



ANÁLISE DE ERROS EM SISTEMAS DE AMOSTRAGEM APLICADOS A MEDIÇÕES DE ALTA EXATIDÃO

Renata Teixeira de Barros e Vasconcellos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Marcello Luiz Rodrigues de
Campos

Rio de Janeiro
Março de 2012

ANÁLISE DE ERROS EM SISTEMAS DE AMOSTRAGEM APLICADOS A
MEDIÇÕES DE ALTA EXATIDÃO

Renata Teixeira de Barros e Vasconcellos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Marcello Luiz Rodrigues de Campos, Ph.D.

Prof. Charles Casimiro Cavalcante, D.Sc.

Prof. José Antonio Apolinário Junior, D.Sc.

Prof. José Luiz da Silva Neto, Ph.D.

Prof. Mariane Rembold Petraglia, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2012

Teixeira de Barros e Vasconcellos, Renata

Análise de Erros em Sistemas de Amostragem Aplicados a Medições de Alta Exatidão/Renata Teixeira de Barros e Vasconcellos. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XII, 81 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Marcello Luiz Rodrigues de Campos

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 77 – 81.

1. Erros de Amostragem. 2. Metrologia Elétrica. 3. Atraso Fracionário. I. Rodrigues de Campos, Marcello Luiz. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Aos meus pais Fred e Lucia
e a minha filha Maria Antonia*

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Professor Marcello Campos, pela dedicação e pelas sugestões tão importantes para este trabalho. Agradeço também aos professores da COPPE e do curso de Engenharia Eletrônica da UFRJ pela base acadêmica e pelo exemplo.

Meus agradecimentos também aos colegas do Laboratório de Capacitância e Indutância do Inmetro, em especial ao Sr. Luiz Macoto Ogino, pelo apoio e a amizade ao longo deste trabalho. Agradeço também ao chefe da divisão de Metrologia Elétrica do Inmetro, Sr. Edson Afonso, oportunidade de seguir meus estudos enquanto servidora do Inmetro.

Faço um agradecimento especial aos meus pais, Fred e Lucia, pelo constante apoio e pelo grande exemplo de amor ao conhecimento e força de vontade, fundamentais para chegar até aqui. Agradeço também à minha irmã Luciana pela amizade e o incentivo e à minha sobrinha Helena pela alegria que trouxe a nossas vidas.

Por fim agradeço a minha filha Maria Antonia, que chegou em minha vida trazendo muita alegria, amor e sobretudo, esperança no futuro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ANÁLISE DE ERROS EM SISTEMAS DE AMOSTRAGEM APLICADOS A MEDIÇÕES DE ALTA EXATIDÃO

Renata Teixeira de Barros e Vasconcellos

Março/2012

Orientador: Marcello Luiz Rodrigues de Campos

Programa: Engenharia Elétrica

O conhecimento dos limites superiores dos erros durante a amostragem digital é muito importante, em se tratando de medições elétricas de alta exatidão. Na primeira parte deste trabalho nós estudamos cuidadosamente a teoria necessária para uma compreensão aprofundada das principais fontes de erro em medições de harmônicos de alta exatidão. Nós verificamos a importância de cada fonte de erro, tanto quantitativa como qualitativamente, assim como a eficiência de estratégias para redução destes erros. Nós discutimos as interações entre os erros de *aliasing* e integração devido ao efeito de filtro passa-baixas, exercido pelo processo de amostragem digital. Nós também discutimos o modelo de integração não-causal comumente usado pelos dispositivos de amostragem, isto é, os voltímetros digitais, e como termos de correção podem ser usados em sinais periódicos. Na segunda parte deste trabalho nós apresentamos a técnica de amostragem com atraso fracionário, capaz de reduzir de forma muito eficiente os erros de amostragem, melhorando a exatidão em medições elétricas de sinais periódicos por amostragem digital. Nós combinamos a técnica de amostragem com atraso fracionário com a Transformada Discreta de Fourier e com a Análise de Componentes Principais. Os resultados teóricos aqui apresentados são confirmados através de simulações e também de medições em laboratório, obtidas pela amostragem digital de dados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ERROR ANALYSIS IN SAMPLING SYSTEMS APPLIED TO HIGH-ACCURACY MEASUREMENTS

Renata Teixeira de Barros e Vasconcellos

March/2012

Advisor: Marcello Luiz Rodrigues de Campos

Department: Electrical Engineering

Knowledge of the upper limits of errors in digital sampling is very important in high-accuracy electrical measurements. In this thesis, we carefully go through the theoretical background necessary for an in-depth understanding of the main sources of errors in high-accuracy measurement of harmonics. We assess the significance of each error source, both qualitatively and quantitatively, and also the efficiency of error-reduction strategies. We discuss the aliasing- and integration-error interplay due to the low-pass filtering performed by digital sampling. We also discuss the non-causal integration model often assumed for sampling devices, e.g., digital voltmeters, and how the correction term shall be used with periodical signals in practical measurement setups. We also apply the fractional delay sampling technique, which is a simple and very efficient technique to reduce sampling errors, improving the accuracy of electrical digital measurements of periodical signals. We combine the fractional delay sampling technique both with Discrete Fourier Transform and Principal Component Analysis. Theoretical results are backed by simulations and also experimental results obtained with digitally sampled data.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Símbolos	xi
Lista de Abreviaturas	xii
1 Introdução	1
2 Sistemas de Medição por Amostragem Digital	4
2.1 Sistemas de Medição de Potência Elétrica e Impedâncias	4
2.2 Aplicação das Técnicas de Amostragem Propostas	7
2.3 Conclusão	8
3 Análise de Amostragem e Erro de <i>Aliasing</i>	9
3.1 Erro de <i>Aliasing</i>	10
3.1.1 Onda Senoidal Retificada	10
3.1.2 Onda Dente-de-Serra	11
3.2 Erro de <i>Aliasing</i> : Simulações	15
3.2.1 Reflexão de Harmônicos	16
3.3 Conclusão	19
4 Estimação de Erros de Integração, Quantização e <i>Jitter</i>	20
4.1 Erro de Integração	20
4.1.1 Correção do Erro de Integração	21
4.1.2 Estimação do Limite Superior do Erro de Integração	22
4.1.3 Onda Senoidal Retificada	22
4.1.4 Onda Dente-de-Serra	24
4.2 Erros de Quantização e <i>Jitter</i>	26
4.2.1 Erro de Quantização	26
4.2.2 Erro de <i>Jitter</i>	27
4.3 Conclusão	29

5	Análise do Erro de <i>Aliasing</i> Aplicada à Amostragem com Atraso Fracionário	30
5.1	Amostragem com Atraso Fracionário	33
5.2	Amostragem com Atraso Inteiro	36
5.3	Cancelamento do Erro de <i>Aliasing</i>	37
5.4	Simulações	40
5.4.1	Onda Senoidal Retificada	40
5.4.2	Onda Quadrada	43
5.5	Conclusão	46
6	Análise de Componentes Principais	47
6.1	Amostragem com Atraso Inteiro	47
6.2	Amostragem com Atraso Fracionário	49
6.3	Simulações	53
6.4	Conclusão	56
7	Resultados Experimentais	57
7.1	Erros de Amostragem	60
7.1.1	Onda Senoidal Retificada	61
7.1.2	Onda Dente-de-Serra Aproximada	63
7.2	Amostragem com Atraso Fracionário: DFT	64
7.2.1	Onda Senoidal Retificada	65
7.2.2	Onda Quadrada	67
7.3	Amostragem com Atraso Fracionário: PCA	70
7.4	Conclusão	73
8	Conclusões	74
8.1	Publicações	75
	Referências Bibliográficas	77

Lista de Figuras

2.1	Medições elétricas através de sistemas de amostragem digital.	5
3.1	Onda triangular assimétrica.	13
3.2	Onda dente-de-serra: Norma do erro de <i>aliasing</i> x Número de harmônicos.	17
3.3	Onda dente-de-serra: Erro de <i>aliasing</i>	18
4.1	Onda dente-de-serra: Erro de integração.	25
5.1	Amostragem com atraso fracionário.	32
5.2	Espectro de frequência de $F_A(k\omega_0)$	34
5.3	Amostragem com atraso fracionário: Onda senoidal retificada - $f_{1,3M} \left(\frac{n\pi}{\Omega} \right)$	42
5.4	Amostragem com atraso fracionário: Onda senoidal retificada.	43
5.5	Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada.	45
6.1	Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada - PCA.	54
6.2	Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada - PCA X FFT.	55
7.1	<i>Setup</i> de medição - Diagrama de Blocos.	57
7.2	<i>Setup</i> de medição.	58
7.3	Método de amostragem.	60
7.4	Erro de integração: Onda senoidal retificada.	62
7.5	Erro de integração: Onda dente-de-serra aproximada.	64
7.6	Amostragem com atraso fracionário: Onda senoidal retificada.	66
7.7	Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada.	68
7.8	Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada - Erro de <i>ripple</i>	70
7.9	Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada - PCA x DFT.	71

Lista de Símbolos

$F(\omega)$	Transformada de Fourier do Sinal $f(t)$, p. 9
M	Número de Harmônicos Medidos, p. 11
T_s	Intervalo de Amostragem, p. 9
T_{AP}	Tempo de Abertura, p. 20
Z_S	Padrão de Referência, p. 5
Z_X	Padrão Desconhecido, p. 5
Ω	Banda Passante do Sinal, p. 10
$\mu V/V$	Incerteza Relativa de uma Medição de Tensão, em Partes por Milhão (10^{-6}), p. 6
v_0	Frequência Fundamental, p. 6
v_s	Frequência de Amostragem, p. 6
$f_1(t)$	Onda Senoidal Retificada, p. 10
$f_2(t)$	Onda Dente-de-Serra, p. 12
$f_3(t)$	Onda Dente-de-Serra Aproximada, p. 12
$f_4(t)$	Onda Quadrada, p. 43
$f_A \left(\frac{n\pi}{\Omega} \right)$	Série de Amostras com Atraso Fracionário, p. 31
$f_B \left(\frac{n\pi}{\Omega} \right)$	Série de Amostras com Atraso Inteiro, p. 31

Lista de Abreviaturas

AC	Corrente Alternada, p. 5
ADC	Conversor Analógico-Digital, p. 1
DFT	Transformada Discreta de Fourier, p. 2
DVM	Multímetro Digital, p. 6
FD	Atraso Fracionário, p. 2
ID	Atraso Inteiro, p. 36
IVD	Divisor Indutivo de Tensão, p. 4
KLT	Transformada de Karhunen-Loève, p. 49
PCA	Análise de Componentes Principais, p. 2

Capítulo 1

Introdução

Quando aplicamos técnicas de amostragem digital para medições de alta exatidão, é fundamental levarmos em consideração os possíveis erros de medição [1]–[4]. Um estudo cuidadoso dos erros de medição também é importante para a reconstrução, através de seus valores amostrados, de sinais reais, determinísticos e com banda ilimitada [5]–[12].

Neste trabalho nós analisamos, de forma quantitativa e qualitativa, algumas das principais fontes de erro na teoria de amostragem [5][13] para medições assíncronas de sinais digitais [3][14]. Nós verificamos a importância de cada uma destas fontes de erro, em simulações e em medições de laboratório, e também a eficiência de técnicas para redução destes erros.

Nosso objetivo aqui é estudar as fontes de erro mais significativas para medições com alta exatidão de harmônicos em sinais elétricos periódicos [15][16]. Nós estudamos as fontes de erro em conjunto, considerando os modelos teóricos e aplicando estes modelos em situações reais de medição, tendo em vista a amostragem digital de sinais periódicos aplicada a metrologia elétrica.

Embora existam diversos artigos referentes a análise de erros de amostragem, em sua maioria estes artigos focam em uma análise teórica das fontes de erro [2] ou em apenas uma das fontes de erro específica, como por exemplo *aliasing* [5] ou quantização [13]. Por outro lado, nesta tese é apresentada uma análise das fontes de erro em conjunto com aplicações práticas diretas dos resultados.

É uma idealização assumir que um sinal seja limitado em banda, com energia finita e duração infinita. Na prática, o sinal a ser amostrado por um conversor analógico-digital (ADC) tem duração limitada e normalmente tem largura de banda de frequência bem maior que a do conversor. Estas limitações são responsáveis pelo erro de *aliasing*, uma das principais fontes de erro em amostragem digital.

Outra fonte de erro significativa é a integração, uma vez que a maioria dos ADCs calcula a média do sinal de entrada durante um determinado intervalo de tempo. Além do *aliasing* e da integração, nós também consideramos aqui outras duas fontes

de erro: a quantização, correlacionada com o *aliasing*, e o *jitter* [15][16].

Além do estudo das principais fontes de erro na amostragem digital, na segunda parte deste trabalho nós estudamos os efeitos da aplicação de uma técnica amostragem com atraso fracionário (FD) para medições de alta exatidão. O uso da técnica de amostragem FD pode reduzir de forma significativa o erro de *aliasing*, permitindo que a amostragem digital de sinais periódicos seja feita com alta resolução, superando possíveis limitações do ADC utilizado.

A técnica de amostragem FD permite uma redução significativa do erro de *aliasing*, sem que isto signifique um aumento da taxa de amostragem. Em vez disto, ocorre um atraso de fase fracionário do sinal amostrado, superando possíveis limitações do sistema devido a taxas de amostragem muito altas.

O uso de sistemas de amostragem com atraso fracionário não é novo, tendo sido aplicados, por exemplo, para projetos de filtros [17]. Porém aqui apresentamos uma nova perspectiva, aplicando a amostragem com atraso fracionário para a redução de erros de medição, tais como *aliasing* e quantização. Permitindo assim uma redução muito significativa destes erros, através de uma técnica bastante simples, porém de alta eficiência.

Neste trabalho nós estudamos a aplicação da técnica de amostragem com atraso fracionário associada com a transformada discreta de Fourier(DFT) para a estimação de harmônicos em sinais periódicos. Nós também associamos a técnica de amostragem com atraso fracionário com a Análise de Componentes Principais (PCA) [18][19]. Nós podemos considerar a PCA como uma alternativa à DFT, uma vez que ambos são decomposições lineares do sinal medido em bases ortogonais [20][21].

No Capítulo 2 nós apresentamos uma breve introdução aos sistemas de medição por amostragem digital aplicados na área de metrologia elétrica e suas particularidades. Já no Capítulo 3 nós apresentamos uma introdução à análise de amostragem e ao erro de *aliasing*. Nós estudamos a relevância do erro de *aliasing* para dois sinais periódicos e apresentamos simulações e análise dos resultados obtidos.

No Capítulo 4, nós apresentamos uma análise dos erros de integração, de quantização e de *jitter* em sistemas de amostragem. Nós também estudamos a relevância destas fontes de erro para os dois sinais periódicos e a correlação entre estas fontes de erros e o erro de *aliasing*. Aqui também nós apresentamos diversas simulações.

No Capítulo 5 nós apresentamos a técnica de amostragem com atraso fracionário associada com a DFT. Nós discutimos em detalhes esta técnica e estudamos a redução do erro de *aliasing*. Nós apresentamos simulações e comparamos os resultados deste capítulo com aqueles obtidos nos Capítulos 3 e 4.

Já no Capítulo 6 nós aplicamos a Análise de Componentes Principais à estimação de harmônicos, em associação com a técnica de amostragem com atraso fracionário.

Nós também apresentamos simulações e comparamos os resultados deste capítulo com a técnica de amostragem com atraso fracionário associada a DFT.

No Capítulo 7, nós aplicamos a análise dos erros de amostragem e a técnica de amostragem FD à aquisição assíncrona de dados, para sinais periódicos de baixa frequência. Nós apresentamos os resultados de diversas medições realizadas em laboratório e comparamos com as simulações apresentadas nos capítulos anteriores. No Capítulo 8, nós apresentamos as conclusões deste trabalho.

Capítulo 2

Sistemas de Medição por Amostragem Digital

Nas últimas décadas as técnicas de medição por amostragem digital têm sido amplamente usadas na área de metrologia elétrica. É possível medir grandezas elétricas com alta exatidão, sejam elas tensão e corrente alternadas, impedâncias e potência elétrica, entre outras, usando métodos de amostragem digital [22]–[26]. Mais recentemente, devido às normas que visam controlar o fator de qualidade para o fornecimento de energia elétrica, se tornou necessário medir também os harmônicos em sinais periódicos de baixa frequência, visando a caracterização da distorção harmônica em sistemas de potência e energia [3][27].

Embora o foco desta tese seja na análise de erros de amostragem e na apresentação de técnicas para reduzi-los, neste capítulo nós iremos apresentar uma breve descrição dos sistemas de medição por amostragem digital usados na área de metrologia elétrica. Estes sistemas têm características bem particulares, devido às incertezas extremamente baixas necessárias neste tipo de medição.

2.1 Sistemas de Medição de Potência Elétrica e Impedâncias

A Figura 2.1 mostra, de forma bastante simplificada, dois sistemas de medição por amostragem digital. Com o primeiro sistema é feita a calibração de um medidor de potência elétrica (*wattmeter*) e com o segundo sistema é feita a calibração de impedâncias elétricas.

No sistema de calibração de medidores de potência é usada uma fonte capaz de gerar sinais de corrente e de tensão alternadas. Os sinais gerados por esta fonte são então medidos pelo medidor a ser calibrado e também pelos conversores analógico-digitais (ADCs). Também fazem parte do sistema um divisor indutivo (IVD) que

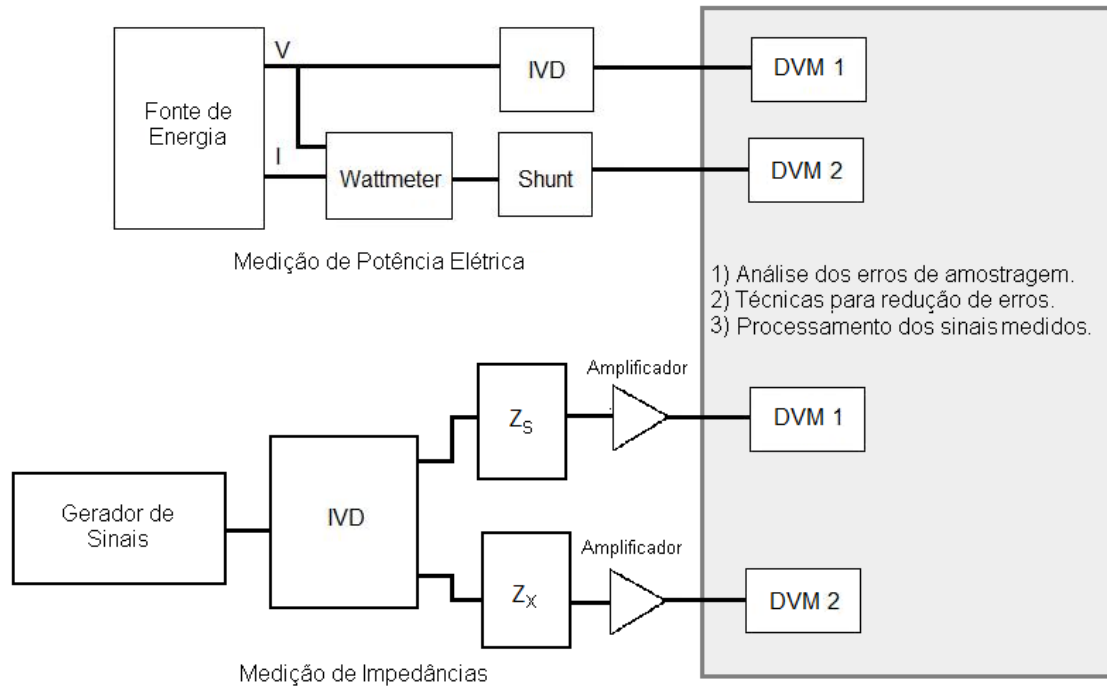


Figura 2.1: Medições elétricas através de sistemas de amostragem digital.

reduz a amplitude do sinal de tensão para a faixa de operação do ADC e um *shunt* para converter o sinal de corrente em um sinal de tensão, também na faixa de operação do ADC.

Durante a calibração de medidores de potência é preciso medir os harmônicos do sinal, visando a caracterização da distorção harmônica destes sistemas. Os exemplos desta tese estão direcionados para estes casos, porém também podem ser aplicados para outros sistemas de medição por amostragem digital, tal como o sistema para medições de impedância, apresentado a seguir.

As medições de impedância por amostragem digital são feitas utilizando-se um gerador de sinais com dois canais, ou um gerador convencional e um sistema divisor de tensão. O gerador é programado para gerar sinais de tensão alternada de baixa frequência. O sinal fornecido alimenta os dispositivos sob teste, sendo um deles o padrão de referência do laboratório (Z_S) e o outro um padrão de valor desconhecido (Z_X). Neste caso Z_S e Z_X são impedâncias do mesmo tipo, e podem ser capacitores, indutores ou resistores em corrente alternada (AC).

No sistema também são usados dois ADCs na configuração *master-slave*, ou um só ADC e um sistema de chaveamento, para medir a razão, e se procedente a diferença de fase, entre as tensões sobre os dois dispositivos, para uma determinada frequência. Uma vez que o valor do padrão de referência Z_S é conhecido, é possível calcular o valor do padrão desconhecido Z_X a partir da razão entre as tensões medidas.

A principal dificuldade referente ao uso de amostragem digital na área de metrologia elétrica se deve à necessidade de obter resultados com incertezas muito baixas, da ordem de partes por milhão. Na maioria dos sistemas de medição a incerteza é da ordem de $50 \mu\text{V}/\text{V}$, porém já existem sistemas experimentais [28], os quais empregam geradores quânticos (*Josephson Waveform Synthesizer*), com incerteza abaixo de $1 \mu\text{V}/\text{V}$, ou seja inferior a uma parte por milhão.

Para alcançar os níveis de exatidão necessários nas medições elétricas, nós devemos tomar uma série de cuidados, tanto na montagem do sistema de medição, como na escolha dos padrões, dos equipamentos auxiliares, geradores e do ADC. A maioria dos laboratórios de metrologia não usa conversores comerciais, pois estes não apresentam a exatidão necessária para aplicações metrológicas. A escolha mais comum recai sobre o multímetro digital (DVM) de $8\frac{1}{2}$ dígitos 3458A, fabricado pela Agilent, devido à sua estabilidade, baixo ruído e alta taxa de amostragem.

As medições por amostragem digital podem ser feitas de forma síncrona [29][30], quando se usa um único sinal de *clock* para sincronizar a geração e a amostragem do sinal usado durante a medição. Estas medições também podem ser feitas de forma assíncrona [3][14], quando o gerador não está sincronizado com os ADCs.

Para as medições por amostragem digital síncronas, como é usado o mesmo sinal de *clock* para controlar o gerador e o ADC, a frequência fundamental ν_0 do sinal gerado é conhecida. Portanto, para evitar erros adicionais no sistema de medição, a frequência de amostragem normalmente é definida de forma que $\nu_s = N\nu_0$, onde $N \in \mathbb{N}^+$.

Nas medições com amostragem digital assíncrona nós não dispomos do sinal de *clock* para controlar a frequência do gerador ou fonte de energia, porém para medições realizadas em laboratório isto não é um problema crítico. As fontes usadas em medições de alta exatidão costumam ter osciladores internos muito estáveis, permitindo que o sinal gerado tenha uma frequência fundamental ν_0 muito próxima daquela programada. Além disto, também é possível programar o multímetro 3458A para medir a frequência do sinal periódico e calcular a frequência de amostragem de modo que $\nu_s = N\nu_0$, ou seja, um múltiplo de ν_0 [31].

O caso mais crítico, em relação à estimação do valor da frequência do sinal periódico, seria as medições de potência elétrica em campo, como por exemplo, em linhas de transmissão de energia. Mesmo nestes casos, a frequência fundamental ν_0 do sinal costuma ter uma variação bem pequena em relação ao valor nominal da frequência da linha de transmissão, de 50 ou 60 Hz [14]. Porém, como esta variação na frequência já é suficiente para comprometer os resultados da medição, neste caso são empregados alguns algoritmos de alta eficiência, para estimar ν_0 , como por exemplo aqueles descritos em [14].

Além dos cuidados com o sistema de medição, também é necessário que nós

tenhamos muita atenção com os algoritmos utilizados para a amostragem e para a análise dos dados medidos. Estes algoritmos devem ser capazes de minimizar as incertezas da medição e tirar o maior proveito possível do *hardware* disponível, compensando suas limitações e ao mesmo tempo evitando provocar distorções no sinal medido.

É fundamental que seja também feita uma análise detalhada das possíveis fontes de erro do sistema de medição por amostragem digital, de modo a minimizá-las e também estimar corretamente a incerteza do sistema. Uma das etapas mais críticas é justamente o sistema de amostragem propriamente dito (conversor analógico-digital) e suas fontes de erro. É nesta etapa que nós focamos os resultados da tese, conforme mostra a área sombreada na Figura 2.1.

Nesta tese nós apresentamos uma análise qualitativa e quantitativa das fontes de erro nos sistemas de medição por amostragem digital e também uma nova técnica de amostragem baseada no uso de atrasos fracionários, a qual reduz significativamente algumas fontes de erro e supera limitações do ADC. Os exemplos que nós usamos ao longo da tese se referem à estimação de harmônicos em sinais periódicos, porém tanto a análise quanto a técnica de amostragem podem ser aplicadas diretamente à medição de outras grandezas elétricas.

Todos os exemplos apresentados ao longo desta tese se referem à amostragem assíncrona de sinais periódicos, realizada em laboratório. Os sinais utilizados nas medições descritas aqui podem ser considerados suficientemente determinísticos, ou seja, os componentes aleatórios existentes nestes sinais são minimizados através da aquisição de múltiplas sequências de amostras e da escolha cuidadosa dos equipamentos usados, entre outros cuidados. Deste modo, podemos considerar que os componentes aleatórios do sinal não comprometem a incerteza da medição [32].

Nós optamos por empregar o multímetro 3458A como nosso ADC e definimos que a frequência de amostragem v_s é um múltiplo exato, ou tão exato quanto permita a resolução do multímetro, da frequência fundamental do sinal v_0 . Nós fizemos estas escolhas uma vez que elas refletem a realidade de um laboratório de calibração na área de metrologia elétrica.

2.2 Aplicação das Técnicas de Amostragem Propostas

As técnicas de análise de erros e de amostragem com atraso fracionário apresentadas neste trabalho podem ser aplicadas diretamente em medições elétricas de alta exatidão, como por exemplo, para a medição de harmônicos em sinais periódicos. Outra aplicação direta destas técnicas é a medição de impedâncias elétricas.

Visando aplicar os resultados deste trabalho em sistemas reais de medição por amostragem digital, está em fase inicial de construção no Laboratório de Capacitância e Indutância (Lacin) do Inmetro, um sistema automatizado para a medição de impedâncias. Este sistema será usado para a calibração de resistores em AC, capacitores e indutores. Ele visa atender à demandas frequentes de clientes do Inmetro, relacionadas principalmente a uma faixa maior de operação, com um tempo de medição mais curto.

Com o sistema automatizado para a medição de impedâncias nós realizaremos as calibrações através do método de amostragem digital, com automação quase completa do processo de medição. Neste sistema, como mostra a Figura 2.1, o padrão a ser calibrado é comparado com um padrão de referência do laboratório, através da medição do sinal de tensão sobre cada um dos padrões. Deste modo é possível calcular a relação entre as magnitudes e também, se procedente, a diferença de fase. Para tanto, é usado um gerador digital de formas de onda programáveis e dois multímetros digitais operando como ADCs.

No sistema automatizado para a medição de impedâncias nós usaremos, para a aquisição e processamento dos dados, as técnicas de análise de erros e de amostragem com atraso fracionário apresentadas aqui neste trabalho.

2.3 Conclusão

Neste capítulo nós fizemos uma introdução dos sistemas de amostragem usados em medições elétricas de alta exatidão. Para a implementação destes sistemas é necessária uma grande atenção, tanto no que se refere ao *setup* de medição como na análise dos dados medidos. Para analisarmos os erros que a amostragem digital introduz no sistema de medição, no próximo capítulo iremos estudar o erro de *aliasing* e no Capítulo 4 os erros de integração, quantização e *jitter*.

Capítulo 3

Análise de Amostragem e Erro de *Aliasing*

O teorema da amostragem [1] afirma que uma função $f(t)$, definida no espaço dos números reais $\mathbb{R}$ e quadrado integrável ¹ neste espaço, com banda limitada ao intervalo $[-\Omega, \Omega]$ radianos por segundo, pode ser completamente reconstruída a partir de seus valores amostrados $f(n\pi/\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}$, isto é

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \text{sinc}(\Omega t - n\pi) \quad (3.1)$$

em que $\frac{\pi}{\Omega} = T_s$ segundos é o período de amostragem e $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$.

Porém, conforme afirma o Teorema de Fourier [33], sinais com duração finita não têm banda limitada. Portanto a função $f(t)$ toma a forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \text{sinc}(\Omega t - n\pi) + R_{\Omega}[f(t)]. \quad (3.2)$$

$R_{\Omega}[f(t)]$ é o erro de *aliasing*, cuja norma é limitada por (ver [1]):

$$\|R_{\Omega}[f(t)]\| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|\omega| > \Omega} |F(\omega)| d\omega \quad (3.3)$$

em que

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.4)$$

Vemos então que $F(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ é a transformada de Fourier de $f(t)$ que deve estar no espaço das funções reais, contínuas e absolutamente integráveis, isto é,

¹Uma função $f(t)$ é quadrado integrável quando a integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ é finita.

$f(t) \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ [1]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.5)$$

3.1 Erro de *Aliasing*

Para sinais com alta distorção harmônica, a energia dos componentes harmônicos pode ser significativa em medições de alta exatidão, mesmo quando a banda passante Ω é muito mais larga que a frequência fundamental ν_0 do sinal, causando um erro de *aliasing* considerável.

Por muitas razões, a estimação do limite superior do erro de *aliasing*, mostrada em (3.3), é de grande importância na análise de erros em medições de alta exatidão. Porém, conforme nós iremos verificar nos exemplos a seguir, para alguns sinais importantes, (3.3) pode ser um limite superior excessivamente alto.

Nos exemplos a seguir, assim como naqueles exemplos a serem apresentados nos próximos capítulos, nós optamos por usar sinais periódicos com alta distorção harmônica e uso frequente em diversas áreas da engenharia elétrica. Os sinais escolhidos, onda senoidal retificada, onda dente-de-serra e onda quadrada, são casos críticos no que se refere a distorção harmônica e portanto os resultados obtidos para estes sinais são válidos também para outros sinais com menor distorção.

3.1.1 Onda Senoidal Retificada

No primeiro exemplo nós iremos discutir a solução de (3.3) para a onda senoidal retificada, com período de $1/(2\nu_0)$ segundos, dada por

$$f_1(t) = |\sin(\omega_0 t)|, \quad (3.6)$$

o qual pode ser reescrito, usando sua expansão em série de Fourier, como

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4 \cos(\omega_0 2kt)}{\pi(1 - 4k^2)} \right). \quad (3.7)$$

A transformada de Fourier de $f_1(t)$ é

$$F_1(\omega) = 4\delta(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(1 - 4k^2)} [\delta(\omega - 2k\omega_0) + \delta(\omega + 2k\omega_0)] \quad (3.8)$$

onde $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ radianos por segundo. Para este sinal em particular, $F_1(\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ e (3.3) pode ser aplicada diretamente.

Para uma banda passante de $\Omega = 2\pi M\nu_0$, $M \in \mathbb{N}$, nós temos (ver [34]):

$$\begin{aligned}
\|R_\Omega[f_1(t)]\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{|\omega|>\Omega} |F_1(\omega)| d\omega \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=\lceil (M+1)/2 \rceil}^{\infty} \frac{4\delta(\omega - 2k\omega_0)}{1 - 4k^2} d\omega \\
&= \sum_{k=\lceil (M+1)/2 \rceil}^{\infty} \frac{8}{\pi(1 - 4k^2)} = \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lfloor M/2 \rfloor}{1 + 2\lfloor M/2 \rfloor} \right) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

onde $\lceil x \rceil$ se refere ao menor inteiro não inferior a x e $\lfloor x \rfloor$ se refere ao maior inteiro não superior a x .

Para este sinal em particular, a soma converge e (3.9) tem solução conhecida, portanto nós podemos calcular o valor exato da norma do erro de *aliasing*. Para $M = 25$, temos que a norma do erro de *aliasing* é:

$$\|R_\Omega[f_1(t)]\| = 0,0509 \text{ V},$$

a qual indica que mesmo para uma banda passante 25 vezes maior que a frequência fundamental ν_0 , o erro de *aliasing* contamina a medição de harmônicos para a maioria das aplicações práticas na área de metrologia elétrica.

Porém, aumentar a taxa de amostragem pode não ser uma solução viável: uma taxa de amostragem alta pode causar erros de quantização altos, devido a limitações internas do ADC. Pois o erro de quantização depende da resolução do ADC, normalmente associada a taxa de amostragem.

Por outro lado, taxas de amostragens baixas podem causar erros de *aliasing* muito altos, requerendo o uso de filtros anti-*aliasing*, os quais podem distorcer o sinal original, uma situação que deve ser evitada em medições de alta exatidão.

No Capítulo 5 nós iremos apresentar a técnica de amostragem por atraso fracionário aplicada na estimação de harmônicos em sinais periódicos. Esta técnica permite uma redução significativa do erro de *aliasing*, sem um aumento na taxa de amostragem. Ao invés disto, consideramos o uso da média de sequências amostradas com taxa mais baixa e com atraso de fase fracionário entre elas, evitando assim quaisquer possíveis inconveniências e limitações geradas por taxas de amostragem mais altas.

3.1.2 Onda Dente-de-Serra

No segundo exemplo nós iremos discutir a solução de (3.3) para a onda dente-de-serra, dada por:

$$f_2(t) = 2\nu_0 t - 2m, \quad \frac{2m-1}{2\nu_0} \leq t < \frac{2m+1}{2\nu_0}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (3.10)$$

a qual pode ser escrita, usando sua expansão em série de Fourier, como

$$f_2(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\text{sen}(\omega_0 kt)}{k}. \quad (3.11)$$

A transformada de Fourier de $f_2(t)$ é

$$F_2(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{jk} [\delta(\omega - k\omega_0) - \delta(\omega + k\omega_0)]. \quad (3.12)$$

Para este sinal em particular, (3.3) não pode ser aplicada diretamente, pois $f_2(t) \notin C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e $F_2(\omega) \notin L^1(\mathbb{R})$. Esta função não é contínua no tempo e sua transformada de Fourier não é absolutamente integrável. Porém, ao invés de ser um obstáculo, a onda dente-de-serra se torna um sinal interessante para ser estudado.

Normalmente, devido a limitações na banda passante, geradores de sinais constroem aproximações da onda dente-de-serra contínuas no tempo e com banda limitada. O sinal de saída de um gerador pode ser então aproximado por uma onda triangular muito assimétrica, tomando a seguinte forma:

$$f_3(t) = \begin{cases} \frac{-2l}{T_0} \left(t - mT_0 + \frac{T_0}{2} \right), & \frac{-T_0}{2} \leq t - mT_0 < \frac{-T_0(l-1)}{2l}, \\ \frac{2l}{T_0(l-1)} (t - mT_0), & \frac{-T_0(l-1)}{2l} \leq t - mT_0 < \frac{T_0(l-1)}{2l}, \\ \frac{-2l}{T_0} \left(t - mT_0 - \frac{T_0}{2} \right), & \frac{T_0(l-1)}{2l} \leq t - mT_0 < \frac{T_0}{2}, \end{cases} \quad (3.13)$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $T_0 = 1/\nu_0$ segundos é o período do sinal. O parâmetro $l > 1$ controla o grau de assimetria: $l = 2$ leva à onda triangular simétrica e $l \rightarrow \infty$ leva à onda dente-de-serra. A Figura 3.1 mostra um período de $f_3(t)$.

A equação (3.13) pode ser reescrita em termos de sua expansão em série de Fourier como

$$f_3(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l^2}{k^2 \pi^2 (l-1)} \text{sen} \left[\frac{k\pi(l-1)}{l} \right] \text{sen}(\omega_0 kt). \quad (3.14)$$

Nós podemos considerar $f_3(t)$ como uma representação muito boa da onda dente-de-serra aproximada. Como um gerador de sinais programável tem banda de frequência limitada, para uma representação exata da onda dente-de-serra aproximada, nós devemos limitar $k \leq \nu_{MAX}/\nu_0$ na equação (3.14), onde ν_{MAX} é a banda passante do gerador de sinais.

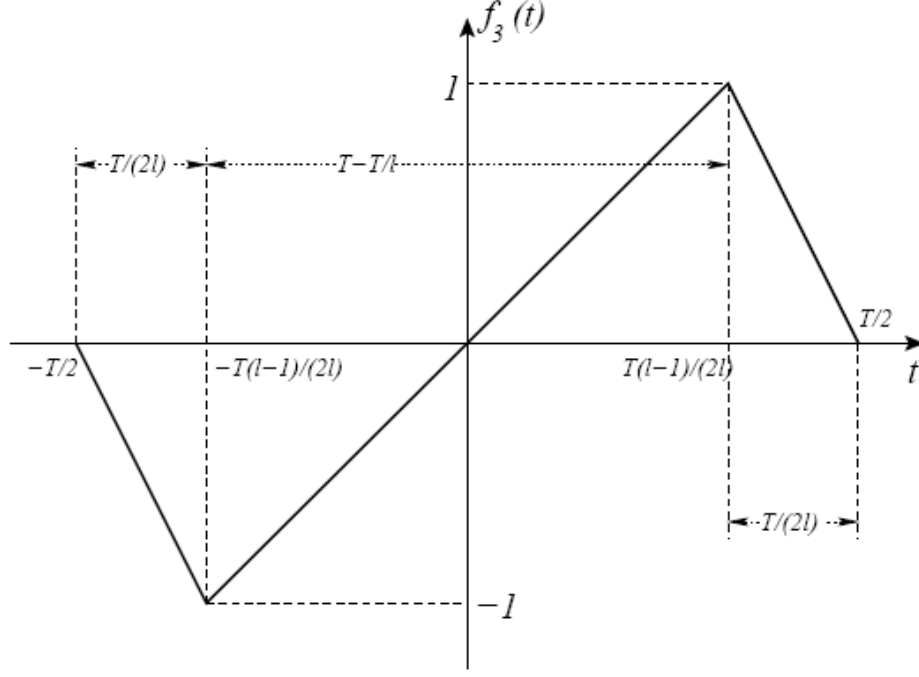


Figura 3.1: Onda triangular assimétrica.

A transformada de Fourier de $f_3(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}
 F_3(0) &= 0 \\
 F_3(\omega) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l^2}{jk^2\pi(l-1)} \text{sen} \left[\frac{k\pi(l-1)}{l} \right] [\delta(\omega - k\omega_0) - \delta(\omega + k\omega_0)] \\
 &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{2l^2}{jk^2\pi(l-1)} \text{sen} \left[\frac{k\pi(l-1)}{l} \right] \delta(\omega - k\omega_0). \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

O sinal representado por $f_3(t)$ é contínuo e absolutamente integrável, portanto (3.3) pode ser calculada, conforme mostrado a seguir. Para uma banda passante de $\Omega = 2\pi M\nu_0$, $M \in \mathbb{N}$, nós temos

$$\begin{aligned}
 \|R_{\Omega}[f_3(t)]\| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{|\omega| > \Omega} |F_3(\omega)| d\omega \tag{3.16} \\
 &\leq \frac{2l^2}{\pi^2(l-1)} \int_{|\omega| > \Omega} \left| \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\text{sen} [k\pi(l-1)/l]}{jk^2} \delta(\omega - k\omega_0) \right| d\omega,
 \end{aligned}$$

sendo $l > 2$, portanto positivo.

É possível calcular a estimativa do limite da série mostrada em (3.16), conside-

rando que o módulo da soma é menor ou igual à soma dos módulos, ou seja:

$$\|R_\Omega[f_3(t)]\| \leq \frac{2l^2}{\pi^2(l-1)} \int_{|\omega|>\Omega} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left| \frac{\sin[k\pi(l-1)/l]}{k^2} \right| \delta(\omega - k\omega_0) d\omega. \quad (3.17)$$

Como o termo $|\sin[k\pi(l-1)/l]| \leq 1$, então podemos simplificar (3.17) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \|R_\Omega[f_3(t)]\| &\leq \frac{2l^2}{\pi^2(l-1)} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{|\omega|>\Omega} \delta(\omega - k\omega_0) d\omega \\ &\leq \frac{4l^2}{\pi^2(l-1)} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Temos também que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge para $\frac{\pi^2}{6}$, portanto

$$\begin{aligned} \|R_\Omega[f_3(t)]\| &\leq \frac{4l^2}{\pi^2(l-1)} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\leq \frac{4l^2}{\pi^2(l-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\leq \frac{4l^2}{\pi^2(l-1)} \frac{\pi^2}{6} = \frac{2l^2}{3(l-1)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ao contrário do que ocorre para o sinal dente-de-serra, a equação (3.16) converge para l finito, portanto é possível obtermos o limite superior de $\|R_\Omega[f_3(t)]\|$. Também temos que considerar que diferentemente do que acontece com o sinal senoidal retificado em (3.9), a equação (3.19) fornece um limite superior de $\|R_\Omega[f_3(t)]\|$ e não o seu valor exato.

A função onda triangular assimétrica apresenta grande dependência do parâmetro l , o qual por sua vez depende do gerador de sinais utilizado. Por exemplo, para um gerador de sinais com banda de 50 MHz, o *rising time* para uma onda dente-de-serra com amplitude de 1 V é da ordem de 20 ns, se assumirmos que $v_0 = 50$ Hz temos $l = 5 \times 10^5$.

Também é possível calcular numericamente o limite superior de $\|R_\Omega[f_3(t)]\|$, para tanto podemos reescrever (3.16) como:

$$\|R_\Omega[f_3(t)]\| \leq \frac{4l^2}{\pi^2(l-1)} \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{|\sin[k\pi(l-1)/l]|}{k^2}. \quad (3.20)$$

Para $M = 50$ e $l = 5 \times 10^5$, a equação (3.20) leva a:

$$\|R_\Omega[f_3(t)]\| \leq 11,14 \text{ V},$$

o qual ainda é um limite superior não-realista (muito pessimista) para a norma do erro de *aliasing*. Ou seja, o limite para a norma do erro de *aliasing* estimado através de (3.20) tem um valor muito acima da realidade, portanto não tem qualquer aplicação prática, em se tratando de medições elétricas.

3.2 Erro de *Aliasing*: Simulações

Para ilustrar a importância de uma análise de erros cuidadosa, nós simulamos tanto o sinal $f_3(t)$, apresentado em (3.13), como a sua versão com banda limitada a $M = 50$, denominado aqui $f_{3,M}(t)$, para valores de $t = n\pi/\Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Em ambos os casos nós consideramos a frequência fundamental do sinal $\nu_0 = 50$ Hz e o período de amostragem $T_s = 200 \mu\text{s}$.

Nós definimos aqui $F_3(k\omega_0)$ e $F_{3,M}(k\omega_0)$ como as transformadas de Fourier discretas de $f_3(n\pi/\Omega)$ e $f_{3,M}(n\pi/\Omega)$, respectivamente, onde a segunda foi construída com a banda limitada a M harmônicos e portanto é livre de erro de *aliasing*.

A diferença $E_3(k\omega_0) = |F_3(k\omega_0)| - |F_{3,M}(k\omega_0)|$ é o erro de *aliasing* para uma determinada frequência $\omega = k\omega_0$ radianos por segundo. Nós calculamos a norma do erro de *aliasing* para $f_3(n\pi/\Omega)$ como sendo:

$$\|R_\Omega[f_3(n\pi/\Omega)]\| = \sum_{k=-M}^M |E_3(k\omega_0)| = 0,5635 \text{ V},$$

a qual é significativamente menor que o valor obtido em (3.20) para o mesmo sinal. Nós veremos na Seção 7.1 que o valor para o erro de *aliasing* obtido nesta seção está de acordo com medições realizadas em laboratório. Além do mais, estes resultados pouco variam para valores altos do parâmetro l , como é esperado.

A razão para a discrepância entre os resultados obtidos nesta seção e na Subseção 3.1.2 se deve ao fato de que a fórmula para o limite superior do erro de *aliasing* (equação (3.3)) integra o valor absoluto de $F(\omega)$ no intervalo $|\omega| > \Omega$, o que implicitamente assume que todos os componentes de $F(\omega)$ vão contribuir positivamente para a norma do erro de *aliasing* no intervalo $[-\Omega, \Omega]$, isto é, supondo o pior caso possível.

Para vários sinais, incluído a onda dente-de-serra e a onda quadrada, as várias reflexões dos componentes do *aliasing* no espectro de frequência algumas vezes serão somadas e outras vezes subtraídas, dentro do intervalo de interesse.

Além do mais, os valores da norma do erro de *aliasing* pouco variam para diferentes valores de M . Isto é, mesmo quando aumentamos a banda passante $\Omega = 2\pi M\nu_0$ o valor da norma do erro de *aliasing* permanece quase inalterado. A subseção a seguir ilustra estes resultados para o sinal dente-de-serra. Os resultados também podem ser aplicados, com poucas modificações, para a onda quadrada ou para a onda dente-de-serra aproximada.

3.2.1 Reflexão de Harmônicos

Se nós amostramos o sinal dente-de-serra, descrito em (3.11), considerando a frequência ν_0 , M harmônicos e o período de amostragem $T_s = \frac{1}{2Mf_0}$, temos

$$f_2(n\pi/\Omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\text{sen}(2\pi f_0 n T_s k)}{k}. \quad (3.21)$$

As repetições no espectro de frequência do sinal sub-amostrado $f_2(n\pi/\Omega)$ vão se sobrepor, ocasionando o erro de *aliasing*. Para este sinal sub-amostrado temos que considerar a maneira como os harmônicos são refletidos, de modo a calcular o erro de *aliasing*. O atraso de fase que ocorre quando os harmônicos são refletidos varia, de modo que dependendo da faixa de frequência em que se originaram, estes podem ter seus valores somados ou subtraídos.

Por exemplo, os harmônicos com frequências $k\nu_0$ no intervalo $M\nu_0 \leq k\nu_0 < 2M\nu_0$ serão refletidos com sinal invertido, ou seja, atraso de fase π . Já os harmônicos com frequências $k\nu_0$ no intervalo $2M\nu_0 \leq k\nu_0 < 3M\nu_0$ serão refletidos com atraso de fase 2π . Este raciocínio pode ser generalizado na equação a seguir:

$$\|R_{\Omega}[f_2(n\pi/\Omega)]\| = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{2Mi - k} - \frac{1}{2Mi + k} \simeq 0,56 \text{ V}, \quad (3.22)$$

onde o resultado $\|R_{\Omega}[f_2(n\pi/\Omega)]\| \simeq 0,56 \text{ V}$ é pouco dependente da escolha de M , conforme mostra a Figura 3.2. Nesta figura podemos observar que a norma do erro de *aliasing* $\|R_{\Omega}[f_2(n\pi/\Omega)]\|$ apresenta um comportamento logarítmico em relação ao número de harmônicos M , isto é, para $M > 10$ o valor de $\|R_{\Omega}[f_2(n\pi/\Omega)]\|$ pouco se altera com o aumento do número de harmônicos medidos.

Para explicar os resultados de (3.22), esta equação foi reescrita como

$$\|R_{\Omega}[f_2(n\pi/\Omega)]\| = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{2k}{4M^2i^2 - k^2} = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(M), \quad (3.23)$$

onde $\Phi_i(M) = \sum_{k=1}^{M-1} \frac{2k}{4M^2i^2 - k^2}$.

Para estudarmos o comportamento de $\Phi_i(M)$ para diferentes valores de M , pasamos a considerar aqui a variável M como contínua, isto é $2 \leq M < \infty, M \in \mathbb{R}$. Neste caso a função $\Phi_i(M)$ passa a ter a seguinte forma integral

$$\Phi_i(M) = \int_1^{M-1} \frac{2k}{4M^2i^2 - k^2} dk. \quad (3.24)$$

Esta integral tem solução se considerarmos a mudança de variável $u = 4M^2i^2 - k^2$

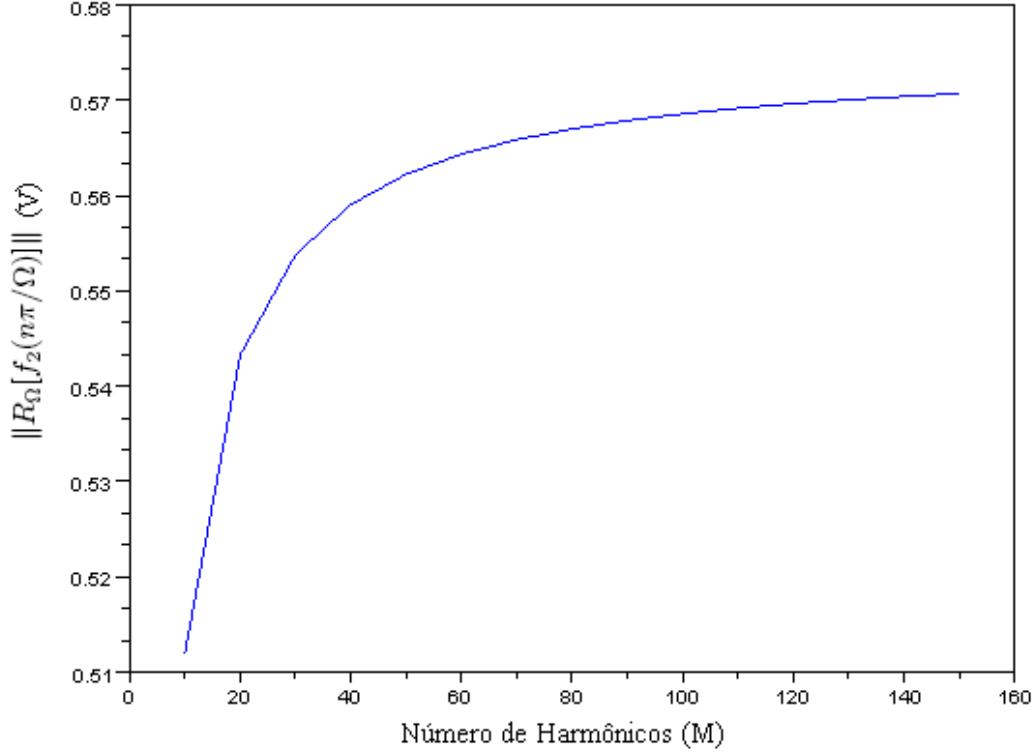


Figura 3.2: Onda dente-de-serra: Norma do erro de *aliasing* x Número de harmônicos.

e portanto $du = -2k$, a equação (3.24) toma a forma:

$$\begin{aligned}
\Phi_i(M) &= \int_1^{M-1} \frac{2k}{4M^2i^2 - k^2} dk \\
&= -\ln(4M^2i^2 - k^2)|_1^{M-1} \\
&= -[\ln(4M^2i^2 - (M-1)^2) - \ln(4M^2i^2 - 1)] \\
&= -\ln\left(1 + \frac{4M^2i^2 - (M-1)^2}{4M^2i^2 - 1}\right) \\
&= -\ln\left(1 + \frac{2M - M^2}{4M^2i^2 - 1}\right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Para a variável M contínua, estudaremos a seguinte série:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(M) = -\frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2M - M^2}{4M^2i^2 - 1}\right). \tag{3.26}$$

Esta série é uniformemente convergente, portanto independe da escolha da variável M . De fato, nós temos que $\ln\left(1 + \frac{2M-M^2}{4M^2i^2-1}\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{4i^2-1}\right) = A_i$ para todo $M \geq 2$, $i \in \mathbb{N}$. Como $\frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \approx 0,5750$, portanto segue pelo “Teste M de Weierstrass” [35] a convergência uniforme da série em (3.26), logo a série numérica em (3.23) também converge, independente da escolha de M .

O exemplo a seguir ilustra os resultados obtidos, isto é, que a norma do erro de

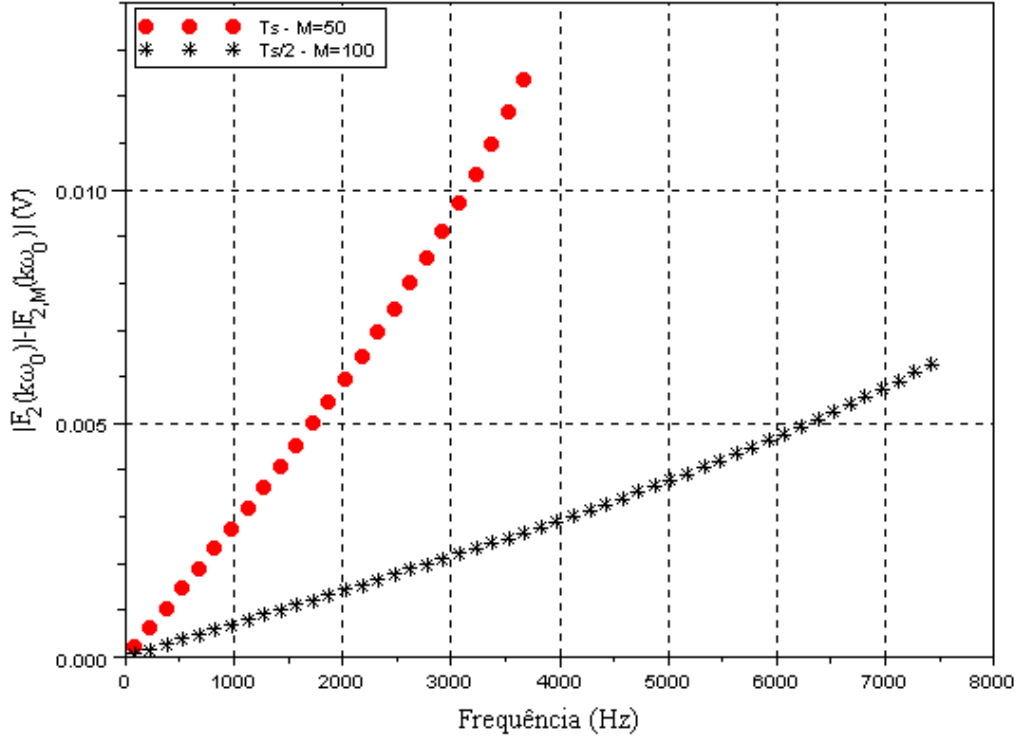


Figura 3.3: Onda dente-de-serra: Erro de *aliasing*

aliasing $\|R_\Omega[f_2(n\pi/\Omega)]\|$ tem pouca dependência do número de harmônicos M , para a forma de onda dente-de-serra (3.11). Neste exemplo o sinal dente-de-serra, com frequência fundamental v_0 , foi amostrado com diferentes períodos de amostragem T_s e $\frac{T_s}{2}$, sendo que foram medidos, para $T_s = \frac{1}{2M_1v_0}$, $M_1 = 50$ harmônicos e para $\frac{T_s}{2} = \frac{1}{2M_2v_0}$, $M_2 = 100$ harmônicos. A Tabela 3.1 mostra os valores da norma do erro de *aliasing* para ambos os casos. Estes resultados também estão na Figura 3.3.

Tabela 3.1: Norma do erro de *aliasing* - Onda dente-de-serra.

Número de Harmônicos	$\ R_\Omega[f_2(n\pi/\Omega)]\ $
$M_1 = 50$	0,5622 V
$M_2 = 100$	0,5686 V

Podemos observar na Figura 3.3 que o erro de *aliasing* para um dado harmônico é diferente se consideramos os diferentes períodos de amostragem T_s e $\frac{T_s}{2}$. Porém quando consideramos a norma do erro de *aliasing* $\|R_\Omega[f_2(n\pi/\Omega)]\|$, os resultados para os dois períodos de amostragem são muito semelhantes.

No caso de sinais como a onda senoidal retificada ou a onda triangular simétrica, o erro de *aliasing* depende fortemente do número de harmônicos M . A onda senoidal retificada, mostrada em (3.7), também foi amostrada com períodos de amostragem T_s e $\frac{T_s}{2}$, sendo que foram medidos para T_s , $M_1 = 25$ harmônicos e para $\frac{T_s}{2}$, $M_2 = 50$

harmônicos. A Tabela 3.2 mostra os valores da norma do erro de *aliasing* para ambos os casos.

Tabela 3.2: Norma do erro de *aliasing* - Onda senoidal retificada.

Número de Harmônicos	$\ R_{\Omega}[f_1(n\pi/\Omega)]\ $
$M_1 = 25$	0,0509 V
$M_2 = 50$	0,0260 V

3.3 Conclusão

Neste capítulo apresentamos introdução à análise de amostragem de sinais periódicos, também estudamos o erro de *aliasing* para os sinais onda senoidal retificada e onda dente-de-serra. No próximo capítulo daremos prosseguimento ao estudo dos erros de amostragem, analisando os erros integração, quantização e *jitter*.

Capítulo 4

Estimação de Erros de Integração, Quantização e *Jitter*

O erro de integração é muito significativo na amostragem digital, uma vez que os ADCs do tipo integrador fazem a média do sinal de entrada durante um determinado intervalo de tempo. Além do erro de integração, nós também iremos considerar neste capítulo outras duas fontes de erro: quantização e *jitter*.

Existem outras fontes de erro a serem consideradas para medições elétricas de alta exatidão, tais como variações de ganho, *offset*, *leakage* de corrente, ruídos internos e não-linearidades no conversor AD [36]. Nós escolhemos não fazer referência direta a estas fontes neste trabalho, uma vez que devido às condições ambientais bem controladas dos laboratórios do Inmetro e às especificações do conversor AD aqui utilizado [37], estes erros foram reduzidos de forma significativa quando comparados aos erros estudados aqui.

4.1 Erro de Integração

Nesta seção nós iremos analisar o erro de integração introduzido por um ADC do tipo integrador. Multímetros digitais de alta resolução, tais como o multímetro Agilent modelo 3458A [37], são comumente usados para medições elétricas de alta exatidão.

Embora outros modelos de ADCs, tais como os que utilizam conversores $\Sigma\text{-}\Delta$, também possam ser utilizados em medições de alta exatidão [38]–[40] com resultados bastante promissores como baixo ruído e alta resolução, nós estudaremos aqui apenas os ADCs do tipo integrador. A escolha destes conversores é a mais comum para sistemas de amostragem de alta exatidão [41]–[43].

Para um ADC do tipo integrador, o sinal de entrada é medido durante um determinado intervalo de tempo, definido como o tempo de abertura T_{AP} . Portanto, cada

amostra é na verdade a média do sinal de entrada medido durante T_{AP} segundos. O processo de integração mais comumente usado na literatura [1] pode ser descrito como:

$$\bar{f}_A(n\pi/\Omega) = \frac{1}{T_{AP}} \int_{n\pi/\Omega - \sigma}^{n\pi/\Omega + \sigma} f(t) dt, \quad (4.1)$$

onde $\sigma = \frac{T_{AP}}{2}$. Este método de integração será denominado aqui como método A.

A equação (4.1) assume conhecimento futuro sobre o sinal de entrada, porém o processo de integração na maioria dos ADCs, como por exemplo no multímetro Agilent 3458A, é causal e pode apenas ser descrito como [31]:

$$\bar{f}_B(n\pi/\Omega) = \frac{1}{T_{AP}} \int_{n\pi/\Omega - T_{AP}}^{n\pi/\Omega} f(t) dt. \quad (4.2)$$

Este método de integração será denominado aqui como método B. As funções $\bar{f}_A(n\pi/\Omega)$ e $\bar{f}_B(n\pi/\Omega)$ são diferentes para a maioria dos sinais $f(t)$.

4.1.1 Correção do Erro de Integração

Uma vez que o processo de integração de um ADC é conhecido, é possível calcular um fator de correção para o erro de integração para sinais determinísticos cuja equação seja conhecida.

Em [31] é apresentada uma forma de compensar o erro de integração para o ADC modelo 3458A da Agilent, considerando que o sinal a ser amostrado seja uma onda senoidal. A correção do erro de integração é obtida multiplicando-se os dados medidos por uma constante positiva $c = \frac{\omega_0 \sigma}{\sin(\omega_0 \sigma)}$.

Esta constante é facilmente determinada quando se resolve (4.1) para $f(t) = \sin(\omega_0 t)$:

$$\bar{f}_A(t) = \frac{f(t)}{c}, \quad \text{para } t = n\pi/\Omega. \quad (4.3)$$

Esta correção é exata, mas apenas para integração utilizando o método A. Para o método de integração B, existe um atraso de fase que também precisa de correção:

$$\bar{f}_B(t) = \frac{f(t - T_{AP})}{c}, \quad \text{para } t = n\pi/\Omega. \quad (4.4)$$

Se temos interesse apenas em obter a amplitude do sinal, é possível recuperar $|F(\omega)|$ a partir de $|\bar{F}_A(\omega)|$ ou $|\bar{F}_B(\omega)|$ como

$$|\bar{F}_A(\omega)| = |\bar{F}_B(\omega)| = \frac{|F(\omega)|}{c}. \quad (4.5)$$

Embora os resultados mostrados em (4.3) e (4.5) sejam verdadeiros apenas para sinais senoidais puros, esta técnica pode ser adaptada para sinais mais complexos,

caso a equação deste sinal seja conhecida e possa ser escrita como uma série de senos e cosenos.

4.1.2 Estimação do Limite Superior do Erro de Integração

Um método para calcular o limite superior de erros de amostragem para sinais com banda limitada está descrito em [1][2]. Este método considera cada valor amostrado como o resultado de um funcional linear agindo no sinal contínuo, apresentando então uma análise sistemática para estimar erros de integração, quantização e *jitter* associados à amostragem de sinais.

Nesta seção iremos aplicar o método proposto em [1][2] para obter um limite superior para erro de integração, considerando que o processo de integração seja feito de acordo com o método A. Vamos considerar uma função $f(t) \in C_0(\mathbb{R})$ ¹, a qual deve satisfazer as seguintes condições: $|f(t)| \leq M_f |t|^{-\gamma}$, onde $M_f > 0$, $\gamma \in (0, 1]$ e $|t| \geq 1$.

Supondo as condições acima descritas, temos que o limite superior para o erro de integração $\|E_{int}\| = \|f(n\pi/\Omega) - \bar{f}_A(n\pi/\Omega)\|$ pode ser expresso como:

$$\|E_{int}\| \leq K_I \omega_I(f, \sigma) \log \frac{1}{\omega_I(f, \sigma)}, \quad (4.6)$$

onde $K_I = \frac{(66+31M_f)}{\gamma}$ e $\omega_I(f, \sigma) = \sup \|f(n\pi/\Omega) - \bar{f}_A(n\pi/\Omega)\|$, satisfazendo a $\omega_I(f, \sigma) \leq \min\{e^{-1}, \frac{\pi}{\Omega}\}$ para $\sigma < 1/2$ e $\frac{\pi}{\Omega} = T_s \leq 1$.

Este método pode ser útil para estimar a ordem de grandeza do erro de integração na amostragem de uma forma de onda cuja equação seja conhecida.

Nas subseções a seguir, nós iremos empregar o método de estimação do limite superior do erro, mostrado em (4.6), assim como a técnica para corrigir o erro de integração, para diferentes sinais periódicos. Nós também apresentaremos simulações para ilustrar os resultados. Na Seção 7.1 do Capítulo 7 nós iremos apresentar medições realizadas em laboratório de modo a verificar os resultados obtidos em condições reais de trabalho.

4.1.3 Onda Senoidal Retificada

Nesta subseção nós faremos algumas simulações para analisar o erro de integração para a onda senoidal retificada, mostrada em (3.6) e (3.7), cuja transformada de Fourier é dada por (3.8).

A onda senoidal retificada, com banda limitada aos M primeiros harmônicos, foi integrada pelo método A, mostrado em (4.1), com tempo de abertura $T_{AP} = 2\sigma =$

¹Uma função $f(t) \in C_0(\mathbb{R})$ quando ela é contínua com suporte compacto, ou seja, tem valor diferente de zero em um intervalo de tempo limitado.

170 μs . O sinal integrado $\bar{f}_{1A}(\frac{n\pi}{\Omega})$ é calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\bar{f}_{1A}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) &= \frac{1}{T_{AP}} \int_{n\pi/\Omega-\sigma}^{n\pi/\Omega+\sigma} \left[\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\lfloor M/2 \rfloor} \left(\frac{4 \cos(\omega_0 2kt)}{\pi(1-4k^2)} \right) \right] dt \\ &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\lfloor M/2 \rfloor} \left(\frac{4 \cos(\omega_0 2knT_s)}{\pi(1-4k^2)} \right) \frac{\text{sen}(\omega_0 T_{AP}k)}{\omega_0 T_{AP}k},\end{aligned}\quad (4.7)$$

onde $V_p = 1$ V, $v_0 = 100$ Hz, $\omega_0 = 2\pi v_0$, $M = 25$ e $T_s = \frac{1}{2Mv_0} = \frac{\pi}{\Omega} = 200$ μs . Conforme foi explicado no Capítulo 2, para medições elétricas de alta exatidão, o valor da frequência fundamental do sinal v_0 é conhecido ou pode ser estimado com alta exatidão. Portanto, para todos os exemplos apresentados nesta tese, a frequência de amostragem foi escolhida de modo que $v_s = Nv_0$, ou seja, um múltiplo de v_0 .

Neste exemplo nós definimos o sinal a ser integrado $f_{1,M}(t)$ como tendo apenas os M primeiros componentes harmônicos de $f_1(t)$, eliminando portanto o erro de *aliasing*. Nós podemos então escrever a transformada de Fourier discreta de $\bar{f}_{1A}(\frac{n\pi}{\Omega})$ como:

$$\bar{F}_{1A}(k\omega_0) = 4\delta(k\omega_0) + 4 \sum_{r=1}^{\lfloor M/2 \rfloor} \left(\frac{[\delta(k\omega_0 - 2r\omega_0) + \delta(k\omega_0 + 2r\omega_0)]}{1-4r^2} \frac{\text{sen}(\omega_0 T_{AP}r)}{\omega_0 T_{AP}r} \right). \quad (4.8)$$

A norma do erro de integração para o sinal $\bar{f}_{1A}(\frac{n\pi}{\Omega})$ pode ser calculada como:

$$\|E_{1A}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} ||\bar{F}_{1A}(k\omega_0)| - |F_{1,M}(k\omega_0)|| \approx 1,47 \times 10^{-2} \text{ V},$$

onde $F_{1,M}(k\omega_0)$ é a transformada de Fourier discreta de $f_{1,M}(\frac{n\pi}{\Omega})$.

O último termo do somatório em (4.8) representa o erro de integração para um tempo de abertura finito T_{AP} . Para compensar este erro, nós podemos aplicar a técnica proposta em [31], multiplicando cada componente do espectro de frequência de $|\bar{F}_{1A}(k\omega_0)|$ pela constante positiva $c_r = \frac{\omega_0 T_{AP}r}{\sin(\omega_0 T_{AP}r)}$, para $0 \leq r < \lfloor M/2 \rfloor$. Neste caso, o erro de integração é completamente eliminado.

Do mesmo modo, erros introduzidos pelo método de integração B podem também ser corrigidos multiplicando a mesma constante c_r por cada componente do espectro de frequência de $|\bar{F}_{1B}(k\omega_0)|$. Porém, neste caso, haverá um atraso de fase devido ao método causal de integração.

Nós também aplicamos o método de estimação descrito em (4.6) para $f_1(\frac{n\pi}{\Omega})$. Nós escolhemos $M_f = 7,7 \times 10^{-3}$ e $\gamma = 1$ para minimizar K_I , satisfazendo as condições $|f(t)| \leq M_f |t|^{-\gamma}$, onde $M_f > 0$, $\gamma \in (0, 1]$ e $|t| \geq 1$, supostas pelo método de estimação do erro de integração. Para os valores escolhidos de M_f e γ , nós calculamos $K_I = 66,24$.

Nós também calculamos $\omega_I(f_1, \sigma) = \sup \|f_1(n\pi/\Omega) - \bar{f}_{1A}(n\pi/\Omega)\| = 1 - 1/c = 4,75 \times 10^{-4}$ V, onde $c = \frac{\omega_0 \sigma}{\text{sen}(\omega_0 \sigma)}$. Considerando os valores acima, nós obtivemos um limite superior do erro de integração, para um período da onda senoidal retificada, como sendo:

$$\|E_{int}\| \leq 2,41 \times 10^{-1} \text{ V.}$$

o qual é uma ordem de grandeza superior a $\|E_{1A}\|$.

4.1.4 Onda Dente-de-Serra

Nesta subseção nós iremos calcular o erro de integração para a onda dente-de-serra, representada por (3.11). Quando resolvemos (4.1) e (4.2) para este sinal em particular, nós obtemos:

$$\bar{f}_{2A}(t) = 2v_0 t - 2m = f_2(t) \quad \text{para } t = n\pi/\Omega \text{ e } m \in \mathbb{Z} \quad (4.9)$$

e

$$\bar{f}_{2B}(t) = 2v_0 t - 2m + v_0 T_{AP} - \delta \left(t - \frac{m+1}{2v_0} \right) \quad \text{para } t = n\pi/\Omega \text{ e } m \in \mathbb{Z}. \quad (4.10)$$

A primeira equação indica que se integrarmos o sinal pelo método A não haverá erro de integração. No entanto, para a integração através do método B, o erro é significativo, composto por uma constante dependente do tempo de abertura T_{AP} e da frequência fundamental do sinal v_0 , além de uma função pente (trem de impulsos) sincronizada com as descontinuidades de $f_2(t)$.

Nós simulamos o processo de integração da onda dente-de-serra para ilustrar os resultados obtidos. Nós estudamos a média temporal do sinal amostrado, considerando os métodos de integração A e B, durante o intervalo de tempo T_{AP} . Na integração do sinal $f_2(t)$ nós usamos os seguintes parâmetros: $V_p = 1$ V, $v_0 = 50$ Hz, $T_s = \frac{1}{2Mv_0} = \frac{\pi}{\Omega} = 200 \mu\text{s}$ para $M = 50$ e $T_{AP} = 170 \mu\text{s}$. Ao contrário do exemplo anterior, o sinal $f_2(t)$ possui infinitos componentes harmônicos, portanto após o processo de amostragem ocorre erro de *aliasing*, além do erro de integração.

Além dos sinais $\bar{f}_{2A}(t)$ e $\bar{f}_{2B}(t)$, nós iremos considerar aqui o sinal amostrado sem integração $f_{2,M}(\frac{n\pi}{\Omega})$, o qual possui apenas os $M = 50$ primeiros componentes harmônicos de $f_2(t)$, eliminando portanto o erro de *aliasing*. $F_{2,M}(k\omega_0)$, a transformada de Fourier discreta de $f_{2,M}(\frac{n\pi}{\Omega})$, será considerada como o nosso sinal de referência.

Nós usamos o sinal de referência $F_{2,M}(k\omega_0)$ para calcular os erros $E_{2A}(k\omega_0) = |\bar{F}_{2A}(k\omega_0)| - |F_{2,M}(k\omega_0)|$ e $E_{2B}(k\omega_0) = |\bar{F}_{2B}(k\omega_0)| - |F_{2,M}(k\omega_0)|$, onde $\bar{F}_{2A}(k\omega_0)$ e $\bar{F}_{2B}(k\omega_0)$ são as transformadas de Fourier discretas de $f_2(\frac{n\pi}{\Omega})$, integrado pelos

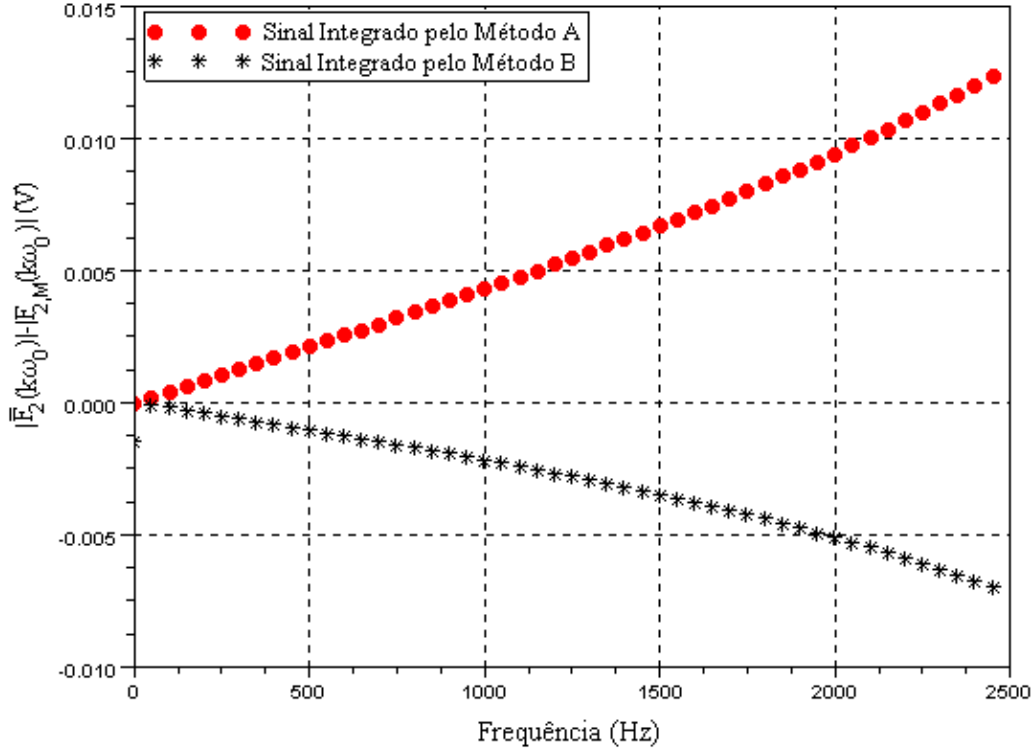


Figura 4.1: Onda dente-de-serra: Erro de integração.

métodos A e B, respectivamente.

Para verificar a influência do processo de integração, nós comparamos $E_{2A}(k\omega_0)$ e $E_{2B}(k\omega_0)$ com os resultados referentes ao erro de *aliasing* da onda dente-de-serra, calculados na Seção 3.2.

O sinal integrado pelo método A apresenta o mesmo erro encontrado na Seção 3.2, isto é:

$$\|E_{2A}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} |\bar{F}_{2A}(k\omega_0)| - |F_{2,M}(k\omega_0)| \approx 0,5623 \text{ V},$$

o que confirma a hipótese de que apenas o erro de *aliasing* se faz presente.

No entanto, o sinal integrado pelo método B, o qual é normalmente encontrado em sistemas de amostragem, apresenta uma combinação dos erros de *aliasing* e integração:

$$\|E_{2B}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} |\bar{F}_{2B}(k\omega_0)| - |F_{2,M}(k\omega_0)| \approx 0,3030 \text{ V}.$$

Este erro é menor que $\|E_{2A}\|$, indicando que o processo de integração funciona como um filtro passa-baixas, eliminando parte do *aliasing*. A Figura 4.1 mostra $E_{2A}(k\omega_0)$ e $E_{2B}(k\omega_0)$.

Podemos observar na Figura 4.1 que os erros para os sinais integrados pelos métodos A e B são bem diferentes. No caso da integração pelo método A, o gráfico mostra apenas o erro de *aliasing*. Já para o sinal integrado pelo método B o gráfico

mostra uma associação dos erros de *aliasing* e integração. Vemos na figura que o erro para o sinal integrado pelo método B possui valores menores que para o sinal integrado pelo método A.

Se nós fizermos a compensação do erro de integração, é possível recuperar o valor de amplitude dos componentes harmônicos do sinal original amostrado $|F_2(k\omega_0)|$, a partir de $|\bar{F}_{2B}(k\omega_0)|$.

Os resultados descritos aqui mostram que o processo de integração pode reduzir o erro de *aliasing*, porém não o elimina. É também importante observar que os dois métodos de integração apresentados levam a resultados bem diferentes para determinados sinais, portanto é necessário ser cuidadoso quando se usa técnicas de compensação para erros de integração, ou quando se estima o valor deste erro, fato muitas vezes ignorado na literatura [1][2][31].

4.2 Erros de Quantização e *Jitter*

Nesta seção nós iremos analisar tanto os erros de quantização como de *jitter* e calcular seus limites superiores, considerando o método proposto em [1],[2].

4.2.1 Erro de Quantização

Quantização é a representação de um sinal analógico com um número limitado de bits, o que frequentemente implica em erros de amplitude [13][44]. O processo de quantização de um ADC pode ser abordado de forma estatística [13][45] ou de forma determinística [46].

O erro de quantização depende da resolução do ADC, normalmente associada com o tempo de abertura e por consequência com a taxa de amostragem. É possível reduzir o erro de quantização aumentando a resolução do ADC, o que nem sempre é viável, ou usando conversores do tipo *over-sampling* [47].

Nos exemplos mostrados nas seções anteriores, nós escolhemos a taxa de amostragem de $T_s = \frac{1}{2M\nu_0} = 200 \mu s$ e o tempo de abertura de $T_{AP} = 170 \mu s$, levando a uma resolução de $b = 21$ bits, ou 6,5 dígitos para o multímetro Agilent 3458A [37].

O limite superior do erro de quantização $\|E_Q\| = \|f(t) - f_Q(t)\|$ pode ser estimado [1][2] para a função $f(t) \in C_0(\mathbb{R})$, a qual deve satisfazer as seguintes condições: $|f(t)| \leq M_f |t|^{-\gamma}$, onde $M_f > 0$, $\gamma \in (0, 1]$ e $|t| \geq 1$, sendo que $\epsilon_0 \leq \min\{e^{-\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{\Omega}\}$. Supondo as condições acima descritas, temos:

$$\|E_Q\| \leq K_Q \epsilon_0 \log \frac{1}{\epsilon_0}, \quad (4.11)$$

onde $K_Q = \frac{(66+52M_f)}{\gamma}$. Considerando uma resolução de $b = 21$ bits, temos que

$\epsilon_0 = 2^{-(b-1)} = 2^{-20}$, atendendo a $\epsilon_0 \leq \min\{e^{-\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{\Omega}\}$.

No primeiro exemplo, nós aplicamos o método de estimação mostrado em (4.11) para o sinal senoidal retificado $f_1(t)$, representado por (3.6). Nós escolhemos $M_f = 7,7 \times 10^{-3}$ e $\gamma = 1$ para minimizar K_Q , ao mesmo tempo satisfazendo as condições acima descritas. Nós calculamos $K_Q = 66,40$ e obtemos, para um período do sinal:

$$\|E_Q\| \leq 8,78 \times 10^{-4} \text{ V}.$$

Nós então comparamos este resultado com uma simulação do processo de quantização. O processo de quantização simulado foi implementado da seguinte forma:

$$f_{1Q}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) = \frac{\lfloor 2^{b-1} f_1\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) + 0,5 \rfloor}{2^{b-1}}. \quad (4.12)$$

Para $b = 21$ bits, $v_0 = 100$ Hz, $M = 25$, $T_s = \frac{1}{2Mv_0} = 200 \mu\text{s}$ e $T_{AP} = 170 \mu\text{s}$, a norma do erro de quantização simulado para $f_{1Q}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ foi:

$$\|E_{1Q}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} ||F_1(k\omega_0)| - |F_{1Q}(k\omega_0)|| \approx 2,45 \times 10^{-6} \text{ V}.$$

No segundo exemplo, nós utilizamos o método de estimação descrito em (4.11) para a onda dente-de-serra aproximada $f_3(t)$, representada por (3.11), com $l = 5 \times 10^5$. Para este exemplo nós escolhemos $M_f = 0,02$ e $\gamma = 1$, calculando $K_Q = 67,04$ e obtendo, para um período do sinal:

$$\|E_Q\| \leq 8,86 \times 10^{-4} \text{ V}.$$

Nós também comparamos este resultado com uma simulação, considerando $b = 21$ bits, $v_0 = 50$ Hz, $M = 50$, $T_s = \frac{1}{2Mv_0} = 200 \mu\text{s}$, e $T_{AP} = 170 \mu\text{s}$. O erro de quantização simulado obtido para a onda dente-de-serra foi:

$$\|E_{2Q}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} ||F_{2Q}(k\omega_0)| - |F_2(k\omega_0)|| \approx 2,03 \times 10^{-6} \text{ V}.$$

Em ambos os exemplos os erros de quantização foram bem pequenos e poderiam ser considerados insignificantes em comparação com os erros de integração e de *aliasing*. Também para ambos os exemplos os resultados obtidos com o método de estimação proposto em [1] são limites superiores muito altos (pessimistas) para a norma do erro de quantização.

É preciso lembrar que o ADC escolhido, o multímetro Agilent 3458A, é um instrumento de alta exatidão, o qual possui uma resolução muito alta. Para ADCs com resolução mais baixa o erro de quantização pode ser significativo.

4.2.2 Erro de *Jitter*

Erros de *jitter* ocorrem devido ao fato de que os instantes de amostragem não acontecem exatamente a intervalos de tempo igualmente espaçados $t_n = \frac{n\pi}{\Omega}$, mas a $t_n + \delta$,

onde δ é um intervalo de tempo dependente das características do ADC. De acordo com as especificações do multímetro Agilent 3458A, $\delta \leq 100$ ps.

Uma vez que todas as medições apresentadas neste trabalho foram feitas de forma assíncrona, está sendo considerado aqui apenas o erro de *jitter* do conversor AD [3]. Em um processo de amostragem síncrono seria necessário considerar também o erro de *jitter* do gerador.

Também é preciso levar em conta que o ADC utilizado neste exemplo possui um tempo de *jitter* muito baixo. Além disto, no escopo deste trabalho é usado apenas um ADC, o que contribui ainda mais para a redução do erro de *jitter*. Para aplicações com dois ou mais ADCs semelhantes operando em paralelo o erro de *jitter* pode se tornar significativo [48]-[50].

O limite superior do erro de *jitter* $\|E_J\| = \|f(t) - f_J(t)\|$ pode ser estimado [1],[2] para a função $f(t) \in C_0(\mathbb{R})$, a qual deve satisfazer as seguintes condições: $|f(t)| \leq M_f |t|^{-\gamma}$, onde $M_f > 0$, $\gamma \in (0, 1]$ e $|t| \geq 1$. Supondo as condições acima descritas, temos:

$$\|E_J\| \leq K_J \omega_J(f, \delta) \log \frac{1}{\omega_J(f, \delta)}, \quad (4.13)$$

onde $K_J = \frac{(66+31M_f)}{\gamma}$ e $\omega_J(f, \delta) = \sup \|f(t) - f(t + \delta)\|$, satisfazendo $\omega_J(f, \delta) \leq \min\{e^{-\frac{1}{2}}, \frac{\pi}{\Omega}\}$ para $0 < \delta < 0,5$.

Nós aplicamos o método de estimação descrito em (4.13) para o sinal senoidal retificado $f_1(t)$, descrito em (3.6). Nós escolhemos $M_f = 7,7 \times 10^{-3}$ e $\gamma = 1$ para minimizar K_J , ao mesmo tempo satisfazendo as condições acima descritas. Nós calculamos $K_J = 66,24$ e $\omega_J(f, \delta) = \sin(\omega_0 \delta) = 6,28 \times 10^{-8}$ V. Considerando os valores acima, nós obtivemos, para um período do sinal, um limite superior para o erro de *jitter* de:

$$\|E_J\| \leq 6,90 \times 10^{-5} \text{ V.}$$

Nós também usamos o método de estimação para a onda dente-de-serra aproximada $f_3(t)$, representada por (3.11), com $l = 5 \times 10^5$. Neste caso, nós escolhemos $M_f = 0,02$ e $\gamma = 1$, que levam a $K_J = 66,62$. Nós calculamos $\omega_J(f, \delta) \approx 2v_0\delta = 1,0 \times 10^{-8}$ V e obtivemos, para um período do sinal:

$$\|E_J\| \leq 1,23 \times 10^{-5} \text{ V.}$$

Como esperado, o erro de *jitter* é significativamente menor que os erros de integração e *aliasing* e pode ser considerado de pouco significado para a configuração aqui utilizada.

4.3 Conclusão

Neste capítulo nós estudamos algumas das principais fontes de erros na amostragem digital: integração, quantização e *jitter*, assim como técnicas para estimar e corrigir estas fontes de erro. Os resultados apresentados aqui foram verificados, usando como exemplo os sinais periódicos onda senoidal retificada e onda dente-de-serra. Os resultados deste capítulo também foram comparados com os resultados obtidos no Capítulo 3, para o erro de *aliasing*.

No próximo capítulo nós iremos apresentar a técnica de amostragem com atraso fracionário, a qual permite a eliminação da maior parte do erro de *aliasing*, ao mesmo tempo evitando aumentar o erro de quantização.

Capítulo 5

Análise do Erro de *Aliasing* Aplicada à Amostragem com Atraso Fracionário

Conforme exposto no Capítulo 3 e aqui repetido para melhor entendimento, o teorema da amostragem [1] afirma que uma função $f(t)$ pode ser reconstruída a partir de seus valores amostrados $f(n\pi/\Omega)$, $n \in \mathbb{Z}$, isto é

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \text{sinc}(\Omega t - n\pi) \quad (5.1)$$

em que $\frac{\pi}{\Omega} = T_s$ segundos é o período de amostragem e $\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$.

É uma idealização assumir que uma função tem banda limitada, com energia finita e duração infinita. Na prática, sinais a serem amostrados por ADCs têm duração limitada e muitas vezes possuem uma banda passante de frequência bem mais larga que aquela do conversor. Estas limitações são responsáveis pelo *aliasing*, uma das principais fontes de erro na amostragem digital [15].

Como a função $f(t)$ não tem banda limitada, toma a forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \text{sinc}(\Omega t - n\pi) + R_{\Omega}[f(t)], \quad (5.2)$$

na qual $R_{\Omega}[f(t)]$ é o erro de *aliasing*.

Para um sinal com banda limitada, a frequência de amostragem $\nu_s = \frac{1}{T_s}$ deve ser pelo menos duas vezes maior que a frequência mais alta do sinal (taxa de Nyquist) para que este seja perfeitamente reconstruído. Aqui nós iremos definir $f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ como sub-amostrado se $f(t)$ tem banda passante mais larga que $\nu_s/2$ e no entanto é amostrado com um período T_s , onde $T_s = \frac{\pi}{\Omega}$.

Quando amostramos um sinal periódico com banda passante de frequência mais

larga que aquela do conversor precisamos escolher a taxa de amostragem com cuidado, uma vez que taxas de amostragem muito altas podem causar erros de quantização significativos, conforme descrito na Seção 4.2. Porém, taxas de amostragem muito baixas levam a um erro de *aliasing* muito alto, eventualmente sendo necessário o uso de filtros anti-*aliasing*, os quais causam distorções no sinal medido.

Como uma opção às altas taxas de amostragem ou ao uso de filtros anti-*aliasing*, nós podemos utilizar a técnica de amostragem com atraso fracionário, a ser discutida em detalhes neste capítulo. Esta técnica permite a eliminação da maior parte do erro de *aliasing*, ao mesmo tempo evitando aumentar o erro de quantização, reduzindo assim a necessidade de filtros anti-*aliasing* e superando possíveis limitações do ADC.

A Figura 5.1 mostra a medição de um sinal periódico $f(t)$ com frequência fundamental ν_0 , com a aplicação da técnica de amostragem com atraso fracionário. Na parte superior da figura, um diagrama de blocos simplificado mostra a aquisição do sinal periódico por um multímetro digital (DVM) operando como um ADC. Os componentes harmônicos deste sinal são então calculados usando a DFT ou a análise de componentes principais (PCA). Conforme comentado no Capítulo 2, estamos considerando aqui uma medição assíncrona implementada com um ADC integrador, sendo que a frequência de amostragem ν_s é um múltiplo de ν_0 .

Nesta medição nós usamos o *trigger* interno do equipamento para iniciar a aquisição de dados no momento em que ocorre um cruzamento por zero positivo no sinal, isto é, quando a derivada primeira do sinal for positiva, conforme mostra a parte inferior da Figura 5.1. No primeiro período do sinal adquirimos uma série temporal de N amostras, a intervalos regulares de T_s segundos, onde $T_s = \frac{1}{N\nu_0}$. Esta série é chamada aqui de $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ e não apresenta atraso em relação ao início do período do sinal amostrado. Nesta figura nós optamos por descrever uma série de amostras sem atraso, porém os resultados apresentados são equivalentes para qualquer atraso inteiro $d = nT_s$, onde $n \in \mathbb{N}$.

No segundo período do sinal, ou seja, depois do cruzamento por zero seguinte, nós programamos o *trigger* do equipamento para que fosse esperado um intervalo de $d = T_s/2$ segundos antes de recomençar a aquisição de dados. Nós adquirimos então uma série temporal de N amostras, a intervalos regulares de T_s segundos. Esta série é chamada aqui de $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ e possui um atraso fracionário, no caso $d = T_s/2$ segundos, em relação ao início do período do sinal amostrado. Os resultados apresentados são equivalentes para qualquer atraso fracionário $d = n\frac{T_s}{2}$, onde $n \in \mathbb{N}^+$, n ímpar.

Nesta tese nós iremos considerar como o início de um período do sinal o momento em que ocorre um cruzamento por zero positivo, uma vez que desta forma podemos usar o *trigger* interno do multímetro para iniciar a aquisição de dados. Porém a técnica de amostragem por atraso fracionário pode ser aplicada para quaisquer duas sequências de N amostras, desde que exista uma defasagem de $d = T_s/2$ segundos em

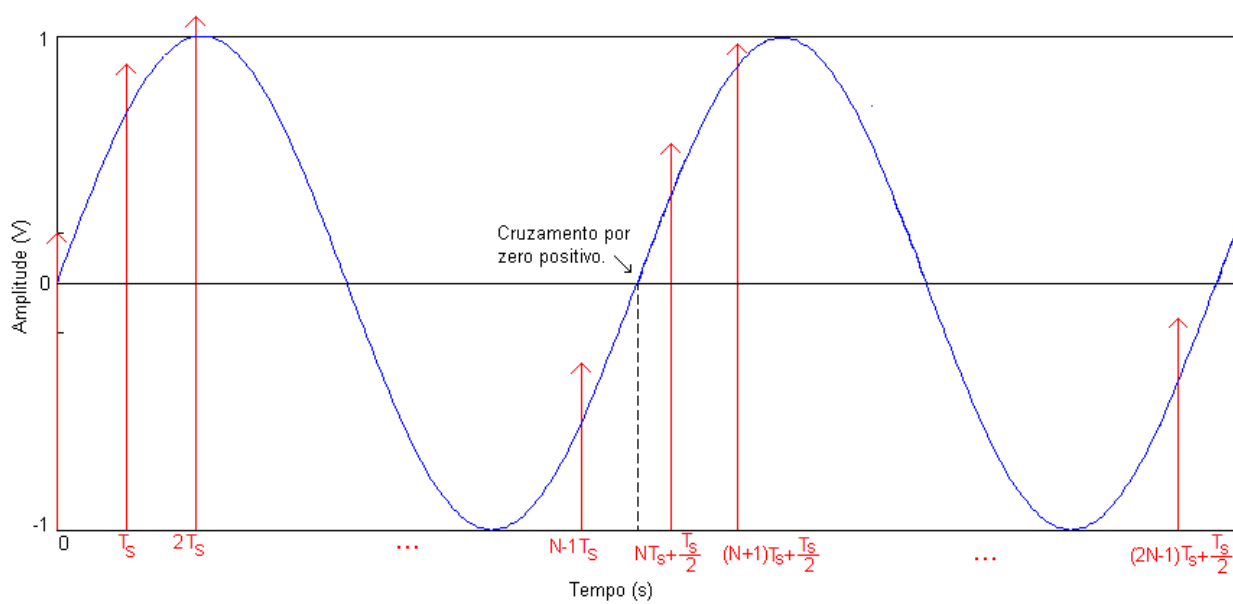


Figura 5.1: Amostragem com atraso fracionário.

relação ao momento em que foi iniciada a aquisição das amostras de cada sequência.

Nas próximas seções nós iremos estudar as duas séries temporais, $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ e $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, e também iremos descrever o processo que permite a eliminação da maior parte do erro de *aliasing*. Devido ao atraso de fase fracionário, existem diferenças entre $|F_A(k\omega_0)|$ e $|F_B(k\omega_0)|$, respectivamente os módulos das transformadas de Fourier discretas de $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ e $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, o que torna possível eliminar a maior parte da energia do *aliasing* fazendo a média de $|F_A(k\omega_0)|$ e $|F_B(k\omega_0)|$, conforme será discutido na Seção 5.3.

O processo de amostragem com atraso fracionário simula o comportamento de um sinal amostrado com uma taxa mais alta, porém sem os problemas esperados para este caso, uma vez que tanto $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ como $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ são, na verdade, amostradas com taxa mais baixa.

5.1 Amostragem com Atraso Fracionário

Suponha um sinal periódico com frequência $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, tal que, $f(t)$ é real, absolutamente integrável e contínuo por partes. Nós podemos então escrever $f(t)$ nos termos de sua série de Fourier, isto é:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\}. \quad (5.3)$$

A transformada de Fourier de $f(t)$ é

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \pi a_0 \delta(\omega) + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k [\delta(\omega - k\omega_0) + \delta(\omega + k\omega_0)] + \\ &\quad - j b_k [\delta(\omega - k\omega_0) - \delta(\omega + k\omega_0)]\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ para todo k . Além disto, se os coeficientes a_k e b_k forem diferentes de zero, então $\{|a_k|\}_k$ e $\{|b_k|\}_k$ são sequências estritamente decrescentes [51]. Observe que $F(\omega) \rightarrow 0$ para $|\omega| \rightarrow \infty$.

Se assumirmos que o sinal periódico $f(t)$ é amostrado em instantes de tempo $t = nT_s + d_{\ell,m}$, onde $T_s = \frac{1}{N\nu_0}$ para $N \in \mathbb{N}^+$, ν_0 é a frequência fundamental e o atraso $d_{\ell,m} = \frac{\ell}{2^m}T_s$ para $\ell, m \in \mathbb{N}$. Se $\frac{\ell}{2^m} \in \mathbb{N}$, então $d_{\ell,m}$ é um atraso inteiro, caso contrário $d_{\ell,m}$ é chamado aqui de atraso fracionário.

Para simplificar nossa análise, nós iremos considerar nas próximas equações um sinal periódico simplificado com média zero, $f_A(t)$, o qual pode ser representado por uma série de cossenos. Esta análise pode ser facilmente ampliada para sinais mais complexos.

Nós iremos amostrar um período de $f_A(t)$ em $t = nT_s + d_{\ell=1,m=1}$, onde $d_{\ell=1,m=1} =$

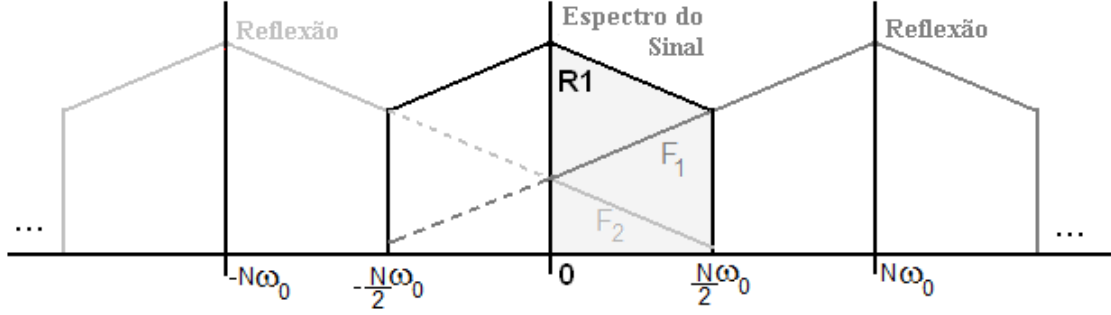


Figura 5.2: Espectro de frequência de $F_A(k\omega_0)$.

$\frac{T_s}{2}$ é um atraso fracionário, isto é

$$f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 n T_s + k\frac{\pi}{N}\right), \quad 0 \leq n < N, \quad (5.5)$$

em que $k\omega_0 d_{\ell=1,m=1} = k\frac{\pi}{N}$. A transformada de Fourier discreta (DFT) de $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ é então dada por

$$\begin{aligned} F_A(k\omega_0) &= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_r \left[\delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{j\frac{r\pi}{N}} + \delta(k\omega_0 + r\omega_0) e^{-j\frac{r\pi}{N}} \right] + \\ &+ R_{\Omega} [f_A(n\pi/\Omega)], \end{aligned} \quad (5.6)$$

na qual N é o número de amostras, sendo que N pode ser considerado par, sem perda de generalidade. $R_{\Omega} [f_A(n\pi/\Omega)]$ denomina a extensão do espectro de frequência, além da região $[-(\frac{N}{2} - 1)\omega_0, (\frac{N}{2} - 1)\omega_0]$, o qual irá causar o erro de *aliasing*. Nós podemos facilmente expandir estes resultados para o sinal periódico $f(t)$, mostrado em (5.3). Devido à sub-amostragem, as reflexões do espectro de frequência $F_A(k\omega_0)$ irão se sobrepor [1], conforme mostra a Figura 5.2.

Nós iremos, a princípio, considerar a região $R1$, mostrada na Figura 5.2, limitada por $[0, (\frac{N}{2} - 1)\omega_0]$, no lado positivo do espectro de frequência de $F_A(k\omega_0)$. Nesta região ocorrem reflexões dos componentes harmônicos com frequências no intervalo $[(\frac{N}{2} + 1)\omega_0, (N - 1)\omega_0]$, aqui denominados $F_{A1}(k\omega_0)$, com um atraso de fase de 2π ,

conforme mostra a equação a seguir:

$$\begin{aligned}
F_{A1}(k\omega_0) &= \pi \sum_{r_1=N/2+1}^{N-1} a_{r_1} \delta(k\omega_0 + r_1\omega_0) e^{-j\frac{r_1\pi}{N}} e^{j2\pi}, \quad r_1 = N - r \\
&= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_{N-r} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{-j\frac{(N-r)\pi}{N}} e^{j2\pi} \\
&= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_{N-r} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{j\pi(1+\frac{r}{N})}. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Os componentes harmônicos com frequências no intervalo $[(N+1)\omega_0, (\frac{3N}{2}-1)\omega_0]$, aqui denominados $F_{A2}(k\omega_0)$, também são refletidos na região $R1$ do espectro de frequência, porém com um atraso de fase de -2π , ou seja

$$\begin{aligned}
F_{A2}(k\omega_0) &= \pi \sum_{r_2=N+1}^{3N/2-1} a_{r_2} \delta(k\omega_0 - r_2\omega_0) e^{j\frac{r_2\pi}{N}} e^{-j2\pi}, \quad r_2 = N + r \\
&= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_{N+r} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{j\frac{(N+r)\pi}{N}} e^{-j2\pi} \\
&= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_{N+r} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{j\pi(-1+\frac{r}{N})}. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Nós podemos expandir este raciocínio para todas as reflexões do espectro de frequência. Portanto, podemos reescrever (5.6) como

$$\begin{aligned}
F_A(k\omega_0) &= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} [a_r e^{j\frac{r\pi}{N}} + a_{N-r} e^{j\pi(1+\frac{r}{N})} + a_{N+r} e^{j\pi(-1+\frac{r}{N})} + \dots] \delta(k\omega_0 - r\omega_0) + \\
&\quad + [a_r e^{-j\frac{r\pi}{N}} + a_{N-r} e^{-j\pi(1+\frac{r}{N})} + a_{N+r} e^{-j\pi(-1+\frac{r}{N})} + \dots] \delta(k\omega_0 + r\omega_0) \\
F_A(k\omega_0) &= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} \left\{ a_r e^{j\frac{r\pi}{N}} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mN-r} e^{j\pi(m+\frac{r}{N})} + a_{mN+r} e^{j\pi(-m+\frac{r}{N})}] \right\} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) + \\
&\quad + \left\{ a_r e^{-j\frac{r\pi}{N}} + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mN-r} e^{-j\pi(m+\frac{r}{N})} + a_{mN+r} e^{-j\pi(-m+\frac{r}{N})}] \right\} \delta(k\omega_0 + r\omega_0). \tag{5.9}
\end{aligned}$$

Nós podemos então decompor a função complexa $F_A(k\omega_0)$ nas partes real e imaginária, obtendo assim sua magnitude e fase, conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
|F_A(k\omega_0)| &= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} \left| a_r + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [a_{mN-r} + a_{mN+r}] \right| [\delta(k\omega_0 - r\omega_0) + \delta(k\omega_0 + r\omega_0)] \\
\angle F_A(k\omega_0) &= r \frac{\pi}{N}. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Devido ao atraso de fase fracionário nos componentes harmônicos refletidos, em (5.10) alguns dos termos de $|F_A(k\omega_0)|$, $[a_{mN-r}, a_{mN+r}]$ para m ímpar, são negativos. Isto não acontece para a amostragem com atraso inteiro, onde todos os termos de $|F_B(k\omega_0)|$ são positivos, conforme iremos mostrar na próxima seção.

Os resultados apresentados nesta seção são equivalentes para qualquer atraso fracionário da forma $d = n\frac{T_s}{2}$, onde $n \in \mathbb{N}^+$, n ímpar.

5.2 Amostragem com Atraso Inteiro

Para um atraso inteiro (ID), e.g., $d_{\ell=2,m=1} = T_s$, nós podemos reescrever (5.5) como:

$$f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 n T_s + k\frac{2\pi}{N}\right), \quad 0 \leq n < N, \quad (5.11)$$

onde $k\omega_0 d_{\ell=2,m=1} = k\frac{2\pi}{N}$. A transformada de Fourier discreta (DFT) de $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ é

$$\begin{aligned} F_B(k\omega_0) &= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_r \left[\delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{j\frac{r2\pi}{N}} + \delta(k\omega_0 + r\omega_0) e^{-j\frac{r2\pi}{N}} \right] + \\ &+ R_{\Omega}[f_B(n\pi/\Omega)]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Também existe erro de *aliasing*, $R_{\Omega}[f_B(n\pi/\Omega)]$, em (5.12), devido às reflexões no espectro de frequência de $F_B(k\omega_0)$, as quais se sobrepõem, conforme mostrado na Figura 5.2. O mesmo raciocínio usado para as equações (5.7) e (5.8) pode ser expandido para $F_B(k\omega_0)$. Portanto, podemos reescrevê-las como:

$$\begin{aligned} F_{B1}(k\omega_0) &= \pi \sum_{r_1=N/2+1}^{N-1} a_{r_1} \delta(k\omega_0 + r_1\omega_0) e^{-j\frac{r_1 2\pi}{N}} e^{j2\pi}, \quad r_1 = N - r \\ &= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_{N-r} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{-j\frac{(N-r) 2\pi}{N}} e^{j2\pi} \\ &= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_{N-r} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{j2\pi \frac{r}{N}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

e

$$\begin{aligned}
F_{B2}(k\omega_0) &= \pi \sum_{r_2=N+1}^{3N/2-1} a_{r_2} \delta(k\omega_0 - r_2\omega_0) e^{j\frac{r_2 2\pi}{N}} e^{-j2\pi}, \quad r_2 = N + r \\
&= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_{N+r} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{j\frac{(N+r) 2\pi}{N}} e^{-j2\pi} \\
&= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} a_{N+r} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) e^{j2\pi \frac{r}{N}}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Portanto a equação (5.12) toma a forma:

$$\begin{aligned}
F_B(k\omega_0) &= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} [a_r + a_{N-r} + a_{N+r} + \dots] e^{j\frac{r 2\pi}{N}} \delta(k\omega_0 - r\omega_0) + \\
&+ [a_r + a_{N-r} + a_{N+r} + \dots] e^{-j\frac{r 2\pi}{N}} \delta(k\omega_0 + r\omega_0).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Também podemos decompor $F_B(k\omega_0)$ nas partes real e imaginária, obtendo assim sua magnitude e fase, conforme mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
|F_B(k\omega_0)| &= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} \left| a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mN-r} + a_{mN+r}] \right| [\delta(k\omega_0 - r\omega_0) + \delta(k\omega_0 + r\omega_0)] \\
\angle F_B(k\omega_0) &= r \frac{2\pi}{N}.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Todos os termos $[a_{mN-r}, a_{mN+r}]$ de $|F_B(k\omega_0)|$ são positivos. No entanto, vimos na seção anterior que para uma amostragem com atraso fracionário, alguns termos de $|F_A(k\omega_0)|$, $[a_{mN-r}, a_{mN+r}]$ para m ímpar, são negativos, ver (5.10). Os resultados apresentados nesta seção são equivalentes para qualquer atraso inteiro $d = nT_s$, onde $n \in \mathbb{N}$, inclusive para sinais amostrados sem atraso em relação ao início do período.

Se assumirmos algumas condições para o sinal periódico $f(t)$, descrito por (5.3), nós podemos eliminar os componentes harmônicos com coeficientes $[a_{mN-r}, a_{mN+r}]$, para m ímpar, simplesmente fazendo a média entre $|F_A(k\omega_0)|$ e $|F_B(k\omega_0)|$, conforme será mostrado na próxima seção. Estes resultados levam ao cancelamento dos componentes harmônicos refletidos de mais alta energia, permitindo uma redução significativa do erro de *aliasing*.

5.3 Cancelamento do Erro de *Aliasing*

Vamos considerar $|F_A(k\omega_0)|$ e $|F_B(k\omega_0)|$, os quais representam os módulos das DFTs de $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ e $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, amostrados respectivamente com atraso fracionário $d = \frac{T_s}{2}$ e com atraso inteiro $d = T_s$, conforme mostrado nas Seções 5.1 e 5.2.

Para um dado componente harmônico com frequência $r\omega_0$, $0 \leq r < N/2$, sejam: $C_{FD}(r)$ o coeficiente referente à amostragem com atraso fracionário e $C_{ID}(r)$ o coeficiente referente à amostragem com atraso inteiro, ver (5.10) e (5.16). Os coeficientes $C_{FD}(r)$ e $C_{ID}(r)$ podem ser escritos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} C_{FD}(r) &= a_r + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [a_{mN-r} + a_{mN+r}] \\ &= a_r - \sum_{m=1}^{\infty} [a_{(2m-1)N-r} + a_{(2m-1)N+r}] + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{2mN-r} + a_{2mN+r}] \end{aligned} \quad (5.17)$$

e

$$\begin{aligned} C_{ID}(r) &= a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mN-r} + a_{mN+r}] \\ &= a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{(2m-1)N-r} + a_{(2m-1)N+r}] + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{2mN-r} + a_{2mN+r}]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Portanto podemos reescrever (5.10) e (5.16), respectivamente, como

$$|F_A(k\omega_0)| = \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} C_{FD}(r) [\delta(k\omega_0 - r\omega_0) + \delta(k\omega_0 + r\omega_0)] \quad (5.19)$$

e

$$|F_B(k\omega_0)| = \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} C_{ID}(r) [\delta(k\omega_0 - r\omega_0) + \delta(k\omega_0 + r\omega_0)]. \quad (5.20)$$

Ao observarmos (5.17) e (5.18) fica claro que existe uma diferença significativa entre $C_{FD}(r)$ e $C_{ID}(r)$, referente ao sinal dos coeficientes $[a_{(2m-1)N-r} + a_{(2m-1)N+r}]$, que é negativo para $C_{FD}(r)$ e positivo para $C_{ID}(r)$. Portanto, se for possível fazer a média entre $|F_A(k\omega_0)|$ e $|F_B(k\omega_0)|$, os componentes harmônicos refletidos com coeficientes $[a_{(2m-1)N-r} + a_{(2m-1)N+r}]$ serão eliminados.

Para que possamos calcular a média entre $|F_A(k\omega_0)|$ e $|F_B(k\omega_0)|$ e assim eliminar parte dos componentes harmônicos refletidos, é preciso assumir a equivalência $|\bar{\mathbf{F}}(k\omega_0)| = |F_A(k\omega_0)| + |F_B(k\omega_0)| = |F_A(k\omega_0) + F_B(k\omega_0)|$. Para tanto, é preciso que $C_{FD}(r)$ e $C_{ID}(r)$ sejam ambos positivos ou ambos negativos, isto é, $|a_r + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2mN-r} + a_{2mN+r}| \geq |\sum_{m=1}^{\infty} a_{(2m-1)N-r} + a_{(2m-1)N+r}|$ para um dado componente harmônico com frequência $r\omega_0$. Se assumirmos esta condição, nós podemos

escrever $|\bar{\mathbf{F}}(k\omega_0)|$ como

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathbf{F}}(k\omega_0)| &= \frac{|F_A(k\omega_0) + F_B(k\omega_0)|}{2} = \frac{|F_A(k\omega_0)| + |F_B(k\omega_0)|}{2} \\
&= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} \frac{|C_{FD}(r) + C_{ID}(r)|}{2} [\delta(k\omega_0 - r\omega_0) + \delta(k\omega_0 + r\omega_0)] \\
&= \pi \sum_{r=1}^{N/2-1} \left| a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{2mN-r} + a_{2mN+r}] \right| [\delta(k\omega_0 - r\omega_0) + \delta(k\omega_0 + r\omega_0)].
\end{aligned} \tag{5.21}$$

A condição $|F_A(k\omega_0) + F_B(k\omega_0)| = |F_A(k\omega_0)| + |F_B(k\omega_0)|$ é verdadeira mesmo para sinais periódicos $f(t)$ com alta distorção harmônica e para um valor pequeno de N , uma vez que $\{|a_r|\}_r$ é estritamente decrescente e portanto $|a_r| > |a_{r+1}|$ para todo r , ver (5.4).

Observe que em $|\bar{\mathbf{F}}(k\omega_0)|$ alguns dos termos de $|F_A(k\omega_0)|$ e $|F_B(k\omega_0)|$, $[a_{mN-r}, a_{mN+r}]$ para m , são eliminados. Em (5.21) nós reduzimos significativamente erro de *aliasing* fazendo uma simples média, pois os componentes harmônicos refletidos com frequências no intervalo $[(\frac{N}{2} + 1)\omega_0, (\frac{3N}{2} - 1)\omega_0]$, os quais representam a maior parte da energia do erro de *aliasing*, são eliminados.

Observe também que embora tenhamos amostrado $f_A(\frac{n\pi}{\Omega})$ e $f_B(\frac{n\pi}{\Omega})$ com uma frequência mais baixa, $v_s = 1/T_s$, fazendo a média de $|F_A(k\omega_0)|$ e $|F_B(k\omega_0)|$ nós obtivemos resultados similares àqueles de um sinal amostrado com frequência de $2v_s$. Portanto nós podemos reduzir a necessidade de um filtro anti-*aliasing* usando a amostragem com atraso fracionário. Mesmo que o filtro ainda seja necessário, ele será bem mais fácil de ser projetado, com uma frequência de corte mais alta e um decaimento mais suave.

Uma vez que em um ADC integrador o número de bits de quantização está diretamente relacionado ao tempo de abertura T_{AP} e, por consequência, ao intervalo de amostragem $T_s > T_{AP}$, para medições de alta exatidão é importante considerar um intervalo de amostragem mais alto. Além de reduzir a necessidade de filtros anti-*aliasing*, a amostragem com atraso fracionário permite que o erro de quantização seja reduzido, pois poderemos usar bits adicionais. Assim como o erro de quantização, outras limitações do ADC relacionadas a altas taxas de amostragem podem ser superadas com o uso da amostragem com atraso fracionário.

É também possível observar, em (5.21), que os harmônicos refletidos com frequência nos intervalos $[(\frac{3N}{2} + 1)\omega_0, (\frac{5N}{2} - 1)\omega_0]$, $[(\frac{7N}{2} + 1)\omega_0, (\frac{9N}{2} - 1)\omega_0]$, ... ainda existem. Para um atraso fracionário $d \neq \frac{nT_s}{2}$, $n \in \mathbb{N}^+$, n ímpar, é possível eliminar componentes harmônicos refletidos de diferentes intervalos de frequência. Na Subseção 5.4.2 iremos apresentar resultados de simulação para a amostragem com atraso fracionário $d = \frac{T_s}{4}$.

Mesmo que a amostragem com atraso fracionário introduza mais dados para processamento, a exatidão do sistema de aquisição de dados é normalmente um problema muito mais complexo que o processamento dos dados, o qual pode ser realizado facilmente por um computador.

Nesta seção nós apresentamos cálculos que mostram a eficiência da amostragem com atraso fracionário quando aplicada para a redução de erros de *aliasing*, visando motivar a aplicação desta técnica em medições laboratoriais. Na seção a seguir são mostrados os resultados da amostragem com atraso fracionário para diferentes sinais periódicos, usando simulações para ilustrá-los. No Capítulo 7 serão apresentadas medições realizadas em laboratório, de modo a verificar os resultados obtidos em condições reais de trabalho.

O atraso fracionário é aplicado a medições de alta exatidão em [31], mas neste caso está relacionada apenas com cancelamento do erro de *ripple*, não com a redução do erro de *aliasing*, a qual é a nossa maior motivação aqui.

5.4 Simulações

Para ilustrar os resultados obtidos na seção anterior, nós simulamos numericamente dois sinais periódicos, amostrados tanto com atraso fracionário como com atraso inteiro. Nós estudamos a onda senoidal retificada na Subseção 5.4.1. Já na Subseção 5.4.2 nós iremos estudar a onda quadrada, amostrada com atrasos fracionários $d = T_s/2$ e $d = T_s/4$.

5.4.1 Onda Senoidal Retificada

Nesta subseção nós iremos considerar a onda senoidal retificada $f_1(t)$, mostrada em (3.7). Para ilustrar o efeito da técnica de amostragem com atraso fracionário, foram considerados aqui três sinais: $f_1(t)$ com infinitos harmônicos, $f_{1,M}(t)$ com banda limitada aos M primeiros harmônicos de $f_1(t)$ e $f_{1,3M}(t)$ com banda limitada aos $3M$ primeiros harmônicos de $f_1(t)$. Estes sinais estão descritos nas equações a seguir:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\omega_0 2kt)}{4k^2 - 1} \\ f_{1,M}(t) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} \frac{\cos(\omega_0 2kt)}{4k^2 - 1} \\ f_{1,3M}(t) &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\frac{3M}{2}-1} \frac{\cos(\omega_0 2kt)}{4k^2 - 1}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Os sinais $f_1(t)$, $f_{1,M}(t)$ e $f_{1,3M}(t)$ foram amostrados considerando os seguintes

parâmetros: $V_p = 1$ V, $v_0 = 100$ Hz, $M = \frac{N}{2} = 25$ e $T_s = \frac{1}{2Mv_0} = 200$ μ s.

O sinal $f_{1,M}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ corresponde a $f_{1,M}(t)$ amostrado com a taxa de Nyquist, ou seja, sem erro de *aliasing*. Portanto $F_{1,M}(k\omega_0)$, a transformada de Fourier discreta de $f_{1,M}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, será considerada aqui como o nosso sinal de referência.

Já $f_{1,3M}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ e $f_1\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, correspondem respectivamente aos sinais $f_{1,3M}(t)$ e $f_1(t)$ sub-amostrados. Em ambos os casos, as reflexões nos espectros de frequência de $F_{1,3M}(k\omega_0)$ e $F_1(k\omega_0)$, respectivamente as transformadas de Fourier discretas de $f_{1,3M}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ e $f_1\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, vão se sobrepor causando erro de *aliasing*.

Para ilustrar os resultados da equação (5.21), nós simulamos o processo de amostragem do sinal $f_{1,3M}(t)$ com atraso fracionário em relação ao início do período, conforme descrito na Figura 5.1. No primeiro período do sinal, nós adquirimos uma sequência de $N = 50$ amostras igualmente espaçadas de $T_s = 200$ μ s. A primeira amostra foi medida imediatamente após o início do período, ou seja, sem atraso. Já no segundo período do sinal, nós esperamos um intervalo de $d = \frac{T_s}{2} = 100$ μ s após o início deste antes de iniciar a aquisição de uma segunda sequência de amostras, também igualmente espaçadas de $T_s = 200$ μ s. Ou seja, a segunda sequência possui um atraso fracionário $d = 100$ μ s em relação ao início do período. Todo este processo foi repetido para o sinal $f_1(t)$.

Para $f_{1,3M}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, o módulo da transformada de Fourier discreta de sequência de amostras sem atraso em relação ao início do período é chamado aqui de $|F_{1,3M}(k\omega_0)|$. Já a média dos módulos das transformadas de Fourier discretas das duas sequências de amostras, sem atraso e com atraso fracionário d em relação ao início de um período, é chamada de $|\bar{F}_{1,3M}(k\omega_0)|$. O mesmo raciocínio é aplicado para $f_1\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, obtendo-se $|F_1(k\omega_0)|$ e $|\bar{F}_1(k\omega_0)|$.

As diferenças $E_{1,3M}(k\omega_0) = |F_{1,3M}(k\omega_0)| - |\bar{F}_{1,3M}(k\omega_0)|$ e $\bar{E}_{1,3M}(k\omega_0) = |\bar{F}_{1,3M}(k\omega_0)| - |F_{1,3M}(k\omega_0)|$ são os erros de *aliasing* referentes ao sinal $f_{1,3M}\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$. Uma vez que $F_{1,3M}(k\omega_0)$ tem apenas componentes harmônicos refletidos originários do intervalo $[(\frac{N}{2} + 1)\omega_0, (\frac{3N}{2} - 1)\omega_0]$, de acordo com (5.21), quando aplicamos a técnica de amostragem com atraso fracionário, o erro de *aliasing* $\bar{E}_{1,3M}(k\omega_0)$ deve ser zero.

Podemos observar este resultado na Figura 5.3. Esta figura também mostra que o erro de *aliasing* $E_{1,3M}(k\omega_0)$, para a amostragem com atraso inteiro, é significativo. Como todos os harmônicos ímpares são iguais a zero para este sinal, a Figura 5.3 só mostra os harmônicos pares, no lado positivo do espectro de frequência.

Iremos analisar agora as diferenças $E_1(k\omega_0) = |F_1(k\omega_0)| - |\bar{F}_1(k\omega_0)|$ e $\bar{E}_1(k\omega_0) = |\bar{F}_1(k\omega_0)| - |F_1(k\omega_0)|$, os erros de *aliasing* referentes ao sinal $f_1\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$. Como $f_1\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ tem infinitos componentes harmônicos, de acordo com (5.21), uma vez que aplicamos a técnica de amostragem com atraso fracionário, o erro de *aliasing* $\bar{E}_1(k\omega_0)$ deve ser reduzido, porém ainda deve estar presente devido à reflexão dos

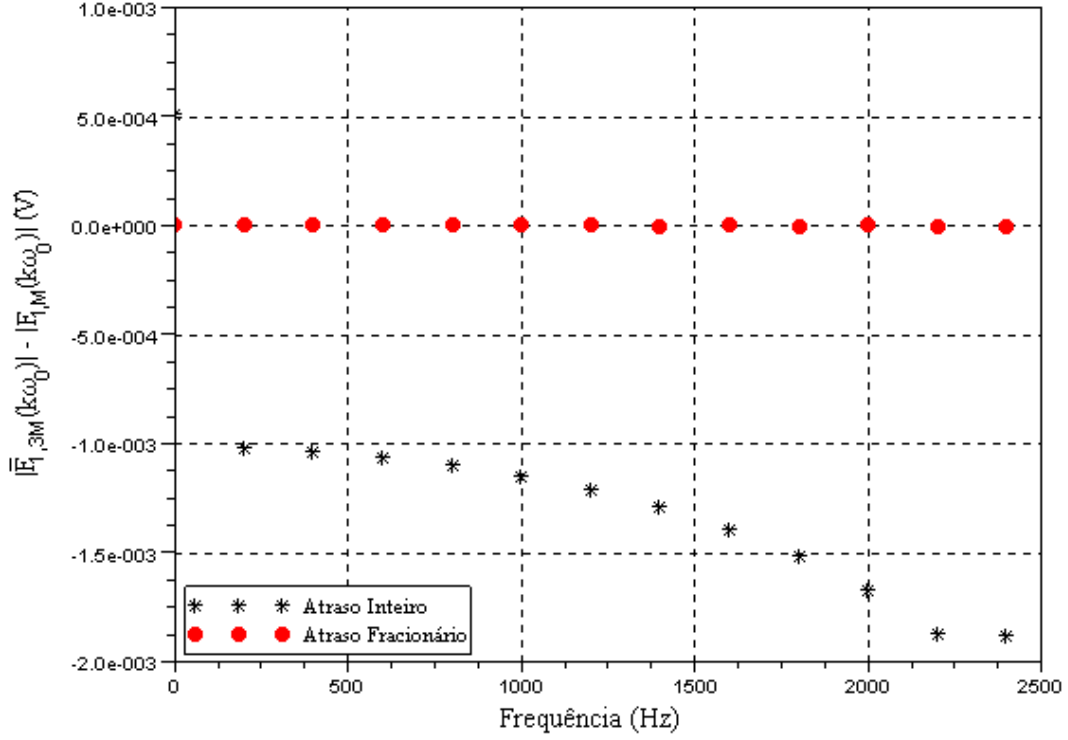


Figura 5.3: Amostragem com atraso fracionário: Onda senoidal retificada - $f_{1,3M} \left(\frac{n\pi}{\Omega} \right)$.

componentes harmônicos com frequências mais altas.

É possível observar este resultado na Figura 5.4. Esta figura também mostra que o erro de *aliasing* para a amostragem com atraso inteiro, $E_1(k\omega_0)$, é muito maior que $\bar{E}_1(k\omega_0)$, devido a aplicação da técnica de amostragem com atraso fracionário na medição deste último.

Na Tabela 5.1 é mostrada a norma do erro de *aliasing*, definida como $\|E_s\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} |\bar{E}_s(k\omega_0)| - |F_{1,M}(k\omega_0)|$, onde $s = 1, 3M$ ou $s = 1$, tanto para o caso onde foi usada a técnica da amostragem com atraso fracionário como para a amostragem sem atraso. Vemos na Tabela 5.1 que ao aplicarmos a técnica de amostragem com atraso fracionário a norma do erro de *aliasing* $\|E_{1,3M}\|$ se torna insignificante (erro numérico). Por outro lado a norma do erro de *aliasing* $\|E_1\|$ é reduzida em quase 80%.

Tabela 5.1: Norma do erro de *aliasing* - Onda senoidal retificada.

	$\ \mathbf{E}_{1,3M}\ $	$\ \mathbf{E}_1\ $
Sem Atraso	$3,35 \times 10^{-2} \text{ V}$	$5,09 \times 10^{-2} \text{ V}$
Atraso Fracionário	$1,98 \times 10^{-15} \text{ V}$	$1,09 \times 10^{-2} \text{ V}$
Redução da Norma do Erro de Aliasing	100%	80%

Também podemos observar na Tabela 5.1 que para o sinal $f_1 \left(\frac{n\pi}{\Omega} \right)$, o erro de

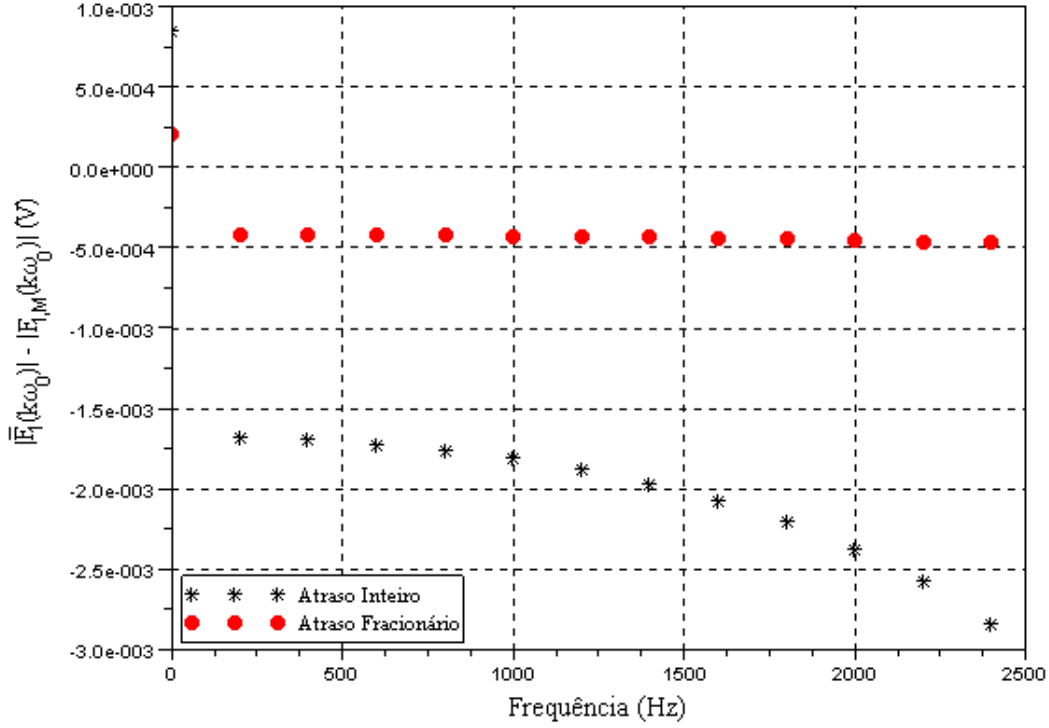


Figura 5.4: Amostragem com atraso fracionário: Onda senoidal retificada.

aliasing referente à reflexão dos componentes harmônicos com frequências no intervalo $[(\frac{N}{2} + 1)\omega_0, (\frac{3N}{2} - 1)\omega_0]$ representa aproximadamente 65% da norma do erro de *aliasing*. Também é importante observar que os resultados numéricos para a norma do erro de *aliasing* $\|E_1\|$, sem a aplicação da técnica de amostragem com atraso fracionário, são equivalentes aos resultados teóricos obtidos na Subseção 3.1.1.

5.4.2 Onda Quadrada

Nesta subseção nós iremos considerar a onda quadrada, descrita por:

$$f_4(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega_0 t (2k - 1))}{2k - 1}. \quad (5.23)$$

O sinal $f_4(t)$ foi amostrado considerando os seguintes parâmetros: $V_p = 1$ V, $v_0 = 50$ Hz, $\omega_0 = 2\pi v_0$, $M = \frac{N}{2} = 75$ e $T_s = \frac{1}{2Mv_0} \approx 133,4 \mu\text{s}$. Inicialmente foi feita uma amostragem com um atraso fracionário $d = \frac{T_s}{2} = 66,7 \mu\text{s}$ em relação ao início do período. Posteriormente foi feita uma nova amostragem, desta vez com um atraso fracionário de $d = \frac{T_s}{4} = 33,3 \mu\text{s}$.

Além do sinal amostrado $f_4(\frac{n\pi}{\Omega})$, nós iremos considerar aqui também o sinal $f_{4,M}(\frac{n\pi}{\Omega})$, o qual possui apenas os M primeiros componentes harmônicos de $f_4(t)$, eliminando portanto o erro de *aliasing*. $F_{4,M}(k\omega_0)$, a transformada de Fourier dis-

creta de $f_{4,M}(\frac{n\pi}{\Omega})$, será considerada como o nosso sinal de referência.

Para ilustrar os resultados da equação (5.21) para o sinal onda quadrada, nós simulamos o processo de amostragem do sinal $f_4(t)$, com atraso fracionário em relação ao início do período, conforme descrito na Figura 5.1. No primeiro período do sinal, nós adquirimos uma sequência de $N = 150$ amostras igualmente espaçadas de $T_s \approx 133,4 \mu s$. A primeira amostra foi medida imediatamente após o início do período, ou seja, sem atraso. Já no segundo período do sinal, nós esperamos um intervalo de $d = \frac{t_s}{2} = 66,7 \mu s$ após o início deste antes de iniciar a aquisição de uma segunda sequência de amostras, também igualmente espaçadas de $T_s \approx 133,4 \mu s$. Ou seja, a segunda sequência possui um atraso fracionário $d = 66,7 \mu s$ em relação ao início do período.

Para $f_4(\frac{n\pi}{\Omega})$, o módulo da transformada de Fourier discreta de sequência de amostras sem atraso em relação ao início do período é chamado aqui de $|F_4(k\omega_0)|$. Já a média dos módulos das transformadas de Fourier discretas das duas sequências de amostras, sem atraso e com atraso fracionário d em relação ao início de um período, é chamada de $|\bar{F}_4(k\omega_0)|$.

As diferenças $E_4(k\omega_0) = |F_4(k\omega_0)| - |F_{4,M}(k\omega_0)|$ e $\bar{E}_4(k\omega_0) = |\bar{F}_4(k\omega_0)| - |F_{4,M}(k\omega_0)|$ são os erros de *aliasing* referentes ao sinal $f_4(\frac{n\pi}{\Omega})$. Como $f_4(\frac{n\pi}{\Omega})$ tem infinitos componentes harmônicos, de acordo com (5.21), uma vez que aplicamos a técnica de amostragem com atraso fracionário, o erro de *aliasing* $\bar{E}_4(k\omega_0)$ deve ser reduzido, porém ainda deve estar presente devido à reflexão dos componentes harmônicos com frequências mais altas. É possível observar estes resultados na Figura 5.5.

Esta figura mostra que o erro de *aliasing* $\bar{E}_4(k\omega_0)$ para a amostragem com atraso fracionário é significativamente menor que o erro de *aliasing* $E_4(k\omega_0)$, para a amostragem com atraso inteiro. Como todos os harmônicos pares são iguais a zero para este sinal, a Figura 5.5 só mostra os harmônicos ímpares.

Na Tabela 5.2 é mostrada a norma do erro de *aliasing*, definida como $\|E_4\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} ||\bar{F}_4(k\omega_0)| - |F_{4,M}(k\omega_0)||$, tanto para o caso onde foi usada a técnica da amostragem com atraso fracionário como para a amostragem sem atraso. Vemos na Tabela 5.2 que ao aplicarmos a técnica de amostragem com atraso fracionário a norma do erro de *aliasing* $\|E_4\|$ é reduzida em aproximadamente 75%.

Tabela 5.2: Norma do erro de *aliasing* - Onda quadrada.

	$\ \mathbf{E}_4\ $	Redução da Norma do Erro de Aliasing
Sem Atraso	0,56 V	—
Atraso Fracionário $d = 66,7 \mu s$	0,13 V	75%
Atraso Fracionário $d = 33,3 \mu s$	$3,47 \times 10^{-2}$	94%

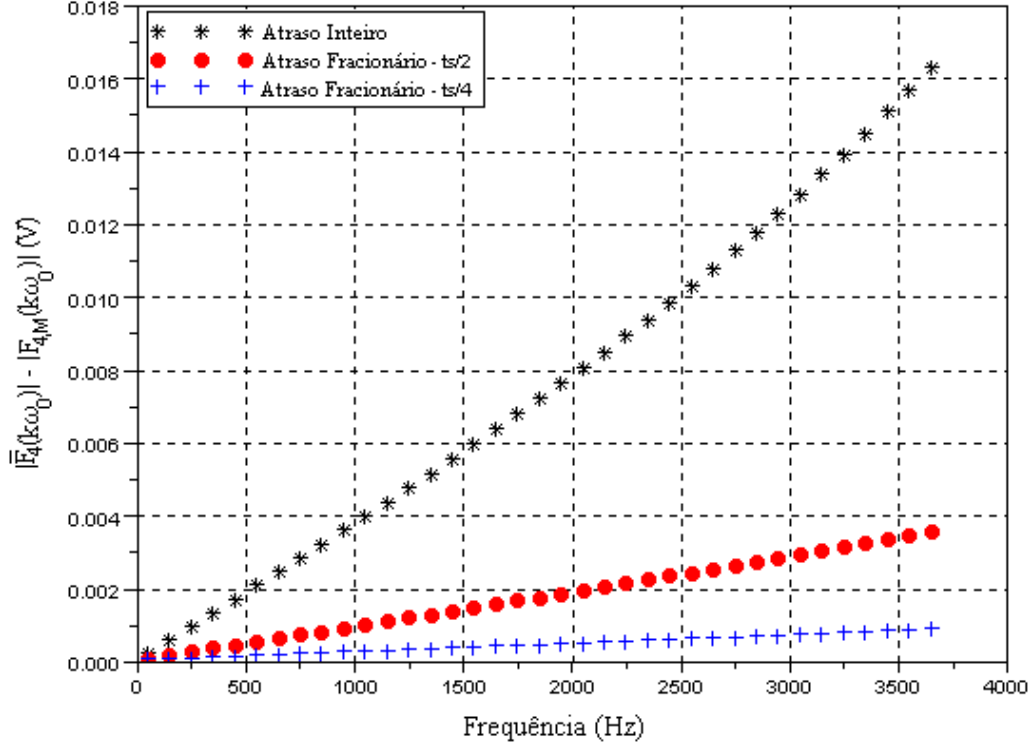


Figura 5.5: Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada.

Nós aqui também iremos exemplificar o uso da técnica de amostragem com a atraso fracionário para um atraso diferente de $d = \frac{T_s}{2}$, tornando possível eliminar componentes harmônicos refletidos de diferentes intervalos de frequência. Para tanto foi feita uma nova simulação numérica do processo de amostragem do sinal $f_4(t)$.

No primeiro período do sinal, nós adquirimos uma sequência de $N = 150$ amostras. A primeira amostra foi medida imediatamente após o início do período, ou seja, sem atraso. No segundo período do sinal, nós esperamos um intervalo de $d = \frac{t_s}{4} \approx 33,3 \mu s$ após o início deste antes de iniciar a aquisição de uma segunda sequência de amostras. Já no terceiro período do sinal, nós esperamos um intervalo de $d = \frac{t_s}{2} \approx 66,7 \mu s$ antes de iniciar a aquisição da terceira sequência de amostras. Por fim, no quarto período do sinal, nós esperamos um intervalo de $d = \frac{3t_s}{4} \approx 100 \mu s$ antes de iniciar a aquisição da quarta sequência de amostras. Neste exemplo temos então quatro sequências de amostras que não se sobrepõem temporalmente. Em cada uma das sequências as amostras estão igualmente espaçadas de $T_s \approx 133,4 \mu s$.

Aqui o resultado do cálculo envolvendo as transformadas de Fourier discretas das quatro sequências de amostras, sem atraso e com atrasos fracionários em relação ao início de um período, é chamado de $|\bar{\bar{F}}_4(\mathbf{k}\omega_0)|$. A diferença $\bar{\bar{E}}_4(k\omega_0) = |\bar{\bar{F}}_4(\mathbf{k}\omega_0)| - |\mathbf{F}_{4,M}(\mathbf{k}\omega_0)|$ é o erro de *aliasing* referente ao sinal $f_4\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, quando aplicamos a técnica de amostragem com atraso fracionário $d \approx 33,3 \mu s$. Este resultado também está na Figura 5.5.

Esta figura mostra que o erro de *aliasing* $\bar{\bar{E}}_4(k\omega_0)$ é significativamente menor, tanto quando comparado com o erro de *aliasing* $\bar{E}_4(k\omega_0)$, para a amostragem com atraso fracionário $d = 66,7 \mu\text{s}$, como quando comparado com o erro de *aliasing* $E_4(k\omega_0)$, para a amostragem com atraso inteiro.

Na Tabela 5.2 também é mostrada a norma do erro de *aliasing*, definida como $\|\bar{\bar{E}}_4\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} ||\bar{\bar{\mathbf{F}}}_4(\mathbf{k}\omega_0)| - |\mathbf{F}_{4,\mathbf{M}}(\mathbf{k}\omega_0)||$ para a amostragem com o atraso fracionário $d = 33,3 \mu\text{s}$. Podemos observar que, neste caso, a técnica de amostragem com atraso fracionário $d = 33,3 \mu\text{s}$ permitiu uma redução de aproximadamente 94% do erro de *aliasing* em relação à amostragem sem atraso e de aproximadamente 74% do erro de *aliasing* em relação à amostragem com atraso fracionário $d = 66,7 \mu\text{s}$.

5.5 Conclusão

Neste capítulo nós estudamos a técnica de amostragem com atraso fracionário, combinada com a transformada de Fourier discreta. Esta técnica possibilitou a eliminação da maior parte do erro de *aliasing*, conforme atestam os resultados apresentados aqui, usando como exemplo os sinais periódicos onda senoidal retificada e onda quadrada.

No próximo capítulo nós iremos apresentar a técnica de amostragem com atraso fracionário combinada com a análise de componentes principais.

Capítulo 6

Análise de Componentes Principais

Nós podemos definir a análise de componentes principais (PCA) como uma decomposição linear do sinal original em bases ortogonais específicas, da mesma forma que a transformada de Fourier [20]. Portanto, nós podemos aplicar a PCA para a estimação de harmônicos em sinais periódicos, como uma alternativa à DFT.

A análise de componentes principais é uma técnica bastante conhecida para a análise de variáveis múltiplas, a qual utiliza uma transformação ortogonal para reduzir as dimensões de um conjunto de variáveis. Este objetivo é atingido convertendo o conjunto de dados originais em um novo conjunto de variáveis descorrelacionadas, chamadas de componentes principais.

Nas seções a seguir, nós iremos estudar o comportamento da PCA aplicada à estimação de harmônicos em sinais periódicos, amostrados tanto com atraso inteiro como com atraso fracionário.

6.1 Amostragem com Atraso Inteiro

Para estudarmos o uso da PCA para a estimação de harmônicos em sinais periódicos, nós iremos considerar a amostragem de um sinal periódico $f(t)$ com frequência fundamental ν_0 , conforme definido no Capítulo 5. Durante um período do sinal $f(t)$ nós adquirimos uma série temporal de N amostras, a intervalos regulares de $T_s = \frac{1}{N\nu_0}$ s, conforme mostra a parte inferior da Figura 5.1. Esta série é chamada de $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, onde $0 \leq n < N$, e apresenta um atraso inteiro $d = \beta T_s$, $\beta \in \mathbb{N}$, em relação ao início do período do sinal $f(t)$.

A série temporal $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, descrita em (5.11) considerando a amostragem com um atraso inteiro $d_{\ell=2,m=1} = T_s$ em relação início do período do sinal, foi repetida

aqui para melhor entendimento.

$$f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 nT_s + k\frac{2\pi}{N}\right), \quad 0 \leq n < N, \quad (6.1)$$

em que $k\omega_0 d_{\ell=2,m=1} = k\frac{2\pi}{N}$.

Para podermos aplicar a PCA para a estimação de harmônicos, nós iremos usar a série temporal de N amostras $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ para construir uma matriz $N \times N$, chamada aqui de $\mathbf{X}_B$.

Cada coluna $\beta + 1$, $0 \leq \beta < N$, representa a série de N amostras de $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, adquiridas com um atraso inteiro $d_\beta = \beta T_s$, $\beta \in \mathbb{N}$ em relação ao início de um período de $f(t)$. Ou seja, cada coluna $\beta + 1$ da matriz $\mathbf{X}_B$ corresponde a um período do sinal $f(t)$, amostrado a intervalos de tempo regulares $t = nT_s + d_\beta$, onde $d_\beta = \beta T_s$ é um atraso inteiro.

Portanto, podemos escrever cada elemento de $\mathbf{X}_B$, chamado aqui de $x_B(\alpha + 1, \beta + 1)$, da linha $\alpha + 1$, coluna $\beta + 1$, para $0 \leq \alpha, \beta < N$, como:

$$x_B(\alpha + 1, \beta + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \alpha T_s + \beta k \frac{2\pi}{N}\right). \quad (6.2)$$

Uma vez que $f(t)$ é periódico com período $T_0 = NT_s$, a matriz $\mathbf{X}_B$ é Hermitiana, isto é, $\mathbf{X}_B = \mathbf{X}_B^*$, onde $\mathbf{X}_B^*$ é o Hermitiano (conjugado transposto) de $\mathbf{X}_B$.

Seja a matriz de correlação $\mathbf{S}_B = \mathbf{E}[\mathbf{X}_B \mathbf{X}_B^*]$. No entanto, como o sinal $f(t)$ pode ser considerado suficientemente determinístico para a aplicação desejada, conforme comentado na Seção 2.1, nós podemos calcular $\mathbf{S}_B = \mathbf{X}_B \mathbf{X}_B^*$.

Cada elemento $s_B(\alpha + 1, \beta + 1)$ de $\mathbf{S}_B$, da linha $\alpha + 1$, coluna $\beta + 1$, $0 \leq \alpha, \beta < N$, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} s_B(\alpha + 1, \beta + 1) &= \sum_{p=0}^{N-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \alpha T_s + pk \frac{2\pi}{N}\right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \beta T_s + pk \frac{2\pi}{N}\right) \right] \\ &= \sum_{p=0,2,\dots}^{2N-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \alpha T_s + pk \frac{\pi}{N}\right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \beta T_s + pk \frac{\pi}{N}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

Podemos observar que a matriz de correlação $\mathbf{S}_B$ é circulante. Nós iremos então decompô-la da seguinte forma: $\mathbf{S}_B = \mathbf{U}_B \mathbf{\Lambda}_B \mathbf{U}_B^*$, onde $\mathbf{U}_B$ e $\mathbf{\Lambda}_B$ são, respectivamente, as matrizes com os autovetores e autovalores de $\mathbf{S}_B$ e $\mathbf{\Lambda}_B$ é diagonal [21]. Como $\mathbf{U}_B$ é unitária, nós temos que $\mathbf{U}_B \mathbf{U}_B^* = \mathbf{I}$, portanto podemos reescrever os resultados acima como $\mathbf{\Lambda}_B = \mathbf{U}_B^* \mathbf{S}_B \mathbf{U}_B$.

Nós também temos que $\mathbf{\Gamma}_B = \mathbf{F} \mathbf{S}_B \mathbf{F}^*$, onde $\mathbf{\Gamma}_B$ é diagonal e $\mathbf{F}$ é a matriz DFT. Cada elemento de $\mathbf{F}$, para a linha $\alpha + 1$, coluna $\beta + 1$, $0 \leq \alpha, \beta < N$, é $W_N^{\alpha\beta} = e^{-j\frac{2\pi\alpha\beta}{N}}$

[47][52]. Portanto cada elemento $\gamma_B(r+1)$, $0 \leq r < N$, de $\mathbf{\Gamma}_B$ pode ser escrito como:

$$\gamma_B(r+1) = \left(a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mN-r} + a_{mN+r}]\right)^2. \quad (6.4)$$

Observe que $\sqrt{\gamma_B(r+1)} = C_{ID}(r) = a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mN-r} + a_{mN+r}]$ é similar aos termos da equação (5.16), para um dado componente harmônico com frequência $r\omega_0$.

Considerando os resultados acima, temos que $\mathbf{\Lambda}_B = \mathbf{U}_B^* \mathbf{S}_B \mathbf{U}_B$ e também que $\mathbf{\Gamma}_B = \mathbf{F} \mathbf{S}_B \mathbf{F}^*$. Uma vez que $\mathbf{S}_B$ é circulante, temos que $\mathbf{U}_B \mathbf{U}_B^* = \mathbf{F} \mathbf{F}^* = \mathbf{I}$, o que nos leva à $\mathbf{\Lambda}_B = \mathbf{\Gamma}_B$. Portanto os elementos da matriz de autovalores $\mathbf{\Lambda}_B$, $\lambda_B(r+1)$, $0 \leq r < N$, também são proporcionais ao quadrado da magnitude de cada um dos componentes harmônicos do sinal $f(t)$. Concluimos então que a PCA pode ser empregada para estimação de magnitude de componentes harmônicos de sinais periódicos, como uma alternativa à DFT.

No caso apresentado aqui estão sendo usados todos os elementos diagonais da matriz $\mathbf{\Lambda}_B$ para calcular os componentes harmônicos do sinal $f(t)$. Portanto, estritamente falando, estamos aplicando a transformada de Karhunen-Loève discreta (KLT) e não a análise de componentes principais, uma vez que estamos considerando todos os componentes de $\mathbf{\Lambda}_B$ e não apenas os “principais”.

Nós optamos por manter a terminologia PCA devido ao seu uso comum e ao fato de que, caso o sinal $f(t)$ possua baixa distorção harmônica para a aplicação desejada, é possível desconsiderar parte dos elementos diagonais da matriz $\mathbf{\Lambda}_B$. O que nos leva realmente a análise apenas dos componentes principais.

6.2 Amostragem com Atraso Fracionário

Nós também podemos associar a técnica de amostragem com atraso fracionário, apresentada no Capítulo 5, com a PCA (PCA-FD).

Aqui também nós iremos considerar a amostragem de um sinal periódico $f(t)$ com frequência fundamental v_0 . Durante um período do sinal $f(t)$ nós adquirimos uma série temporal de N amostras, a intervalos regulares de $T_s = \frac{1}{Nv_0}$ s, conforme mostra a parte inferior da Figura 5.1. Esta série é chamada de $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, onde $0 \leq n < N$, e apresenta um atraso fracionário $d = \beta \frac{T_s}{2}$, $\beta \in \mathbb{N}^+$, β ímpar, em relação ao início do período do sinal amostrado.

A série temporal $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, descrita em (5.5) considerando a amostragem com um atraso fracionário $d_{\ell=1, m=1} = \frac{T_s}{2}$ em relação início do período do sinal, foi repetida

aqui para melhor entendimento.

$$f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 nT_s + k\frac{\pi}{N}\right), \quad 0 \leq n < N, \quad (6.5)$$

onde $k\omega_0 d_{\ell=1, m=1} = k\frac{\pi}{N}$.

Para podermos aplicar a PCA para a estimação de harmônicos, nós iremos usar as séries temporais $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ e $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, de N amostras cada, para construir uma matriz $N \times 2N$, chamada aqui de $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$.

Para β par, cada coluna $\beta + 1$, $0 \leq \beta < 2N$, representa a série de N amostras de $f_B\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, adquiridas com um atraso inteiro $d_\beta = \beta\frac{T_s}{2}$, $\beta \in \mathbb{N}$, β par, em relação ao início de um período de $f(t)$. Já para β ímpar, cada coluna $\beta + 1$, $0 \leq \beta < 2N$, representa a série de N amostras de $f_A\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$, adquiridas com um atraso fracionário $d_\beta = \beta\frac{T_s}{2}$, $\beta \in \mathbb{N}^+$, β ímpar, em relação ao início de um período de $f(t)$.

Ou seja, cada coluna $\beta + 1$ da matriz $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$ corresponde à um período do sinal $f(t)$, amostrado a intervalos de tempo regulares $t = nT_s + d_\beta$, onde $d_\beta = \beta\frac{T_s}{2}$, é o atraso em relação ao início do período. Cada elemento de $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$, aqui chamado de $x_A(\alpha + 1, \beta + 1)$, da linha $\alpha + 1$, coluna $\beta + 1$, para $0 \leq \alpha < N$, $0 \leq \beta < 2N$, pode ser escrito como:

$$x_A(\alpha + 1, \beta + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \alpha T_s + \beta k \frac{\pi}{N}\right). \quad (6.6)$$

Embora a matriz $\mathbf{X}_{\mathbf{A}}$ tenha dimensões $N \times 2N$, a matriz de correlação $\mathbf{S}_{\mathbf{A}} = \mathbf{E}[\mathbf{X}_{\mathbf{A}}\mathbf{X}_{\mathbf{A}}^*] = \mathbf{X}_{\mathbf{A}}\mathbf{X}_{\mathbf{A}}^*$ também é uma matriz $N \times N$ circulante, onde cada elemento $s_A(\alpha + 1, \beta + 1)$, para $0 \leq \alpha, \beta < N$, é

$$s_A(\alpha + 1, \beta + 1) = \sum_{p=0}^{2N-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \alpha T_s + pk \frac{\pi}{N}\right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \beta T_s + pk \frac{\pi}{N}\right) \right]. \quad (6.7)$$

Para que possamos aplicar os resultados da Seção 6.1 para a matriz de correlação $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$, nós iremos decompô-la da seguinte forma $\mathbf{S}_{\mathbf{A}} = \mathbf{S}_{\mathbf{B}} + \mathbf{S}_{\mathbf{C}}$, onde os elementos de $\mathbf{S}_{\mathbf{B}}$ são descritos em (6.3) e cada elemento $s_C(\alpha + 1, \beta + 1)$ de $\mathbf{S}_{\mathbf{C}}$ é

$$s_C(\alpha + 1, \beta + 1) = \sum_{p=1,3,\dots}^{2N-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \alpha T_s + pk \frac{\pi}{N}\right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\omega_0 \beta T_s + pk \frac{\pi}{N}\right) \right]. \quad (6.8)$$

Desta forma temos que cada elemento $s_A(\alpha + 1, \beta + 1)$ da matriz de correlação $\mathbf{S}_{\mathbf{A}}$

pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
s_a(\alpha + 1, \beta + 1) &= s_b(\alpha + 1, \beta + 1) + s_c(\alpha + 1, \beta + 1) \\
&= \sum_{p=0,2,\dots}^{2N-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k\omega_0 \alpha T_s + pk \frac{\pi}{N} \right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k\omega_0 \beta T_s + pk \frac{\pi}{N} \right) \right] \\
&\quad + \sum_{p=1,3,\dots}^{2N-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k\omega_0 \alpha T_s + pk \frac{\pi}{N} \right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k\omega_0 \beta T_s + pk \frac{\pi}{N} \right) \right] \\
s_a(\alpha + 1, \beta + 1) &= \sum_{p=0}^{2N-1} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k\omega_0 \alpha T_s + pk \frac{\pi}{N} \right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(k\omega_0 \beta T_s + pk \frac{\pi}{N} \right) \right] \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Podemos observar que a matriz de correlação $\mathbf{S}_C$ tem as mesmas características de $\mathbf{S}_B$, i.e., é circulante. Nós iremos então decompô-la de forma que $\mathbf{S}_C = \mathbf{U}_C \mathbf{\Lambda}_C \mathbf{U}_C^*$, onde $\mathbf{U}_C$ e $\mathbf{\Lambda}_C$ são, respectivamente, as matrizes com os autovetores e autovalores de $\mathbf{S}_C$. Sendo que $\mathbf{\Lambda}_C$ é diagonal e $\mathbf{U}_C$ é unitária [21].

Assim como ocorreu com a matriz $\mathbf{S}_B$, nós também temos que $\mathbf{\Gamma}_C = \mathbf{F} \mathbf{S}_C \mathbf{F}^*$, onde $\mathbf{\Gamma}_C$ é diagonal e $\mathbf{F}$ é a matriz DFT. O que nos leva à $\mathbf{\Lambda}_C = \mathbf{\Gamma}_C$. Portanto, cada elemento da matriz diagonal de autovalores $\mathbf{\Lambda}_C$ pode ser escrito como:

$$\lambda_C(r+1) = (a_r + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [a_{mN-r} + a_{mN+r}])^2. \quad (6.10)$$

Observe que $\sqrt{\lambda_C(r+1)} = C_{FD}(r) = a_r + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [a_{mN-r} + a_{mN+r}]$ é similar aos termos da equação (5.10), para um dado componente harmônico com frequência $r\omega_0$, $0 \leq r < N$.

A matriz de correlação $\mathbf{S}_A$ também é circulante e portanto nós também podemos decompô-la tanto considerando as suas matrizes de autovalores e autovetores, ou seja, $\mathbf{S}_A = \mathbf{U}_A \mathbf{\Lambda}_A \mathbf{U}_A^*$, ou considerando a matriz DFT, ou seja $\mathbf{S}_A = \mathbf{F}^* \mathbf{\Gamma}_A \mathbf{F}$. Uma propriedade adicional de $\mathbf{S}_A$ ser circulante é que se $\mathbf{S}_A = \mathbf{S}_B + \mathbf{S}_C$ então $\mathbf{\Lambda}_A = \mathbf{\Lambda}_B + \mathbf{\Lambda}_C$ [21]. Portanto cada elemento de $\mathbf{\Lambda}_A$ pode ser definido como:

$$\lambda_A(r+1) = (a_r + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [a_{mN-r} + a_{mN+r}])^2 + (a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mN-r} + a_{mN+r}])^2. \quad (6.11)$$

A redução de erro de *aliasing* obtida com a técnica de amostragem com atraso fracionário, descrita no Capítulo 5, também ocorre para PCA-FD. Porém os resultados para a PCA não são idênticos àqueles resultados obtidos em (5.21). Para um

dado componente harmônico com frequência $r\omega_0$, $0 \leq r < N$:

$$\sqrt{\lambda_A(r+1)} = \sqrt{\left(a_r + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [a_{mN-r} + a_{mN+r}]\right)^2 + \left(a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mN-r} + a_{mN+r}]\right)^2} \quad (6.12)$$

Por outro lado, em (5.21) o termo equivalente, para a frequência $r\omega_0$, é $|a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{2mN-r} + a_{2mN+r}]|$.

Na Seção 5.3 nós calculamos $|\bar{\mathbf{F}}(k\omega_0)|$ através da média de $|F_A(k\omega_0)|$ e $|F_B(k\omega_0)|$, veja (5.21). Por outro lado, nesta seção as magnitudes dos componentes harmônicos são calculadas através da soma quadrática dos coeficientes $C_{FD}(r)$ e $C_{ID}(r)$, veja (6.12). Portanto os resultados para a PCA e para a DFT serão diferentes. Normalmente a PCA-FD pode ser mais eficiente para o cancelamento do erro de *aliasing* que a DFT-FD, conforme será mostrado na seção a seguir.

Para que obtenhamos resultados equivalentes à DFT com o PCA é preciso construir duas matrizes separadas $\mathbf{X}_B$ e $\mathbf{X}_C$, em vez de uma única matriz $\mathbf{X}_A$, durante a amostragem do sinal $f(t)$. Na primeira matriz estarão as séries de amostras com atraso inteiro $d = \beta T_s$, $\beta \in \mathbb{N}$ em relação ao início de um período do sinal $f(t)$. Já na segunda matriz estarão as séries de amostras com atraso fracionário $d = \beta \frac{T_s}{2}$, $\beta \in \mathbb{N}^+$, β ímpar, em relação ao início de um período do sinal $f(t)$.

Nós devemos então fazer os cálculos de forma separada para cada matriz, obtendo duas matrizes de autovalores Λ_B e Λ_C . Por fim, para um dado componente harmônico com frequência $r\omega_0$, $0 \leq r < N$, é feita a média da raiz quadrada dos elementos $\lambda_B(r+1)$ e $\lambda_C(r+1)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\lambda_B(r+1)} + \sqrt{\lambda_C(r+1)}}{2} &= |a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{mN-r} + a_{mN+r}]| + \\ &+ |a_r + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [a_{mN-r} + a_{mN+r}]| \\ \frac{\sqrt{\lambda_B(r+1)} + \sqrt{\lambda_C(r+1)}}{2} &= \left| a_r + \sum_{m=1}^{\infty} [a_{2mN-r} + a_{2mN+r}] \right|. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Podemos observar que os resultados de (6.13) são semelhantes àqueles obtidos em (5.21), para um dado componente harmônico com frequência $r\omega_0$. Para realizarmos os cálculos usando duas matrizes separadas é preciso assumir a condição $|a_r + \sum_{m=1}^{\infty} a_{2mN-r} + a_{2mN+r}| \geq |\sum_{m=1}^{\infty} a_{(2m-1)N-r} + a_{(2m-1)N+r}|$, para um dado componente harmônico com frequência $r\omega_0$, descrita na Seção 5.3.

6.3 Simulações

Para ilustrar os resultados obtidos quando aplicamos a análise de componentes principais ao cancelamento de *aliasing* em sinais periódicos, nós iremos considerar aqui a onda quadrada, descrita em (5.23).

O sinal $f_4(t)$ foi amostrado considerando os seguintes parâmetros: $V_p = 1$ V, $v_0 = 50$ Hz, $M = \frac{N}{2} = 75$, $T_s = \frac{1}{2Mv_0} \approx 133,4 \mu\text{s}$. Foi feita uma amostragem com um atraso fracionário $d = \frac{T_s}{2} = 66,7 \mu\text{s}$ em relação ao início do período.

Para simular os resultados de um sinal medido em laboratório, nós quantizamos $f_4\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$ com 21 bits e adicionamos ruído com distribuição normal e variância $\sigma = 10^{-4}$. Estes valores foram escolhidos para simular as condições reais de uma medição assíncrona, usando o multímetro 3458A como ADC. Conforme descrito no Capítulo 2, a frequência de amostragem $v_s = 1/T_s$ é um múltiplo da frequência fundamental do sinal v_0 .

Para ilustrar os resultados da equação (6.12) para o sinal onda quadrada, nós simulamos o processo de amostragem do sinal $f_4(t)$, com atraso fracionário em relação ao início do período, conforme descrito na Figura 5.1.

Para construirmos a matriz de dados $\mathbf{X}_4$ com dimensão $N \times 2N$, de acordo com a equação (6.6), no primeiro período do sinal nós adquirimos uma sequência de $N = 150$ amostras igualmente espaçadas de $T_s \approx 133,4 \mu\text{s}$. A primeira amostra foi medida imediatamente após o início do período, ou seja, sem atraso. Esta sequência de amostras corresponde à primeira coluna de $\mathbf{X}_4$.

Já no segundo período do sinal, nós esperamos um intervalo de $d = \frac{T_s}{2} = 66,7 \mu\text{s}$ após o início deste antes de iniciar a aquisição de uma segunda sequência de amostras, também igualmente espaçadas de $T_s \approx 133,4 \mu\text{s}$. Ou seja, a segunda sequência possui um atraso fracionário $d = 66,7 \mu\text{s}$ em relação ao início do período. Esta sequência de amostras corresponde à segunda coluna de $\mathbf{X}_4$. No terceiro período de $f_4(t)$ foi adquirida uma sequência de amostras com um atraso de $d = T_s \approx 133,4 \mu\text{s}$ em relação ao início do período, correspondente à terceira coluna de $\mathbf{X}_4$. Este processo prosseguiu até completarmos as $2N$ colunas de $\mathbf{X}_4$.

Nós então calculamos a matriz de correlação $\mathbf{S}_4 = \mathbf{X}_4^* \mathbf{X}_4$, a qual foi decomposta, obtendo-se assim a matriz de autovalores $\mathbf{\Lambda}_4$, onde $\lambda_4(r)$ é um elemento de sua diagonal.

O vetor $\mathbf{v}_4$ representa a magnitude dos componentes harmônicos da onda quadrada. Cada elemento $v_4(r) = \sqrt{\lambda_4(r)}$ de $\mathbf{v}_4$ corresponde a uma frequência $r\omega_0$, onde $-M < r < M$. Nós também construímos o vetor de referência $\mathbf{v}_{4,M}$, onde cada elemento $v_{4,M}(r) = \left|\frac{4}{\pi r}\right|$ para r ímpar e $v_{4,M}(r) = 0$ para r par. A Figura 6.1 mostra o módulo do vetor com o erro de *aliasing* $\mathbf{e}_{\text{PCA}} = |\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_{4,M}|$. Como todos os harmônicos pares são iguais a zero para este sinal, a Figura 6.1 só mostra os

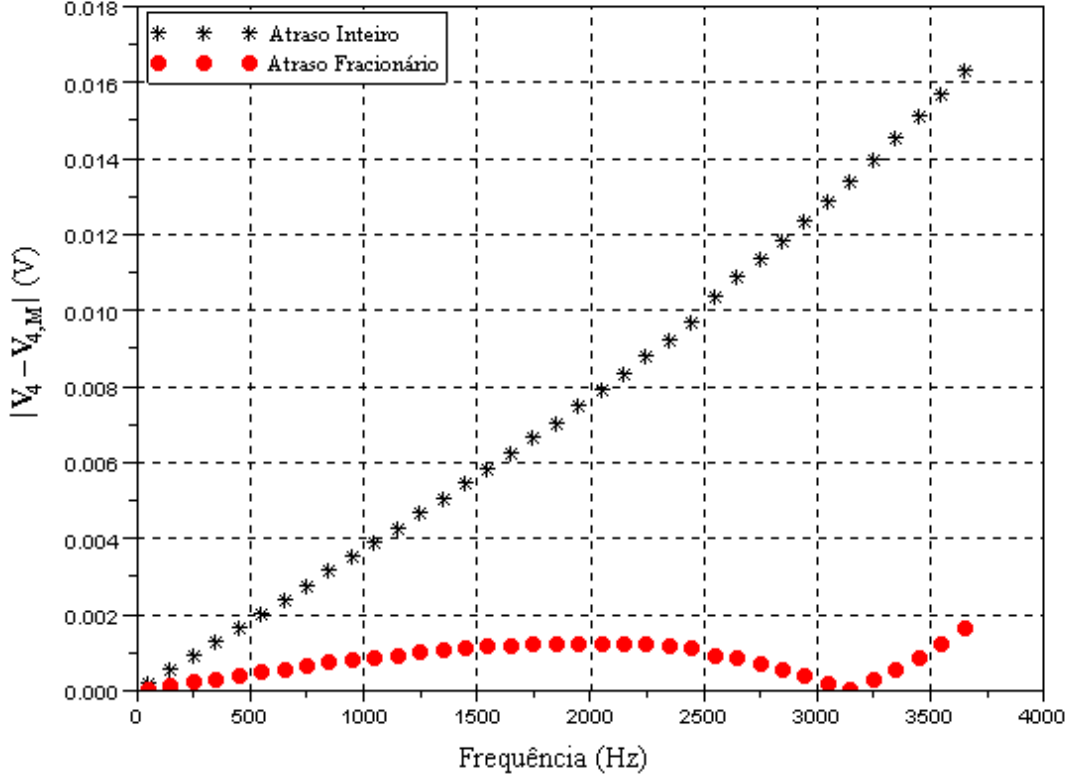


Figura 6.1: Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada - PCA.

harmônicos ímpares.

Para efeito de comparação, também foi construída a matriz de dados $\mathbf{X}_{4\mathbf{B}}$ com dimensão $N \times N$, de acordo com a equação (6.2). Cada coluna da matriz $\mathbf{X}_{4\mathbf{B}}$ representa uma série de N amostras adquiridas com um atraso inteiro $d = \beta T_s$, $\beta \in \mathbb{N}$, em relação ao início de um período de $f(t)$. Nós calculamos então a matriz de correlação $\mathbf{S}_{4\mathbf{B}} = \mathbf{X}_{4\mathbf{B}}^* \mathbf{X}_{4\mathbf{B}}$, a qual foi decomposta, obtendo-se assim a matriz de autovalores $\mathbf{\Lambda}_{4\mathbf{B}}$, onde $\lambda_{4\mathbf{B}}(r)$ é um elemento de sua diagonal.

A Figura 6.1 também mostra o módulo do vetor com o erro de *aliasing* $\mathbf{e}_{\text{PCA}} = |\mathbf{v}_{4\mathbf{B}} - \mathbf{v}_{4,\mathbf{M}}|$, referente a amostragem com atraso inteiro. Podemos observar nesta figura que o erro de *aliasing* para a amostragem com atraso fracionário é significativamente menor do que para a amostragem com atraso inteiro.

Nós também iremos comparar os resultados obtidos para a amostragem com atraso fracionário combinada com PCA com os resultados apresentados na Subseção 5.4.2, onde foi considerada a transformada de Fourier discreta para a estimação de harmônicos da onda quadrada.

A Figura 6.2 mostra o módulo do vetor com o erro de *aliasing* $\mathbf{e}_{\text{PCA}} = |\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_{4,\mathbf{M}}|$ e também o erro de *aliasing* $\bar{E}_4 = |\bar{\mathbf{F}}_4(k\omega_0)| - |F_{4,M}(k\omega_0)|$, onde $|\bar{\mathbf{F}}_4(k\omega_0)|$ é a média dos módulos das transformadas de Fourier discretas de duas sequências de amostras, sem atraso e com atraso fracionário d em relação ao início de um período. Já $|F_{4,M}(k\omega_0)|$

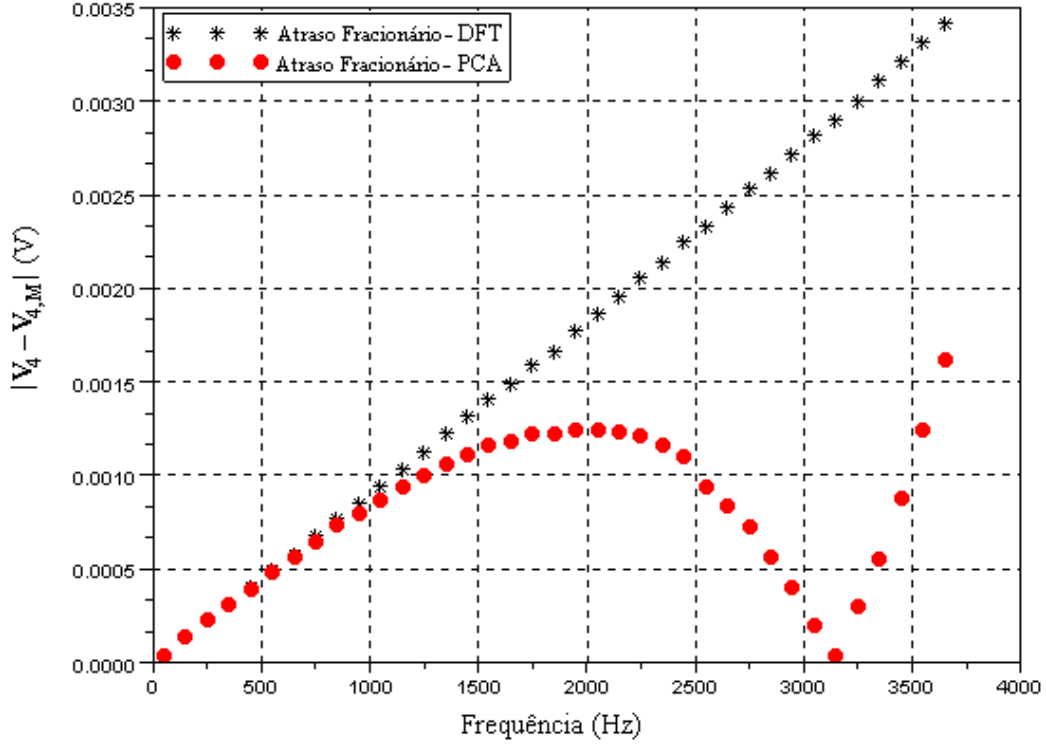


Figura 6.2: Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada - PCA X FFT.

é o sinal de referência.

Podemos observar na Figura 6.2 que erro de *aliasing* para a amostragem com atraso fracionário combinada com PCA é claramente menor do que para a amostragem com atraso fracionário combinada com DFT.

A Tabela 6.1 mostra a norma do erro de *aliasing* para a onda quadrada, considerando tanto a abordagem com PCA como com DFT, para sinais amostrados com atrasos inteiro e fracionário em relação ao início de um período. Para o atraso inteiro tanto a PCA como a DFT apresentam o mesmo resultado, estimando a magnitude dos componentes harmônicos, sem redução do erro de *aliasing*.

Já para a amostragem com atraso fracionário, as abordagens com PCA e DFT apresentam resultados diferentes. Embora para ambas as abordagens ocorra uma redução significativa do erro de *aliasing*, a PCA-FD é mais eficiente, reduzindo a norma do erro de *aliasing* $\|\mathbf{E}_{\text{PCA}}\| = \sum_{r=-M+1}^{M-1} |e_{\text{PCA}}(r)|$, onde $e_{\text{PCA}}(r)$ é um elemento de $\mathbf{e}_{\text{PCA}}$, em aproximadamente 89%, em comparação com amostragem com atraso inteiro.

Tabela 6.1: Norma do erro de *aliasing* - PCA x DFT.

	$\ \mathbf{E}_{\text{PCA}}\ $	$\ \mathbf{E}_{\text{DFT}}\ $
Atraso Inteiro	0,556 V	0,556 V
Atraso Fracionário	$6,03 \times 10^{-2}$ V	0,126 V
Redução da Norma do Erro de Aliasing	89%	75%

6.4 Conclusão

Neste capítulo nós estudamos a técnica de amostragem com atraso fracionário, combinada com a análise de componentes principais. Esta técnica possibilitou uma redução muito significativa do erro de *aliasing*, conforme atestam os resultados apresentados aqui, usando como exemplo o sinal periódico onda quadrada. Nós também comparamos os resultados obtidos neste capítulo com aqueles obtidos no Capítulo 5. No próximo capítulo nós iremos apresentar uma série de medições em laboratório de modo a verificar os resultados obtidos até aqui.

Capítulo 7

Resultados Experimentais

Além das simulações descritas nos capítulos anteriores, nós também realizamos uma série de medições em laboratório para verificar os resultados obtidos em condições reais de medição. Nós usamos o multímetro de $8\frac{1}{2}$ dígitos Agilent 3458A operando como um sistema de amostragem. Nós também usamos o gerador de formas de ondas programável Agilent 33250A para gerar os sinais escolhidos. Ambos os equipamentos foram controlados através de portas GPIB e do programa Labview, conforme mostrado nas Figuras 7.1 e 7.2.

Nós decidimos empregar o multímetro Agilent 3458A como nosso conversor analógico-digital (ADC) devido à sua estabilidade, baixo ruído e alta taxa de amostragem, assim como por seu uso frequente na área de metrologia elétrica. Vários autores vêm descrevendo o uso do 3458A como um ADC em diferentes áreas, tais como análise de harmônicos em padrões de energia e potência [3][41] e no efeito Josephson em AC [42][43]. No entanto, as discussões e resultados apresentados aqui podem ser facilmente adaptados para a maioria dos ADCs integradores comerciais.

O multímetro Agilent 3458A é capaz de amostrar sinais de tensão contínua (DC) com resolução de 28 bits, ou seja $8\frac{1}{2}$ dígitos e com ruído extremamente baixo, inferior a $1\text{ }\mu\text{V/V}$ [37]. Quando usamos a função de medição de tensão contínua (DCV) para a aquisição de sinais em tensão alternada (AC) a resolução diminui com aumento da taxa de amostragem.

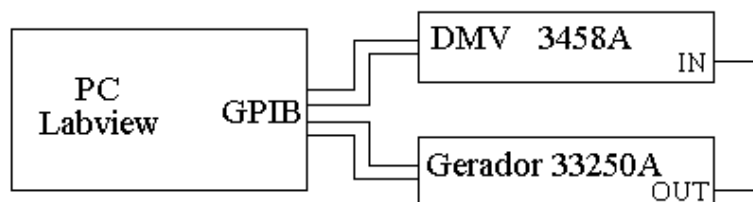


Figura 7.1: *Setup* de medição - Diagrama de Blocos.

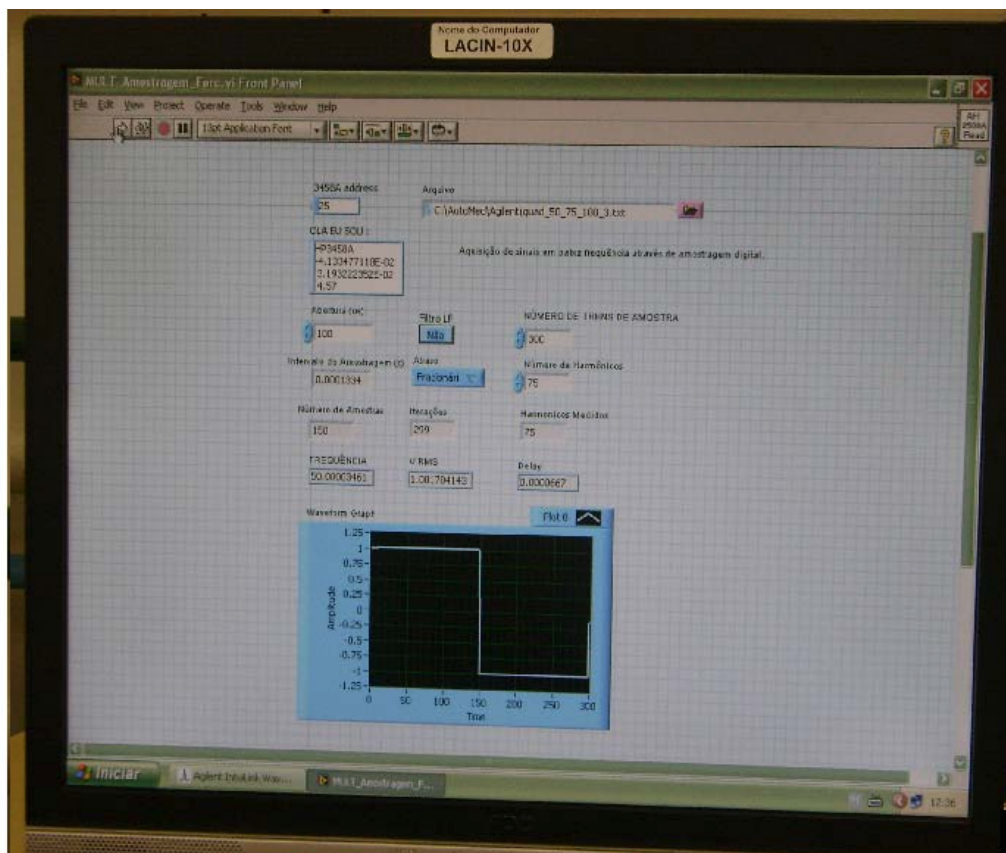


Figura 7.2: *Setup* de medição.

Por exemplo, caso seja programado um tempo de amostragem de $T_s = 200 \mu s$ e um tempo de abertura de $T_{AP} = 170 \mu s$ teremos uma resolução de 21 bits, ou seja $6\frac{1}{2}$ dígitos. Para todos os exemplos a seguir, o multímetro utilizado foi programado para medir através da função DCV, com período de amostragem e tempo de abertura fixos de T_s e $T_{AP} < T_s$.

Para reduzir possíveis fontes adicionais de erro durante as medições, tais como variações de ganho e erros de *offset*, nós empregamos um multímetro Agilent 3458A calibrado para medições de tensão em DC, rastreado ao efeito Josephson [53]. Este equipamento é calibrado anualmente com incerteza inferior a $1 \mu V/V$ ¹. Isto permite um controle rigoroso sobre possíveis variações no valor medido, devido ao desgaste temporal do equipamento.

Todas as medições foram feitas no Laboratório de Capacitância e Indutância do Inmetro, onde existe controle e monitoramento eletrônico de temperatura e de umidade. Durante as medições realizadas a temperatura ambiente era $23^\circ C$, com variação inferior a $0,5^\circ C$. Portanto é possível garantir a redução de possíveis erros de medição do multímetro devido à variação de temperatura.

Embora o multímetro utilizado aqui já apresente uma rejeição de ruído de cerca de 140 dB, foram tomadas providências adicionais para a redução de ruídos. Todas as medições foram feitas com cabos coaxiais de tamanho reduzido, diminuindo a influência destes durante a medição.

Além disto, os equipamentos estavam conectados ao aterramento do laboratório, sendo alimentados através de um *no-break* do tipo UPS Station. Como garantia adicional, em todos os exemplos a seguir, nós escolhemos as frequências do sinal de modo a evitar ruídos adicionais da fonte de alimentação do laboratório, ou seja, frequências diferentes de 60 Hz ou de seus harmônicos.

Todas as medições descritas nas seções a seguir foram feitas de forma assíncrona, usando o *trigger* interno do multímetro para iniciar a aquisição de dados no momento em que ocorresse um cruzamento por zero positivo, conforme mostrado na Figura 7.3. No primeiro período do sinal foram adquiridas N amostras a intervalos regulares de T_s segundos.

Depois do cruzamento por zero seguinte, foi esperado um intervalo de d segundos antes de recomeçar a aquisição de dados, obtendo assim duas sequências de amostras que não se sobrepõem temporalmente, separadas com um intervalo maior que d . Este processo é repetido até serem adquiridas S sequências. A amostra inicial de cada sequência é adquirida após um atraso de nd , $0 \leq n < S$ em relação ao início do período do sinal.

¹Através de uma junção Josephson, i.e., dois supercondutores separados por uma barreira isolante, é possível relacionar a tensão elétrica diretamente à frequência, com incerteza extremamente baixa e alta reprodutibilidade [54].

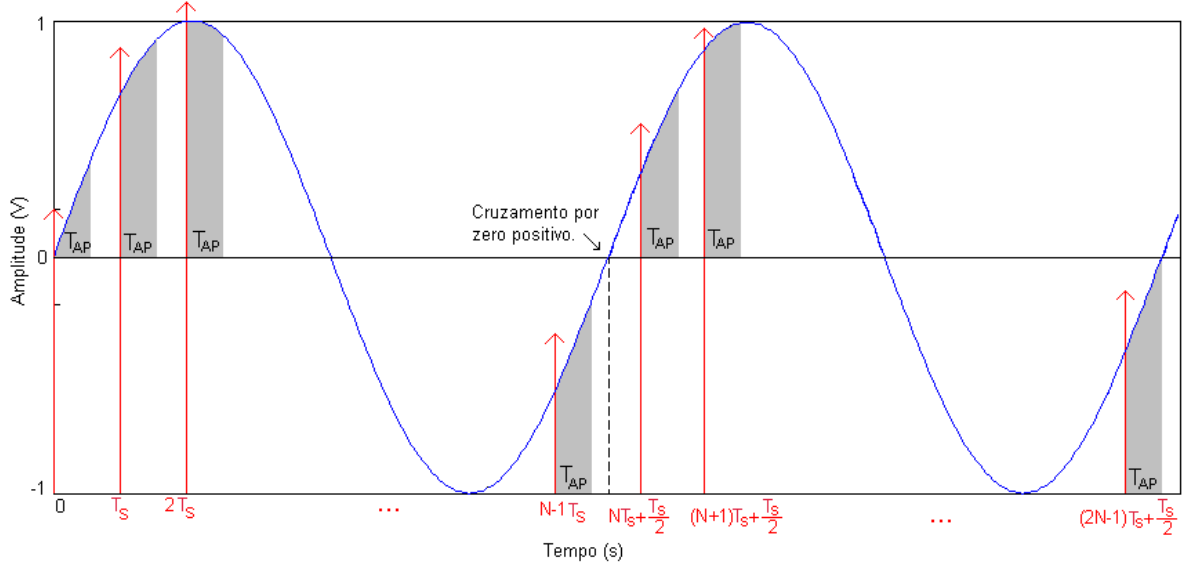


Figura 7.3: Método de amostragem.

Uma vez que as amostras foram adquiridas usando um único ADC, as sequências de amostras foram medidas em diferentes períodos do sinal gerado. Isto pode ocasionar algumas variações na amplitude do sinal, dependendo da estabilidade do gerador. Este problema é bastante atenuado quando fazemos a média de várias sequências de amostras, de modo a reduzir o ruído e as variações de amplitude do gerador. A configuração usando apenas um ADC com amostragem assíncrona tem várias vantagens, tais como erro de *jitter* reduzido, baixo custo e simplicidade.

Nas seções a seguir estão descritas diversas medições em laboratório. Na próxima seção o foco das medições apresentadas será nos erros de amostragem. Na segunda seção o foco será na aplicação da técnica de amostragem com atraso fracionário, usando DFT. Já na terceira seção o foco será na técnica de amostragem com atraso fracionário combinada com PCA.

7.1 Erros de Amostragem

Para comprovar os resultados obtidos nos Capítulos 3 e 4, nós fizemos uma série de medições assíncronas. Durante o primeiro período do sinal medido, nós adquirimos $N = 2M$ amostras em intervalos de tempo com duração de T_s segundos. Após o próximo cruzamento por zero positivo, nós esperamos um intervalo de $d = T_s$ segundos antes de recomençar a aquisição de dados.

7.1.1 Onda Senoidal Retificada

No primeiro experimento nós programamos o gerador para criar o sinal senoidal retificado (RSW) descrito em (3.6) e (3.7), com $v_0 = 100$ Hz, amplitude $V_p = 1$ V e tensão de *offset* $V_{off} = -0.1$ V. Este sinal, $f_{RSW}(t)$, foi amostrado com $T_s = \frac{1}{Nv_0} = 200 \mu s$. Para cada período de $f_{RSW}(t)$ nós obtivemos uma sequência de $N = 2M = 50$ amostras.

Embora apenas uma sequência de amostras fosse necessária, nós adquirimos várias sequências, de modo a reduzir o ruído e as variações no ganho do gerador. Deste modo minimizamos as componentes aleatórias do sinal, podendo então considerá-lo suficientemente determinístico para a aplicação desejada. Para estas medições, nós selecionamos um tempo de abertura de $T_{AP} = 170 \mu s$, o qual garante que a quantização seja feita com 21 bits.

Seja $|\mathbf{F}_{RSW}(k\omega_0)|$ a média das magnitudes das transformadas de Fourier discretas de todas as sequências de amostras. Neste exemplo, tanto o sinal simulado $\bar{f}_{1B}(\frac{n\pi}{\Omega})$ como os dados medidos possuem erros de integração e de *aliasing*. Nós também consideramos aqui como sinal de referência a transformada de Fourier discreta, $F_{1,M}(k\omega_0)$, do sinal $f_{1,M}(\frac{n\pi}{\Omega})$, descrita na Subseção 4.1.3. Este sinal não apresenta erros de *aliasing* nem integração.

Nós calculamos a norma do erro de *aliasing*, $\|R_\Omega[f_1(t)]\|$, resolvendo (3.3) para o sinal senoidal retificado $f_1(t)$, representado por (3.7), conforme descreve a equação (3.9) na Subseção 3.1.1. Nós também simulamos o processo de integração do ADC [31][37], considerando o método B, obtendo assim $\bar{f}_{1B}(\frac{n\pi}{\Omega})$ e sua transformada de Fourier discreta $\bar{F}_{1B}(k\omega_0)$, conforme descrito na Subseção 4.1.3.

Na Tabela 7.1 nós comparamos a norma do erro de *aliasing* $\|R_\Omega[f_1(t)]\|$ com o erro da simulação $\|E_{1B}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} ||\bar{F}_{1B}(k\omega_0)| - |F_{1,M}(k\omega_0)||$ e o erro referente aos dados medidos $\|E_{RSW}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} ||\mathbf{F}_{RSW}(k\omega_0)| - |F_{1,M}(k\omega_0)||$. Nós podemos observar uma redução de aproximadamente 50% da norma do erro, em ambos os casos. O processo de integração funciona aqui como um filtro passa-baixas, eliminando parte do *aliasing*.

Tabela 7.1: Norma do erro de amostragem - Onda senoidal retificada.

Norma do Erro	Valor
<i>Aliasing</i>	$\ R_\Omega[f_1(t)]\ \approx 5,09 \times 10^{-2}$ V
Integração	$\ E_{1B}\ \approx 2,57 \times 10^{-2}$ V
Dados medidos	$\ E_{RSW}\ \approx 2,69 \times 10^{-2}$ V
Dados medidos com correção	$\ E'_{RSW}\ \approx 1,56 \times 10^{-2}$ V

Se nós empregarmos a correção para compensar o erro de integração, descrita na Subseção 4.1.1, nós obteremos um valor ainda menor para a norma do erro

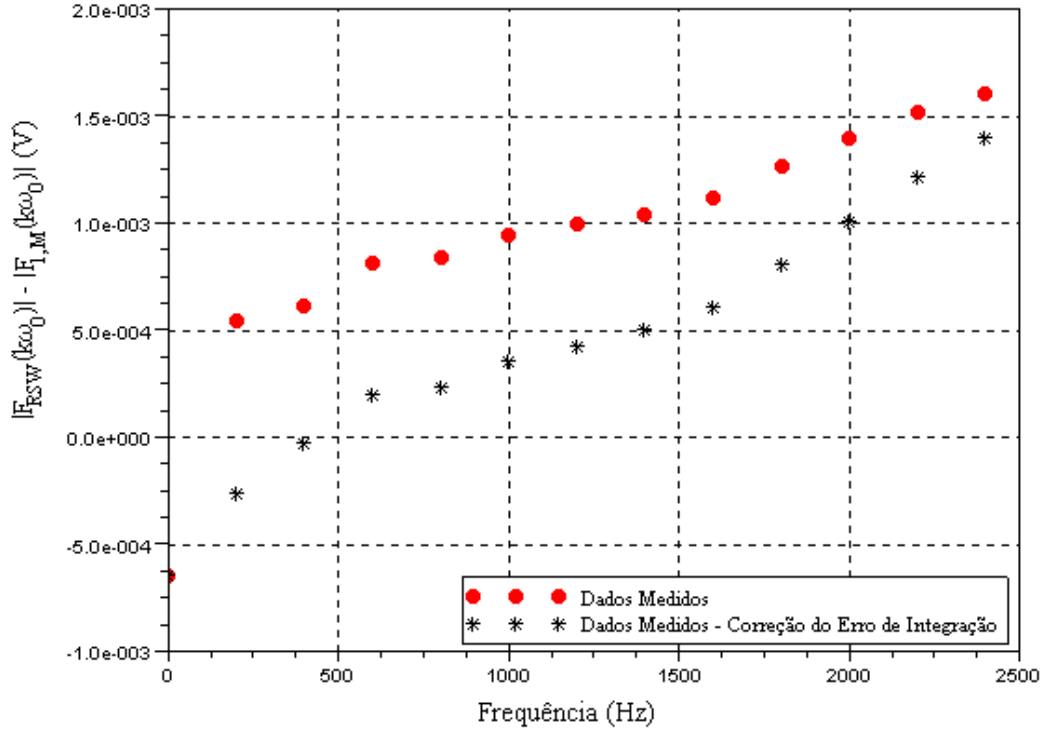


Figura 7.4: Erro de integração: Onda senoidal retificada.

$\|E'_{RSW}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} ||\mathbf{F}_{RSW}(k\omega_0)|c_k - |F_{1,M}(k\omega_0)||$, conforme mostra a Tabela 7.1.

A Figura 7.4 mostra estes resultados para o erro referente aos dados de medição $E_{RSW} = |\mathbf{F}_{RSW}(k\omega_0)| - |F_{1,M}(k\omega_0)|$, com e sem a compensação do erro de integração. Podemos observar na figura que após a compensação do erro de integração há redução significativa do erro E_{RSW} . Como todos os harmônicos ímpares são iguais a zero para este sinal, a Figura 7.4 só mostra os harmônicos pares, no lado positivo do espectro de frequência.

Nós também podemos observar na Tabela 7.1 que os resultados de simulação do processo de integração $\|E_{1B}\|$ estão em acordo com os dados medidos $\|E_{RSW}\|$. As pequenas diferenças que existem entre a simulação e os dados experimentais são devidas principalmente às imperfeições do gerador de sinais, tais como quantização, distorção harmônica e a instabilidade de ganho [4][3]. É possível quase eliminar as imperfeições do gerador de sinais, se ao invés de um gerador convencional usarmos um gerador quântico [28].

No momento está em fase final de implementação no Inmetro o sistema de efeito Josephson AC [55], o qual se comporta como uma fonte de tensão alternada com patamares quânticos e portanto com valores de tensão exatos e conhecidos. Em breve será possível realizarmos uma nova série de medições, nas quais a influência do gerador será minimizada, permitindo uma análise mais exata dos erros no sistema

de amostragem.

Os erros de quantização e *jitter* do ADC não estão sendo considerados aqui. Como vimos na Seção 4.2, tanto o erro de quantização como de *jitter* são pequenos e podem ser considerados insignificantes quando comparados com os erros de integração e de *aliasing*, para a configuração de amostragem usada neste trabalho.

7.1.2 Onda Dente-de-Serra Aproximada

No segundo experimento, nós geramos a onda dente-de-serra aproximada (ASW) descrita em (3.13) e (3.14), com $v_0 = 50$ Hz, taxa de amostragem $T_s = \frac{1}{Nv_0} = 200 \mu\text{s}$, $l = 5 \times 10^5$ e tempo de abertura $T_{AP} = 170 \mu\text{s}$. Para cada período do sinal foi obtida uma sequência de $N = 2M = 100$ amostras.

Seja $|\mathbf{F}_{ASW}(k\omega_0)|$ a média das magnitudes das transformadas de Fourier discretas do sinal amostrado $f_{ASW}(\frac{n\pi}{\Omega})$. Nós também consideramos aqui o sinal de referência $F_{3,M}(k\omega_0)$, o qual possui apenas os $M = 50$ primeiros harmônicos da onda dente-de-serra aproximada e não apresenta erro de *aliasing*, para calcular o erro de medição $E_{ASW}(k\omega_0)$.

Na Tabela 7.2 nós comparamos a norma do erro de *aliasing* $\|R_\Omega[f_3(\frac{n\pi}{\Omega})]\|$, calculada na Subseção 3.2 com a norma do erro de simulação $\|E_{3B}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} |\bar{F}_{3B}(k\omega_0)| - |F_{3,M}(k\omega_0)|$, calculada na Subseção 4.1.4. A Tabela 7.2 também mostra a norma do erro para o sinal medido $\|E_{ASW}\| = \sum_{k=-M+1}^{M-1} |\mathbf{F}_{ASW}(k\omega_0)| - |F_{3,M}(k\omega_0)|$.

Tabela 7.2: Norma do erro de amostragem - Onda dente-de-serra aproximada.

Norma do Erro	Valor
<i>Aliasing</i>	$\ R_\Omega[f_3(\frac{n\pi}{\Omega})]\ \approx 0,5635 \text{ V}$
Integração	$\ E_{3B}\ \approx 0,3024 \text{ V}$
Dados medidos	$\ E_{ASW}\ \approx 0,3097 \text{ V}$
Dados medidos com correção	$\ E'_{ASW}\ \approx 0,5689 \text{ V}$

Para a onda dente-de-serra aproximada, nós observamos uma redução de aproximadamente 45% na norma do erro após a integração. A Figura 7.5 mostra a comparação entre o erro de medição, composto pelos erros de *aliasing* e integração, e a simulação do erro de *aliasing* $E_3(k\omega_0) = |F_3(k\omega_0)| - |F_{3,M}(k\omega_0)|$. Podemos observar que o erro de medição $E_{ASW}(k\omega_0)$ é significativamente menor que $E_3(k\omega_0)$.

A correção para compensar o erro de integração, descrita na Subseção 4.1.1, também pode ser empregada para a onda dente-de-serra aproximada, mas para este sinal o uso da correção irá provocar um aumento da norma do erro $\|E'_{ASW}\| \sum_{k=-M+1}^{M-1} |\mathbf{F}_{ASW}(k\omega_0)| c_k - |F_{3,M}(k\omega_0)|$, conforme mostra a Tabela 7.2.

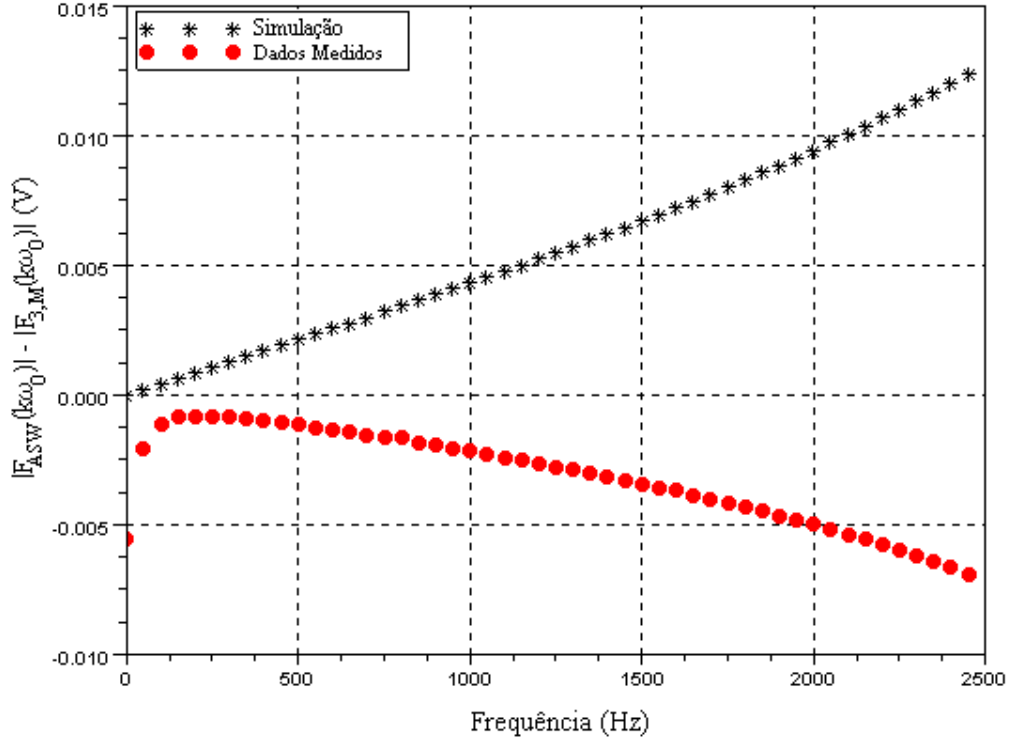


Figura 7.5: Erro de integração: Onda dente-de-serra aproximada.

Ou seja, para este sinal a correção do erro de integração elimina o efeito de filtro passa-baixas do processo de integração.

Os exemplos anteriores mostraram que o processo de integração pode reduzir parcialmente o erro de *aliasing*, porém não o elimina. Estes exemplos também mostram que o método de compensação para o erro de integração pode ser eficiente para alguns sinais, porém deve ser aplicado de forma cuidadosa, pois este método foi calculado considerando a integração pelo método A. Porém, o processo de integração nos ADCs é causal e pode apenas ser descrito pelo método B, veja a Seção 4.1.

7.2 Amostragem com Atraso Fracionário: DFT

Para comprovar os resultados obtidos no Capítulo 5, nós fizemos uma série de medições assíncronas em laboratório. Durante o primeiro período do sinal medido, imediatamente após o início do período, nós adquirimos uma sequência de $N = 2M$ amostras em intervalos de tempo regulares com duração de T_s segundos.

Após o próximo cruzamento por zero positivo, nós esperamos um intervalo de $d = T_s/2$ segundos antes de recomençar a aquisição de dados. Nós adquirimos então uma segunda sequência de N amostras, também em intervalos de tempo regulares de T_s segundos. Deste modo nós obtivemos duas sequências de amostras, as quais não se sobrepõem temporalmente e estão separadas por intervalos de tempo superiores

a d segundos, conforme mostra a Figura 7.3.

A técnica de amostragem com atraso fracionário pode ser implementada usando apenas um ADC, adquirindo-se duas sequências de amostras, medidas cada uma em um período do sinal, com diferentes atrasos em relação ao início deste período. Também é possível usar dois ADCs trabalhando em paralelo. Neste trabalho, nós usamos apenas um ADC, portanto o erro de *jitter*, também associado com sistemas de amostragem, é irrelevante quando comparado com outras fontes de erro [16],[48]–[50].

Para aplicar a técnica de amostragem com atraso fracionário é necessário adquirir apenas duas sequências de amostras, conforme descreve o Capítulo 5. Porém, para reduzir ruído e variações no ganho do gerador, nos exemplos a seguir nós optamos por adquirir S sequências, sendo S par. A amostra inicial de cada sequência é adquirida após um atraso de $d = n T_s/2$, $0 \leq n < S$ em relação ao início do período do sinal, ou seja, após um cruzamento por zero positivo.

Nesta seção nós iremos estudar dois exemplos de medição laboratório com o uso da técnica de amostragem com atraso fracionário. Na subseção a seguir nós iremos considerar a onda senoidal retificada, já na Subseção 7.2.2 nós iremos considerar a onda quadrada, a qual tem um erro de *aliasing* mais significativo.

7.2.1 Onda Senoidal Retificada

No primeiro experimento nós programamos o gerador para criar a onda senoidal retificada (RSW) descrita em (3.6) e (3.7), com $v_0 = 100$ Hz, amplitude $V_p = 1$ V e tensão de *offset* $V_{off} = -0.1$ V. Este sinal, $f_{RSW}(t)$, foi amostrado com um período de $T_s = \frac{1}{Nv_0} = 200$ μ s. Para cada período de $f_{RSW}(t)$ nós obtivemos uma sequência de $N = 2M = 50$ amostras.

Embora apenas duas sequências de amostras fossem necessárias para aplicar a técnica de amostragem com atraso fracionário, a primeira sem atraso em relação ao início do período do sinal e a segunda com atraso fracionário $d = \frac{T_s}{2} = 100$ μ s, nós adquirimos 100 sequências, de modo a reduzir o ruído e as variações no ganho do gerador. Para estas medições, nós selecionamos um tempo de abertura de $T_{AP} = 100$ μ s, o qual garante que a quantização seja feita com 21 bits.

Seja $|\mathbf{F}_{RSW}(k\omega_0)|$ a média das magnitudes das transformadas de Fourier discretas das 50 sequências de amostras adquiridas com atraso inteiro $d = nT_s$, $0 \leq n < 50$ em relação ao início do período. Por outro lado, seja $|\bar{\mathbf{F}}_{RSW}(k\omega_0)|$ a média das 50 primeiras as sequências de amostras, adquiridas com atraso $d = nT_s/2$, $0 \leq n < 50$ em relação ao início do período.

Neste exemplo, os dados medidos possuem erros de integração e de *aliasing*. Nós também consideramos aqui como sinal de referência a transformada de Fourier

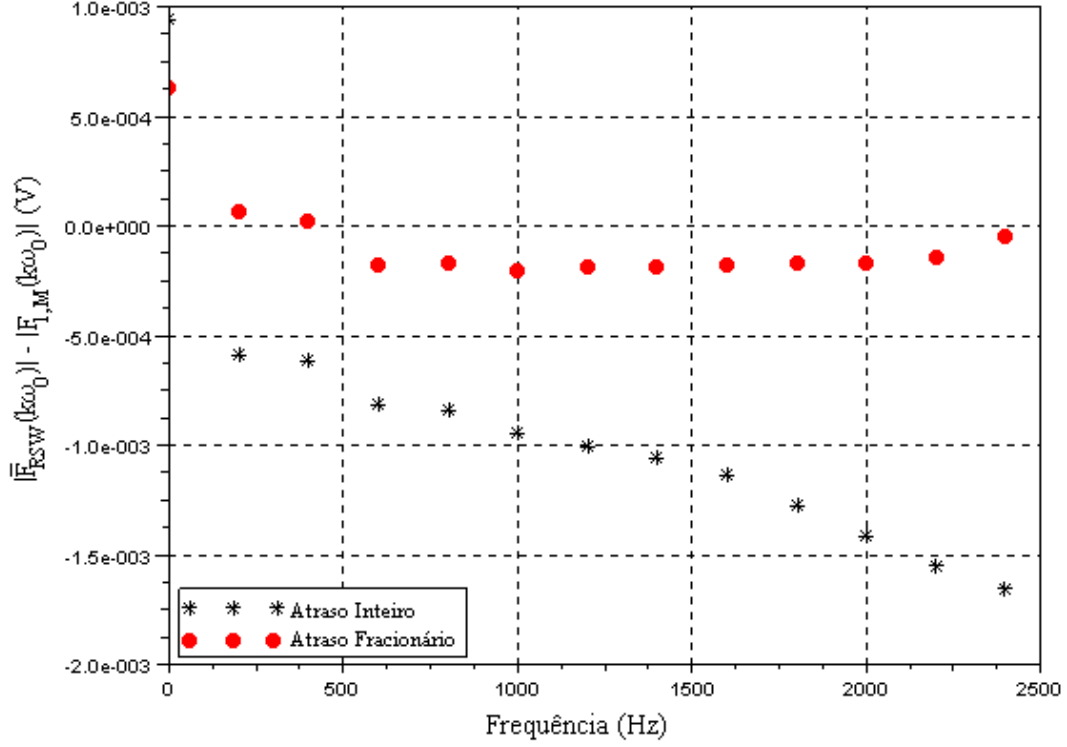


Figura 7.6: Amostragem com atraso fracionário: Onda senoidal retificada.

discreta, $F_{1,M}(k\omega_0)$, do sinal $f_{1,M}(\frac{n\pi}{\Omega})$, descrito na Subseção 4.1.3. Este sinal não apresenta erros de *aliasing* nem integração.

A Figura 7.6 mostra o erro de *aliasing* $E_{RSW}(k\omega_0) = |\mathbf{F}_{RSW}(k\omega_0)| - |F_{1,M}(k\omega_0)|$ para o sinal amostrado com atraso inteiro e também o erro de *aliasing* $\bar{E}_{RSW}(k\omega_0) = |\bar{\mathbf{F}}_{RSW}(k\omega_0)| - |F_{1,M}(k\omega_0)|$ para o sinal amostrado com atraso fracionário. Podemos observar nesta figura que a amostragem com atraso fracionário leva a uma redução significativa do erro de *aliasing*, em comparação com a amostragem com atraso inteiro. Como todos os harmônicos ímpares são iguais a zero para este sinal, a Figura 7.6 só mostra os harmônicos pares, no lado positivo do espectro de frequência.

Podemos também comparar os resultados obtidos neste experimento com os resultados de simulação, apresentados na Subseção 5.4.1. Na Tabela 7.3 podemos observar que o processo de integração elimina parte do erro de *aliasing*, uma vez que a norma do erro de *aliasing* para o sinal medido $\|E_{SQW}\|$ é cerca de 50% menor que a norma do erro obtido durante a simulação $\|E_1\|$, tanto para a amostragem com atraso inteiro como para o atraso fracionário. Ainda assim o erro de *aliasing* residual para o sinal senoidal retificado é alto, considerando o uso do atraso inteiro.

Tabela 7.3: Norma do erro de *aliasing* - Onda senoidal retificada.

	$\ \mathbf{E}_{SQW}\ $	$\ \mathbf{E}_1\ $
Atraso Inteiro	$2,84 \times 10^{-2} \text{ V}$	$5,09 \times 10^{-2} \text{ V}$
Atraso Fracionário	$5,49 \times 10^{-3} \text{ V}$	$1,09 \times 10^{-2} \text{ V}$
Redução da Norma do Erro de Aliasing	80%	80%

Neste caso, a amostragem com atraso fracionário permitiu uma redução de mais de 80% na norma do erro de *aliasing*, em comparação com a onda senoidal retificada medida com atraso inteiro.

7.2.2 Onda Quadrada

No segundo experimento nós programamos o gerador para criar a onda quadrada (SQW) descrita em (5.23), com $v_0 = 50 \text{ Hz}$ e amplitude $V_p = 1 \text{ V}$. Este sinal, $f_{SQW}(t)$, foi amostrado com um período de $T_s = \frac{1}{Nv_0} \approx 133,4 \mu\text{s}$. Para cada período de $f_{RSW}(t)$ nós obtivemos uma sequência de $N = 2M = 150$ amostras.

Embora apenas duas sequências de amostras fossem necessárias, a primeira sem atraso em relação ao início do período do sinal e a segunda com atraso fracionário $d = \frac{T_s}{2} = 66,7 \mu\text{s}$, nós adquirimos 300 sequências, de modo a reduzir o ruído e as variações no ganho do gerador. Para estas medições, nós também selecionamos um tempo de abertura de $T_{AP} = 100 \mu\text{s}$, o qual garante que a quantização seja feita com 21 bits.

Seja $|\mathbf{F}_{SQW}(k\omega_0)|$ a média das magnitudes das transformadas de Fourier discretas das 150 sequências de amostras adquiridas com atraso inteiro $d = nT_s$, $0 \leq n < 150$ em relação ao início do período. Por outro lado, seja $|\bar{\mathbf{F}}_{SQW}(k\omega_0)|$ a média das magnitudes das transformadas de Fourier discretas das 150 primeiras sequências de amostras, adquiridas com atraso $d = nT_s/2$, $0 \leq n < 150$ em relação ao início do período.

Neste exemplo, os dados medidos possuem erros de integração e de *aliasing*. Nós também consideramos aqui como sinal de referência a transformada de Fourier discreta, $F_{4,M}(k\omega_0)$, do sinal $f_{4,M}(\frac{n\pi}{\Omega})$, descrito na Subseção 5.4.2. Este sinal não apresenta erros de *aliasing* nem integração.

A Figura 7.7 mostra o erro de *aliasing* $E_{SQW}(k\omega_0) = |\mathbf{F}_{SQW}(k\omega_0)| - |F_{4,M}(k\omega_0)|$ para o sinal amostrado com atraso inteiro e também o erro de *aliasing* $\bar{E}_{SQW}(k\omega_0) = |\bar{\mathbf{F}}_{SQW}(k\omega_0)| - |F_{4,M}(k\omega_0)|$ para o sinal amostrado com atraso fracionário. Podemos observar nesta figura que a amostragem com atraso fracionário apresenta uma redução significativa do erro de *aliasing*, em comparação com a amostragem com atraso inteiro. Como todos os harmônicos pares são iguais a zero para este sinal, a Figura 7.7 só mostra os harmônicos ímpares.

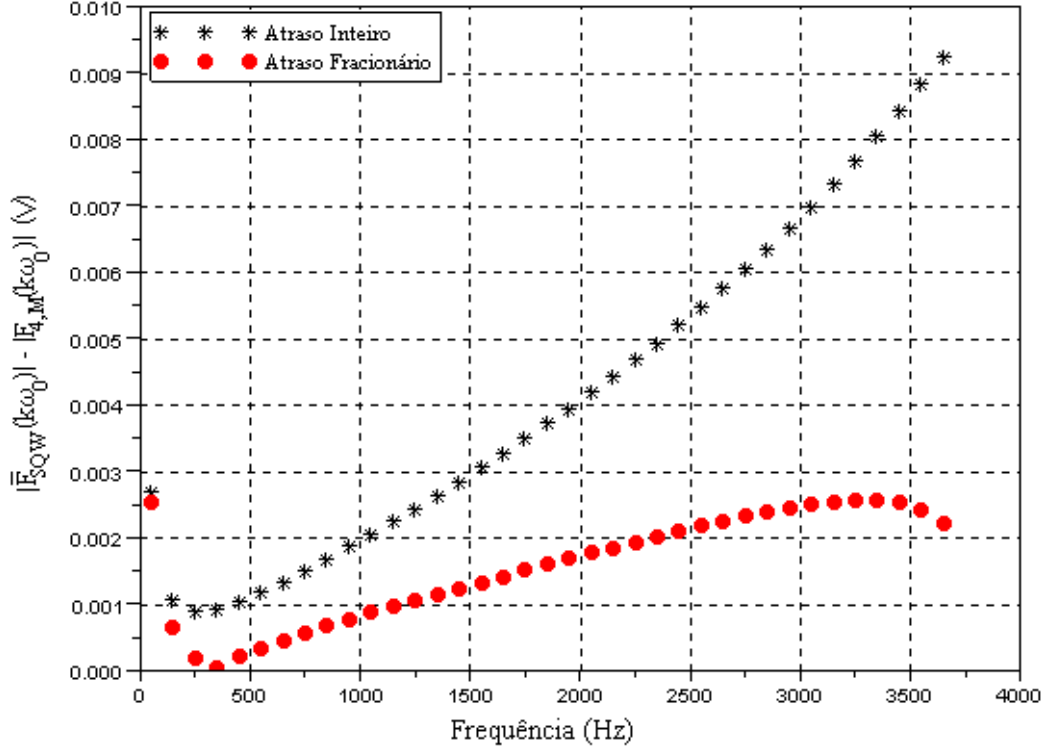


Figura 7.7: Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada.

Podemos também comparar os resultados obtidos neste experimento com os resultados de simulação, apresentados na Subseção 5.4.2. Na Tabela 7.4 podemos observar que o processo de integração elimina parte do erro de *aliasing*, uma vez que a norma do erro de *aliasing* para o sinal medido $\|E_{SQW}\|$ é cerca de 48% menor que o erro obtido durante a simulação $\|E_4\|$, para a amostragem com atraso inteiro. Ainda assim o erro de *aliasing* residual para a onda quadrada é alto.

Já a amostragem com atraso fracionário permitiu uma redução de quase 50% na norma do erro de *aliasing* em comparação com a onda quadrada medida com atraso inteiro e uma redução de mais de 70% na norma do erro de *aliasing* em comparação com o valor simulado.

Também podemos observar que para a amostragem com atraso fracionário, as normas dos erros de *aliasing* para o sinal medido e para o sinal simulado são bem próximas. Devido as características da onda quadrada², o processo de integração tem um efeito bastante limitado no que se refere a redução do erro de *aliasing*.

²O processo de integração para a onda quadrada é semelhante à onda dente-de-serra, ou seja, apenas a integração pelo método B provoca distorções no sinal, veja a Subseção 4.1.4.

Tabela 7.4: Norma do erro de *aliasing* - Onda quadrada.

	$\ \mathbf{E}_{\text{sqw}}\ $	$\ \mathbf{E}_4\ $
Atraso Inteiro	0,31 V	0,56 V
Atraso Fracionário	0,16 V	0,13 V
Redução da Norma do Erro de Aliasing	48%	80%

Neste experimento o período de amostragem T_s não é exatamente $\frac{1}{Nv_0}$, devido a quantização do multímetro [31][37]. Isto é, a fração $T_s = \frac{1}{Nv_0} = \frac{1}{150 \times 50} = 1,333... \times 10^{-4}$ s tem como resultado uma dízima periódica.

Portanto, devido ao número limitado de bits que o multímetro usa para representar um período de tempo, vai ocorrer uma aproximação do valor para $T_s \approx 133,4 \mu\text{s}$. Em outras palavras a frequência de amostragem $v_s = 1/T_s$ deixa de ser um múltiplo exato da frequência fundamental do sinal v_s .

Isto vai criar um erro de *ripple* no sinal amostrado, conforme mostram as oscilações na Figura 7.8. Nesta figura, estão os valores de magnitude da DFT apenas para o 7º componente harmônico, com frequência de 350 Hz. Nós calculamos separadamente a DFT para cada uma das 300 sequências de amostras medidas, e colocamos nesta figura os valores de magnitude apenas para o 7º componente harmônico.

O 7º componente harmônico foi escolhido como exemplo pois permite uma visualização clara tanto do *ripple* como do cancelamento do erro de *aliasing* devido a amostragem fracionária.

Para reduzir o erro de *ripple*, em [31] é recomendado adquirir e fazer a média de S sequências de amostras igualmente espaçadas, sendo que a amostra inicial de cada sequência é adquirida após um atraso d_s em relação ao início do período do sinal. Este método é eficiente quando o erro de aproximação no valor de T_s é bem pequeno, o que normalmente é o caso para medições elétricas de alta exatidão.

A importância da amostragem com atraso fracionário para o cancelamento do *aliasing* também é mostrada na Figura 7.8. Podemos observar que os valores obtidos através das sequências de amostras adquiridas com atraso fracionário em relação ao início de um período do sinal (na parte superior do gráfico) são muito diferentes daqueles valores referentes às sequências de amostras adquiridas com atraso inteiro (na parte inferior do gráfico).

A figura também mostra o valor médio de todas as magnitudes calculadas para o 7º componente harmônico, com frequência de 350 Hz, comparado com o valor de referência, calculado em (5.23) para $k = 7$. O valor médio é muito próximo do valor de referência, mas não exatamente o mesmo, pois a técnica de amostragem com atraso fracionário reduz o erro de *aliasing* de maneira muito significativa, porém não o cancela completamente, veja a Seção 5.3.

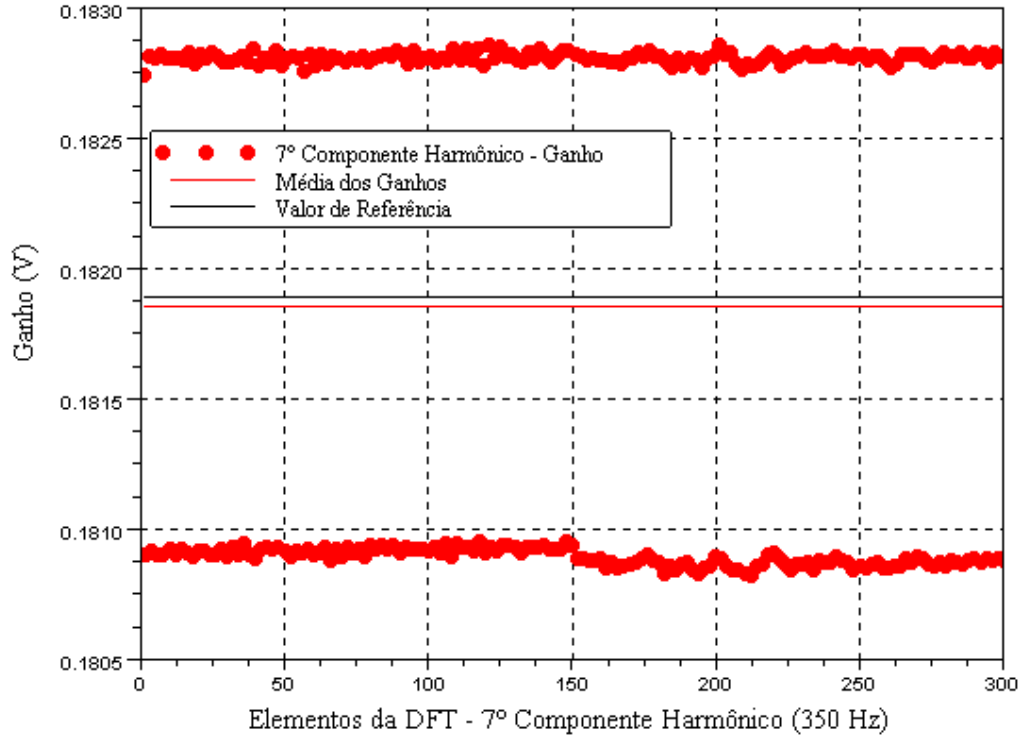


Figura 7.8: Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada - Erro de *ripple*.

7.3 Amostragem com Atraso Fracionário: PCA

Para ilustrar os resultados da amostragem com atraso fracionário combinada com PCA, descritos no Capítulo 6, nós fizemos uma série de medições assíncronas em laboratório, usando o multímetro 3458A como um ADC.

Nós programamos o gerador para criar a onda quadrada (SQW) descrita em (5.23), com $v_0 = 50$ Hz e amplitude $V_p = 1$ V. Este sinal, $f_{SQW}(t)$, foi amostrado com um período de $T_s = \frac{1}{Nv_0} \approx 133,4 \mu s$. Nós selecionamos o tempo de abertura $t_a = 100 \mu s$, o qual garante que a quantização seja feita com 21 bits. Para cada período de $f_{RSW}(t)$ nós obtivemos uma sequência de $N = 2M = 150$ amostras.

Para construirmos a matriz de dados $\mathbf{X}_{SQW}$ com dimensão $N \times 2N$, de acordo com a equação (6.6), durante primeiro período do sinal nós adquirimos uma sequência de $N = 150$ amostras igualmente espaçadas de $T_s \approx 133,4 \mu s$. A primeira amostra foi medida imediatamente após o início do período, ou seja, sem atraso. Esta sequência de amostras corresponde à primeira coluna de $\mathbf{X}_{SQW}$.

Já no segundo período do sinal, após o próximo cruzamento por zero positivo, nós esperamos um intervalo de $d = \frac{t_s}{2} = 66,7 \mu s$ após o início deste antes de recomençar a aquisição de dados. Nós adquirimos então uma segunda sequência de amostras, também igualmente espaçadas de $T_s \approx 133,4 \mu s$. Ou seja, a segunda sequência possui um atraso fracionário $d = 66,7 \mu s$ em relação ao início do período, conforme

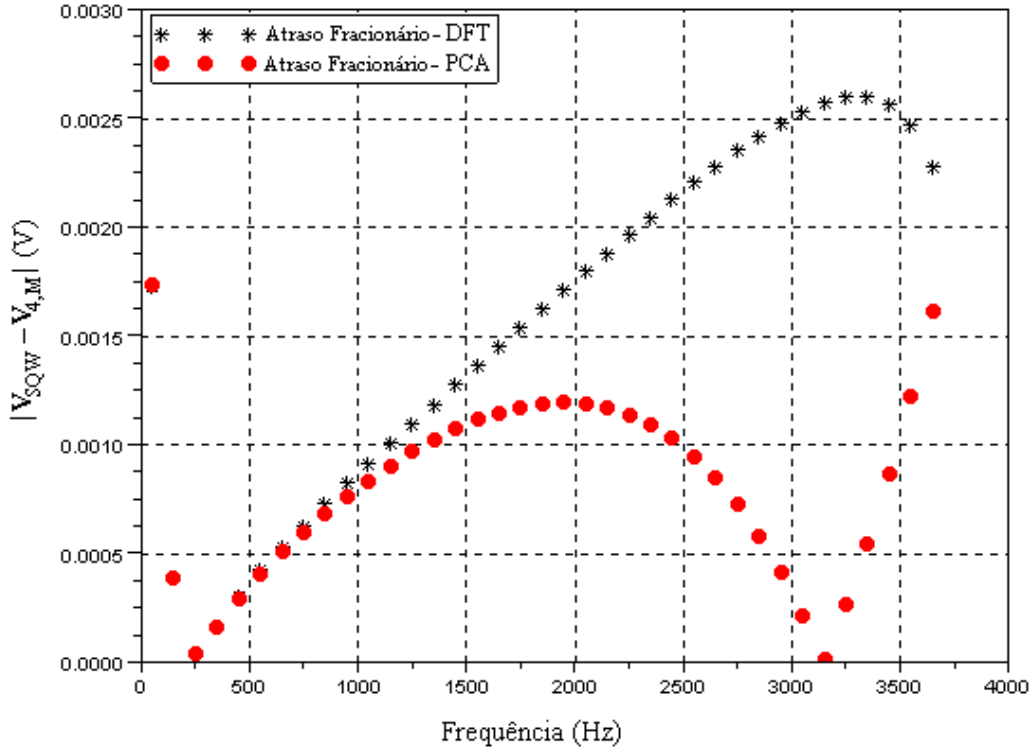


Figura 7.9: Amostragem com atraso fracionário: Onda quadrada - PCA x DFT.

mostra a Figura 7.3. Esta sequência de amostras corresponde à segunda coluna de $\mathbf{X}_{\text{SQW}}$.

No terceiro período de $f_{\text{RSW}}(t)$, após o próximo cruzamento por zero positivo, foi adquirida uma sequência de amostras com um atraso de $d = T_s \approx 133,4 \mu\text{s}$ em relação ao início deste período, correspondente a terceira coluna de $\mathbf{X}_{\text{SQW}}$. Este processo prosseguiu até completarmos as $2N$ colunas de $\mathbf{X}_{\text{SQW}}$. Ou seja, nós precisamos adquirir 300 sequências de amostras para que pudéssemos construir a matriz de dados $\mathbf{X}_{\text{SQW}}$.

A aquisição de múltiplas sequências de amostras também é necessária para a redução de ruídos e de possíveis variações no ganho do gerador, e para o cancelamento do *ripple* [31].

Nós calculamos a matriz de correlação $\mathbf{S}_{\text{SQW}} = \mathbf{X}_{\text{SQW}}^* \mathbf{X}_{\text{SQW}}$. Esta matriz foi então decomposta, obtendo-se assim a matriz de autovalores $\mathbf{\Lambda}_{\text{SQW}}$, cujos elementos da diagonal são $\lambda_{\text{SQW}}(r)$. O vetor $\mathbf{v}_{\text{SQW}}$ representa a magnitude dos componentes harmônicos do sinal medido. Cada elemento $v_{\text{SQW}}(r) = \sqrt{\lambda_{\text{SQW}}(r)}$ de $\mathbf{v}_{\text{SQW}}$ corresponde a uma frequência $r\omega_0$.

A Figura 7.9 mostra o vetor do erro de *aliasing* $\mathbf{e}_{\text{PCA}} = \mathbf{v}_{\text{SQW}} - \mathbf{v}_{4,M}$, onde $\mathbf{v}_{4,M}$ é o vetor de referência. Sendo cada elemento $v_{4,M}(r) = |\frac{4}{\pi r}|$ para r ímpar e $v_{4,M}(r) = 0$ para r par.

Nós também comparamos os resultados obtidos para a amostragem com atraso fracionário combinada com PCA com os resultados apresentados na Subseção 7.2.2, onde foi considerada a transformada de Fourier discreta para a estimação de harmônicos da onda quadrada.

A Figura 7.9 também mostra erro de *aliasing* $\bar{E}_{SQW}(k\omega_0) = |\bar{\mathbf{F}}_{SQW}(k\omega_0)| - |F_{4,M}(k\omega_0)|$, onde $|\bar{\mathbf{F}}_{SQW}(k\omega_0)|$ é a média das magnitudes das transformadas de Fourier discretas das 300 sequências de amostras. Podemos observar que há uma redução significativa do erro, quando comparamos a amostragem com atraso fracionário associada à PCA com a amostragem com atraso fracionário associada à DFT. Como todos os harmônicos pares são iguais a zero para este sinal, a Figura 7.9 só mostra os harmônicos ímpares.

A Tabela 7.5 mostra a norma do erro de *aliasing* para a onda quadrada medida em laboratório, onde $\|E_{PCA}\| = \sum_{r=-M+1}^{M-1} |e_{PCA}(r)|$, sendo que $e_{PCA}(r)$ são os elementos de $\mathbf{e}_{PCA}$ e $\|E_{DFT}\| = \sum_{r=-M+1}^{M-1} |E_{DFT}(k\omega_0 - r\omega_0)|$, se referem respectivamente as abordagens com PCA e DFT. Já $\|E_4\|$ representa erro obtido durante a simulação, descrito na Seção 6.3. Nós consideramos aqui a amostragem com atraso fracionário e com atraso inteiro.

Tabela 7.5: Norma do erro de *aliasing* - Onda quadrada.

	$\ \mathbf{E}_{PCA}\ $	$\ \mathbf{E}_{DFT}\ $	$\ \mathbf{E}_4\ $
Atraso Inteiro	0,31 V	0,31 V	0,56 V
Atraso Fracionário	0,12 V	0,17 V	$6,03 \times 10^{-2}$ V
Redução da Norma do Erro de Aliasing	61%	45%	89%

Aqui também PCA e DFT apresentam resultados diferentes para a amostragem com atraso fracionário. Embora para ambos ocorra uma redução significativa do erro de *aliasing*, a PCA-FD é mais eficiente, reduzindo a norma do erro de *aliasing* em mais de 60% em comparação com a onda quadrada medida com atraso inteiro e em quase 80% em comparação com o valor simulado.

Embora PCA e DFT apresentem os mesmos resultados para a amostragem com atraso inteiro, estes são consideravelmente diferentes dos resultados de simulações, apresentadas nas Seções 5.4.2 e 6.3, conforme mostra a Tabela 7.5. O processo de integração funciona aqui também como um filtro passa-baixas, eliminando parte do erro de *aliasing*.

Podemos observar que se ao invés da amostragem com atraso fracionário, nós estivéssemos amostrado a onda quadrada com um período de amostragem $T_s/2$, nós iríamos perder vários bits de resolução, aumentando o erro de quantização. Além disto, teríamos 2^2 vezes mais dados a serem processados, pois neste caso a matriz $\mathbf{S}_{SQW}$ teria dimensões $2N \times 2N$.

7.4 Conclusão

Neste capítulo apresentamos diversas medições realizadas em laboratório. Os resultados destas medições, considerando os sinais periódicos onda senoidal retificada, onda dente-de-serra aproximada e onda quadrada, confirmam os resultados obtidos nos cálculos e simulações apresentados nos Capítulos 3, 4, 5 e 6.

Capítulo 8

Conclusões

Nos Capítulos 3 e 4 nós estudamos algumas das principais fontes de erro presentes nas medições digitais de alta exatidão: *aliasing*, integração, quantização e *jitter*. Quando comparadas com resultados de simulação e dados medidos em laboratório, as fórmulas encontradas na literatura podem fornecer limites superiores não realistas para estes erros (muito pessimistas). Em alguns casos, várias ordens de grandeza maiores que os valores medidos.

O erro de *aliasing* pode ser bastante significativo, e aumentar a taxa de amostragem nem sempre é uma solução viável, devido às limitações dos conversores analógicos-digitais. O método de integração, usado pela maioria dos ADCs, também introduz erros, os quais podem ser compensados para sinais determinísticos conhecidos. No entanto, é preciso ser cuidadoso quando se aplica um fator de correção, pois este provavelmente foi calculado para o caso em o processo de integração fosse não-causal (sem atraso).

Além disto, o processo de integração funciona como um filtro passa-baixas. Portanto corrigir o erro de integração pode aumentar o erro final. Os erros de *jitter* e quantização foram, para os casos estudados, várias ordens de grandeza menores que os erros de *aliasing* e integração.

Já nos Capítulos 5 e 6 nós aplicamos a técnica de amostragem com atraso fracionário em medições digitais de alta exatidão, mais especificamente para a estimação de harmônicos em sinais periódicos amostrados de forma assíncrona. Nós combinamos esta técnica tanto com a DFT como com a PCA. Para ambos os casos houve uma redução significativa do erro de *aliasing*, principalmente quando usamos PCA.

O uso da técnica de amostragem com atraso fracionário combinada com PCA apresentou resultados bem expressivos, descritos no Capítulo 6. Mostrando que é totalmente viável aplicar um algoritmo simples e muito conhecido, como PCA, para a estimação de harmônicos e ainda assim obter uma redução do erro de *aliasing* de até 90%, mesmo sem o emprego de qualquer tipo de filtro anti-*aliasing*. Os

resultados obtidos foram confirmados tanto por simulações como por medições em laboratório.

Donde se conclui que a técnica de amostragem com atraso fracionário é uma forma simples e muito eficiente de reduzir o erro de *aliasing*, sem que esta redução implique no uso de taxa de amostragens altas, redução do número de bits usados na quantização do sinal ou distorções do sinal medido devido ao uso de filtros anti-*aliasing*. Portanto, a técnica de amostragem com atraso fracionário pode ser empregada para superar possíveis limitações do conversor, que de outra forma poderiam comprometer os resultados da medição.

Todos os capítulos apresentam simulações numéricas para ilustrar os resultados obtidos. Além disto, nós apresentamos no Capítulo 7 uma série de medições realizadas em laboratório, comprovando os resultados apresentados nos capítulos anteriores em condições reais de medição e sua aplicabilidade para medições de alta exatidão.

Com o objetivo de dar continuidade a este trabalho iremos aplicar os resultados aqui obtidos em um sistema de calibração. Estamos iniciando a construção de um sistema automatizado para a medição de impedâncias no Laboratório de Capacitância e Indutância do Inmetro. Neste sistema nós iremos aplicar, para a aquisição e processamento dos dados, as técnicas de análise de erros e de amostragem com atraso fracionário aqui apresentadas.

Além disto, como sugestão para trabalhos futuros, seria importante realizar novas medições de laboratório usando um gerador baseado no efeito Josephson AC. Neste caso, as fontes de erro provenientes do gerador seriam muito reduzidas e poderíamos analisar de forma mais clara os erros oriundos do conversor analógico-digital em medições de laboratório.

8.1 Publicações

Foram submetidos e publicados os seguintes artigos, baseados nos resultados desta tese:

Autores	Título	Ano	Anais/Revista
R. Barros e Vasconcellos M. L. R. de Campos	<i>Error Analysis in High-Accuracy Digital Measurements</i>	2012	<i>Measurement</i>
R. Barros e Vasconcellos M. L. R. de Campos	<i>Sampling Systems with Fractional-Delay Applied to High-Accuracy Measurements.</i>	2012	<i>Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest</i>
R. Barros e Vasconcellos M. L. R. de Campos	<i>High-Accuracy Electrical Measurements Using Fractional Delay and PCA.</i>	2009	<i>XIX IMEKO World Congress Proceedings</i>
R. Barros e Vasconcellos M. L. R. de Campos	<i>Sampling Errors Analysis Applied to High-Accuracy Measurements.</i>	2008	<i>Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest</i>

Referências Bibliográficas

- [1] P. L. Butzer, G. Schmeisser, and R. L. Stens. An introduction to sampling analysis. In F. Marvasti, editor, *Nonuniform Sampling Theory and Practice*, Information Technology: Transmission, Processing, and Storage, chapter 2, pages 17–121. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2001.
- [2] P. L. Butzer and L. Junjiang. Approximation of signals using measured sampled values and error analysis. *Communications in Applied Analysis*, 4(2):245–255, 2000.
- [3] G. A. Kyriazis and M. L. R. de Campos. An algorithm for accurately estimating the harmonic magnitudes and phase shifts of periodic signals with asynchronous sampling. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(2):496–499, April 2005.
- [4] G. A. Kyriazis and M. L. R. de Campos. Bayesian inference of linear sine-fitting parameters from integrating digital voltmeter data. *Measurement Science and Technology*, 15(2):337–346, 2004.
- [5] J. L. Brown, Jr. Estimation of energy aliasing error for nonbandlimited signals. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 15(1):51–56, 2004.
- [6] C.H. Houppis and G.B. Lamont. *Digital control systems*. McGraw Hill, 1992.
- [7] H. Stark and H. Webb. Bounds on errors in reconstructing from undersampled images. *Journal of the Optical Society of America*, 69(7):1042–1043, July 1979.
- [8] A. J. Jerri. The Shannon sampling theorem - its various extensions and applications: a tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 65(11):1565–1596, November 1977.
- [9] J. L. Brown, Jr. A least upper bound for aliasing error. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13(6):754–755, December 1968.
- [10] D. C. Stickler. An upper bound on aliasing error. *Proceedings of the IEEE*, 55(3):418–419, March 1967.

- [11] C. J. Standish. Two remarks on the reconstruction of sampled non-bandlimited functions. *IBM Journal of Research and Development*, 11(6):648–649, 1967.
- [12] A. Papoulis. Error analysis in sampling theory. *Proceedings of the IEEE*, 54(7):947–955, July 1966.
- [13] I. Kollar. Statistical theory of quantization: results and limits. *Periodica Polytechnica Ser. Electrical Engineering*, 28(2-3):173–179, 1984.
- [14] R. Lapuh, P. Clarkson, U. Pogliano, J. K. Hällström, and P. S. Wright. Comparison of asynchronous sampling correction algorithms for frequency estimation of signals of poor power quality. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 60(7):2235–2241, July 2011.
- [15] R. Vasconcellos and M. Campos. Error Analysis in High-Accuracy Digital Measurements. *Measurement*, 45(5):881–888, June 2012.
- [16] R. Vasconcellos and M. Campos. Sampling Errors Analysis Applied to High-Accuracy Measurements. In *Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest*, pages 346–347, Broomfield, CO, USA, June 2008. IEEE.
- [17] V. Välimäki, T. I. Laakso, M. Karjalainen, U. K. Laine. Tools for Fractional Delay Filters Design. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 30–60, January 2005.
- [18] R. Vasconcellos and M. Campos. Sampling Systems with Fractional-Delay Applied to High-Accuracy Measurements. *Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest*, Washington, DC, USA, July 2012. IEEE.
- [19] R. Vasconcellos and M. Campos. High-Accuracy Electrical Measurements Using Fractional Delay and PCA. In *XIX IMEKO World Congress Proceedings*, pages 668–672, Lisbon, Portugal, September 2009.
- [20] I. T. Jolliffe. *Principal Component Analysis*. Springer, second edition, New York, 2002.
- [21] R. M. Gray, Toeplitz and Circulant Matrices: A Review. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2(3):155–239, 2006.
- [22] B. Trinchera, L. Callegaro, and V. D’Elia. Quadrature bridge for R-C comparisons based on polyphase digital synthesis. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 58(1):202–206, January 2009.

- [23] J. Manceau, I. Blanc, A. Bounouh, and R. Delaunay. Application des méthodes d'échantillonnage aux mesures des déphasages pour des fréquences de 20 Hz à 20 kHz. *Revue Française de Métrologie*, 13(1):03–12, April 2008.
- [24] E. Tóth, A. M. Franco, and R. M. Debatin. Power and Energy Reference System, Applying Dual-Channel Sampling. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(1):404–408, February 2005.
- [25] U. Pogliano. Use of integrative analog-to-digital converters for high-precision measurement of electrical power. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 50(5):1315–1318, October 2001.
- [26] G. Mann and H. Moser. From the Calculable AC Resistor to Capacitor Dissipation Factor Determination on the Basis of Time Constants. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 50(2):286–289, April 2001.
- [27] I. Budovsky and G. Hammond. Precision Measurement of Power Harmonics and Flicker. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 54(2):483–487, April 2005.
- [28] L. Palafox, R. Behr, W. G. Kürten Ihlenfeld, F. Müller, E. Mohns, M. Seckelmann, and F. Ahlers. The Josephson-Effect-Based Primary AC Power Standard at the PTB: Progress Report. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 58(4):1049–1053, April 2009.
- [29] W. G. Kürten Ihlenfeld and M. Seckelmann. Simple Algorithm for Sampling Synchronization of ADCs. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 58(4):781–785, April 2009.
- [30] W. G. Kürten Ihlenfeld, E. Mohns, H. Bachmair, G. Ramm, and H. Moser. Evaluation of the Synchronous Generation and Sampling Technique. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 52(2):371–374, April 2003.
- [31] R. L. Swerlein. A 10ppm accurate digital AC measurement algorithm. In *Proceedings of the NCSL Workshop & Symposium*, pages 17–36, Albuquerque, NM, USA, 1991. NCSL International.
- [32] *Guia para a Expressão da Incerteza de Medição*. Terceira Edição Brasileira. Associação Brasileira de Normas Técnicas e Inmetro, Brazil, 2003.
- [33] L. Cohen. *Time-Frequency Analysis: Theory and Applications*. Signal Processing Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1994.

- [34] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, seventh edition, 2007.
- [35] R. G. Bartle. *The Elements of Real Analysis - Chapter 7*. Wiley, New York, 1976.
- [36] K. Kim. Analog-to-digital conversion and harmonic noise due to the integral nonlinearity. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 43(2):151–156, April 1994.
- [37] Agilent Technologies. *Agilent Technologies 3458A Multimeter User's Guide*, fourth edition, 2000.
- [38] R. Iuzzolino, L. Palafox, W. G. Kürten Ihlenfeld, E. Mohns, and C. Brendel. Design and characterization of a sampling system based on Σ - Δ analog-to-digital converters for electrical metrology. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 58(4):786–790, April 2009.
- [39] R. Iuzzolino, W. G. Kürten Ihlenfeld, R. Behr, L. Palafox, and E. Mohns. Investigation on the nonidealities of Σ - Δ analog-to-digital converters with a Josephson waveform synthesizer. In *Proceedings of the VII SEMETRO*, Belo Horizonte, Brazil, September 2007.
- [40] P. Bramley and J.R. Pickering. Better accuracy in temperature calibration and measurement through a new type analog-to-digital converter. *Cal Lab Magazine*, 13(4):21–26, October 2006
- [41] W. G. K. Ihlenfeld, K. Dauke, A. Suchy, and P. Rather. Three-phase primary AC power sampling standard with improved frequency resolution. In *Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest*, pages 486–487, Broomfield, CO, USA, June 2008. IEEE.
- [42] J. Lee, R. Behr, A. Katkov, and L. Palafox. Error contributions in stepwise synthesized Josephson sine waves. In *Conference on Precision Electromagnetic Measurements Digest*, pages 78–79, Broomfield, CO, USA, June 2008. IEEE.
- [43] J. Lee, R. Behr, A. Katkov, and L. Palafox. Modeling and measuring error contributions in stepwise synthesized Josephson sine waves. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 58(4):803–808, April 2009.
- [44] R.M. Gray. Quantization noise spectra. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(6):1220–1244, November 1990.

- [45] B. Widrow, I. Kollar and M.C. Liu. Statistical theory of quantization. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 45(2):353–361, April 1996.
- [46] D. Bellan, A. Brandolini, A. Gandelli. Quantization theory - a deterministic approach. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 48(1):18–28, February 1999.
- [47] S. K. Mitra. *Digital Signal Processing*. Mc Graw Hill, International Editions, 1998.
- [48] Y. C. Jenq. Digital Spectra of Nonuniformly Sampled Signals: A Robust Sampling Time Offset Estimation Algorithm for Ultra High Speed Waveform Digitizers Using Intervaling. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 39(1):71–75, February 1990.
- [49] M. Jridi, G. Monnerie, L. Bossuet and D. Dallet. Two of Time-Interleaved ADC Channel Structure : Analysis and Modeling. In *Proceedings of Instrumentation and Measurement Technical Conference - IMTC*, Sorrento, Italy, April 2006.
- [50] A. Papoulis. Generalized Sampling Expansion. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 24(11):652–654, November 1977.
- [51] R. Courant and F. John. *Introduction to Calculus and Analysis - Vol. I*. Springer, New York, 1999.
- [52] A. V. Oppenheim, A. S. Willisky and S. H. Nawab. *Signals & Systems*. Prentice Hall, second edition, New Jersey, 1997.
- [53] R. P. Landim, Y. Tang, E. Afonso, and V. Ferreira. 10 V Josephson Voltage Standard Comparison Between NIST and INMETRO as a Link to BIPM. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 60(7):2353–2358, July 2011.
- [54] R. P. Landim, Afonso E., Ferreira, V. Padrões de tensão baseados no Efeito Josephson: retrospectiva e perspectivas. *Metrologia & Instrumentação*, 45:30–38, 2007.
- [55] R. P. Landim, S. P. Benz, P. D. Dresselhaus, and C. J. Burroughs, Jr. Systematic-Error Signals in the AC Josephson Voltage Standard: Measurement and Reduction. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57(6):1215–1220, July 2008.