



ALOCAÇÃO DE MONITORES DE QUALIDADE DE ENERGIA E UNIDADES  
DE MEDIÇÃO FASORIAL USANDO PROGRAMAÇÃO DINÂMICA  
APROXIMADA

Débora Costa Soares dos Reis

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Alexandre Pinto Alves da Silva

Rio de Janeiro  
Abril de 2012

ALOCAÇÃO DE MONITORES DE QUALIDADE DE ENERGIA E UNIDADES  
DE MEDIÇÃO FASORIAL USANDO PROGRAMAÇÃO DINÂMICA  
APROXIMADA

Débora Costa Soares dos Reis

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

---

Prof. Alexandre Pinto Alves da Silva, Ph.D.

---

Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, D.Sc.

---

Prof. Denis Vinicius Coury, Ph.D.

---

Prof. Djalma Mosqueira Falcão, Ph.D.

---

Prof. Nelson Kagan, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
ABRIL DE 2012

Reis, Débora Costa Soares dos

Alocação de Monitores de Qualidade de Energia e Unidades de Medição Fasorial Usando Programação Dinâmica Aproximada/Débora Costa Soares dos Reis. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XII, 96 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Alexandre Pinto Alves da Silva

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 82 – 90.

1. Monitores de qualidade de energia. 2. Unidades de Medição Fasorial. 3. Otimização Combinatória. 4. Problema de Recobrimento. 5. Branch and Bound. 6. Programação Dinâmica. 7. Programação Dinâmica Aproximada. I. Silva, Alexandre Pinto Alves da. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Aos meus pais e avós, porque  
tudo começou com um "Como  
andam as notas, menina?".*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus pela saúde, pelo dom da curiosidade e capacidade de aprender e questionar.

Agradeço ao meu orientador, prof. Alexandre, pela excelência, inovação e por deixar tudo tão claro desde o começo, a transparência com que ele conduziu a pesquisa permitiu que eu sempre enxergasse o objetivo final da tese, mesmo nos momentos mais duros.

Aos meus amados pais, Francisco e Rosângela, um agradecimento do tamanho do mundo! Eles me deram total apoio, carinho, dedicação e incentivo durante todo o caminho até aqui. Aos meus avós Nancy e Orlando agradeço sempre pelo exemplo de retidão, amor e fé. Às minhas irmãs agradeço pelo companheirismo, alegria e amizade. Ao meu querido pai, José, e aos meus queridos avós, José e Odilha, que estão nas graças de Deus, agradeço pelo exemplo e ensinamento de amor aos estudos.

Em especial, ao meu marido Thiago agradeço pela paciência, dedicação, compreensão e amor nesses quatro anos tão importantes da minha vida, desde o dia da entrevista pro doutorado até a defesa.

Agradeço aos amigos do Laspot: Jorge, Karla, Leonardo, Thiago, Sergio, Otto, Paulo, Chiquinho e, em especial, à Aline, pelos almoços e cafés, pela amizade, companhia e apoio sempre. Agradeço à turma do *Projeto de Identificação de Cargas*, Carolina, Diego, João, Rafa e prof. Tony, foi um prazer e aprendizado enorme trabalhar com essa galera, trouxe uma nova motivação para a tese. Agradeço ao prof. Paulo Villela que ainda em Juiz de Fora me apresentou e me ensinou a gostar de otimização.

Agradeço a Tatiana, comadre querida, a Flávia pela amizade e também pela revisão, a Jakeline por ser uma irmã, a Dayanne por dividir tão bem a moradia carioca comigo, a Karolina pela companhia no trânsito e fora dele também, ao José Antonio pelos estudos sem fim, e a todos aqueles amigos que me ajudaram nessa

empreitada.

Finalmente, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (CNPq) pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ALOCAÇÃO DE MONITORES DE QUALIDADE DE ENERGIA E UNIDADES  
DE MEDIÇÃO FASORIAL USANDO PROGRAMAÇÃO DINÂMICA  
APROXIMADA

Débora Costa Soares dos Reis

Abril/2012

Orientador: Alexandre Pinto Alves da Silva

Programa: Engenharia Elétrica

Esta tese apresenta algoritmos desenvolvidos para a solução do problema de alocação ótima de medidores de qualidade de energia em sistemas de distribuição e para unidades de medição fasorial em sistemas de transmissão. O problema é resolvido usando novas técnicas de otimização combinatória 0-1. Apresentam-se três algoritmos de solução, o primeiro é o algoritmo de solução ótima exata do tipo *branch and bound*, o segundo é uma heurística, que apresenta soluções ótimas ou subótimas, e por último apresenta-se a principal contribuição da tese o algoritmo completo Programação Dinâmica Aproximada. O objetivo dos algoritmos é minimizar o custo total do sistema de monitoramento e encontrar o número mínimo necessário e a localização de monitores para garantir a observabilidade da rede. Realizam-se simulações para as redes IEEE de teste de transmissão, redes IEEE de distribuição e para as redes reais de transmissão brasileira e peruana. Resultados para o método de Programação Dinâmica Aproximada proposto é comparado com cada uma das outras metodologias.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

POWER QUALITY MONITORS AND PHASOR MEASUREMENT UNIT  
ALLOCATION USING APPROXIMATE DYNAMIC PROGRAMMING

Débora Costa Soares dos Reis

April/2012

Advisor: Alexandre Pinto Alves da Silva

Department: Electrical Engineering

This thesis proposal presents algorithms developed to solve the problem of power quality monitors allocation in distribution power systems and Phase Measurement Unit placement in transmission networks. The problems are solved using new 0-1 combinatorial optimization techniques. Three algorithms are presented, the first one is an exact branch and bound optimal solution, the second is a heuristic, which presents optimal or suboptimal solutions, and the last one is the most important development of this thesis an Approximate Dynamic Programming algorithm. The main objective of the algorithms is to minimize the total cost of system monitoring and find the optimum number and locations for monitors on the network, in order to guarantee observability. Simulations are made for IEEE test transmission systems, IEEE distribution systems and actual Brazilian and Peruvian transmissions networks. Results for the proposed Approximate Dynamic Programming method are compared with each alternative methodology.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Iniciais . . . . .	1
1.2 Metodologia . . . . .	5
1.3 Revisão Bibliográfica . . . . .	6
1.3.1 Minimização do custo do sistema de monitoramento . . . . .	7
1.3.2 Minimização do custo através da diminuição do número de monitores . . . . .	8
1.3.3 Alocação de monitores em Sistemas de Distribuição . . . . .	11
1.3.4 Alocação de PMU . . . . .	12
1.4 Objetivos . . . . .	13
1.5 Contribuições Originais . . . . .	14
1.6 Estrutura do Trabalho . . . . .	15
<b>2 Modelagem do Problema e Métodos de Solução</b>	<b>17</b>
2.1 Formulação Matemática do Problema . . . . .	17
2.1.1 Problema do Recobrimento . . . . .	18
2.1.2 Problema de Alocação de MQEE/PMU . . . . .	20
2.1.3 Exemplo de Alocação de MQEE e PMU para um Sistema de 3 barras . . . . .	25
2.1.4 Exemplo de Alocação de PMU com barras de Passagem . . . . .	27
2.2 Definição do Limitante Inferior . . . . .	29
2.2.1 Exemplo para um problema de duas variáveis . . . . .	29
2.3 Solução por Branch and Bound . . . . .	30
2.4 Solução por Heurística de Fixação . . . . .	33
2.5 Solução por Bintprog . . . . .	37
<b>3 Algoritmo de Solução Proposto</b>	<b>39</b>
3.1 Introdução à Programação Dinâmica . . . . .	39

3.2	Problema da Mochila 0 – 1 em PD . . . . .	40
3.2.1	Exemplo para um PM . . . . .	42
3.2.2	Modelagem do Problema da Mochila Unidimensional em Pro- gramação Dinâmica . . . . .	45
3.2.3	Exemplo do Problema da Mochila 0 – 1 em PD . . . . .	46
3.2.4	Problema da Mochila Multidimensional 0 – 1 em PD . . . . .	48
3.2.5	Exemplo do Problema da Mochila Multidimensional 0 – 1 em PD . . . . .	51
3.3	Problema do Recobrimento 0 – 1 em PD . . . . .	54
3.4	Complexidade do algoritmo de solução em PD . . . . .	57
3.5	Programação Dinâmica Aproximada . . . . .	57
3.5.1	Método Proposto . . . . .	58
3.5.2	Algoritmo de PDA com Fixação de Variáveis . . . . .	61
3.5.3	Algoritmo de PDA com Aproximação Linear por Método dos Pontos Interiores . . . . .	62
3.6	Exemplo do Problema de Alocação de PMU . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>67</b>
4.1	Soluções Ótimas de Alocação . . . . .	67
4.2	Soluções com Custo de Instalação Iguais . . . . .	69
4.3	Soluções com Custo de Instalação Diferentes . . . . .	72
4.4	Heurísticas de Fixação Diferentes . . . . .	74
4.5	Variações no Algoritmo de PDA . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>79</b>
5.1	Conclusões . . . . .	79
5.2	Trabalhos Futuros . . . . .	81
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>82</b>
<b>A</b>	<b>Anexos</b>	<b>91</b>
A.1	Restrições - Elaboração de Alocação de MQEE . . . . .	91
A.1.1	Exemplo de alocação de MQEE . . . . .	93
A.2	Restrições - Comparação entre as Metodologias . . . . .	94
A.3	Soluções de Alocação . . . . .	95

# Lista de Figuras

2.1	Mapa de uma cidade qualquer dividida em 4 regiões. . . . .	18
2.2	Exemplo de um monitor instalado na barra $j$ . . . . .	21
2.3	Sistema Exemplo com três barras. . . . .	25
2.4	Exemplo de uma rede com 7 barras e 8 linhas. . . . .	27
2.5	Exemplo de um PPI binário de duas variáveis. . . . .	30
2.6	Árvore representando a expansão do problema $P^0$ . . . . .	32
2.7	Algoritmo Branch and Bound desenvolvido. . . . .	33
2.8	Heurística de Fixação desenvolvida por Demir e Bertsimas (2002). . .	35
2.9	Heurística de Fixação modificada. . . . .	36
3.1	Processo de decisão em estágios. . . . .	40
3.2	Mochila e objetos a serem carregados. . . . .	42
3.3	Esquema do preenchimento da mochila em estágios. . . . .	43
3.4	Algoritmo de PD com cálculo recursivo de $x(k)$ . . . . .	50
3.5	Algoritmo de PD com cálculo simultâneo de $F(k, \mathbf{b})$ e $x(k)$ . . . . .	51
3.6	Algoritmo de PD para solução do PR. . . . .	56
3.7	Rede de transmissão com 6 barras. . . . .	63
4.1	Alocação ótima encontrada para o sistema de transmissão IEEE 14 barras e custo de instalação igual em todas as barras. . . . .	71

# Lista de Tabelas

2.1	Dados de topologia para uma rede de 3 barras e 2 linhas de transmissão.	26
3.1	Dados de topologia para uma rede de 6 barras e 8 linhas de transmissão.	63
4.1	Resultados de alocação de PMU em sistemas de transmissão sem barras de passagem para custos iguais de instalação.	69
4.2	Resultados de alocação de PMU com custos iguais de instalação no sistema brasileiro usando PDA.	70
4.3	Barras de passagem para os sistemas de transmissão.	71
4.4	Resultados de alocação de PMU em sistemas de transmissão com barras de passagem para custos iguais de instalação.	72
4.5	Resultados de alocação de MQEE em sistemas de distribuição para custos de instalação iguais.	72
4.6	Resultados de alocação de PMU em sistemas de transmissão para custos de instalação diferentes.	73
4.7	Resultados de alocação de PMU com custos diferentes de instalação usando PDA.	73
4.8	Resultados de alocação em sistemas de distribuição para custos de instalação diferentes.	74
4.9	Resultados de alocação para heurísticas diferentes em sistemas de transmissão com custos de instalação iguais.	76
4.10	Resultados de alocação para heurísticas diferentes em sistemas de distribuição com custos de instalação iguais.	76
4.11	Resultados de alocação para heurísticas diferentes em sistemas de transmissão com custos de instalação diferentes.	76
4.12	Resultados de alocação para heurísticas diferentes em sistemas de distribuição com custos de instalação diferentes.	77
4.13	Resultados de alocação de PMU para algoritmos de PDA com aproximações lineares diferentes.	78
A.1	Soluções para os sistemas de transmissão e custos iguais.	96
A.2	Soluções para os sistemas de distribuição e custos iguais.	96

# Capítulo 1

## Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar uma solução para alocação de medidores de qualidade de energia em sistemas de distribuição e para unidades de medição fasorial em sistemas de transmissão de grande porte minimizando o custo total do sistema de monitoramento. A principal contribuição da tese é o uso de Programação Dinâmica Aproximada para solucionar o problema de programação linear inteira binária com milhares de variáveis. Neste capítulo apresentam-se as questões que motivam o monitoramento do sistema elétrico, citam-se as legislações vigentes, apresentam-se as metodologias de solução aplicadas e faz-se a revisão bibliográfica sobre o tema.

### 1.1 Considerações Iniciais

Há pouco tempo atrás não havia grande preocupação com a qualidade do serviço oferecido pelas empresas de energia elétrica, desde que não houvesse interrupção da energia. Hoje os consumidores estão mais informados, possuem equipamentos mais sensíveis e exigem qualidade no sinal recebido. Desta forma, admitem poucas variações de tensão e frequência de curta ou longa duração e baixa presença de harmônicos. Isso provocou um esforço das agências reguladoras para estabelecer limites aceitáveis de funcionamento para permitir punições e induzir ações corretivas na transmissão e distribuição dos sistemas elétricos.

Uma energia de qualidade ideal pode ser entendida como aquela em que a forma de onda da tensão é senoidal pura cujos parâmetros como amplitude, frequência e fase sejam fixos ou estejam dentro de limites pré-definidos pelos órgãos reguladores. As fontes de distúrbios que afetam a qualidade da energia elétrica (QEE) são aquelas que de alguma forma provocam distorções no sinal de tensão, comprometendo a qualidade da energia entregue ao consumidor. Grandes cargas conectadas aos sistemas e/ou a ocorrência de faltas no mesmo afetam a garantia da qualidade de energia. Alguns exemplos de fontes poluidoras do sistema elétrico são:

inversores de frequência e cargas não lineares que elevam o nível de componentes harmônicas; fornos a arco que provocam variações na amplitude da tensão; faltas no sistema que causam variações no valor da amplitude e fase da tensão; inclusão e exclusão de grandes cargas; entre outras.

No Brasil, estão em implantação pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) [1] procedimentos que não somente calculam o intervalo e a duração da interrupção do fornecimento de energia elétrica, mas também índices que monitoram a tensão fornecida aos consumidores. Na distribuição, o que regulamenta esse processo são os Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional (PRODIST), que tem como um de seus objetivos atuar no monitoramento da qualidade da energia elétrica [2]. O PRODIST tem uma resolução específica para a qualidade da energia, a Resolução Normativa 345/2008, sua primeira versão com vigência de 31/12/2008 a 31/12/2009, seguida pelas Resoluções Normativas 395/2009, 424/2010, e a penúltima Resolução Normativa 444/2011 vigente de 06/09/2011 a 31/01/2012 e a atual Resolução Normativa 469/2011 vigente a partir de 01/02/2012. O módulo 8 do PRODIST define claramente a qualidade aceitável do produto, ou seja, tensão em regime permanente, fator de potência, harmônicos, desequilíbrio e flutuação de tensão, variação de tensão de curta duração e variação de frequência. Além disso, também estabelece a qualidade do serviço, definindo indicadores de tempo de atendimento às ocorrências emergenciais de continuidade do serviço de distribuição de energia e de continuidade para Transmissoras e Distribuidoras.

Na Transmissão, através da Superintendência de Fiscalização dos Serviços de Eletricidade (SFE) a ANEEL em seu Manual de Transmissão [3] define que o responsável por zelar pela QEE é a Transmissora, de acordo com os Procedimentos de Rede do Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) [4]. Nos procedimentos do ONS, no Submódulo 25.6, Indicadores de Qualidade de Energia Elétrica, Frequência e Tensão, autorizada a utilização pelo Despacho SRT/ANEEL nº 2744, de 16/09/2010 da ANEEL, encontram-se os indicadores de QEE, frequência e tensão [5].

Claramente já existe um movimento da ANEEL tanto na Distribuição quanto na Transmissão para definir padrões de qualidade de energia, mas ainda não se fala precisamente como fazer e nem existe implantado um sistema de monitoramento eficiente para permitir o controle desses índices. Isto explica o interesse por soluções que minimizem o custo de instalação e uso de um sistema de monitoramento para sistemas de grande porte, visto que o sistema brasileiro é dessa natureza.

Internacionalmente podem-se citar os seguintes padrões importantes de regulamentação da QEE: o padrão elaborado pelo Instituto de Engenheiros Eletrônicos e Eletricistas (IEEE), o IEEE Standard 519-1992, que estabelece limites de distorção de tensão e harmônicos de corrente, o IEEE Standard 1159 [6], que apresenta o guia para aquisição e gravação de dados, a caracterização dos eventos de qualidade de energia e o formato dos arquivos de dados para troca de informações sobre QEE. Na Europa, a Comissão Internacional de Eletrotécnica (International Electrotechnical Commission Standards, IEC) tem o padrão 61000, Part 4 – 30: Testing and measurement techniques, power quality measurement methods [7], que define também os padrões aceitáveis de funcionamento dos sistemas elétricos e os eventos de QEE.

Sobre o monitoramento da QEE algumas questões fundamentais devem ser analisadas antes mesmo da implantação de um sistema para tal fim: qual equipamento escolher, quantos e aonde os colocar, como conectá-los e qual o propósito [8, 9]. Uma solução inicial seria colocar monitores em todas as barras do sistema, mas o altíssimo custo a inviabiliza. Dessa maneira, buscando alternativas, novas propostas para se criar um sistema eficiente e com um custo viável foram feitas. Pesquisadores [10–19] mostraram que não há a necessidade da instalação de monitores em todas as barras, apenas com a medida de algumas tensões, correntes e com o conhecimento da topologia da rede pode-se estimar as demais variáveis do sistema. Esta nova abordagem, denominada de alocação ótima de monitores, permite reduzir o custo de monitoramento através da redução do número total de monitores necessários.

Pode-se definir três tipos de equipamentos de aquisição de dados para os sistemas de monitoramento [20]: medidor, analisador e monitor. O medidor é o mais simples deles, é portátil e eventualmente faz a aquisição dos dados instantâneos de tensão, corrente e potência e medidas RMS em alguns pontos do sistema. O analisador geralmente não é instalado permanentemente, mede os mesmos dados do medidor, mas faz análises de harmônicos e detecção de eventos de QEE em pontos críticos do sistema. Os monitores por outro lado já são de instalação permanente e coletam os dados de forma contínua para estudos da QEE.

Nessa tese considera-se que Monitores de QEE (MQEE) podem ser instalados em sistemas de distribuição e Unidades de Medição Fasorial (PMU), em sistemas de transmissão. Considera-se que a modelagem e solução de ambos problemas são iguais, porque entende-se que os MQEE medem diretamente as tensões e as correntes nas linhas conectadas às barras de instalação ao longo de todo tempo

e os PMU medem tensão, corrente e fase nas barras de instalação, sendo assim ambos medidores são capazes de calcular todas as demais tensões e correntes do sistema em que forem instalados. Portanto, cada variável, tensão ou corrente, será medida ou calculada pelo menos uma vez, fazendo com que o sistema seja completamente observável. Essa abordagem é mais geral do que encontrada na literatura, verificou-se através de estudos e simulações que o modelo utilizado pode ser o mesmo para os dois casos, no Cap. A, mostra-se a modelagem proposta para alocação de MQEE e verifica-se que ela pode ser substituída pela apresentada no Cap. 2 sem mudança nos resultados.

É importante mencionar que o MQEE se diferencia do PMU no que se refere à garantia de sincronicidade das medidas adquiridas de monitores diferentes, o que dificulta um pouco a reconstituição de todos os estados do sistema de distribuição usando MQEE. Para os PMU é mais simples calcular os sinais das barras adjacentes, uma vez que os sinais são sincronizados, mas isso não impede que se utilize os MQEE, desde que se use com cuidado os sinais provenientes do mesmo.

Neste trabalho apresenta-se um método para identificar o custo mínimo necessário para um sistema de monitoramento que garanta total observabilidade da rede de distribuição ou transmissão. A modelagem é baseada nos trabalhos de [13, 21–24], que definem um problema de programação linear inteira para verificar em quais pontos de um sistema elétrico de potência (SEP) são necessários MQEE/PMU, através apenas do conhecimento da topologia da rede, sem a necessidade de conhecimento de carga ou geração. Essa é uma grande vantagem deste método, porque o conhecimento das cargas em um SEP é impreciso, devido à sua grande variação ao longo do tempo. O problema de otimização gerado é conhecido como um problema de recobrimento (PR) e será explorado no Cap. 2. Encontram-se o número e a localização dos monitores necessários em uma rede de transmissão e/ou distribuição qualquer. A inclusão de sistemas de distribuição já representa um diferencial do trabalho anterior de [16, 18] que contemplava somente sistemas de transmissão.

Nesta tese não se preocupou com maiores modificações na modelagem do problema de alocação de PMU/MQEE, porque a principal contribuição está no método de solução do problema e os algoritmos são facilmente adaptáveis a inclusão de restrições diferentes no modelo original. Por exemplo, a existência de medidores convencionais não foi considerada na elaboração da matriz de densidade, visto que o foco foi observabilidade.

## 1.2 Metodologia

O problema retratado pode ser modelado como um Problema do Recobrimento (PR), que é um problema amplamente discutido em estudos de Otimização Combinatória [25–29], o que diferencia e dificulta enormemente a sua solução é o número de variáveis do problema real gerado.

A primeira proposta para resolver o problema de alocação de MQEE foi feita por Eldery et al. (2006) [30], utilizando inicialmente o software Gams, e no trabalho mais recente [13] o Tomlab, um pacote comercial de otimização que opera em conjunto com Matlab. Esse trabalho identifica a presença de várias soluções ótimas, que é uma característica própria de problemas de otimização combinatória 0-1. Escolhe-se entre as soluções de mínimo custo a de maior redundância. A proposta desenvolvida por Reis (2007) [16] encontra todas as soluções ótimas, o que não é possível com o Tomlab, porém recai em um problema de tempo de simulação para sistemas de grande porte, o que limitou a simulação ao sistema de teste IEEE de 118 barras [17].

Existe uma extensa bibliografia para alocação de PMU, que será tratada na seção 1.3 seguinte. Destaca-se que os softwares mais utilizados são o Tomlab e o próprio Matlab através da função *bintprog*, além disso os sistemas que são utilizados para teste são os IEEE 14, 30, 57 e 118 barras. Poucos trabalhos citam sistemas de maior porte [31–33], por essa razão, não focam no desenvolvimento de métodos de solução para o problema de alocação de sistemas com milhares de variáveis.

A proposta dessa tese é usar diferentes metodologias de solução para encontrar alocações ótimas ou subótimas de MQEE/PMU para sistemas elétricos de grande dimensão como o brasileiro ou um sistema de distribuição completo da região de uma concessionária. Para um sistema deste porte é mais importante ter uma solução que garanta a observabilidade da rede por completo, mesmo não sendo a ótima, desde que esteja próxima desta, do que não ter nenhum indicativo de onde instalar os monitores.

O uso de pacotes comerciais como Gams, Lindo, Tomlab, Cplex, entre outros, dificulta, na maioria das vezes, o entendimento dos métodos de busca das soluções ótimas ou subótimas e a sua adaptação a casos especiais, dada a impossibilidade de se conhecer ou alterar o código de programação. Além disso, existe uma grande dificuldade no uso de meta-heurísticas como algoritmos genéticos ou recozimento simulado para problemas de grande porte, o que impossibilita seu

uso para o caso em que o objetivo é simular sistemas tão grandes quanto o brasileiro.

Isso motivou a análise de quais ferramentas se adequariam aos objetivos propostos. Inicialmente, optou-se pelo desenvolvimento de métodos de busca da solução ótima. Na dissertação de Reis (2007) [16] foi apresentado um algoritmo do tipo *branch and bound* (BB), mas naquele trabalho buscavam-se todas as soluções ótimas para o problema, o que inviabiliza seu uso para sistemas de grande porte, o maior contemplado foi o IEEE-57. Nesta tese, adaptou-se o algoritmo BB para um que garantisse o encontro de apenas uma solução ótima, está apresentado no Cap. 2. Ainda na busca pela ferramenta adequada para a solução do problema de programação inteira (PPI) gerado, pensou-se em Programação Dinâmica Aproximada (PDA), visto que a Programação Dinâmica clássica também recai em limitação do número de variáveis, dada a *Maldição da Dimensionalidade*, que será vista com maiores detalhes no Cap. 3. No trabalho de Demir (2000) [34] encontrou-se como modelar um PPI em Programação Dinâmica Aproximada e também apresenta uma heurística de fixação (HF) de variáveis muito útil para achar uma solução subótima em tempo de simulação pequeno, o que é fundamental para grandes sistemas como o brasileiro. Essa heurística será apresentada no Cap. 2. O uso do algoritmo da PDA completo e o método proposto é detalhado no Cap. 3.

A principal contribuição desta tese é o desenvolvimento de um novo algoritmo de PDA, escrito para solucionar um PR com milhares de variáveis em um pequeno intervalo de simulação. Embora, hoje em dia, seja possível usar computação paralela para resolver sistemas grandes com intervalo de simulação aceitável, a solução por PDA é simples e permite controle de otimalidade com eficácia, além disso a técnica vem sendo crescentemente usada para resolver problemas de decisão sequencial de grande porte [35].

Todos os algoritmos apresentados, BB, HF e PDA, foram inteiramente implementados na linguagem Matlab, o único pacote utilizado foi o de solução de problemas lineares (*linprog*).

### 1.3 Revisão Bibliográfica

Esta seção apresenta a revisão bibliográfica feita sobre minimização de custo do sistema de monitoramento, alocação de MQEE e PMU no Sistema Elétrico de Potência (SEP), as ferramentas e as soluções utilizadas.

No que se refere aos métodos possíveis de solução do problema de interesse formulado, problema de programação linear inteira 0-1 do tipo Recobrimento, as principais referências bibliográficas serão discutidas nos Cap. 2 e 3. Vale citar aqui o trabalho de Martello et al. (2000) [36]. Martello e Toth se tornaram ao longo das últimas décadas as principais referências no estudo do Problema da Mochila, um problema de otimização combinatória similar ao gerado na solução da alocação de MQEE/PMU. Neste trabalho [36] eles apresentam algoritmos do tipo *branch and bound* e Programação Dinâmica com o objetivo de resolver problemas de maior porte e eles concluem que pode ser possível o uso de uma combinação de ambos para permitir que não se enumere todos os estados e estágios e ao mesmo tempo se consiga bons limitantes e se convirja em um tempo razoável. Ao final eles lançam o desafio de se mostrar se o uso dessas técnicas deve ser continuado ou não. Esta tese busca responder a esse desafio aplicando técnicas clássicas em conjunto com novas para solucionar um problema de grande porte real.

### **1.3.1 Minimização do custo do sistema de monitoramento**

Em 2001, Khan [37] observava que os consumidores naquele momento apenas desejavam ter energia elétrica em suas residências, mas que já se fazia necessário o aumento da confiabilidade dos sistema e estudos aprofundados da QEE. Como exemplo cita a necessidade ininterrupta de energia elétrica em centros de processamento de informação, os grandes provedores de internet. Neste artigo é mostrado um diagrama com a evolução dos equipamentos de monitoramento desde os anos 70, destaque para o quanto o custo total caiu e a capacidade de armazenamento de dados aumentou. Ainda em 2001, um outro trabalho discute se o monitoramento da QEE realmente provê retorno financeiro, Detroz [38] apresenta casos reais de estudos no Peru, na Bélgica e França para mostrar que houve minimização dos custos de operação com a implantação de sistemas de monitoramento permanente nesses países.

Uma outra possibilidade analisada para minimização do custo do sistema de monitoramento é a diminuição do custo de cada medidor individualmente ou de todo o sistema com centralização do processamento de informações. Em 2002, Won et al. [20] apresentam uma proposta de centralizar o processamento de dados usando medidores que adquirem os dados crus de tensão e corrente, não efetuam nenhum cálculo e os enviam para o analisador de QEE, que pode ser um computador pessoal (PC). Eles concluem que o desafio nesse tipo de sistema é o envio de dados e fazem uma previsão de que em pouco tempo a transmissão de

dados por internet se tornaria rápida e barata. Batista et al. [39] também propõem um sistema de aquisição e análise semelhante, usam um sensor para aquisição de dados de tensão e corrente e processam em um PC. Eles apontam como vantagem desse método o fato de não depender da instalação de um analisador de QEE específico que dependa de atualizações constantes de software, analisar os dados em um PC é mais flexível e possui grande capacidade de armazenamento de dados.

Hong et al. (2005) [40] apresentam uma proposta de resolver o problema de envio de dados a partir dos monitores, eles usam a própria linha de transmissão (*Power Line Communication-PLC*), o que dispensa o uso de outras linhas de comunicação na rede. No trabalho eles usaram o PLC para fazer a aquisição de dados, um modem PLC para envio e o computador pessoal para fazer a análise da QEE de acordo com o Padrão IEEE 1159 [6]. Outras propostas para solucionar o problema de envio de dados aparece nos trabalhos de Chang et al. (2006) [41] e Chan et al. (2007) [42], eles usam o Sistema de Posicionamento Global (GPS) para envio dos dados e testam inclusive o envio remoto de dados já analisados para um celular de um operador, por exemplo. Uma proposta de baratear o sistema através da diminuição do custo individual do medidor foi apresentada por Ferrigno et al. (2008) [43]. Eles fizeram o equipamento baseado em FPGA (*Field Programmable Gate Arrays*) que atende aos padrões IEC 61000-4-30 [7].

Comparando essas propostas com o cenário atual, pode-se dizer que o custo de transmissão de dados realmente caiu, assim como o preço individual do monitor. Processar e analisar todos os sinais em uma central pode ser interessante, mas o custo de se ter um monitor que já pré-processa os dados é barato e não justifica sobrecarregar a central.

### **1.3.2 Minimização do custo através da diminuição do número de monitores**

Sobre minimização do custo do sistema de monitoramento com a instalação apenas em algumas barras pode-se citar o trabalho de Abur e Magnano (1999, 2001) [10, 44] que trata do problema de alocação de medidores sob o ponto de vista da segurança estática do sistema. Acredita-se que estes trabalhos sejam os pioneiros a apresentar o problema de otimização linear inteira para resolver o problema de alocação de medidores em uma rede e manter a observabilidade da mesma mediante contingências. Eles apresentam uma modelagem que considera contingências no sistema elétrico de potência (SEP), como perdas de medidas ou

perdas de barras, que altera a observabilidade do sistema sob estudo. O problema de otimização encontrado é um de recobrimento e leva em consideração tais contingências em suas restrições. Isto é feito na modelagem da matriz de densidade em que cada elemento representa os locais de instalação e as contingências possíveis.

Com o mesmo objetivo de evitar a instalação de medidores em todas as barras, Ammer e Renner (2004) [11] propõem a utilização de uma série temporal usando modelos de regressão e correlação para encontrar a localização ótima dos medidores para a determinação de harmônicos em um sistema de monitoramento. São usadas técnicas de agrupamento (*clustering*) na busca de conjuntos de nós ou barras com comportamento semelhante. A metodologia pode ser aplicada tanto em sistemas de distribuição, como em sistemas de transmissão. Esta foi simulada em três redes distintas, uma rede urbana de média tensão 10kV, uma rede rural de 30kV e uma rede de transmissão de 110kV. Madtharad et al. (2005) [45] também desenvolvem uma técnica de alocação ótima de medidores de harmônicos que podem ser instalados em barramentos e em linhas de transmissão, sob restrição no número de medidas feitas. Destaca-se a recomendação dos autores para efetuar medições redundantes como forma de aumentar a confiabilidade nas soluções propostas.

Para encontrar o número mínimo de medidores e qual a sua melhor posição no sistema para reduzir o custo do sistema de monitoramento, garantindo a observabilidade dos eventos, Olguin et al. (2006) [12] apresentam um estudo sobre alocação ótima de monitores para caracterização de variação de tensão de curta duração (VTCD ou, no original em inglês, SAG) em sistemas de transmissão. Neste artigo as restrições do problema do recobrimento são feitas com base em simulações prévias de faltas em cada barra do sistema e a constatação da sensibilidade de cada barra em observar que houve um afundamento de tensão causado por estas faltas. O problema de otimização inteiro é resolvido com um algoritmo do tipo BB e, em seguida, é usado um algoritmo genético (AG) que avalia entre todas as soluções encontradas, quais são as mais indicadas para a avaliação dos afundamentos de tensão. O sistema de transmissão testado possui apenas 87 barras. Uma vantagem da aplicação do AG é a inclusão do fator de redundância da solução na modelagem do problema, o que garante a busca por alocação com maior redundância nas medidas. A desvantagem é que se aplica somente à alocação de medidores em sistemas de transmissão para avaliação de afundamentos de tensão e com um número limitado de monitores.

Um trabalho fortemente apoiado no de Olguin (2006) é o de Almeida (2007,2010) [14, 46], a principal diferença está no uso de teoria dos conjuntos fuzzy para garantir

a convergência do algoritmo de otimização em sistemas de maior porte, neste caso um sistema de 154 barras. A metodologia apresentada usa algoritmos genéticos e teoria dos conjuntos fuzzy para determinar o número ótimo de medidores e qual a sua localização ideal no SEP para monitorar os afundamentos e elevações de tensão na rede de transmissão. Esta modelagem é interessante, porque permite uma variação da topologia do sistema. Falta trifásicas e monofásicas são simuladas em todas as barras e linhas do sistema para se modelar o problema de otimização. Isto faz com que seja possível criar um método específico para monitorar as VTCD. Além disso, é possível propor a alocação para sistemas que possuem barras que devem ser monitoradas e/ou o número de medidores disponíveis é menor do que o mínimo necessário para atingir a observabilidade. Como validação do método proposto, os autores usaram três redes elétricas distintas para determinar o número mínimo de medidores e a sua localização e calcularam seus níveis de redundância e observabilidade.

Considerações importantes devem ser ressaltadas nos trabalhos [12, 14, 46]: O AG não garante a otimalidade, o que se obtém é uma solução satisfatória com tempo de simulação aceitável, seu uso é uma alternativa aos métodos convencionais de otimização combinatória para aumentar a velocidade de obtenção da solução para alocação de medidores, mas infelizmente esses trabalhos não apresentam soluções para sistemas de grande porte para permitir avaliação do tempo de simulação total. Para uma comparação rápida, para o sistema IEEE 30 barras foi encontrada uma solução de alocação em 88 ms em um computador com processador Intel Core 2 Duo de 2,66 GHz [46], nessa tese usando a Heurística de Fixação foi encontrada a solução ótima em 680 ms em um Intel Xeon 2,67 GHz. Além disso, um aspecto negativo com relação à solução obtida com AG é que pode não haver controle se a solução encontrada está na vizinhança do ótimo ou não.

Rakpenthai et al. (2007) [47] apresentam um método para alocar unidades medidoras de fasores (PMU) para a estimação dos estados de um sistema de potência baseado no número condicional mínimo da matriz de medidas normalizada. O método proposto encontra o conjunto de soluções ótimas necessárias para garantir a observabilidade do sistema com a perda simples de medidas e contingências como o desligamento de um ramo. Eles desenvolveram uma heurística para resolver o problema de alocação de medidores considerando as contingências na modelagem do problema de otimização e avaliando a solução que apresenta a maior redundância, testam para os casos IEEE até 57 barras. O número de medidores encontrados é bem superior aos resultados apresentados aqui, porque eles consideram na modelagem uma contingência, perda de medida ou desligamento de linha.

Dzienen et al. (2007) [15] apresentam um método para alocar dispositivos de QEE de forma ótima no SEP, embora o método não tenha a formalização de um problema de otimização 0-1 clássico, ele usa as equações de fluxo de potência separando para cada harmônico e cada fase. O ótimo se dá de acordo com os coeficientes da Jacobiana para cada harmônico. Testam em uma rede pequena de 6 barras e não mencionam o grau de dificuldade, número de iterações e intervalo de simulação necessário para se chegar ao ótimo.

Silva et al. (2010,2011) [48, 49] usam AG para solucionar o problema de alocação de monitores em sistemas de transmissão com a mesma modelagem apresentada na Seção 2.1.2, porém com a inclusão do fator de redundância de medidas inserido como objetivo, tornando o problema de alocação multiobjetivo. Testes foram feitos para os sistemas IEEE 14, 30 e 57 barras e garantem que a metodologia pode ser aplicada a sistemas maiores, com pequeno intervalo de simulação, visto que o fator de redância das medidas restringiu a busca da solução.

### **1.3.3 Alocação de monitores em Sistemas de Distribuição**

Uma interessante abordagem para o problema de alocação ótima de monitores em sistemas de distribuição é apresentada por Won e Moon (2008) [8], os autores também modelam como um problema de minimização baseado na topologia do sistema, eles definem a matriz de incidência, fazem a representação por árvore considerando as linhas como elementos principais e montam a matriz de recobrimento para gerar o PPI. A rotina de busca pelo ótimo não explicita o método utilizado e somente o sistema de distribuição IEEE 37 barras é testado.

Klaric e Sagovac (2007) [9] pretendem mostrar a instalação de um sistema de monitoramento da QEE na rede de distribuição em Elektra Zagreb na Croácia. As leis europeias e croatas obrigam que as companhias de distribuição estabeleçam sistemas de monitoramento de QEE e que forneçam relatórios do estado da QEE para seus consumidores e para as agências regulatórias. Uma das dificuldades apontadas é a quantidade enorme de dispositivos de medida de QEE, mas a falta de informação adequada. A forma decidida de onde colocar os monitores foi baseada nos documentos legislativos que afirmam que os parâmetros de QEE devem ser monitorados nos pontos de entrega para o consumidor, o que seria no lado de 0,4kV de subestações de 10/0,4kV, isso geraria um número de 2200 monitores, um sistema muito grande e caro. A solução encontrada foi colocar em subestações de

110 kV e 30 kV, para cobrir um bom número de consumidores e colher informações sobre a QEE que flui na rede de distribuição, além das distribuidoras poderem monitorar a qualidade entregue pelas transmissoras. Os monitores foram colocados no lado de baixa tensão dos transformadores. Os fatores que auxiliaram na escolha dos instrumentos foram: saídas analógicas; fontes auxiliares e backups; tamanho da memória; modo de operação; facilidade de programação; possibilidades de comunicação; classe do instrumento. Aparentemente as subestações a receber os monitores seriam as que se espera que tenham problema de QEE, como as que têm grandes consumidores industriais, subestações com importantes consumidores como hospitais e aeroportos e para decidir quantas unidades devem ser instaladas precisam saber dos fundos disponíveis para o investimento.

Uma continuação do trabalho de Eldery et al. (2006) [13], que foi utilizado como referência para a modelagem do problema vista no Cap. 2, foi feita por [19] para alocação ótima em sistemas de distribuição. Nesse trabalho eles usam GAMS como software de solução do problema e a técnica de *Vertex Coloring*; testam os sistemas IEEE, mas nenhum de grande porte, objetivando a identificação da poluição por harmônicas.

### 1.3.4 Alocação de PMU

Existe grande número de referências para alocação de PMU especificamente. Cita-se como pioneiro o trabalho de [50] que usa teoria dos grafos, algoritmo de busca dual e *simulated annealing*. Uma conclusão interessante desse trabalho é que o número de PMU necessários para garantir a observabilidade do sistema é entre um quarto e um terço do número total de barras. Resultado que pode ser comprovado para as simulações com custos de instalação iguais apresentadas no Cap. 4.

Ali Abur é referência em estudos de alocação de PMU, ao longo dos anos, vem estudando a alocação de PMU com objetivo de garantir a completa observabilidade do sistema [10, 21, 44, 51–55]. Em [21], ele apresenta a alocação de PMU usando diferentes tipos de restrições, considerando injeção de fluxos e a presença de barras de passagem, uma generalização mais completa foi feita por Gou [22, 23] e será apresentada no Cap. 2. Em 2007 [56], propõe um mecanismo para evitar medidas errôneas feitas pelos PMU, usando um estimador de estado referenciado por GPS. No trabalho [53] a proposta é fazer alocação ótima de PMU usando também medidores convencionais, prova-se que com alguma medidas extras se é capaz de aumentar a capacidade de detecção e identificação de erros de topologia em um

sistema. Em [57] é feita uma comparação entre o uso de medidores convencionais e PMU para a identificação de certos parâmetros da rede. Uma abordagem distinta é feita em [58], considera-se o número de canais disponíveis para o tipo de PMU e demonstra-se que dependendo da topologia do sistema existe um limite para o número de canais em que o custo não diminuirá mais. Abur et al. usam o Tomlab como programa de solução dos sistemas e até recentemente o maior sistema testado por eles era o IEEE 118 barras. Os trabalhos [33, 54, 55] apresentam alocação para sistemas de maior porte usando ilhas de sistemas menores, em [33] o sistema de teste possui 2285 barras, porém o algoritmo de solução não é detalhado. Em [55] é apresentado um método de fatorização da matriz de incidência reduzida para um sistema de transmissão de 4520 barras, mas não se usa o método proposto diretamente para alocação de PMU.

Yuill et al. (2011) [59] fazem um comparativo de metodologias de alocação de PMU e métodos de solução são avaliados: os que usam meta-heurísticas, algoritmos genéticos, otimização por enxames de partículas (*Particle Swarm Optimization*), busca em árvore ou topologia (*Tree Search and Topology*), e os métodos determinísticos como programação inteira e busca binária. A conclusão desse artigo sobre a forma matemática mais adequada para solução do problema de alocação de PMU é o uso de programação linear inteira, exatamente a ferramenta que foi usada nessa tese.

Outros trabalhos importantes de alocação de PMU são citados ao longo do texto, o objetivo dessa seção foi enfatizar o grande interesse pelo tema.

## 1.4 Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar soluções para o problema de alocação de monitores de qualidade de energia na distribuição e alocação de PMU na transmissão usando Programação Dinâmica Aproximada (PDA). A inovação está no desenvolvimento completo de um algoritmo de PDA e a principal contribuição é o uso dessa técnica em um problema clássico de programação linear inteira 0-1, problema do recobrimento, de grande porte real. Alocam-se monitores no sistema brasileiro de transmissão e no sistema teste IEEE de distribuição com 3861 barras. Para efeitos comparativos são desenvolvidos outros dois algoritmos de solução: um do tipo *branch and bound*, de solução exata, e uma heurística de fixação de variáveis, de solução aproximada. Usa-se ainda um pacote do Matlab para solução de problemas inteiros, *bintprog*, bastante difundido na literatura.

## 1.5 Contribuições Originais

Ao longo do desenvolvimento desta tese foram feitas contribuições em cada uma das etapas de solução do problema, evidencia-se cada uma delas a seguir:

- Problema do Recobrimento X Problema de Alocação de Monitores  
Verificou-se que o problema de alocação de PMU/MQEE é modelado matematicamente como o problema do recobrimento. Apenas os autores [13, 30] relacionam o problema de alocação de MQEE com o PR, mas usam um pacote para solução do problema. Para alocação de PMU não foi encontrada nenhuma relação com o PR nas referências pesquisadas, de forma geral, os autores usam pacotes de otimização para solução do problema.
- Mesmo modelo para Transmissão e Distribuição  
Uma outra vantagem de identificar que o problema de alocação de MQEE/PMU pode ser modelado como o PR, problema clássico de otimização combinatória, foi verificar que o problema de alocação de MQEE é exatamente o mesmo de alocação de PMU com o objetivo de estimação de estados. Mostra-se no Cap. A que o modelo usado por [16–19, 48, 49] encontra as mesmas soluções para alocação de MQEE e PMU. Em nenhum outro trabalho da literatura pesquisada encontra-se essa união dos dois tipos de problema.
- Métodos de Solução  
A descrição do modelo como um PR possibilitou o desenvolvimento de técnicas de solução específicas. Buscou-se na literatura de otimização combinatória 0-1 os métodos de solução mais comumente usados e quais vantagens e desvantagens de cada um deles. Desta forma, desenvolveu-se um algoritmo *branch and bound* que possui solução exata, porém é inviável para solucionar problemas de grande porte, devido ao caráter enumerativo de sua busca. Em seguida, pensou-se em utilizar Programação Dinâmica Aproximada devido ao seu crescente uso em problemas reais de difícil solução, mas não se encontrou um algoritmo específico para solução do PR. Nessa procura, encontrou-se a Heurística de Fixação, que foi desenvolvida para solucionar o Problema da Mochila, e adaptou-se com sucesso para solucionar o PR. Essa heurística usada sozinha apresentou resultados subótimos de excelente qualidade para sistemas de grande porte.

- Desenvolvimento de um novo algoritmo de PDA

Desta forma, desenvolveu-se um algoritmo completamente novo de Programação Dinâmica Aproximada com base na Heurística de Fixação para solução da alocação de PMU/MQEE em sistemas de transmissão e distribuição respectivamente. Destaca-se o desenvolvimento de dois novos algoritmos de PDA e a elaboração de suas condições de contorno para a solução através da equação de recursividade de Bellman. Assim, a principal contribuição da tese é resolver um problema com milhares de variáveis em um pequeno intervalo de simulação e com controle de otimalidade usando um novo algoritmo de PDA.

## 1.6 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está dividido em cinco capítulos: O Capítulo 1, Introdução, apresenta as considerações iniciais que motivaram o estudo de alocação de monitores de QEE, em seguida faz-se uma Revisão Bibliográfica sobre o tema, que destaca os principais objetivos, a relevância acadêmica e o contexto no setor elétrico.

O Capítulo 2, Modelagem do Problema e Métodos de Solução, apresenta a formulação matemática do problema de minimização do custo do sistema de monitoramento de QEE, além de mostrar um exemplo de como é a topologia das redes simuladas, apresenta ainda os algoritmos de solução: um do tipo *branch and bound*, uma Heurística de Fixação e a função *bintprog*, uma ferramenta do Matlab para programas inteiros, usada como referência.

No Capítulo 3, Algoritmo de Solução Proposto, desenvolve-se a técnica de Programação Dinâmica detalhadamente para ilustrar de forma didática todos os passos necessários para solucionar um problema inteiro binário e para permitir formalização do método proposto que usa Programação Dinâmica Aproximada.

O Capítulo 4, Resultados, relata as soluções encontradas para alocação de monitores em diversos tipos de redes elétricas, desde as redes de teste IEEE de Transmissão, como as de Distribuição, passando por casos reais, o peruano com 118 barras e o brasileiro com 2834 barras, e finalizando com o sistema IEEE 3861 barras de Distribuição, usado para validar a escalabilidade dos algoritmos. Os resultados usando os algoritmos apresentados no Cap. 2 são apresentados.

O capítulo final, Conclusões e Trabalhos Futuros, apresenta as conclusões

obtidas nesta tese e também as sugestões para trabalhos futuros.

Nos Anexos apresentam-se o modelo apresentado na literatura para resolver o problema de alocação de medidores de QEE e algumas soluções de alocação detalhando as barras de instalação.

## Capítulo 2

# Modelagem do Problema e Métodos de Solução

Este capítulo apresenta inicialmente a formulação matemática do problema de minimização gerado na modelagem do problema de alocação de monitores de QEE e de alocação de PMU. Apresenta-se o modelo desenvolvido por Abur et al. (2004, 2006) [21, 52] e Gou (2008) [22, 23]. Em seguida, apresentam-se três algoritmos de solução, o primeiro é o algoritmo de solução ótima exata do tipo *brach and bound*, o outro é uma heurística que apresenta soluções ótimas ou subótimas e o terceiro é uma função do *Matlab* para solução de problemas inteiros que será usada como referência. Os resultados obtidos com esses algoritmos estão apresentados no Cap. 4. Faz-se a comparação do modelo apresentado e o de Eldery et al. [13, 30] nos Anexos, Cap. (A).

### 2.1 Formulação Matemática do Problema

Ao longo dos primeiros anos de estudo do problema, usou-se a modelagem retirada do trabalho de Eldery et al. (2004,2006) [13, 30] para o problema de alocação de monitores de qualidade de energia (MQEE), que está detalhada na dissertação de Mestrado de Reis (2007) [16] e nos artigos [17, 18]. Após análises e simulações dos trabalhos de [21–23, 52] para o problema de alocação de PMU, verificou-se que a modelagem das restrições do problema de alocação de MQEE e alocação de PMU são semelhantes. Desta forma, concluiu-se que o modelo de alocação de MQEE poderia ser simplificado, obtendo tempo de simulação bem menor. A partir de então, considera-se que a formulação matemática é a mesma para os dois problemas de alocação. O detalhamento e a comparação entre as modelagens está apresentado no Cap. (A).

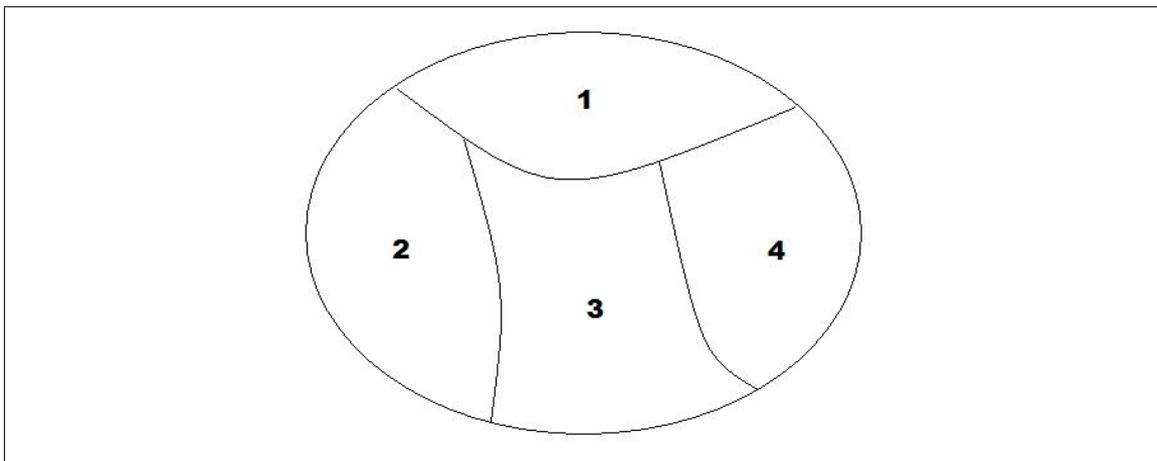
O problema encontrado,  $P^0$ , recai em um dos problemas clássicos da otimização combinatória, que é o Problema do Recobrimento (PR) [25, 26], este tipo de problema é considerado um *Problema de Programação Linear Inteira (PPI) Binário*, ou seja, um problema em que todas as funções são lineares e as variáveis possuem valores inteiros 0 ou 1.

Nesta seção é apresentado um modelo geral para o PR, em seguida, apresenta-se o modelo para alocação de MQEE/PMU.

### 2.1.1 Problema do Recobrimento

Os problemas de entrega, roteamento, agendamento e localização, de uma forma geral podem ser modelados como PR, pois é preciso garantir que todo cliente seja servido por pelo menos um veículo, pessoa ou serviço de qualquer natureza. A alocação ótima é modelada como um PR e consiste em minimizar o número de postos de atendimento instalados, mas sempre garantindo que toda a região seja “coberta” ou atendida por pelo menos um desses postos.

A instalação de postos de atendimento comunitário de um serviço essencial qualquer, como postos de saúde, policiais, de bombeiros, etc., é um exemplo prático de PR. Sabe-se que todos os bairros devem ser atendidos, mas não necessariamente que todos necessitam da instalação de um posto, visto que aumentaria demasiadamente o custo. Para modelar este problema considera-se que cada posto instalado atende ao próprio bairro e a todos os bairros adjacentes; dessa forma instalam-se postos somente em alguns bairros e, garante-se atendimento na cidade inteira.



**Figura 2.1:** Mapa de uma cidade qualquer dividida em 4 regiões.

A Fig. 2.1 mostra um mapa fictício de uma cidade dividida em quatro regiões,

para este exemplo verifica-se que ao instalarmos um posto na região 1, as regiões 2, 3 e 4 são atendidas, porque são adjacentes à 1. Outra opção seria instalar em 3 e as regiões 1, 2 e 4 também seriam atendidas. Existe ainda a opção de instalação de dois postos, um em 2 e outro em 4, mas na hipótese do custo de instalação em qualquer bairro ser igual, essa última opção de alocação seria descartada por apresentar maior custo.

Em um caso pequeno como esse, fica simples de se encontrar soluções por mera observação, porém imaginando que em aplicações reais o número de regiões é muito maior, torna-se necessário escrever matematicamente esse problema. A formulação do PR pode ser vista como segue:

$$\boxed{P^0} \quad \min z = \sum_{j=1}^n c(j) \cdot x(j) \quad (2.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j=1}^n d(i, j) \cdot x(j) \geq b(i) \quad (2.2)$$

$$0 \leq x(j) \leq 1 \quad (2.3)$$

$$x(j) \text{ inteiro para } j = 0, 1, \dots, n \quad (2.4)$$

em que  $c(j)$  representa o custo de instalação do posto no bairro  $j$ ,  $x(j)$  é  $j$ -ésimo elemento do vetor de variáveis,  $n$  é o número de locais possíveis de instalação de postos,  $d(i, j)$  é um elemento que representa as restrições do problema de recobrimto que informam a topologia do sistema, ou seja, quais bairros são vizinhos ou não e  $b(i)$  é um vetor coluna geralmente com todos os elementos iguais a 1, porque é necessário que o posto seja coberto pelo menos uma vez. Cada elemento de  $\mathbf{D}$  pode ser definido como:

$$d(i, j) = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \text{ ou se a região } i \text{ é adjacente à região } j \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2.5)$$

Matricialmente esse problema pode ser escrito como

$$\boxed{P^0} \quad \text{Minimizar } z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \quad (2.6)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ x(j) \in \{0, 1\}, \forall j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.7)$$

em que  $\mathbf{c}$  é o vetor de custos,  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis com cada elemento sendo definido por  $x(j)$ ,  $\mathbf{D}$  é denominada matriz de densidade e representa as restrições do problema,  $\mathbf{b}$  é um vetor de 1 e  $n$  é o número de locais possíveis de instalação de postos.

Essa é a formulação geral de um PR, embora tenha sido vista para um exemplo de alocação de postos de atendimento comunitário, pode se aplicar a qualquer outro problema dessa natureza, como o de interesse nesta tese, problema de alocação de monitores. Nesse caso, o que se deseja é instalar o número mínimo de medidores em uma rede do sistema elétrico de potência (SEP) e garantir que seja possível observar todas as tensões e correntes do sistema necessárias para a análise da QEE. A formulação do problema encontra-se a seguir na seção 2.1.2.

### 2.1.2 Problema de Alocação de MQEE/PMU

Esta seção detalha a modelagem proposta para o problema de alocação de MQEE/PMU. A formulação do problema baseia-se na topologia da rede e nas leis de Ohm para circuitos elétricos. Algumas definições se fazem necessárias.

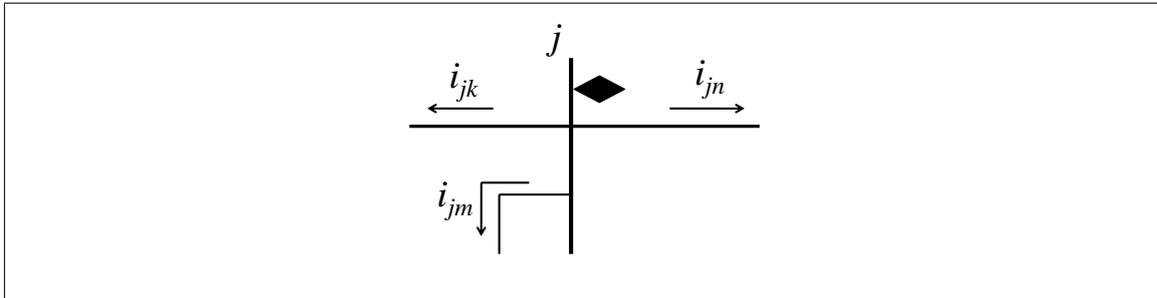
Locais de instalação: As possíveis localizações dos monitores são as barras do sistema, locais em que se encontram as subestações, onde é viável efetuar a coleta e pré-processamento dos dados.

Variáveis de estado: São as tensões em cada barra.

Observabilidade: Uma variável de estado é dita observável se medida ou calculada por pelo menos um MQEE/PMU. Tenta-se garantir a observabilidade sempre, ou seja, todos os seus estados devem ser medidos ou calculados em qualquer instante de tempo.

MQEE/PMU: considera-se que as unidades de medidas são equipamentos de instalação permanente que medem tensão e corrente ao longo do tempo, como definido no Cap. 1, eles são compostos por um sistema de aquisição, processamento e envio de dados. Os MQEE são instalados em sistemas de distribuição e medem ao longo do tempo a tensão na barra de instalação e todas as correntes de todas as linhas diretamente ligadas àquela barra. Os PMU são instalados em sistemas de transmissão e medem a tensão e corrente fasoriais na barra de instalação. Em ambos os casos, com os dados medidos é possível fazer a estimação de estados de

todo o sistema, através do cálculo das tensões nas barras remotas. Por esta razão, considera-se ao longo do trabalho que a modelagem de alocação é similar para os dois monitores.



**Figura 2.2:** Exemplo de um monitor instalado na barra  $j$ .

A Fig. 2.2 mostra um esquema em que  $j$  é uma barra qualquer do sistema de transmissão ou distribuição com três linhas, das quais saem as correntes  $i_{jk}$ ,  $i_{jm}$ ,  $i_{jn}$  e um monitor está instalado, representado pelo losango. Nesse caso, o monitor mede a tensão na barra  $v_j$  e as correntes  $i_{jk}$ ,  $i_{jm}$ ,  $i_{jn}$  e calcula as tensões nas barras conectadas à  $j$ , ou seja,  $v_k$ ,  $v_m$ ,  $v_n$ .

O problema da alocação de MQEE/PMU pode ser descrito como um problema de recobrimento da seguinte forma: dadas as posições possíveis de localização dos medidores, as barras do sistema, e o custo de instalação de cada um deles, o problema é encontrar o custo mínimo do sistema de monitoramento, garantindo a observabilidade de todo o sistema. A solução do problema deve mostrar o número mínimo necessário de monitores e quais os possíveis locais de instalação.

A modelagem proposta para o problema de alocação é baseada na topologia do sistema e, por esta razão, toda a metodologia apresentada só é válida se a topologia do sistema não for alterada. Esta restrição não compromete o uso do método em uma das principais aplicações da QEE que é a localização das fontes poluidoras da rede.

Inicialmente, considera-se o sistema com  $n$  barras e  $L$  linhas, a seguir são apresentados os vetores e matrizes necessários para a formulação completa do problema.

## Vetor de Existência

O vetor de existência (2.9) é um vetor binário de dimensão  $(n \times 1)$ , que representa a instalação ou não de monitores nos barramentos, sendo que cada elemento deste vetor é definido por (2.8).

$$x(j) = \begin{cases} 1, \text{ se o monitor for instalado na barra } j \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{x} = [x(1) \quad x(2) \quad \cdots \quad x(n)]^t \quad (2.9)$$

## Vetor de Custo

Para a instalação de cada um dos monitores existe um custo associado, que está representado no problema pelo vetor de custos,  $\mathbf{c}$ , (2.11), cuja dimensão é  $(1 \times n)$  representando o número total de regiões possíveis de instalação, ou seja, o número total de barras do sistema. Cada elemento deste vetor pode ser definido como segue (2.10).

$$c(j) = \text{custo de instalação do monitor na barra } j \quad (2.10)$$

$$\mathbf{c} = [c(1) \quad c(2) \quad \cdots \quad c(n)] \quad (2.11)$$

## Função Objetivo

O objetivo deste problema é minimizar o custo total do sistema de monitoramento, que é dado pela soma do custo de instalação de cada um dos medidores. Assim, a equação é descrita como em (2.1,2.6), repetida aqui por conveniência.

$$\min z = \sum_{j=1}^n c(j) \cdot x(j) \Rightarrow \min z = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \quad (2.12)$$

## Restrições

Como no exemplo da Seção 2.1.1, em que se garantiu que um posto instalado em uma região atendia a todas as regiões adjacentes, agora é preciso assegurar que para qualquer sistema, um monitor instalado em uma barra é capaz de medir as tensões nesta barra, as correntes que saem desta barra e, desde que conhecidos os parâmetros da linha, calcular as tensões nas barras adjacentes. Este conhecimento é suficiente para se conseguir descrever as restrições do PR apresentadas a seguir:

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} \sum_{j=1}^n d(i, j) \cdot x(j) \geq b(i) \\ 0 \leq x(j) \leq 1 \\ x(j) \text{ inteiro para } j = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.13)$$

Matricialmente

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ x(j) \in \{0, 1\}, \forall j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.14)$$

O vetor à direita da desigualdade, denominado por  $\mathbf{b}$  e definido em (2.15), possui todos os elementos iguais a 1, o que garante que pelo menos um monitor irá cobrir a variável  $x(j)$ , sua dimensão é  $(n \times 1)$ .

$$\mathbf{b} = [ 1 \quad \dots \quad 1 ]^t \quad (2.15)$$

Em seguida, será mostrada a forma mínima de se escrever as restrições do problema de alocação tanto na distribuição quanto na transmissão.

### **Restrições - Elaboração de Alocação PMU/MQEE**

Para solução do problema de alocação de PMU no sistema de transmissão vários autores propuseram modelagens [10, 21–24, 47, 50, 52, 53, 60–62]. Para solução do problema de alocação de monitores de QEE, Eldery et al. (2004,2006) [13, 30] propuseram a elaboração das restrições do problema usando as Leis de Ohm. Além dos trabalhos de Eldery et al., essa modelagem foi usada nos trabalhos de Reis (2007,2008,2010) [16–18], Alhazmi (2010) [19], Silva et al. (2010) [48] e Branco et al. (2011) [49] e o que se observou é que a proposta de Eldery et al. não é mínima e obtém os mesmos resultados da modelagem proposta para alocação de PMU, maiores detalhes e a comparação entre os modelos está no Cap. (A).

A diferença entre o monitor de qualidade de energia e uma unidade de medição fasorial é basicamente os níveis de tensão. O primeiro é para avaliar eventos de qualidade de energia nos sistemas de distribuição e o segundo nos sistemas de transmissão; em ambos os casos os monitores medem a tensão no barramento em que é instalado e as correntes de todas as linhas ligadas a esse barramento, além disso, estimam as tensões de todas as barras ligadas àquele barramento. Assim, as restrições do problema precisam garantir que todas as variáveis serão medidas ou

calculadas para pelo menos um monitor.

Para o caso específico de alocação de PMU nos sistemas de transmissão, considera-se que algumas tensões em algumas barras já são conhecidas, são as barras de passagem do sistema. Nesse caso, pode haver redução no número necessário de PMU instalados e conseqüentemente diminuição do custo de instalação do sistema de monitoramento. Por essa razão, serão apresentados dois tipos de modelos para elaboração das restrições do problema: o primeiro considera somente a topologia do sistema e o segundo já considera as barras de passagem.

Existem outros tipos de modelos e restrições possíveis de serem feitas [8, 32, 47, 61], mas foge do escopo desse trabalho que é apresentar algoritmos de solução para o problema de recobrimento de forma geral.

### Sistemas Sem Barras de Passagem

A matriz de densidade do PR para alocação de MQEE e alocação de PMU em sistemas sem barras de passagem será denominada por  $\mathbf{D}$  e pode ser definida como a matriz que garante a observabilidade completa da tensão em todas as barras do sistema; sua dimensão é dada pelo número total de barras, ou seja, número de locais possíveis de instalação de PMU ( $n \times n$ ), cada elemento dessa matriz está definido em (2.16).

$$d(i, j) = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i \text{ e } j \text{ estão conectadas} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2.16)$$

### Sistemas com Barras de Passagem

É considerado que se o sistema possui uma ou mais barras de passagem, algumas de suas tensões já são conhecidas devido às leis de Kirchhoff. Assim, as restrições do problema devem ser adaptadas considerando essa situação e constrói-se uma nova matriz densidade, além de alterar o vetor  $\mathbf{b}$ . Essa modelagem está presente nos seguintes trabalhos [21–24].

A nova matriz densidade  $D^{inj}$  está definida em (2.17), em que  $J$  é o número de barras de passagem,  $L$  o número de barras que estão conectadas a pelo menos uma

barra de passagem e  $M$  o número de barras não associadas a nenhuma barra de passagem.

$$\mathbf{D}^{\text{inj}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{D} \quad (2.17)$$

$\mathbf{P}$  é uma matriz permutação da identidade e sua dimensão é  $n \times n$ , cada elemento da matriz de densidade  $\mathbf{D}$  foi definido em (2.16) and  $\mathbf{A}$  é definido em (2.18) com dimensão  $(J + L) \times n$ .

$$A = \begin{bmatrix} I_{M \times M} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\text{meas}} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Cada elemento da matriz  $\mathbf{A}_{\text{meas}}$  é definido em (2.19) e sua dimensão é  $J \times L$ ,  $I$  é a matriz identidade e  $M$  é o número de barras não conectadas a nenhuma barra de passagem.

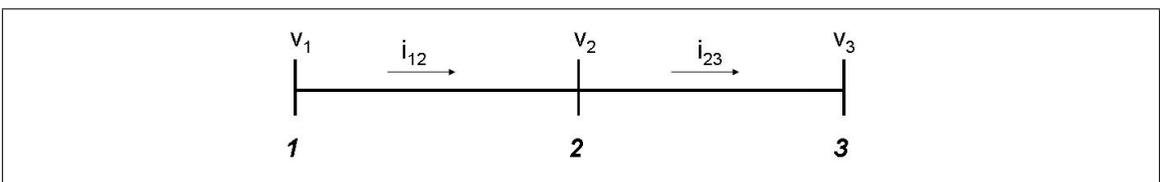
$$a_{\text{meas}}(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{se a barra } i \text{ está conectada à barra } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.19)$$

O vetor coluna  $\mathbf{b}$  deve ser adaptado para esse caso, sua dimensão passa a ser  $(J + L) \times 1$  e seu último elemento é igual a  $J$ .

$$\mathbf{b} = [ 1 \quad \dots \quad J ]^t \quad (2.20)$$

### 2.1.3 Exemplo de Alocação de MQEE e PMU para um Sistema de 3 barras

A Fig. 2.3 mostra um sistema com três barras e duas linhas de transmissão que será usado como exemplo para a elaboração das matrizes dos problemas de alocação de MQEE e de alocação de PMU sem considerar barras de passagem. Esse exemplo ilustra claramente a simplificação feita na modelagem proposta para alocação de PMU em relação a de MQEE, que diminui consideravelmente a complexidade do problema e consequentemente seu tempo de simulação.



**Figura 2.3:** Sistema Exemplo com três barras.

A representação do sistema é feita através de um diagrama unifilar simplificado, pois não são necessários conhecimentos de parâmetros de carga ou geração para a elaboração do PR, somente da sua topologia para indicar como as barras estão conectadas.

A Tab. (2.1) apresenta os dados de entrada para o algoritmo para a rede exemplo da Fig. (2.3).

Tabela 2.1: Dados de topologia para uma rede de 3 barras e 2 linhas de transmissão.

<i>De</i>	<i>Para</i>
1	2
2	3

Este sistema é dado por  $n = 3$  barras e  $L = 2$  linhas. O vetor de existência é

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & x(3) \end{bmatrix}^t. \quad (2.21)$$

O vetor de custos será dado por

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c(1) & c(2) & c(3) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

### Alocação de PMU/MQEE

Para a formulação das restrições do problema de alocação de PMU/MQEE do sistema da Fig. 2.3, monta-se diretamente a matriz  $\mathbf{D}$  a partir da Eq. (2.16). O vetor de existência e o vetor de custos são os representados pelas Eq. (2.21) e (2.22).

$$\mathbf{D} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{matrix} \quad (2.23)$$

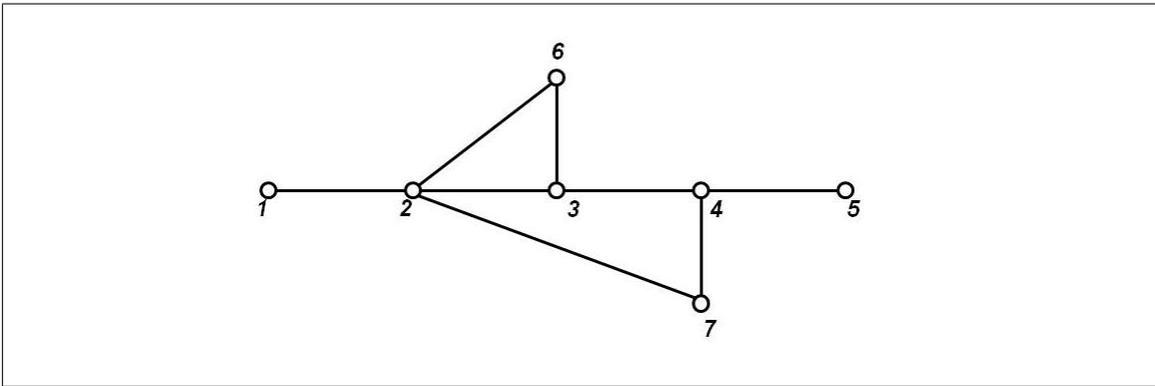
O problema geral de alocação se torna o seguinte.

$$\min z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^t \quad (2.24)$$

$$\text{Sujeito a } \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ x_j \in \{0, 1\}, \forall j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.25)$$

### 2.1.4 Exemplo de Alocação de PMU com barras de Passagem

Para a formulação do problema de alocação considerando as barras de passagem é usado o sistema de 7 barras da Fig. 2.4 retirado do trabalho [22].



**Figura 2.4:** Exemplo de uma rede com 7 barras e 8 linhas.

Serão explicitadas todas as matrizes, primeiro considera-se o sistema sem nenhuma barra de passagem, em seguida, a barra 3 é a barra considerada sem injeção de corrente.

#### Sistema sem barra de passagem

Inicialmente, é necessário montar a matriz  $\mathbf{D}$ , cada elemento é encontrado a partir da Eq. (2.16) para os sistema da Fig. 2.4.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

### Sistema com barra de passagem

A matriz permutação  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Para calcular a matriz  $\mathbf{D}^{\text{inj}}$  é preciso calcular a matriz  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}^{\text{meas}}$ .

A matriz  $\mathbf{A}^{\text{meas}}$  é dada por

$$\mathbf{A}^{\text{meas}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

A matriz  $\mathbf{A}$  é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

A matriz  $\mathbf{D}^{\text{inj}}$  é dada por

$$\mathbf{D}^{\text{inj}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Nas seções seguintes serão detalhados dois algoritmos de solução desenvolvidos para resolver este problema de minimização e encontrar suas soluções ótimas, que apresentam o menor custo total do sistema de monitoramento e as possíveis localizações dos medidores neste sistema.

## 2.2 Definição do Limitante Inferior

Define-se nesta seção o limitante inferior dos PPI para permitir o controle da otimalidade da solução. Este critério será usado em todos os algoritmos desenvolvidos ao longo da tese. Na p. 27 do livro [25] está uma introdução sobre o limitante superior no caso de maximização, que pode ser entendido como um limitante inferior para o caso de minimização.

Denominando por  $z^0$  a solução do problema linear inteiro 0-1, definido em (2.31) e  $\bar{z}^0$  a solução do problema linear relaxado, definido em (2.32), em que  $x$  pode assumir qualquer valor real entre 0 e 1.

$$z^0 = \min \{ \mathbf{c} \mathbf{x} \mid \mathbf{D} \mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \} \quad (2.31)$$

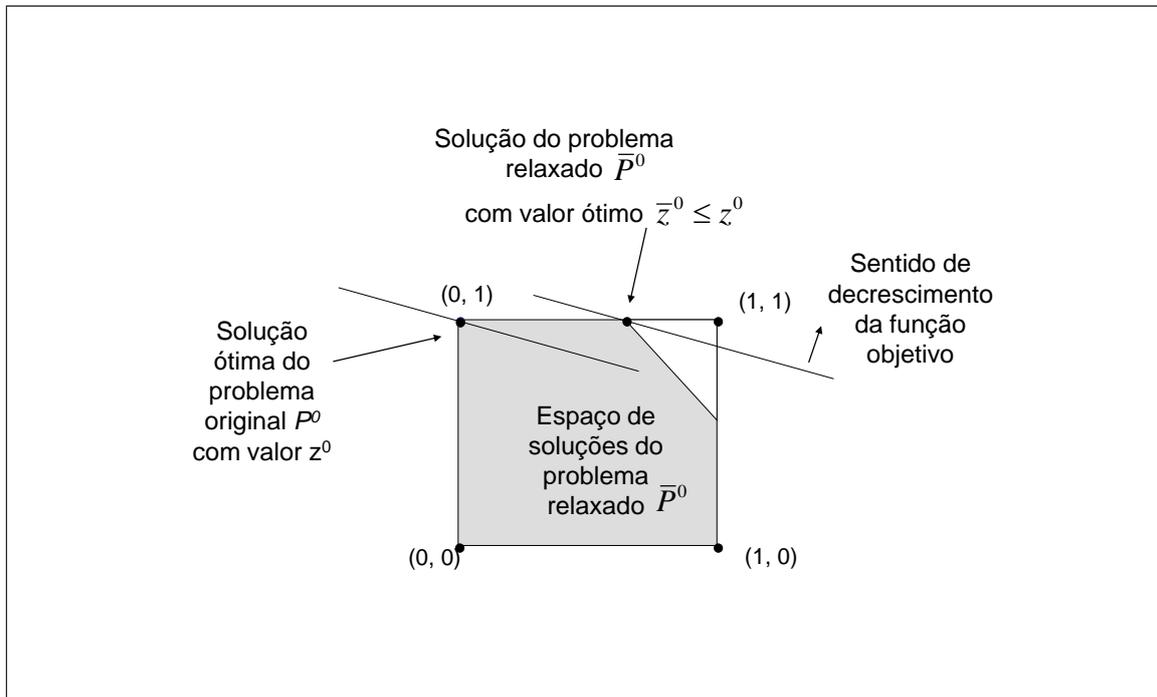
$$\bar{z}^0 = \min \{ \mathbf{c} \mathbf{x} \mid \mathbf{D} \mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \} \quad (2.32)$$

Sabe-se que  $z^0 \geq \bar{z}^0$ , já que  $\mathbb{Z}_+^n \subset \mathbb{R}_+^n$ . Este limitante  $\bar{z}^0$  pode ser usado para provar otimalidade do PPI; ou seja, se houver uma solução inteira de igual valor ao limitante inferior, ela será ótima. Segue um exemplo para um problema de duas variáveis para facilitar a compreensão.

### 2.2.1 Exemplo para um problema de duas variáveis

A Fig. 2.5 mostra, por exemplo, um problema  $P^0$  com apenas duas variáveis binárias  $x(1)$  e  $x(2)$ , o número de soluções inteiras possíveis é 4, elas estão representadas pelos vértices da figura: (0,0), (1,0), (0,1) e (1,1).

A área sombreada é o espaço das soluções viáveis do problema  $P^0$  relaxado, denotado por  $\bar{P}^0$ , isto é, aquele onde as variáveis  $x(1)$  e  $x(2)$  podem assumir qualquer valor real entre 0 e 1, isto é,  $0 \leq x(1) \leq 1$  e  $0 \leq x(2) \leq 1$ . A solução ótima do problema  $\bar{P}^0$  é, neste exemplo, o vértice cujo valor ótimo é  $\bar{z}^0$ .



**Figura 2.5:** Exemplo de um PPI binário de duas variáveis.

As soluções inteiras viáveis do problema  $P^0$  são os vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  e  $(0,1)$ . O vértice  $(1,1)$  não é uma solução viável para  $P^0$ , porque está fora do espaço de soluções. A solução ótima do problema  $P^0$  é, neste exemplo, o ponto  $(0,1)$  de valor  $z^0$ .

O valor  $z^0$  é maior que o valor  $\bar{z}^0$  da solução ótima do problema relaxado  $\bar{P}^0$ . Esta é uma propriedade importante que relaciona todo e qualquer problema linear inteiro com seu correspondente relaxado, isto é, onde as condições de integralidade foram suprimidas. Nos problemas de minimização o valor ótimo  $z^0$  do problema linear inteiro original é igual ou maior do que valor ótimo  $\bar{z}^0$  do correspondente problema relaxado. Portanto resolvendo-se o problema linear relaxado obtém-se um limitante inferior,  $z_L$ , para o valor ótimo do problema original  $z^0$ . O cálculo destes limitantes (*bounds*) é um passo fundamental na construção dos algoritmos que serão usados: BB, heurística e PDA.

## 2.3 Solução por Branch and Bound

Algoritmos do tipo *branch and bound* (BB) ou em Português *particionamento e poda* são mais conhecidos na comunidade científica por seu nome original em Inglês e serão tratados dessa forma ao longo do texto. Eles são usados para solucionar problemas de programação linear inteira (PPI) e especialmente problemas binários,

isto é, tanto a função objetivo quanto as restrições são funções lineares e cada uma das  $n$  variáveis podem assumir apenas valores binários: 0 ou 1 [25, 26, 36, 63]. Essa técnica vem sendo utilizada há bastante tempo e não sofreu tantos avanços no que se refere a intervalo de simulação permitindo aplicações em sistemas de grande porte [27, 28, 63–66]. Os PPI pertencem a classe dos problemas NP-completos, o que significa que é muito improvável desenvolver algoritmos para solucioná-los em tempo polinomial.

No trabalho de Reis (2007) usou-se BB para solucionar o problema de alocação de MQEE, mas como buscava-se todas as soluções ótimas o maior sistema simulado foi o IEEE 57 barras. Resultado para o sistema IEEE 118 barras foi apresentado em Reis (2008) [17].

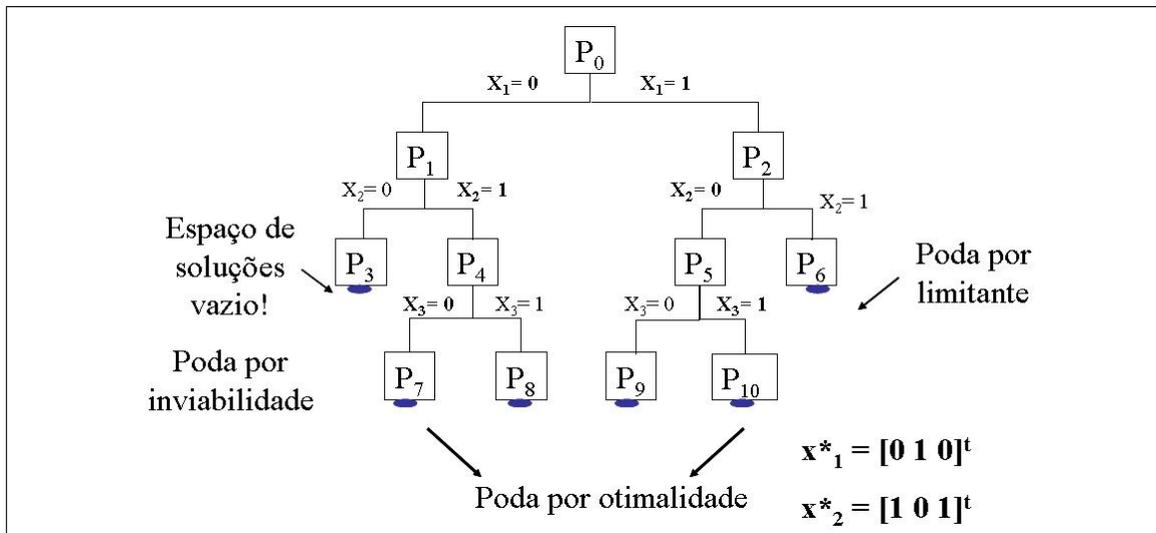
A proposta de uso do BB neste trabalho é a de permitir compará-lo com o método proposto que se baseia na técnica de PDA, já que essas técnicas são especialmente desenvolvidas e aplicadas para resolver PPI. A diferença e vantagem do BB é que ele garante otimalidade. A PD clássica também garante, mas PDA e a heurística apresentada na seção seguinte, 2.4, não fornecem tal garantia. Assim, o uso de uma técnica robusta que garanta otimalidade se faz necessário.

A técnica implementada por algoritmos BB consiste em buscar soluções ótimas do problema  $P^0$  utilizando-se o particionamento (*branching*) e a poda (*bound*). Achar todas as soluções ótimas de  $P^0$  requer averiguar, a princípio, todas as  $2^n$  soluções possíveis para as variáveis binárias  $x(j)$ . Nem todas estas possíveis soluções são viáveis, isto é, satisfazem não somente às restrições (2.3), mas também às restrições (2.4) do problema  $P^0$ .

O particionamento é a divisão do espaço de soluções do problema original em espaços menores, com um menor número de soluções possíveis a serem averiguadas, considerando que é mais fácil resolver dois problemas combinatórios menores do que o problema que lhes deu origem. Por exemplo, o problema original  $P^0$  com  $n$  variáveis pode ser particionado nos problemas:  $\{P^1 = P^0 | x(i) = 0\}$  e  $\{P^2 = P^0 | x(i) = 1\}$ , em que  $x(i)$  é uma variável qualquer do problema  $P^0$ . Cada um dos dois problemas gerados a partir de  $P^0$  tem  $(n - 1)$  variáveis e, portanto,  $2^{n-1}$  soluções possíveis a serem investigadas.

Cada um dos problemas  $P^k$ , em que  $k$  é qualquer dos ramos da árvore, será resolvido e podado ou novamente particionado gerando dois outros problemas na árvore, que serão resolvidos, podados ou particionados; e assim sucessivamente. A

Fig. (2.6) mostra um exemplo de uma árvore expandida para um problema a três variáveis.



**Figura 2.6:** Árvore representando a expansão do problema  $P^0$ .

Os algoritmos BB se diferem basicamente nos critérios de poda, que são os pontos de decisão se haverá particionamento do problema  $P^k$  ou não. Quanto melhor o critério de poda, mais rápida a convergência do algoritmo. Para descrever esse procedimento, define-se o problema original como em (2.33) e denomina-se por problema  $P^k$  relaxado,  $\bar{P}^k$ , a solução do problema  $P^k$  sem a restrição de integralidade (2.34).

$$P^k = \min \{ \mathbf{c} \mathbf{x} \mid \mathbf{D} \mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \{0, 1\}^t \} \quad (2.33)$$

$$\bar{P}^k = \min \{ \mathbf{c} \mathbf{x} \mid \mathbf{D} \mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^+ \} \quad (2.34)$$

Define-se o valor da solução ótima obtido para o problema  $P^k$  por  $V(P^k)$  e o valor ótimo para o problema relaxado  $\bar{P}^k$  por  $\bar{V}(\bar{P}^k)$ , que pode ser definido por algoritmos clássicos de programação linear, como o Simplex, por exemplo. Em casos de problemas de minimização, sabe-se que o valor obtido para o problema relaxado é menor ou igual ao valor ótimo do problema original inteiro, ou seja,  $\bar{V}(\bar{P}^k) \leq V(P^k)$ . Assim define-se  $\bar{V}(\bar{P}^k)$  como o limitante inferior do problema e  $L$  como o conjunto denominado *Lista* que conterá os problemas a serem expandidos.

Os três tipos de podas que existem nos algoritmos BB são: por otimalidade, por inviabilidade e por limitante [25]. A poda por inviabilidade ocorre quando existe a infração de uma ou mais restrições no momento em que se fixa o valor de uma das variáveis na expansão do problema  $P^k$ , que resulta em um espaço vazio de soluções. A poda por otimalidade ocorre quando todas as restrições são satisfeitas, a solução obtida para o problema relaxado é inteira e tem valor igual ao do limitante inferior. A poda por limitante utilizada no algoritmo desenvolvido acontece quando se veri-

1. Inicialização  $L = \emptyset$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{D}$
2. Ache a solução para  $\bar{P}^0$ 
  - (a) Defina o limitante inferior  $z_L = \bar{V}(\bar{P}^0)$
3. Enquanto  $L \neq \emptyset$ , escolha o problema de menor índice a ser expandido
  - (a) Retire  $P^k$  da lista, resolva  $\bar{P}^k$  e encontre  $\bar{x}_k^*$  e  $\bar{z}_k^* = \bar{V}(\bar{P}^k)$
  - (b)  $P^k$  deve ser podado?
    - i.  $\bar{z}_k^* > z_L \rightarrow$  poda por limitante
    - ii. Violação de restrições  $\rightarrow$  poda por inviabilidade
    - iii.  $\bar{x}_k^* \in Z$  e  $\bar{z}_k^* \leq z_L \rightarrow$  poda por otimalidade
  - (c) Se houve poda por otimalidade, vá para *Passo 4*
  - (d) Senão, expanda  $P^k$  em dois novos problemas e coloque-os na Lista.
4. Finalização  $z^* = \sum_{j=1}^k c(j)x^*(j)$

**Figura 2.7:** Algoritmo Branch and Bound desenvolvido.

fica que naquele ramo a ser expandido da árvore não será possível encontrar uma solução melhor do que o limitante, ou seja, quando a solução do problema relaxado é maior do que o limitante inferior do problema. O critério de poda por limitante utilizado foi definir como limitante inferior o valor obtido para o problema  $\bar{P}^0$ , considerando a solução ótima a primeira solução inteira com valor igual a esse limitante.

Esse critério é robusto para garantir a otimalidade, mas pode ocasionar uma poda prematura demais, não levando a uma solução. Isso ocorre no caso do sistema brasileiro em que não se achou uma solução inteira com o valor encontrado para o problema  $\bar{P}^0$ . A Fig. 2.7 apresenta o algoritmo desenvolvido.

Um algoritmo semelhante a esse apresentado foi desenvolvido por [16], porém com critério de poda diferente. Naquele trabalho buscava-se encontrar todas as soluções possíveis, porque em um problema de combinatória podem existir inúmeras soluções ótimas, e a solução de maior redundância era a escolhida.

## 2.4 Solução por Heurística de Fixação

*Heurística* é definida como uma técnica de busca por uma solução adequada, não necessariamente ótima, com um esforço computacional aceitável [26]. Nesta seção

apresenta-se uma heurística para solução do PR gerado, denominada *Heurística de Fixação* (HF), que foi inicialmente apresentada por Demir e Bertsimas (2002) [34, 67] para solucionar um Problema da Mochila Multidimensional (PMM), que representa um outro tipo de problema clássico de otimização combinatória 0-1 e será visto no Cap. 3. A HF foi usada em uma das etapas do algoritmo completo de Programação Dinâmica Aproximada desenvolvido por eles.

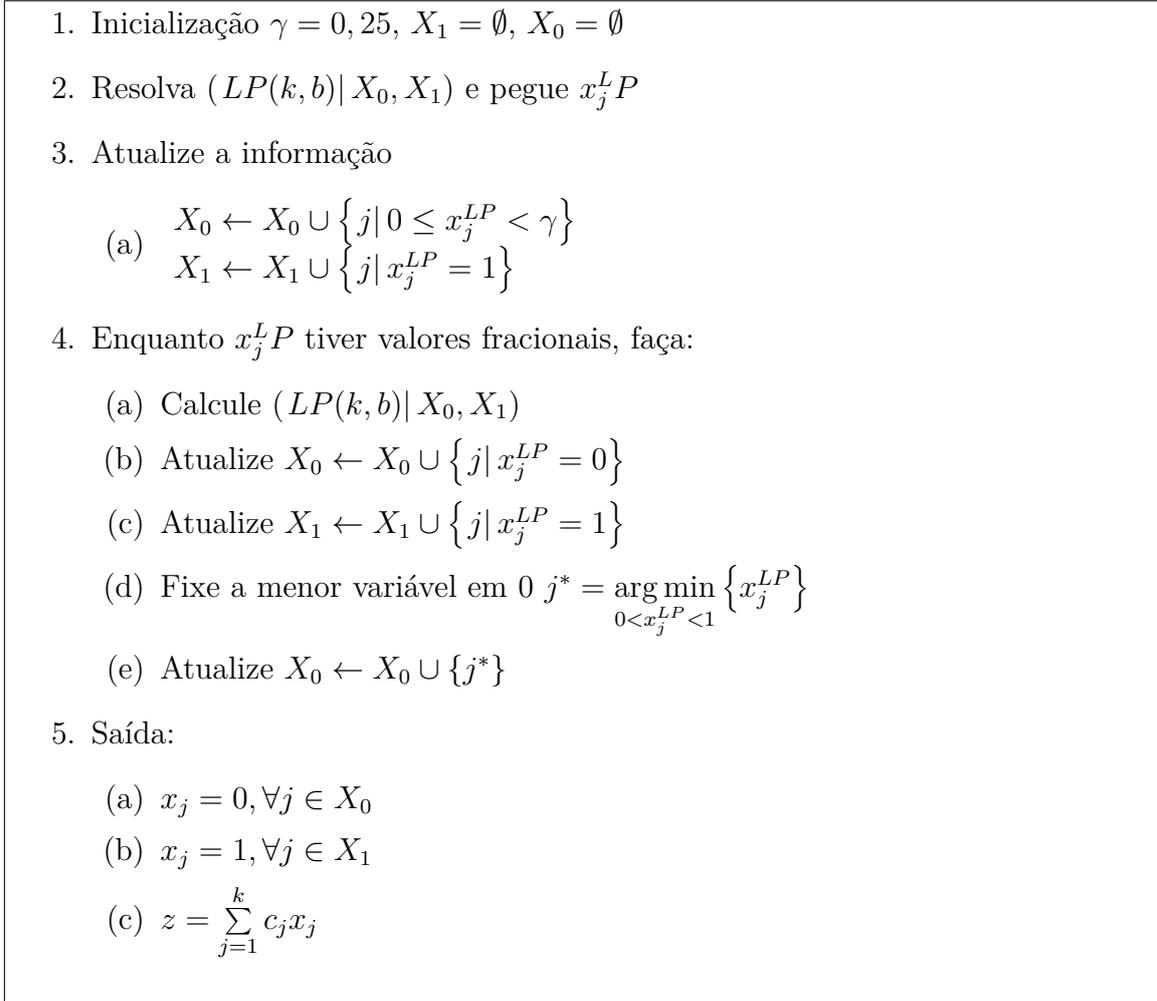
Observou-se que o uso da HF adaptada ao PR e diretamente aplicada no problema de alocação de monitores obteve excelente convergência em um tempo de simulação pequeno se comparado aos métodos BB. Os resultados serão detalhados no Capítulo 4. A HF também fará parte do método proposto apresentado no Cap. 3.

A filosofia utilizada é semelhante a dos BB, usa-se em cada iteração do algoritmo a fixação de variáveis em 0 e 1, relaxa e avalia se o problema gerado possui solução dentro do limite dado pelo valor do problema original relaxado.

O problema de maximização usado na HF original é denominado por  $LP(k, b)$ . O subconjunto de variáveis  $x(j)$  que serão fixadas em 0 é indicado por  $X_0$  e  $X_1$  é o subconjunto das que serão fixadas em 1. O problema linear relaxado com  $x(j) = 0, j \in X_0$ , e  $x(j) = 1, j \in X_1$ , é denotado por  $LP(P^k | X_0, X_1)$ . O valor obtido por cada variável deste problema linear relaxado é  $x^{LP}(j)$  e  $x^{LP}(j) \in \{0, 1\}$ . Define-se ainda o parâmetro  $\gamma$ , que é um valor entre 0 e 1 arbitrado para limitar o maior valor fracionário que será fixado em 0. Esse parâmetro é usado para diminuir o número de iterações realizadas pela HF, uma vez que na primeira solução obtida pelo  $LP(k, b)$  relaxado fixam-se todas as variáveis menores do que  $\gamma$  em 0.

A HF original apresentada em Bertsimas (2002) [67] pode ser vista na Fig. 2.8.

O que se propõe nesta tese baseado no algoritmo original de Demir e Bertsimas (2002) [67] é adaptá-lo ao problema do recobrimento e modificar o critério de particionamento desde a primeira iteração. A primeira fixação de variáveis foi modificada, alterando os *Passos 1*, *Passos 2* e *Passos 3* com a retirada do parâmetro  $\gamma$ , que reduz assim o número total de passos da heurística, mas que não garante menor número de iterações, muito pelo contrário, ir fixando somente uma variável por iteração aumenta o número total de iterações necessárias até a solução. O objetivo dessa modificação foi exatamente o de garantir que a fixação seja feita cuidadosamente para permitir melhores resultados, ou seja, maiores chances de chegar ao ótimo. Além disso, o  $LP(k, b)$  em [67] era um problema de maximização, o problema da mochila, que será tratado no Cap. 2.



**Figura 2.8:** Heurística de Fixação desenvolvida por Demir e Bertsimas (2002).

1. Inicialização  $X_1 = \emptyset, X_0 = \emptyset, \mathbf{c}, \mathbf{D}$
2. Enquanto  $x_j^{LP}$  tiver valores fracionais, faça
  - (a) Calcule  $(LP(k, b) | X_0, X_1)$
  - (b) Atualize  $X_0 \leftarrow X_0 \cup \{j | x_j^{LP} = 0\}$
  - (c) Atualize  $X_1 \leftarrow X_1 \cup \{j | x_j^{LP} = 1\}$
  - (d) Fixe a menor variável em 0  $j^* = \arg \min_{0 < x_j^{LP} < 1} \{x_j^{LP}\}$
  - (e) Atualize  $X_0 \leftarrow X_0 \cup \{j^*\}$
3. Saída:
  - (a)  $x_j = 0, \forall j \in X_0$
  - (b)  $x_j = 1, \forall j \in X_1$
  - (c)  $z = \sum_{j=1}^k c_j x_j$

**Figura 2.9:** Heurística de Fixação modificada.

O problema de minimização usado na HF é o  $P^0$ , apresentado na Seção 2.1 (2.1, 2.7), porém o critério de fixação das variáveis é diferente a cada iteração. Assim como no algoritmo anterior,  $X_0$  é o subconjunto de variáveis  $x(j)$  fixadas em 0 e  $X_1$  das fixadas em 1. O problema linear relaxado com  $x(j) = 0, j \in X_0$ , e  $x(j) = 1, j \in X_1$ , é denotado por  $LP(P^k | X_0, X_1)$ . O valor obtido por cada variável deste problema linear relaxado é  $x^{LP}(j)$  e  $x^{LP}(j) \in \{0, 1\}$ . A descrição detalhada do algoritmo utilizado está na Fig. 2.9.

Os conjuntos  $X_0$  e  $X_1$  inicialmente estão vazios; o problema linear relaxado  $LP(P^k | X_0, X_1)$  é resolvido e, a partir da solução verifica-se quais variáveis possuem valor 0 ou 1, preenchem-se os conjuntos  $X_0$  e  $X_1$  com os índices dessas variáveis. Em seguida, fixa-se a menor variável fracionária em zero para retornar o *Passo 2* até que não haja mais variável fracionária. Assim, todas as variáveis serão fixadas em 0 ou 1 e pode-se calcular o valor da solução:  $z^* = \sum_{j=1}^k c_j x_j$ . Não se pode garantir que esta seja a solução ótima, a menos que ela tenha o valor do problema original relaxado,  $\bar{P}^0$ , que é uma grande vantagem dessa heurística. É possível ter um controle sobre a solução, uma vez que existe um teorema que garante que se houver uma solução inteira de valor igual à solução do  $P^0$  relaxado, ela é ótima [25]. Esse será inclusive um critério importante de controle quando a HF é usada dentro do algoritmo completo de PDA.

Observou-se que o uso da heurística de Fixação (HF) adaptada ao PR e diretamente aplicada no problema de alocação de monitores obteve excelente convergência em um tempo de simulação pequeno se comparado aos métodos BB.

Variações da HF foram utilizadas, como exemplo ao invés de fixar a menor variável em 0, na última etapa do *Passo 2*, fixa-se a maior variável fracionária em 1. Uma outra variação foi a fixação simultânea do menor valor fracionário em 0 e do maior em 1. Essas variações não implicaram em ganho significativo na solução e serão apresentadas no Cap. 4.

A heurística é muito eficiente e chega a valores ótimos para sistemas menores; já para sistemas de maior parte não se encontra o ótimo, mas obtém-se uma solução subótima muito próxima ao valor do limitante inferior, que garante que se está na vizinhança do ótimo. Sendo assim, ela por si só já representa uma excelente ferramenta para solucionar o PR gerado no problema de alocação de monitores de QEE e pretende-se utilizá-la em conjunto com Programação Dinâmica Aproximada para melhorar ainda mais os resultados, garantindo robustez, pequeno intervalo de simulação e controle de todo o processo de otimização.

## 2.5 Solução por Bintprog

A função *bintprog* [68] é fornecida com o software comercial Matlab para solucionar problemas de programação linear inteira e é usada nesta tese como referência, porque é citada por vários autores. Embora não se tenha acesso ao algoritmo exato utilizado, sabe-se que a função usa um algoritmo BB, em que a busca é feita através dos problemas lineares relaxados para cada fixação em 0 e 1, como explicado na seção anterior, os passos descritos são:

- Busca por uma solução inteira viável;
- Atualiza a melhor solução inteira viável até o momento, a medida que a árvore cresce;
- Verifica se não existem soluções inteiras melhores através da solução da série de problemas lineares.

Os problema de entrada é dado no formato:

$$\min_x \mathbf{c}^t \mathbf{x} \text{ talque } \begin{cases} \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{D}_{\text{eq}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_{\text{eq}} \\ \mathbf{x} \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (2.35)$$

em que  $\mathbf{c}$  é o vetor de custos,  $\mathbf{x}$  é o vetor de existência,  $\mathbf{D}$  é a matriz de densidade,  $\mathbf{D}_{\text{eq}}$  é a matriz que define a igualdade, nesse caso, ela representará a cada iteração as variáveis que já foram fixadas e  $\mathbf{b}_{\text{eq}}$  guardará os valores fixados, se 0 ou 1. Para o PR o sinal de desigualdade é maior ou igual, o que se faz é multiplicar a matriz de densidade  $\mathbf{D}$  e o vetor  $\mathbf{b}$  por  $-1$ .

# Capítulo 3

## Algoritmo de Solução Proposto

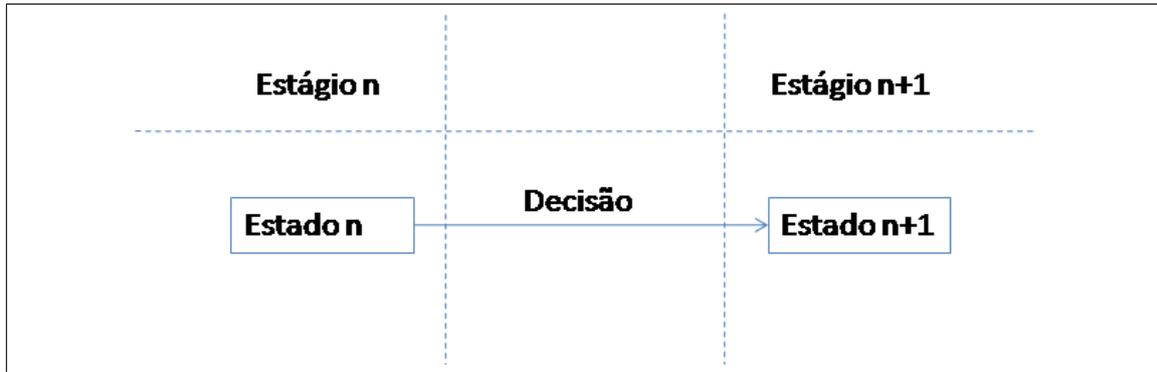
Esse capítulo descreve a técnica utilizada para otimização de processos denominada Programação Dinâmica. Em seguida, explora a Programação Dinâmica Aproximada e apresenta o Método Proposto.

### 3.1 Introdução à Programação Dinâmica

Os problemas de otimização podem ser vistos em diversas áreas do conhecimento em que se tomam decisões e observam-se informações do sistema de interesse, em seguida tomam-se mais decisões, colhem-se mais informações e assim sucessivamente. Esses processos são denominados Problemas de Decisão Sequencial e são relativamente fáceis de modelar, mas muito difíceis de resolver [35, 69, 70].

A Programação Dinâmica (PD) é usada tipicamente nesses casos para a otimização de processos de decisão em estágios [71]. Um *estágio* é definido como uma etapa em um processo sequencial. Na conclusão deste existem alternativas denominadas de *decisões* e dentro de cada estágio existe a condição do processo que é chamada de *estado*. Cada um dos estágios possui uma tomada de decisão que pode alterar ou não o estado do processo, mas que implica em uma transição de estados, entre o atual e o futuro [26, 72]. A Fig. 3.1 retirada de [26] mostra esquematicamente a relação entre os estágios, estado e decisão.

A saída de cada decisão não é totalmente previsível, mas pode ser estimada antes de ser empregada. Cada uma resulta em um custo imediato, mas também afeta o contexto em que as futuras decisões serão feitas e conseqüentemente reflete no custo dos estágios futuros. O que se busca são políticas de decisão que minimizem o custo total sobre o número de estágios. O desafio é exatamente compreender a relação entre o custo imediato e o futuro [73, 74]. A PD permite uma formalização matemática dessa relação.



**Figura 3.1:** Processo de decisão em estágios.

Todos os problemas com a característica de tomada de decisões por estágios podem ser escritos em termos de uma relação recursiva que relaciona o valor de estar em um estado particular em um ponto do tempo ao valor dos estados por vir no próximo instante de tempo. As categorias de problemas podem ser estabelecidas como discretos ou contínuos, lineares ou não-lineares, estocásticos ou determinísticos. O problema do recobrimento gerado e de interesse nesse trabalho é discreto, linear e determinístico. Essa relação entre estado atual e futuro pode ser descrita pela equação de recursividade de Bellman [75], que foi o pioneiro no desenvolvimento da PD. A equação de Bellman para problemas determinísticos é dada por (3.1).

$$F_k(u_k) = \min \{c_k(u_k, x_k) + F_{k-1}(u_{k-1})\} \quad (3.1)$$

em que  $k$  é o índice para determinar o estágio atual,  $k-1$  é o estágio imediatamente anterior a  $k$ ,  $u_k$  é o estado no instante  $k$ ,  $F_k(u_k)$  é o valor de estar em  $u_k$ , e  $c_k(u_k, x_k)$  é o custo de estar em  $u_k$  e decidir por  $x_k$ .

Nas seções seguintes serão apresentados os problemas: da Mochila Unidimensional 0-1, Mochila Multidimensional 0-1 e, finalmente, o Problema do Recobrimento que usa PD.

## 3.2 Problema da Mochila 0 – 1 em PD

Nesta seção apresenta-se a modelagem do Problema da Mochila (PM) por ser o mais amplamente discutido na otimização inteira 0-1 [36]. Esse problema é bastante conhecido, porque a partir dele obtém-se vários outros modelos similares, como, por exemplo, o Problema do Recobrimento de interesse nesse trabalho.

Não foi encontrado o PR modelado diretamente em Programação Dinâmica, encontrou-se no trabalho de Denardo (2003) [76] o Problema da Mochila escrito de forma recursiva para solução por PD. Hochbaun (1995) apresenta inclusive como é possível transformar o PR em PM [29]. Nesse trabalho de tese optou-se por escrever o método de solução diretamente para o PR e foi parte da compreensão do problema passar pelo PM, por isso ele é apresentado com detalhes.

O PM é um problema de programação linear inteiro (PPLI) 0 – 1 em que o objetivo é maximizar o benefício [66, 74, 76, 77]. O exemplo intuitivo que pode ser citado é o de uma pessoa indo acampar e que pode carregar apenas uma mochila com todos os objetos necessários dentro dela. Cada objeto colocado na mochila tem um valor agregado, denominado custo, que é maior quanto mais importante for o objeto, esse custo é basicamente a importância de cada objeto para a pessoa. Nesse caso, por exemplo, a barraca pode ser um dos itens de maior valor. Além disso, cada objeto tem um volume associado a ele e a mochila por sua vez tem uma capacidade limitada, o que restringe o número de objetos de acordo com o volume total deles. O desafio do aventureiro passa a ser escolher a melhor forma para inserir os objetos essenciais respeitando o limite de volume que pode suportar.

Dado o problema original  $P_0$ , o PM pode ser escrito matematicamente como nas Eq. (3.2, 3.3, 3.4) e cada vetor é detalhado a seguir.

$P^0$

$$\max z_0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq b \tag{3.3}$$

$$x(j) \in \{0, 1\}, \forall j = 1, \dots, n \tag{3.4}$$

em que  $n$  é o número de elementos considerados para inserir na mochila,  $\mathbf{c}$  é o vetor de custos,  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis e representa os elementos que serão colocados na mochila. Cada elemento desse vetor é escrito como  $x(j)$ ,  $\mathbf{a}$  é o vetor de volume de cada elemento e  $b$  é o volume máximo suportado.

O vetor de custos  $\mathbf{c}$  representa o custo, valor ou benefício de colocar o objeto  $j$  na mochila e pode ser escrito por

$$\mathbf{c} = [ c(1) \quad c(2) \quad \dots \quad c(n) ] \tag{3.5}$$

em que cada elemento  $c(j)$  representa o custo do  $j$ -ésimo objeto a ser inserido na mochila e quanto mais importante, maior o seu valor.

O vetor de existência é o vetor de variáveis a serem inseridas ou não na mochila. Cada elemento pode ser definido como segue.

$$x(j) = \begin{cases} 1, & \text{se o objeto } j \text{ é inserido na mochila} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.6)$$

O vetor de existência pode ser escrito como segue.

$$\mathbf{x} = [x(1) \quad x(2) \quad \cdots \quad x(n)]^t \quad (3.7)$$

O vetor de volumes é definido por

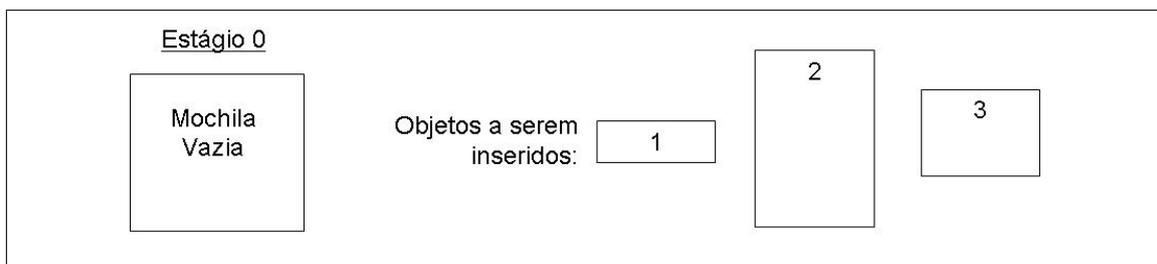
$$\mathbf{a} = [a(1) \quad a(2) \quad \cdots \quad a(n)] \quad (3.8)$$

em que cada elemento  $a(j)$  representa o volume do  $j$ -ésimo objeto a ser inserido na mochila.

O limite da mochila é dado pelo elemento  $b$ , que representa o volume máximo suportado.

### 3.2.1 Exemplo para um PM

Antes de modelar o PM propriamente dito em PD, considerou-se um exemplo numérico com apenas três variáveis para ilustrar didaticamente como é feita a decisão em estágios. A Fig. 3.2 mostra em esquema um retângulo representando a mochila e os três objetos a serem inseridos, foi considerada somente a projeção bidimensional da mochila e objetos.



**Figura 3.2:** Mochila e objetos a serem carregados.

O benefício de cada objeto e máximo volume suportado é definido pelas equações

a seguir.

$$\max z = 3x(1) + 2x(2) + 5x(3) \quad (3.9)$$

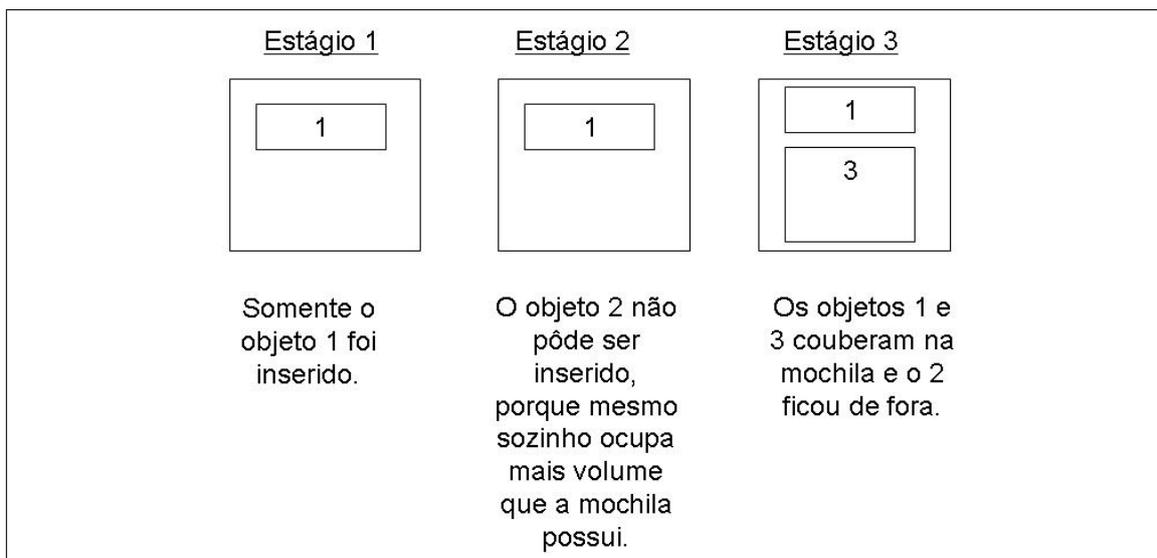
$$\text{s. a. } x(1) + 4x(2) + 2x(3) \leq 4 \quad (3.10)$$

Considerações Iniciais do Problema: Não existem dois produtos com o mesmo volume e produtos só são carregados em quantidades inteiras, ou seja, cada elemento  $x(j)$  é inteiro.

Por observação da Eq. (3.9) verifica-se que o máximo benefício obtido no caso de colocar todos os objetos dentro da mochila, ou seja,  $x(1) = x(2) = x(3) = 1$ , é igual a 10. Assim, verifica-se que essa solução não é viável, porque extrapolaria o volume máximo permitido que é igual a 4, definido na restrição (3.10).

A definição do que é estágio e estado: observa-se que nesse exemplo o número total de estágios é igual ao número de objetos que podem ser inseridos na mochila, porque essa é a decisão a ser tomada e que define cada etapa do processo, em cada estágio será avaliado se o objeto pode ou não ser inserido. O estado é definido pelo volume dos objetos, pois essa é a condição que define se o objeto entrará ou não na mochila e é a limitação que difere entre os estados atuais e futuros.

O esquema da Fig. 3.2 mostra o preenchimento da mochila.



**Figura 3.3:** Esquema do preenchimento da mochila em estágios.

Resolução do problema analiticamente em cada estágio:

- CONDIÇÃO INICIAL: Estágio 0

$$\text{Volume Ocupado} = 0$$

$$\text{Benefício} = 0$$

- Estágio 1

$$x(1) = 0$$

$$\text{Volume Ocupado} = 0$$

$$\text{Violação da restrição} = \text{Não}$$

$$\text{Benefício} = 0$$

$$x(1) = 1$$

$$\text{Volume Ocupado} = 1$$

$$\text{Violação da restrição} = \text{Não}$$

$$\text{Benefício} = 3$$

Solução até o momento  $\rightarrow$  a que não tem violação de restrição e possui maior benefício:  $x(1) = 1$  e  $z = 3$

- Estágio 2

$$x(1) = 1 \text{ e } x(2) = 0$$

$$\text{Volume Ocupado} = 1$$

$$\text{Violação da restrição} = \text{Não}$$

$$\text{Benefício} = 3$$

$$x(1) = 1 \text{ e } x(2) = 1$$

$$\text{Volume Ocupado} = 5$$

$$\text{Violação da restrição} = \text{Sim}$$

$$\text{Benefício} = 5$$

$\rightarrow$  Solução até o momento:  $x(1) = 1, x(2) = 0$  e  $z = 3$

- Estágio 3

$$x(1) = 1, x(2) = 0 \text{ e } x(3) = 0$$

$$\text{Volume Ocupado} = 1$$

$$\text{Violação da restrição} = \text{Não}$$

$$\text{Benefício} = 3$$

$$x(1) = 1, x(2) = 0 \text{ e } x(3) = 1$$

$$\text{Volume Ocupado} = 3$$

$$\text{Violação da restrição} = \text{Não}$$

$$\text{Benefício} = 8$$

$$\rightarrow \text{Solução final: } x(1) = 1, x(2) = 0, x(3) = 1 \text{ e } z^* = 8$$

Portanto, a solução que maximiza o problema é  $\mathbf{x}^* = [1 \ 0 \ 1]$  e o valor do benefício é 8. Para este exemplo não se enumerou todas as soluções possíveis para evitar a repetições desnecessárias, o que se deseja de fato é ilustrar didaticamente o procedimento de busca pelo ótimo por Programação Dinâmica para problemas de otimização inteira 0–1, em que ocorre a enumeração de cada uma das possibilidades para o valor da variável de existência e a avaliação sobre qual valor fixado viola as restrições e qual maximiza o resultado.

O problema será modelado matematicamente na seção seguinte para solução por PD, que utilizará dois algoritmos distintos.

### 3.2.2 Modelagem do Problema da Mochila Unidimensional em Programação Dinâmica

Uma das maneiras mais simples de compreender a formulação do Problema da Mochila 0 – 1 em Programação Dinâmica foi encontrada em Denardo (2003) [76], embora ela seja interessante no que se refere às definições de estado e estágio, ela não faz uma generalização tão simples que possibilite a modelagem do algoritmo de solução do PM. Assim, optou-se por criar um algoritmo completo de PD.

O problema do acampamento e da otimização do que levar na mochila, imaginando que alguns itens já tenham sido colocados nela e que algumas unidades de volume ainda restam, possui funções lineares, assim o preenchimento do restante da mochila de forma a obter benefício máximo é independente do que foi colocado primeiro. Considera-se portanto que o volume é um estado e a função que descreve o benefício obtido com a ocupação da mochila e define a relação entre os estados atuais e futuros é a *Função de Transição* ou a *Equação de Bellman* do problema.

Definindo as variáveis do PM como segue:

- $k$  define o estágio atual
- $k - 1$  é o estágio anterior

- $c(k)$  é o custo ou benefício que tem o objeto  $k$
- $a(k)$  é o volume que o objeto  $k$  possui
- $f(k, b)$  é o valor da função custo para o estágio  $k$  e estado  $b$
- $b$  é o estado do problema, ou seja, o volume preenchido na mochila.

A Equação de Transição para esse problema é definida por

$$\boxed{f(k, b) = \max_{k|a(k) \leq b} \{c(k) + f(k - 1, b - a(k))\},} \quad (3.11)$$

em que  $f(k, b)$  é benefício máximo no preenchimento de uma mochila de volume  $b$  no estágio  $k$ ,  $b$  representa o volume que foi preenchido em cada estágio e varia de  $0, 1, \dots, n$ , em que  $n$  é o volume máximo suportado. A cada unidade do produto  $k$  inserido na mochila de volume  $b$ , obtém-se um benefício  $c(k)$  e reduz-se o volume disponível para  $b - a(k)$ . Considera-se como condição inicial  $f(0) = 0$ .

A Eq. 3.11 define a relação entre os estágios atual e anterior da seguinte forma:  $f(k, b)$  é o benefício obtido com o custo de se inserir o objeto  $k$ ,  $c(k)$ , mais o volume que já foi preenchido na mochila, ou seja, o volume atual menos o que será inserido,  $b - a(k)$ .

O problema da mochila unidimensional necessita de apenas uma variável de estado, ao contrário do modelo geral de PD. Este problema pode facilmente ser resolvido por PD Clássica, embora exija um esforço computacional mais elevado que o BB, ele garante otimalidade uma vez que enumera todas as possibilidades, como visto no exemplo numérico.

É possível descrever dois algoritmos de solução para problemas de otimização inteira 0 – 1. O primeiro calcula os valores das funções para todas as combinações de estado e estágio, em seguida, encontra os valores de  $x(k)$  que otimizam o problema. Já no segundo algoritmo proposto, o cálculo do valor das funções e das variáveis  $x(k)$  ótimas são feitos simultaneamente. Os algoritmos são descritos na seção seguinte para o problema multidimensional.

### 3.2.3 Exemplo do Problema da Mochila 0 – 1 em PD

O problema  $P_0$  é apresentado nas Eq. 3.12, 3.13, 3.14 de forma usualmente conhecida em problemas de otimização.

$P^0$

$$\max 6x_1 + 9x_2 \quad (3.12)$$

$$s.a. 3x_1 + 5x_2 \leq 9 \quad (3.13)$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2 \quad (3.14)$$

Resolve-se usando Programação Dinâmica. Reescrevendo, obtém-se a seguinte condição inicial:

$$f(1, b) = \begin{cases} 0, a(1) = 3 > b \\ c(1) = 6, a(1) = 3 \leq b \end{cases} \quad (3.15)$$

com  $b$  variando de 0 a 9 e  $k = 1, 2$

$k = 1$  e  $b = 0, \dots, 9$

$$\begin{aligned} f(1, 0) = f(1, 1) = f(1, 2) = 0, \text{ nesse caso } x_1 = 0 \\ f(1, 3) \text{ a } f(1, 9) = 6, \text{ nesse caso } x_1 = 1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Em PD o problema se torna

$$\begin{aligned} f(k, b) = -\infty \\ \text{Para } k = 2 \\ f(2, b) = \max \{f(1, b), f(1, b - 5) + 9\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Os valores calculados em cada iteração são apresentados.

$k = 2$

$$b = 0 \quad f(2, 0) = \max \{f(1, 0), f(1, 0 - 5) + 9\} = \max \{0, -\infty\} = 0$$

As variáveis são  $x_1(b = 0) = 0$  e  $x_2(b = 0) = 1$

$$b = 1 \quad f(2, 1) = \max \{f(1, 1), f(1, -4) + 9\} = 0, x_1(b = 1) = 0 \text{ e } x_2(b = 1) = 0$$

$$b = 2 \quad f(2, 2) = \max \{f(1, 2), f(1, -3) + 9\} = 0, x_1(b = 2) = 0 \text{ e } x_2(b = 2) = 0$$

$$b = 3 \quad f(2, 3) = \max \{f(1, 3), f(1, -2) + 9\} = 6, x_1(b = 3) = 1 \text{ e } x_2(b = 3) = 0$$

$$b = 4 \quad f(2, 4) = \max \{f(1, 4), f(1, -1) + 9\} = 6, x_1(b = 4) = 1 \text{ e } x_2(b = 4) = 0$$

$$b = 5 \quad f(2, 5) = \max \{f(1, 5), f(1, 0) + 9\} = 9, x_1(b = 5) = 1 \text{ e } x_2(b = 5) = 1$$

$$\boxed{b = 6} \quad f(2, 6) = \max \{f(1, 6), f(1, 1) + 9\} = 9, \quad x_1(b = 6) = 1 \text{ e } x_2(b = 6) = 1$$

$$\boxed{b = 7} \quad f(2, 7) = \max \{f(1, 7), f(1, 2) + 9\} = 9, \quad x_1(b = 7) = 1 \text{ e } x_2(b = 7) = 1$$

$$\boxed{b = 8} \quad f(2, 8) = \max \{f(1, 8), f(1, 3) + 9\} = 15, \quad x_1(b = 8) = 1 \text{ e } x_2(b = 8) = 1$$

$$\boxed{b = 9} \quad f(2, 9) = \max \{f(1, 9), f(1, 4) + 9\} = 15, \quad x_1(b = 9) = 1 \text{ e } x_2(b = 9) = 1$$

A solução ótima é do último  $k = 9$ , portanto  $f_2(9) = 15$  e  $\mathbf{x} = [1 \ 1]^t$ .

Por essa solução já é possível ver por que a solução por PD necessita de muitas iterações e como funciona na prática a *Maldição da Dimensionalidade*.

### 3.2.4 Problema da Mochila Multidimensional 0 – 1 em PD

O Problema da Mochila Multidimensional (PMM) é similar ao problema de uma dimensão. Seguindo a mesma linha, o aventureiro vai acampar somente com uma mochila de volume limitado e, além disso, suporta um peso limitado. O problema de otimização significa que além da restrição, Eq. (3.3), uma nova linha de restrições se fará necessária. A ideia de como formular o problema  $P^0$  já está bem estabelecida e verifica-se então que inúmeras restrições podem surgir num problema real, assim o problema de forma matricial pode ser escrito diretamente como nas Eq. (3.18), (3.19), (3.20).

$$\boxed{P^0}$$

$$\max z_0 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \tag{3.18}$$

$$\text{s.a. } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{B} \tag{3.19}$$

$$x(j) \in \{0, 1\}, \forall j = 1, \dots, n \tag{3.20}$$

em que  $n$  é o número de elementos passíveis de serem inseridos na mochila,  $\mathbf{c}$  é o vetor de custos,  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis e representa os elementos que serão colocados na mochila, sendo cada elemento desse vetor escrito como  $x(j)$ ,  $\mathbf{A}$  é a matriz que representa as restrições e  $\mathbf{B}$  é o vetor de limitantes.

O Problema da Mochila Multidimensional 0-1 em Programação Dinâmica pode ser definido como em [34, 67]. Denominando por  $P^0(k, b)$  o problema original com  $k$  variando de  $1, \dots, n$  e  $\mathbf{b}$  variando de forma adequada,  $F(k, b)$  o valor da solução ótima e  $x(k)$  a solução ótima para o problema, a equação de recursividade de

Bellman passa a ser escrita como segue.

$$P^0(k, b)$$

$$F(k, \mathbf{b}) = \max \{F(k-1, \mathbf{b}), F(k-1, \mathbf{b} - \mathbf{A}(k)) + \mathbf{c}(k)\} \quad (3.21)$$

Se o problema  $P^0(k, b)$  for inviável, então diz-se que  $F(k, b) = -\infty$ . Na solução ótima para o  $P^0$  as variáveis  $x(k)$  são iguais a 0 ou 1. Se  $x(k)$  for 0, a função objetivo é igual a  $F(k-1, \mathbf{b})$  e se  $x(k)$  for 1, a função objetivo é igual a  $F(k-1, \mathbf{b} - \mathbf{A}(k)) + \mathbf{c}(k)$ .

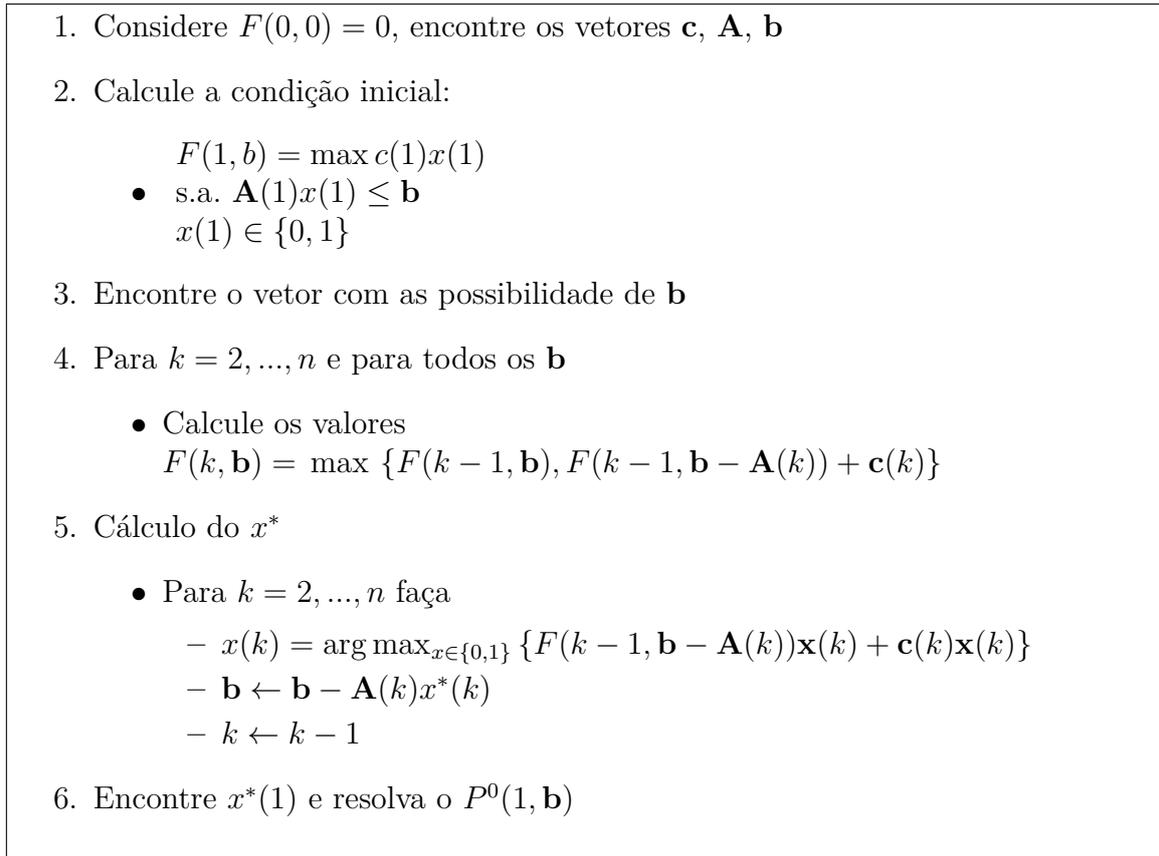
Se fosse usada somente a Eq. 3.21, ao final da recursão teria-se somente o valor para a função objetivo  $F(k, b)$ , mas não se obteria o valor das variáveis ótimas  $x^*(k)$  diretamente. Para melhor compreensão de como calcular a Eq. de Bellman e todas as variáveis de interesse do problema, dois algoritmos para a solução do PMM por Programação Dinâmica são descritos a seguir. Destaca-se que o desenvolvimento desses algoritmos foi feito ao longo do estudo da tese e não foram retirados dessa forma de nenhuma referência conhecida.

### Cálculo recursivo das Funções

Calcula-se recursivamente a Eq. 3.21 para todos os valores possíveis de  $k$  e  $\mathbf{b}$ . Em seguida, os valores que foram encontrados para as funções  $F(k, b)$  são usados para avaliar quais valores de  $x(k)$  maximizam o problema. Na próxima seção há um exemplo com passo a passo desse algoritmo na Fig. 3.4.

Esse algoritmo possui duas fases distintas: a primeira é o cálculo da Eq. de Bellman, em que se encontra o custo para todos os estados e estágios, itens de 1 a 4 do algoritmo acima; já a segunda fase é a que encontra os valores  $x(k)$  que maximizam o problema, ou seja,  $x(k)$  foi fixado em 0 ou 1 em cada estágio  $k$  na solução ótima. Essa fase está representada pelos itens 5 e 6 do algoritmo.

O algoritmo completo de Programação Dinâmica Aproximada proposto nessa tese usa essa mesma filosofia de dividir o cálculo em duas fases, inicialmente calcula-se o valor aproximado de  $F(k, b)$ , denominado por  $\tilde{F}(k, b)$ , depois encontram-se os valores de  $x(k)$  que otimizam o problema.



**Figura 3.4:** Algoritmo de PD com cálculo recursivo de  $x(k)$ .

A seguir é apresentado um algoritmo alternativo para solução do PMM, embora ele seja mais simples, não é adaptável para uso de PDA.

### Cálculo e armazenamento simultâneo das Funções e Variáveis

A outra forma de se realizar o algoritmo completo de solução do PM por PD é fazer o cálculo simultâneo de  $F(k, \mathbf{b})$  e  $x(k)$  como mostra o algoritmo descrito na Fig. 3.5.

A seguir, mostra-se um exemplo numérico que detalha claramente como resolver um Problema da Mochila Multidimensional por PD.

1. Considere  $f(0, 0) = 0$ , encontre as matrizes  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$
2. Calcule a condição inicial:
  - $F(1, \mathbf{b}) = \max \mathbf{c}(1)\mathbf{x}(1)$
  - s.a.  $A(1)x(1) \leq \mathbf{b}$
  - $x(1) \in \{0, 1\}$
3. Encontre o vetor com as possibilidades de  $\mathbf{b}$
4. Para  $k = 2, \dots, n$  e para todos os  $\mathbf{b}$ 
  - Cálculo de  $F(k, b)$  e  $x^*$
  - $F(k, \mathbf{b}) = \arg \max_{x(k) \in \{0,1\}} \{F(k-1, \mathbf{b} - \mathbf{A}(k)x(k)) + \mathbf{c}(k)x(k)\}$
  - Armazenamento de  $x^*(k)$
5. Encontre  $x^*(1)$  e resolva o  $P^0(1, b)$

**Figura 3.5:** Algoritmo de PD com cálculo simultâneo de  $F(k, \mathbf{b})$  e  $x(k)$ .

### 3.2.5 Exemplo do Problema da Mochila Multidimensional 0 – 1 em PD

Dado o PMM a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \max 3x_1 + 2x_2 \\
 & s.a. x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & x_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Obtém-se a partir de 3.22 os vetores de dados de entrada a seguir:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

Inicialmente é avaliam-se as possibilidades de  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} b_1 \text{ varia de } 0 \text{ a } 1 \\ b_2 \text{ varia de } 0 \text{ a } 3 \end{array}
 \tag{3.24}$$

Assim, preenche-se o vetor de estados  $\mathbf{b}$  com as possibilidades que devem ser

testadas, como segue.

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.25)$$

A condição inicial é

$$\begin{aligned} F(1, b) &= \max c_1 x_1 \\ A_1 x_1 &\leq b \\ x_1 &\in \{0, 1\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Os valores na condição inicial 3.26 para  $k = 1$  são substituídos:

$$\begin{aligned} \text{Para } \boxed{x_1 = 0} &\rightarrow F(1, b) = 0 \\ \text{Para } \boxed{x_1 = 1} &\rightarrow F(1, b) = \begin{cases} c_1, A_1 \leq b \\ 0, A_1 > b \end{cases} \end{aligned}$$

As condições iniciais são reescritas com valores numéricos substituídos e  $k = 1$  :

$$\begin{aligned} \text{Para } \boxed{x_1 = 0} &\rightarrow F(1, b) = 0 \\ \text{Para } \boxed{x_1 = 1} &\rightarrow F(1, b) = \begin{cases} 3, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leq b \\ 0, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} > \mathbf{b} \end{cases} \end{aligned}$$

Substituindo agora somente os valores de  $\mathbf{b}$ , obtém-se as condições iniciais,  $k = 1$ :

Para  $\boxed{x_1 = 0}$ :

$$F(1, b_1) = F\left(1, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = F\left(1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = F\left(1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (3.27)$$

Para  $\boxed{x_1 = 1}$ :

$$F\left(1, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = F\left(1, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = F\left(1, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = F\left(1, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = F\left(1, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 3 \quad (3.28)$$

A variação de  $\mathbf{b}$  proposta em 3.25 é mantida e os valores obtidos para  $F(k, \mathbf{b})$  são:

$$F(1, b) = [ 0 \ 0 \ 3 \ 3 \ 0 \ 3 \ 3 \ 3 ]$$

Iniciando o algoritmo de recursão para cálculo da função através da Eq. de Bellman, obtém-se:

$$F(k, b) = \max \{F(k-1, b), F(k-1, b - A_k) + c_k\} \quad (3.29)$$

Nesse exemplo específico o valor de  $k$  é 2 e não varia mais porque só existem duas variáveis, assim, os vetores necessários são

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } c_2 = 2$$

Substituindo na eq. 3.29:

$$F(2, \mathbf{b}) = \max \left\{ F(1, \mathbf{b}), F \left( 1, \mathbf{b} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + c_2 \right\}$$

Segue o cálculo de  $F(k, \mathbf{b})$  para cada uma das possibilidades do vetor  $\mathbf{b}$ .

$$\begin{aligned} F \left( 2, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right) &= \max \left\{ F \left( 1, \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right), F \left( 1, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + 2 \right\} = \max \{0, -\infty\} = 0 \\ F \left( 2, \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right) &= \max \left\{ F \left( 1, \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right), F \left( 1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + 2 \right\} = \max \{0, -\infty\} = 0 \\ F \left( 2, \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right) &= \max \left\{ F \left( 1, \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \right), F \left( 1, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + 2 \right\} = \max \{3, -\infty\} = 3 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ F \left( 2, \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right) &= \max \left\{ F \left( 1, \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right), F \left( 1, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + 2 \right\} = \max \{3, 2\} = 3 \end{aligned}$$

Dessa forma, os valores de  $F(2, \mathbf{b})$  são:

$$F(2, b) = [ 0 \ 0 \ 3 \ 3 \ 0 \ 3 \ 3 \ 3 ]$$

Os valores de  $x$  são obtidos através da recursão mostrada no *Passo 6* do algoritmo da Fig. (3.6) e para este exemplo tem-se a solução:

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

Esse exemplo evidencia a *maldição da dimensionalidade* com o excessivo número de cálculos necessários para solucionar um problema de dimensão tão pequena usando PD clássica.

### 3.3 Problema do Recobrimento 0 – 1 em PD

O problema de alocação de monitores recai no Problema do Recobrimento (PR) como visto na Seção 2.1, inicialmente optou-se por escrevê-lo como um Problema da Mochila Multidimensional como sugerido por [29, 34]. Um PR geral pode ser descrito como em 3.30.

Problema do Recobrimento

$$\begin{aligned} F(k, b) &= \min \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ s.a. \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ x(j) &\in \{0, 1\}, j = 1, \dots, k \\ \mathbf{b} &= \mathbf{1} \end{aligned} \tag{3.30}$$

em que  $\mathbf{b}$  é um vetor coluna de 1's de dimensão  $m \times 1$ ,  $\mathbf{D}$  é a matriz de restrições e sua dimensão é  $m \times n$ ,  $\mathbf{x}$  é o vetor de variáveis definido por  $\mathbf{x} = [x(1), \dots, x(n)]^t$  e  $\mathbf{c}$  é o vetor de custos definido por  $\mathbf{c} = [c(1), \dots, c(n)]$ .

Pode-se escrevê-lo como um PMM substituindo  $x(j)$  por  $y(j) = 1 - x(j)$  para  $j = 1, \dots, n$ . Assim, torna-se

Problema do Recobrimento como um PMM

$$\begin{aligned} F(k, b) &= \max \mathbf{c} \cdot \mathbf{y} \\ s.a. \mathbf{D} \cdot \mathbf{y} &\leq \mathbf{b} \\ y(j) &= 1 - x(j) \text{ e } y(j) \in \{0, 1\}, \\ \mathbf{b} &= \sum(j)D(j) - e \end{aligned} \tag{3.31}$$

em que  $e$  é um vetor de 1's e  $\mathbf{y} = \mathbf{1} - \mathbf{x}$ .

Não foi possível encontrar um modelo pronto de como escrever um PR em Programação Dinâmica, o que se achou foi a da modificação das variáveis vistas em 3.30 e 3.31. Por esta razão, inicialmente usou-se a modelagem do PR como um PMM [72–76] e, após familiarização com a técnica, percebeu-se que a adaptação da equação de recursividade é muito simples e será apresentada nesta seção.

O estado representado por  $\mathbf{b}$  para o PR é diferente do PM. No PM unidimensional, por exemplo, a variável de estado era o volume da mochila e definia um limite superior, não permitindo que nenhum estado tivesse valor superior ao limite estabelecido. No PR, por sua vez, a variável de estado  $\mathbf{b}$  representa um limite inferior, que garante que as variáveis naquela linha sejam observadas ao menos uma vez. Dessa forma, reescreve-se a equação de Bellman para a solução do PR por PD a seguir.

$$P^0(k, b)$$

$$F(k, \mathbf{b}) = \max \{F(k-1, \mathbf{b}), F(k-1, \mathbf{D}(k) - \mathbf{b}) + \mathbf{c}(k)\} \quad (3.32)$$

Se o problema  $P^0(k, b)$  for inviável, então diz-se que  $F(k, b) = \infty$ . Na solução ótima para o  $P^0$  as variáveis  $x(k)$  são iguais a 0 ou 1. Se  $x(k)$  for 0, a função objetivo é igual a  $F(k-1, \mathbf{b})$  e se  $x(k)$  for 1, a função objetivo é igual a  $F(k-1, \mathbf{D}(k) - \mathbf{b}) + \mathbf{c}(k)$ .

Por observação da Eq. (3.32), verifica-se que ocorre a subtração diferente da solução por PD, aqui de cada coluna do vetor  $\mathbf{D}(k)$  diminui-se o vetor de variáveis de estado  $\mathbf{b}$ , ao contrário do que ocorreu na solução do PMM, Eq. (3.21). Além disso, a condição para a não viabilidade, ou seja, caso a diferença  $\mathbf{D}(k) - \mathbf{b} < \mathbf{0}$ , o valor de  $F(k, \mathbf{b})$  é  $\infty$  por se tratar de um problema de minimização.

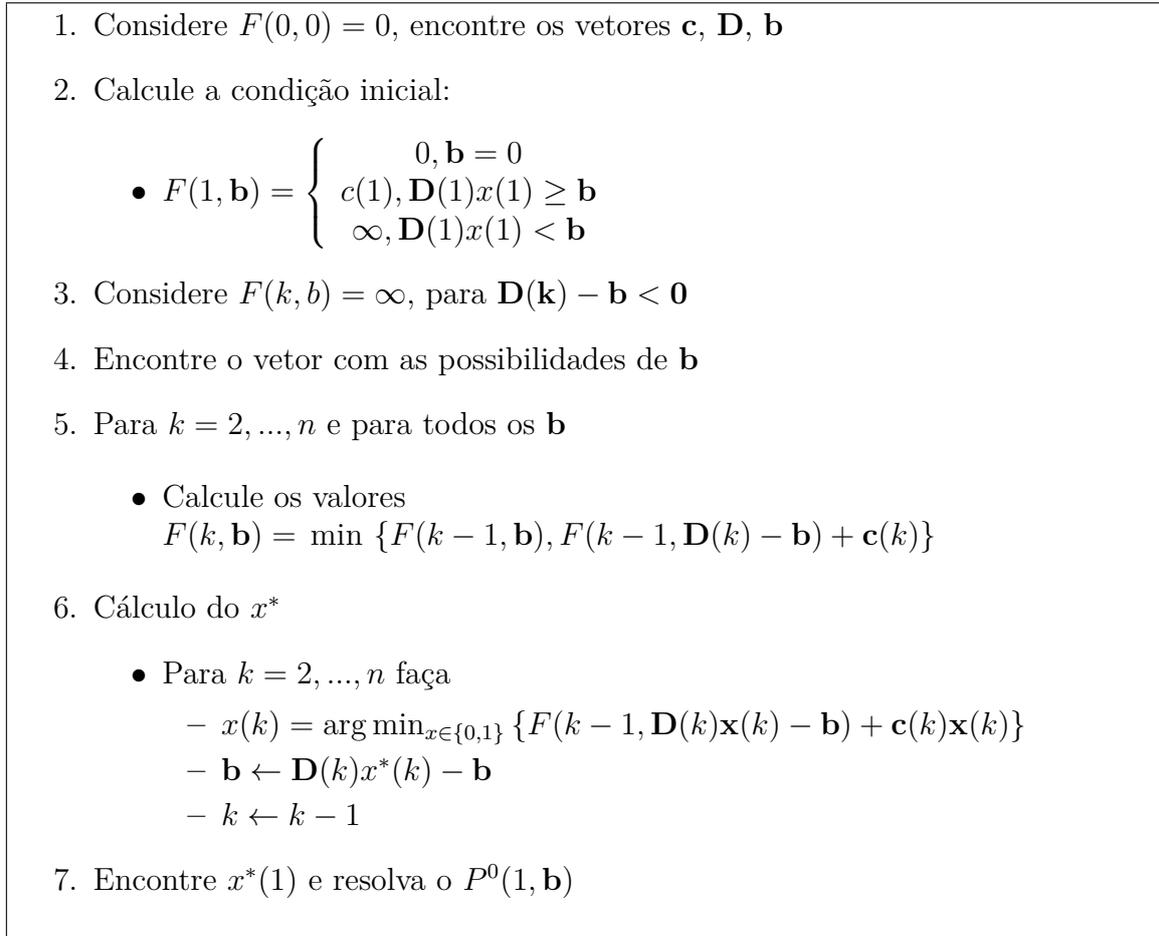
Destaca-se que essas considerações foram elaboradas no estudo dessa tese, a formulação do Problema do Recobrimento para solução por PD, apresentada na Eq. (3.32), e todas as considerações para as condições iniciais do problema não foram encontradas na literatura estudada.

Assim como o PMM, é possível descrever a solução do PR por dois algoritmos

de Programação Dinâmica são descritos a seguir.

### Cálculo recursivo das Funções

Calcula-se recursivamente o valor da função de transição para todos os valores possíveis de  $k$  e  $\mathbf{b}$ . Em seguida, são usados os valores que foram encontrados para as funções  $F(k, \mathbf{b})$  e são avaliados quais valores de  $x(k)$  minimizam o problema. O algoritmo está descrito na Fig. 3.6.



**Figura 3.6:** Algoritmo de PD para solução do PR.

Esse algoritmo de solução por PD para o PR também consiste em duas fases distintas: a primeira a de cálculo e armazenamento das funções de custo e a segunda a de cálculo das variáveis  $x(k)$ , assim como será feito para o método proposto de solução por PDA. Na segunda fase do algoritmo, atualiza-se o estado  $\mathbf{b}$  em cada iteração com o objetivo de se encontrar  $x^*$  em cada estágio  $k$ . O objetivo da fase 1 no algoritmo de PDA é encontrar um estado  $\mathbf{b}$  o mais próximo possível do estado ótimo, isso será visto na seção 3.5.1.

Os algoritmos descritos nessa seção não foram encontrados na bibliografia pesquisada; importante ressaltar.

Na seção seguinte são apresentados exemplos para o problema da mochila multidimensional, mas percebe-se que são similares. A diferença dos algoritmos está nas condições iniciais e na forma de atualização dos estados, além do primeiro ser um problema de maximização e o segundo de minimização.

### 3.4 Complexidade do algoritmo de solução em PD

O uso de PD em aplicações de otimização combinatória é bastante conhecido [77], mas é limitado devido ao problema da dimensionalidade. A complexidade de um algoritmo clássico de PD para resolver um PR com  $n$  variáveis,  $m$  restrições e  $b$  estados é  $O(nb^m)$ . Assim, baseada na recursão clássica a PD não é uma forma efetiva de solucionar um PPI, porque o espaço de soluções é extremamente grande [35, 67, 70, 71], esse problema é conhecido por *Maldição da Dimensionalidade*.

### 3.5 Programação Dinâmica Aproximada

O uso da PD clássica em sistemas de grande porte se torna inviável devido ao grande número de iterações necessárias, uma vez que o algoritmo enumera todas as possibilidades para a solução de um problema de otimização discreto. O número de estados gerados nesse tipo de abordagem é exponencial em relação ao número de dados de entrada e exige grande espaço na memória para armazenar as informações associadas a todos os estágios.

Com o intuito de contornar essa limitação, desde meados da década de 90, pesquisadores avaliam formas de se fazer estimativas razoáveis dos estágios por vir [35, 67, 70, 73, 74, 78, 79], evitando assim a enumeração excessiva. Existem diversas ferramentas utilizadas e encontradas na literatura para a previsão dos estágios futuros, desde aproximações lineares [80], heurísticas [69, 79] e Redes Neurais [74].

O nome que se dá para essa técnica é Programação Dinâmica Aproximada (PDA) (*Approximate Dynamic Programming*), conhecida também por Programação Neuro-Dinâmica (*Neuro-Dynamic Programming*) ou Aprendizagem por Reforço (*Reinforcement Learning*). Ela vem sendo crescentemente aplicada para permitir

soluções de problemas difíceis de resolver por serem de grande porte [35].

A PDA tenta combinar os melhores elementos da PD clássica com heurísticas para aproximar adequadamente as funções que representam os estágios por vir. A diferença entre PD e PDA está nos critérios de otimalidade. A ênfase em PDA é encontrar um valor razoável e não necessariamente o ótimo para as funções custo por vir, desde que garanta a proximidade do mesmo, o que permite que se encontre boas soluções em um intervalo de simulação aceitável. O desafio é encontrar boas funções de aproximação dos estágios futuros, que podem ser calculadas e armazenadas de maneira eficiente. Na seção 2.4 foi apresentada a Heurística de Fixação que permite o cálculo da função de transição para o estágio final com uma boa aproximação e, por esta razão, ela faz parte da primeira fase do algoritmo completo de PDA.

O trabalho de Demir (2000) [34] apresenta um algoritmo de PDA para solucionar o Problema da Mochila Multidimensional, embora o trabalho dele tenha servido de inspiração para duas etapas de um dos algoritmos desenvolvidos, a de adaptação da HF e a de fixação das variáveis no algoritmo completo de PDA, nessa tese desenvolvem-se outros algoritmos de PDA, usando aproximação linear das funções custo por vir. O trabalho que sugere aproximações lineares como boas o suficiente para prever o custo por vir é o de Farias (2002) [80].

Os dois algoritmos de PDA propostos são apresentados na seção seguinte.

### 3.5.1 Método Proposto

O método proposto para alocação de monitores usou em sua primeira fase a heurística apresentada na seção 2.4. O uso da HF sozinha já demonstrou resultados excelentes, o que se deseja agora é chegar ainda mais próximo do ótimo, com controle de proximidade do mesmo para sistemas de grande porte usando um algoritmo inteiro de Programação Dinâmica Aproximada. O algoritmo de PD clássica foi adaptado e suas etapas modificadas de acordo com a necessidade.

Dois algoritmos foram elaborados: o primeiro deles usa uma etapa de Fixação de Variáveis logo após o uso da HF, caso não tenha atingido o ótimo; o outro algoritmo não possui essa etapa e usa um método diferente de aproximação linear.

As principais variáveis utilizadas nos algoritmos completos são listadas a seguir.

- $HF(k, \mathbf{b})$  a heurística selecionada para solução do problema
- $P^0(k, \mathbf{b})$  problema de programação linear inteiro com  $k$  variáveis
- $x_{HF}(k, \mathbf{b})$  a solução obtida com a heurística
- $H(k, \mathbf{b})$  o valor da heurística, ou seja, o valor estimado pela heurística para a função  $F(k, \mathbf{b})$
- $PL(k, \mathbf{b})$  problema linear relaxado, ou seja,  $P^0(k, \mathbf{b})$  sem a condição de integridade
- $I(k, \mathbf{b})$  limitante inferior para o problema de minimização
- *parada* é uma variável de valor lógico falso ou verdadeiro que controla a otimalidade, caso o valor ótimo seja encontrado, ela se torna verdadeira e vai para o último passo do algoritmo.

Ambos os algoritmos de PDA possuem duas fases, assim como o algoritmo de PD para o PR visto na seção 3.3. A primeira consiste em aplicar a  $HF(k, \mathbf{b})$  ao problema  $P^0(k, \mathbf{b})$  e guardar as informações de  $x_{HF}(k, \mathbf{b})$  e  $\mathbf{b}$ . Se a solução for ótima o algoritmo termina com a solução ótima  $x_{HF}(k, \mathbf{b})$  de valor  $F(k, \mathbf{b}) = \mathbf{H}(\mathbf{k}, \mathbf{b})$ . Nesse caso, a garantia de otimalidade acontece da mesma forma que no algoritmo BB. Se a solução gerada for inviável, o algoritmo termina sem solução. A segunda fase só acontece se o problema for viável e a solução encontrada pela heurística de fixação não for ótima. Começa-se guardando o melhor solução até o momento definida por  $x^L = x_{HF}(k, \mathbf{b})$  e a melhor solução,  $z^L = H(k, \mathbf{b})$ . Para o primeiro algoritmo, a próxima etapa é chamada *Fixação do Custo Reduzido* e nela algumas variáveis são fixadas em 0 ou 1 de acordo com a solução fornecida pela heurística, que objetiva diminuir o espaço de soluções a ser verificado. O segundo algoritmo não apresenta essa etapa. Ambos possuem o laço de atualização da solução  $x^{PDA}(k)$  similar ao apresentado no algoritmo da seção 3.3.

No laço em que os valores de  $\mathbf{k}$  vão sendo atualizados de forma decrescente para o cálculo dos valores  $x^*(k)$ , passo 4 do algoritmo da seção 3.5.2 e passo 3 da seção 3.5.3 ocorre o cálculo da aproximação da função custo  $\bar{F}(k, \mathbf{b})$  através da relaxação das condições de integralidade de  $x(k)$ . Essa aproximação é feita usando o método Simplex no algoritmo de fixação de variáveis e de acordo com a solução da HF relaxada, as variáveis não-básicas do problema são fixadas em 0 ou 1, esse procedimento é detalhado a seguir. O segundo algoritmo aplica as aproximações

lineares através do método dos pontos interiores. Os resultados comparativos entre os dois algoritmos são apresentados no capítulo 4.

#### Fixação dos Custos Reduzidos

Essa etapa foi retirada do trabalho de Demir (2000) [34], seu objetivo é reduzir o espaço de soluções possível ao fixar algumas variáveis em 0 ou 1 de acordo com a solução obtida pela heurística. O problema linear relaxado  $PL(k, \mathbf{b})$  do problema  $P^0(k, \mathbf{b})$  pode ser reescrito da seguinte forma:

$$z^{PL(n, \mathbf{b}_0)} = z_0 + \sum_{j \in L} \bar{c}_j x_j + \sum_{j \in U} \bar{c}_j x_j \quad (3.33)$$

em que  $x^{PL(n, \mathbf{b}_0)}$  e  $z^{PL(n, \mathbf{b}_0)}$  são respectivamente a solução e o valor do PL,  $L$  é o conjunto de variáveis não-básicas em seu limitante inferior e  $U$  é o conjunto de variáveis não-básicas em seu limitante superior e  $\bar{c}_j$  é o custo reduzido das variáveis  $j \in 1, \dots, n$ .

A Fixação dos custos reduzidos guarda as variáveis não-básicas  $x(k)$  em seu valor ótimo da solução do PL se  $\bar{c}(k) < H(k, \mathbf{b}) - \mathbf{I}(k, \mathbf{b})$ , em que  $I(k, \mathbf{b})$  é o limitante inferior para o  $P^0$ . Essa proposição pode ser vista em Nemhauser e Wolsey (1988, p. 389) [25].

Os algoritmos completos desenvolvidos são apresentados a seguir.

### 3.5.2 Algoritmo de PDA com Fixação de Variáveis

1. Inicialização:  $k = n$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $parada = falso$
2. Aplique a heurística  $HF(k, \mathbf{b})$   
Saída:  $x_{HF}(k, \mathbf{b})$ ,  $H(k, \mathbf{b})$ ,  $I(k, \mathbf{b})$   
Se  $H(k, \mathbf{b}) = I(k, \mathbf{b})$   
→ solução ótima  
→  $parada = verdadeiro$  - ida para passo 6  
Senão  
 $\mathbf{x}^L \leftarrow x_{HF}(k, \mathbf{b})$  e  
 $\mathbf{z}^L \leftarrow H(k, \mathbf{b})$
3. Aplique Fixação dos Custos Reduzidos  
 $Fix \rightarrow$  Conjunto das variáveis não-básicas que serão fixadas  
 $x^f(k) \in \{0, 1\} \rightarrow$  valor das variáveis
4. Enquanto  $(k > 2)$  e  $(parada = falso)$  faça  
Se  $k \in Fix$   
 $x^{PDA}(k) = x^f(k)$   
Senão  
$$x(k) = \arg \min_{x \in \{0,1\}} \{ \bar{F}(k-1, \mathbf{D}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{b}) + \mathbf{c}(k)\mathbf{x}(k) \}$$
 $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{D}(k)x^*(k) - \mathbf{b}$   
Verifica o critério de parada  
Se  $H(k, \mathbf{b}) = I(k, \mathbf{b})$ ,  $\rightarrow parada = verdadeiro$   
 $k \leftarrow k - 1$
5. Encontre  $x^*(1)$  e resolva o  $P^0(1, \mathbf{b})$
6. Saída:  $x^*$  e  $F^*(k, \mathbf{b})$

### 3.5.3 Algoritmo de PDA com Aproximação Linear por Método dos Pontos Interiores

1. Inicialização:  $k = n$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{c}$  e  $parada = falso$
2. Aplique a heurística  $HF(k, \mathbf{b})$   
 Saída:  $x_{HF}(k, \mathbf{b})$ ,  $H(k, \mathbf{b})$ ,  $I(k, \mathbf{b})$   
 Se  $H(k, \mathbf{b}) = \mathbf{I}(k, \mathbf{b})$   
      $\rightarrow$  solução ótima  
      $\rightarrow$  parada = verdadeiro - ida para passo 6  
 Senão  
      $\mathbf{x}^L \leftarrow x_{HF}(k, \mathbf{b})$  e  
      $\mathbf{z}^L \leftarrow H(k, \mathbf{b})$
3. Enquanto  $(k > 2)$  e  $(parada = falso)$  faça  
      $x(k) = \arg \min_{x \in \{0,1\}} \{ \overline{F}(k-1, \mathbf{D}(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{b}) + \mathbf{c}(k)\mathbf{x}(k) \}$   
      $\mathbf{b} \leftarrow D(k)x^*(k) - \mathbf{b}$   
      $k \leftarrow k - 1$   
     Verifica o critério de parada  
     Se  $H(k, \mathbf{b}) = I(k, \mathbf{b})$ ,  $\rightarrow$  parada = verdadeiro
4. Encontre  $x^*(1)$  e resolva o  $P^0(1, \mathbf{b})$
5. Saída:  $x^*$  e  $F^*(k, \mathbf{b})$

## 3.6 Exemplo do Problema de Alocação de PMU

Nesta seção apresenta-se um exemplo com a formulação completa do Problema do Recobrimento gerado na modelagem do problema de alocação de PMU e sua solução por Programação Dinâmica Aproximada que usa a Heurística de Fixação. O sistema de transmissão usado como exemplo, Fig. 3.7, foi apresentado por Eldery et al. (2004, 2006) [13, 30]. Os dados de entrada para representar essa topologia estão na Tab. 3.1.

Este sistema é dado por  $n = 6$  barras,  $L = 8$  linhas. A partir dos dados da Tab. 3.1, pode-se elaborar o PR como segue, Eq. 3.34, 3.35 e contruir o vetor de custos,

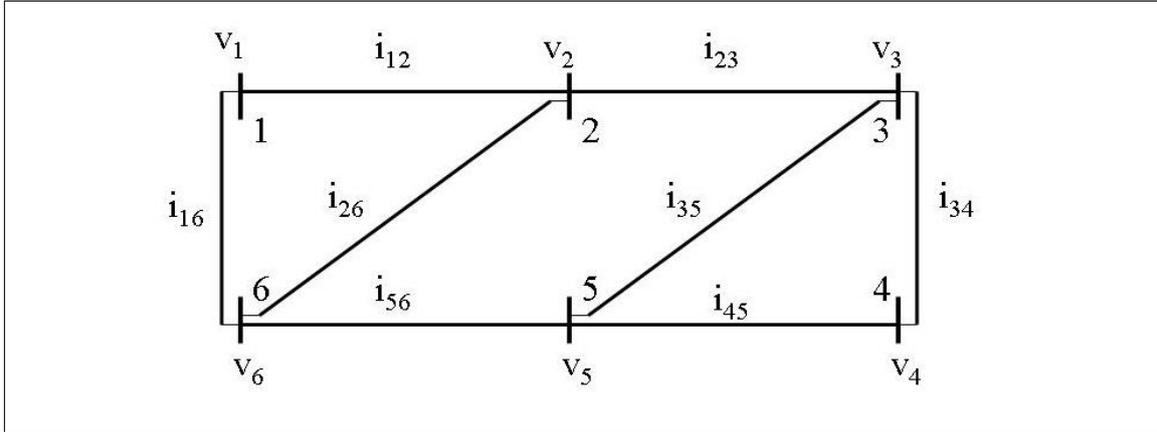


Figura 3.7: Rede de transmissão com 6 barras.

Tabela 3.1: Dados de topologia para uma rede de 6 barras e 8 linhas de transmissão.

<i>De</i>	<i>Para</i>
1	2
1	6
2	3
2	6
3	4
3	5
4	5
5	6

de existência e a matriz de densidade  $\mathbf{D}$ .

$$\text{Minz} = [c(1) \ c(2) \ c(3) \ c(4) \ c(5) \ c(6)] \cdot [x(1) \ x(2) \ x(3) \ x(4) \ x(5) \ x(6)]^t \quad (3.34)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$x(i) \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 6$$

Inicia-se a solução do PR definido para o problema de 6 barras, Eq. 3.34, 3.35, pela HF vista na seção 2.4. Segue a solução passo a passo.

### Passo 1 - Inicialização

- $PL(k, b)$  é definido em Eq. 3.34, 3.35
- Vetor de custos  $\mathbf{c} = \mathbf{1}$
- Matriz de densidade  $\mathbf{D}$  definida em Eq. 3.35
- $X_0 \leftarrow \emptyset$
- $X_1 \leftarrow \emptyset$

A partir de agora, começa o laço de fixação das variáveis, *Passo 2* da HF, que continua até que não hajam mais variáveis fracionárias.

### Passo 2 - Iteração 1

- Valor obtido por PL(k,b):  $\mathbf{x} = [0,5118 \ 0,2441 \ 0,2441 \ 0,5118 \ 0,2441 \ 0,2441]$ .
- Como nenhuma das variáveis obteve valor igual a 0 ou 1, a atualização de  $X_0$  e  $X_1$  fica
$$X_0 \leftarrow \emptyset$$
$$X_1 \leftarrow \emptyset$$
- Fixando a menor variável em 0:  $j^* = \arg \min_{0 < x_j^{PL} < 1} \{x_j^{PL}\} = 2$

- Atualizando  $X_0 = 2$

### Passo 2 - Iteração 2

- Valor obtido por PL(k,b):  $\mathbf{x} = [0,3346 \ 0,0000 \ 0,6606 \ 0,3145 \ 0,0249 \ 0,6654]$ .
- $X_0 \leftarrow 2$
- $X_1 \leftarrow \emptyset$
- $j^* = 5$
- $X_0 \leftarrow \{2, 5\}$

### Passo 2 - Iteração 3

- Valor obtido por PL(k,b):  $\mathbf{x} = [0,8290 \ 0,0000 \ 0,1710 \ 0,8290 \ 0,0000 \ 0,1710]$ .
- $X_0 \leftarrow 2, 5$
- $X_1 \leftarrow \emptyset$

- $j^* = 6$
- $X_0 \leftarrow \{2, 5, 6\}$

#### Passo 2 - Iteração 4

- Valor obtido por PL(k,b):  $\mathbf{x} = [1,0000 \ 0,0000 \ 0,6490 \ 0,3510 \ 0,0000 \ 0,0000]$ .
- $X_0 \leftarrow 2, 5, 6$
- $X_1 \leftarrow 1$
- $j^* = 4$
- $X_0 \leftarrow \{2, 4, 5, 6\}$

#### Passo 2 - Iteração 5

- Valor obtido por PL(k,b):  $\mathbf{x} = [1,0000 \ 0,0000 \ 1,0000 \ 0,0000 \ 0,0000 \ 0,0000]$ .
- $X_0 \leftarrow 2, 4, 5, 6$
- $X_1 \leftarrow 1, 3$

A HF vai para o último passo, pois todas as variáveis foram fixadas e o valor ótimo foi atingido.

#### Passo 3 - Saída

- $\mathbf{x} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$
- $z^* = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} = 2$

Neste exemplo a HF atingiu o ótimo e não foi necessário continuar o algoritmo de PDA por completo. É difícil elaborar um exemplo simples que contenha a segunda fase do algoritmo de PDA, porque a HF sozinha já encontra o ótimo para sistemas de poucas variáveis. Por outro lado, para esse mesmo exemplo do sistema de 6 barras usou-se o algoritmo de PD desenvolvido na seção 3.3 e não se encontrou solução após 1 dia de simulação.

Para permitir a ilustração da *Fase 2* do algoritmo completo de PDA, considera-se, por absurdo, que a solução achada para o problema de 6 barras descrito seja  $\mathbf{x} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$ . A partir de então, desenvolve-se as etapas para o algoritmo sem fixação de variáveis.

#### Passo 2 - Aplicação da Heurística

- Solução obtida não foi ótima!

$$x_{HF}(k, \mathbf{b}) = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Valor do custo pela solução da heurística:  $H(k, \mathbf{b}) = \mathbf{3}$

Limitante inferior:  $I(k, \mathbf{b}) = \mathbf{2}$

Passo 3 - Iteração 1 - Cálculo de  $F$  e  $x$  mínimo

- $k = 6$  e *parada* = *false*

$$\mathbf{b} = [3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 2 \ 2]^t$$

Valor obtido por  $PL(6, \mathbf{b})$  e  $x(6) = 0 \rightarrow$  solução inviável

Valor obtido por  $PL(6, \mathbf{b})$  e  $x(6) = 1 \rightarrow \tilde{F}(6, \mathbf{b}) = \mathbf{3}$

$$\mathbf{b} \leftarrow [2 \ 2 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2]^t$$

$$k = 5$$

Passo 3 - Iteração 2 - Cálculo de  $F$  e  $x$  mínimo

- $k = 5$  e *parada* = *false*

$$\mathbf{b} = [2 \ 2 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2]^t$$

Valor obtido por  $PL(5, \mathbf{b})$  e  $x(5) = 0 \rightarrow \tilde{F}(5, \mathbf{b}) = \mathbf{2}$

Valor obtido por  $PL(5, \mathbf{b})$  e  $x(5) = 1 \rightarrow$  Solução inviável

*parada* = *verdadeiro*, porque  $\tilde{F} = I(k, \mathbf{b})$  e solução viável

Dessa forma, apenas com duas iterações chegou-se à solução ótima do problema de custo igual à  $e$  e solução  $\mathbf{x} = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ . Além disso, pode-se verificar neste exemplo como a segunda etapa baseia-se na atualização dos estados representados pelo vetor  $\mathbf{b}$ .

# Capítulo 4

## Resultados

Este capítulo apresenta os resultados obtidos na simulação dos algoritmos *branch and bound* (BB), *bintprog*, usado como referência, *heurística de fixação* (HF) e suas variações e o algoritmo completo de *Programação Dinâmica Aproximada* (PDA). Os resultados são apresentados para as redes IEEE de teste de transmissão [81], redes IEEE de distribuição [82] e para as redes reais de transmissão brasileira [83] e peruana [84].

### 4.1 Soluções Ótimas de Alocação

Os resultados por *branch and bound*, pela *heurística de fixação* usada isoladamente e pelo algoritmo completo de PDA são comparados com os obtidos usando a rotina *bintprog*. Essa rotina é fornecida com o Matlab para solucionar problemas de programação linear inteira e usa um algoritmo BB, porém não se tem acesso ao algoritmo utilizado.

Os sistemas de transmissão testados foram:

- IEEE 14, 30, 57, 118 e 300 barras, disponíveis no portal da Universidade de Washigton (2012) [81];
- Rede de transmissão real peruana que possui 117 barras [84];
- Sistema de transmissão brasileiro com 2834 barras [83].

Os sistemas de distribuição testados foram:

- IEEE 13, 34, 37, 123 e 3861 barras, disponíveis no portal da Sociedade de Sistemas de Potência do IEEE, *Power Engineering Society* (PES), e no trabalho [82].

Nessa tese dois sistemas de grande porte foram utilizados como exemplo: um para a transmissão e outro para a distribuição. O da transmissão é um sistema brasileiro real usado por Manzoni (2005) [83] com 2834 barras e 4080 linhas e o sistema de distribuição é um de teste feito pela PES exatamente para testar a escalabilidade dos algoritmos desenvolvidos, é conhecido como IEEE 8500 nós, ele possui 3861 barras e 2526 linhas. Esses dois sistemas justificam o uso da PDA para solucionar o PR gerado, porque pode-se afirmar que as concessionárias queiram instalar monitores em toda sua área de atuação com o menor custo possível, o que gera na maioria dos casos, sistemas reais de interesse efetivamente de grande porte.

Outra observação a ser feita sobre os dados de simulação é o custo individual de instalação de cada monitor em cada barra. Inicialmente considerou-se os custos de instalações iguais a 1, porque gera uma maior dificuldade de convergência visto que nesse caso o número de possibilidades aumenta, porque diminui a poda por inviabilidade. Além disso, boa parte das referências encontradas para alocação de PMU usa os custos iguais a 1, o que permite a comparação de resultados diretamente.

Em seguida, para buscar um cenário mais realista, os custos de instalação foram considerados diferentes e proporcionais ao número de linhas de transmissão que saem de cada barramento, visto que uma grande parcela do custo de instalação refere-se ao número de transformadores de tensão e corrente necessários para aquisição do sinal da rede elétrica.

No Cap. A encontram-se alguns resultados detalhados para alocação de MQEE/PMU, mostram-se as barras em que deveriam ser instalados monitores para sistemas de distribuição e transmissão e custos iguais.

O computador utilizado para fazer essas simulações é um Dell<sup>®</sup> Precision T3500 com processador Intel<sup>®</sup> Xeon<sup>®</sup> 2,67 GHz, 6 Gb de memória e sistema operacional Vista 2007. Os algoritmos foram implementados e testados em linguagem MatLab e os resultados obtidos são mostrados nas seções seguintes.

As tabelas com os resultados possuem no cabeçalho  $Z^*$ , que é o valor obtido para a solução ótima,  $It$  que é o número de iterações realizadas pelo algoritmo até a convergência e  $t$  que é o tempo em segundos gasto para cada algoritmo fornecer a solução.

## 4.2 Soluções com Custo de Instalação Iguais

Nesta seção são apresentadas as soluções de alocação de PMU para as redes de transmissão e alocação de monitores de QEE para as redes de distribuição com custos de instalação iguais a 1. A Tab. 4.1 apresenta os resultados encontrados para transmissão.

Tabela 4.1: Resultados de alocação de PMU em sistemas de transmissão sem barras de passagem para custos iguais de instalação.

<i>Sistemas</i>	BB			Bintprog			HF		
	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$
<b>IEEE 14</b>	4	15	2,72	4	3	0,25	4	2	0,44
<b>IEEE 30</b>	10	55	5,30	10	7	0,22	10	15	0,68
<b>IEEE 57</b>	17	101	6,19	17	176	2,37	17	29	1,44
<b>PERU 117</b>	35	203	21,93	35	109	2,27	35	58	5,05
<b>IEEE 118</b>	32	229	26,91	32	73	0,51	32	43	4,08
<b>IEEE 300</b>	87	1033	191,67	87	242	44,71	87	70	7,43
<b>BRASIL 2834</b>	982	-	-	-	-	-	984	803	418,55

Da Tab. 4.1 observa-se que para o sistema brasileiro de transmissão não foi possível encontrar solução usando BB ou *bintprog*. No caso do BB utilizado foi possível encontrar o valor para uma iteração do problema linear relaxado gerado. Essa pode ser a solução ótima caso haja uma solução inteira viável e de igual valor, mas infelizmente devido à limitação de tempo e do computador utilizado não foi possível terminar a simulação. Em uma das tentativas o computador ficou exclusivamente simulando esse sistema por mais de 15 dias e nenhuma solução foi encontrada. Já usando a *bintprog*, não é possível encontrar nenhum resultado por problemas internos da rotina, o que impossibilita qualquer análise do sistema.

O uso da HF permitiu encontrar uma solução inteira viável, em pequeno intervalo de simulação, nesse caso aproximadamente 7 minutos, e uma solução de baixo custo visto que o limitante inferior seria 982, contra os 984 encontrados. Dessa forma é possível atestar a escalabilidade do algoritmo da HF e sua eficiência em achar subótimos de muito boa qualidade. O sistema brasileiro foi o único sistema em que a HF pode não ter encontrado o ótimo considerando custos de instalação iguais. Para todos os outros testados ela encontrou a solução ótima com um número de iterações significativamente menor do que os outros métodos, como no IEEE 300 barras, onde o número de iterações necessários para convergência foi

muito pequeno mesmo se comparado a *bintprog*.

Com relação ao tempo, em alguns casos mesmo com um número menores de iterações, gastou-se mais tempo, isso se deve ao uso das rotinas internas do Matlab. O que se observa é que a HF usada na solução de sistemas maiores, o tempo de simulação é bem menor que o gasto pela *bintprog*.

Não houve necessidade de aplicação do algoritmo de PDA completo para boa parte dos sistemas de tese, só foi realizada a fase 2 do algoritmo de PDA para o sistema brasileiro, o resultado está na Tab. 4.2.

Tabela 4.2: Resultados de alocação de PMU com custos iguais de instalação no sistema brasileiro usando PDA.

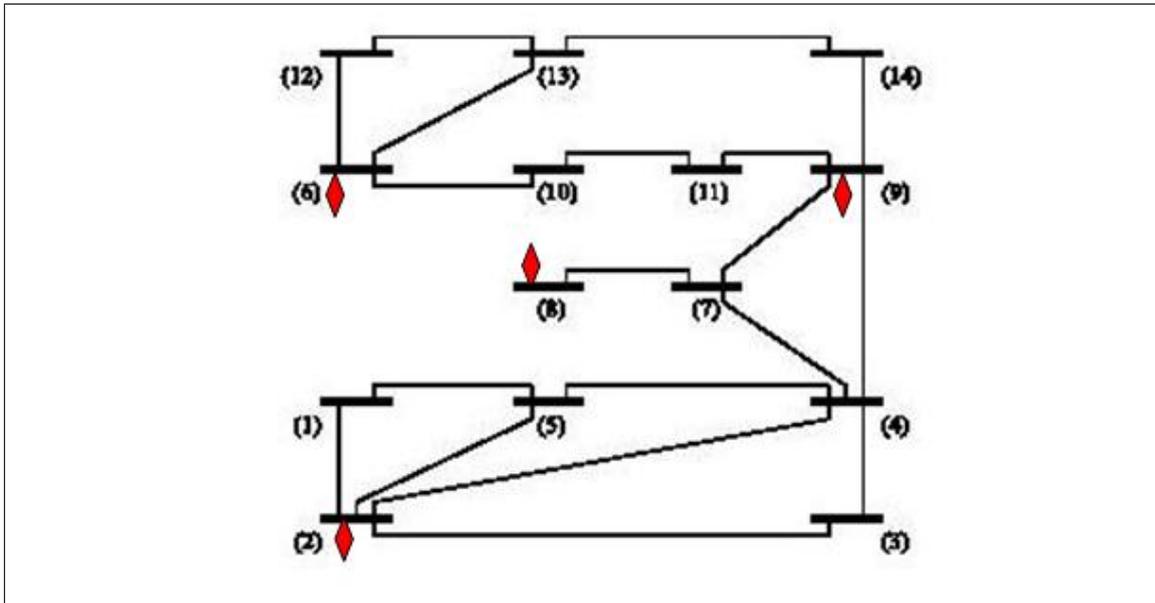
<i>Sistemas</i>	PDA		
	$Z^*$	$It$	$t$
<b>BRASIL 2834</b>	982	811	444,08

Para o caso do sistema brasileiro com custos iguais Tab. 4.2 observa-se que o algoritmo de PDA encontrou o valor ótimo com 444, 08 segundos ou 7,4 minutos, o que revela a eficiência computacional do método e justifica sua aplicação em casos de sistemas de grande porte.

A Fig. 4.1 ilustra o resultado mostrado na Tab. 4.1 para o sistema IEEE 14 barras. O número de PMU calculado é 4, sendo a localização ótima deles nas barras 2, 6, 8 e 9. Na figura, os monitores são representados por losangos em cada uma dessas barras.

No Cap. 2 foi mostrado que é possível diminuir o número de medidores necessários na alocação de PMU caso se considerem as barras de passagem do sistema. A Tab. 4.3 apresenta quais são as barras de passagem para alguns sistemas de transmissão de teste IEEE.

A Tab. 4.4 mostra os resultados para os sistemas IEEE considerando algumas barras de passagem. Essa simulação foi realizada somente considerando os custos iguais para permitir a comparação com os resultados encontrados nas principais referências de alocação de PMU. Foram feitas duas simulações usando *bintprog* e HF para efetuar a comparação com o apresentado na literatura [21, 24, 59]. Os menores resultados apresentados nesses trabalhos está primeira coluna da tabela



**Figura 4.1:** Alocação ótima encontrada para o sistema de transmissão IEEE 14 barras e custo de instalação igual em todas as barras.

Tabela 4.3: Barras de passagem para os sistemas de transmissão.

<i>Sistemas</i>	<i>Barras de Passagem</i>
<b>IEEE 14</b>	7
<b>IEEE 30</b>	6, 9, 22, 25, 27, 28
<b>IEEE 57</b>	4, 7, 11, 21, 22, 24, 26, 34, 36, 37, 39, 40, 45, 46, 48
<b>IEEE 118</b>	5, 9, 30, 37, 38, 63, 64, 68, 71, 81

4.4. Como visto no Cap. 2, o número necessário de PMU é menor do que o apresentado na Tab. 4.1. Além disso, destaca-se que para os sistemas IEEE 30 e 57 os resultados encontrados pelos diferentes métodos é diferente, provavelmente isso se deve ao fato da HF não ser uma ferramenta de solução ótima. Observa-se também diferença para os resultados encontrados para o sistema de 30 barras, não foi possível identificar a causa de tamanha diferença entre a solução do método ótimo *bintprog* e o encontrado na literatura.

A Tab. 4.5 apresenta os resultados encontrados para as redes de distribuição com custos de instalação iguais. Observa-se que para o sistema IEEE 3861 barras não foi possível encontrar solução usando BB ou *bintprog*. Com a rotina *bintprog* não foi possível simular o sistema devido ao seu tamanho, o que novamente impossibilita qualquer análise do sistema. No caso do BB utilizado, só foi possível encontrar o valor para uma iteração do problema linear relaxado por limitação de tempo. A grande vantagem aqui se deu na aplicação da heurística, porque ela apresentou uma solução inteira de mesmo valor do limitante inferior apresentado pelo BB, o

Tabela 4.4: Resultados de alocação de PMU em sistemas de transmissão com barras de passagem para custos iguais de instalação.

<i>Sistemas</i>	Referência			Bintprog			HF		
	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$
<b>IEEE 14</b>	3	-	-	3	9	0,55	3	2	0,32
<b>IEEE 30</b>	7	-	-	7	48	0,68	6	9	0,49
<b>IEEE 57</b>	11	-	-	15	4736	10,76	10	16	0,61
<b>IEEE 118</b>	28	-	-	29	1138	15,86	26	13	0,637

que significa que é a solução ótima. Assim, para os sistemas de distribuição a HF encontrou soluções ótimas para todos os sistemas de teste, não sendo necessário executar a segunda fase do algoritmo de PDA, mas assegurando a escalabilidade e eficiência do algoritmo.

Tabela 4.5: Resultados de alocação de MQEE em sistemas de distribuição para custos de instalação iguais.

<i>Sistemas</i>	BB			Bintprog			HF		
	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$
IEEE 13	6	21	4,33	6	1	0,22	6	6	0,45
IEEE 34	12	59	6,02	12	5	0,25	12	11	0,53
IEEE 37	12	17	3,60	12	9	0,24	12	6	0,47
IEEE 123	47	221	9,69	47	10	0,41	47	44	1,55
IEEE 3861	1632	-	-	-	-	-	1632	1309	1430,20

### 4.3 Soluções com Custo de Instalação Diferentes

A Tab. 4.6 apresenta os resultados encontrados para as redes de transmissão com custos de instalação diferentes.

Assim como para o caso de custos iguais a HF obteve excelente comportamento no que se refere ao intervalo de simulação até a convergência, com um número de iterações muito menor do que os demais algoritmos. Nesse caso ela não encontrou o ótimo para o sistema IEEE 300 barras e nem para o sistema brasileiro, mas novamente ficou próxima, o que pode ser comprovado analisando o valor da solução inteira encontrada pela HF frente ao limitante inferior apresentado pelo BB. Os algoritmos BB e *bintprog* não encontraram nenhuma solução para o sistema

Tabela 4.6: Resultados de alocação de PMU em sistemas de transmissão para custos de instalação diferentes.

<i>Sistemas</i>	BB			Bintprog			HF		
	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$
<b>IEEE 14</b>	12	19	3,88	12	10	0,20	12	6	0,45
<b>IEEE 30</b>	21	59	5,91	21	43	0,20	21	3	0,45
<b>IEEE 57</b>	44	83	6,03	44	205	0,39	44	4	0,52
<b>PERU 117</b>	102	233	21,79	102	318	1,44	102	10	0,89
<b>IEEE 118</b>	100	217	26,44	100	336	0,86	100	20	0,65
<b>IEEE 300</b>	234	447	97,81	234	1243	210,16	235	39	1,53
<b>BRASIL 2834</b>	2246	-	-	-	-	-	2265	211	118,32

brasileiro devido ao seu tamanho.

A aplicação da fase 2 do algoritmo de PDA foi feita apenas para o sistema IEEE 300 barras e para o sistema brasileiro, o resultado está na Tab. 4.7. Esse resultado é de extrema importância para comprovar a eficácia do algoritmo de PDA em sistemas de grande porte. Nos dois casos foi atingido o valor ótimo e com intervalo de simulação pequeno. Para o sistema brasileiro o resultado ótimo de alocação foi encontrado em menos de 3 minutos.

Tabela 4.7: Resultados de alocação de PMU com custos diferentes de instalação usando PDA.

<i>Sistemas</i>	PDA		
	$Z^*$	$It$	$t$
<b>IEEE 300</b>	234	43	2,20
<b>BRASIL 2834</b>	2246	235	153,69

A Tab. 4.8 apresenta os resultados encontrados para as redes de distribuição com custos de instalação diferentes. Novamente a HF encontrou a solução ótima para os sistemas de distribuição. Destaque para o sistema IEEE 3861, visto que obteve uma solução inteira com valor igual ao limitante inferior, custo de 2262, garantindo a otimalidade e desprezando o uso da fase 2 do algoritmo de PDA.

Tabela 4.8: Resultados de alocação em sistemas de distribuição para custos de instalação diferentes.

<i>Sistemas</i>	BB			Bintprog			HF		
	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$	$Z^*$	$It$	$t$
IEEE 13	7	1	2,42	7	4	0,23	7	1	0,26
IEEE 34	23	35	3,19	23	25	0,25	23	7	0,50
IEEE 37	26	17	3,12	26	36	0,23	26	7	0,49
IEEE 123	75	203	9,15	75	113	0,48	75	8	0,58
IEEE 3861	2262	-	-	-	-	-	2262	1505	1179,60

## 4.4 Heurísticas de Fixação Diferentes

A Heurística de Fixação desenvolvida por Demir (2000) [34] foi originalmente proposta para solucionar o Problema da Mochila 0-1 como parte de um algoritmo de PDA. Nesta tese, percebeu-se que mesmo com a heurística sendo usada isoladamente era possível chegar a ótimos ou subótimos de qualidade. Inicialmente, fez-se o uso dela modificando os vetores do Problema do Recobrimento e modelando-o como um Problema da Mochila Multidimensional, sendo que ao final da solução bastava reescrever o resultado. Em seguida, observou-se que era possível escrever na heurística o PPI gerado como um PR diretamente, mostrado no Cap. 3.

Como alternativa e buscando diminuir o número de iterações pensou-se em usar critérios distintos de fixação das variáveis. A primeira variação foi ao invés de fixar a menor variável fracionária em 0, levar a maior para 1. Depois fez-se as duas aproximações ao mesmo tempo, fixando-se a menor fracionária em 0 e a maior em 1. Abaixo segue o algoritmo mostrando essa fixação simultânea em 0 e 1. Ele é similar ao apresentado na Seção 2.4.

<p>1. Inicialização <math>X_1 = \emptyset, X_0 = \emptyset, \mathbf{c}, \mathbf{D}</math></p> <p>2. Enquanto <math>x_j^{LP}</math> tiver valores fracionais, faça</p> <p style="padding-left: 40px;">Calcule <math>(LP(k, b)   X_0, X_1)</math></p> <p style="padding-left: 40px;">Atualize <math>X_0 \leftarrow X_0 \cup \{j   x_j^{LP} = 0\}</math></p> <p style="padding-left: 40px;">Atualize <math>X_1 \leftarrow X_1 \cup \{j   x_j^{LP} = 1\}</math></p> <p style="padding-left: 40px;">Fixe a menor variável em 0: <math>j^* = \arg \min_{0 &lt; x_j^{LP} &lt; 1} \{x_j^{LP}\}</math></p> <p style="padding-left: 40px;">Fixe a maior em 1: <math>l^* = \arg \max_{0 &lt; x_j^{LP} &lt; 1} \{x_j^{LP}\}</math></p> <p style="padding-left: 40px;">Atualize <math>X_0 \leftarrow X_0 \cup \{j^*\}</math></p> <p style="padding-left: 40px;">Atualize <math>X_1 \leftarrow X_1 \cup \{l^*\}</math></p> <p>3. Saída:</p> <p style="padding-left: 40px;"><math>x_j = 0, \forall j \in X_0</math></p> <p style="padding-left: 40px;"><math>x_j = 1, \forall j \in X_1</math></p> <p style="padding-left: 40px;"><math>z = \sum_{j=1}^k c_j x_j</math></p>
--

As Tab. 4.9, 4.10, 4.11, 4.12 apresentam os resultados obtidos para as três formas de se fixar as variáveis. A legenda utilizada para cada fixação foi:

- HF-0 - Fixação do menor valor fracionário em 0
- HF-1 - Fixação do maior valor fracionário em 1
- HF-01 - Fixação do menor valor fracionário em 0 e do maior em 1 simultaneamente.

Observa-se a partir da Tab. 4.9 que o valor das funções objetivos não se alterou para nenhuma solução do sistema de transmissão de custos iguais, o que não justificaria a alteração do critério de fixação de variáveis. Por outro lado, olhando o número de iterações vê-se que houve redução para os sistemas maiores tanto na fixação em 1 quanto na fixação simultânea em 0 e 1. Para o sistema brasileiro essas alterações diminuiram significativamente o intervalo de simulação.

Para os sistemas de distribuição com custos iguais, Tab. 4.10, observa-se que os valores encontrados para a função objetivo foram iguais para as três fixações e são os valores ótimos, como visto na Tab. 4.5. A vantagem apresentada foi para a fixação simultânea, pois ela reduziu bastante o intervalo de simulação para os

Tabela 4.9: Resultados de alocação para heurísticas diferentes em sistemas de transmissão com custos de instalação iguais.

<i>Sistemas</i>	HF-0		HF-1		HF-01	
	Z*	It	Z*	It	Z*	It
IEEE 14	4	2	4	3	4	3
IEEE 30	10	15	10	10	10	10
IEEE 57	17	29	17	16	17	15
PERU 117	35	58	35	37	35	35
IEEE 118	32	43	32	28	32	27
IEEE 300	87	70	87	53	87	52
BRASIL 2834	984	803	984	707	984	704

Tabela 4.10: Resultados de alocação para heurísticas diferentes em sistemas de distribuição com custos de instalação iguais.

<i>Sistemas</i>	HF-0		HF-1		HF-01	
	Z*	It	Z*	It	Z*	It
IEEE 13	6	6	6	6	6	7
IEEE 34	12	11	12	10	12	11
IEEE 37	12	6	12	5	12	6
IEEE 123	47	44	47	39	47	40
IEEE 3861	1632	1309	1632	1250	1632	743

sistemas maiores.

Tabela 4.11: Resultados de alocação para heurísticas diferentes em sistemas de transmissão com custos de instalação diferentes.

<i>Sistemas</i>	HF-0		HF-1		HF-01	
	Z*	It	Z*	It	Z*	It
IEEE 14	12	6	12	5	12	5
IEEE 30	21	3	21	3	21	4
IEEE 57	44	4	44	4	44	5
PERU 117	102	10	102	11	103	11
IEEE 118	100	20	100	20	100	20
IEEE 300	235	39	235	37	235	34
BRASIL 2834	2265	211	2265	206	2265	189

Para os sistemas de transmissão, Tab. 4.11, considerando custos de instalação dos monitores diferentes, o valor da função objetivo praticamente não se alterou com a mudança do critério de fixação, exceto para os sistemas brasileiro e peruano, e o número de iterações também não apresentou queda significativa para os sistemas maiores na fixação simultânea. As alterações não foram tão relevantes quanto para os sistemas de distribuição.

Tabela 4.12: Resultados de alocação para heurísticas diferentes em sistemas de distribuição com custos de instalação diferentes.

<i>Sistemas</i>	HF-0		HF-1		HF-01	
	Z*	It	Z*	It	Z*	It
IEEE 13	7	1	7	1	7	2
IEEE 34	23	7	23	7	23	7
IEEE 37	26	7	26	7	26	7
IEEE 123	75	8	75	8	75	8
IEEE 3861	2262	1505	2262	1498	2262	844

Os sistemas de distribuição com custos de instalação diferentes, Tab. 4.12, encontram os valores ótimos da função objetivo para todos os casos e para a fixação simultânea a redução do número de iterações necessárias é bem grande para o sistema brasileiro.

Esta seção mostrou os resultados obtidos com a simulação de sistemas de teste amplamente usados na literatura e para um sistema de transmissão de grande porte real (sistema brasileiro). Os resultados foram promissores no que se refere ao uso da heurística de fixação de variáveis, porque ele permite a simulação de sistemas de grande porte, podendo eventualmente dispensar o uso do algoritmo de PDA completo.

Observa-se que pode ser muito interessante alterar o critério de fixação de variáveis de acordo com o tipo de sistema de interesse. Para os sistemas de distribuição, a queda no número total de iterações foi grande e o valor ótimo foi atingido em todos os casos teste. Isso aconteceu provavelmente devido a topologia radial desse tipo de sistema, onde as barras adjacentes são em menor número e as possibilidades de instalação são menores, o que efetua a poda prematura de ramos.

Uma outra observação que não foi explicitada nessa seção, mas que representa a força da modelagem proposta, é a possibilidade de se alterar as restrições do

problema facilmente de acordo com a necessidade do sistema sob estudo. Por exemplo, a inclusão de instalação pré-existente de monitores ou a obrigatoriedade de instalação em alguma barra específica, além de permitir o aumento da redundância de medidas, substituindo no vetor  $\mathbf{b}$  o valor 1 por 2, por exemplo. Isso ressalta a flexibilidade na modelagem do problema sem alteração do algoritmo proposto.

## 4.5 Variações no Algoritmo de PDA

Como mostrado no Cap. 3, foram desenvolvidos dois algoritmos distintos para solução por PDA. Um deles usa como aproximação a solução do PL o método Simplex e a outra o Método dos Pontos Interiores (MPI). Nessa seção apresentam-se resultados comparativos entre as duas metodologias para os casos em que a segunda etapa do algoritmo de PDA foi realizada.

Tabela 4.13: Resultados de alocação de PMU para algoritmos de PDA com aproximações lineares diferentes.

<i>Sistemas</i>	PDA MPI			PDA Simplex e MPI		
	Z*	It	t	Z*	It	t
IEEE 300 - Custos Diferentes	234	43	2,20	234	14	3,25
BRASIL - Custos Iguais	982	811	444,08	2830	2846	3517,80
BRASIL - Custos Diferentes	2246	235	153,69	8159	2863	3660,30

Observando os resultados da Tab. 4.13 verifica-se que o algoritmo que usa a *Fixação de Variáveis* e o método Simplex para solução dos PPLI gerados na primeira fase do algoritmo encontra uma solução viável, mas muito distante do ótimo para o sistema brasileiro com custos iguais. Essa solução é a de se instalar praticamente um monitor em cada barra. Isso acontece porque na segunda fase o estado  $\mathbf{b}$  é atualizado de forma a gerar muito problemas inviáveis, o que faz com que o algoritmo fixe a cada iteração  $k$  o valor de  $x(k)$  em 1 para tentar gerar problemas viáveis na iteração seguinte.

Por essa razão, o algoritmo completamente desenvolvido nesta tese apresentado em 3.5.3 apresenta a melhor solução para o problema de alocação apresentado.

# Capítulo 5

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 5.1 Conclusões

Foram desenvolvidos algoritmos para solucionar o problema da alocação ótima de monitores de qualidade de energia elétrica em redes elétricas de distribuição e alocação de PMU em redes de transmissão, minimizando o custo total do sistema de monitoramento.

Verificou-se nessa tese que o problema de alocação de MQEE é exatamente o mesmo de alocação de PMU com o objetivo de estimação de estados, ambos são modelados como um problema do recobrimento, em que os dados necessários para modelagem são apenas os de topologia da rede. Destaca-se que a modelagem conjunta para a alocação de MQEE e PMU não foi encontrada na literatura e é a mesma em sistemas de distribuição e transmissão respectivamente, desde que os monitores sejam capazes de medir tensão e corrente nas barras de instalação.

A modelagem baseia-se na topologia da rede e garante a sua observabilidade frente aos eventos de Qualidade de Energia Elétrica que mantém a topologia da rede inalterada, como nos estudos de localização de harmônicos, afundamentos ou elevações de tensão e variações de frequência. Não se exige o conhecimento sobre a carga ou a geração nas barras do sistema.

Diferentemente das abordagens apresentadas por vários autores, não foram usados pacotes comerciais de otimização combinatória para buscar a solução ótima do problema. Procurou-se obter uma maior flexibilidade na modelagem, maior autonomia de programação computacional e melhor entendimento dos procedimentos matemáticos inerentes aos problemas combinatórios, o que permitiu o controle da otimalidade no resultado.

A principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de um novo algoritmo de Programação Dinâmica Aproximada baseado na heurística de fixação de variáveis aplicado a um problema do recobrimento. Todas as condições de contorno e o algoritmo completo para solucionar o PR usando PD não foram encontrados na literatura e foram desenvolvidos ao longo do trabalho. Importante ressaltar que embora a PDA seja uma técnica que não garante otimalidade, foi desenvolvido um algoritmo capaz de avaliar a otimalidade ou não do resultado obtido e, além desse controle, a solução de alocação para sistemas de grande porte foi feita com um intervalo de simulação pequeno, encontrando a solução ótima.

Todos os algoritmos apresentados, *branch and bound*, heurística de fixação e PDA, foram desenvolvidos no software MatLab. Apenas a sua rotina interna de otimização linear (*linprog*) foi usada na busca de limitantes para os subproblemas gerados pelos algoritmos apresentados. Desta forma, usa-se a eficiência computacional de um pacote amplamente difundido e testado combinada com a versatilidade de um programa próprio.

Os algoritmos propostos foram validados usando para testes as redes de transmissão IEEE com 14, 30, 57, 118 e 300 barras e as redes reais de transmissão do Peru e do Brasil, além das redes de distribuição IEEE 13, 34, 37, 123 e 3861 barras. Os sistemas de grande porte testados foram o brasileiro com 2834 barras e o IEEE 3861, este último inclusive foi elaborado com o objetivo de testar a escalabilidade dos algoritmos.

Além de determinar as soluções ótimas para as redes estudadas, o algoritmo se mostrou flexível e eficiente para apoiar estudos de variação de parâmetros, tais como custo dos monitores ou existência prévia de monitores, revelando-se assim uma ferramenta flexível no tratamento de casos reais de interesse de concessionárias de energia elétrica. Apesar do foco ter sido observabilidade para fins de estimação de estado, outras aplicações poderiam ser consideradas. Nesta tese não se realizou modificações na modelagem do problema de alocação de PMU/MQEE, porque a principal contribuição está no método de solução do problema, garante-se que os algoritmos são facilmente adaptáveis a inclusão de restrições diferentes no modelo original.

Procurou-se relatar didaticamente através de exemplos numéricos todo o esforço desenvolvido na elaboração dessa tese. Espera-se que isto facilite a continuidade desse trabalho, pois novos desafios e melhorias são demandadas a todo momento.

## 5.2 Trabalhos Futuros

É possível usar toda a metodologia proposta para uso em caso real de interesse de alguma empresa do setor elétrico na alocação de medidores em sua rede.

Além disso, o algoritmo de Programação Dinâmica Aproximada desenvolvido pode ser adaptado e aplicado com sucesso em outros problemas de programação linear inteira.

# Referências Bibliográficas

- [1] ANEEL. “Agência Nacional de Energia Elétrica”. <http://www.aneel.gov.br/>, 2011.
- [2] ANEEL. “Procedimentos de Distribuição de Energia Elétrica no Sistema Elétrico Nacional, Módulo 8 - Qualidade da Energia Elétrica”. <http://www.aneel.gov.br/area.cfm?idArea=82&idPerfil=2>, 2011.
- [3] ANEEL. “Agência Nacional de Energia Elétrica - <http://www.aneel.gov.br/arquivos/PDF/manualdetransmissao.pdf>”. <http://www.aneel.gov.br/area.cfm?idArea=38>, 2010. p.20, p.65-66, p.153.
- [4] ONS. “Operador Nacional do Sistema”. <http://www.ons.org.br>, 2011.
- [5] ONS. “ONS - Procedimentos de Rede - Módulo 25.6 - Indicadores de Qualidade de Energia”. <http://www.ons.org.br/procedimentos/index.aspx>, 2011.
- [6] IEEE. “IEEE 1159 Monitoring Electric Power Quality”. <http://www.powerstandards.com/IEEE.htm>, 2011.
- [7] IEC. “International Electrotechnical Commission Standards 61000 Part 4-30: Testing and measurement techniques, Power quality measurement methods”. <http://www.iec.ch/>, 2003.
- [8] WON, D.-J., MOON, S.-I. “Optimal number and locations of power quality monitors considering system topology”, *Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, 2008 IEEE*, pp. 1 –1, July 2008. ISSN: 1932-5517. doi: 10.1109/PES.2008.4596174.
- [9] KLARIC, I., SAGOVAC, G. “Building permanent PQ monitoring system on MV network in Elektra Zagreb, Croatia”, *Electrical Power Quality and Utilisation, 2007. EPQU 2007. 9th International Conference on*, pp. 1 –4, Oct. 2007. doi: 10.1109/EPQU.2007.4424234.

- [10] ABUR, A., MAGNAGO, F. “Optimal meter placement against contingencies”, *Power Engineering Society Summer Meeting, 2001. IEEE*, v. 1, pp. 424–428 vol.1, 2001. doi: 10.1109/PSS.2001.970061.
- [11] AMMER, C., RENNER, H. “Determination of the optimum measuring positions for power quality monitoring”, *Harmonics and Quality of Power, 2004. 11th International Conference on*, pp. 684 – 689, Sept. 2004. doi: 10.1109/ICHQP.2004.1409435.
- [12] OLGUIN, G., VUINOVICH, F., BOLLEN, M. “An optimal monitoring program for obtaining Voltage sag system indexes”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 21, n. 1, pp. 378 – 384, Feb. 2006. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2005.857837.
- [13] ELDERY, M., EL-SAADANY, E., SALAMA, M., et al. “A novel power quality monitoring allocation algorithm”, *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 21, n. 2, pp. 768 – 777, 2006. ISSN: 0885-8977. doi: 10.1109/TPWRD.2005.864045.
- [14] ALMEIDA, C. F. M. *Metodologia para a Monitoração Eficiente de Variações de Tensão de Curta Duração em Sistemas Elétricos de Potência*. Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2007.
- [15] DZIENIS, C., KOMARNICKI, P., STYCZYNSKI, Z. “A Method for Optimally Localizing Power Quality Monitoring Devices in Power Systems”. In: *Power Tech, 2007 IEEE Lausanne*, pp. 1522 –1527, july 2007. doi: 10.1109/PCT.2007.4538541.
- [16] REIS, D. C. S. *Um Algoritmo Branch and Bound para o Problema da Alocação Ótima de Monitores de Qualidade de Energia Elétrica em Redes de Transmissão*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2007.
- [17] REIS, D., VILLELA, P., DUQUE, C., et al. “Transmission systems power quality monitors allocation”. In: *Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, 2008 IEEE*, pp. 1 –7, 2008. doi: 10.1109/PES.2008.4596309.
- [18] REIS, D. C. S., DA SILVA, A. P. A. “Alocação de Monitores de Qualidade de Energia”. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Automática*. <http://www.opec-eventos.com.br/cba2010/>, setembro 2010.

- [19] ALHAZMI, Y. *Allocating Power Quality Monitors in Electrical Distribution Systems to Measure and Detect Harmonics Pollution*. Tese de Mestrado, University of Waterloo, 2010.
- [20] WON, D.-J., CHUNG, I.-Y., KIM, J.-M., et al. “Development of power quality monitoring system with central processing scheme”. In: *Power Engineering Society Summer Meeting, 2002 IEEE*, v. 2, pp. 915 –919 vol.2, 2002. doi: 10.1109/PESS.2002.1043496.
- [21] XU, B., ABUR, A. “Observability analysis and measurement placement for systems with PMUs”. In: *Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES*, pp. 943 – 946 vol.2, 2004. doi: 10.1109/PSCE.2004.1397683.
- [22] GOU, B. “Generalized Integer Linear Programming Formulation for Optimal PMU Placement”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 23, n. 3, pp. 1099 –1104, aug. 2008. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2008.926475.
- [23] GOU, B. “Optimal Placement of PMUs by Integer Linear Programming”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 23, n. 3, pp. 1525 –1526, aug. 2008. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2008.926723.
- [24] ABBASY, N., ISMAIL, H. “A Unified Approach for the Optimal PMU Location for Power System State Estimation”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 24, n. 2, pp. 806 –813, may 2009. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2009.2016596.
- [25] NEMHAUSER, G., WOLSEY, L. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley, 1988.
- [26] GOLDBARG, M. C., LUNA, H. P. L. *Otimização Combinatória e Programação Linear*. Campus Elsevier, 2005.
- [27] MURTY, K. G. *Linear and Combinatorial Programming*. R.E. Krieger, 1985.
- [28] PLANE, D. R., MCMILLAN, C. *Discrete Optimization*. Prentice-Hall, 1971.
- [29] HOCHBAUN, D. S. *Approximation Algorithms for NP-Hard Problems*. PWS Publishing Company, 1995.
- [30] ELDERY, M., EL-SAADANY, F., SALAMA, M. “Optimum number and location of power quality monitors”. In: *Harmonics and Quality of Power, 2004. 11th International Conference on*, v. 2, pp. 50 – 57, 2004. doi: 10.1109/ICHQP.2004.1409328.

- [31] KAVASSERI, R., SRINIVASAN, S. “Joint Placement of Phasor and Power Flow Measurements for Observability of Power Systems”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 26, n. 4, pp. 1929–1936, nov. 2011. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2011.2130544.
- [32] KORRES, G. “An integer-arithmetic algorithm for observability analysis of systems with SCADA and PMU measurements”, *Electric Power Systems Research*, v. 81, n. 7, pp. 1388 – 1402, 2011. ISSN: 0378-7796. doi: 10.1016/j.epsr.2011.02.005. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037877961100040X>>.
- [33] EMAMI, R., ABUR, A. “Robust Measurement Design by Placing Synchronized Phasor Measurements on Network Branches”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 25, n. 1, pp. 38–43, feb. 2010. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2009.2036474.
- [34] DEMIR, R. *An Approximate Dynamic Programming Approach to Discrete Optimization*. Tese de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology, June 2000.
- [35] POWELL, W. B. *Approximate Dynamic Programming*. John Wiley & Sons, 2007.
- [36] MARTELLO, S., PISINGER, D., TOTH, P. “New Trends in Exact Algorithms for the 0-1 Knapsack Problem”. In: *European Journal of Operational Research*, pp. 325–332, 2000.
- [37] KHAN, A. “Monitoring power for the future”, *Power Engineering Journal*, v. 15, n. 2, pp. 81–85, abr. 2001. ISSN: 1479-8344. doi: 10.1049/pej:20010204.
- [38] DETROZ, T. “Does power quality monitoring provide financial return?” v. 2, pp. 4, 2001. ISSN: 0537-9989. doi: 10.1049/cp:20010774.
- [39] BATISTA, J., ALFONSO, J., MARTINS, J. “Low-cost power quality monitor based on a PC”, v. 1, pp. 323 – 328 vol. 1, 2003. doi: 10.1109/ISIE.2003.1267267.
- [40] HONG, D., LEE, J., CHOI, J. “Power Quality Monitoring System Using Power Line Communication”. In: *Information, Communications and Signal Processing, 2005 Fifth International Conference on*, pp. 931–935, 0-0 2005. doi: 10.1109/ICICS.2005.1689186.

- [41] CHANG, D., CHENG, M.-J., CHAN, S.-Y., et al. “Development of a Novel Power Quality Monitoring and Report-Back System”. In: *TENCON 2006. 2006 IEEE Region 10 Conference*, pp. 1 –4, 2006. doi: 10.1109/TENCON.2006.343772.
- [42] CHAN, S.-Y., TENG, J.-H., CHANG, D., et al. “Application of GPRS Techniques for Wide-Area Power Quality Monitoring”. In: *Power Electronics and Drive Systems, 2007. PEDS '07. 7th International Conference on*, pp. 68 –72, 2007. doi: 10.1109/PEDS.2007.4487679.
- [43] FERRIGNO, L., LANDI, C., LARACCA, M. “FPGA-based Measurement Instrument for Power Quality Monitoring according to IEC Standards”, pp. 906 –911, maio 2008. ISSN: 1091-5281. doi: 10.1109/IMTC.2008.4547165.
- [44] ABUR, A., MAGNAGO, F. “Optimal meter placement for maintaining observability during single branch outages”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 14, n. 4, pp. 1273 –1278, nov 1999. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/59.801884.
- [45] MADTHARAD, C., PREMRUDEEPREECHACHARN, S., WATSON, N., et al. “An optimal measurement placement method for power system harmonic state estimation”, *Power Delivery, IEEE Transactions on*, v. 20, n. 2, pp. 1514 – 1521, 2005. ISSN: 0885-8977. doi: 10.1109/TPWRD.2004.841309.
- [46] ALMEIDA, C. F. M., KAGAN, N. “Aplicação de Algoritmos Genéticos e Teoria dos Conjuntos Fuzzy no Dimensionamento de Sistemas de Monitoração para Redes de Transmissão de Energia Elétrica”, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, v. 21, pp. 363 – 378, 08 2010. ISSN: 0103-1759. Disponível em: <<http://www.scielo.br/>>.
- [47] RAKPENTHAI, C., PREMRUDEEPREECHACHARN, S., UATRONGJIT, S., et al. “An Optimal PMU Placement Method Against Measurement Loss and Branch Outage”. In: *Power Engineering Society General Meeting, 2007. IEEE*, p. 1, 2007. doi: 10.1109/PES.2007.385607.
- [48] SILVA, R. P. M., BRANCO, H. M. G. C., OLESKOVICZ, M., et al. “Algoritmos Genéticos Aplicados à Alocação de Medidores de Qualidade da Energia Elétrica em Sistemas de Transmissão”. In: *IEEE/PES 2010 Transmission & Distribution Conference and Exposition Latin America*, 2010.
- [49] BRANCO, H., DA SILVA, R., OLESKOVICZ, M., et al. “Extended compact genetic algorithm applied for optimum allocation of power quality

- monitors in transmission systems”. In: *Power and Energy Society General Meeting, 2011 IEEE*, pp. 1–6, july 2011. doi: 10.1109/PES.2011.6039680.
- [50] BALDWIN, T., MILI, L., BOISEN, M.B., J., et al. “Power system observability with minimal phasor measurement placement”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 8, n. 2, pp. 707–715, may 1993. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/59.260810.
- [51] GOU, B., ABUR, A. “An improved measurement placement algorithm for network observability”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 16, n. 4, pp. 819–824, nov 2001. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/59.962432.
- [52] CHEN, J., ABUR, A. “Placement of PMUs to Enable Bad Data Detection in State Estimation”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 21, n. 4, pp. 1608–1615, nov. 2006. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2006.881149.
- [53] CHEN, J., ABUR, A. “Improved topology error detection via optimal measurement placement”. In: *Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, 2008 IEEE*, pp. 1–6, july 2008. doi: 10.1109/PES.2008.4596316.
- [54] DONMEZ, B., ABUR, A. “A Computationally Efficient Method to Place Critical Measurements”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 26, n. 2, pp. 924–931, may 2011. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2010.2066582.
- [55] ZHANG, L., ABUR, A. “Single and Double Edge Cutset Identification in Large Scale Power Networks”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 27, n. 1, pp. 510–516, feb. 2012. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2011.2164815.
- [56] ZHU, J., ABUR, A. “Effect of Phasor Measurements on the Choice of Reference Bus for State Estimation”. In: *Power Engineering Society General Meeting, 2007. IEEE*, pp. 1–5, june 2007. doi: 10.1109/PES.2007.386175.
- [57] ZHU, J., ABUR, A. “Identification of network parameter errors using phasor measurements”. In: *Power Energy Society General Meeting, 2009. PES '09. IEEE*, pp. 1–5, july 2009. doi: 10.1109/PES.2009.5275490.
- [58] KORKALI, M., ABUR, A. “Impact of network sparsity on strategic placement of phasor measurement units with fixed channel capacity”. In: *Circuits and Systems (ISCAS), Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on*, pp. 3445–3448, 30 2010-june 2 2010. doi: 10.1109/ISCAS.2010.5537854.

- [59] YUILL, W., EDWARDS, A., CHOWDHURY, S., et al. “Optimal PMU placement: A comprehensive literature review”. In: *Power and Energy Society General Meeting, 2011 IEEE*, pp. 1 –8, july 2011. doi: 10.1109/PES.2011.6039376.
- [60] PEREIRA, R., DA SILVA, L., MANTOVANI, J. “PMUs optimized allocation using a tabu search algorithm for fault location in electric power distribution system”. In: *Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America, 2004 IEEE/PES*, pp. 143 – 148, nov. 2004. doi: 10.1109/TDC.2004.1432367.
- [61] CHAKRABARTI, S., KYRIAKIDES, E. “Optimal Placement of Phasor Measurement Units for Power System Observability”, *Power Systems, IEEE Transactions on*, v. 23, n. 3, pp. 1433 –1440, aug. 2008. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/TPWRS.2008.922621.
- [62] MOHAMMADI-IVATLOO, B. “Optimal Placement of PMUs for Power System Observability Using Topology Based Formulated Algorithms”, *Journal of Applied Sciences*, v. 9, pp. 2463–2468, 2009.
- [63] NEMHAUSER, G. L., GARFINKEL, R. S. *Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1972.
- [64] BERNARD, R. *Combinatorial Programming: Methods and Applications*. D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [65] TAHA, H. A. *Integer Programming - Theory, Applications and Computations*. Academic Press, 1975.
- [66] VILLELA, P. R. C. *Instalação de Postos de Atendimento e Venda de Insumos numa Cooperativa Agrícola: Uma Aplicação do Problema da Mochila 0-1*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1983.
- [67] BERTSIMAS, D., DEMIR, R. “An Approximate Dynamic Programming Approach to Multidimensional Knapsack Problems”, *Management Science*, v. 48, pp. 550–565, April 2002.
- [68] MATHWORKS. “Matlab - Product Documentation - Bintprog”. <http://www.mathworks.com/help/toolbox/optim/ug/bintprog.html>, April 2012.
- [69] POWELL, W., GEORGE, A., BOUZAIENE-AYARI, B., et al. “Approximate dynamic programming for high dimensional resource allocation problems”, v. 5, pp. 2989 – 2994 vol. 5, 2005. doi: 10.1109/IJCNN.2005.1556401.

- [70] BERTSEKAS, D., TSITSIKLIS, J. “Neuro-dynamic programming: an overview”, v. 1, pp. 560–564 vol.1, dez. 1995. doi: 10.1109/CDC.1995.478953.
- [71] DA MOTTA SALLES BARRETO, A. *Soluções Aproximadas para Problemas de Tomada de Decisão Sequencial*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Maio 2008.
- [72] ROY, B. V., BERTSEKAS, D. P., LEE, Y., et al. “A Neuro-Dynamic Programming Approach to Retailer Inventory Management”, *36th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. pp. 4052–4057, December 1997.
- [73] BERTSEKAS, D. P., TSITSIKLIS, J. N. *Neuro-Dynamic Programming*. Athena Scientific, 1996.
- [74] BERTSEKAS, D. P. *Dynamic Programming and Optimal Control*, v. 1. Athena Scientific, 2005.
- [75] BELLMAN, R. *Dynamic Programming*. Dover Publications, 2003.
- [76] DENARDO, E. V. *Dynamic Programming - Models and Applications*. Dover Publications, 2003.
- [77] TRICK, M. A. “A Dynamic Programming Approach for Consistency and Propagation for Knapsack Constraints”, pp. 113–124, 2001.
- [78] BERTSEKAS, D. P., TSITSIKLIS, J. N., WU, C. “Rollout Algorithms for Combinatorial Optimization”, *Journal of Heuristics*, v. 3, pp. 245–262, November 1997. ISSN: 1381-1231. doi: 10.1023/A:1009635226865. Disponível em: <<http://portal.acm.org/citation.cfm?id=594933.594970>>.
- [79] VAN ROY, B., BERTSEKAS, D., LEE, Y., et al. “A neuro-dynamic programming approach to retailer inventory management”. In: *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, v. 4, pp. 4052–4057 vol.4, dez. 1997. doi: 10.1109/CDC.1997.652501.
- [80] DE FARIAS, D. P. *The Linear Programming Approach to Approximate Dynamic Programming: Theory and Application*. Tese de Doutorado, Stanford University, 2002.
- [81] WASHINGTON, U. “Arquivos de dados para os casos de teste do Sistema de Potência IEEE”. <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>, 03 2010.
- [82] ALLAN, R., BILLINTON, R., SJARIEF, I., et al. “A reliability test system for educational purposes-basic distribution system data and results”, *Power*

*Systems, IEEE Transactions on*, v. 6, n. 2, pp. 813–820, maio 1991. ISSN: 0885-8950. doi: 10.1109/59.76730.

- [83] MANZONI, A. *Desenvolvimento de um Sistema Computacional Orientado a Objetos para Sistemas Elétricos de Potência: Aplicação a Simulação Rápida e Análise da Estabilidade de Tensão*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 2005.
- [84] NADIRA, R., MERRILL, H. M., PINHEIRO, A. “Modelo para la Planificación y Expansión de los Sistemas de Transmisión”. 2 2007.

# Apêndice A

## Anexos

### A.1 Restrições - Elaboração de Alocação de MQEE

Para solução do problema de alocação de monitores de QEE, Eldery et al. (2004,2006) [13, 30] propuseram a elaboração das restrições do problema usando as Leis de Ohm. Além dos trabalhos de Eldery et al., essa modelagem foi usada nos trabalhos de Reis (2007,2008,2010) [16–18], Alhazmi (2010) [19], Silva et al. (2010) [48] e Branco et al. (2011) [49].

Define-se inicialmente a matriz de conectividade  $\mathbf{A}$ , que é usada como auxiliar na construção da matriz de densidade,  $\mathbf{D}$ , do PR, e representa a medição ou cálculo da tensão na barra e correntes nas linhas conectadas àquela barra.  $\mathbf{A}$  é uma matriz ( $m \times n$ ), em que seu número de linhas é definida pelo número total de linhas e barras,  $m = n + L$ , e cada coluna  $k$  representa o monitor instalado na barra  $k$  e a linha  $r$  representa uma variável, que pode ser tensão na barra ou corrente na linha. Cada elemento desta matriz é definido em (A.1).

$$a(r, k) = \begin{cases} 1, \text{ se } r \text{ for medida ou calculada pelo monitor } k \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Definem-se ainda as matrizes de co-conectividade,  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$ , que representam a necessidade de observar as tensões nas barras genéricas  $j$  e  $k$ , considerando-as interconectadas. Estas matrizes são usadas como auxiliares na construção da matriz de densidade e representam as variáveis que correspondem às correntes nas linhas de transmissão/distribuição. Assim é possível garantir que  $i_{jk}$  será medida ou calculada. A dimensão das matrizes  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$  é ( $m \times n$ ), a mesma da matriz  $\mathbf{A}$ .

Sua coluna  $k$  representa o monitor instalado na barra  $k$  e sua linha  $r$  representa a variável de estado  $r$  referente à corrente  $i_{jk}$  na linha. Cada linha dessas matrizes é definida em (A.2) e (A.3).

$$\mathbf{Bj}(r) = \begin{cases} \mathbf{A}(j), \text{ se } r \text{ representa } i_{jk} \text{ e} \\ \text{as barras } j \text{ e } k \text{ estão conectadas,} \\ \mathbf{0}, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{Bk}(r) = \begin{cases} \mathbf{A}(k), \text{ se } r \text{ representa } i_{jk} \text{ e} \\ \text{as barras } k \text{ e } j \text{ estão conectadas,} \\ \mathbf{0}, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Observações na montagem das matrizes auxiliares de restrições:

1.  $\mathbf{Bj}$  e  $\mathbf{Bk}$  só são definidos para as variáveis que representam corrente, para as demais linhas que representam tensão, o valor do elemento é zero.
2. Para a montagem da matriz  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{Bj}$  e  $\mathbf{Bk}$ , as variáveis devem ser escritas na seguinte ordem: tensão nas barras em ordem crescente de numeração das mesmas e corrente com os índices em ordem crescente.

A matriz de densidade do problema constrói-se como em (A.4) e tem uma dimensão igual ao número de barras ou variáveis de tensão,  $n$ , mais duas vezes o número de linhas,  $2L$ , para representar a variável de corrente que depende da tensão em dois barramentos,  $j$  e  $k$ , genericamente.

$$\mathbf{D}^{\text{MQEE}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(1:n) \times n} \\ \mathbf{A}_{(L:m) \times n} + \mathbf{Bj}_{(L:m) \times n} \\ \mathbf{A}_{(L:m) \times n} + \mathbf{Bk}_{(L:m) \times n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Em (A.4),  $\mathbf{A}_{(1:n) \times n}$  é a submatriz obtida a partir da matriz de conectividade das linhas 1 até  $n$  e todas as colunas,  $\mathbf{A}_{(L:m) \times n}$  é a submatriz obtida a partir da matriz de conectividade das linhas  $L$  até  $m$  e todas as colunas. Ainda em (A.4),  $\mathbf{Bj}_{(L:m) \times n}$  e  $\mathbf{Bk}_{(L:m) \times n}$  são as submatrizes obtidas a partir das matrizes de co-conectividade das linhas  $L$  até  $m$  e todas as colunas.

A seguir é mostrada a modelagem proposta para alocação de PMU e depois é feita a comparação entre ambas.

### A.1.1 Exemplo de alocação de MQEE

As matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$  foram elaboradas elemento a elemento, suas linhas representam as variáveis, tensão ou corrente, e as colunas, os possíveis locais de instalação de monitores, ou seja, as três barras do sistema de teste.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & v_1 & v_2 & v_3 & i_{12} & i_{23} \end{array} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & v_1 & v_2 & v_3 & i_{12} & i_{23} \end{array} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & v_1 & v_2 & v_3 & i_{12} & i_{23} \end{array} \quad (\text{A.7})$$

A partir dessas matrizes obtém-se a matriz de densidade própria do exemplo, dada por

$$\mathbf{D}^{\text{MQEE}} = \begin{array}{ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right] & v_1 & v_2 & v_3 & i_{12} & i_{23} \end{array} \quad (\text{A.8})$$

O problema apresentado para o sistema de três barras, Fig. (2.3), é formalizado matematicamente, como em (2.12), nas Eq. (A.9) e (A.10) seguintes.

$$\min z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^t \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Sujeito a } \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ x_j \in \{0, 1\}, \forall j = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (\text{A.10})$$

A observação das Eq. (A.9), (A.10), (2.24) e (2.25) e do próprio sistema verifica que a solução é a instalação de um medidor na barra 2. A grande vantagem da modelagem apresentada para alocação de PMU é que o número de restrições é menor, a matriz  $\mathbf{D}$  é mínima, o que para sistemas de grande porte reduz bastante o tempo de simulação e a complexidade do algoritmo de solução.

Já é possível fazer uma analogia direta entre a matriz de densidade para alocação de PMU, (2.16), e a de alocação de monitores de QEE proposta por Eldery et al. (2004,2006) [13, 30], (A.4). Na verdade, se consideradas somente as  $n$  primeiras linhas da matriz  $\mathbf{A}$ , (A.1), elas serão exatamente iguais.

## A.2 Restrições - Comparação entre as Metodologias

Após comparação de resultados que serão mostrados no Cap. 4, verificou-se os resultados apresentados foram iguais aos das soluções da modelagem de alocação de PMU sem considerar as barras de passagem e a proposta para alocação de MQEE; com a identificação dessa característica, tornou-se necessário provar que é possível usar somente a Eq. (2.16) para representar as restrições de ambos problemas de alocação tanto na transmissão quanto na distribuição.

A primeira observação feita é que a matriz para sistemas sem barras de passagem  $\mathbf{D}^{\text{PMU}}$ , (2.16), é mínima, ou seja, seu posto é igual ao seu número de linhas ou colunas, como ela é uma matriz quadrada, isso garante que suas linhas e colunas são linearmente independentes. Por outro lado, a matriz  $\mathbf{A}$  para problema de alocação de monitores de QEE pode possuir repetição de linhas, uma vez que a partir das linhas que representam as correntes  $(n + 1)$ , o valor é igual a 1 nas mesmas variáveis que representam a tensão. Embora isso não garanta a sua dependência linear por si só, pode ocasionar algumas de suas linhas como combinações lineares de outras. Para as matrizes  $\mathbf{B}_j$  e  $\mathbf{B}_k$  isso ocorre com certeza, uma vez que suas linhas são tiradas diretamente da matriz  $\mathbf{A}$ . Isso mostra que a elaboração do problema feita por Eldery et al. (2004,2006) [13, 30] não gera um problema mínimo, ou seja, é possível reduzir a dimensão das restrições representadas por (2.7) sem ocasionar perdas na generalidade do problema e também mostra o porquê da modelagem para ambos os problemas de alocação de monitores de QEE ou de PMU serem feitos através de (2.16).

### A.3 Soluções de Alocação

Esta seção apresenta algumas soluções de alocação de PMU e MQEE para ilustrar em quais barras dos sistema deveriam ser instalados medidores.

Na Tab. A.1 mostram-se as barras de instalação considerando custos iguais nos sistemas de transmissão IEEE e a Tab. A.2 apresenta resultados para sistemas de distribuição.

Nessas soluções foram considerados apenas alguns sistemas para exemplificar, os resultados foram obtidos usando a HF como método de solução. É importante destacar que para cada um dos métodos de solução desenvolvidos pode haver soluções distintas, visto que múltiplas soluções ótimas globais são uma característica dos problemas de otimização combinatória, como visto no Cap. 2.

Tabela A.1: Soluções para os sistemas de transmissão e custos iguais.

<i>Sistemas</i>	<i>Barras de instalação de PMU</i>
<b>IEEE 14</b>	2, 6, 7, 9
<b>IEEE 30</b>	1, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 25, 27
<b>IEEE 57</b>	1, 4, 6, 9, 15, 20, 24, 25, 28, 32, 36, 38, 41, 46, 50, 53, 57

Tabela A.2: Soluções para os sistemas de distribuição e custos iguais.

<i>Sistemas</i>	<i>Barras de instalação de MQEE</i>
<b>IEEE 13</b>	2, 3, 5, 9, 12, 13
<b>IEEE 34</b>	2, 4, 7, 10, 12, 18, 21, 23, 27, 29, 31, 33