANTAFYLLIDIS, D., PAPAGIANNIS, G., LABRIDIS, D. “Calculation of Overhead Transmission Line Impedances: A Finite Element Approach”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 14, n. 1, pp. 287–293, 1999.
- [54] YIN, Y. *Calculation of Frequency-Dependent Parameters of Underground Power Cables with Finite Element Method*. Tese de Doutorado, The University of British Columbia, 1990.
- [55] ARIZON, P., DOMMEL, H. “Computation of cable impedances based on subdivision of conductors”, *IEEE Trans. Power Delivery*, v. PWRD-2, n. 1, pp. 21–27, 1987.
- [56] TESCHE, F. M. “Comparison of the transmission line and scattering models for computing the HEMP response of overhead cables”, *IEEE Trans. Electromagn. Compatibility*, v. 34, May 1992.
- [57] NAKAGAWA, M. “Admittance Correction Effects of a Single Overhead Line”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. PAS-100, n. No. 3, March 1981.
- [58] GERTRUDES, J. B. *Influência da Condutividade e Permissividade do Solo em Função da Frequência no Cálculo da Impedância Longitudinal e Admitância Transversal de Linhas Aéreas de Transmissão*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - Departamento de Sistemas e Controle de Energia, Abril 2010.
- [59] SANTOS, G. F. J. *Metodologia para Análise de Linhas de Transmissão Incluindo Modelos do Arco Secundário*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Outubro 2009.
- [60] FERNANDES, A., NEVES, W. L. A., COSTA, E., et al. “Transmission line shunt conductance from measurements”, *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 19, n. 2, pp. 722–728, 2004. ISSN: 0885-8977. doi:10.1109/TPWRD.2003.822526.
- [61] DOMMEL, H. *EMTP Theory Book*. Canada, MicroTran Power System Analysis Corporation, 1992.

- [62] ANDERSON, P. *Analysis of Faulted Power Systems*. New York, Wiley-IEEE Press, 1995.
- [63] RAMIREZ, A., GOMEZ, P., MORENO, P. “Frequency Domain Analysis of Electromagnetic Transients Through the Numerical Laplace Transform”, *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, 2004.
- [64] WEDEPHOL, L. M. *The Theory of natural modes in multiconductor transmission systems*. Relatório técnico, The University of British Columbia, 1997.

# Apêndice A

## Revisão de cálculo de parâmetros em linhas de transmissão

Neste apêndice é apresentada uma breve revisão das formulações adotadas no cálculo dos parâmetros longitudinais e transversais, variantes com a frequência, em sistemas aéreos de transmissão<sup>1</sup>.

O estudo de transitórios rápidos em linhas de transmissão contendo  $n$ -condutores e  $N$ -fases mutuamente acopladas, excitados por surtos atmosféricos ou de manobra, requer uma excelente precisão na modelagem da impedância de retorno pelo solo. Neste contexto, cálculos precisos dos parâmetros dos condutores em função da frequência são necessários para que o sistema esteja bem representado.

Os trabalhos de [29, 31, 43, 44] aplicaram uma formulação geral considerando as matrizes de impedância e de potencial compostas por sub-matrizes de estrutura  $N \times N$ , onde para cada uma delas aplicamos diferentes metodologias de cálculo.

Para o cálculo de parâmetros longitudinais, as formulações utilizadas são:

- de [14, 46] para o cálculo da sub-matriz de impedância interna dos condutores levando-se em consideração o efeito pelicular;
- de [2, 14, 16, 17] para o cálculo da sub-matriz de impedância de retorno pelo solo em condutores enterrados;
- de [1, 12, 13, 15, 17, 47], para o cálculo da sub-matriz de impedância de retorno pelo solo em condutores acima da superfície do solo;
- de [48–50] para o cálculo da sub-matriz de impedância de condutores aéreos, enterrados e/ou combinados na presença de solo não-homogêneo ou estratificado;

---

<sup>1</sup>Para sistemas de cabos enterrados a metodologia de cálculo de parâmetros longitudinais e transversais pode ser visualizada com detalhes em [29, 31, 43–45].

- de [51] para o cálculo da sub-matriz de impedância de retorno pela água em condutores submersos;
- de [52] para as camadas metálicas ou tubulações envolventes (*pipe-type*);
- de [37] para o cálculo do efeito solenóide;
- de [34–39, 53–55] como técnicas numéricas e aproximações baseadas em Técnicas de Elementos Finitos e Método da Subdivisão de condutores para o cálculo do efeito de proximidade que deve ser considerado em sistemas de cabos onde a distância entre os condutores seja menor que o seu próprio diâmetro.

Para o cálculo de parâmetros transversais, as metodologias de [23, 56, 57] são descritas com detalhes em [58] e o método das imagens considerando a diferença de tensão de [12] para sistemas contendo  $n$ -condutores é descrito em detalhes em [59]. Sendo [12, 23, 56] métodos aproximados das formulações de Carson e Wise.

Com base na eq. (2.2), os parâmetros longitudinais para linhas aéreas de transmissão são representados por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} &= \mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_e + \mathbf{Z}_s \\
&= \mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_{ext} \\
&= \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}
\end{aligned} \tag{A.1}$$

e os parâmetros transversais representados por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}_i + \mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_s \\
&= \mathbf{G} + j\omega\mathbf{P}^{-1}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

sendo,  $\mathbf{R}$  a matriz de resistências e  $\mathbf{L}$  de indutâncias, variantes com a frequência,  $\mathbf{Y}_i$  a sub-matriz de admitância transversal interna dos condutores,  $\mathbf{Y}_e$  a sub-matriz de admitância transversal espacial supondo o solo como condutor ideal,  $\mathbf{Y}_s$  a sub-matriz de admitância transversal espacial supondo o solo com perdas, e  $\mathbf{P}$  a sub-matriz de potencial<sup>2</sup>.

Recentemente alguns trabalhos propuseram a inserção de uma matriz diagonal de condutância do ar com elementos constantes com valor da ordem de  $10^{-9}$  S/km [60]. Desta forma, a matriz  $\mathbf{Y}$  pode ser reescrita como,

$$\mathbf{Y}(\omega) = (\mathbf{G}_c + \mathbf{G}) + j\omega\mathbf{C} \tag{A.3}$$

onde  $\mathbf{G}_c$  é a matriz diagonal de condutâncias [60],  $\mathbf{G}$  é a matriz de condutâncias, e  $\mathbf{C}$  a matriz das capacitâncias.

---

<sup>2</sup>Sendo,  $\mathbf{Y}_i = 0$  para condutores nus e a matriz de capacitâncias  $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1}$

## A.1 Modelagem dos parâmetros longitudinais

Da eq. (A.1), para a modelagem da impedância interna de linhas de transmissão  $\mathbf{Z}_i$ , dependendo das configurações da rede, podemos ainda utilizar as metodologias de [34–39, 52–55], sendo estas metodologias de difícil implementação e com maior aplicação em sistemas de cabos devido a sua geometria.

A sub-matriz de impedância interna  $\mathbf{Z}_i$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  é arranjada da seguinte forma:

$$\mathbf{Z}_i = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{NN} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

onde o cálculo do elemento  $Z_{ii}$  para um condutor singular, levando-se em consideração o efeito pelicular, pode ser dado através das seguintes formas [46]<sup>3</sup>:

- para condutores cilíndricos tubulares de raio interno  $r_0$  e raio externo  $r_1$ ,

$$Z_{ii} = j\omega \frac{\mu_0 \mu_{rc} I_0(\eta_c r) \cdot K_1(\eta_c r_0) + I_1(\eta_c r_0) \cdot K_0(\eta_c r)}{2\pi \eta_c r I_1(\eta_c r) \cdot K_1(\eta_c r_0) - I_1(\eta_c r_0) \cdot K_1(\eta_c r)} \quad (\text{A.5})$$

- para condutores cilíndricos “sólidos” de raio  $r$ ,

$$Z_{ii} = j\omega \frac{\mu_0 \mu_{rc} I_0(\eta_c r)}{2\pi \eta_c r I_1(\eta_c r)} \quad (\text{A.6})$$

sendo,  $\eta_c = \sqrt{\gamma^2 - k_c^2}$ ,  $k_c = \sqrt{\omega^2 \mu_c \epsilon_c - j\omega \mu_c \sigma_c}$ ,  $I$  e  $K$  funções modificadas de Bessel de primeira e segunda espécie, de ordem 0 e 1, de acordo com o sub-índice,  $\eta_c r_1$ ,  $\eta_c r_0$  e  $\eta_c r$  os argumentos das funções  $I$  e  $K$ ,  $\omega$  a frequência angular ( $rad/s$ ),  $\sigma_c = 1/\rho_c$  a condutividade do condutor,  $\mu_{rc}$  a permeabilidade magnética relativa do condutor, considerada de valor unitário constante,  $\mu_c = \mu_{rc}\mu_0$  e  $\epsilon_c = \epsilon_{rc}\epsilon_0$ . As formulações aproximadas por meio de funções hiperbólicas [14] das eq. (A.5) e (A.6) e suas respectivas precisões podem ser vista com mais detalhes em [29].

Na modelagem da impedância externa de linhas de transmissão, a sub-matriz

---

<sup>3</sup>Em sistemas aéreos contendo cabos para-raios, feixes geminados contendo  $n$ -condutores, arranjados para aplicação de LPNE (Linha de Transmissão de Potência Naturalmente Elevada) ou não, ou circuitos duplos, o cálculo dos elementos da sub-matriz  $\mathbf{Z}_i$  pode ser visto com mais detalhes em [61, 62]. Nestes casos  $Z_{ii}$  tem forma matricial.

$\mathbf{Z}_{ext}$  para  $i, j = 1, 2, \dots, N$  é arranjada da seguinte forma:

$$\mathbf{Z}_{ext} = \begin{bmatrix} Z_{ext_{11}} & Z_{ext_{12}} & Z_{ext_{13}} & \cdots & Z_{ext_{1N}} \\ Z_{ext_{21}} & Z_{ext_{22}} & Z_{ext_{23}} & \cdots & Z_{ext_{2N}} \\ Z_{ext_{31}} & Z_{ext_{32}} & Z_{ext_{33}} & \cdots & Z_{ext_{3N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{ext_{N1}} & Z_{ext_{N2}} & Z_{ext_{N3}} & \cdots & Z_{ext_{NN}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

onde, os elementos próprios e mútuos de  $\mathbf{Z}_{ext}$ , dados por  $Z_{ext_{ii}}$  e  $Z_{ext_{ij}}$ , respectivamente, são compostos por duas parcelas como se segue:

$$\begin{aligned} Z_{ext_{ii}} &= Z_{e_{ii}} + Z_{s_{ii}} \\ Z_{ext_{ij}} &= Z_{e_{ij}} + Z_{s_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Com base no modelo de onda completa, os componentes próprios e mútuos de  $\mathbf{Z}_e$  dados por  $Z_{e_{ii}}$  e  $Z_{e_{ij}}$ , respectivamente, têm as seguintes formas:

$$Z_{e_{ii}} = j \omega \frac{\mu_a \Lambda_{ii}}{2\pi} \quad (\text{A.9})$$

$$Z_{e_{ij}} = j \omega \frac{\mu_a \Lambda_{ij}}{2\pi} \quad (\text{A.10})$$

onde,

$$\begin{aligned} \Lambda_{ii} &= K_0(r \eta_a) - K_0(2h_i \eta_a) \\ \Lambda_{ij} &= K_0(d_{ij} \eta_a) - K_0(D_{ij} \eta_a) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

sendo  $d_{ij} = \sqrt{x^2 + (h_i - h_j)^2}$  a distância entre os condutores  $i$  e  $j$ ,  $D_{ij} = \sqrt{x^2 + (h_i + h_j)^2}$  a distância entre o condutor  $i$  e a imagem do condutor  $j$ ,  $\eta_a = \sqrt{\gamma^2 - k_a^2}$ ,  $k_a = \sqrt{\omega^2 \mu_a \epsilon_a - j\omega \mu_a \sigma_a}$  a constante de propagação do ar, e  $K$  a função modificada de Bessel de segunda espécie de ordem 0.

Os componentes próprios e mútuos de  $\mathbf{Z}_s$  dados por  $Z_{s_{ii}}$  e  $Z_{s_{ij}}$ , respectivamente, têm as seguintes formas:

$$Z_{s_{ii}} = j \omega \frac{\mu_a}{\pi} S_{1_{ii}} \quad (\text{A.12})$$

$$Z_{s_{ij}} = j \omega \frac{\mu_a}{\pi} S_{1_{ij}} \quad (\text{A.13})$$

sendo  $S_{1_{ii}}$  e  $S_{1_{ij}}$  uma expansão de  $S_1$  da eq. (3.9) para sistemas  $n$ -condutores, e

reescritos como:

$$\begin{aligned}
S_{1_{ii}} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h_i} \sqrt{\lambda^2 + \eta_a^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \eta_a^2} + \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}} \cos(\lambda r) d\lambda \\
S_{1_{ij}} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-(h_i+h_j)} \sqrt{\lambda^2 + \eta_a^2}}{\sqrt{\lambda^2 + \eta_a^2} + \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}} \cos(\lambda x) d\lambda
\end{aligned} \tag{A.14}$$

com  $\eta_s = \sqrt{\gamma^2 - k_s^2}$ ,  $k_s = \sqrt{\omega^2 \mu_s \epsilon_s - j\omega \mu_s \sigma_s}$  a constante de propagação do meio solo,  $\gamma$  a constante de propagação do sistema,  $h_i$  e  $h_j$  as alturas dos condutores i e j, respectivamente,  $r$  o raio mais externo do condutor,  $\sigma_s = 1/\rho_s$  a condutividade do solo,  $x$  a distância horizontal entre os condutores i e j,  $\mu_s$  a permeabilidade magnética do solo, e  $\epsilon_s$  a permissividade do solo.

As integrais podem ser substituídas por expressões simplificadas do modelo quase-TEM [15, 17, 47], do modelo das imagens [12, 13] e pelo modelo proposto em 4.3. Sendo que as simplificações pelo métodos das imagens apresentam problemas de instabilidade numérica em frequências da ordem de alguns kHz, conforme demonstrado no Capítulo 2.

## A.2 Modelagem dos parâmetros transversais

Da eq. (A.2), a sub-matriz admitância interna  $\mathbf{Y}_i$ , se relacionada à sub-matriz dos coeficientes de potencial interno  $\mathbf{P}_i$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ , é arranjada da seguinte forma:

$$\mathbf{Y}_i = j\omega \mathbf{P}_i^{-1} = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{NN} \end{bmatrix}^{-1} \tag{A.15}$$

onde,

$$P_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_{is}} \frac{r_{is}}{r} \tag{A.16}$$

sendo,  $\epsilon_{is}$  a permissividade relativa do material da camada isolante, e  $r_{is}$  o raio externo da camada isolante.

Com base no modelo de onda completa, os componentes próprios e mútuos de

$\mathbf{Y}_e$  dados por  $Y_{e_{ii}}$  e  $Y_{e_{ij}}$ , respectivamente, têm as seguintes formas:

$$Y_{e_{ii}} = 2 \pi j \omega \epsilon_a \Lambda_{ii}^{-1} \quad (\text{A.17})$$

$$Y_{e_{ij}} = 2 \pi j \omega \epsilon_a \Lambda_{ij}^{-1} \quad (\text{A.18})$$

Os componentes próprios e mútuos de  $\mathbf{Y}_s$  dados por  $Y_{s_{ii}}$  e  $Y_{s_{ij}}$ , respectivamente, têm as seguintes formas:

$$Y_{s_{ii}} = \pi j \omega \epsilon_a (k_a^2 S_{2_{ii}})^{-1} \quad (\text{A.19})$$

$$Y_{s_{ij}} = \pi j \omega \epsilon_a (k_a^2 S_{2_{ij}})^{-1} \quad (\text{A.20})$$

sendo  $S_{2_{ii}}$  e  $S_{2_{ij}}$  uma expansão da eq. (3.10) para sistemas  $n$ -condutores, e reescritos como:

$$\begin{aligned} S_{2_{ii}} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h_i} \sqrt{\lambda^2 + \eta_a^2}}{n^2 \sqrt{\lambda^2 + \eta_a^2} + \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}} \cos(\lambda r) d\lambda \\ S_{2_{ij}} &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-(h_i+h_j)} \sqrt{\lambda^2 + \eta_a^2}}{n^2 \sqrt{\lambda^2 + \eta_a^2} + \sqrt{\lambda^2 + \eta_s^2}} \cos(\lambda x) d\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

onde  $n$  é o índice de refração entre os meios  $k_s/k_a$ .

# Apêndice B

## Transformada Numérica de Laplace

Considere que  $f(t)$  seja uma função no domínio do tempo e que  $F(s)$  seja sua representação no domínio de Laplace. A Transformada Inversa de Laplace é dada por [63]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (\text{B.1})$$

onde  $s = c + j\omega$ ,  $\omega$  é a frequência angular e  $c$  é uma constante real e positiva. A eq. (B.1) pode ser expressa da seguinte forma:

$$f(t) = \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(c + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{B.2})$$

A equação acima indica que a Transformada de Laplace de  $f(t)$  pode ser tratada como a Transformada de Fourier da função amortecida  $f(t) e^{-ct}$ . A eq. (B.2) pode ser aproximada numericamente:

$$f(n) = \frac{e^{cn\Delta t}}{\Delta t} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \sigma(k) e^{\frac{2\pi jkn}{N}} \right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\text{B.3})$$

onde  $N$  é igual ao número de amostras de tempo e de frequência,  $\Delta t$  o intervalo de amostragem e,

$$\begin{aligned} \Delta\omega &\rightarrow \frac{2\pi}{N\Delta t} \\ f(n) &\rightarrow f(n\Delta t) \\ F(k) &\rightarrow F(c + jk\Delta\omega) \\ \sigma(k) &\rightarrow \text{função de amortecimento} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

O termo dentro dos colchetes corresponde à Transformada Inversa Discreta de Fourier. O tempo máximo de observação para  $f(t)$  é:

$$T = N\Delta t \quad (\text{B.5})$$

A função de amortecimento  $\sigma(k)$  é usada para atenuar o efeito Gibbs produzido pelo truncamento da faixa de frequências de interesse. A literatura técnica oferece uma grande variedade de modelos para a implementação de  $\sigma(k)$ . Este trabalho utiliza a forma de Hamming:

$$\sigma(k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi j}{k}\right)}{\frac{\pi j}{k}} \quad (\text{B.6})$$

De acordo com a eq. (B.3), a função  $F(k)$  é avaliada como uma constante no intervalo  $[k, k+1]$ , o que resulta em um aspecto quadrado de sua resposta no domínio do tempo. A função do termo laplaciano  $c$  é exatamente a de alisar o sinal  $f(t)$ , de modo a atenuar a aproximação feita no domínio da frequência. Muitos autores utilizam critérios próprios para a definição de  $c$ . Neste trabalho, adota-se o critério proposto por [64]:

$$c = -\frac{\ln(0.001)}{T} \quad (\text{B.7})$$