



CONTROLE DE FORMAÇÃO DE ROBÔS NÃO-HOLONÔMICOS COM RESTRICÇÃO DE CURVATURA UTILIZANDO FUNÇÃO POTENCIAL

Josiel Alves Gouvêa

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Fernando Cesar Lizarralde

Rio de Janeiro
Setembro de 2011

CONTROLE DE FORMAÇÃO DE ROBÔS NÃO-HOLONÔMICOS COM
RESTRICÇÃO DE CURVATURA UTILIZANDO FUNÇÃO POTENCIAL

Josiel Alves Gouvêa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Liu Hsu, Dr. D'Etat

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

Prof. Jose Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Prof. Guilherme Augusto Silva Pereira, D.Sc.

Prof. Marco Henrique Terra, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
SETEMBRO DE 2011

Alves Gouvêa, Josiel

Controle de Formação de Robôs Não-Holonômicos com Restrição de Curvatura Utilizando Função Potencial/Josiel Alves Gouvêa. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2011.

XIII, 120 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Fernando Cesar Lizarralde

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2011.

Referências Bibliográficas: p. 111 – 118.

1. Controle de Formação. 2. Robôs Móveis Não-holonômicos. 3. Restrição de Curvatura. I. Lizarralde, Fernando Cesar. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Aos meus pais e às duas
mulheres da minha vida que eu
tanto amo, minha esposa Ingrid
e minha filha Milena, dedico esta
conquista, tão importante para
minha vida.*

Agradecimentos

Embora o esforço pessoal seja imprescindível, é impossível desenvolver uma tese de doutorado sem a contribuição de outras pessoas, seja na troca de informações de caráter técnico, no convívio amigável no ambiente de trabalho ou no decisivo incentivo nos momentos difíceis. Neste contexto, muitas pessoas contribuíram para que esta tese fosse concluída. Gostaria, no entanto, de destacar algumas, cujo o apoio foi mais decisivo. Agradeço a todos do laboratório de controle, entre eles os funcionários Rafael, Wanderley e Roberto Calvet, o professor Ramon e os colegas do curso de doutorado, hoje professores, Jacoud, Eduardo, Tiago e Toni, pela convivência agradável e em especial ao Ademir, pelas profícuas trocas de informações técnicas sobre o problema abordado nesta tese. Agradeço também, de forma especial, ao professor Liu Hsu e ao meu orientador, professor Fernando Lizarralde, pelas sugestões e críticas, sempre relevantes, que contribuíram de forma decisiva, tanto para o término da tese como para o meu crescimento profissional.

Saindo da esfera do laboratório de controle, agradeço à minha esposa Ingrid, pelo apoio e por compreender o pouco tempo que dediquei à nossa filha durante o seu primeiro ano de vida, devido ao esforço que esta tese exigiu. Aos meus pais, por tudo que fizeram por mim ao longo da minha vida e por todo apoio que ainda dão. A eles sempre darei minha maior gratidão por todos os sonhos alcançados. Finalmente, agradeço a Deus, por todas as bênçãos que tenho recebido e por ter colocado as pessoas certas no meu caminho. Sem Ele, o criador de toda a ciência, nada sou e nada poderia fazer.

“Os jovens se cansarão e se fatigarão, e os moços certamente cairão; Mas os que esperam no SENHOR renovarão as forças, subirão com asas como águias; correrão, e não se cansarão; caminharão, e não se fatigarão.” Isaías 40:30-31

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CONTROLE DE FORMAÇÃO DE ROBÔS NÃO-HOLONÔMICOS COM RESTRIÇÃO DE CURVATURA UTILIZANDO FUNÇÃO POTENCIAL

Josiel Alves Gouvêa

Setembro/2011

Orientador: Fernando Cesar Lizarralde

Programa: Engenharia Elétrica

Esta tese aborda o problema de controle de formação de robôs móveis não-holonômicos. Os esquemas de controle são baseados em função potencial artificial saturada e deslocada que permite o projeto de controle de formação descentralizado, incluindo mecanismo para evitar colisões entre os agentes. Inicialmente, é abordado o caso do controle de formação cinemático, onde são propostas leis de controle de formação de robôs unicyclos e robôs com restrição de curvatura da trajetória. Posteriormente, o resultado obtido para o caso cinemático é estendido para o controle de formação de robôs móveis não-holonômicos com dinâmica desconhecida. Para isto, para cada agente, uma estratégia de controle em cascata combina um controlador adaptativo de movimento que leva em conta a dinâmica não-linear incerta do agente e um controle cinemático, levando a um sistema adaptativo globalmente estável. Todas as estratégias de controle propostas não dependem da informação de velocidade dos vizinhos, mas somente das posições destes.

Através de uma análise de estabilidade baseada na teoria de Lyapunov que, sob a condição de um grafo de comunicação sempre conectado, mostram que as estratégias de controle propostas garantem que a formação alcança uma configuração que minimiza a função potencial.

São apresentados resultados de simulação, que ilustram os resultados de estabilidade demonstrados pela análise de Lyapunov.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

FORMATION CONTROL OF NONHOLONOMIC ROBOTS WITH
CURVATURE RESTRICTION USING POTENTIAL FUNCTION

Josiel Alves Gouvêa

September/2011

Advisor: Fernando Cesar Lizarralde

Department: Electrical Engineering

In this thesis, adaptive formation control laws for nonholonomic mobile robots are proposed. The control scheme is based on a saturated artificial potential function which allows a decentralized formation control design including collision avoidance and considering the size of robots. Initially, kinematic formation control laws are proposed for unicycle robots and nonholonomic mobile robots with curvature constraints. Then, for each agent, a cascaded control strategy is used to extend the kinematic formation control to the formation control of uncertain dynamic nonholonomic systems. The cascaded control strategy combines an adaptive motion controller which takes into account its uncertain nonlinear dynamic, and a kinematic control, leading to an overall globally stable adaptive system. The proposed control strategy is a velocity free scheme, where the control law only depends on the neighbors position information.

Simulations are presented to validate the efficiency of the proposed multi-agent control method.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Teoria de grafos	3
1.2 Métodos de controle de formação	5
1.2.1 Abordagem comportamental	5
1.2.2 Abordagem de algoritmo de consenso	6
1.2.3 Abordagem de estrutura virtual	8
1.2.4 Abordagem de líder-seguidor	8
1.2.5 Abordagem de função potencial e líder virtual	9
1.3 Motivação da tese	11
1.3.1 Contribuições da tese	13
1.4 Organização do texto	14
2 Controle cinemático de um grupo de uniciclos	16
2.1 Definições e descrição do problema	17
2.1.1 Objetivos do controle de formação	18
2.2 Controle utilizando função potencial	20
2.3 Controle utilizando função potencial saturada	24
2.4 Resultados de simulação	31
2.4.1 Resultados de simulação: Função potencial não saturada	32
2.4.2 Resultados de simulação: Função potencial saturada e deslocada	38
2.5 Conclusões	41
3 Controle de formação de robôs móveis não-holonômicos com restrição de curvatura	44
3.1 Definições e descrição do problema	46
3.2 Controlador com projeção	50
3.2.1 Resultados de simulação	55
3.3 Controlador com a norma do gradiente	58

3.3.1	Resultados de simulação	63
3.4	Controlador com <i>bias</i>	66
3.4.1	Resultados de simulação	71
3.5	Conclusões	72
4	Controle adaptativo de formação de robôs móveis não-holonômicos dinâmicos	75
4.1	Definições e descrição do problema	76
4.2	Controle de formação de uniciclos	80
4.3	Controle adaptativo de formação de robôs com acionamento diferencial	87
4.4	Resultados de simulação	92
4.4.1	Formação de robôs uniciclos	93
4.4.2	Formação de robôs com acionamento diferencial	94
4.4.3	Conclusões	104
5	Conclusões	107
5.1	Trabalhos futuros	109
5.1.1	Controle de formação de robôs não-holonômicos com restrição de curvatura e dinâmica desconhecida	109
5.1.2	Rastreamento de trajetória utilizando informação de posição dos robôs	109
5.1.3	Análise de robustez a atraso de comunicação e perturbações externas	109
5.1.4	Extensão para a forma da cadeia	110
	Referências Bibliográficas	111
A	Produção Científica	120

Lista de Figuras

1.1	Grafo não direcionado com 4 vértices e 5 arestas.	4
1.2	Árvore com 7 vértices e 6 arestas.	4
2.1	Robô móvel unicyclo.	18
2.2	Exemplo de uma função potencial.	19
2.3	Regiões de vizinhança	25
2.4	Grafo de comunicação referente à Figura 2.3	26
2.5	Função potencial saturada	27
2.6	Robô com sua região de vizinhança e região de colisão	28
2.7	Simulação 1: Orientações iniciais e trajetórias dos robôs	33
2.8	Simulação 1: Variação de $\ \nabla_{r_i} V_i\ $ em função do tempo	34
2.9	Simulação 1: Variação da orientação θ_i em função do tempo	34
2.10	Simulação 1: Orientações dos robôs entre 0s e 1s	35
2.11	simulação 1: Variação de $\ r_{ij}\ $ em função do tempo	35
2.12	Simulação 2: Orientações iniciais e trajetórias dos robôs	36
2.13	Simulação 2: Variação da orientação θ_i em função do tempo	37
2.14	Simulação 2: Variação de $\ r_{ij}\ $ em função do tempo	37
2.15	Grafo de comunicação para as condições iniciais da Tabela 2.1.	39
2.16	Simulção 1: Trajetória dos robôs utilizando uma função potencial saturada.	40
2.17	Simulação 1: Variação de $\ \nabla_{r_i} V_{s_i}\ $ em função do tempo utilizando uma função potencial saturada.	40
2.18	Simulação 1: Gráficos de $\ \nabla_{r_i} V_{s_i}\ $ traçados entre $t = 49s$ e $t = 51s$	41
2.19	Simulação 1: Variação de $\ r_{ij}\ $ em função do tempo utilizando uma função potencial saturada.	42
2.20	Simulação 2: Trajetória dos robôs utilizando uma função potencial saturada.	42
2.21	Simulação 2: Variação de $\ r_{ij}\ $ em função do tempo utilizando uma função potencial saturada.	43
3.1	Curvatura no ponto A	44

3.2	Modelo cinemático de um automóvel	47
3.3	Curvatura desejada	48
3.4	Cálculo de δ_{id}	49
3.5	Configuração de formação com $\gamma_i = \pi/2 \forall i$	54
3.6	Robôs tipo carro: Trajetórias dos robôs utilizando o controlador com projeção.	56
3.7	Robôs tipo carro: Distâncias entre robôs.	57
3.8	Robôs tipo carro: Variação dos ângulos de orientação das rodas dianteiras.	57
3.9	Robôs tipo carro: Distâncias entre robôs (simulação 2).	58
3.10	Robôs tipo carro: Trajetórias dos robôs.	64
3.11	Robôs tipo carro: Distâncias entre robôs.	65
3.12	Robôs tipo carro: Variação dos ângulos de orientação das rodas dianteiras.	65
3.13	Robôs tipo carro: Velocidades dos robôs.	66
3.14	Robôs tipo carro: Produto entre curvatura de trajetória e velocidade dos robôs.	67
3.15	Robôs tipo carro: Trajetórias dos robôs.	71
3.16	Robôs tipo carro: Distâncias entre robôs.	72
3.17	Robôs tipo carro: Variação dos ângulos de orientação das rodas dianteiras.	73
3.18	Robôs tipo carro: Velocidades dos robôs.	73
3.19	Robôs tipo carro: Produto entre curvatura de trajetória e velocidade dos robôs.	74
4.1	Estrutura de controle em cascata	80
4.2	Robôs unicyclos: Trajetórias dos robôs	94
4.3	Robôs unicyclos: Variação de $\ \nabla_{r_i} V_{s_i}\ $ em função do tempo	95
4.4	Robôs unicyclos: Distâncias entre robôs	95
4.5	Robô móvel diferencial.	96
4.6	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Trajetórias dos robôs.	98
4.7	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Variação de $\ \nabla_{r_i} V_{s_i}\ $ em função do tempo.	98
4.8	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Posições relativas entre robôs.	99
4.9	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Trajetórias dos robôs com erro paramétrico.	100

4.10	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Variação de $\ \nabla_{r_i} V_{si}\ $ em função do tempo com erro paramétrico.	101
4.11	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Posições relativas entre robôs com erro paramétrico.	101
4.12	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos incertos: Trajetórias dos robôs com controle adaptativo.	102
4.13	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos incertos: Variação de $\ \nabla_{r_i} V_{si}\ $ em função do tempo com controle adaptativo.	103
4.14	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos incertos: Posições relativas entre robôs com controle adaptativo.	103
4.15	Variação dos parâmetros estimados em função do tempo.	104
4.16	Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos incertos: Trajetórias dos robôs com controle adaptativo e ganho de adaptação $\Gamma = 1 \times 10^{-8} I_{2N}$. . .	105
4.17	Variação dos parâmetros estimados em função do tempo para um ganho de adaptação $\Gamma = 1 \times 10^{-8} I_{2N}$	105

Lista de Tabelas

1.1	Tabela comparativa entre os resultados encontrados na literatura e os obtidos nesta tese. Abreviaturas: Não. hol. → Não-holonômico, Top. var. → Topologia variável, Dim. do Robô. → Dimensão do robô, Rest. de Curv. → Restrição de Curvatura, Din. inc. → Dinâmica incerta, Desc. → Descentralizado	15
2.1	Condição inicial da formação	32
3.1	Simulação 1: Condição inicial da formação (curvatura limitada) . . .	55
3.2	Simulação 2: Condição inicial da formação (curvatura limitada) . . .	56
4.1	Condição inicial da formação	93

Capítulo 1

Introdução

O problema de controle cooperativo tem sido largamente estudado pela comunidade de controle (Arcak 2007, Dong & Farrell 2009, F. & Wang 2008, Leonard & Fiorelli 2001, Mastellone et al. 2011, 2008, Mei et al. 2011, Murray 2007, Pereira et al. 2009, 2008, Ren et al. 2007, Tanner et al. 2007, Widyotriatmo & Hong 2011). A motivação para este estudo vem da observação dos sistemas biológicos, onde diversos indivíduos de uma mesma espécie trabalham de forma coordenada, o que lhes permite desempenhar tarefas mais complexas, aumentar a capacidade de defesa e a possibilidade de sobrevivência da espécie. Seguindo este mesmo princípio, o objetivo do controle cooperativo é realizar tarefas mais complexas através do trabalho coordenado de vários agentes (robôs, satélites, aeronaves e etc). Entre as possíveis aplicações, pode-se citar, entre outras, o controle de orientação de um grupo de satélites para fins civis e militares (Beard & Hadaegh 1999, Burns et al. 2000), controle de um grupo de veículos espaciais (Beard et al. 2001, Scharf et al. 2004), realização de tarefas em ambientes hostis (Li et al. 2002), auto-estradas automatizadas (Wang & Han 1998) e o trabalho cooperativo de robôs em tarefas industriais, tanto na produção como no transporte de mercadorias (veja Murray (2007) para outros exemplos).

No caso específico de tarefas desempenhadas em cooperação por um conjunto de robôs e veículos aéreos ou submarinos, é necessário que cada agente controle sua posição de forma que o conjunto de agentes alcance uma formação específica exigida pela tarefa. Por exemplo, caso a tarefa a ser desempenhada por um conjunto de robôs seja transportar uma carga em cooperação é necessário que os robôs fiquem em uma formação apropriada para esta tarefa. Portanto, o controle de formação tem um papel fundamental em tarefas executadas em cooperação. De uma forma geral, o controle de formação consiste em fazer com que cada componente, de um grupo de agentes, convirja para uma posição de forma que todo o grupo alcance e mantenha uma formação específica obedecendo os seguintes critérios definidos por Reynolds (Reynolds 1987):

- **Separação:** Devem ser evitadas colisões entre os componentes da formação.
- **Alinhamento:** Todos os componentes da formação devem ter a mesma orientação.
- **Coesão:** A formação deve ser mantida mesmo que todos os agentes estejam se movimentando.

O objetivo de Reynolds foi gerar um modelo de animação computacional, simulando a movimentação de uma revoada ou cardume. No modelo de Reynolds, cada agente tem total conhecimento das características geométricas do meio, mas necessita somente interagir com outros componentes da formação pertencentes à sua vizinhança. Esta região de vizinhança é caracterizada por uma distância e um ângulo medidos com relação à posição e direção de movimentação do agente. Todos os componentes da formação fora da região de vizinhança são ignorados. Note que não há uma autoridade central controlando toda a formação. Na verdade, cada agente calcula o seu controle interagindo com seus vizinhos, de forma que toda a formação alcance uma configuração desejada. Neste caso, define-se o controle de formação como descentralizado. O controle descentralizado é preferível ao centralizado, pois oferece maior autonomia aos robôs (não são controlados por um computador central), menor custo computacional e permite um número maior de robôs na formação (Do 2007). Seguindo os critérios de separação, alinhamento e coesão, muitos outros trabalhos foram desenvolvidos (ver por exemplo Daneshfar & Bevrani (2009), Dimarogonas et al. (2006), Gouvea et al. (2011, 2010), Hoffmann & Tomlin (2010), Kang et al. (2011), Oh & Ahn (2010), Pereira et al. (2011, 2009), Ren et al. (2007), Savkin (2004), Shao et al. (2007), Tanner et al. (2007, 2004)), a maioria deles utilizando basicamente os seguintes métodos de controle de formação ou uma combinação destes:

- **Abordagem Comportamental** - Fácil de ser implementada e evita colisões entre agentes. Contudo, a estabilidade da formação é difícil de ser analisada matematicamente.
- **Algoritmo de Consenso** - A análise matemática da estabilidade da formação pode ser feita facilmente. No entanto, não é capaz de evitar colisão.
- **Estrutura Virtual** - Um comportamento coordenado para o grupo pode ser prescrito de forma razoavelmente fácil. Contudo, possui um potencial limitado de aplicação (Beard et al. 2001).
- **Líder-seguidor** - Possui fácil implementação e prova matemática da estabilidade da formação. Mas não evita colisão e possui pouca robustez à perturbações e perda de comunicação entre os robôs.

- **Função Potencial e Líder Virtual** - A formação desejada é alcançada quando uma função potencial é minimizada, a estabilidade da formação pode ser provada matematicamente e evita colisão entre agentes. Contudo, a função potencial pode ter mínimos locais, de forma que a formação desejada pode não ser obtida.

Nas seções seguintes, esses métodos de controle de formação serão resumidos. Contudo, antes disso, para facilitar o entendimento, será apresentado na próxima seção um resumo da teoria de grafos (ver Biggs (1994) para mais detalhes).

1.1 Teoria de grafos

Sabendo que, para a formação ser alcançada, é necessário que cada agente calcule o seu controle com informações (exemplo: velocidades e posição relativa) dos seus vizinhos, então a topologia de troca de informações entre os agentes é descrita por um grafo (Biggs 1994), onde o conjunto de N agentes são representados como N vértices em \mathcal{V} de um grafo $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$. A comunicação entre agentes é descrita pelo conjunto de arestas \mathcal{E} do grafo \mathcal{G} . Um grafo é não direcionado se as arestas não tem orientação. Para um grafo não direcionado, uma aresta $(i, j) = (j, i) \in \mathcal{E}$ se e somente se um canal de comunicação existe entre os agentes i e j . Seja \mathcal{N}_i uma coleção de vizinhos do agente i , isto é, um conjunto de componentes da formação que tem comunicação direta com o agente i . A informação disponível para o agente i no controle são os estados do agente i e agente j para $j \in \mathcal{N}_i$. Um caminho de tamanho r de i para j é uma sequência de $r + 1$ vértices distintos começando com i e terminado com j tal que vértices consecutivos sejam vizinhos. Se há um caminho entre qualquer dois vértices de um grafo \mathcal{G} , então \mathcal{G} é definido como conectado. Um grafo é uma árvore se for conectado e sem ciclos, isto é, qualquer dois vértices são conectados somente por um caminho. Um grafo é completo se cada par de vértices tem uma aresta conectando-os. A Figura 1.1 mostra um grafo não direcionado. Note que este grafo é conectado, mas não é completo pois não há uma aresta entre os vértices 1 e 3. A Figura 1.2 mostra uma árvore. Observe que o grafo também é conectado (toda árvore é um grafo conectado). Contudo, este não seria conectado se não houvesse a aresta entre os vértices 1 e 2.

A matriz de incidência $B_{\mathcal{G}}$ de um grafo não direcionado \mathcal{G} é a matriz cuja as linhas e colunas são indexadas pelas vértices i e arestas j de \mathcal{G} , tal que o elemento b_{ij} de $B_{\mathcal{G}}$ é definido como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } j \text{ liga-se ao vértice } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.1)$$

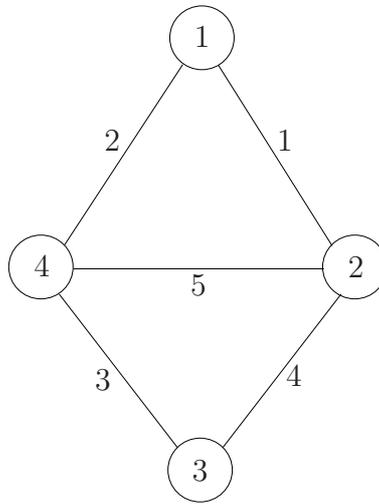


Figura 1.1: Grafo não direcionado com 4 vértices e 5 arestas.

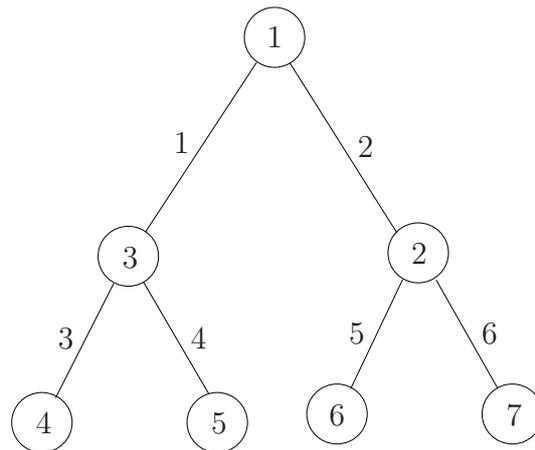


Figura 1.2: Árvore com 7 vértices e 6 arestas.

As Equações (1.2) e (1.3) mostram respectivamente, as matrizes de incidência dos grafos das Figuras 1.1 e 1.2.

$$B_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$B_G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

1.2 Métodos de controle de formação

A seguir, são resumidos os métodos de controle de formação e são citados alguns trabalhos que os utilizam.

1.2.1 Abordagem comportamental

Nesta abordagem, é definido um conjunto de comportamentos desejados para cada agente, onde cada comportamento está associado a uma ação de controle. Então, cada agente define sua ação de controle como a média ponderada das ações de controle dos comportamentos, onde as ponderações variam de acordo com o objetivo a ser alcançado pela formação. Possíveis comportamentos incluem evitar obstáculos e colisões entre os agentes, alcançar um objetivo e manter uma formação.

Há muitas variações da abordagem comportamental, muitas das quais derivadas por diferentes ponderações dos comportamentos. Em (McInnes 1995), a abordagem comportamental é aplicada no problema de manter uma constelação de satélites igualmente distribuídos em forma de anel na órbita da terra. Funções de controle de Lyapunov simples são usadas para manter a distância entre os agentes e evitar colisões. A aplicação da abordagem comportamental no controle de formação de aeronaves é descrita em (Anderson & Robbins 1998), onde são derivadas estratégias de controle para reproduzir o comportamento instintivo de pássaros e peixes. Em (Balch & Arkin 1998), é abordado o problema de controle de formação de robôs móveis, onde as estratégias de controle são derivadas através da média de comportamentos em competição. Devido a esta média, podem ocorrer, ocasionalmente,

comportamentos não previstos. É estudado também o rastreamento de um líder e o controle de rastreamento de um vizinho mais próximo. Em (Yun et al. 1997), a abordagem comportamental é utilizada para um grupo de robôs convergir para uma formação em linha ou círculo. Os resultados obtidos são estendidos em (Chen & Luh 1994) no problema de controle de formação de robôs móveis com o objetivo de transportar objetos. Em (Antonelli et al. 2007) são apresentados dois resultados experimentais do controle de seis robôs móveis *Khepera II*. A abordagem comportamental é utilizada para testar o desempenho e robustez da técnica de controle de formação denominada controle comportamental baseado em espaço nulo (*Null-Space-based Behavioral control (NSB)*). Esta mesma técnica é utilizada em (Marino et al. 2009) para o controle de múltiplos robôs visando o patrulhamento de fronteiras. Além disso, é analisada a robustez do controle NSB a falhas dos agentes e sua capacidade de gerenciar um número grande de robôs.

Uma das vantagens da abordagem comportamental é a facilidade de implementar estratégias de controle quando há uma competição entre múltiplos objetivos em cada agente. Outra vantagem, é que a lei de controle gerada é naturalmente descentralizada. A principal desvantagem da abordagem comportamental é a dificuldade de analisar matematicamente a estabilidade da formação.

1.2.2 Abordagem de algoritmo de consenso

O problema de consenso tem uma longa história na área de computação científica, particularmente na teoria de autômatos e computação distribuída (Lynch 1997). No caso do controle de formação, o problema consiste em um grupo de agentes alcançar um objetivo ou decisão comum utilizando um fluxo distribuído de informações e um protocolo de comunicação. A comunicação entre os componentes da formação é representada através de um grafo e as propriedades da teoria de grafos são utilizadas para provar a estabilidade da formação.

Como descrito em (Fax & Murray 2004, Jadbabaie et al. 2003, Lin et al. 2004, Moreau 2004, Olfati Saber & Murray 2004, Ren & Beard 2005, Ren et al. 2007), para o sistema de primeira ordem

$$\dot{x}_i = u_i$$

onde $u_i \in \mathbb{R}^m$ e $x_i \in \mathbb{R}^m$ é o estado interno de cada agente e representa a informação que deve ser coordenada entre os agentes (x_i pode ser posição, velocidade, orientação e outras variáveis), pode-se resumir a lei de controle de formação baseada em consenso como

$$u_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij}(t) (x_i - x_j)$$

onde $\alpha_{ij}(t)$ é um fator de ponderação positivo e variante no tempo. Portanto, para cada agente i , o sistema em malha fechada é descrito por

$$\dot{x}_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij}(t) (x_i - x_j). \quad (1.4)$$

Sabe-se então, que o sistema que descreve toda a formação em malha fechada pode ser expresso na forma matricial como (Ren et al. 2005)

$$\dot{x} = -[L \otimes I_m]x$$

onde $x^T = [x_1^T, \dots, x_N^T]$, N é o número de agentes, I_m é a matriz identidade de ordem m e L é a matriz Laplaciana descrita por

$$L = B_G B_G^T.$$

Sabe-se então, que se o grafo for conectado, a matriz Laplaciana L possui autovalores positivos e um único autovalor igual a zero, onde o autovetor associado ao autovalor zero possui todos os componentes iguais a 1. Assim, pode-se mostrar que, se o fluxo de informação for bidirecional e o grafo for conectado, os estados de cada agente convergem assintoticamente para uma média dos seus valores iniciais (Murray 2007, Olfati Saber & Murray 2004). Se o grafo não for bidirecional, então a convergência para um valor de consenso médio representado por uma média dos valores iniciais dos estados não é garantida.

Um grafo é considerado balanceado se, para todos os vértices i , o grau de entrada (número de vizinhos j que enviam informação para o vértice i) é igual ao grau de saída (número de vizinhos j que recebem informação do vértice i). No caso balanceado, mesmo se o grafo não for bidirecional, o problema de consenso médio é resolvido se o grafo for conectado e a regra de interação de (Olfati Saber & Murray 2004) for usada.

Em muitos trabalhos que resolvem o problema de consenso, a topologia de troca de informações é considerada constante (grafo não muda). No entanto, em aplicações práticas, o grafo pode mudar dinamicamente. Esta questão é abordada em (Jadbabaie 2003, Jadbabaie et al. 2003, Lin et al. 2004, Ren & Beard 2005, Ren et al. 2005, Savkin 2004). Em (Jadbabaie et al. 2003) é utilizado um protocolo discreto no tempo de forma que o ângulo de direção de movimento de um conjunto de agentes convirja para um valor de referência. Mostra-se que o problema de consenso é resolvido se a união dos grafos representando a topologia de troca de informações é conectada na maior parte do tempo que o sistema evolui. Este resultado é ainda discutido em (Jadbabaie et al. 2003, Savkin 2004). Em (Lin et al. 2004) é utilizado um protocolo linear contínuo no tempo, de forma que o consenso é alcançado se para

cada intervalo de tempo uniformemente limitado há pelo menos um grafo fortemente conectado (grafo direcionado conectado).

Como mencionado anteriormente, uma questão que deve ser levada em consideração no controle de formação é a colisão entre os agentes (critério da separação). O problema de colisão surge principalmente no controle de formação de robôs móveis e veículos subaquáticos e aéreos não tripulados. Embora os trabalhos citados forneçam as condições para a estabilidade da formação utilizando o protocolo de consenso, em nenhum deles há a garantia que a colisão é evitada, sendo portanto, a principal desvantagem do protocolo de consenso.

1.2.3 Abordagem de estrutura virtual

Na abordagem baseada em estrutura virtual, toda a formação é tratada como uma única estrutura. Para isso, o desenvolvimento do controlador é dividido em três passos: primeiro, é definida a dinâmica desejada da estrutura virtual. Segundo, a movimentação da estrutura virtual é correlacionada com o movimento desejado de cada agente. Finalmente, são derivadas leis de controle de rastreamento para cada agente.

Em (Lewis & Tan 1997), a abordagem de estrutura virtual é aplicada no controle de formação de robôs móveis. Uma aplicação no controle de formação no espaço livre é descrita em (Beard & Hadaegh 1998). Em Ghommam et al. (2010) a abordagem de estrutura virtual é combinada com um problema de segmento de trajetória para propor um controle de formação de robôs móveis uniciclos considerando suas dimensões físicas e parâmetros dinâmicos. Um problema de controle de formação de sistemas Euler-Lagrange com rastreamento de trajetória é abordado em (Mastellone et al. 2011), onde a abordagem de estrutura virtual é combinada com uma função potencial gerando uma lei de controle de formação centralizada que evita colisão entre os agentes considerando suas dimensões.

A principal vantagem da abordagem de estrutura virtual é que um comportamento coordenado para o grupo pode ser prescrito de forma razoavelmente fácil. A desvantagem desta abordagem é o potencial limitado de aplicação devido à exigência de atuação da formação como uma estrutura virtual (Beard et al. 2001).

1.2.4 Abordagem de líder-seguidor

Neste método, cada agente (seguidor) considera um agente vizinho (líder) como ponto de referência para o seu movimento. Portanto, há alguns pares de líderes e seguidores, e formações complexas podem ser alcançadas controlando as posições relativas destes pares de agentes. De forma semelhante ao protocolo de consenso, é utilizada a teoria de grafo para provar a convergência do grupo para a formação

desejada. Entretanto, há um líder geral que define a trajetória da formação, que deve ser mantida enquanto segue este líder. Como exemplos de trabalhos que utilizam a abordagem líder-seguidor no controle de formação, pode-se citar (Beard et al. 2001, Desai et al. 2001, Gustavi & Hu 2008, Ogren & Leonard 2003, Shao et al. 2007, Tanner et al. 2002, 2004, Wang 1989) e outros.

Um dos primeiros estudos sobre a estratégia líder-seguidor é (Wang 1989), que discute leis de controle de formação para robôs móveis. Em (Ogren & Leonard 2003) o conceito de estabilidade entrada-para-estado (*input-to-state stability*) (Sontag & Wang 1995) é utilizado para combinar o método líder-seguidor com uma abordagem de janela dinâmica (*window approach*) (Ogren & Leonard 2002), que visa evitar obstáculos. A combinação destes métodos tem por objetivo garantir a segurança e estabilidade da formação, bem como fazê-la convergir para uma posição desejada. O conceito de estabilidade entrada-para-estado também é utilizado em (Tanner et al. 2002, 2004). O objetivo é analisar a estabilidade da formação, determinando como o comportamento do líder geral interfere no erro de interconexão observado na formação, determinar a amplificação deste erro, relacionar a topologia (grafo) de troca de informações com a estabilidade e desempenho e fornecer limites de segurança para diferentes topologias de formação. Em (Beard et al. 2001) é desenvolvida uma arquitetura que unifica as abordagens comportamental, estrutura virtual e líder-seguidor. Uma arquitetura de controle híbrido de três níveis para implementar um controle de formação centralizado e descentralizado é proposta em (Shao et al. 2007). Em (Gustavi & Hu 2008), é estudado o controle de formação de sistemas com informação dos sensores limitada.

A abordagem líder-seguidor tem a vantagem do comportamento do grupo ser determinado somente pelo comportamento do líder geral. Entretanto, apresenta dois problemas principais: é sensível à perturbações e o líder geral é um ponto de falha da formação, ou seja, a formação estará comprometida se perder a comunicação com o líder geral. Além disso, não trata do problema de colisão entre agentes, quando a formação parte de qualquer configuração inicial.

1.2.5 Abordagem de função potencial e líder virtual

Nesta abordagem é definida uma função potencial artificial com o objetivo de gerar forças de interação entre agentes vizinhos, de forma a garantir um espaçamento desejado entre estes. Portanto, a formação obtida depende da função potencial escolhida e do grafo de comunicação. Quando se deseja que a formação se movimente seguindo uma trajetória desejada, é definido um líder virtual que se comporta como um membro da formação. Utilizando as forças de interação entre os membros da formação e entre os membros da formação e o líder virtual, é projetada uma lei de

controle para garantir a convergência de todos os agentes para a formação desejada. Além disso, a formação deve ser mantida enquanto segue a trajetória definida pelo líder virtual.

Um dos primeiros trabalhos que utiliza função potencial é (Leonard & Fiorelli 2001), onde é implementado um controle de formação coordenado e distribuído de veículos autônomos. Um líder virtual é definido para gerar a trajetória desejada para a formação. Entretanto, devido aos possíveis mínimos locais, o controlador distribuído sugerido não garante a convergência do sistema para uma única formação desejada. Este problema é abordado em (Kim et al. 2004, Olfati-Saber & Murray 2002). Em (Tanner et al. 2007) são analisadas as propriedades de estabilidade de um grupo de agentes móveis que alinham seus vetores velocidades e estabilizam as distâncias entre agentes. É utilizada uma função potencial para gerar regras de interação descentralizadas, considerando que cada agente troca informações com seus vizinhos mais próximos através de um grafo que muda arbitrariamente. Em (Howard et al. 2002) é abordado o problema de organizar uma rede de sensores móveis em um meio desconhecido utilizando detecção e computação distribuídas. São construídos campos potenciais de forma que cada agente é repelido pelos obstáculos e pelos outros agentes, forçando a rede a espalhar-se através do meio. Em (Dimarogonas et al. 2006) é abordado o problema de navegação descentralizada de múltiplos agentes independentes não pontuais (*non-point agents*). Em (Pereira et al. 2009) é proposta uma estratégia de controle de formação para agentes móveis de Euler-Lagrange incertos. As incertezas paramétricas e perturbações externas são compensadas por um algoritmo de controle adaptativo denominado controle adaptativo binário (BAC). Este algoritmo combina as propriedades de bom transiente e robustez do controle por modo deslizantes (SMC) (Khalil 2002) com as propriedades desejadas de estado estacionário dos sistemas adaptativos paramétricos. Em (Pereira et al. 2008) é abordado o problema de planejamento de movimento de um conjunto de robôs móveis cooperativos sujeitos a restrições na configuração relativa imposta pela natureza da tarefa que os robôs estão executando. As restrições entre robôs são modeladas por um grafo onde cada aresta está associada com a interação entre dois robôs e descreve uma restrição na configuração relativa.

A abordagem por função potencial permite provar matematicamente a convergência da formação para uma configuração que minimiza a função potencial utilizada. Permite também obter leis de controle que evitam colisões entre os agentes da formação e entre os agentes e os obstáculos do meio. Entretanto, uma desvantagem é a dificuldade de se obter uma função potencial cujo o mínimo global corresponda à formação desejada. Além disso, caso esta função seja obtida e tenha mínimos locais, algoritmos devem ser utilizados para evitá-los, garantindo a convergência da formação para a configuração correspondente ao mínimo global.

1.3 Motivação da tese

A maioria dos trabalhos desenvolvidos pela comunidade de controle abordam o problema de controle de formação de sistemas holonômicos (ver por exemplo Arcak (2007), F. & Wang (2008), Ren et al. (2007), Tanner et al. (2007)). Entretanto, aplicações práticas tais como, controle de veículos em autoestradas automatizadas, transporte de cargas e controle de formação de veículos heterogêneos para fins militares (ver Murray (2007) e Parker (2000) para exemplos destas aplicações), os sistemas envolvidos na formação são não-holonômicos.

Sistemas *não-holonômicos* constituem uma classe com características particulares: apesar de apresentarem movimentos limitados podem atingir qualquer configuração no espaço onde estão definidos desde que sejam *globalmente controláveis* e *alcançáveis* (ver Figueiredo & Jota (2004), Murray et al. (1994) para mais detalhes). Por exemplo, um automóvel é um sistema não-holonômico, pois não pode se movimentar lateralmente. Contudo, mesmo com esta restrição de movimento, pode, com uma manobra adequada, alcançar qualquer posição no plano onde está definido.

As leis de controle para estabilização de sistemas não-holonômicos não são simples de serem projetadas, pois envolvem o emprego de ferramentas matemáticas mais elaboradas para análise e desenvolvimento como, por exemplo, geometria diferencial e teoria de controle não-linear ou linear variante no tempo. De fato, como provado por Brockett (Brockett 1994), sistemas não-holonômicos não podem ser estabilizados para uma configuração final de repouso através de leis de realimentação de estados suaves e invariantes no tempo. Portanto, esta maior dificuldade no projeto de leis de controle para sistemas não-holonômicos, torna o projeto de controle de formação desses sistemas uma tarefa desafiadora.

Em (Consolini et al. 2008, Desai et al. 2001, Shao et al. 2007, Tanner et al. 2004, Yamaguchi & Burdick 1998) é utilizada a abordagem líder-seguidor para o controle de formação de robôs móveis não-holonômicos com modelo cinemático. Já em (Dong & Farrell 2008, 2009, Fang & Antsaklis 2006) o problema é resolvido utilizando o algoritmo de consenso. A abordagem de função potencial é utilizada em (Dimarogonas & Kyriakopoulos 2005, Mastellone et al. 2008). Contudo, pelo fato da prova da estabilidade da formação ser mais fácil desprezando a dinâmica do sistema, nota-se que na maioria dos trabalhos citados é utilizado um controlador de formação cinemático. Na verdade, são encontrados poucos trabalhos na literatura abordando o controle de formação de robôs móveis não-holonômicos, no qual a dinâmica do robôs é considerada no projeto do controlador. Entretanto, quando se deseja um alto desempenho, a dinâmica do sistema não pode ser ignorada. Por exemplo, em tarefas que a formação deve ser alcançada em um período curto de tempo, as dinâmicas dos robôs não podem ser desprezadas, pois devido à restrição

de tempo, os robôs devem se movimentar com velocidades mais altas.

Entre os trabalhos que abordam o controle de formação de sistemas não-holonômicos dinâmicos, pode-se citar (Dimarogonas & Kyriakopoulos 2005), onde as entradas de controle dos modelos utilizados (robôs unicyclicos) são a aceleração translacional e a velocidade rotacional. Portanto a dinâmica é considerada somente no movimento de translação. Além disso, os parâmetros dinâmicos são considerados conhecidos. Uma abordagem de consenso é utilizada em (Dong & Farrell 2009). Neste trabalho, os parâmetros dinâmicos são considerados incertos e a técnica de *backstepping* (Khalil 2002) é utilizada para desenvolver uma lei de controle descentralizada que garante a estabilidade da formação, que é constituída de sistemas não-holonômicos dinâmicos com parte cinemática na forma cadeia . Entretanto, o problema de colisão entre os agentes não é considerado.

Para resolver o problema de colisão, uma abordagem possível é a função potencial. Contudo, o problema de controle de formação, utilizando função potencial, de sistemas não-holonômicos com parâmetros dinâmicos desconhecidos é um problema aberto que é abordado nesta tese (Gouvea et al. 2010). É resolvido o problema de regulação (robôs convergem para a formação), visando solucionar o problema de rastreamento (formação é mantida enquanto segue uma trajetória). Tomando por base o resultado obtido nesta tese, o problema de rastreamento de um conjunto de robôs móveis não-holonômicos com dinâmica desconhecida é resolvido em (Pereira 2011, Pereira et al. 2011), onde a abordagem de função potencial é utilizada em conjunto com uma estratégia de controle adaptativo denominada *Binary Adaptive Control* (B-MRAC) (Hsu & Costa 1990).

Um ponto importante na abordagem por função potencial, é o tipo de função potencial utilizada. Geralmente, é utilizada uma função potencial radialmente limitada, gerando uma topologia de comunicação fixa entre os robôs. O controle desenvolvido é descentralizado no sentido que não há uma autoridade central, com conhecimento de todos os objetivos e posições dos robôs em cada instante de tempo, coordenando a formação para esta alcançar a especificação desejada (convergência para o destino e evitar colisão). Na verdade, cada robô calcula o seu controle com o conhecimento do seu objetivo e dos estados dos vizinhos. Contudo, para garantir que não há colisão entre os robôs o grafo de comunicação deve ser considerado completo, ou seja, há um canal de comunicação entre todos os componentes da formação. Esta consideração aumenta a complexidade da lei de controle sempre que há um aumento do número de robôs na formação. Diz-se então, que a lei de controle não é escalável. Para resolver este problema, nesta tese é utilizada uma função potencial saturada, definida primeiramente em (Tanner et al. 2007) para controle de formação de sistemas holonômicos. A vantagem da função potencial saturada é permitir a definição de uma região de vizinhança para cada robô, dentro da qual

há interação entre agentes. Isto permite, gerando um grafo de comunicação variante no tempo, aumentar o número de componentes da formação, sem aumentar o custo computacional. Prova-se então, que a formação é alcançada se o grafo de comunicação for sempre conectado. A função potencial utilizada nesta tese, além de saturada, também é deslocada, permitindo, além da definição de uma região de vizinhança, a definição de uma região de colisão. Desta forma, a colisão é evitada considerando as dimensões dos robôs (*robôs não pontuais*). Mostra-se então, que a formação é alcançada se o grafo de comunicação for sempre conectado.

Na literatura, a maioria dos trabalhos que abordam o problema de controle de formação de sistemas não-holonômicos, consideram os robôs sem restrição de curvatura das suas trajetórias, onde pode-se definir curvatura de uma trajetória, como o inverso do seu raio. Contudo, há veículos não-holonômicos que não podem realizar curvas muito “fechadas” (raio de curvatura pequeno). Um exemplo típico são os veículos tipo-carro (*car-like*), onde as rodas traseiras são alinhadas com ângulo de orientação fixo e cujo o ângulo de orientação das rodas dianteiras é limitado. Pode-se dizer então que a restrição de curvatura dificulta o controle de formação de sistemas não-holonômicos. Neste contexto, em (Consolini et al. 2008, 2009) é proposta uma abordagem geométrica para a estabilização de uma formação hierárquica de robôs uniciclos com restrição de velocidade e curvatura, onde é usada a estratégia líder-seguidor. Contudo, não é considerado problema de evitar colisões entre os componentes da formação. Além disso, como mencionado anteriormente, uma desvantagem da estratégia líder-seguidor é a forte dependência do líder para a formação ser alcançada e mantida. Esta forte dependência pode ser indesejada, especialmente em condições adversas, onde a comunicação com o líder pode ser interrompida. Uma forma de superar estas desvantagens é utilizar a estratégia de controle de formação por função potencial. Neste contexto, não foram encontrados na literatura trabalhos que abordam o problema de controle de formação de sistemas não-holonômicos com restrição de curvatura, que é um dos pontos abordados nesta tese.

1.3.1 Contribuições da tese

O foco desta tese é o projeto de leis de controle descentralizadas baseadas em função potencial saturada e deslocada para o controle de formação dos seguintes sistemas não-holonômicos:

- (a) Robôs móveis uniciclos com dinâmica desprezível
- (b) Robôs móveis com dinâmica desprezível e restrição de curvatura da trajetória
- (c) Robôs móveis não holonômicos com dinâmica desconhecida.

No caso **(a)**, a lei de controle cinemática projetada garante a convergência da formação para o mínimo da função potencial, utilizando para isto somente informações de posição dos vizinhos. São evitadas colisões considerando as dimensões dos robôs. No caso **(b)**, são propostas três leis de controle com as mesmas características das leis de controle do caso **(a)**. Contudo, a restrição de curvatura da trajetória impõe uma dificuldade a mais. Isto porquê, para mudar sua orientação, o veículo deve estar necessariamente se movimentando. Este fato dificulta a atuação do controle no sentido de orientar cada robô na direção de movimento que leve toda a formação para uma configuração que minimiza a função potencial. É realizada uma comparação de desempenho da formação utilizando as três leis de controle, mostrando as vantagens e desvantagens de cada uma delas.

No caso **(c)**, é proposta, para cada agente, uma estratégias de controle em cascata. Esta estratégia foi escolhida pelo fato de aproveitar o projeto da lei de controle cinemática do caso **(a)**. Isto é feito combinando um controlador de movimento adaptativo, devido aos parâmetros dinâmicos desconhecidos, com o controle cinemático, tornando a formação um sistema adaptativo globalmente estável.

Vale ressaltar que, embora os algoritmos de controle de formação propostos nesta tese visem alcançar uma formação que minimiza uma função potencial e a formação obtida dependa da função potencial utilizada, não é o objetivo desta tese propor funções potenciais para se obter formações específicas. Então, o objetivo do controle de formação desta tese é minimizar globalmente a função potencial, independentemente da configuração obtida e da orientação dos agentes quando a formação é alcançada. No entanto, os algoritmos de controle de formação propostos garantem que uma formação específica é alcançada se uma função potencial adequada for utilizada.

Todas as leis de controle propostas nesta tese possuem as seguintes características:

- Utilizam somente informações de posição dos vizinhos
- Evitam colisões considerando as dimensões dos robôs.

A Tabela 1.1 compara os trabalhos encontrados na literatura com os obtidos nesta tese.

1.4 Organização do texto

No Capítulo 2 é revisado um método de controle de formação de sistemas não-holonômicos cinemáticos tipo unicyclo utilizando função potencial. A lei de controle de formação projetada utiliza uma função potencial radialmente ilimitada, para um grafo de comunicação fixo, ou saturada, para um grafo de comunicação variável

Tabela 1.1: Tabela comparativa entre os resultados encontrados na literatura e os obtidos nesta tese. Abreviaturas: Não. hol. → Não-holonômico, Top. var. → Topologia variável, Dim. do Robô. → Dimensão do robô, Rest. de Curv. → Restrição de Curvatura, Din. inc. → Dinâmica incerta, Desc. → Descentralizado

Autor	Não linear	Não hol.	Top. var.	Dim. do robô	Rest. de curv.	Din. inc.	Desc.
Fax e Murray 2004			X				X
Olfati-Saber 2004			X				X
Ren 2006							X
Augie 2011	X	X		X			X
Tanner 2004	X	X					X
Olfati-Saber 2006			X	X			X
Fang 2006	X	X					X
Leonard 2001				X			X
Dong 2009	X	X				X	X
Pereira, A. 2011	X	X		X		X	X
Consoline 2009	X	X			X		X
Mastellone 2008	X	X		X			X
Mastellone 2011	X			X			
Mei 2011	X					X	X
Esta tese	X	X	X	X	X	X	X

e um maior grau de descentralização. A lei de controle obtida no Capítulo 2 é estendida para o caso do unicyclo e do robô móvel com acionamento diferencial no Capítulo 4. Em ambos os casos a dinâmica é considerada desconhecida. No Capítulo 3 é apresentada a lei de controle de formação para robôs móveis cinemáticos com restrição da curvatura. Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões finais e propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Controle cinemático de um grupo de uniciclos

Neste capítulo é apresentado o problema de controle de formação utilizando função potencial. O foco é dado na formação de um conjunto de robôs móveis não-holonômicos com dinâmica desprezível. Isto porque, em aplicações práticas tais como, controle de veículos em autoestradas automatizadas, transporte de cargas e controle de formação de veículos heterogêneos para fins militares (ver Murray (2007) e Parker (2000)), os sistemas envolvidos na formação são não-holonômicos. Contudo, embora tenha relevância prática, o problema de controle de formação de sistemas não-holonômicos é menos abordado na literatura que o caso holonômico (ver por exemplo Kim et al. (2004), Leonard & Fiorelli (2001), Olfati-Saber & Murray (2002), Tanner et al. (2007)), que é mais fácil de ser resolvido. A dificuldade do controle de formação de sistemas não-holonômicos é devido a sua limitação de direção de movimento. De fato, sistemas não-holonômicos apresentam movimentos limitados, embora possam atingir qualquer posição no espaço onde estão definidos se forem globalmente controláveis e alcançáveis (Murray et al. 1994). Por exemplo, robôs tipo-carro e robôs uniciclos são não-holonômicos, pois não podem se movimentar lateralmente. Contudo, com uma sequência de movimento adequada, podem alcançar qualquer posição no plano onde estão definidos. Neste capítulo, é proposta uma lei de controle de formação cinemática de robôs móveis não-holonômicos com dinâmica desprezível.

Em (Mastellone et al. 2007) é proposta uma lei de controle de formação descentralizada de robôs móveis uniciclo. É analisado o problema de rastreamento de trajetória. Mostra-se que o erro de rastreamento é reduzido conforme os ganhos do controlador são aumentados. A lei de controle proposta para cada robô da formação evita colisão entre robôs e utiliza a informação de posição dos robôs vizinhos, o erro de orientação do robô com relação a uma orientação desejada e uma estimação da derivada desta orientação desejada. Se fosse utilizado o valor exato (não estimado)

da derivada da orientação desejada, seria necessário, além das posições, conhecer as velocidades dos vizinhos para calcular o controle. Neste capítulo, a lei de controle proposta também necessita das posições do vizinhos e do erro de orientação. Contudo, não é necessário a estimação da derivada da orientação desejada. Além disso, a lei de controle de formação proposta neste capítulo, junto com a lei de controle dinâmica do Capítulo 4, serviu como base para (Pereira 2011, Pereira et al. 2011) resolver o problema de rastreamento, para uma formação de robôs não-holonômicos com dinâmica incerta seguir uma trajetória.

Inicialmente, a lei de controle proposta neste capítulo não considera as dimensões do robôs, portanto os robôs são considerados pontuais. A consequência, é que não se pode garantir que colisões entre robôs são evitadas se suas dimensões forem consideradas. Contudo, considerar a dimensão dos robôs é mais realista do ponto de vista prático, pois na prática os robôs não são pontuais. Portanto, posteriormente, na Seção 2.3, as dimensões dos robôs são consideradas, utilizando para isto uma função potencial saturada e deslocada, que evita colisões entre robôs considerando suas dimensões (robôs não pontuais). Além disso, permite aumentar o número de componentes da formação com um menor custo computacional (maior escalabilidade). Na Seção 2.4 são apresentados os resultados de simulação e na Seção 2.5 as conclusões finais do capítulo.

2.1 Definições e descrição do problema

Considere o problema de controle de formação de um conjunto de N robôs móveis não-holonômicos cinemáticos tipo unicycle. Para $i = 1, \dots, N$, os modelos dos robôs desconsiderando a dinâmica são descritos por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \omega_i \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde

- $x_i \in \mathbb{R}$ e $y_i \in \mathbb{R}$ são as coordenadas cartesianas da posição do robô,
- $\theta_i \in \mathbb{R}$ é a orientação do robô com respeito a um dado sistema de coordenadas inercial,
- $u_i \in \mathbb{R}$ e $\omega_i \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, as velocidades linear e angular do robô.

A Figura 2.1 mostra um robô móvel unicycle.

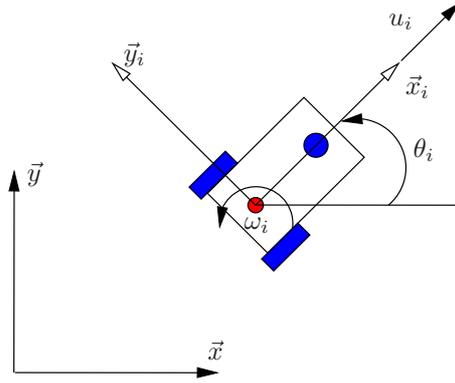


Figura 2.1: Robô móvel unicycle.

2.1.1 Objetivos do controle de formação

Dado um grafo de comunicação, deseja-se que:

1. O conjunto de robôs convirja para uma formação desejada definida pelo mínimo de uma função potencial, descrita em função das posições relativa entre os robôs.
2. Seja evitada colisões entre os robôs.
3. O controle seja implementado de forma descentralizada.

Para alcançar estes objetivos, a cada robô i é associada um função potencial artificial

$$V_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq i} V_{ij}(\|r_{ij}\|), \quad (2.2)$$

onde $r_{ij} = r_i - r_j$ é a posição relativa entre os robôs i e j , $r_i^T = [x_i \ y_i]$ é a posição cartesiana do robô i e $V_{ij}(\|r_{ij}\|) > 0$ é uma função potencial entre os robôs i e j definida como:

Definição 1 A função potencial V_{ij} é uma função radialmente ilimitada, não negativa e diferenciável da posição relativa $\|r_{ij}\|$ entre os robôs i e j , tal que

1. $V_{ij}(\|r_{ij}\|) \rightarrow \infty$ quando $\|r_{ij}\| \rightarrow 0$.
2. V_{ij} alcança seu único mínimo quando os agentes i e j estão localizados na posição relativa desejada r_d .

A lei de controle de cada robô deve então ser projetada para a formação convergir para uma configuração desejada definida pelo mínimo da função potencial do sistema

$$V = \sum_{i=1}^N V_i. \quad (2.3)$$

Para evitar colisões, para cada robô i são criados campos potenciais entre o robô i e seus vizinhos j . Estes campos são definidos como

$$f_{ij} = -\nabla_{r_i} V_{ij}(\|r_{ij}\|) \quad (2.4)$$

onde

$$\nabla_{r_i} V_{ij} = [\partial V_{ij}/\partial x_i \quad \partial V_{ij}/\partial y_i] \quad (2.5)$$

é o vetor gradiente da função potencial $V_{ij}(\|r_{ij}\|)$. Observe que os campos potenciais se comportam como:

- Campos potenciais de atração, pois atuam no sentido de aproximar os robôs i e j se $\|r_{ij}\| > r_d$
- Campos potenciais de repulsão, pois atuam no sentido de afastar os robôs i e j se $\|r_{ij}\| < r_d$

onde $V_{ij}(r_d)$ é o único mínimo de $V_{ij}(\|r_{ij}\|)$. Note que, quando V_{ij} estiver no mínimo, o campo entre os robôs i e j será nulo. A Figura 2.2 mostra um exemplo de função potencial radialmente ilimitada.

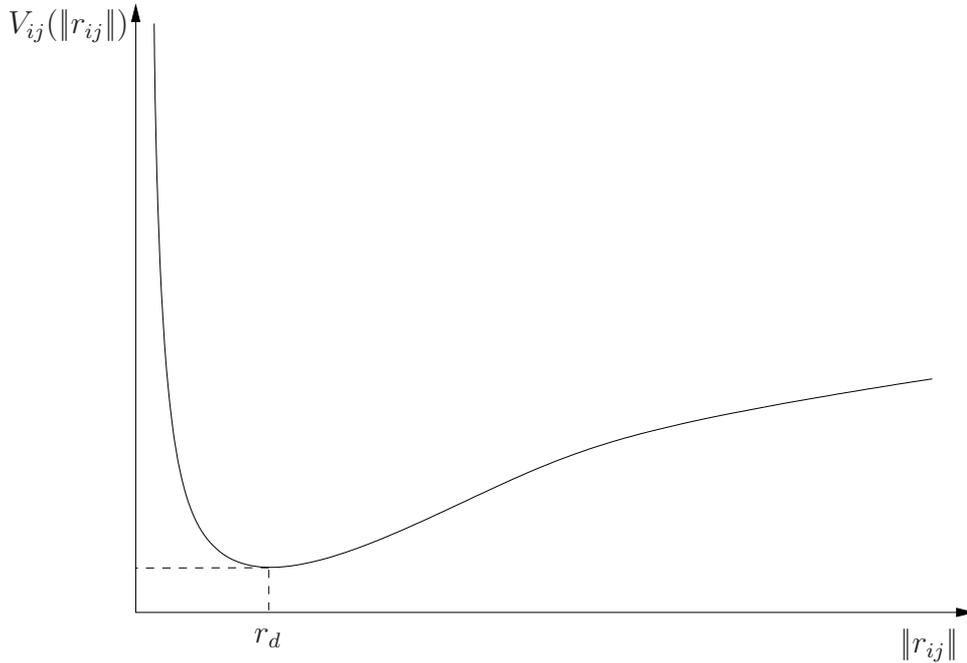


Figura 2.2: Exemplo de uma função potencial.

Como o mínimo da função potencial (2.3) define a formação desejada, esta será alcançada se cada robô se movimentar na direção do vetor gradiente descendente de V_i :

$$f_i = -\nabla_{r_i} V_i = [-\partial V_i/\partial x_i \quad -\partial V_i/\partial y_i]. \quad (2.6)$$

Note, da função potencial artificial (2.2) e do campo potencial entre robôs (2.4), que

$$f_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq i} -\nabla_{r_i} V_{ij}(\|r_{ij}\|) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq i} f_{ij}. \quad (2.7)$$

Portanto, o vetor f_i também pode ser interpretado como o somatório dos campos potenciais (campo potencial resultante) entre o robô i e seus vizinhos j . Assim, cada robô i deve ter leis de controle u_i e w_i que garantam a movimentação do robô na mesma direção e sentido de seu campo potencial resultante f_i .

Um ponto importante que dificulta o projeto das leis de controle é a restrição não-holonômica do modelo (2.1). De fato, caso a direção do campo potencial resultante esteja no espaço de direções de velocidade não permitidas pela restrição não-holonômica, o robô não se movimentará. Este problema é abordado na Seção seguinte, onde é apresentada uma lei de controle que garante a convergência da formação para uma configuração que minimiza a função potencial do sistema (2.3).

2.2 Controle utilizando função potencial

As leis de controle u_i e w_i são projetadas considerando as restrições não holonômicas de (2.1) de forma a garantir a movimentação do robô na direção do vetor gradiente descendente de V_i . A ideia é considerar o sinal de controle u_i como a projeção de f_i sobre o vetor

$$S_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

que define o espaço de direções permitidas pela restrição não-holonômica. Portanto,

$$u_i = k_v f_i^T S_i = k_v \left(-\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \cos(\theta_i) - \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \sin(\theta_i) \right). \quad (2.9)$$

onde $k_v > 0$.

Para garantir que o robô se movimente na direção do vetor gradiente descendente de V_i , a lei de controle w_i é projetada para que a orientação do robô rastreie a direção de f_i . Portanto,

$$w_i = -k(\theta_i - \theta_{id}) \quad (2.10)$$

onde $k > 0$ e

$$\theta_{id} = \arctan \left(-\frac{\partial V_i}{\partial y_i}, -\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right) \quad (2.11)$$

é a orientação desejada do robô definida pela direção do campo potencial resultante f_i .

O próximo Teorema mostra que, se o grafo de comunicação for completo e a

condição inicial dos estados da formação $z(0)$ pertencer a um conjunto

$$\mathcal{D} = \{z \mid W_1(z) \leq W_0\} \quad (2.12)$$

onde $W_0 > 0$,

$$2W_1 = \sum_{i=1}^N [V_i + \alpha (\theta_i - \theta_{id})^2], \quad (2.13)$$

$\alpha > 0$ e

$$z^T = [(\theta_1 - \theta_{1d}) \quad \cdots \quad (\theta_N - \theta_{Nd}) \quad r_1^T \quad \cdots \quad r_N^T], \quad (2.14)$$

então as leis de controle (2.9) e (2.10) levam o conjunto de N robôs móveis não-holonômicos com modelo cinemático (2.1), para a formação definida pelo mínimo de (2.3) e evitam colisão entre robôs se suas dimensões forem desconsideradas (robôs pontuais).

Teorema 1 *Considere um grupo de robôs móveis não-holonômicos pontuais com modelo cinemático (2.1) trocando informações através de um grafo não direcionado e completo. Se $z(0) \in \mathcal{D}$, então as leis de controle (2.9) e (2.10) evitam colisão e garantem a convergência de todos os robôs para uma formação que minimiza a função potencial do sistema V .*

Prova: Considere (2.13) como uma função candidata de Lyapunov. Então, a derivada de (2.13) ao longo da trajetória do sistema é

$$2\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \dot{y}_i + \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial V_i}{\partial y_j} \dot{y}_j + 2\alpha(\theta_i - \theta_{id})(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{id}) \right]$$

onde, como o grafo é considerado completo, \mathcal{N}_i possui $N - 1$ robôs. Utilizando (2.5), \dot{W}_1 pode ser descrito por

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\nabla_{r_i} V_i \dot{r}_i + \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{N}_i} \nabla_{r_j} V_i \dot{r}_j \right) + \alpha(\theta_i - \theta_{id})(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{id}) \right]. \quad (2.15)$$

Como o grafo é não direcionado, V_i é simétrico com respeito a r_{ij} e $r_{ij} = -r_{ji}$.

Então, pode-se concluir que

$$\frac{\partial V_j}{\partial r_i} = \frac{\partial V_{ji}}{\partial r_i} = \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_i}. \quad (2.16)$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V_j}{\partial y_i} \dot{y}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\nabla_{r_i} V_i \dot{r}_i + \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{N}_i} \nabla_{r_j} V_i \dot{r}_j \right) = \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} V_i \dot{r}_i. \quad (2.17)$$

Assim, substituindo (2.17) em (2.15), segue que

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left[\nabla_{r_i} V_i \dot{r}_i + \alpha (\theta_i - \theta_{id}) (\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{id}) \right]. \quad (2.18)$$

Por outro lado, utilizando (2.9) e (2.10) em (2.1), conclui-se que

$$\dot{r}_i = -k_v \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} \nabla_{r_i} V_i \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} = -k_v S_i \nabla_{r_i} V_i S_i \quad (2.19)$$

e

$$\dot{\theta}_i = -k(\theta_i - \theta_{id}). \quad (2.20)$$

Então, substituindo (2.19) e (2.20) em (2.18), obtém-se

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left\{ -k_v (\nabla_{r_i} V_i S_i)^2 - \alpha k (\theta_i - \theta_{id})^2 - \alpha (\theta_i - \theta_{id}) \dot{\theta}_{id} \right\}.$$

Contudo, $\dot{\theta}_{id}$ é descrito por

$$\dot{\theta}_{id} = L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} u_j \quad (2.21)$$

$$L_{1i} = \frac{1}{\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_i}{\partial y_i}\right)^2}, \quad (2.22)$$

$$L_{2ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial y_i \partial y_j} \sin(\theta_j) + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y_i \partial x_j} \cos(\theta_j) \right) - \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i \partial x_j} \cos(\theta_j) + \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i \partial y_j} \sin(\theta_j) \right) \quad (2.23)$$

Como u_i é dado pela lei de controle (2.9),

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left\{ -k_v (\nabla_{r_i} V_i S_i)^2 - \alpha k (\theta_i - \theta_{id})^2 + \alpha k_v (\theta_i - \theta_{id}) L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} \nabla_{r_i} V_i S_i \right\}$$

Definindo os erros

$$e_\theta^T = [(\theta_1 - \theta_{1d}) \cdots (\theta_N - \theta_{Nd})] \quad (2.24)$$

$$e_{\Delta r}^T = [\nabla_{r_1} V_1 S_1 \cdots \nabla_{r_N} V_N S_N], \quad (2.25)$$

\dot{W}_1 pode ser expresso por

$$\dot{W}_1 = - \left(\alpha k e_\theta^T e_\theta - \alpha k_v e_\theta^T L_a e_{\Delta r} + k_v e_{\Delta r}^T e_{\Delta r} \right)$$

onde

$$L_a = \begin{bmatrix} L_{11}L_{211} & L_{11}L_{212} & \cdots & L_{11}L_{21N} \\ L_{12}L_{221} & L_{12}L_{222} & \cdots & L_{12}L_{22N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{1N}L_{2N1} & L_{1N}L_{2N2} & \cdots & L_{1N}L_{2NN} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Então,

$$\dot{W}_1 = -e^T \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha k I_{N \times N} & -\frac{1}{2} \alpha k_v L_a \\ -\frac{1}{2} \alpha k_v L_a^T & k_v I_{N \times N} \end{bmatrix}}^{C_1} e$$

onde $e^T = [e_\theta^T \ e_{\Delta r}^T]$. Contudo, para $\dot{W}_1 \leq 0$, o complemento de Schur de C_1 deve satisfazer

$$\overbrace{\left(k I_{N \times N} - \frac{1}{4} \alpha k_v L_a L_a^T \right)}^{C_2} > 0,$$

(i.e., a matriz C_2 deve ser positiva definida) que é válido se

$$k > \frac{1}{4} \alpha k_v \sigma_M(L_a)$$

onde $\sigma_M(L_a)$ é o maior valor singular de L_a . No entanto, assumindo que $z \in \mathcal{D}$, existe um limitante superior finito \bar{L}_a tal que $\sigma_M(L_a) < \bar{L}_a$. Logo, $\dot{W}_1 \leq 0$ se

$$k > \frac{1}{4} \alpha k_v \bar{L}_a. \quad (2.27)$$

Conclui-se então que, para qualquer valor dos parâmetros de controle $k, k_v > 0$, sempre há $\alpha > 0$ tal que (2.27) é satisfeita. Portanto, $\dot{W}_1 \leq 0$, o conjunto \mathcal{D} é invariante (tal que a consideração de limitação uniforme de $\sigma_M(L_a)$ é válida) e pelo teorema de Barbalat pode-se concluir que $\|e\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, $\|e_{\Delta r}\|, \|e_\theta\| \rightarrow 0$. Logo, $\theta_i \rightarrow \theta_{id}$, $\nabla_{r_i} V_i S_i \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty \ \forall i$. Assim, como $S_i \rightarrow S_{id}$, onde

$$S_{id}^T = [\cos(\theta_{id}) \quad \sin(\theta_{id})]$$

e

$$\theta_{id} = \arctan \left(-\frac{\partial V_i}{\partial y_i}, -\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right),$$

pode-se concluir então, que $\nabla_{r_i} V_i$ e S_i estarão defasados de 180° quando $t \rightarrow \infty$ (isto porque $\nabla_{r_i} V_i$ e S_{id} estão sempre defasados de 180°). Assim, como $\nabla_{r_i} V_i S_i \rightarrow 0$ e $\|S_i\| = 1$, então $\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \rightarrow 0$, $\frac{\partial V_i}{\partial y_i} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e o sistema converge para uma formação que minimiza (2.3). Além disso, se $z(0) \in \mathcal{D}$, como $\dot{W}_1 \leq 0$, o conjunto \mathcal{D} é invariante. Portanto, como o grafo é completo, todas as funções potenciais devem ser limitadas. Assim, $V_{ij}(\|r_{ij}\|) < \infty \ \forall i, j$ e $\forall t$ e não haverá colisões entre robôs. ■

Observação 1 *Uma vez que no Teorema 1 o grafo é considerado completo, \mathcal{N}_i possui $N - 1$ robôs $\forall i$. No entanto, a demonstração do Teorema 1 também se aplica para o caso do grafo de comunicação não direcionado, conectado e não completo (número de robôs em \mathcal{N}_i menor que $N - 1$). Neste caso, pode-se obter diferentes formações escolhendo-se diferentes topologias de comunicação. Contudo, como não há comunicação entre todos os componentes da formação, pode haver colisões entre robôs que não se comunicam (não vizinhos).*

Observação 2 *Note que, como $\nabla_{r_i} V_i$ é calculado somente com informação de posição dos robôs, as leis de controle (2.9) e (2.10) garantem que cada robô necessita somente de informações de posição dos seus vizinhos para calcular o seu controle.*

Como \mathcal{N}_i deve possuir $N - 1$ robôs para que sejam evitadas colisões entre robôs, conclui-se das leis de controle (2.9) e (2.2), que serão obtidas leis de controle mais complexas se o número de componentes da formação for aumentado. Na próxima Seção, é apresentada uma solução para este problema, definindo, através de uma função potencial saturada, uma região de vizinhança constante G_i para cada agente i . Portanto, \mathcal{N}_i é constituído somente pelos robôs pertencentes a G_i . Neste caso, o grafo de comunicação obtido é variável e não completo e a complexidade da lei de controle não depende do número total de componentes da formação.

2.3 Controle utilizando função potencial saturada

No projeto de controle de formação, duas características essenciais da lei de controle é a descentralização e a escalabilidade. Uma lei de controle de formação é descentralizada, quando não há uma autoridade central controlando todos os componentes da formação. Por exemplo, na lei de controle proposta na Seção anterior, cada robô calcula o seu controle utilizando a informação de posição dos seus vizinhos, que podem ser todos os outros robôs, se o grafo de comunicação for completo. Isso permite dividir o custo computacional do cálculo do controle entre todos os componentes da formação, pois o controle da formação seria calculado paralelamente por todos os robôs e não por um único computador central. Portanto, a eficiência do esquema de controle descentralizado aumenta com relação ao centralizado conforme se aumenta também o número de robôs da formação. Pode-se dizer então que o controle descentralizado tem maior escalabilidade se comparado ao centralizado.

Com relação à escalabilidade, diz-se que uma lei de controle de formação é escalável, se esta permite o aumento de componentes da formação. No caso das leis de controle apresentadas na Seção anterior, embora sejam descentralizadas, para garantir que não há colisão entre robôs, deve-se considerar o grafo de comunicação completo. Este fato gera um limite no número de robôs da formação. Isto porque,

conforme se aumenta o número de componentes da formação, além da elevação do custo computacional em cada robô, há também uma limitação na transferência de informações entre estes (banda limitada, por exemplo), dado que cada robô calcula o seu controle utilizando os estados de todos os outros robôs da formação (\mathcal{N}_i possui $N - 1$ robôs). Note que a dificuldade está em se aumentar o número de robôs garantindo que não há colisão. Observe que, se o problema de colisão fosse desconsiderado, não haveria limitação no número de robôs da formação, contanto que o grafo fosse conectado (ver observação 1). Pode-se concluir então que as leis de controle propostas na Seção anterior são descentralizadas mas tem a escalabilidade limitada se o problema de colisão for considerado.

Para resolver o problema de se conjugar a escalabilidade com a colisão, nesta Seção é proposta uma estratégia de controle de formação baseada em uma função potencial saturada. Esta função potencial permite definir, para cada robô i , uma região de vizinhança G_i . Então, somente os robôs que estão dentro de G_i pertencem a \mathcal{N}_i . Assim, cada robô calcula o seu controle considerando somente os estados dos robôs que estão dentro de G_i . Note que, como a região de vizinhança é limitada, para cada robô i , o número de robôs fora de G_i aumenta juntamente com o número de robôs da formação. Com esta estratégia, é resolvido o problema de limitação da escalabilidade. A Figura 2.3 mostra 6 robôs em formação com as suas respectivas regiões de vizinhança, onde, para cada robô i , G_i é definido por um círculo de raio R_s . Observe que o grafo de comunicação não é completo. Por exemplo, o robô 1

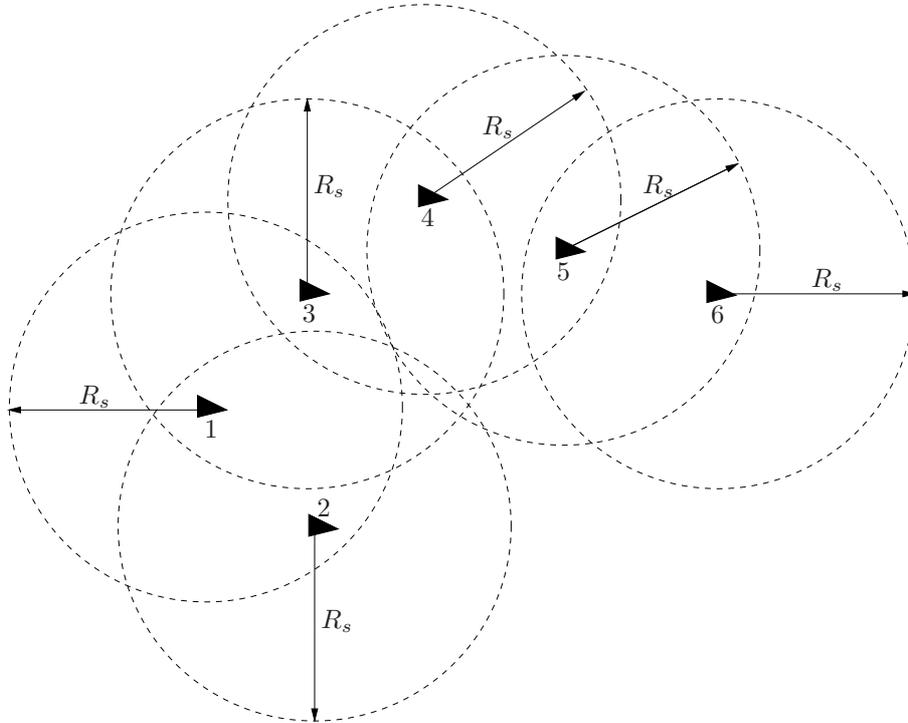


Figura 2.3: Regiões de vizinhança

calcula o seu controle utilizando somente seus estados e os estados dos seus vizinhos, os robôs 2 e 3. Contudo, o grafo é conectado. Note também que, se R_s for reduzido aleatoriamente, o grafo de comunicação pode não ser mais conectado. A Figura 2.4 mostra o grafo de comunicação associado à Figura 2.3. Observe que não se

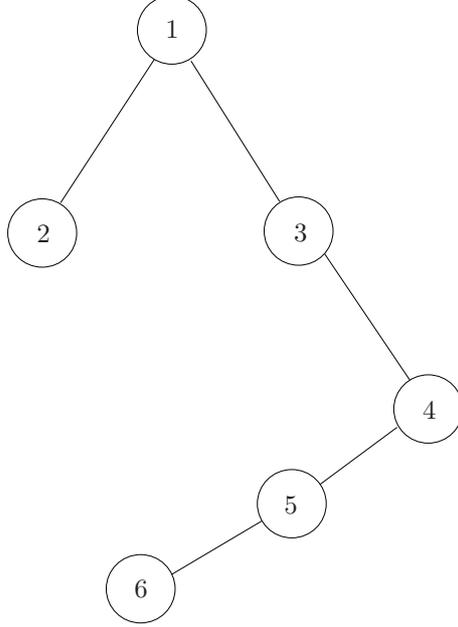


Figura 2.4: Grafo de comunicação referente à Figura 2.3

pode garantir um grafo de comunicação fixo, uma vez que, durante a evolução da formação, alguns robôs podem mudar de regiões de vizinhança.

Uma vez explicadas as regiões de vizinhança, o próximo passo é desenvolver uma estratégia para defini-las durante o cálculo do controle. Para isto, é definida uma função potencial artificial saturada e deslocada da seguinte forma (Tanner et al. 2007):

Definição 2 *A função potencial saturada e deslocada V_{sij} é uma função não negativa da distância $\|r_{ij}\|$ entre os agentes i e j , tal que*

1. $V_{sij}(\|r_{ij}\|) \rightarrow \infty$ quando $\|r_{ij}\| \rightarrow c_i$, onde $c_i > 0$.
2. $V_{sij}(\|r_{ij}\|)$ é diferenciável para $\|r_{ij}\| > c_i$.
3. V_{sij} alcança seu único mínimo quando $\|r_{ij}\| = r_{di}$, onde $r_{di} > c_i$.
4. $\nabla_{ri} V_{sij}(\|r_{ij}\|) = 0$ se $\|r_{ij}\| \geq R_s$, onde $R_s > r_{di}$.

A Figura 2.5 mostra um exemplo de um função potencial saturada e deslocada. Observe que $V_{sij} \rightarrow \infty$ quanto $\|r_{ij}\| \rightarrow c_i$, e não quando $\|r_{ij}\| \rightarrow 0$ (como na definição 1).

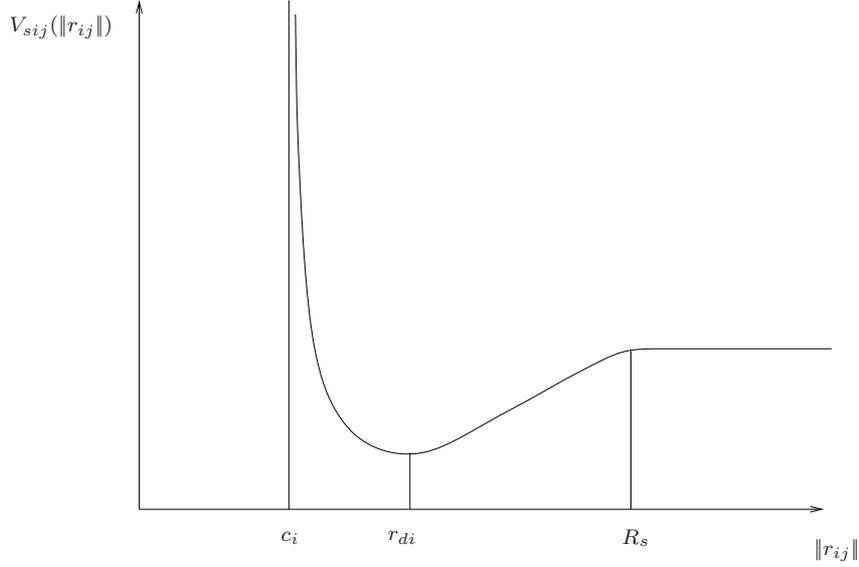


Figura 2.5: Função potencial saturada

A variável c_i foi introduzida para evitar colisão considerando as dimensões dos robôs. Então, em torno de cada robô i é definida uma região de colisão g_i como um círculo de diâmetro c_i . Portanto, considera-se a dimensão do círculo como a dimensão do robô. Note que o campo potencial entre robôs $f_{sij} \rightarrow \infty$ quando $\|r_{ij}\| \rightarrow c_i$ (o campo é de repulsão neste caso), onde

$$f_{sij} = -\nabla_{r_i} V_{sij}(\|r_{ij}\|). \quad (2.28)$$

A Figura 2.6 mostra um robô com as suas regiões de colisão e vizinhança.

Observe que $f_{sij} = 0$ para $\|r_{ij}\| > R_s$. Portanto, como esperado, o campo potencial robôs não vizinhos é nulo.

Uma vez definida a função potencial saturada, esta é utilizada nas leis de controle (2.9) e (2.10), definidas na Seção 2.2. Para isto, a função potencial V_{si} é definida em termos de V_{sij} como

$$V_{si} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq i} V_{sij}(\|r_{ij}\|). \quad (2.29)$$

Então, o próximo Teorema mostra que as leis de controle

$$u_i = k_v f_{si}^T S_i \quad (2.30)$$

$$w_i = -k(\theta_i - \theta_{id}) \quad (2.31)$$

onde

$$f_{si} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq i} -\nabla_{r_i} V_{sij}(\|r_{ij}\|) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i, j \neq i} f_{sij}. \quad (2.32)$$

garantem que a formação converge para uma configuração que minimiza a função

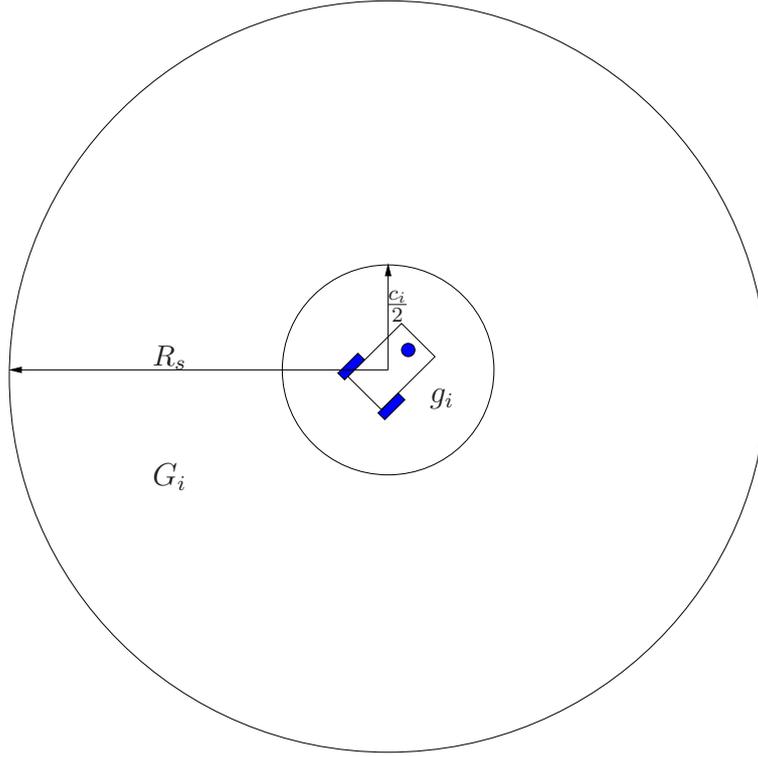


Figura 2.6: Robô com sua região de vizinhança e região de colisão

potencial do sistema

$$V_s = \sum_{i=1}^N V_{si}. \quad (2.33)$$

Teorema 2 *Considere um grupo de robôs móveis não-holonômicos com modelo cinemático (2.1) trocando informações através de um grafo não direcionado. Se*

1. *cada robô i for considerado circular com diâmetro c_i*
2. *a condição inicial dos estados da formação $z(0)$ pertencer ao conjunto \mathcal{D} onde*

$$\mathcal{D} = \{z \mid W_1(z) \leq W_0\},$$

$W_0 > 0$,

$$2W_1 = \sum_{i=1}^N [V_{si} + \alpha (\theta_i - \theta_{id})^2], \quad (2.34)$$

a função potencial V_{si} é dada por (2.29), $\alpha > 0$ e

$$z^T = [(\theta_1 - \theta_{1d}) \quad \cdots \quad (\theta_N - \theta_{Nd}) \quad r_1^T \quad \cdots \quad r_N^T],$$

3. *os sinais de controle u_i e w_i forem dados respectivamente por (2.30) e (2.31),*
4. *o grafo de comunicação for sempre conectado,*

então colisão é evitada e a formação alcança uma configuração que minimiza V .

Prova: Considere (2.34) como uma função candidata de Lyapunov. Então, a derivada de (2.34) com respeito ao tempo é

$$2\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V_{si}}{\partial y_i} \dot{y}_i + \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial V_{si}}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{N}_i} \frac{\partial V_{si}}{\partial y_j} \dot{y}_j + 2\alpha(\theta_i - \theta_{id})(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{id}) \right]$$

Utilizando o gradiente da função potencial saturada, dado por

$$\nabla_{r_i} V_{sij} = [\partial V_{sij}/\partial x_i \quad \partial V_{sij}/\partial y_i],$$

\dot{W}_1 pode ser descrito por

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\nabla_{r_i} V_{si} \dot{r}_i + \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{N}_i} \nabla_{r_j} V_{si} \dot{r}_j \right) + \alpha(\theta_i - \theta_{id})(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{id}) \right]. \quad (2.35)$$

Como o grafo é não direcionado, V_{si} é simétrico com respeito a r_{ij} e $r_{ij} = -r_{ji}$.

Então, pode-se concluir que

$$\frac{\partial V_{sj}}{\partial r_i} = \frac{\partial V_{sji}}{\partial r_i} = \frac{\partial V_{sij}}{\partial r_i}. \quad (2.36)$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\frac{\partial V_{sj}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V_{sj}}{\partial y_i} \dot{y}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\nabla_{r_i} V_{si} \dot{r}_i + \sum_{j \neq i, j \in \mathcal{N}_i} \nabla_{r_j} V_{si} \dot{r}_j \right) = \sum_{i=1}^N \nabla_{r_i} V_{si} \dot{r}_i. \quad (2.37)$$

Assim, substituindo (2.37) em (2.35), segue que

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left[\nabla_{r_i} V_{si} \dot{r}_i + \alpha(\theta_i - \theta_{id})(\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{id}) \right]. \quad (2.38)$$

Por outro lado, utilizando as leis de controle (2.30) e (2.31) no modelo do robô (2.1), conclui-se que

$$\dot{r}_i = -k_v \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} \nabla_{r_i} V_{si} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} = -k_v S_i \nabla_{r_i} V_{si} S_i \quad (2.39)$$

e

$$\dot{\theta}_i = -k(\theta_i - \theta_{id}). \quad (2.40)$$

Então, substituindo (2.39) e (2.40) em (2.38), obtém-se

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left\{ -k_v (\nabla_{r_i} V_{si} S_i)^2 - \alpha k (\theta_i - \theta_{id})^2 - \alpha (\theta_i - \theta_{id}) \dot{\theta}_{id} \right\}.$$

Contudo, $\dot{\theta}_{id}$ é descrito por

$$\dot{\theta}_{id} = L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} u_j \quad (2.41)$$

$$L_{1i} = \frac{1}{\left(\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_{si}}{\partial y_i}\right)^2}, \quad (2.42)$$

$$L_{2ij} = \frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 V_{si}}{\partial y_i \partial y_j} \sin(\theta_j) + \frac{\partial^2 V_{si}}{\partial y_i \partial x_j} \cos(\theta_j) \right) - \frac{\partial V_{si}}{\partial y_i} \left(\frac{\partial^2 V_{si}}{\partial x_i \partial x_j} \cos(\theta_j) + \frac{\partial^2 V_{si}}{\partial x_i \partial y_j} \sin(\theta_j) \right) \quad (2.43)$$

Como u_i é dado pela lei de controle (2.30),

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left\{ -k_v (\nabla_{r_i} V_{si} S_i)^2 - \alpha k (\theta_i - \theta_{id})^2 + \alpha k_v (\theta_i - \theta_{id}) L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} \nabla_{r_i} V_{si} S_i \right\}.$$

Definindo os erros

$$e_\theta^T = [(\theta_1 - \theta_{1d}) \cdots (\theta_N - \theta_{Nd})] \quad (2.44)$$

$$e_{\Delta r}^T = [\nabla_{r_1} V_1 S_1 \cdots \nabla_{r_N} V_N S_N], \quad (2.45)$$

\dot{W}_1 pode ser expresso por

$$\dot{W}_1 = - \left(\alpha k e_\theta^T e_\theta - \alpha k_v e_\theta^T L_a e_{\Delta r} + k_v e_{\Delta r}^T e_{\Delta r} \right)$$

onde

$$L_a = \begin{bmatrix} L_{11} L_{211} & L_{11} L_{212} & \cdots & L_{11} L_{21N} \\ L_{12} L_{221} & L_{12} L_{222} & \cdots & L_{12} L_{22N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{1N} L_{2N1} & L_{1N} L_{2N2} & \cdots & L_{1N} L_{2NN} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Então,

$$\dot{W}_1 = -e^T \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha k I_{N \times N} & -\frac{1}{2} \alpha k_v L_a \\ -\frac{1}{2} \alpha k_v L_a^T & k_v I_{N \times N} \end{bmatrix}}^{C_1} e$$

onde $e^T = [e_\theta^T \quad e_{\Delta r}^T]$. Contudo, para $\dot{W}_1 \leq 0$, o complemento de Schur de C_1 deve

satisfazer

$$\overbrace{\left(kI_{N \times N} - \frac{1}{4}\alpha k_v L_a L_a^T\right)}^{C_2} > 0,$$

(i.e., a matriz C_2 deve ser positiva definida) que é válido se

$$k > \frac{1}{4}\alpha k_v \sigma_M(L_a)$$

onde $\sigma_M(L_a)$ é o maior valor singular de L_a . No entanto, assumindo que $z \in \mathcal{D}$, existe um limitante superior finito \bar{L}_a tal que $\sigma_M(L_a) < \bar{L}_a$. Logo, $\dot{W}_1 \leq 0$ se

$$k > \frac{1}{4}\alpha k_v \bar{L}_a. \quad (2.47)$$

Conclui-se então que, para qualquer valor dos parâmetros de controle $k, k_v > 0$, sempre há $\alpha > 0$ tal que (2.47) é satisfeita. Portanto, $\dot{W}_1 \leq 0$, o conjunto \mathcal{D} é invariante (tal que a consideração de limitação uniforme de $\sigma_M(L_a)$ é válida) e pelo teorema de Barbalat pode-se concluir que $\|e\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, $\|e_{\Delta r}\|, \|e_\theta\| \rightarrow 0$. Logo, $\theta_i \rightarrow \theta_{id}$, $\nabla_{r_i} V_{si} S_i \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty \forall i$. Como $S_i \rightarrow S_{id}$, onde

$$S_{id}^T = [\cos(\theta_{id}) \quad \sin(\theta_{id})]$$

e

$$\theta_{id} = \arctan\left(-\frac{\partial V_{si}}{\partial y_i}, -\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i}\right),$$

pode-se concluir então que $\nabla_{r_i} V_{si}$ e S_i estarão defasados de 180° quando $t \rightarrow \infty$ (isto porque $\nabla_{r_i} V_{si}$ e S_{id} estão sempre defasados de 180°). Assim, como $\nabla_{r_i} V_{si} S_i \rightarrow 0$ e $\|S_i\| = 1$, então $\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \rightarrow 0, \frac{\partial V_{si}}{\partial y_i} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e o sistema converge para uma formação que minimiza (2.3). Além disso, se $z(0) \in \mathcal{D}$, como $\dot{W}_1 \leq 0$, o conjunto \mathcal{D} é invariante. Portanto, como o grafo é completo, todas as funções potenciais devem ser limitadas. Assim, $V_{sij}(\|r_{ij}\|) < \infty \forall i, j$ e $\forall t$ e não haverá colisões entre robôs. ■

2.4 Resultados de simulação

Nesta Seção, são apresentados os resultados de simulação para uma formação com seis robôs não holonômicos tipo unicycle. O objetivo é fazer uma comparação de desempenho entre o controle de formação utilizando uma função potencial não saturada (definição 1) e utilizando uma função potencial saturada (definição 2). Os robôs utilizados na formação são considerados circulares com 30cm de diâmetro, dimensão inspirada no modelo *Irobot Roomba* (Jones 2006). Note que, para evitar colisão, independentemente da forma geométrica dos robôs, estes podem ser con-

	Robô 1	Robô 2	Robô 3	Robô 4	Robô 5	Robô 6
$x_i(0)$	280	300	-300	-300	-200	0
$y_i(0)$	0	300	0	300	-200	-300
$\theta_i(0)$	180°	180°	-180°	90°	180°	-90°

Tabela 2.1: Condição inicial da formação

siderados circulares com raio igual ao da sua região de colisão g_i (ver Figura 2.6). Portanto, considerar os robôs circulares não tira a generalidade dos resultados de simulação obtidos.

2.4.1 Resultados de simulação: Função potencial não saturada

Foi utilizada a seguinte função potencial não saturada:

$$V_{ij}(\|r_{ij}\|) = \frac{r_d}{\|r_{ij}\|} + \log(\|r_{ij}\|) \quad (2.48)$$

onde, por simplicidade, $r_{di} = r_d = 35cm \quad \forall i$. Note que V_{ij} satisfaz as condições da definição 1.

Os parâmetros do controlador k_v e k foram sintonizados por tentativa. Para fins de comparação, foram feitas duas simulações utilizando os seguintes valores dos parâmetros do controlador:

- Simulação 1

Para que a formação que minimiza a função potencial do sistema V seja alcançada em menos de um minuto, utilizou-se:

1. $k = 10$
2. $k_v = 5$

- Simulação 2

Deseja-se alcançar a formação em menos de 20 segundos. Utilizou-se então:

1. $k = 1$
2. $k_v = 20$

Nas duas simulações foram utilizadas as condições iniciais da formação (posição e orientação dos robôs em $t = 0$) mostradas na Tabela 2.1.

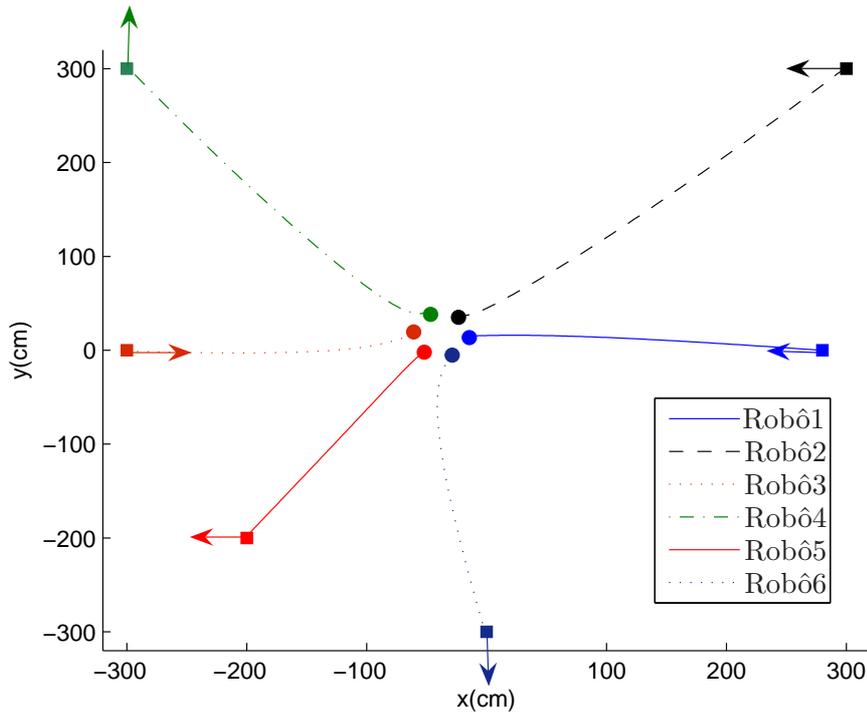


Figura 2.7: Simulação 1: Orientações iniciais e trajetórias dos robôs

Simulação 1

A Figura 2.7 mostra a trajetória dos robôs até alcançarem a formação. Para mostrar que o mínimo da função potencial V_i é alcançado para todo i , a Figura 2.8 apresenta a variação das normas dos gradientes de V_i em função do tempo. Observe que $\|\nabla_{r_i} V_i\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ para todo i o que confirma a minimização de V_i . A Figura 2.9 mostra a variação das orientações dos robôs. Analisando a Figura 2.9, pode-se pensar que as condições iniciais de orientação são diferentes das mostradas na Tabela 2.1. Isto ocorre devido a rápida mudança nas orientações dos robôs devido ao valor escolhido para o ganho k do controlador de orientação. Contudo, traçando o gráfico entre $0s$ e $1s$, observa-se que as condições iniciais das orientações dos robôs são realmente as mostradas na Tabela 2.1. Na simulação 2 o ganho k será reduzido para tornar as mudanças nas orientações mais lentas.

Para analisar a colisão, é apresentada a Figura 2.11, que mostra as variações das distâncias entre robôs. Observe que $\|r_{ij}\| \neq 0 \forall t$ e $\forall i \neq j$. Portanto, se as dimensões dos robôs forem desconsideradas, ou seja, os robôs forem considerados pontuais, não haverá colisão, como afirma o Teorema 1. No entanto, nesta simulação, os robôs são considerados circulares com raio de $30cm$. Portanto, para não haver colisão, $\|r_{ij}\| > 30cm \forall t$ e $\forall i \neq j$. Contudo, isto não é garantido pelas leis de controle de formação (2.9) e (2.10) utilizando a função potencial não saturada. De fato, como mostra a Figura 2.11, há i e j tais que $\|r_{ij}\| < 30cm$. No entanto, como mostrado pelo

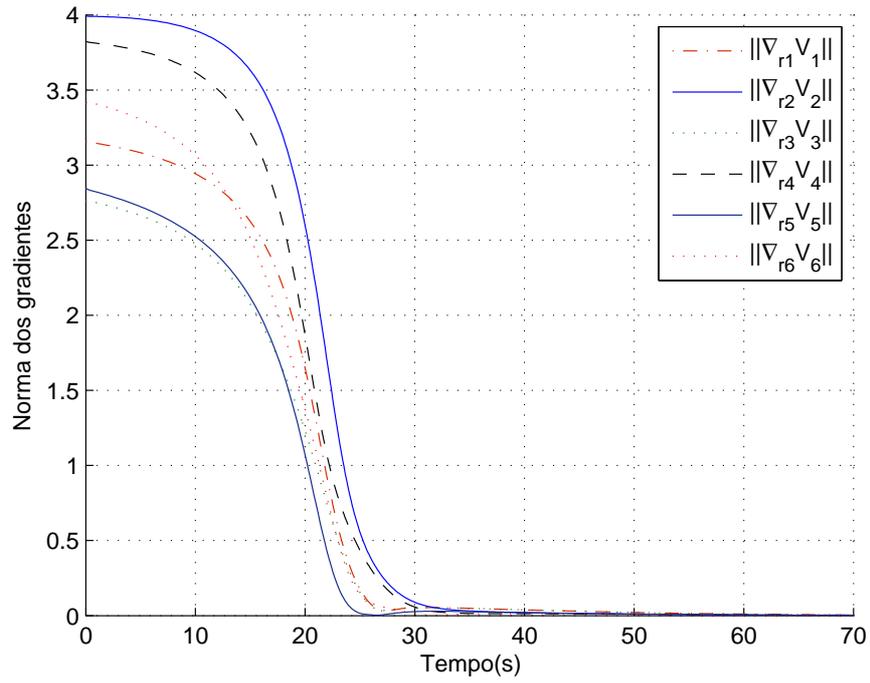


Figura 2.8: Simulação 1: Variação de $\|\nabla_{r_i} V_i\|$ em função do tempo

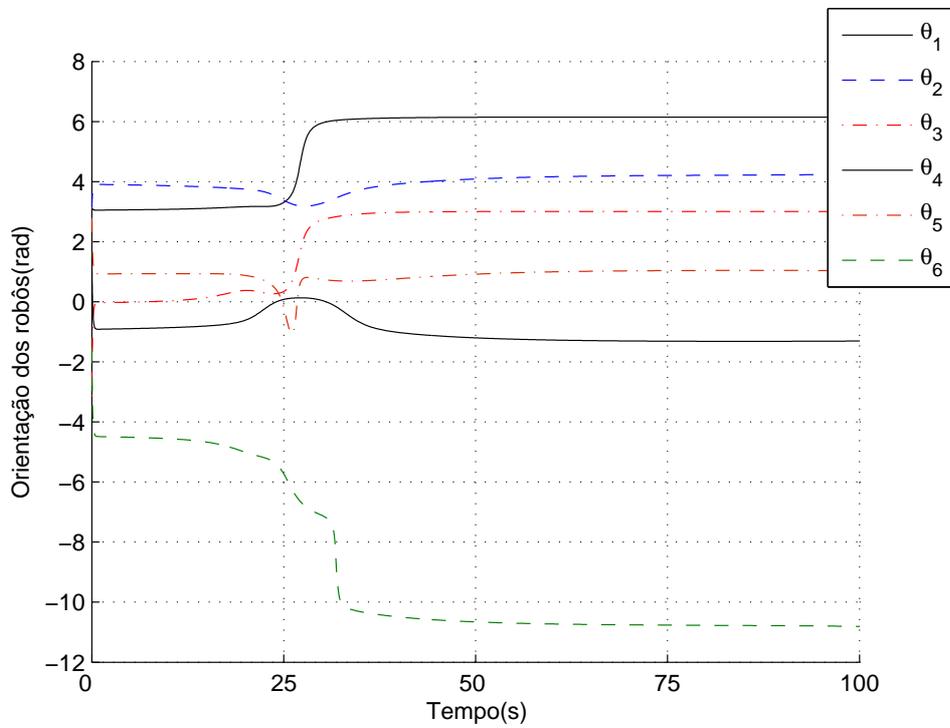


Figura 2.9: Simulação 1: Variação da orientação θ_i em função do tempo

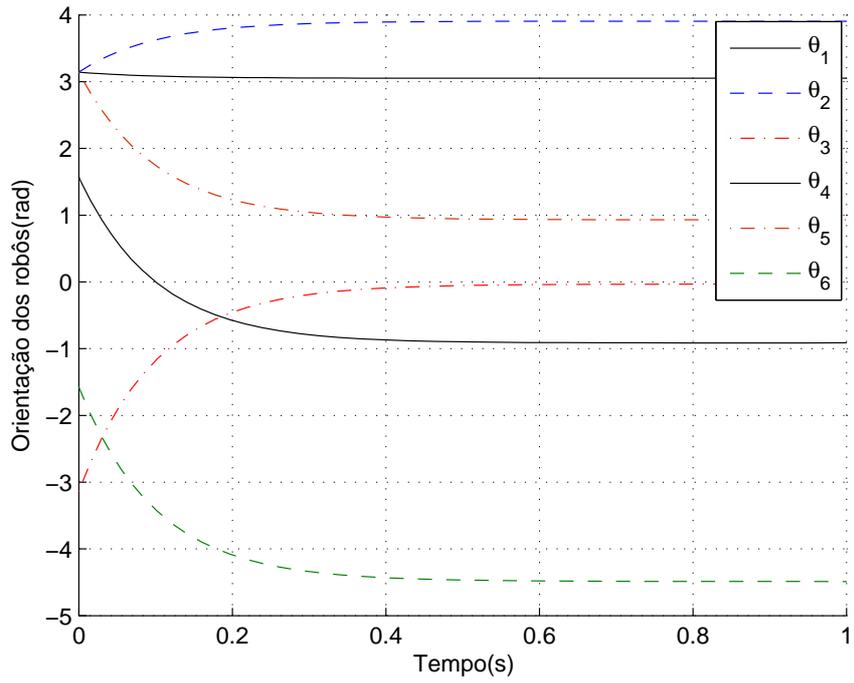


Figura 2.10: Simulação 1: Orientações dos robôs entre 0s e 1s

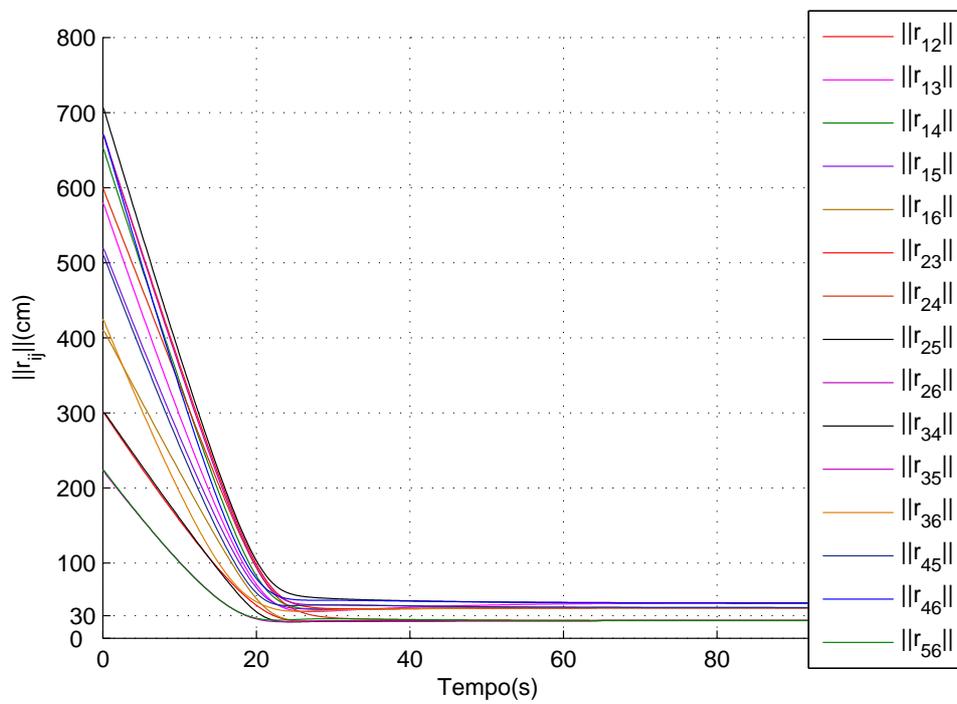


Figura 2.11: simulação 1: Variação de $\|r_{ij}\|$ em função do tempo

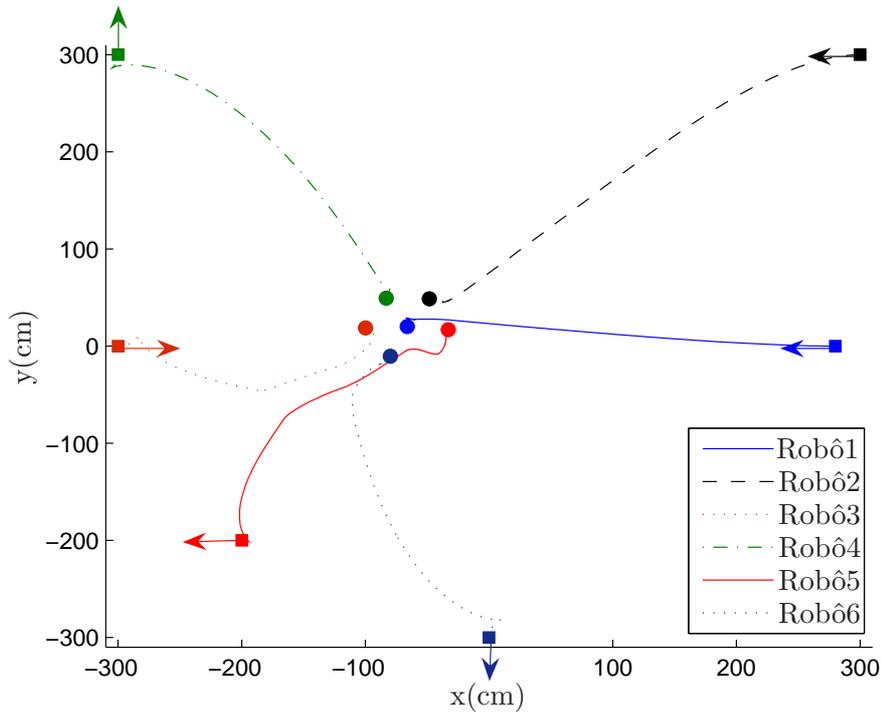


Figura 2.12: Simulação 2: Orientações iniciais e trajetórias dos robôs

Teorema 2, este problema é resolvido utilizando-se uma função potencial saturada e deslocada.

Simulação 2

Neste caso, note que, com relação aos valores dos ganhos k_v e k do controlador utilizados na simulação 1 ($k_v = 5$ e $k = 10$), o ganho k_v é aumentado ($k_v = 20$) e o ganho k é reduzido ($k = 1$). O objetivo de se aumentar o ganho k_v é reduzir o transiente da formação até a configuração desejada ser alcançada. Já a redução do ganho do controle de orientação k é feita para que os robôs corrijam suas orientações de forma mais lenta, gerando trajetórias mais suaves. De fato, observe, da Figura 2.9 da simulação 1, que os robôs mudam suas orientações rapidamente, o que não é viável em termos práticos, pois demandaria um alto sinal de controle.

As Figuras 2.12 e 2.13 mostram, respectivamente, as trajetórias e as variações das orientações dos robôs. Observe que, como esperado devido à diminuição do ganho k , as mudanças nas orientações dos robôs mostradas pelas curvas da Figura 2.13 são mais lentas com relação as mudanças de orientação mostradas pelas curvas da Figura 2.9 (simulação 1). Observe também, que a formação obtida, mostrada na Figura 2.12, é diferente da apresentada pela Figura 2.7. Isto ocorre porque há diferentes configurações da formação que minimizam a função potencial V . Finalmente, note da Figura 2.14, que mostra a variação das distâncias entre robôs, que há i e j tais

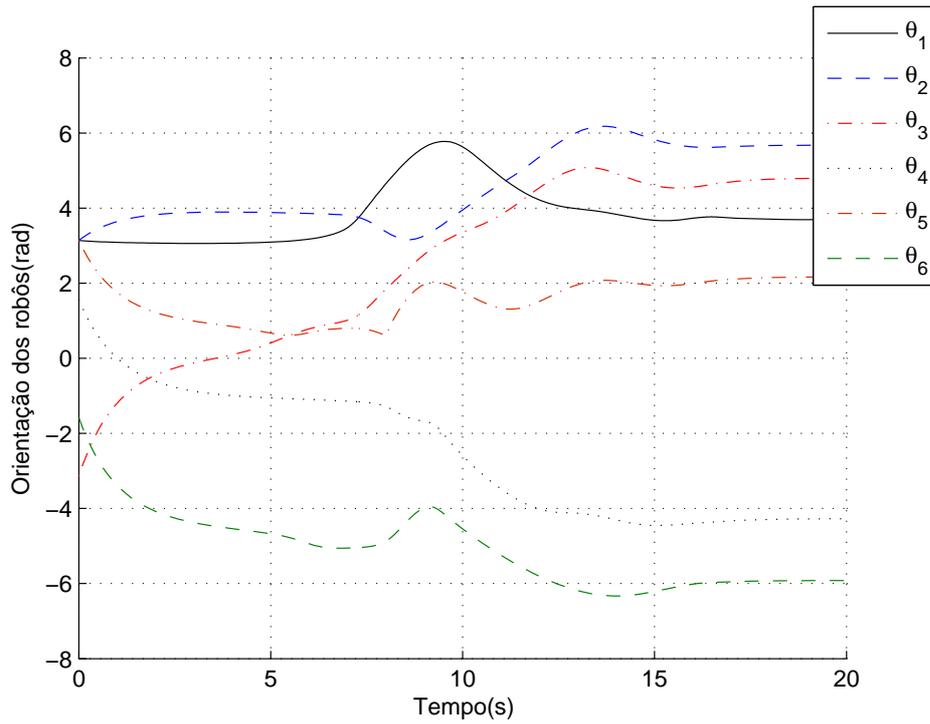


Figura 2.13: Simulação 2: Variação da orientação θ_i em função do tempo

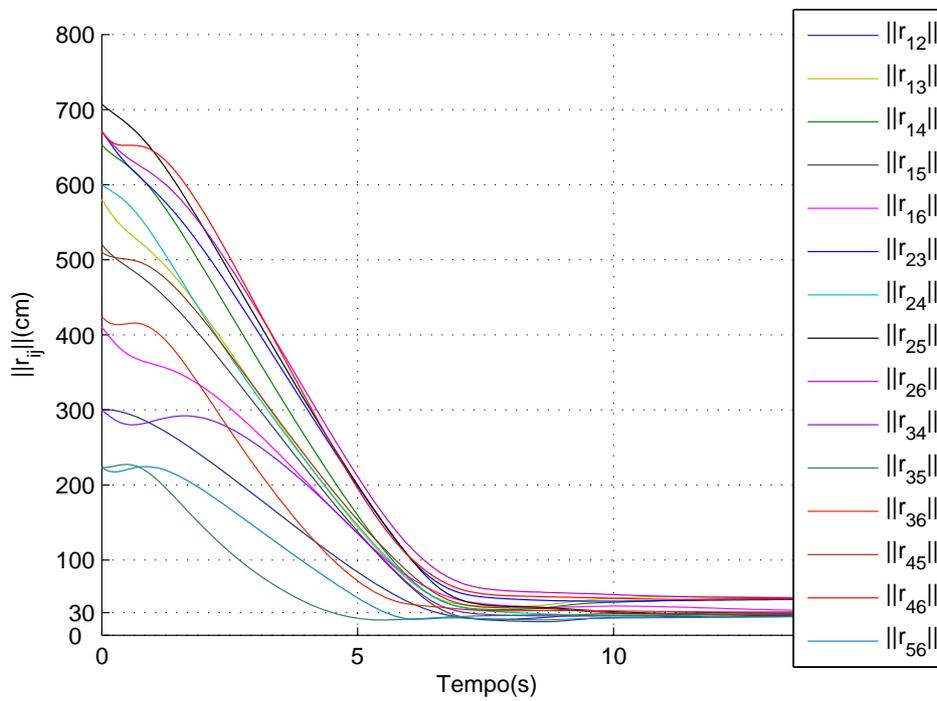


Figura 2.14: Simulação 2: Variação de $\|r_{ij}\|$ em função do tempo

que $\|r_{ij}\| < 30cm$. Assim, como ocorreu na simulação 1, haverá colisão entre robôs se suas dimensões forem consideradas.

À seguir, são apresentados os resultados de simulação utilizando uma função potencial saturada e deslocada, que permite evitar colisão considerando as dimensões dos robôs e gera um grafo de comunicação não completo, permitindo uma lei de controle escalável.

2.4.2 Resultados de simulação: Função potencial saturada e deslocada

Foi utilizada a seguinte função potencial saturada e deslocada:

$$V_{sij}(\|r_{ij}\|) = \begin{cases} J(\|r_{ij}\|) & \text{para } \|r_{ij}\| < R_s \\ J(R_s) & \text{para } \|r_{ij}\| \geq R_s \end{cases} \quad (2.49)$$

onde

$$J(\|r_{ij}\|) = \log(\|r_{ij}\| - c) + \frac{a_2}{\|r_{ij}\| - c} - a_1(\|r_{ij}\| - c), \quad (2.50)$$

$$a_1 = \frac{1}{r_d - 2c + R_s},$$

$$a_2 = \frac{(R_s - c)(r_d - c)}{r_d - 2c + R_s},$$

$c_i = c = 30cm$, $R_s = 520cm$ e $r_{di} = r_d = 35cm$.

Obter uma função potencial saturada, deslocada e suave não é uma tarefa fácil. Portanto, a função potencial (2.49) foi escolhida por simplicidade, dado que é uma pequena variação da função potencial saturada proposta por (Tanner & Pappas 2003). Foram feitas duas simulações utilizando os mesmos ganhos do controlador k_v e k das simulações da subseção 2.4.1, ou seja:

- Simulação 1

1. $k = 10$

2. $k_v = 5$

- Simulação 2

1. $k = 1$

2. $k_v = 20$

As condições iniciais são as mesmas da Tabela 2.1. Observe que, para estas condições iniciais, o grafo de comunicação não é completo, pois as distâncias entre alguns robôs são maiores que $520cm$. A Figura 2.15 mostra o grafo de comunicação em $t = 0s$.

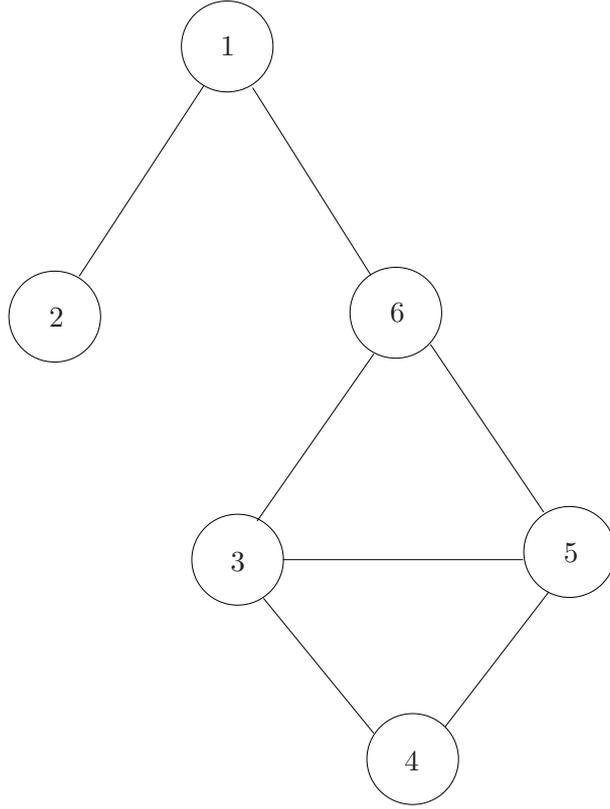


Figura 2.15: Grafo de comunicação para as condições iniciais da Tabela 2.1.

Simulação 1

As trajetórias dos robôs até alcançarem a formação são mostradas na Figura 2.16. A Figura 2.17 mostra que $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \rightarrow 0 \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, todas as funções potenciais V_{s_i} são minimizadas. Observe que os gráficos de $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\|$ apresentados na Figura 2.8 têm um comportamento bem diferente dos apresentados na Figura 2.17. Isto ocorre devido à saturação da função potencial. Quando um robô j entra na região de vizinhança de um robô i ($\|r_{ij}\| < R_s$), $\|\nabla_{r_i} V_{ij}\|$ aumenta até $\|r_{ij}\| = r_f$, onde $V_{s_{ij}}(r_f)$ é o ponto de inflexão da função potencial saturada $V_{s_{ij}}$. Após $\|r_{ij}\| = r_f$, $\|\nabla_{r_i} V_{s_{ij}}\|$ diminui até V_{s_i} ser minimizada. Outro ponto importante é a aparente descontinuidade dos gráficos da Figura 2.17. Por exemplo, $\|\nabla_{r_6} V_6\|$ parece ter uma descontinuidade em $t = 50s$, o que estaria em contradição com o fato de $V_{s_{ij}}$ ser suave. No entanto, se o gráfico for traçado entre $t = 49s$ e $t = 51s$, observa-se que, na verdade, a curva de $\|\nabla_{r_6} V_6\|$ é suave, como mostra a Figura 2.18. O mesmo ocorre para todas as outras curvas em qualquer intervalo de tempo.

Como no caso da função potencial não saturada, para analisar a colisão entre robôs, a Figura 2.19 apresenta a variação de $\|r_{ij}\| \forall i \neq j$ em função do tempo. Observe que $\|r_{ij}\| > 30cm \forall i \neq j$ e $\forall t$. Portanto, ao contrário do que ocorreu nas Figuras 2.11 e 2.14, pode-se observar que não há colisão entre robôs, mesmo

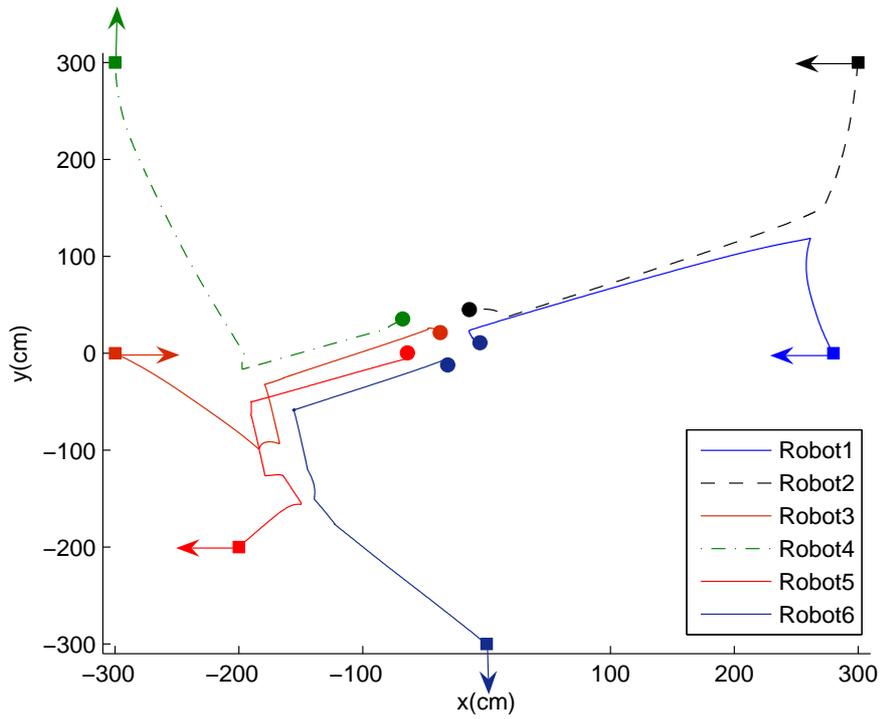


Figura 2.16: Simulação 1: Trajetória dos robôs utilizando uma função potencial saturada.

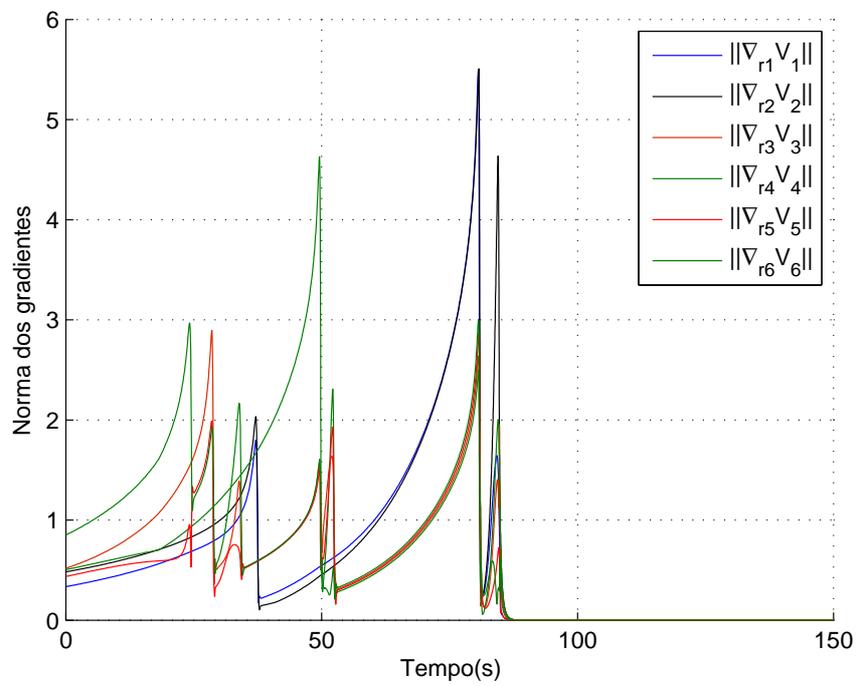


Figura 2.17: Simulação 1: Variação de $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\|$ em função do tempo utilizando uma função potencial saturada.

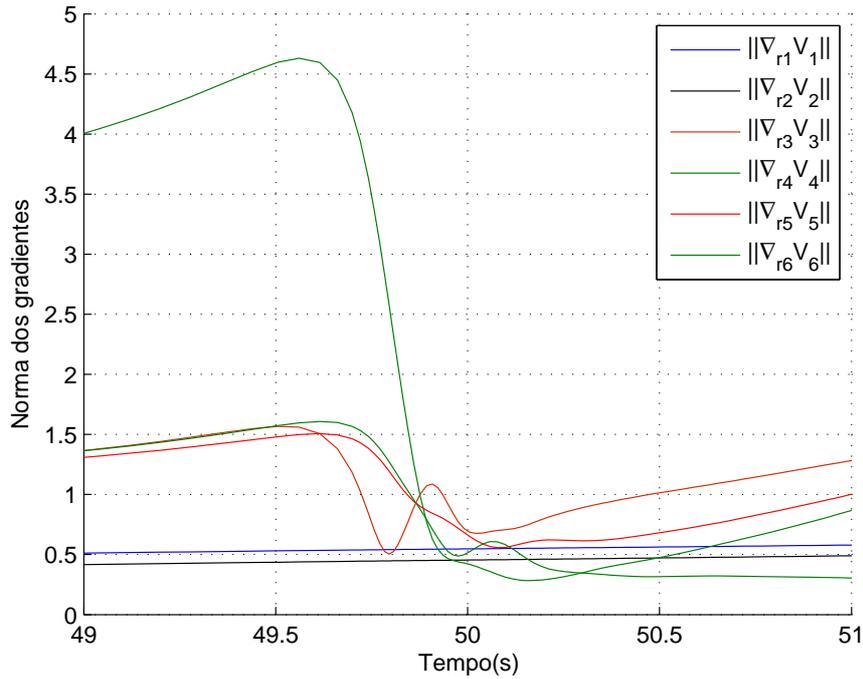


Figura 2.18: Simulação 1: Gráficos de $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\|$ traçados entre $t = 49s$ e $t = 51s$.

considerando suas dimensões.

Simulação 2

Como na simulação 2 da subseção 2.4.1, o ganho de orientação é reduzido para $k = 1$ e o ganho k_v é aumentado para $k_v = 20$. Dessa forma, se comparado à simulação 1 desta subseção, o tempo de convergência da formação para o mínimo da função potencial é reduzido e as orientações dos robôs são corrigidas mais lentamente, gerando trajetórias mais suaves. Isto pode ser observado comparando as Figuras 2.20 e 2.21, que mostram, respectivamente, as trajetórias dos robôs e as variações das distâncias entre estes, com as Figuras 2.16 e 2.19 da simulação 1.

2.5 Conclusões

Neste capítulo, foram apresentadas leis de controle de formação de robôs móveis não-holonômicos cinemáticos tipo uniciclo utilizando função potencial. Mostrou-se (Teorema 1) que o problema de controle de formação pode ser resolvido utilizando somente informações de posição dos robôs (não é necessário para cada robô conhecer as velocidades dos seus vizinhos).

Inicialmente, foram utilizadas funções potenciais não saturadas nas leis de controle. Contudo, estas funções potenciais necessitaram de um grafo de comunicação

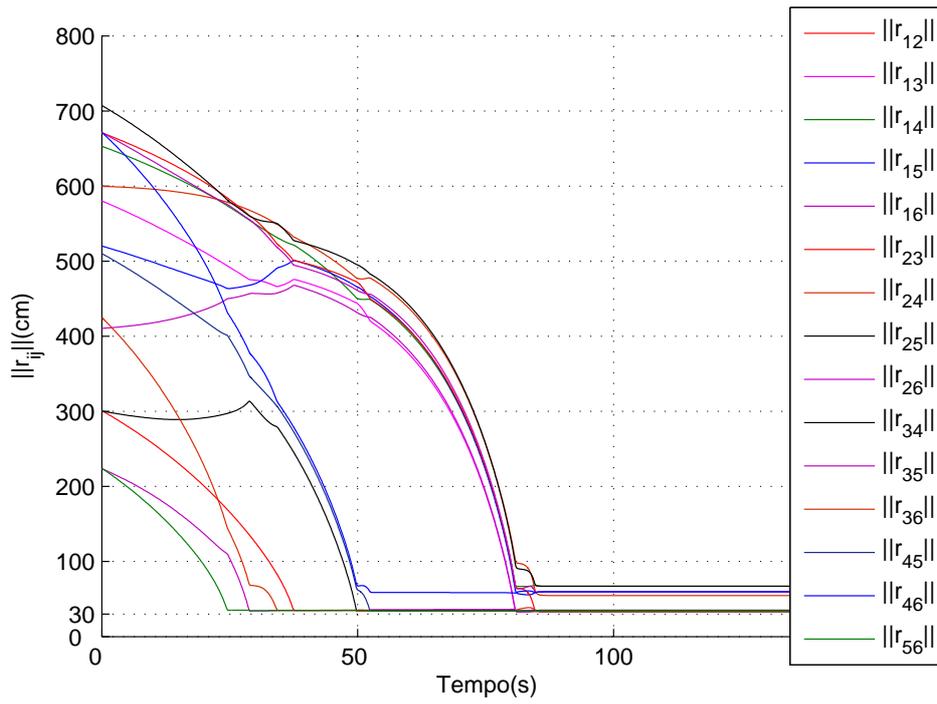


Figura 2.19: Simulação 1: Variação de $\|r_{ij}\|$ em função do tempo utilizando uma função potencial saturada.

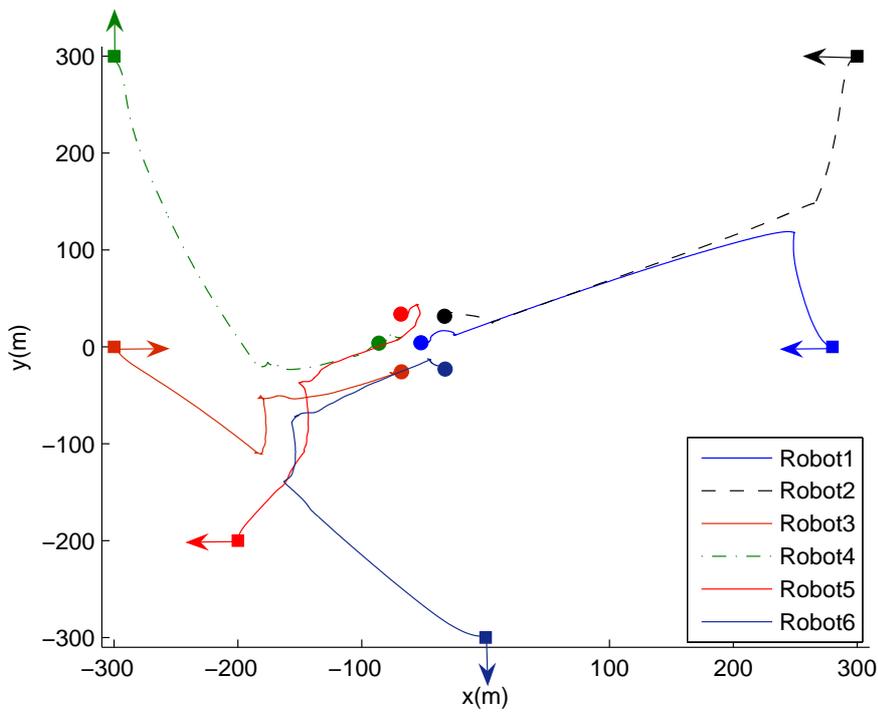


Figura 2.20: Simulação 2: Trajetória dos robôs utilizando uma função potencial saturada.

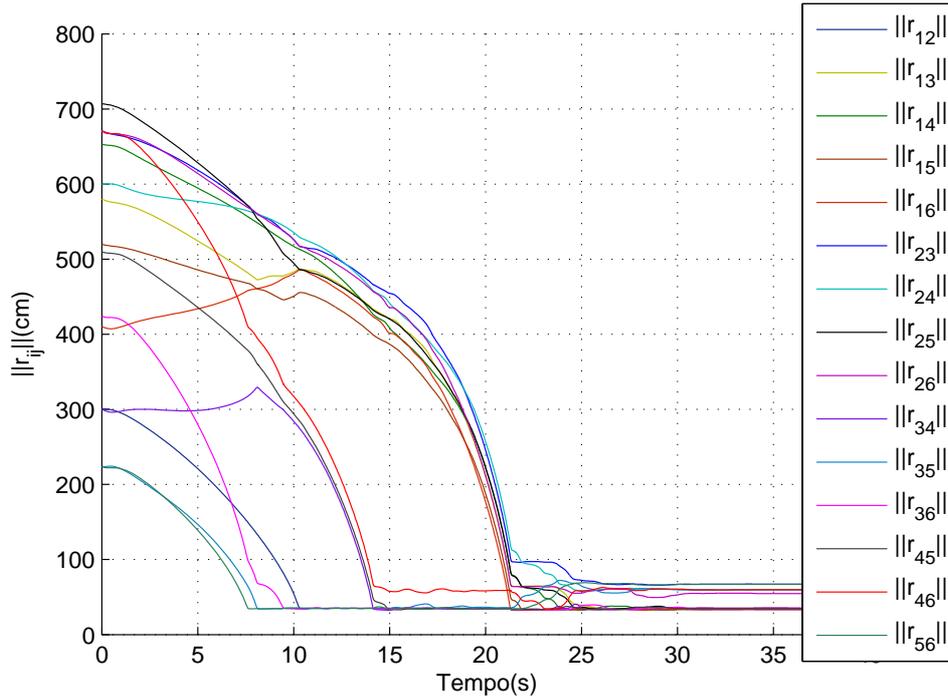


Figura 2.21: Simulação 2: Variação de $\|r_{ij}\|$ em função do tempo utilizando uma função potencial saturada.

completo para evitar colisão entre robôs, o que tornou as leis de controle não escaláveis. Além disso, as colisões foram evitadas desconsiderando as dimensões dos robôs (robôs pontuais). Para resolver estes problemas, foi utilizada uma função potencial saturada (semelhante à proposta em (Tanner et al. 2007) para a formação de sistemas holonômicos), que levou em consideração as dimensões dos robôs e tornou as leis de controle de formação escaláveis. Finalmente, foram apresentados resultados de simulação com o objetivo de comparar o desempenho dos controladores utilizando uma função potencial saturada e não saturada. Verificou-se então, que a função potencial saturada garante a convergência para uma formação que minimiza a função potencial V_i e evita colisão, considerando a dimensão dos robôs, sem a necessidade de um grafo de comunicação completo.

Capítulo 3

Controle de formação de robôs móveis não-holonômicos com restrição de curvatura

Nos capítulos anteriores, foi abordado o problema de controle de formação de robôs móveis não-holonômicos com modelos cinemáticos. No entanto, os robôs abordados não apresentam restrição de curvatura da trajetória. Contudo, sabe-se que existem robôs que apresentam esta restrição. Como exemplo, em (Siegwart & Nourbakhsh 2004) são citados os robôs *Hero-1* e *Neptune* (*Carnegie Mellon University*). Do ponto de vista do controle de formação, pode-se encontrar robôs com restrição de curvatura da trajetória no controle de formação de automóveis em autoestradas automatizadas, formação de robôs heterogêneos em aplicações civis e militares e para transporte de carga (ver Murray (2007)).

Para definir curvatura (ver Kobayashi & Nomizu (1996) para mais detalhes) de uma trajetória, considere primeiramente um círculo de raio ρ . A curvatura do círculo é então definida como o inverso do seu raio. Agora, considere um ponto A sobre uma trajetória C , como mostra a Figura 3.1. Sabe-se que há um único círculo de

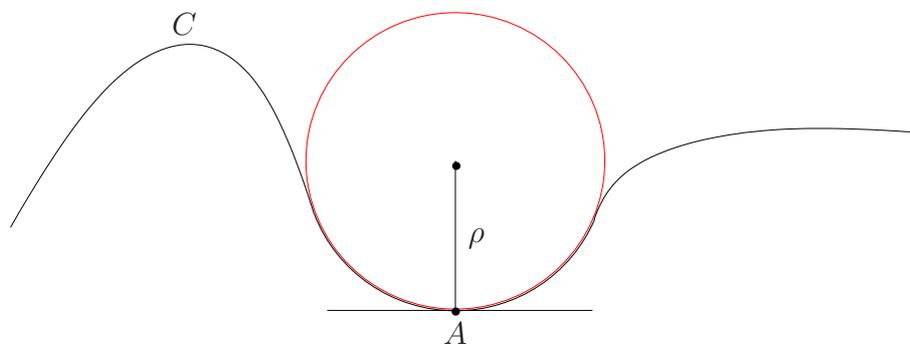


Figura 3.1: Curvatura no ponto A

raio ρ que mais se aproxima à curva próxima a A . Então, a curvatura de C em A , definida pela curvatura do círculo, é descrita por

$$\mathcal{K}_A = \frac{1}{\rho} \quad (3.1)$$

Na prática, os veículos tipo-carro (*car-like*) são o exemplo mais comum de sistemas com restrição de curvatura da trajetória. Estes veículos possuem as rodas traseiras alinhadas com orientação fixa e as rodas dianteiras alinhadas, mas podendo mudar suas orientações dentro de uma faixa de valores limitada. Automóveis são o exemplo mais comum de veículos tipo-carro e é claro que não podem realizar trajetórias com qualquer raio de curvatura. Assim, caso se queira controlar uma formação de veículos tipo-carro, a restrição de curvatura deve necessariamente ser considerada.

Na literatura, a abordagem líder-seguidor é muito utilizada nos trabalhos que abordam o problema de controle de formação de robôs móveis não-holonômicos com restrição de curvatura da trajetória. Por exemplo, em (Consolini et al. 2008, 2009) é proposta uma estratégia geométrica para a estabilização de uma formação hierárquica de uniciclos com restrição de velocidade e curvatura. Em (Saska et al. 2009) é proposta uma abordagem de controle de formação, que combina as estratégias de controle líder-seguidor e horizonte finito, tal que vários robôs tipo-carro mantenham uma formação pré-definida até alcançarem uma região desejada. As dinâmicas dos robôs são consideradas em (Ramaswamy & Balakrishnan 2008), onde é proposta uma lei de controle não-linear combinando a estratégia líder-seguidor e a análise de Lyapunov. Contudo, uma desvantagem da estratégia líder-seguidor é a forte dependência do líder para a formação ser alcançada e mantida. Esta dependência pode ser indesejada, especialmente em condições adversas. Além disso, o grafo de comunicação é considerado fixo e não são consideradas colisões entre robôs.

Neste capítulo, é proposta uma lei de controle de formação de robôs tipo-carro baseada na estratégia de função potencial. Como no Capítulo 2, é utilizada uma função potencial saturada e deslocada, tornando possível o projeto de leis de controle descentralizadas que evitam a colisão entre robôs considerando suas dimensões. Além disso, permite um grafo de comunicação variante, garantindo que, se este for sempre conectado, a formação alcança uma configuração que minimiza a função potencial. São propostos três controladores. O primeiro deles, apresentado na seção 3.2, utiliza a projeção do vetor gradiente descendente da função potencial na direção de movimento do robô para calcular a lei de controle. Mostra-se que esta lei de controle garante, sob certas hipóteses, que a formação alcança uma configuração que minimiza a função potencial. Estas hipóteses são relaxadas pelo controlador proposto na seção 3.3, que utiliza a norma do vetor gradiente da função potencial.

Contudo, esta lei de controle pode apresentar problemas se for levado em consideração o escorregamento lateral do robô. Isto porquê, uma alta velocidade pode ser exigida do robô, mesmo quando este está seguindo uma trajetória de raio de curvatura pequeno. Visando solucionar este problema, na seção 3.4 é proposto um controlador que é uma combinação dos controladores propostos na seções 3.2 e 3.3. No final de cada seção são apresentados resultados de simulação, que são utilizados nas conclusões do Capítulo (seção 3.5).

3.1 Definições e descrição do problema

Considere um grupo de N robôs tipo-carro. Para $i = 1, \dots, N$, o modelo cinemático do i -ésimo robô é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\delta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & 0 \\ \frac{1}{L_i} \tan(\delta_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde

- $r_i = [x_i, y_i]^T$ são as coordenadas cartesianas da posição do robô,
- θ_i é a orientação do robô com respeito a um dado sistema de coordenadas inercial,
- δ_i é o ângulo de orientação das rodas dianteiras com respeito ao corpo do robô,
- u_i é velocidade linear das rodas traseiras,
- w_i é a velocidade angular da orientação das rodas dianteiras,
- L_i é a distância entre eixos, onde, por simplicidade, $L_i = L \forall i$,
- as rodas traseiras são consideradas alinhadas com o carro.

Como as trajetórias dos robôs possuem restrição de curvatura, então

$$|\delta_i| \leq \delta_{max_i}$$

onde δ_{max_i} é o máximo ângulo de orientação das rodas dianteiras. A Figura 3.2 mostra um robô tipo-carro.

O objetivo do controle de formação deste capítulo é o mesmo do capítulo anterior. Ou seja, deseja-se alcançar uma formação que minimiza a função potencial V_s descrita por (2.33), onde V_{s_i} é como em (2.29). Observe, de (2.29), que a ideia aqui

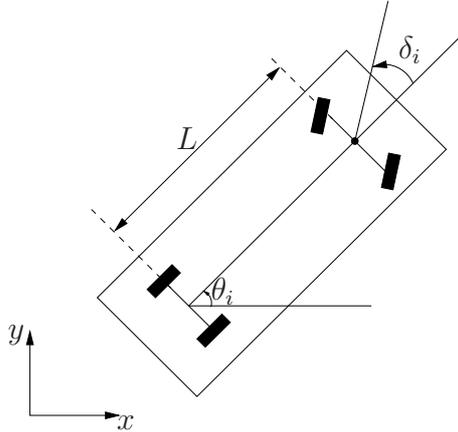


Figura 3.2: Modelo cinemático de um automóvel

é também utilizar uma função potencial saturada e deslocada, visando evitar colisão considerando as dimensões dos robôs. Então, seguindo a mesma linha de raciocínio do Capítulo 2, para cada robô i é criada uma força artificial f_i . Como mostra (2.6), f_i é definida em função do gradiente descendente de V_{si} . Portanto, se cada robô i se movimentar na direção de sua força artificial f_i , o mínimo de V_{si} será alcançado. Observe que se V_{si} for minimizado $\forall i$, o mesmo acontecerá para V_s .

No caso dos robôs unicyclos ou dos robôs com acionamento diferencial, as leis de controle propostas nos capítulos anteriores garantem a minimização de V_{si} . Contudo, estas leis de controle necessitam que o sinal de controle atue diretamente na orientação do robô. Isto permite que o robô mude sua orientação, mesmo que não esteja se movimentando. No caso do robô tipo-carro, observa-se, do modelo cinemático (3.2), que o sinal de controle não atua diretamente na orientação θ_i . De fato, nota-se que a atuação ocorre na orientação δ_i das rodas dianteiras. Logo, para mudar sua orientação, o robô deva estar, obrigatoriamente, se movimentando ($\dot{\theta}_i = 0$ se $u_i = 0$). Portanto, as leis de controle de formação dos capítulos anteriores não podem ser aplicadas em uma formação de robôs tipo-carro. Deve-se procurar então outra estratégia de controle para cada robô se movimentar na direção de sua força artificial f_i . Contudo, a estratégia de controle deve considerar a restrição de curvatura da trajetória gerada pelos robôs.

Em (Shimoda et al. 2005) é proposta uma estratégia de controle, para um único robô, utilizando campo potencial. A estratégia considera a restrição de curvatura da trajetória bem como as irregularidades do terreno. Assim, a estratégia de controle de formação de robôs com restrição de curvatura da trajetória (robôs tipo-carro) proposta neste capítulo é inspirada na estratégia de controle de um único robô proposta por (Shimoda et al. 2005). Defina então \mathcal{K}_{max_i} como a maior curvatura permitida à trajetória do robô i . Então, a lei de controle deve orientar as rodas dianteiras dos robôs de forma a gerar, para cada robô i , uma trajetória com curvatura

\mathcal{K}_i de forma que

$$|\mathcal{K}_i| \leq \mathcal{K}_{max_i}.$$

Vale ressaltar que $|\mathcal{K}_i| = \mathcal{K}_{max_i}$ quando $|\delta_i| = \delta_{max_i}$.

Como cada robô i deve se orientar na direção da força artificial f_i para maximizar a projeção $f_i S_i$ (onde S_i é um vetor unitário que descreve a direção da velocidade do robô), defina γ_i (ver Figura 3.3) como o erro de orientação entre a orientação θ_i do robô e a orientação ϕ_i da força artificial f_i :

$$\gamma_i = \overbrace{\arctan 2 \left(-\frac{\partial V_{si}}{\partial y_i}, -\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \right)}^{\phi_i} - \theta_i. \quad (3.3)$$

Então, para cada posição x_i, y_i do robô i no sistema de coordenadas cartesianas,

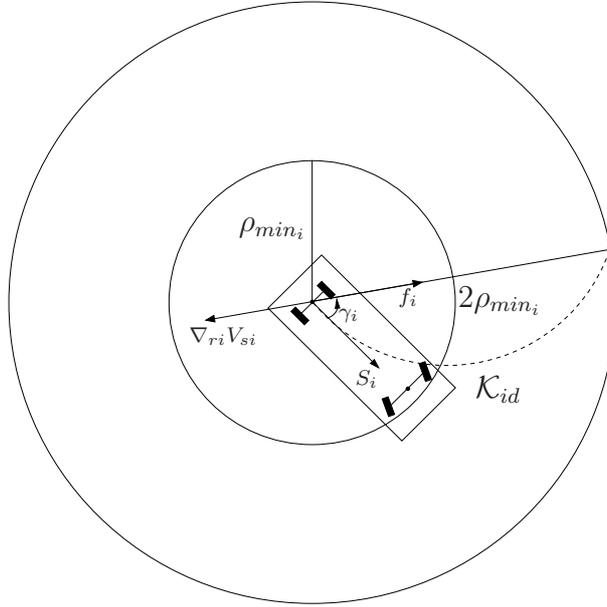


Figura 3.3: Curvatura desejada

defina \mathcal{K}_{id} como a curvatura de trajetória desejada tal que γ_i seja reduzida se o robô se movimentar. Assim, para calcular \mathcal{K}_{id} pode-se considerar os seguintes critérios:

- $|\mathcal{K}_{id}| = \mathcal{K}_{max_i}$ se $|\gamma_i| = \pi/2$,
- $\mathcal{K}_{id} = 0$ se $\gamma_i = 0$,
- $\mathcal{K}_{id} > 0$ se $\gamma_i > 0$ e $\mathcal{K}_{id} < 0$ caso contrário.

Uma forma simples de calcular \mathcal{K}_{id} obedecendo estes critérios é utilizar a equação:

$$\mathcal{K}_{id} = \frac{\sin(\gamma_i)}{\rho_{min_i}} \quad (3.4)$$

onde ρ_{min_i} é o menor raio de curvatura permitido à trajetória do robô i . Note que todo valor de \mathcal{K}_{id} está associado a uma orientação desejada das rodas dianteiras δ_{id} . Então, o próximo lema mostra como δ_{id} pode ser determinado a partir de \mathcal{K}_{id} .

Lema 1 *Considere uma trajetória com curvatura \mathcal{K}_{id} e um robô com modelo cinemático (3.2). Então, para uma velocidade linear do robô u_i limitada e diferente de zero, a trajetória do robô terá curvatura \mathcal{K}_{id} se $\delta_i = \delta_{id}$ e*

$$\delta_{id} = \arctan(L \mathcal{K}_{id}). \quad (3.5)$$

Prova: Do modelo cinemático do robô e como $\delta_i = \delta_{id}$, temos

$$\dot{\theta}_i = \frac{1}{L} \tan(\delta_{id}) u_i. \quad (3.6)$$

Considere então a Figura 3.4, que mostra um robô se movimentando, com velocidade linear u_i , sobre uma trajetória circular de raio ρ centrada em um ponto P do sistema de coordenadas cartesianas. Sabe-se que $\dot{\psi} = u_i \mathcal{K}_{id}$ onde $\mathcal{K}_{id} = 1/\rho$. Então, como

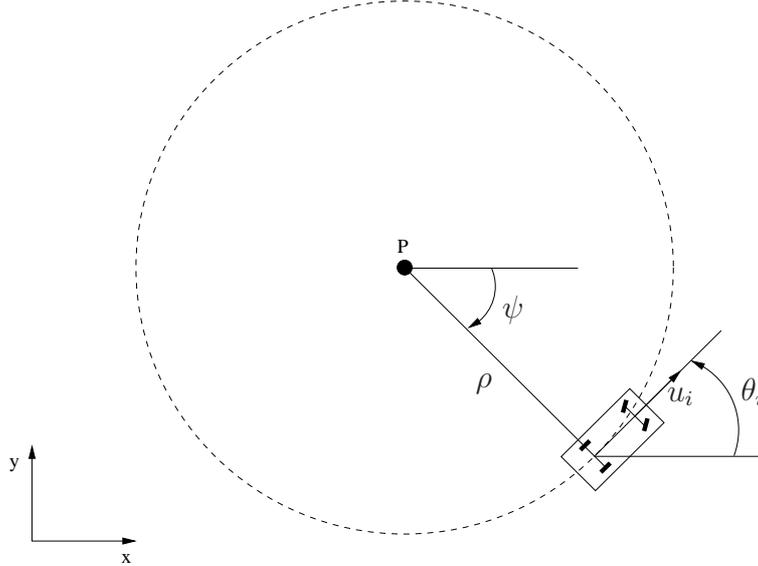


Figura 3.4: Cálculo de δ_{id}

$\dot{\psi} = \dot{\theta}_i$, tem-se

$$\dot{\theta}_i = u_i \mathcal{K}_{id}. \quad (3.7)$$

Portanto, pode-se concluir de (3.6) e (3.7) que

$$\mathcal{K}_{id} = \frac{1}{L} \tan(\delta_{id}). \quad (3.8)$$

Logo, δ_{id} é dado por (3.5). ■

Então, para $|\gamma_i|$ ser reduzido conforme o robô i se movimenta, a lei de controle de formação deve garantir que $\delta_i \rightarrow \delta_{id}$. Resumindo, para gerar um movimento na direção da força artificial resultante f_i , a lei de controle de formação deve seguir os seguintes critérios:

(a) $\delta_i \rightarrow \delta_{id}$ quando $t \rightarrow \infty$.

(b) $u_i > 0$ se $|\gamma_i| \leq \frac{\pi}{2}$.

(c) $u_i < 0$ se $|\gamma_i| > \frac{\pi}{2}$.

Observe que, seguindo os critérios (b) e (c) têm-se:

- $u_i > 0$ se $S_i^T f_i > 0$,
- $u_i < 0$ se $S_i^T f_i < 0$,

onde $S_i^T = [\cos(\theta_i) \quad \sin(\theta_i)]$ é o vetor de orientação do robô i (ver Figura 3.3).

Assim, com base nos critérios (a), (b) e (c), são propostas três estratégias de controle. A primeira delas é abordada na próxima seção.

3.2 Controlador com projeção

A seguinte lei de controle é proposta

$$u_i = K_v f_i S_i \quad (3.9)$$

$$\omega_i = -K (\delta_i - \delta_{id}) \quad (3.10)$$

onde S_i é dado por (2.8) e a orientação desejada das rodas dianteiras δ_{id} é dada por (3.5). Como $\|S_i\| = 1$ e de (2.6) e Figura 3.3, note que $u_i = K_v \|\nabla_{r_i} V_{si}\| \cos(\gamma_i)$. Como $\cos(\gamma_i) < 0$ para $|\gamma_i| > \pi/2$ e $\cos(\gamma_i) \geq 0$ para $|\gamma_i| \leq \pi/2$, então os critérios (2) e (3) são satisfeitos.

Agora, defina

$$C_\gamma = \text{diag}(\cos(\gamma_1), \cos(\gamma_2), \dots, \cos(\gamma_N)), \quad (3.11)$$

$$\bar{z}^T = [(\delta_1 - \delta_{1d}) \quad \dots \quad (\delta_N - \delta_{Nd}) \quad r_1^T \quad \dots \quad r_N^T], \quad (3.12)$$

e o conjunto

$$\mathcal{D}_1 = \{\bar{z} \mid \mathcal{W}(\bar{z}) \leq \mathcal{W}_0\} \quad (3.13)$$

com $\mathcal{W}_0 > 0$,

$$2\mathcal{W}(\bar{z}) = \sum_{i=1}^N [(\delta_i - \delta_{id})^2 + \alpha_1 V_{si}] \quad (3.14)$$

e $\alpha_1 > 0$. O próximo Teorema mostra que a formação alcança uma configuração que minimiza V se a condição inicial da formação $\bar{z}(0)$ iniciar no conjunto \mathcal{D}_1 e $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp$, o complemento ortogonal de \mathcal{S}_C , o espaço nulo de C_γ (ou equivalentemente, \mathcal{S}_C^\perp é o espaço gerado pelas linhas de C_γ).

Teorema 3 *Considere N robôs móveis com modelo cinemático (3.2), cada robô guiado pelas leis de controle (3.9)–(3.10) e trocando informações através de um grafo de comunicação variante. Se*

1. $\bar{z}(0) \in \mathcal{D}_1$,
2. o grafo de comunicação for sempre conectado,
3. as leis de controle utilizarem uma função potencial saturada,

então colisões são evitadas e os robôs alcançam uma formação tal que $\nabla_{r_i} V_{si} S_i \rightarrow 0 \quad \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, V é minimizado quando a formação é alcançada se e somente se $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp \forall t$, onde \mathcal{S}_C^\perp é o complemento ortogonal de \mathcal{S}_C , espaço nulo de C_γ .

Prova:

Considere a função candidata de Lyapunov (3.14). A derivada de \mathcal{W} com respeito ao tempo é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} = & \sum_{i=1}^N [(\delta_i - \delta_{id})(\dot{\delta}_i - \dot{\delta}_{id}) \\ & + \frac{\alpha_1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial V_j}{\partial y_i} \dot{y}_i \right)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Contudo, devido à simetria de V_{si} com respeito a r_{ij} , pode-se usar (2.17) para concluir que a derivada de \mathcal{W} ao longo da trajetória do sistema (3.2)(3.9)–(3.10) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} = & \sum_{i=1}^N \left[-K (\delta_i - \delta_{id})^2 + (\delta_i - \delta_{id}) \dot{\delta}_{id} \right. \\ & \left. - \alpha_1 K_v (\nabla_{r_i} V_{si} S_i)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por outro lado, considerando (3.3)–(3.5), tem-se

$$\dot{\delta}_{id} = \frac{\cos(\gamma_i)}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2)} \dot{\gamma}_i \quad (3.17)$$

$$\dot{\gamma}_i = \frac{K_v}{L} \tan(\delta_i) \nabla_{r_i} V_{si} S_i - K_v L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} \nabla_{r_j} V_j R_j \quad (3.18)$$

onde L_{1i} e L_{2ij} são dados, respectivamente, por (2.22) e (2.23). Então, substituindo (3.18) e (3.17) em (3.16) e após alguma manipulação algébrica, temos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} = & \sum_{i=1}^N \left\{ -K (\delta_i - \delta_{id})^2 - \alpha_1 K_v (\nabla_{r_i} V_{si} S_i)^2 \right. \\ & - \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i)}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2)} L_{1i} \sum_{j=1}^N (L_{2ij} K_v \nabla_{r_j} V_j R_j) \\ & \left. + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i)}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2) L} \tan(\delta_i) K_v \nabla_{r_i} V_{si} S_i \right\}. \end{aligned}$$

Definindo os erros

$$e_\delta^T = [(\delta_1 - \delta_{1d}) \cdots (\delta_N - \delta_{Nd})] \quad (3.19)$$

$$e_\Delta^T = [\|\nabla_{r_1} V_1\| \cdots \|\nabla_{r_N} V_N\|] \quad (3.20)$$

$$e_{\Delta r}^T = [\nabla_{r_1} V_1 R_1 \cdots \nabla_{r_N} V_N R_N] \quad (3.21)$$

e

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{111} & J_{112} & \cdots & J_{11N} \\ J_{121} & J_{122} & \cdots & J_{12N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ J_{1N1} & J_{1N2} & \cdots & J_{1NN} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

com

$$J_{1ij} = \begin{cases} \frac{\cos(\gamma_i) (\tan(\delta_i) - L L_{1i} L_{2ij})}{\rho_{min} L (1 + L^2 K_{id}^2)} & \text{for } i = j \\ -\frac{\cos(\gamma_i) L_{1i} L_{2ij}}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2)} & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (3.23)$$

conclui-se que

$$\dot{\mathcal{W}} \leq -K e_\delta^T e_\delta + K_v e_\delta^T J_1 e_{\Delta r} - \alpha_1 K_v e_{\Delta r}^T e_{\Delta r}. \quad (3.24)$$

Portanto

$$\dot{W} \leq -e^T \overbrace{\begin{bmatrix} K I_{N \times N} & -0.5 K_v J_1 \\ -0.5 K_v J_1 & \alpha_1 K_v I_{N \times N} \end{bmatrix}}^C e$$

onde $e^T = [e_\delta^T \quad e_{\Delta r}^T]$.

Assumindo que $\bar{z} \in \mathcal{D}_1$, existe uma constante finita tal que $\|J_1\| < \bar{J}_1$. Assim, para $\dot{W} < 0$, o complemento de Shur de C deve satisfazer

$$\left(K - \frac{K_v \bar{J}_1^2}{4\alpha_1} \right) > 0. \quad (3.25)$$

Então, (3.25) será satisfeita se

$$K > \frac{K_v \bar{J}_1^2}{4\alpha_1}. \quad (3.26)$$

Portanto, se (3.26) é válida, o conjunto \mathcal{D} é invariante (tal que são evitadas colisões e a assumida limitação de $\|J_1\|$ é válida), $\|e\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ assim como $\|e_{\Delta r}\|$.

Então, de (3.21), a formação alcança um ponto de equilíbrio tal que $\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i \rightarrow 0 \quad \forall i$. Note que $\|e_{\Delta r}\| \rightarrow 0$ não implica que a formação alcançada minimiza V ($\|e_\Delta\| \rightarrow 0$). Falta então provar que a hipótese $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp$ é necessária e suficiente para V ser minimizado. Para provar a necessidade, basta mostrar que $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$ é um ponto de equilíbrio da formação, mesmo que V não seja minimizado. Assim, do modelo cinemático (3.2), sabe-se que $\dot{r}_i = S_i u_i$. Então, considerando toda a formação e a lei de controle (3.9), conclui-se que

$$\dot{r} = -S e_{\Delta r} \quad (3.27)$$

onde $r^T = [r_1 \dots r_N]$ e $S = \text{diag}(S_1, \dots, S_N)$. Contudo, uma vez que $\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i = \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \cos(\gamma_i)$, então

$$e_{\Delta r} = C_\gamma e_\Delta. \quad (3.28)$$

Assim,

$$\dot{r} = -S C_\gamma e_\Delta. \quad (3.29)$$

Além disso, de (3.18), conclui-se que

$$\dot{\gamma} = K_v D_t(\delta) C_\gamma e_\Delta - K_v L_a C_\gamma e_\Delta \quad (3.30)$$

onde L_a é dado por (2.26), $\gamma^T = [\gamma_1 \dots \gamma_N]$ e

$$D_t(\delta) = \text{diag} \left(\frac{\tan(\delta_1)}{L}, \dots, \frac{\tan(\delta_N)}{L} \right). \quad (3.31)$$

Então,

$$\dot{\gamma} = K_v (D_t(\delta) - L_a) C_\gamma e_\Delta. \quad (3.32)$$

Portanto, como S tem posto completo, pode-se concluir de (3.29) e (3.32) que, se $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$, $\dot{r}, \dot{\gamma} = 0$ e a formação estará em um ponto de equilíbrio, o que prova a necessidade de $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp$ para V ser minimizado. Para provar a suficiência, observe que, como $e_{\Delta r} = C_\gamma e_\Delta$, se $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp \forall t$, então $\|e_\Delta\| \rightarrow 0$, pois já foi demonstrado que $\|e_{\Delta r}\| \rightarrow 0$. Portanto, $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \rightarrow 0 \quad \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$ e a formação alcança uma configuração que minimiza V . ■

Observação 3 Observe que a função de Lyapunov utilizada para provar o Teorema 3 é função dos estados z e δ , mas não é função do estado θ (onde $\theta^T = [\theta_1 \ \dots \ \theta_N]$).

Então, embora seja possível concluir, do modelo do robô (3.2) e da lei de controle (3.9), que $\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{\theta}_i \rightarrow 0$, isto não implica que $\|\theta\|$ é limitado (embora tenha sido limitado em todas as simulações). Contudo, se for definida uma constante $\epsilon_1 > 0$ tal que, se $|\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i| < \epsilon_1$, u_i for considerado igual a zero, então, do modelo cinemático (3.2), conclui-se que θ_i será limitado. Neste caso, se $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp \forall t$, a formação alcançará um conjunto $\mathcal{D}_2 = \{z \mid \nabla_{r_i} V_{s_i} S_i < \epsilon_1\}$, que é uma vizinhança de ordem $\mathcal{O}(\epsilon_1)$ do mínimo da função potencial V_s .

Embora tenha se mostrado improvável nas simulações, a condição $e_\Delta \notin \mathcal{S}_C^\perp$ (ou, equivalentemente, $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$) é matematicamente possível. De fato, uma possível configuração da formação onde $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$ é quando os N robôs são simultaneamente ortogonais às suas forças artificiais resultantes f_i (ver a Figura 3.5 como um exemplo). Observe que, nesta situação, $\gamma_i = \pi/2 \forall i$. Esta configuração é um ponto de

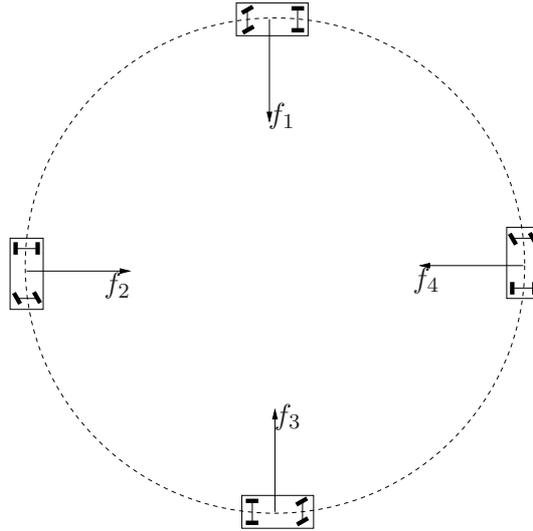


Figura 3.5: Configuração de formação com $\gamma_i = \pi/2 \forall i$.

equilíbrio da formação, independentemente de V_{s_i} (não somente no mínimo de V_{s_i}), pois, da lei de controle (3.9), $u_i = 0 \forall i$ (f_i é ortogonal à S_i se $\gamma_i = \pi/2$).

	Robô 1	Robô 2	Robô 3	Robô 4	Robô 5	Robô 6
$x_i(0)$	0	30	80	-80	0	80
$y_i(0)$	100	100	0	0	-100	-100
$\theta_i(0)$	90°	-60°	90°	-180°	180°	-90°
$\delta_i(0)$	0	15°	-15°	0°	15°	0°

Tabela 3.1: Simulação 1: Condição inicial da formação (curvatura limitada)

Para que a hipótese $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp$ não seja mais necessária, nas seções 3.3 e 3.4 são propostas alterações nas leis de controle (3.9) e (3.10).

3.2.1 Resultados de simulação

Para avaliar o desempenho das leis de controle (3.9) e (3.10), foram feitas simulações de uma formação com seis robôs.

A função potencial utilizada é descrita por (2.29) e (2.49) onde

1. $c = 3m$
2. $r_d = 10m$
3. $R_s = 300m$

Os ganhos do controlador, sintonizados por tentativas, através de simulações, para que a formação seja alcançada em menos de 20 segundos, são

1. $K = 10$
2. $K_v = 5$

e os parâmetros da cinemática do robô, inspirados em um automóvel,

1. $L = 3m$
2. $|\delta_i| \leq 15^\circ \quad \forall i$.

Note de (3.4) e (3.5) que, para estes parâmetros cinemáticos, tem-se $\rho_{min} \cong 11,2m$, o que gera uma curvatura de trajetória máxima (\mathcal{K}_{max_i}) de 0,09.

Foram simulados dois conjuntos de condições iniciais, mostrados nas tabelas 3.1 e 3.2.

Simulação 1: Tabela 3.1

Os resultados são mostrados nas Figuras 3.6, 3.7 e 3.8. A Figura 3.6 mostra as trajetórias dos robôs até alcançarem a formação e a Figura 3.7 a variação das distâncias entre estes. Observe que são evitadas colisões ($\|r_{ij}\| > 3m \quad \forall i \neq j$).

	Robô 1	Robô 2	Robô 3	Robô 4	Robô 5	Robô 6
$x_i(0)$	100	50	-50	-100	-50	50
$y_i(0)$	0	86,6	86,6	0	-86,6	-86,6
$\theta_i(0)$	90°	150°	210°	270°	330°	390°
$\delta_i(0)$	15°	15°	15°	15°	15°	15°

Tabela 3.2: Simulação 2: Condição inicial da formação (curvatura limitada)

Ja a Figura 3.8 mostra a variação do ângulo de orientação das rodas dos robôs. Observe que $|\delta_i| \leq 15^\circ$ ($|\delta_i| \leq \pi/12$) $\forall i$, respeitando então a limitação da curvatura da trajetória dos robôs.

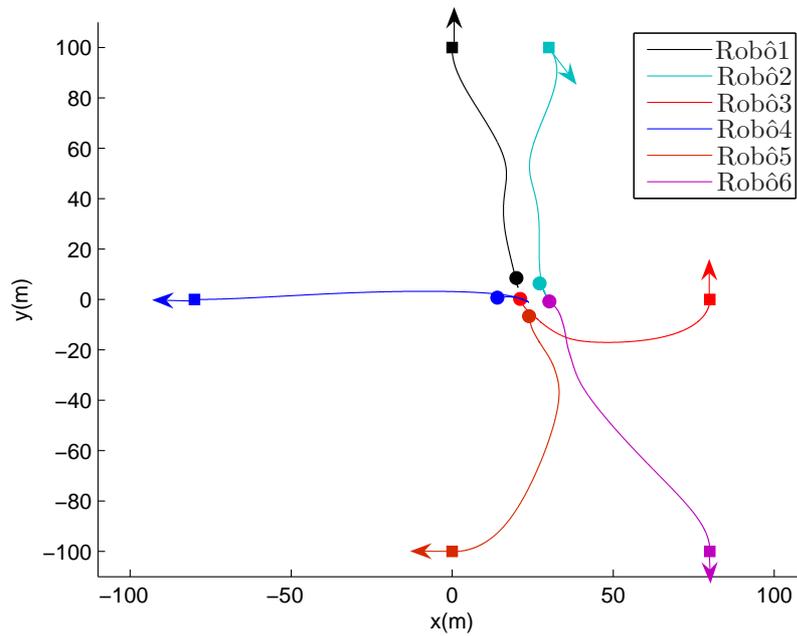


Figura 3.6: Robôs tipo carro: Trajetórias dos robôs utilizando o controlador com projeção.

Simulação 2: Tabela 3.2

Neste caso, procurou-se reproduzir uma configuração inicial da formação tal que $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$. Em particular, para as condições iniciais da tabela 3.2, $\gamma_i = \pi/2 \forall i$. Portanto, a configuração inicial da formação é semelhante à mostrada na Figura 3.5, mas com seis robôs.

O resultado de simulação é mostrado na Figura 3.9, que mostra a variação das distâncias entre robôs. Observe que estas distâncias são constantes, logo os robôs não se aproximam. Isto já era esperado, pois, como $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$, a formação está em um ponto de equilíbrio. Portanto, a configuração desejada que minimiza a função potencial V não pode ser obtida. Na próxima seção, é proposta uma lei de controle

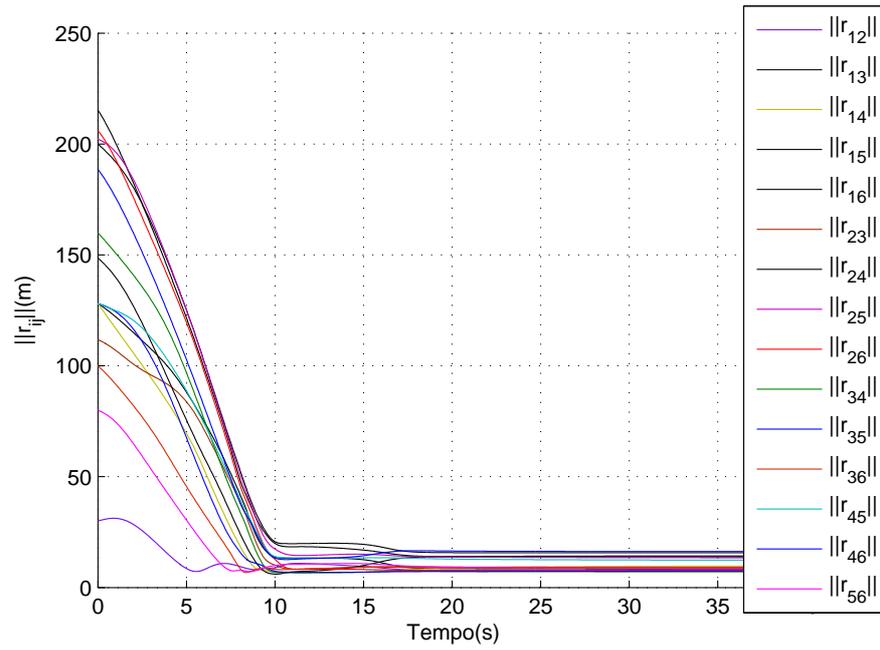


Figura 3.7: Robôs tipo carro: Distâncias entre robôs.

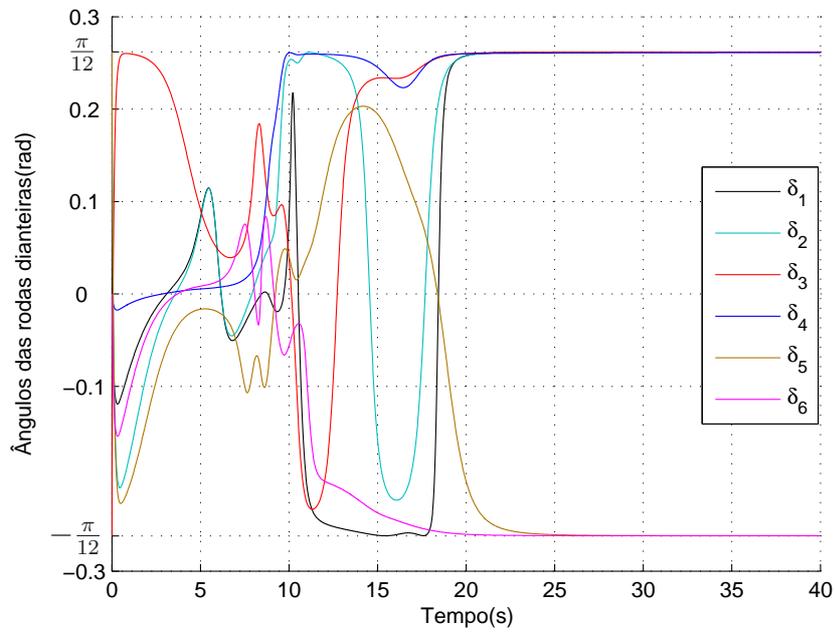


Figura 3.8: Robôs tipo carro: Variação dos ângulos de orientação das rodas dianteiras.

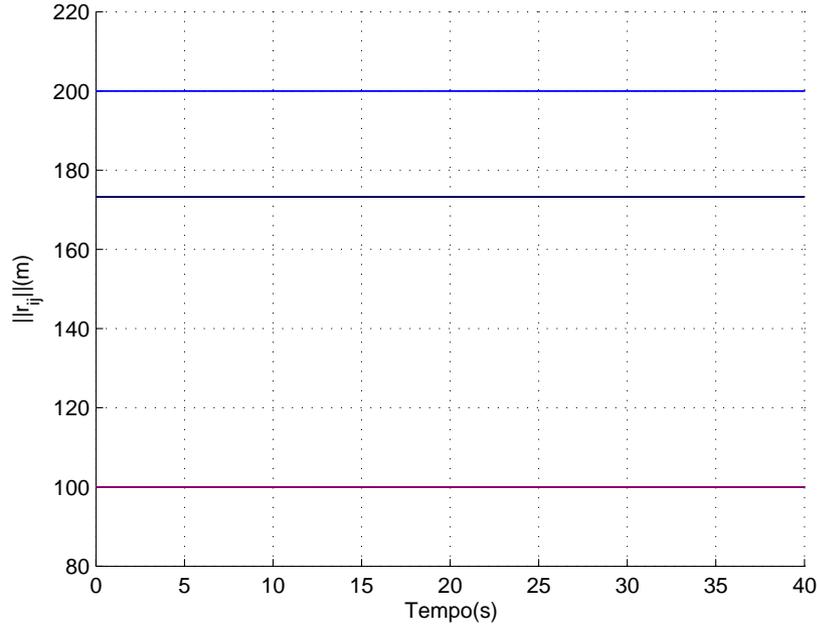


Figura 3.9: Robôs tipo carro: Distâncias entre robôs (simulação 2).

que relaxa a hipótese $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp \forall t$ para a formação que minimiza V ser alcançada, fazendo com que esta não seja mais necessária, mas apenas suficiente.

3.3 Controlador com a norma do gradiente

É proposta a seguinte lei de controle

$$u_i = \begin{cases} K_v \|f_i\| & \text{se } |\gamma_i| \leq \frac{\pi}{2} \\ -K_v \|f_i\| & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\omega_i = -K (\delta_i - \delta_{id}) \quad (3.34)$$

onde a orientação desejada das rodas dianteiras δ_{id} é dada por (3.5).

A ideia desta lei de controle é manter o robô se movimentando enquanto sua função potencial V_{si} não for minimizada (lembre-se que $f_i = -\nabla_{r_i} V_{si}$). Observe que, se houver algum robô i , tal que $\|f_i\| \neq 0$, a condição $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$ não será um ponto de equilíbrio do sistema, pois o robô i estará se movimentando ($u_i \neq 0$ neste caso). Por exemplo, no caso da Figura 3.5, os quatro robôs estarão em movimento. Além disso, note que os critérios **(a)**, **(b)** e **(c)** definidos na seção 3.1 também são atendidos. De fato, o próximo Teorema mostra que as leis de controle (3.33) e (3.34) garantem que a formação converge para uma configuração tal que $\nabla_{r_i} V_{si} S_i \rightarrow 0$. Posteriormente, o corolário 1 complementa o Teorema, mostrando que a hipótese $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp \forall t$ não é mais necessária para a formação que minimiza a função potencial do sistema V ser

alcançada.

Teorema 4 *Considere N robôs móveis com modelo cinemático (3.2), cada robô guiado pelas leis de controle (3.33)–(3.34) e trocando informações através de um grafo de comunicação variante. Se*

1. *as condições iniciais da formação $\bar{z}(0) \in \mathcal{D}_1$,*
2. *o grafo de comunicação for sempre conectado,*
3. *uma função potencial saturada for utilizada nas leis de controle (3.33)–(3.34),*

então colisões são evitadas, $\delta_i \rightarrow \delta_{id} \quad \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$ e os N robôs alcançam uma formação tal que $\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i \rightarrow 0 \quad \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$.

Prova: Uma vez que (3.33) é uma lei de controle chaveada, a demonstração do teorema segue a teoria de estabilidade de Lyapunov não-suave, apresentada por (Shevitz & Paden 1994). Portanto, é utilizada a função candidata de Lyapunov (3.14) para os dois casos seguintes:

Caso 1: $|\gamma_i| \leq \frac{\pi}{2}$

Considerando (2.17), (3.17) e usando as leis de controle (3.33) e (3.34), temos que a derivada da função candidata de Lyapunov (3.14) em função do tempo é dada por

$$\dot{W} = \sum_{i=1}^N \left[-K (\delta_i - \delta_{id})^2 + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i) \dot{\gamma}_i}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2)} - \alpha_1 K_v \nabla_{r_i} V_{s_i} S_i \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \right] \quad (3.35)$$

onde, diferenciando (3.3),

$$\dot{\gamma}_i = -\frac{K_v}{L} \tan(\delta_i) \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| + K_v L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} \|\nabla_{r_j} V_j\| \quad (3.36)$$

e L_{1i} e L_{2ij} são descritos por (2.22) e (2.23) respectivamente. Como $\|S_i\| = 1$, então

$$f_i S_i = -\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i = \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \cos(\gamma_i) \quad (3.37)$$

(vê Figura 3.3). Assim, para $|\gamma_i| \leq \pi/2$, $|\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i| = \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \cos(\gamma_i)$ e $|\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i| =$

$-\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i$. Então, após uma manipulação algébrica, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} = & \sum_{i=1}^N \left\{ -K (\delta_i - \delta_{id})^2 - \alpha_1 K_v |\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i| \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \right. \\ & + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i)}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2)} K_v L_{1_i} \sum_{j=1}^N (L_{2_{ij}} \|\nabla_{r_j} V_j\|) \\ & \left. - \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i) \tan(\delta_i) K_v}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2) L} \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \right\}. \end{aligned}$$

Notando que $-|\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i|^2 \geq -\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| |\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i|$ e usando (3.37), $\dot{\mathcal{W}}$ pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} \leq & \sum_{i=1}^N \left\{ -K (\delta_i - \delta_{id})^2 - \alpha_1 K_v (\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i)^2 \right. \\ & + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i)}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2)} K_v L_{1_i} \sum_{j=1}^N (L_{2_{ij}} \|\nabla_{r_j} V_j\|) \\ & \left. + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \tan(\delta_i) K_v}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2) L} \nabla_{r_i} V_{s_i} S_i \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando (3.11) e definindo

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_{2_{11}} & J_{2_{12}} & \cdots & J_{2_{1N}} \\ J_{2_{21}} & J_{2_{22}} & \cdots & J_{2_{2N}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ J_{2_{N1}} & J_{2_{N2}} & \cdots & J_{2_{NN}} \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$J_3 = \text{diag}(J_{31}, J_{32}, \dots, J_{3N}), \quad (3.40)$$

com

$$J_{2_{ij}} = \frac{L_{1_i} L_{2_{ij}}}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2)}, \quad (3.41)$$

e

$$J_{3i} = \frac{\tan(\delta_i)}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2) L}, \quad (3.42)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} = & -K e_\delta^T e_\delta - \alpha_1 K_v e_{\Delta r}^T e_{\Delta r} + K_v e_\delta^T C_\gamma J_2 e_\Delta \\ & - K_v e_\delta^T J_3 e_{\Delta r}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde e_δ , e_Δ e $e_{\Delta r}$ são dados por (3.19), (3.20) e (3.21), respectivamente. Então,

$$\dot{\mathcal{W}} \leq -K \|e_\delta\|^2 - \alpha_1 K_v \|e_{\Delta r}\|^2 + K_v \|e_\delta\| \|C_\gamma\| \|J_2\| \|e_\Delta\| + K_v \|e_\delta\| \|J_3\| \|e_{\Delta r}\|.$$

Contudo, sabe-se que $e_{\Delta r} = C_\gamma e_\Delta$ (ver (3.28)).

Então, conclui-se que $\|C_\gamma\| \|e_\Delta\| \leq \beta_a \|e_{\Delta r}\|$ onde $\beta_a > 0$. Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & -K \|e_\delta\|^2 - \alpha_1 K_v \|e_{\Delta r}\|^2 + K_v \beta_a \|e_\delta\| \|J_2\| \|e_{\Delta r}\| \\ & + K_v \|e_\delta\| \|J_3\| \|e_{\Delta r}\|. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Assumindo que $\bar{z} \in \mathcal{D}_1$, existem constantes finitas \bar{J}_2, \bar{J}_3 tais que $\|J_2\| < \bar{J}_2$ e $\|J_3\| < \bar{J}_3$. Portanto,

$$\dot{W} \leq -e^T \overbrace{\begin{bmatrix} K & -0.5 \bar{J}_4 \\ -0.5 \bar{J}_4 & \alpha_1 K_v \end{bmatrix}}^C e \quad (3.45)$$

onde $e^T = [\|e_\delta\| \quad \|e_{\Delta r}\|]$ e $\bar{J}_4 = K_v(\beta_a \bar{J}_2 + \bar{J}_3)$.

Assim, para $\dot{W} < 0$ o complemento de Shur de C deve satisfazer

$$K - \frac{\bar{J}_4^2}{4\alpha_1 K_v} > 0. \quad (3.46)$$

Então, (3.46) será satisfeito se

$$K > \frac{\bar{J}_4^2}{4\alpha_1 K_v}. \quad (3.47)$$

Portanto, se (3.47) for satisfeito, o conjunto \mathcal{D}_1 é invariante (portanto não há colisão entre veículos e a assumida limitação de $\|J_1\|$, $\|J_2\|$ e $\|J_3\|$ é válida) e $\|e\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, bem como $\|e_{\Delta r}\|$ e $\|e_\delta\|$. Então, de (3.19) e (3.21), pode-se concluir que $\delta_i \rightarrow \delta_{id}$ e $\nabla_{ri} V_{si} S_i \rightarrow 0 \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$.

Caso 2: $|\gamma_i| > \frac{\pi}{2}$

Usando o mesmo desenvolvimento matemático usado no caso (1), conclui-se que a derivada da função candidata de Lyapunov (3.14) em função do tempo é dada por

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \sum_{i=1}^N \left[-K (\delta_i - \delta_{id})^2 + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i) \dot{\gamma}_i}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2)} \right. \\ & \left. - \alpha_1 K_v |\nabla_{ri} V_{si} S_i| \|\nabla_{ri} V_{si}\| \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde somente $\dot{\gamma}_i$ é mudado para

$$\dot{\gamma}_i = \frac{K_v}{L} \tan(\delta_i) \|\nabla_{ri} V_{si}\| - K_v L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} \|\nabla_{r_j} V_j\|. \quad (3.49)$$

Contudo, usando novamente (3.37), pode-se concluir agora, que $\nabla_{ri} V_{si} S_i =$

$|\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i|$. Então,

$$\dot{W} = -K e_\delta^T e_\delta - \alpha_1 K_v e_{\Delta r}^T e_{\Delta r} - K_v e_\delta^T C_\gamma J_2 e_\Delta + K_v e_\delta^T J_3 e_{\Delta r}. \quad (3.50)$$

Assim, \dot{W} é descrito por (3.44) e a prova segue a mesmo desenvolvimento do caso (1). \blacksquare

Observe que o Teorema 4 não garante que $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \rightarrow 0 \forall i$ ($\|e_\Delta\| \rightarrow 0$). Contudo, o próximo corolário mostra que, mesmo com $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$, a formação alcança uma configuração que minimiza V , se a matriz $(D_t(\delta) - L_a)$ for não singular onde $D_t(\delta)$ é descrito por (3.31).

Corolário 1 *Considere uma formação com N robôs móveis tipo carro, cada robô guiado pelas leis de controle (3.33)–(3.34). Então, a formação alcança uma configuração que minimiza V se $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp \forall t$. Além disso, se, em algum instante, $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$, mas a matriz $(D_t(\delta) - L_a)$ for não singular, então $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$ não é um ponto de equilíbrio da formação e V também será minimizado.*

Prova: Se $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp$, como $\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i \rightarrow 0 \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$ ($\|e_{\Delta r}\| \rightarrow 0$), pode-se concluir, de (3.28), que $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \rightarrow 0 \forall i$ ($\|e_\Delta\| \rightarrow 0$) e V é minimizado. Contudo, o caso crítico é $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$. Em particular, deve-se primeiramente provar que a formação guiada pelas leis de controle (3.33)–(3.34) não está em um ponto de equilíbrio se $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$. Para isto, deve-se mostrar que $\dot{\gamma}, \dot{r} \neq 0$. Contudo, de (3.49) conclui-se que

$$\dot{\gamma} = -K_v D_t(\delta) e_\Delta + K_v L_a e_\Delta.$$

Portanto,

$$\dot{\gamma} = -K_v (D_t(\delta) - L_a) e_\Delta. \quad (3.51)$$

Além disso, sabe-se que

$$\dot{r} = S e_\Delta. \quad (3.52)$$

Analisando $\dot{\gamma}$ e \dot{r} , observa-se que se $\|e_\Delta\| \neq 0$ os robôs estarão se movimentando e a formação não estará em equilíbrio, pois S tem posto completo. Logo, a condição de equilíbrio independe de $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$. Portanto, diferentemente do Teorema 3, a condição de equilíbrio da formação é obrigatoriamente $\|e_\Delta\| = 0$. Então, se a formação estiver em equilíbrio, V é minimizado. Contudo, este fato não implica necessariamente, que, enquanto $\|e_\Delta\| \neq 0$, a formação estará convergindo para uma configuração que minimiza V . De fato, note, da Figura 3.5 (onde $\gamma_i = \pi/2 \forall i$), que os robôs se manterão sobre uma trajetória circular, se $\delta_i = \delta_{id} \forall i$ e seus raios de curvatura mínimos forem maiores que o raio do círculo (ou a curvatura máxima de cada robô for menor que a curvatura do círculo). Nesta situação, para todo t , teríamos $\|\dot{\gamma}\| = 0$ e $\|\dot{r}\| \neq 0$. Na verdade, para a configuração da formação tal que $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$ ocorrer e

ser mantida, deve-se ter pelo menos um robô com $\gamma_i = \pi/2$ (caso contrário C_γ teria posto completo e $\mathcal{S}_C = \emptyset$) e $\dot{\gamma}_i = 0$. Então, deve-se ter $\|\dot{\gamma}\| = 0$. Contudo, de (3.51), observa-se que, para $\|e_\Delta\| \neq 0$ (V ainda não foi minimizado), a condição necessária para $\|\dot{\gamma}\| = 0$ é a matriz $D_t(\delta) - L_a$ ser singular. Assim, $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$ não será mantido se a matriz $D_t(\delta) - L_a$ for não singular. Portanto, a formação estará convergindo para o mínimo de V .

■

Observação 4 *Considere que todos os robôs têm raio de curvatura mínimo igual a ρ_{min} (equivalentemente $\rho_{min_i} = \rho_{min} \quad \forall i$) e defina*

$$D(\rho_{min}) = \text{diag} \left(\pm \frac{1}{\rho_{min}}, \dots, \pm \frac{1}{\rho_{min}} \right). \quad (3.53)$$

Então, pode-se concluir que

$$D_t(\delta) = D(\rho_{min}) \quad (3.54)$$

se $\delta_i = \delta_{id} \quad \forall i$ e todos os robôs forem ortogonais às suas forças artificiais resultantes (equivalentemente $\gamma_i = \pi/2 \quad \forall i$). De fato, analisando (3.4) e (3.5) para $\gamma_i = \pi/2$ e $\delta_i = \delta_{id}$, conclui-se que

$$\frac{1}{L} \tan(\delta_{id}) = \frac{1}{\rho_{min}}. \quad (3.55)$$

Portanto, substituindo (3.55) em (3.31), obtém-se (3.54). Assim, a condição para $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$ não ser mantido passa a ser $D(\rho_{min}) - L_a$ ser não singular, o que ocorre se $1/\rho_{min}$ não for um autovalor da matriz L_a . Portanto, se $1/\rho_{min}$ não for um autovalor da matriz L_a , a formação estará convergindo para o mínimo de V .

À seguir, são apresentados os resultados de simulação utilizando as leis de controle (3.33) e (3.34).

3.3.1 Resultados de simulação

Foram feitas simulações utilizando as condições iniciais da tabela 3.2. Lembre-se que, para estas condições iniciais, $\gamma_i = \pi/2 \quad \forall i$, que era uma condição de equilíbrio da formação para os controladores (3.9) e (3.10). O objetivo é confirmar, através de simulações, o resultado obtido no Corolário 1.

A função potencial, os ganhos do controlador e os parâmetros cinemáticos dos robôs são os mesmos das simulações da seção anterior, ou seja,

1. $c = 3m$
2. $r_d = 10m$
3. $R_s = 300m$

4. $K = 10$
5. $K_v = 5$
6. $L = 3m$
7. $|\delta_i| \leq 15^\circ$.

A Figura 3.10 mostra as trajetórias dos robôs até alcançarem a formação e a Figura 3.11 a variação das distâncias entre estes. Observe que não há colisão entre robôs ($\|r_{ij}\| > 3m \ \forall i \neq j$). A restrição de curvatura da trajetória pode ser

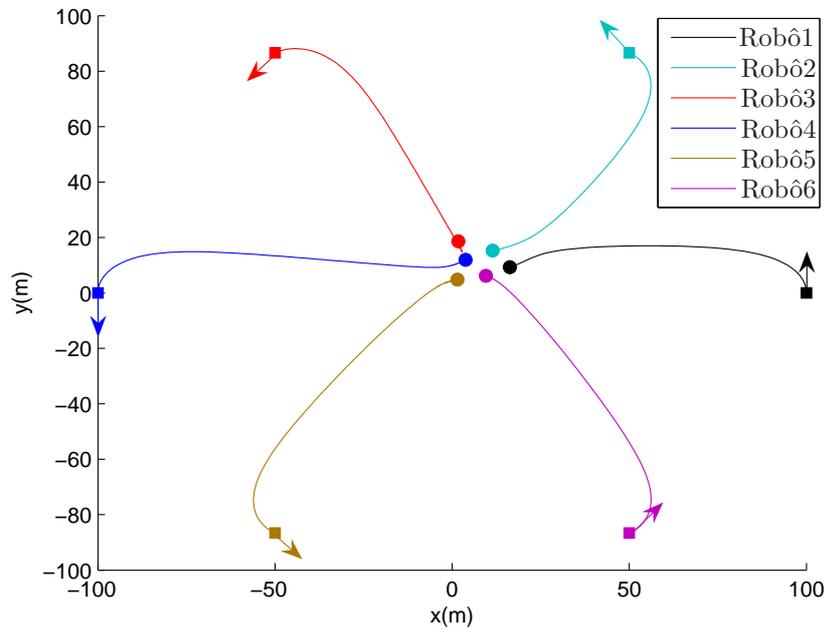


Figura 3.10: Robôs tipo carro: Trajetórias dos robôs.

observada na Figura 3.12, onde $|\delta_i| \leq \pi/12 \ \forall i$ e $\forall t$. Finalmente, a Figura 3.13 mostra as variações das velocidades dos robôs até alcançarem a formação. Observe que há uma variação abrupta da direção das velocidades entre 9 e 13 segundos. Isto ocorre quando os robôs estão próximos ao mínimo da função potencial e é um problema do ponto de vista prático. Na próxima seção, é proposta uma lei de controle que minimiza este problema.

Um ponto importante, é que neste capítulo não foi considerado o escorregamento lateral do robô (*drift*). Contudo, na prática, esta hipótese gera uma restrição na relação entre a velocidade do robô e a curvatura da trajetória. Em outras palavras, para desconsiderar o escorregamento lateral, o produto entre curvatura de trajetória e velocidade do robô $\mathcal{K}_i u_i$ deve ser limitado por um valor que varia de acordo com o tipo do terreno (ver Shimoda et al. (2005) para mais detalhes). De fato, um carro

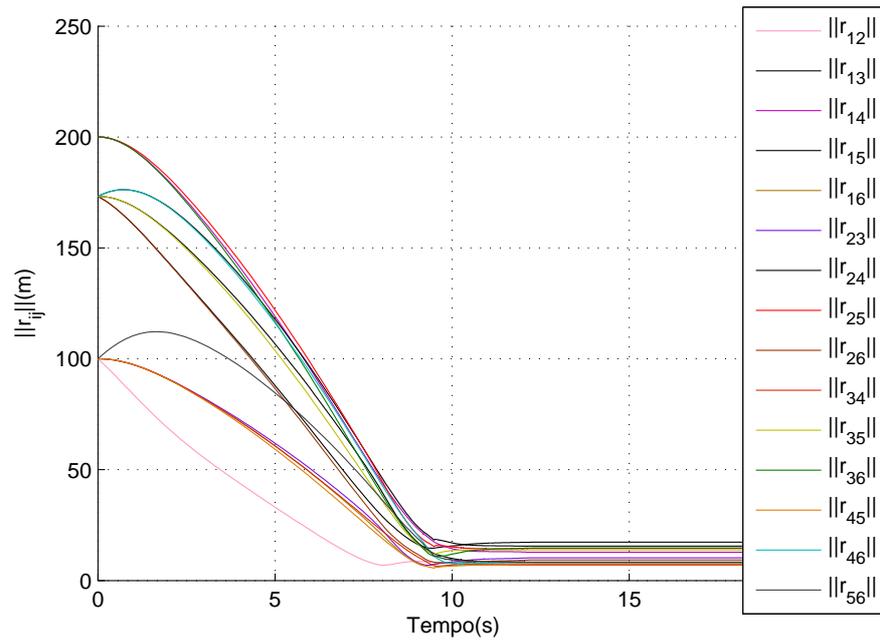


Figura 3.11: Robôs tipo carro: Distâncias entre robôs.

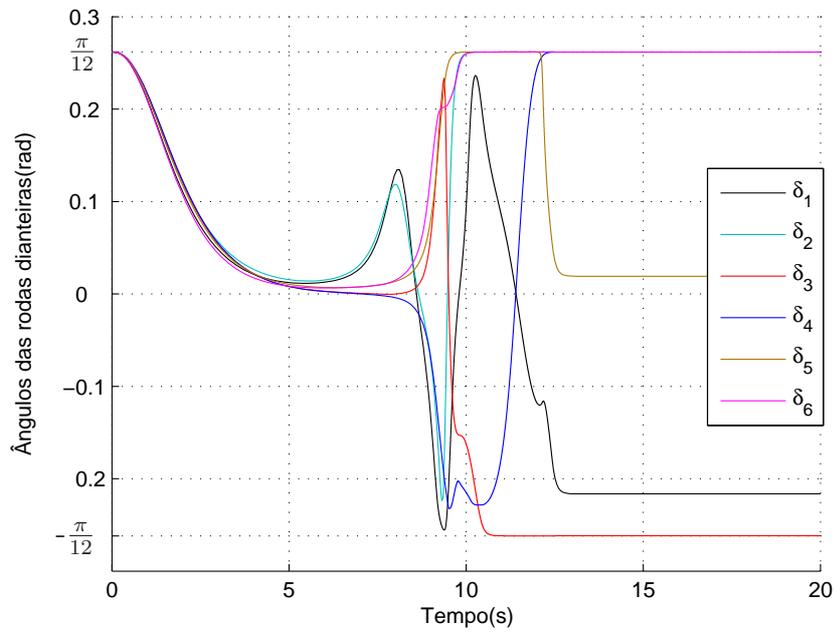


Figura 3.12: Robôs tipo carro: Variação dos ângulos de orientação das rodas dianteiras.

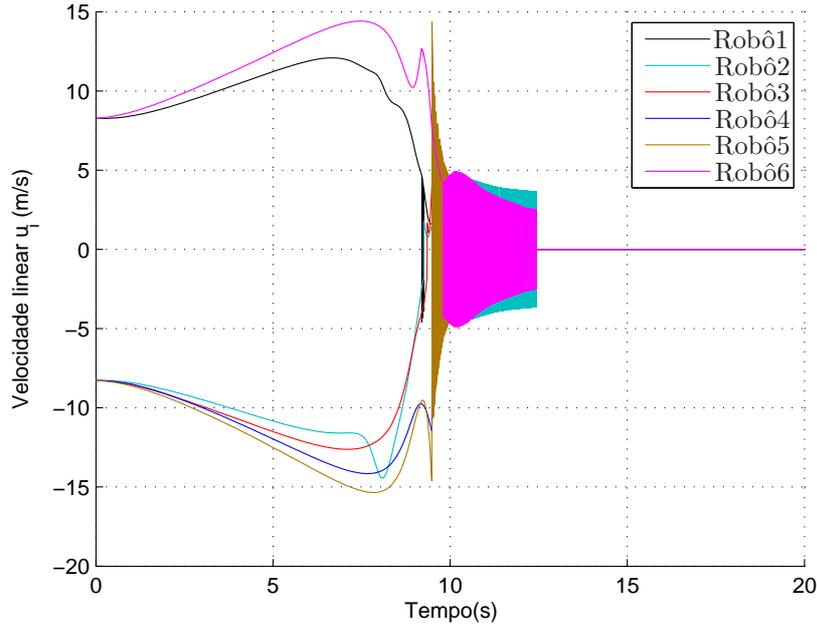


Figura 3.13: Robôs tipo carro: Velocidades dos robôs.

derrapa se tentar seguir uma trajetória de curvatura elevada (curva “fechada”) em alta velocidade. Para analisar o produto entre curvatura e velocidade, a Figura 3.14 mostra a variação de $\mathcal{K}_i u_i$ para todos os robôs da formação.

Na próxima seção é proposto um controlador de formação, cuja a hipótese $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp$ também não é necessária para minimizar a função potencial do sistema V . Contudo, este controlador apresenta menor produto entre velocidade do robô e a curvatura da trajetória, reduzindo a possibilidade de ocorrer escorregamento lateral. Vale ressaltar também que a lei de controle proposta na próxima seção reduz significativamente a variação abrupta da direção de velocidade dos robôs próximo ao mínimo da função potencial (ver Figura 3.13).

3.4 Controlador com *bias*

É proposta a seguinte lei de controle:

$$u_i = \begin{cases} \epsilon \|f_i\| + K_v f_i S_i & \text{se } |\gamma_i| \leq \frac{\pi}{2} \\ -\epsilon \|f_i\| + K_v f_i S_i & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\omega_i = -K (\delta_i - \delta_{id}) \quad (3.57)$$

onde a orientação desejada das rodas dianteiras δ_{id} é dada por (3.5).

A ideia desta lei de controle é produzir uma baixa velocidade do robô quando

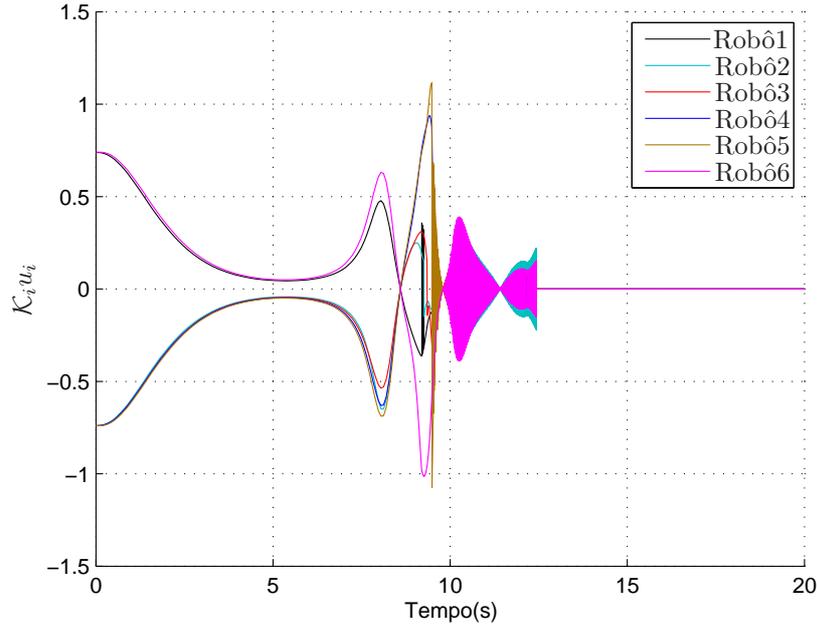


Figura 3.14: Robôs tipo carro: Produto entre curvatura de trajetória e velocidade dos robôs.

a curvatura de trajetória for máxima, o que ocorre quando $|\gamma_i| = \pi/2$. Para isto, ϵ deve ser escolhido pequeno de forma que $\epsilon \|f_i\|$ também seja. Desta forma, como $f_i S_i = 0$ para $|\gamma_i| = \pi/2$ (f_i é ortogonal a S_i nesta situação), se $|\gamma_i| = \pi/2$ o sinal de velocidade u_i será função apenas de $\epsilon \|f_i\|$ e o robô terá sua velocidade reduzida quando a curvatura for máxima. Espera-se assim, reduzir a possibilidade de ocorrer um escorregamento lateral. Observe que (3.56) é uma soma de (3.9) e (3.33) com K_v substituído por ϵ em (3.33). Portanto, seguindo a mesma argumentação da seção anterior, mostra-se também nesta seção, que o termo *bias* $\epsilon \|f_i\|$ garante que a hipótese $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp$ é suficiente mas não é necessária para a formação alcançar uma configuração que minimiza V . Então, como primeiro passo, o próximo Teorema atesta que as leis de controle (3.56) e (3.57) garantem que $\delta_i \rightarrow \delta_{id} \quad \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$ e os N robôs alcançam uma formação tal que $\nabla_{r_i} V_{si} S_i \rightarrow 0 \quad \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 5 *Considere N robôs móveis com modelo cinemático (3.2), cada robô guiado pelas leis de controle (3.56)–(3.57) e trocando informação através de um grafo de comunicação variante. Se*

1. $\bar{z}(0) \in \mathcal{D}_1$,
2. o grafo de comunicação for sempre conectado,
3. uma função potencial saturada for utilizada em (3.56)–(3.57),

então colisões são evitadas, $\delta_i \rightarrow \delta_{id} \quad \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$ e os N robôs alcançam uma formação tal que $\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i \rightarrow 0 \quad \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$.

Prova:

É utilizada uma argumentação semelhante à da prova do Teorema 4. Portanto, são analisados os mesmos dois casos.

Case 1: $|\gamma_i| \leq \frac{\pi}{2}$

Considere a função candidata de Lyapunov (3.14). Então, considerando (2.17), (3.17) e usando as leis de controle (3.56) e (3.57), temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} = & \sum_{i=1}^N \left[-K (\delta_i - \delta_{id})^2 + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i) \dot{\gamma}_i}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2)} \right. \\ & \left. - \alpha_1 \epsilon |\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i| \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| - \alpha_1 K_v (\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde, diferenciando (3.3) e lembrando que L_{1i} e L_{2ij} são descritos por (2.22) e (2.23) respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i = & \frac{K_v}{L} \tan(\delta_i) \nabla_{r_i} V_{s_i} S_i - K_v L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} \nabla_{r_j} V_j R_j \\ & - \frac{\epsilon}{L} \tan(\delta_i) \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| + \epsilon L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} \|\nabla_{r_j} V_j\|. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Então, usando o fato que $\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i = -|\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i|$ e (3.37), pode-se concluir que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} = & \sum_{i=1}^N \left\{ -K (\delta_i - \delta_{id})^2 - \alpha_1 \epsilon |\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i| \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \right. \\ & + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i)}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2)} \epsilon L_{1i} \sum_{j=1}^N (L_{2ij} \|\nabla_{r_j} V_j\|) \\ & - \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i) \tan(\delta_i) \epsilon}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2) L} \|\nabla_{r_i} V_{s_i}\| \\ & - \alpha_1 K_v (\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i)^2 \\ & + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i)}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2)} K_v L_{1i} \sum_{j=1}^N (L_{2ij} |\nabla_{r_j} V_j R_j|) \\ & \left. - \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i) \tan(\delta_i)}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2) L} K_v |\nabla_{r_i} V_{s_i} S_i| \right\} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Como $-|\nabla_{r_i} V_{si} S_i|^2 \geq -\|\nabla_{r_i} V_{si}\| |\nabla_{r_i} V_{si} S_i|$ e usando (3.37), temos

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{W}} \leq & \sum_{i=1}^N \left\{ -K (\delta_i - \delta_{id})^2 - \alpha_1 (\epsilon + K_v) (\nabla_{r_i} V_{si} S_i)^2 \right. \\
& + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i)}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2)} \epsilon L_{1_i} \sum_{j=1}^N (L_{2_{ij}} \|\nabla_{r_j} V_j\|) \\
& + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \tan(\delta_i) \epsilon}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2) L} \nabla_{r_i} V_{si} S_i \\
& + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i)}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2)} K_v L_{1_i} \sum_{j=1}^N (L_{2_{ij}} |\nabla_{r_j} V_j R_j|) \\
& \left. - \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i) \tan(\delta_i)}{\rho_{min}(1 + L^2 K_{id}^2) L} K_v |\nabla_{r_i} V_{si} S_i| \right\}. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Contudo, usando (3.11), (3.22), (3.39) e (3.40), então

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{W}} = & -K e_\delta^T e_\delta - \alpha_1 (\epsilon + K_v) e_{\Delta_r}^T e_{\Delta_r} + \epsilon e_\delta^T C_\gamma J_2 e_{\Delta_r} \\
& - \epsilon e_\delta^T J_3 e_{\Delta_r} + K_v e_\delta^T J_1 e_{\Delta_r}. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{W}} \leq & -K \|e_\delta\|^2 - \alpha_1 (\epsilon + K_v) \|e_{\Delta_r}\|^2 + \epsilon \beta_a \|e_\delta\| \|J_2\| \|e_{\Delta_r}\| \\
& + \epsilon \|e_\delta\| \|J_3\| \|e_{\Delta_r}\| + K_v \|e_\delta\| \|J_1\| \|e_{\Delta_r}\|. \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Então, assumindo que $\bar{z} \in \mathcal{D}_1$, conclui-se que

$$\dot{\mathcal{W}} \leq -e^T \overbrace{\begin{bmatrix} K & -0.5 \bar{J}_4 \\ -0.5 \bar{J}_4 & \alpha_1 (\epsilon + K_v) \end{bmatrix}}^C e \tag{3.64}$$

onde $\|J_1\| < \bar{J}_1$, $\|J_2\| < \bar{J}_2$, $\|J_3\| < \bar{J}_3$ e $\bar{J}_4 = K_v \bar{J}_1 + \epsilon (\beta_a \bar{J}_2 + \bar{J}_3)$.

Então, usando o complemento de Shur, tem-se $\dot{\mathcal{W}} < 0$ se

$$K > \frac{\bar{J}_4^2}{4\alpha_1 (\epsilon + K_v)}. \tag{3.65}$$

Assim, a demonstração é finalizada utilizando a mesma argumentação do caso (1) do Teorema 4.

Case 2: $|\gamma_i| > \frac{\pi}{2}$

Considerando a mesma função de Lyapunov e desenvolvimento do caso (1),

obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{W} = \sum_{i=1}^N \left[-K (\delta_i - \delta_{id})^2 + \frac{(\delta_i - \delta_{id}) \cos(\gamma_i) \dot{\gamma}_i}{\rho_{min} (1 + L^2 K_{id}^2)} \right. \\ \left. - \alpha_1 \epsilon |\nabla_{ri} V_{si} S_i| \|\nabla_{ri} V_{si}\| - \alpha_1 K_v (\nabla_{ri} V_{si} S_i)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde somente $\dot{\gamma}_i$ é mudado para

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i = \frac{K_v}{L} \tan(\delta_i) |\nabla_{ri} V_{si} S_i| - K_v L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} |\nabla_{rj} V_j R_j| \\ \frac{\epsilon}{L} \tan(\delta_i) \|\nabla_{ri} V_{si}\| - \epsilon L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} \|\nabla_{rj} V_j\| \end{aligned} \quad (3.67)$$

Então,

$$\begin{aligned} \dot{W} = -K e_\delta^T e_\delta - \alpha_1 (\epsilon + K_v) e_{\Delta r}^T e_{\Delta r} + \epsilon e_\delta^T C_\gamma J_2 e_\Delta \\ - \epsilon e_\delta^T J_3 e_{\Delta r} - K_v e_\delta^T J_1 e_{\Delta r}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Assim, \dot{W} é descrito por (3.63) e a prova segue a mesma linha do caso (1). \blacksquare

Como no Teorema 4, o Teorema 5 também não garante que $\|\nabla_{ri} V_{si}\| \rightarrow 0 \forall i$ ($\|e_\Delta\| \rightarrow 0$). Contudo, seguindo a argumentação do corolário 1, o próximo corolário também mostra que, $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$ é suficiente mas não é necessário para a formação alcançar uma configuração que minimiza V .

Corolário 2 *Considere uma formação com N robôs tipo carro, cada robô guiado pelas leis de controle (3.56)–(3.57). Então, a formação alcança uma configuração que minimiza V se $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp$. Além disso, se em algum instante $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$, mas a matriz $(D_t(\delta) - L_a)$ for não singular, então $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$ não se manterá e V também será minimizado.*

Prova: Ver a prova do corolário 1 para o caso em que $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp$. Aqui é abordado somente o caso crítico $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$, cuja prova apresenta algumas modificações com relação ao corolário 1. Portanto, deve-se primeiramente provar que, para $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$, $\dot{\gamma}, \dot{r} \neq 0$. Contudo, de (3.59), conclui-se que

$$\dot{\gamma} = -\epsilon D_t(\delta) e_\Delta + \epsilon L_a e_\Delta + K_v D_t(\delta) e_{\Delta r} - K_v L_a e_{\Delta r}.$$

Assim, como $e_{\Delta r} \rightarrow 0$ ($\nabla_{ri} V_{si} S_i \rightarrow 0 \forall i$) e $e_{\Delta r} = C_\gamma e_\Delta$, $C_\gamma e_\Delta \rightarrow 0$. Então, após um transitório, $\dot{\gamma}$ pode ser descrito por

$$\dot{\gamma} = -\epsilon (D_t(\delta) - L_a) e_\Delta \quad (3.69)$$

e a prova segue igual à prova do corolário 1. ■

À seguir são apresentados os resultados de simulação utilizando as leis de controle (3.56) e (3.57).

3.4.1 Resultados de simulação

São utilizadas as condições iniciais da tabela 3.2. A função potencial, os parâmetros cinemáticos do modelo e os parâmetros do controlador são os mesmos das seções anteriores acrescidos de

- $\epsilon = 0.01$.

A Figura 3.15 mostra as trajetórias dos robôs até alcançarem a formação e a Figura 3.16 a variação das distâncias entre estes. Observe novamente que não há

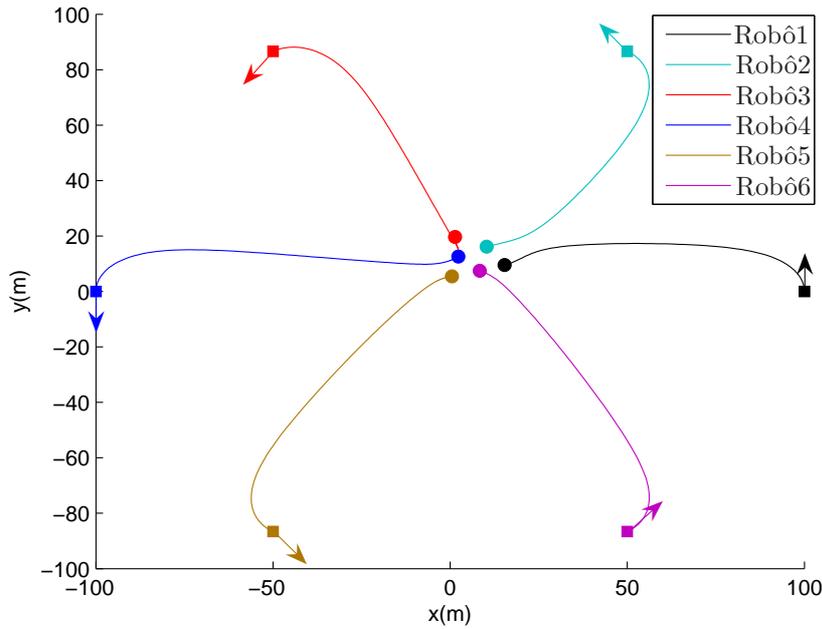


Figura 3.15: Robôs tipo carro: Trajetórias dos robôs.

colisão entre robôs. A variação dos ângulos de orientação das rodas dianteiras é mostrada na Figura 3.17. Note que, como era esperado, $|\delta_i| < \pi/12 \quad \forall i$. Portanto, os robôs estão respeitando a restrição de curvatura. Já a variação das velocidades dos robôs é mostrada na Figura 3.18. Observe que, como ϵ é escolhido pequeno com relação a K_v , não ocorre variação abrupta das velocidades dos robôs, como ocorreu na Figura 3.13. Observe também, que os robôs possuem baixa velocidade inicial. Isto ocorre pelo fato de, no instante inicial, $\gamma_i = \pi/2 \quad \forall i$. Consequentemente, neste instante, só o termo *bias* influencia na lei de controle u_i . Lembre-se que o termo

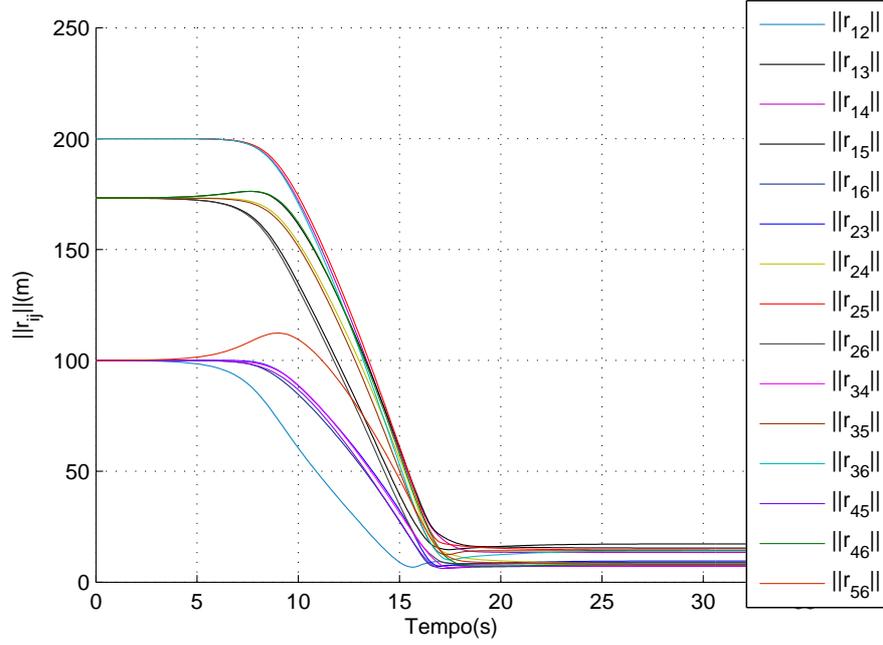


Figura 3.16: Robôs tipo carro: Distâncias entre robôs.

bias é utilizado na lei de controle para evitar o escorregamento lateral. Observe então, na Figura 3.19, que o módulo do produto entre a curvatura da trajetória e a velocidade do robô apresenta menor amplitude se comparado com o gráfico da Figura 3.14. Portanto, se comparado à lei de controle de formação da seção anterior, a possibilidade de ocorrer escorregamento lateral dos robôs é menor utilizando a lei de controle de formação com *bias*

3.5 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os três controladores propostos nesta tese para resolver o problema de controle de formação de robôs móveis não holonômicos com restrição de curvatura de trajetória (robôs tipo carro). Os três controladores são descentralizados, mostraram-se aptos a evitar colisão entre robôs e utilizaram a estratégia de função potencial. Foi utilizada uma função potencial saturada e deslocada, o que permitiu definir uma região de vizinhança para cada robô e evitar colisão considerando suas dimensões. Mostrou-se que o primeiro controlador proposto, denominado controlador com projeção, garante a convergência da formação para uma configuração que minimiza V se e somente se $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp \quad \forall t$, onde \mathcal{S}_C^\perp é o complemento ortogonal de \mathcal{S}_C , o espaço nulo da matriz C_γ . Mostrou-se então, que a hipótese $e_\Delta \in \mathcal{S}_C^\perp \quad \forall t$ não é mais necessária (embora seja suficiente) para o segundo (controlador com a norma do vetor gradiente) e terceiro (controlador com *bias*) con-

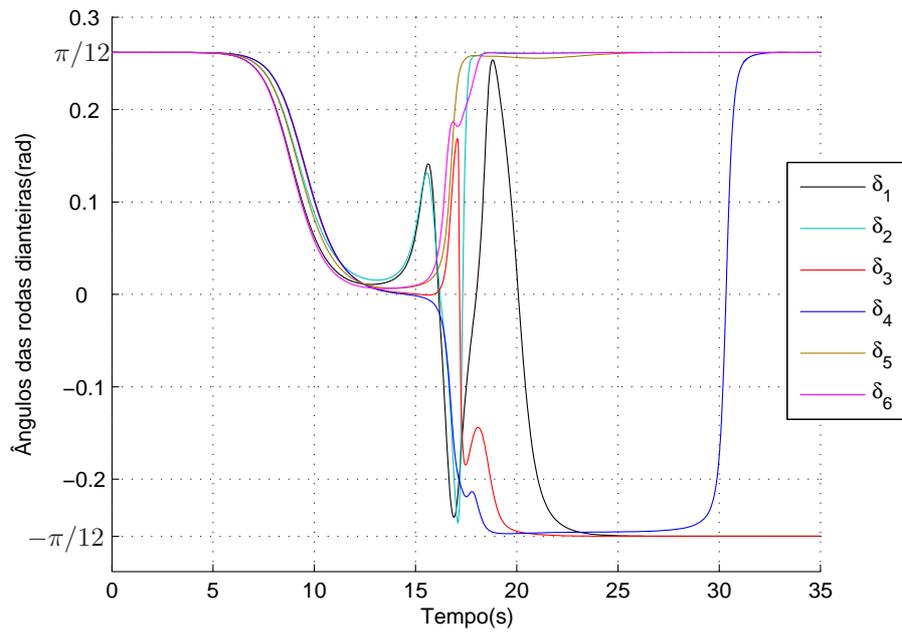


Figura 3.17: Robôs tipo carro: Variação dos ângulos de orientação das rodas dianteiras.

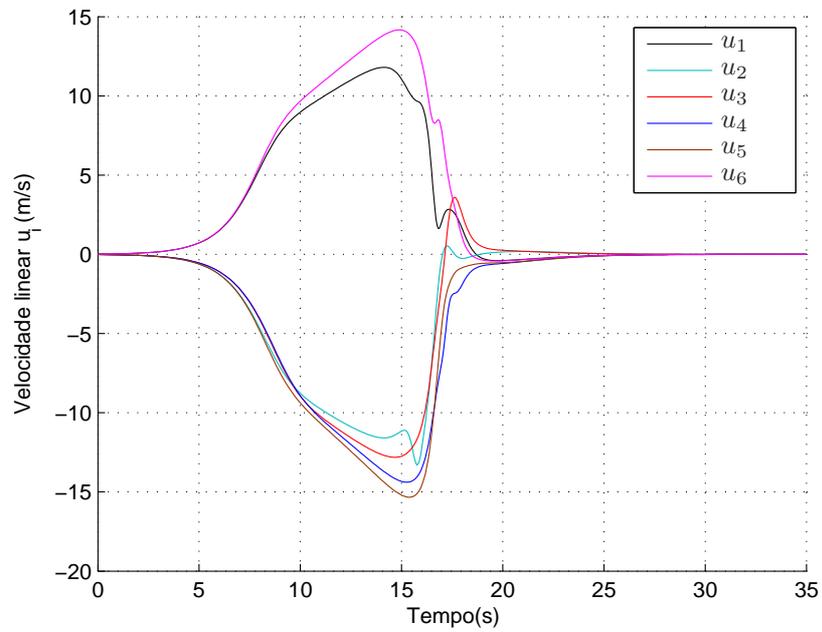


Figura 3.18: Robôs tipo carro: Velocidades dos robôs.

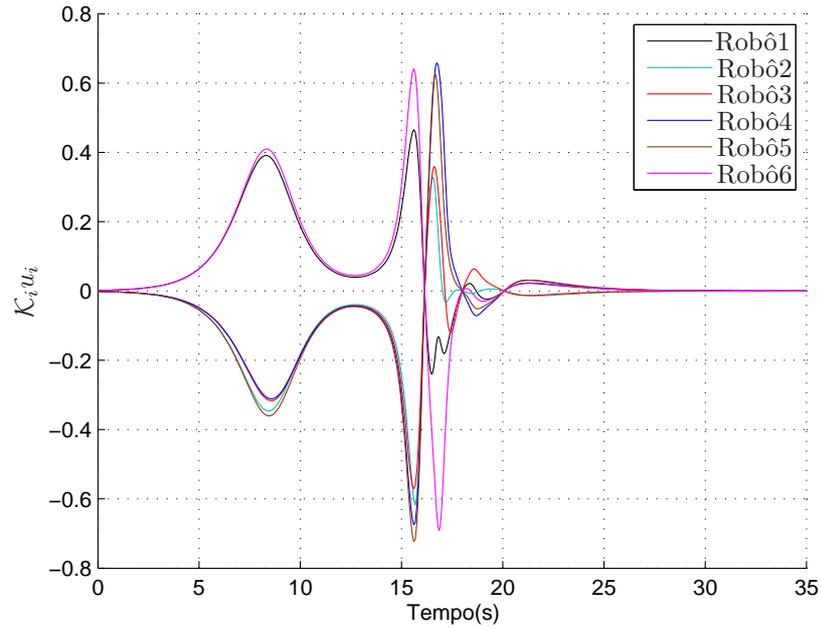


Figura 3.19: Robôs tipo carro: Produto entre curvatura de trajetória e velocidade dos robôs.

troladores, contanto que a matriz $D_t(\delta) - L_a$ seja não singular quando $e_\Delta \in \mathcal{S}_C$. Foram apresentados resultados de simulações, que confirmaram os resultados teóricos obtidos, permitindo comparar o desempenho dos três controladores. Verificou-se então, comparando o desempenho do segundo e terceiro controlador, que os robôs estão menos suscetíveis ao escorregamento lateral quando o terceiro controlador de formação é utilizado.

Capítulo 4

Controle adaptativo de formação de robôs móveis não-holonômicos dinâmicos

No capítulo anterior, foi abordado o problema de controle de formação de robôs móveis não-holonômicos cinemáticos. No entanto, sabe-se que quando é exigida uma alta velocidade dos robôs, sua dinâmica não pode ser desprezada. Como exemplo, considere o caso onde se deseja que os robôs alcancem uma formação em um período máximo de tempo. Isto pode exigir dos robôs uma velocidade tal que, os seus parâmetros dinâmicos influenciem no desempenho do controle de formação. Neste contexto, foram desenvolvidos trabalhos buscando controlar a formação de um conjunto de robôs móveis não-holonômicos considerando seus modelos dinâmicos. Entre os trabalhos desenvolvidos, pode-se citar (Dimarogonas & Kyriakopoulos 2005), onde as entradas de controle dos modelos utilizados são a aceleração translacional e a velocidade rotacional. Portanto a dinâmica é considerada somente no movimento de translação. Além disso, os parâmetros dinâmicos são considerados conhecidos. Uma abordagem de consenso é utilizada em (Dong & Farrell 2009), onde os parâmetros dinâmicos são considerados incertos e a técnica de *backstepping* é utilizada para desenvolver uma lei de controle descentralizada que garante a estabilidade da formação. Entretanto, o problema de colisão entre os agentes não é considerado. Portanto, implementar uma lei de controle que considere as dinâmicas dos robôs e evite colisão é um problema ainda pouco abordado na literatura.

Uma alternativa para controlar a formação e evitar colisão é utilizar a abordagem de função potencial. No entanto, os trabalhos que utilizam esta abordagem geralmente tratam da formação de robôs holonômicos (ver Murray (2007) e suas referências) ou não-holonômicos (ver Mastellone et al. (2008)) com modelo cinemático. Na verdade, para robôs não-holonômicos, poucos trabalhos consideram a dinâmica,

e os que o fazem, a consideram conhecida. No entanto, em determinadas tarefas, os parâmetros dinâmicos não podem ser determinados com precisão. Por exemplo, em tarefas de transporte de cargas, o peso dos robôs varia de acordo com o peso da carga a ser transportada. Esta variação pode prejudicar o desempenho do controlador, principalmente se for exigida uma velocidade mais alta no transporte da carga. Neste contexto, a utilização de um controlador de formação adaptativo que tenha maior robustez à variação dos parâmetros dinâmicos dos robôs é sem dúvida relevante.

Neste capítulo, é abordado o problema de controle de formação de robôs móveis não-holonômicos com parâmetros dinâmicos desconhecidos. As leis de controle projetadas são descentralizadas, se baseiam em funções potenciais e estão aptas a evitar colisões entre os robôs. Para projetar as leis de controle, é utilizada, para cada robô, uma estratégia de controle em cascata, que combina um controle cinemático com um controlador de movimento adaptativo que leva em consideração a dinâmica não linear desconhecida, levando a um sistema adaptativo globalmente estável.

A estratégia em cascata é aplicada no controle de formação de uniciclos (seção 4.2) e robôs com acionamento diferencial (seção 4.3). Na seção 4.4 são apresentados os resultados de simulação, tanto para robôs uniciclos como para robôs com acionamento diferencial.

4.1 Definições e descrição do problema

Nesta seção são apresentadas algumas definições e propriedades úteis para o desenvolvimento do controlador de formação. Considere então um conjunto de N robôs móveis não-holonômicos dinâmicos. Para $i = 1, \dots, N$, a dinâmica de cada robô é descrita por:

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i = B_i(q_i)\tau_i + J^T(q_i)\lambda_i, \quad (4.1)$$

$$J(q_i)\dot{q}_i = 0, \quad (4.2)$$

onde

- $J(q_i) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ é o vetor, associado a restrição não-holonômica, que define o espaço de direções de movimento não permitidas.
- $\lambda_i \in \mathbb{R}$ é o multiplicador da restrição,
- $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é o momento de inércia generalizado,
- $C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i \in \mathbb{R}^3$ é a força de Coriolis e centrípeta,

- $\tau_i \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de entradas,
- $B_i(q_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ é uma matriz de entrada,
- $q_i^T = [x_i \quad y_i \quad \theta_i]$ onde x_i e y_i são as coordenadas cartesianas de posição e θ_i a orientação do robô.

Como afirma (Murray et al. 1994), para projetar controladores para sistemas não-holonômicos, é conveniente converter o problema com restrições não-holonômicas para uma outra forma que torne possível analisar o sistema, não do ponto de vista das restrições (direções em que não pode se mover), mas do ponto de vista das direções que o sistema se movimenta livremente. Para isso, pode-se escolher uma base $R_i(q_i) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ no espaço nulo das restrições, tal que,

$$J(q_i)R_i(q_i) = 0. \quad (4.3)$$

Assim, as direções de movimento permitidas ao sistema são descritas por

$$\dot{q}_i = R_i(q_i)v_i, \quad (4.4)$$

onde $v_i^T = [u_i \quad \omega_i]$.

Portanto, derivando (4.4) em função do tempo, obtém-se

$$\ddot{q}_i = R_i(q_i)\dot{v}_i + \dot{R}_i(q_i)v_i. \quad (4.5)$$

Assim, usando (4.4) e (4.5), (4.1) pode ser descrita como

$$M_i(q_i) \left(\dot{R}_i(q_i)v_i + R_i(q_i)\dot{v}_i \right) + C_i(q_i, \dot{q}_i)R_i(q_i)v_i = B_i(q_i)\tau_i + J^T(q_i)\lambda_i.$$

Logo

$$M_i(q_i)R_i(q_i)\dot{v}_i + \left(M\dot{R}_i(q_i) + C_i(q_i, \dot{q}_i)R_i(q_i) \right) v_i = B_i(q_i)\tau_i + J^T(q_i)\lambda_i.$$

Multiplicando a equação acima por R_i^T e usando (4.3), conclui-se que

$$M_{Ri}(q_i)\dot{v}_i + R_i^T(q_i)C_{Ri}(q_i, \dot{q}_i)v_i = R_i^T(q_i)B_i(q_i)\tau_i \quad (4.6)$$

onde $M_{Ri}(q_i) = R_i^T(q_i)M_i(q_i)R_i(q_i)$ e $C_{Ri}(q_i, \dot{q}_i) = M_i(q_i)\dot{R}_i(q_i) + C_i(q_i, \dot{q}_i)R_i(q_i)$. Assim, para facilitar o projeto do controlador, a partir deste ponto, os sistemas não-holonômicos serão representados por uma parte dinâmica (4.6) e uma parte cinemática (4.4).

As seguintes propriedades (Bloch et al. 1992)(Su & Stepanenko 1992) da equação dinâmica (4.6) são utilizadas para projetar o controlador de formação:

Propriedade 1 A matriz $M_{Ri}(q_i)$ é simétrica, definida positiva e limitada.

Propriedade 2 Pode-se escolher C_{Ri} de forma que a matriz $\dot{M}_{Ri}(q_i) - 2R_i^T(q_i)C_{Ri}(q_i, \dot{q}_i)$ seja anti-simétrica.

Propriedade 3 A dinâmica da planta é parametrizável linearmente, isto é,

$$M_{Ri}(q_i)\dot{v}_i + R_i(q_i)^T C_{Ri}(q_i, \dot{q}_i)v_i = Y_i(q_i, \dot{q}_i, v_i, \dot{v}_i)\phi_i^* \quad (4.7)$$

onde $Y_i(\cdot) \in \mathbb{R}^{2 \times p}$ é uma matriz regressora e $\phi_i^* \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de parâmetros desconhecidos.

Entre os robôs móveis não-holonômicos, sabe-se que os robôs uniciclo e os robôs com acionamento diferencial possuem grande aplicação prática. Pode-se citar, entre outros, como exemplos práticos de robôs uniciclo e acionamento diferencial, o *Cye personal robots*, o *IRobot*, e o *Nomad Scout*. Entre as aplicações, pode-se citar, limpeza doméstica, inspeção e reconhecimento de ambientes, pesquisa e fins educacionais (ver Siegwart & Nourbakhsh (2004) para mais detalhes). Do ponto de vista do controle, a vantagem do uniciclo e do robô diferencial, é que estes têm boa manobrabilidade, pois não possuem restrição de curvatura da trajetória (Fahimi 2008).

No Capítulo 2 foi apresentado o controle cinemático de formação de uniciclos. Neste capítulo, as leis de controle cinemáticas do Capítulo 2 são estendidas para serem aplicadas na formação de robôs móveis não-holonômicos com dinâmica incerta. Mais especificamente, é resolvido o problema de controle de formação de robôs uniciclos e robôs com acionamento diferencial. Observe que, no caso do modelo do robô com dinâmica desprezível do Capítulo 2, os sinais de controle para cada robô u_i e w_i , descritos por (2.30) e (2.31), eram sinais de velocidade. Contudo, no modelo dinâmico deste capítulo não é possível atuar diretamente nas velocidades, ou seja, o sinal de controle não pode atuar diretamente no vetor de velocidades v_i da parte cinemática (4.4). Para resolver este problema e estender as leis de controle cinemáticas (2.30) e (2.31) para o modelo dinâmico deste capítulo, é utilizada uma estratégia de controle baseada no controle em cascata (Hsu et al. 2007)(Guenther & Hsu 1993), que consiste nos seguintes passos:

1. Projetar uma lei de controle $\tau_i = f(q_i, v_i, v_{i_d}, \dot{v}_{i_d})$ que resolve o problema de controle de rastreamento de (4.6), isto é, a lei de controle τ_i é projetada de forma que

$$e_{v_i} = v_i(t) - v_{i_d}(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

onde $v_{i_d}^T = \begin{bmatrix} u_{i_d} & \omega_{i_d} \end{bmatrix}$ e u_{i_d} e ω_{i_d} são, respectivamente, as velocidades linear e angular desejadas.

2. Supor que v_{i_d} e suas derivadas podem ser definidas em termos do vetor de sinais de controle cartesianos $d_i = \begin{bmatrix} d_{i_1} & d_{i_2} \end{bmatrix}$ de tal forma que, usando a lei de controle τ_i , o caso do controle cinemático

$$\dot{q}_i = R_i(q)d_i \quad (4.9)$$

seja obtido, exceto por um termo que converge assintoticamente para zero, ou seja, o sistema em malha fechada seja descrito por

$$\dot{q}_i = R_i(q_i) d_i + R_i(q_i) L(s)e_{v_i} \quad (4.10)$$

onde $L(\cdot)$ denota um operador linear, possivelmente não causal e “ s ” é o operador diferencial.

3. Então, deve-se projetar um controle cartesiano d_i que resolva o problema cinemático (4.9).

Nesta tese, a estratégia em cascata foi utilizada considerando

$$v_{i_d} = d_i.$$

Conclui-se então que

$$\dot{q}_i = R_i d_i + R_i e_{v_i}. \quad (4.11)$$

A Figura 4.1 ilustra a estratégia de controle em cascata utilizada.

Como o objetivo da cascata é estender as leis de controle de formação cinemáticas (2.30) e (2.31) do Capítulo 2 para uma formação com dinâmica incerta, para cada robô, o controle cartesiano cinemático d_i é dado por

$$d_{i1} = k_v \left(-\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \cos(\theta_i) - \frac{\partial V_{si}}{\partial y_i} \sin(\theta_i) \right) \quad (4.12)$$

e

$$d_{i2} = -k(\theta_i - \theta_{id}). \quad (4.13)$$

Observe que o controle cinemático é calculado utilizando uma função potencial saturada e deslocada. O objetivo é obter uma lei de controle escalável e evitar colisões considerando as dimensões dos robôs.

Deve-se então projetar o controlador dinâmico τ_i . Para isso, a dinâmica da formação é representada como

$$M_R(q)\dot{v} + R^T(q)C_R(q, \dot{q})v = R^T(q)B(q)\tau \quad (4.14)$$

$$\dot{q} = R(q)v \quad (4.15)$$

onde

- $\tau^T = [\tau_1^T \ \cdots \ \tau_N^T]$,
- $v^T = [v_1^T \ \cdots \ v_N^T]$,
- $q^T = [q_1^T, \dots, q_N^T]$,
- $R = \text{diag}\{R_1, \dots, R_N\}$,
- $C_R = \text{diag}\{C_{R_1}, \dots, C_{R_N}\}$,
- $B(q) = \text{diag}\{B_1, \dots, B_N\}$,
- $M_R = \text{diag}\{M_{R_1}, \dots, M_{R_N}\}$.

Na próxima seção, a lei de controle dinâmica τ é projetada para uma formação de robôs móveis unicyclos.

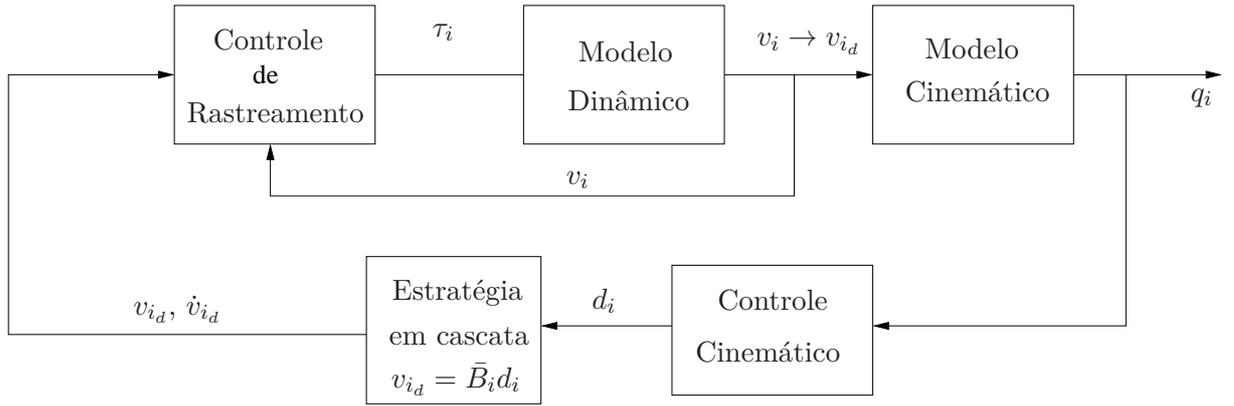


Figura 4.1: Estrutura de controle em cascata

4.2 Controle de formação de unicyclos

Nesta seção, é abordado o problema de controle de formação de robôs móveis não-holonômicos dinâmicos tipo unicyclo. Neste caso, de Fahimi (2008) sabe-se que

1.

$$J(q_i) = [-\sin(\theta_i) \quad \cos(\theta_i) \quad 0]$$

2.

$$R_i(q_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

3. $M_{Ri}(q_i) = M_i$,
4. $C_{Ri}(q_i, \dot{q}_i) = 0$,
5. $R_i^T(q_i)B_i(q_i) = I_2$,

onde $M_i = \text{diag}(m_i, \mathcal{I}_i)$ e m_i, \mathcal{I}_i são respectivamente a massa e o momento de inércia do robô. Então, o modelo dinâmico da formação é dado por

$$M_R \dot{v} = \tau \quad (4.17)$$

$$\dot{q} = R(q) v \quad (4.18)$$

Uma lei de controle de formação dinâmica τ padrão, calculada através do torque computado (Murray et al. 1994), seria dada por

$$\tau = M_R \dot{v}_d - k_p e_v$$

onde $e_v = v - v_d$, $v_d^T = [v_{1d} \cdots v_{Nd}]$, $k_p = \text{diag}(k_{p1}, \cdots, k_{pN})$ e $k_{pi} > 0$. Contudo, esta lei de controle necessitaria das velocidades dos robôs. De fato, definindo $d = [d_1 \cdots d_N]$ e lembrando que $v_{id} = \dot{d}_i$ na estratégia de controle em cascata utilizada, sabe-se, das leis de controle cinemáticas (4.12) e (4.13), que

$$\dot{v}_d = \dot{d} = J_d \dot{q} \quad (4.19)$$

onde

$$J_d = \begin{bmatrix} \nabla_q d_{1_1} \\ \nabla_q d_{1_2} \\ \vdots \\ \nabla_q d_{N_1} \\ \nabla_q d_{N_2} \end{bmatrix}.$$

Portanto, para calcular τ é necessário conhecer o vetor de velocidades \dot{q} . Como deseja-se uma estratégia de controle de formação que dependa somente das posições dos robôs, então é proposta a lei de controle dinâmica τ sem torque computado dada por

$$\tau = -k_p e_v. \quad (4.20)$$

Então, substituindo (4.20) em (4.17), obtém-se

$$M_R \dot{e}_v + k_p e_v = -M_R \dot{d}. \quad (4.21)$$

onde $\dot{d} = [\dot{d}_1 \cdots \dot{d}_N]$ e $\dot{d}_i = [\dot{d}_{i1} \quad \dot{d}_{i2}]$.

Contudo, pode-se concluir que

$$\dot{d}_{i1} = \nabla_q d_{i1} R v, \quad \dot{d}_{i2} = \omega_i - \dot{\theta}_{id}$$

onde $\dot{\theta}_{id}$ é descrito por (2.21) e $k, k_v = 1$ por simplicidade e sem perda de generalidade.

Então, definindo $d_a^T = [d_{11}, \dots, d_{N1}]$, $d_b^T = [d_{12}, \dots, d_{N2}]$ e após alguma manipulação algébrica, conclui-se que

$$\dot{d}_b = (I_N \otimes [0 \ 1] - L_a \otimes [1 \ 0]) v$$

$$\dot{d}_a = H v$$

onde $H^T = [\nabla_q d_{11} R \ \dots \ \nabla_q d_{N1} R]$, I_N é uma matriz identidade de ordem N , “ \otimes ” representa o produto de Kronecker e L_a é dada por

$$L_a = \begin{bmatrix} L_{11}L_{211} & L_{11}L_{212} & \cdots & L_{11}L_{21N} \\ L_{12}L_{221} & L_{12}L_{222} & \cdots & L_{12}L_{22N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{1N}L_{2N1} & L_{1N}L_{2N2} & \cdots & L_{1N}L_{2NN} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\dot{d} = G v \tag{4.22}$$

onde

$$G = T \begin{bmatrix} H \\ I_N \otimes [0 \ 1] - L_a \otimes [1 \ 0] \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

e T é uma matriz transformação tal que

$$d = T \begin{bmatrix} d_a \\ d_b \end{bmatrix}.$$

Observe de (4.22) e (4.19) que $G = J_d R$. No entanto, as matrizes G e L_a foram definidas, pois serão utilizadas na demonstração do próximo Teorema.

Então, substituindo (4.22) na equação dinâmica (4.21), temos

$$M_R \dot{e}_v + k_p e_v = -M_R G v. \tag{4.24}$$

Pelo fato de estar sendo utilizada a estratégia de controle em cascata, a prova da estabilidade da formação em malha fechada pode ser feita utilizando as propriedades de passividade dos subsistemas, utilizando para isto, o Teorema de sistemas passivos interconectados apresentado em (Hsu et al. 2007). No entanto, aqui é analisado o

sistema completo, utilizando uma análise de Lyapunov, o que é feito no próximo Teorema.

Teorema 6 *Considere um grupo de robôs móveis não-holonômicos com modelo dinâmico descrito por (4.17) e (4.18) e trocando informações através de um grafo não direcionado. Se*

1. a condição inicial de posição e orientação dos robôs $z(0)$ pertencer ao conjunto \mathcal{D} onde

$$\mathcal{D} = \{z \mid W_1(z) \leq W_0\},$$

$$2W_1 = \sum_{i=1}^N [V_{si} + \alpha (\theta_i - \theta_{id})^2],$$

$$z^T = [(\theta_1 - \theta_{1d}) \quad \cdots \quad (\theta_N - \theta_{Nd}) \quad r_1^T \quad \cdots \quad r_N^T],$$

$$r_i^T = [x_i \quad y_i], \quad W_0 > 0 \text{ e } \alpha > 0,$$

2. a lei de controle de formação dinâmica for dada por $\tau = -k_p e_v$,

3. o grafo de comunicação for sempre conectado,

então são evitadas colisões entre robôs e a formação descrita pelo sistema em malha fechada (4.24) e (4.18) alcança uma configuração que minimiza a função potencial do sistema V_s .

Prova: Considere a função candidata de Lyapunov

$$W = W_2 + \gamma W_1 \tag{4.25}$$

onde W_2 é dada por

$$W_2 = \frac{1}{2} e_v^T M_R e_v$$

onde $e_v = v - v_d$.

Diferenciando W_2 ao longo de (4.24), obtém-se

$$\dot{W}_2 = -e_v^T k_p e_v - e_v^T M_R G v.$$

Então

$$\dot{W} = -e_v^T k_p e_v - e_v^T M_R G v + \gamma \dot{W}_1 \tag{4.26}$$

onde, como o grafo é não direcionado, V_{si} é simétrico com respeito a r_{ij} e $r_{ij} = -r_{ji}$, então (ver prova do Teorema 2 do Capítulo 2 para mais detalhes desta conclusão)

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N [\nabla_{r_i} V_{si} \dot{r}_i + \alpha (\theta_i - \theta_{id}) (\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_{id})]. \tag{4.27}$$

Lembrando que $r_i^T = [x_i \ y_i]$, note de (4.4) e (4.16), que

$$\dot{r}_i = S_i u_i \quad (4.28)$$

onde $S_i^T = [\cos(\theta_i) \ \sin(\theta_i)]$. Além disso, como na estratégia em cascata utilizada $v_{id} = d_i$, pode-se concluir de (4.8) e do controle cartesiano cinemático (4.12), (4.13) que

$$\nabla_{r_i} V_{si} S_i = e_{i1} - u_i \quad (4.29)$$

e

$$(\theta_i - \theta_{id}) = e_{i2} - \omega_i \quad (4.30)$$

onde $e_{i1} = u_i - d_{i1}$, $e_{i2} = w_i - d_{i2}$ e $k, k_v = 1$ por simplicidade.

Portanto, substituindo (4.28), (4.29) e (4.30) em (4.27), temos que

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left[-u_i^2 + e_{i1} u_i - \alpha \omega_i^2 + \alpha \omega_i e_{i2} - \alpha e_{i2} \dot{\theta}_{id} + \alpha \omega_i \dot{\theta}_{id} \right] \quad (4.31)$$

Contudo, definindo $u^T = [u_1 \cdots u_N]$ e $\dot{\theta}_d^T = [\dot{\theta}_{1d} \cdots \dot{\theta}_{Nd}]$ onde $\dot{\theta}_{id}$ é descrito por (2.41) e após algumas manipulações algébricas, conclui-se que

$$\dot{\theta}_d = L_a u, \quad (4.32)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i \dot{\theta}_{id} = \omega^T L_a u, \quad (4.33)$$

$$\sum_{i=1}^N e_{i2} \dot{\theta}_{id} = e_v^T L_b v, \quad (4.34)$$

$$\sum_{i=1}^N (e_{i1} u_i + \alpha w_i e_{i2}) = v^T I_N \otimes \mathcal{K}(\alpha) e_v \quad (4.35)$$

onde

$$L_b = L_a \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

I_N é uma matriz de identidade de ordem N ,

$$\mathcal{K}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

e como $e_v = v - v_d$, pode-se concluir que $e_v^T = [e_{11} \ e_{12} \cdots e_{N1} \ e_{N2}]$.

Então, substituindo (4.32), (4.33), (4.34) e (4.35) em (4.31), temos

$$\dot{W}_1 = -u^T u - \alpha \omega^T \omega + \alpha \omega^T L_a u + v^T (I_N \otimes \mathcal{K}(\alpha) - \alpha L_b^T) e_v$$

Assim, pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 = & -v^T \overbrace{T^T \begin{bmatrix} I_N & -\frac{1}{2}\alpha L_a^T \\ -\frac{1}{2}\alpha L_a & \alpha I_N \end{bmatrix} T v}^A + \\ & + v^T (I_N \otimes \mathcal{K}(\alpha) - \alpha L_b^T) e_v. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Contudo, para $A > 0$, o complemento de Schur \mathcal{S} da matriz A deve ser positivo definido. Então, deve-se ter

$$\mathcal{S} = I_N - \frac{\alpha L_a^T L_a}{4} > 0.$$

Portanto,

$$\alpha < \frac{4}{\|L_a\|^2}.$$

Dado que o estado está no conjunto \mathcal{D} , podemos considerar que $\|L_a\|$ é limitada por uma constante. Então, $\|L_a\| < \sigma_a$ onde σ_a é uma constante positiva. Assim, tem-se $A > 0$ se

$$\alpha < \frac{4}{\sigma_a^2}.$$

Agora, substituindo (4.37) em (4.26), conclui-se que

$$\dot{W} = -e_v^T k_p e_v - e_v^T F v - \gamma v^T A v \quad (4.38)$$

onde

$$F = M_R G - \gamma J_F. \quad (4.39)$$

e

$$J_F = (I_N \otimes \mathcal{K}(\alpha) - \alpha L_b^T).$$

Então,

$$\dot{W} = -\epsilon^T \begin{bmatrix} k_p I_N & \frac{1}{2} F \\ \frac{1}{2} F^T & \gamma A \end{bmatrix} \epsilon$$

onde $\epsilon^T = [e_v^T \quad v^T]$. Utilizando novamente o complemento de Schur, conclui-se que $\dot{W} \leq 0$ se

$$\mathcal{S} = \gamma A - \frac{F^T F}{4k_p} > 0. \quad (4.40)$$

Neste ponto, observe de (4.23) que, como $\|H\|$ é limitada em \mathcal{D} , então $\|G\|$ também será. Portanto, se o conjunto \mathcal{D} for invariante, existe uma constante $\sigma_G > 0$ tal que $\|G\| < \sigma_G$. Além disso, sabe-se que a matriz de inércia M_R é limitada, logo $\|M_R\| < \sigma_M$ onde $\sigma_M > 0$ é uma constante. Assim, de (4.39) e (4.40), sabe-se que a

desigualdade (4.40) será satisfeita se

$$k_p > \frac{(\sigma_M \sigma_G + \gamma \sigma_J)^2}{4\gamma \lambda_m(A)} \quad (4.41)$$

onde $\lambda_m(A)$ é o menor autovalor da matriz A e $\sigma_J > 0$ é uma constante tal que $\|J_F\| < \sigma_J$ (observe que, como a matriz L_a é limitada no conjunto \mathcal{D} , então L_b e consequentemente J_F também são). No entanto, o mínimo valor do lado direito da desigualdade (4.41) com respeito a γ ocorre em

$$\gamma = \frac{\sigma_M \sigma_G}{\sigma_J}.$$

Portanto, existe $\gamma > 0$ tal que $\dot{W} < 0$ se

$$k_p > \frac{\sigma_M \sigma_G}{\lambda_m(A)}.$$

Como, para $\dot{W} \leq 0$ o conjunto \mathcal{D} é invariante, então a assumida limitação de $\|L_a\|$, $\|H\|$ e $\|G\|$ são válidas e pelo lema de Barbalat, $\epsilon \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e consequentemente $v, e_v \rightarrow 0$. Além disso, como $e_v = v - v_d$, então, lembrando que é utilizado $v_{id} = d_i$ na cascata, tem-se $\theta_i \rightarrow \theta_{id}$, $\nabla_{r_i} V_{si} S_i \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty \forall i$. Como $S_i \rightarrow S_{id}$, onde

$$S_{id}^T = [\cos(\theta_{id}) \quad \sin(\theta_{id})]$$

e

$$\theta_{id} = \arctan \left(-\frac{\partial V_{si}}{\partial y_i}, -\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \right),$$

pode-se concluir então que $\nabla_{r_i} V_{si}$ e S_i estarão defasados de 180° quando $t \rightarrow \infty$ (isto porque $\nabla_{r_i} V_{si}$ e S_{id} estão sempre defasados de 180°). Assim, como $\nabla_{r_i} V_{si} S_i \rightarrow 0$ e $\|S_i\| = 1$, então $\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \rightarrow 0$, $\frac{\partial V_{si}}{\partial y_i} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e o sistema converge para uma formação que minimiza a função potencial do sistema V_s . Além disso, como o conjunto \mathcal{D} é invariante, são evitadas colisões. ■

Observe que não é necessário conhecer os parâmetros dinâmicos dos robôs para calcular a lei de controle de formação dinâmica (4.20). Isto porque, para robôs unicyclos, a matriz de Coriolis C_{R_i} é nula. Isto não ocorre para o caso do robô com acionamento diferencial, que é abordado na próxima seção. Neste caso, é utilizado um controlador de formação adaptativo, devido à dinâmica incerta dos robôs.

4.3 Controle adaptativo de formação de robôs com acionamento diferencial

Para robôs com acionamento diferencial, seguindo o modelo dinâmico apresentado por (Fukao et al. 2000), a equação dinâmica de cada robô i , como uma particularização do modelo dinâmico (4.4) e (4.6), pode ser descrita por

$$M_{Ri} \dot{\nu}_i + C_{Ri}(\dot{q}_i) \nu_i = \tau_i \quad (4.42)$$

$$\dot{q}_i = R_i(q_i) \nu_i \quad (4.43)$$

onde

- $\nu_i^T = [\nu_{i1}, \nu_{i2}]$ com ν_{i1} e ν_{i2} sendo as velocidades angulares das rodas,
- $\tau_i = [\tau_{vi}, \tau_{wi}]$ sendo τ_{vi} e τ_{wi} os torques aplicados às rodas dos robôs,
- $M_{Ri} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma matriz de inércia constante,
- $C_{Ri}(\dot{q}_i) \triangleq R_i^T(q_i) C_{Ri}(q_i, \dot{q}_i)$ é a matriz centrípeta e de coriolis.
- $R_i(q_i)$ é dado por

$$R_i(q_i) = \frac{r_i}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ b_i^{-1} & -b_i^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

onde b_i e r_i são alguns parâmetros dos robôs.

Comparando (4.42) com o modelo dinâmico (4.6), observe que a equação dinâmica (4.42) utiliza o vetor ν de velocidades angulares das rodas (a equação (4.6) utilizava o vetor v de velocidades linear e angular do robô). Esta diferença ocorre devido à escolha da matriz R_i feita nesta seção. Poderia ter sido escolhida uma matriz R_i de forma que a equação dinâmica utilizasse o vetor de velocidades v . Vale ressaltar que uma diferente escolha de R não alteraria os resultados de estabilidade obtidos nesta seção. Observe também, que $R_i^T(q_i) B_i(q_i) = I_2$, uma matriz identidade de segunda ordem.

Então, de (4.14) e (4.15), a equação dinâmica da formação pode ser descrita por

$$M_R \dot{\nu} + C_R(\dot{q}) \nu = \tau \quad (4.45)$$

$$\dot{q} = R(q) \nu. \quad (4.46)$$

onde $\nu = \text{diag}\{\nu_1 \cdots \nu_N\}$ e $C_R(\dot{q}) = \text{diag}\{C_{R_1} \cdots C_{R_N}\}$.

Seguindo a mesma linha de raciocínio da seção 4.2, pode ser proposto um controle cinemático \bar{d} dado por

$$\bar{d} = \bar{B} d, \quad (4.47)$$

onde o controle cinemático d é dado por $d^T = [d_1^T \cdots d_N^T]$, d_{i1} e d_{i2} são dados respectivamente por (4.12)–(4.13), $\bar{B} = \text{diag}\{\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_N\}$ e

$$\bar{B}_i = \frac{1}{r_i} \begin{bmatrix} 1 & b_i \\ 1 & -b_i \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

é uma transformação linear que relaciona as velocidades angular e linear de cada robô com as velocidades angulares ν_{i1} e ν_{i2} de suas rodas.

O Teorema 2 do Capítulo 2 atesta que, para o caso do uniciclo com dinâmica desprezível, a lei de controle de formação cinemática d garante a convergência da formação para uma configuração que minimiza a função potencial do sistema V_s . Como uma transformação linear não altera um resultado de estabilidade, então, se a parte dinâmica da formação, dada por (4.45), fosse desprezada, a lei de controle cinemática \bar{d} também garantiria a convergência da formação (4.43) de robôs diferenciais com dinâmica desprezível para uma configuração que minimiza a função potencial V_s .

Contudo, como os parâmetros dinâmicos dos robôs não são desprezados, a lei de controle \bar{d} não pode atuar diretamente na velocidade. Assim, pode-se utilizar a mesma estratégia de controle em cascata da seção 4.2. Portanto, a seguinte lei de controle dinâmica é proposta:

$$\tau = Y \hat{\phi} - k_p e_\nu \quad (4.49)$$

onde $Y(q, \dot{q}, v_d) = \text{diag}(Y_1(q_1, \dot{q}_1, v_{1d}), \dots, Y_N(q_N, \dot{q}_N, v_{Nd}))$ é um vetor regressor com $Y_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\hat{\phi}$ é uma estimativa do vetor paramétrico $\phi^* \in \mathbb{R}^2$ com

$$Y \phi^* = C_R \bar{d}, \quad (4.50)$$

e $e_\nu = \nu - \nu_d$ com $\nu_d = \bar{d}$.

O parâmetro $\hat{\phi}$ pode ser atualizado com a lei adaptativa

$$\dot{\hat{\phi}} = -\Gamma Y^T e_\nu \quad (4.51)$$

onde $\Gamma > 0$. Então, substituindo (4.49) em (4.45), temos

$$M_R \dot{\nu} + C_R \nu = Y \hat{\phi} - k e_\nu. \quad (4.52)$$

Contudo, somando e subtraindo $C_R \bar{d}$ no lado direito e $M_R \dot{\bar{d}}$ no lado esquerdo da equação acima e desenvolvendo, conclui-se que

$$M_R \dot{e}_\nu + (C_R + k) e_\nu = -M_R \dot{\bar{d}} + Y \tilde{\phi} \quad (4.53)$$

onde $\tilde{\phi} = \hat{\phi} - \phi^*$. No entanto, uma vez que $\dot{\bar{d}} = \bar{B} \dot{d}$ e \dot{d} é descrito por (4.22), então

$$M_R \dot{e}_\nu + (C_R + k) e_\nu = -M_R \bar{B} G \nu + Y \tilde{\phi}. \quad (4.54)$$

O próximo teorema mostra que a formação descrita pelo sistema em malha fechada (4.54) converge para uma configuração que localmente minimiza a função potencial do sistema V_s dada por (2.33).

Teorema 7 *Considere um grupo de robôs móveis não-holonômicos com modelo dinâmico descrito por (4.42) e (4.43) e trocando informações através de um grafo não direcionado. Se*

1. *a condição inicial de posição e orientação dos robôs $z(0)$ pertencer ao conjunto \mathcal{D} onde*

$$\mathcal{D} = \{z \mid W_1(z) \leq W_0\},$$

$$2W_1 = \sum_{i=1}^N [V_{si} + \alpha (\theta_i - \theta_{id})^2],$$

$$z^T = [(\theta_1 - \theta_{1d}) \quad \cdots \quad (\theta_N - \theta_{Nd}) \quad r_1^T \quad \cdots \quad r_N^T],$$

$$r_i^T = [x_i \quad y_i], \quad W_0 > 0 \text{ e } \alpha > 0,$$

2. *a lei de controle de formação τ for dada por*

$$\tau = Y \hat{\phi} - k_p e_\nu,$$

3. *o grafo de comunicação for sempre conectado,*

então são evitadas colisões entre robôs e a formação descrita pelo sistema em malha fechada (4.54) e (4.46) alcança uma configuração que minimiza a função potencial do sistema V_s .

Prova: Considere a função candidata de Lyapunov (4.25), onde

$$W_2 = \frac{1}{2} e_\nu^T M_R e_\nu + \tilde{\phi}^T \Gamma \tilde{\phi}. \quad (4.55)$$

Diferenciando W_2 ao longo de (4.54) e desenvolvendo, temos

$$\dot{W}_2 = -e_\nu^T C_R e_\nu - e_\nu^T k_p e_\nu - e_\nu^T M_R \bar{B} G \nu + \tilde{\phi}^T (Y^T e_\nu + \Gamma \dot{\hat{\phi}}).$$

No entanto, sabe-se que C_R é antissimétrica (ver a propriedade 2 na seção 4.1). Logo $e_\nu^T C_R e_\nu = 0$. Então, considerando

$$\hat{\phi} = -\Gamma^{-1} Y^T e_\nu,$$

conclui-se que

$$\dot{W}_2 = -e_\nu^T k_p e_\nu - e_\nu^T M_R \bar{B} G \nu.$$

Contudo, a função W_1 deste Teorema é igual a função W_1 do Teorema 6. Portanto, de (4.37) sabe-se que

$$\dot{W}_1 = -v^T A v + v^T (I_N \otimes \mathcal{K}(\alpha) - \alpha L_b^T) e_\nu. \quad (4.56)$$

Então, como $v = \bar{B}^{-1} \nu$ e $e_\nu = \bar{B}^{-1} e_\nu$, temos

$$\dot{W}_1 = -\nu^T (\bar{B}^{-1})^T A \bar{B}^{-1} \nu + \nu^T (\bar{B}^{-1})^T (I_N \otimes \mathcal{K}(\alpha) - \alpha L_b^T) \bar{B}^{-1} e_\nu. \quad (4.57)$$

Logo, como $\dot{W} = \gamma \dot{W}_1 + \dot{W}_2$ e após alguma manipulação algébrica, conclui-se que

$$\dot{W} = -e_\nu^T k_p e_\nu - e_\nu^T \bar{F} \nu - \gamma \nu^T \bar{A} \nu \quad (4.58)$$

onde

$$\bar{F} = M_R \bar{B} G - \gamma J_{\bar{F}}, \quad (4.59)$$

$$\bar{A} = \nu^T (\bar{B}^{-1})^T A \bar{B}^{-1} \nu, \quad (4.60)$$

$$J_{\bar{F}} = (\bar{B}^{-1})^T (I_N \otimes \mathcal{K}(\alpha) - \alpha L_b^T)^T \bar{B}^{-1}.$$

Então,

$$\dot{W} = -\epsilon^T \begin{bmatrix} k_p I_N & \frac{1}{2} \bar{F} \\ \frac{1}{2} \bar{F}^T & \gamma \bar{A} \end{bmatrix} \epsilon$$

onde $\epsilon^T = [e_\nu^T \quad \nu^T]$. Utilizando o complemento de Schur, conclui-se que $\dot{W} \leq 0$ se

$$\mathcal{S} = \gamma \bar{A} - \frac{\bar{F}^T \bar{F}}{4k_p} > 0. \quad (4.61)$$

Neste ponto, observe de (4.23) que, como $\|H\|$ é limitada em \mathcal{D} , então $\|G\|$ também será. Portanto, se o conjunto \mathcal{D} for invariante, existe uma constante $\sigma_G > 0$ tal que $\|G\| < \sigma_G$. Além disso, sabe-se que a matriz de inércia M_R e a matriz \bar{B} são limitadas, logo $\|M_R \bar{B}\| < \sigma_M$ onde $\sigma_M > 0$ é uma constante. Assim, de (4.59) e (4.61), sabe-se que a desigualdade (4.61) será satisfeita se

$$k_p > \frac{(\sigma_M \sigma_G + \gamma \sigma_J)^2}{4\gamma \lambda_m(\bar{A})} \quad (4.62)$$

onde $\lambda_m(\bar{A})$ é o menor autovalor da matriz \bar{A} e $\sigma_{\bar{J}} > 0$ é uma constante tal que $\|J_{\bar{F}}\| < \sigma_{\bar{J}}$ (observe que, como a matriz L_a é limitada no conjunto \mathcal{D} , então L_b e consequentemente $J_{\bar{F}}$ também são). No entanto, o mínimo valor do lado direito da desigualdade (4.41) com respeito a γ ocorre em

$$\gamma = \frac{\sigma_M \sigma_G}{\sigma_{\bar{J}}}.$$

Portanto, existe $\gamma > 0$ tal que $\dot{W} < 0$ se

$$k_p > \frac{\sigma_M \sigma_G}{\lambda_m(\bar{A})}.$$

Como, para $\dot{W} \leq 0$ o conjunto \mathcal{D} é invariante, então a assumida limitação de $\|L_a\|$, $\|H\|$ e $\|G\|$ são válidas e pelo lema de Barbalat, $\epsilon \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e consequentemente $\nu, e_\nu \rightarrow 0$. Além disso, como $e_\nu = \nu - \nu_d$, então, lembrando que é utilizado $\nu_d = \bar{d}$ e como a matriz \bar{B} tem posto completo, tem-se $\theta_i \rightarrow \theta_{id}$, $\nabla_{r_i} V_{si} S_i \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty \forall i$. Como $S_i \rightarrow S_{id}$, onde

$$S_{id}^T = [\cos(\theta_{id}) \quad \sin(\theta_{id})]$$

e

$$\theta_{id} = \arctan \left(-\frac{\partial V_{si}}{\partial y_i}, -\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \right),$$

pode-se concluir então que $\nabla_{r_i} V_{si}$ e S_i estarão defasados de 180° quando $t \rightarrow \infty$ (isto porque $\nabla_{r_i} V_{si}$ e S_{id} estão sempre defasados de 180°). Assim, como $\nabla_{r_i} V_{si} S_i \rightarrow 0$ e $\|S_i\| = 1$, então $\frac{\partial V_{si}}{\partial x_i} \rightarrow 0$, $\frac{\partial V_{si}}{\partial y_i} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e o sistema converge para uma formação que minimiza a função potencial do sistema V_s . Além disso, como o conjunto \mathcal{D} é invariante, são evitadas colisões. ■

Observação 5 *Note que a função potencial (2.29) pode ser redefinida como*

$$V_{si} = V_d(\|r_{id}\|) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} V_{sij} \tag{4.63}$$

onde $V_d > 0$ é uma função radialmente ilimitada, $r_{id}^T = [x_i - x_d, y_i - y_d]$ e x_d, y_d são as coordenadas de posição de uma robô virtual com comunicação com todos os componentes da formação. Neste caso, pode-se garantir que o grafo de comunicação é sempre conectado. Então, do Teorema 7, V_{si} é minimizado e todos os componentes da formação convergem para uma região em torno do veículo virtual.

Até aqui, todos os teoremas mostraram que a função potencial V_{si} é minimizada. No entanto, suponha que além de minimizar V_{si} deseja-se que, entre todos os robôs

vizinhos, $\|r_{ij}\| = r_d$, quando a formação for alcançada. Note que minimizar V_{si} não implica necessariamente que as posições relativas $\|r_{ij}\|$ entre todos os vizinhos convergem para r_d . De fato, como mostrado no próximo corolário, as posições relativas de todos os vizinhos convergem para r_d se o grafo de comunicação for uma árvore. Este resultado é uma aplicação para sistemas não holonômicos de um Corolário apresentado em (Tanner et al. 2007).

Corolário 3 *Se o grafo de comunicação for uma árvore, então as posições relativas entre todos os robôs vizinhos convergem para a distância desejada r_d definida pelo mínimo de $V_{sij}(\|r_{ij}\|)$.*

Prova: Como $\nabla_{r_i} V_{si} \rightarrow 0 \forall i$ quando $t \rightarrow \infty$, então pode-se concluir que

$$\begin{bmatrix} \nabla_{r_1} V_1 \\ \vdots \\ \nabla_{r_N} V_N \end{bmatrix} = (B_G \otimes I_2) \begin{bmatrix} \vdots \\ \nabla_{r_{ij}} V_{sij} \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow 0 \quad (4.64)$$

onde B_G é a matriz de incidência. Contudo, sabe-se da teoria de grafos, que se o grafo for uma árvore, o número de arestas é $N - 1$ e B_G tem posto completo. Então,

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \nabla_{r_{ij}} V_{sij} \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow 0. \quad (4.65)$$

Como a função potencial V_{sij} possui um único mínimo em $\|r_{ij}\| = r_d$, então $\frac{\partial V_{sij}}{\partial \|r_{ij}\|} \rightarrow 0$ e $\|r_{ij}\| \rightarrow r_d$ quando $t \rightarrow \infty$. ■

Note que diferentes posições relativas desejadas entre vizinhos podem ser definidas o que permite alcançar diferentes configurações de formação. Note também, que não há garantia que o grafo de comunicação será uma árvore se uma função potencial saturada for usada. Contudo, é digno de nota que todos os resultados de estabilidade permanecem válidos se uma função potencial não saturada com um grafo de comunicação fixo for usado. No entanto, como já é conhecido, neste caso não se pode garantir que não haverá colisão, pois não há comunicação entre todos os robôs (ver observação 1 na seção 2.2).

4.4 Resultados de simulação

Nesta seção são apresentados os resultados de simulação para o controle de formação de seis robôs móveis uniciclos e robôs com acionamento diferencial. Em

	Robô 1	Robô 2	Robô 3	Robô 4	Robô 5	Robô 6
$x_i(0)$	280	300	-300	-150	50	0
$y_i(0)$	0	300	0	50	-150	-300
$\theta_i(0)$	180°	180°	-180°	180°	180°	-90°

Tabela 4.1: Condição inicial da formação

ambos os casos, é utilizada a função potencial (4.63) com V_{sij} descrita por (2.49), $c = 1m$, $R_s = 100m$, $r_d = 30m$ e

$$V_d(\|r_{id}\|) = \frac{r_d}{\|r_{id}\|} + \log \|r_{id}\| \quad (4.66)$$

onde $x_d, y_d = 0$.

Todas as simulações utilizam as mesmas condições iniciais da formação, mostradas na tabela 4.1. Observe que, para estas condições iniciais, V_{sij} está saturada para todo $i \neq j$, pois $\|r_{ij}\|(0) > R_s$. No entanto, as simulações confirmam a observação 5, que atesta que a utilização do robô virtual e da função (4.66) garantem a convergência da formação para o mínimo de V .

À seguir, primeiramente são apresentados os resultados de simulação de uma formação com robôs unicycle. Posteriormente, para robôs com acionamento diferencial. No caso do robô com acionamento diferencial, para motivar a utilização do controle adaptativo, primeiramente é simulado o controle de formação sem adaptação, considerando os parâmetros dinâmicos conhecidos. Neste caso, é analisado o efeito da variação dos parâmetros dinâmicos dos robôs no desempenho do controlador. Posteriormente, é simulado o controle de formação com adaptação. Verificou-se então que o controlador de formação adaptativo tem maior robustez à variação dos parâmetros dinâmicos dos robôs.

4.4.1 Formação de robôs unicyclos

Para robôs unicycle, a equação dinâmica de cada robô é dada por (4.17) e (4.18). Os parâmetros dinâmicos dos robôs utilizados na simulação são (Fukao et al. 2000)

- $m_i = 30kg$
- $\mathcal{I}_i = 15kgm^2$.

A simulação foi implementada utilizando as leis de controle de formação de robôs unicyclos (4.12), (4.13) e (4.20). Os parâmetros do controlador foram sintonizados por tentativas, utilizando simulações, para que a formação desejada seja alcançada em menos de 20 segundos. Os valores obtidos são:

- $k_{pi} = 80$

- $k_v = 50$
- $k = 10$.

Da Figura 4.2, pode-se observar que todos os robôs convergem para uma formação em torno da posição desejada $x_d, y_d = 0$. Além disso, observa-se, através dos

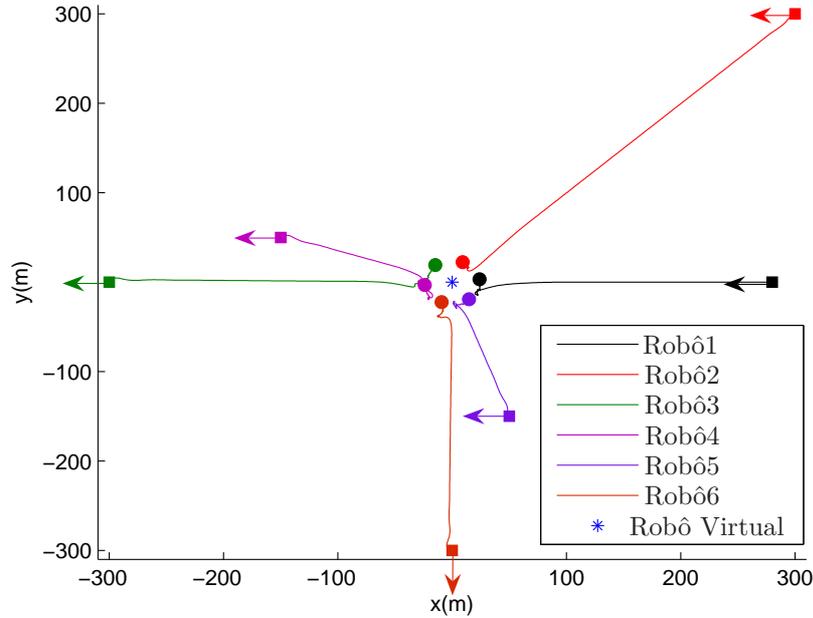


Figura 4.2: Robôs uniciclos: Trajetórias dos robôs

gráficos das normas dos gradientes mostrados na Figura 4.3, que todas as funções potenciais V_{si} são minimizadas. Desta forma, a formação alcançada minimiza V . Finalmente, as posições relativas entre os robôs são mostradas na Figura 4.4. Note que $\|r_{ij}\| > c \forall t$. Assim, os resultados de simulação confirmam que são evitadas colisões.

À seguir são apresentados os resultados de simulação de uma formação de robôs com acionamento diferencial.

4.4.2 Formação de robôs com acionamento diferencial

Nesta seção são apresentados os resultados de simulação de uma formação com seis veículos não-holonômicos com acionamento diferencial. As equações dinâmicas dos robôs são dadas por (4.42) e (4.43), com (Fukao et al. 2000)

- $$M_{Ri} = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix},$$

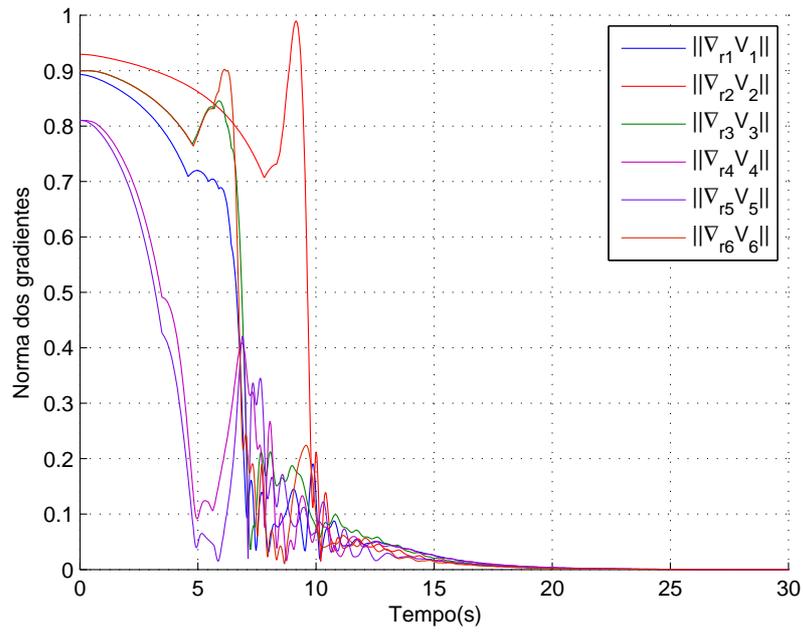


Figura 4.3: Robôs unicyclos: Variação de $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\|$ em função do tempo

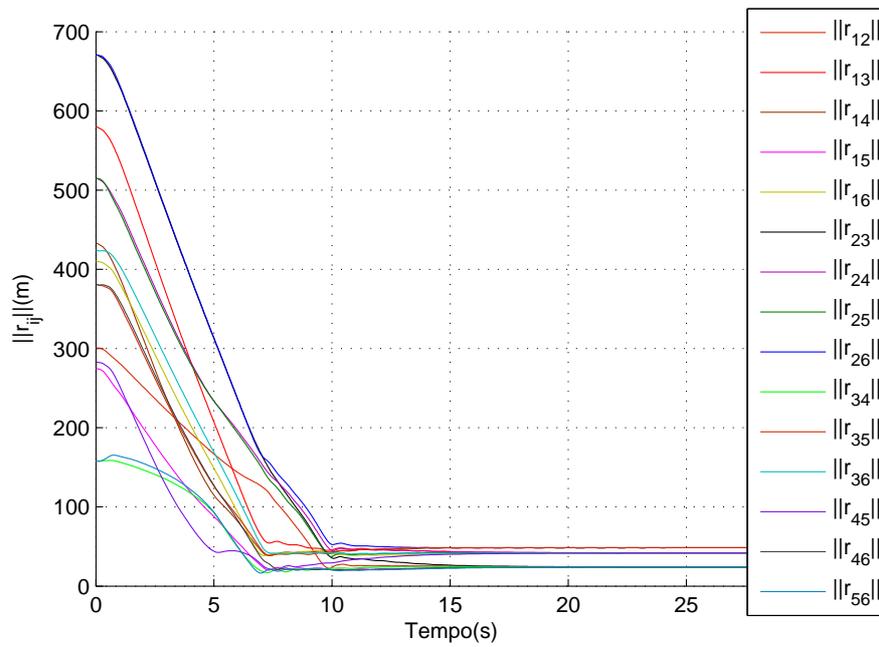


Figura 4.4: Robôs unicyclos: Distâncias entre robôs

- $C_{Ri} = \begin{bmatrix} 0 & c_i \dot{\theta}_i \\ -c_i \dot{\theta}_i & 0 \end{bmatrix}$,
- $c_i = \frac{r^2}{2b} m_c d$,
- $m_{11} = m_{22} = \frac{r^2}{4b^2} (mb^2 + I) + I_\omega$,
- $m_{12} = m_{21} = \frac{r^2}{4b^2} (mb^2 - I)$,
- $m = m_c + 2m_\omega$
- $I = m_c d^2 + 2m_\omega b^2 + I_c + 2I_m$,

onde

- $m_c = 30kg$ é a massa do corpo do robô,
- $m_\omega = 1kg$ é a massa das rodas com o motor,
- $I_c = 15kgm^2$ é o momento de inércia do corpo do robô sobre o eixo vertical através de P ,
- $I_\omega = 0.00515kgm^2$ é o momento de inércia da roda com o motor sobre o eixo da roda.
- $I_m = 0.0025$ é o momento de inércia da roda com o motor sobre o diâmetro da roda,
- $b = 1.5m$ é a largura do robô,
- $r = 0.15m$ é o raio da roda.

Sabe-se então que, $m_{11} = 0.3796$, $m_{12} = -0.0145$ e $c_i = 0.1350$. A Figura 4.5 mostra o robô com acionamento diferencial utilizado na simulação.

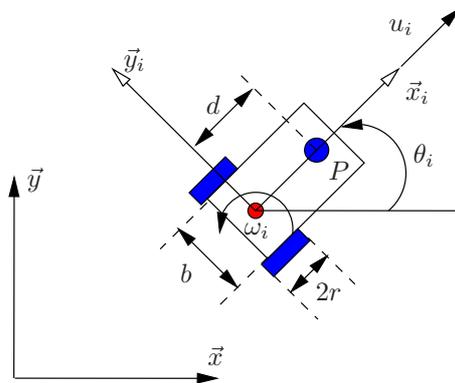


Figura 4.5: Robô móvel diferencial.

Para fins de comparação de desempenho, foram feitas simulações considerando os seguintes controladores de formação:

1. Controlador sem adaptação,
2. Controlador sem adaptação com erro de medição dos valores dos parâmetros dinâmicos dos robôs,
3. Controlador com adaptação.

O objetivo é comparar a robustez, às variações dos parâmetros dinâmicos dos robôs, do controlador de formação sem adaptação com a robustez do controlador adaptativo. A seguir, são mostrados os resultados de simulação para o controlador sem adaptação.

Controlador sem adaptação

Neste caso, a dinâmica do robô é considerada conhecida, portanto, o controle dinâmico (dado por (4.49) no caso adaptativo) é dado por

$$\tau = Y \phi^* - k_p e_\nu, \quad (4.67)$$

onde

- $\phi^{*T} = [\phi_1^{*T} \dots \phi_N^{*T}]$
- $\phi_i^{*T} = [c_i \quad -c_i]$
- $c_i = 0.1350$

Portanto, a lei de controle de formação utilizada é dada por (4.12), (4.13) e (4.67) onde os parâmetros do controlador são os mesmos da seção anterior (escolhidos para a função potencial ser minimizada em menos de 20 segundos), isto é:

- $k_{pi} = 80$
- $k_v = 50$
- $k = 10$

Note que os parâmetros dinâmicos c_i dos robôs são os únicos utilizados na lei de controle de formação.

A Figura 4.6 mostra que a formação converge para uma configuração em torno da posição do robô virtual $x_d, y_d = 0$. Como esperado, observa-se, através dos gráficos das normas dos gradientes mostrados na Figura 4.7, que todas as funções potenciais V_{si} são minimizadas. As posições relativas entre os robôs são apresentadas na Figura 4.8, onde pode-se observar novamente que não há colisões entre robôs.

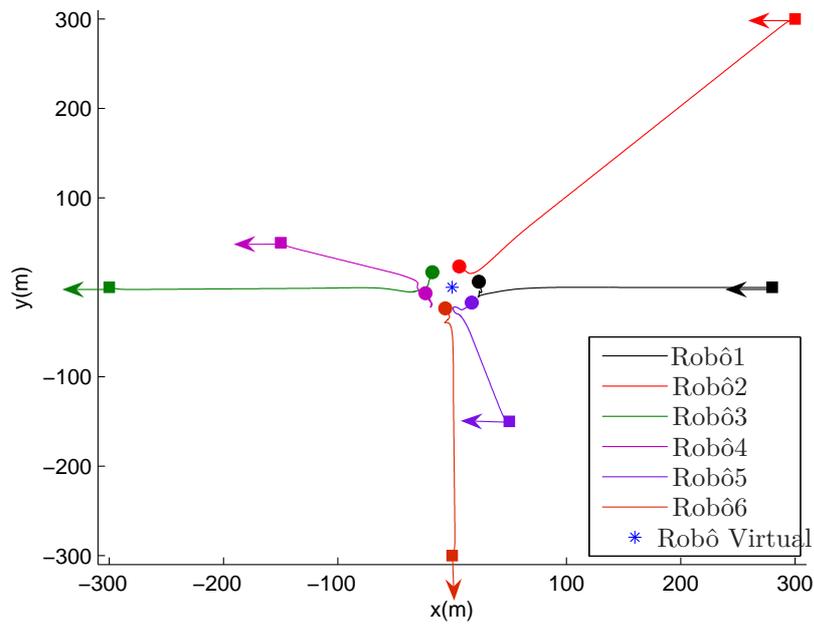


Figura 4.6: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Trajetórias dos robôs.

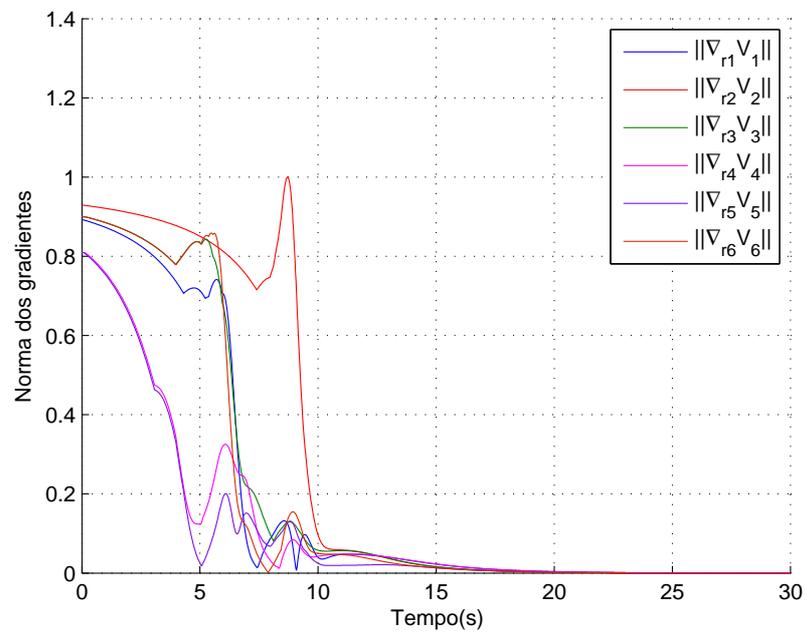


Figura 4.7: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Variação de $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\|$ em função do tempo.

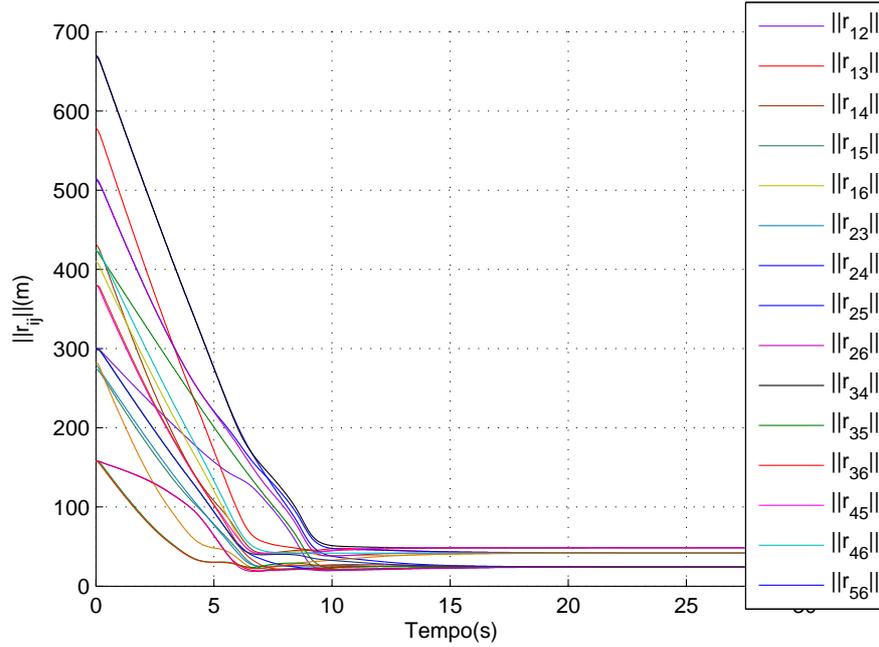


Figura 4.8: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Posições relativas entre robôs.

Controlador sem adaptação com erro nos valores dos parâmetros dinâmicos dos robôs

Suponha que se deseja que um grupo de robôs transporte cargas em formação (exemplo: transporte de produtos em uma linha de produção) e que não se sabe exatamente o peso da carga que cada robô vai transportar. Neste caso, os parâmetros dinâmicos dos robôs são incertos. Agora, considere que os robôs utilizados nesta simulação estejam, cada um, transportando uma carga de $15kg$. Neste caso, considerando que somente a massa e o momento de inércia do corpo do robô teriam mudanças significativas, tem-se

- $m_c = 45kg$
- $I_c = 25kgm^2$

Pode-se concluir então que, para os valores de m_c e I_c acima, tem-se $c_i = 0.2$. No entanto, como é assumido que não se conhece os novos valores de m_c e I_c , o controlador de formação utiliza os mesmos parâmetros da simulação anterior ($c_i = 0.1350$). Neste caso, há claramente erros paramétricos. Considerando estes erros e os mesmos parâmetros do controlador da simulação anterior ($k_{pi} = 80, k_v = 50, k = 10$), as Figuras 4.9, 4.10 e 4.11 mostram respectivamente as trajetórias dos robôs, a variação da norma do gradiente em função do tempo e a posição relativa entre robôs. Observe que o transitório da formação até alcançar o equilíbrio foi alterado.

Além disso, os robôs demoram mais de 20 segundos para alcançar formação desejada, que minimiza a função potencial do sistema V . Portanto, a especificação desejada (formação ser alcançada em menos de 20 segundos) não é alcançada.

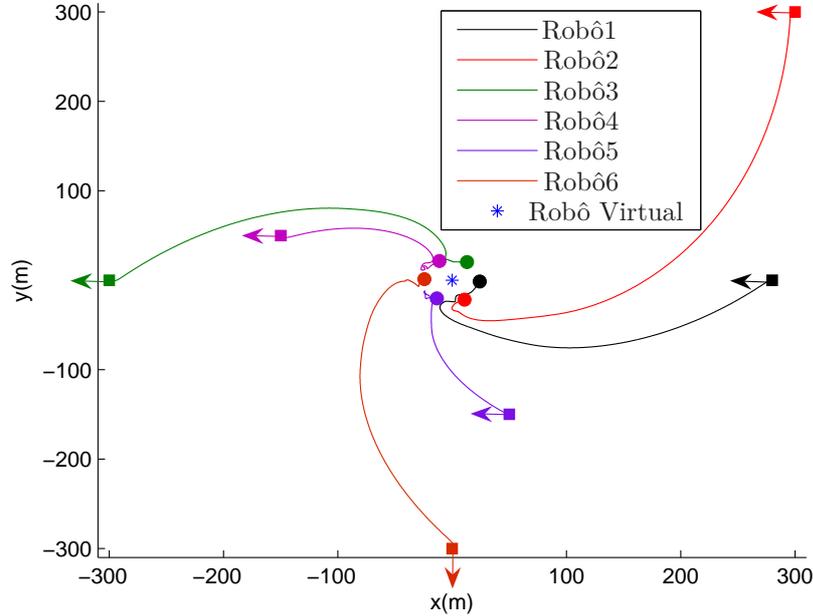


Figura 4.9: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Trajetórias dos robôs com erro paramétrico.

Lei de controle com adaptação

Para comparar o desempenho do controlador de formação com adaptação e sem adaptação, são apresentados agora os resultados de simulação do controle de formação adaptativo. É considerado novamente os mesmos parâmetros do controlador da simulação anterior ($k_{pi} = 80$, $k_v = 50$, $k = 10$) e que os robôs estão transportando cargas de $15kg$, portanto a massa e momento de inércia considerados, para cada robô, são:

- $m_c = 45kg$,
- $I_c = 25kgm^2$.

É utilizada a lei de controle de formação adaptativa (4.49), onde o valor inicial do vetor de parâmetros estimados $\hat{\phi}_i$, para cada robô i , é

- $\hat{\phi}_i^T(0) = [\hat{c}_i(0) \quad -\hat{c}_i(0)]$,

onde $\hat{c}_i(0) = 0.1350$. Note que, como $m_c = 45kg$ e $I_c = 25kg$, o parâmetros c_i tem o mesmo valor da simulação anterior (sem adaptação e com erros paramétricos), ou

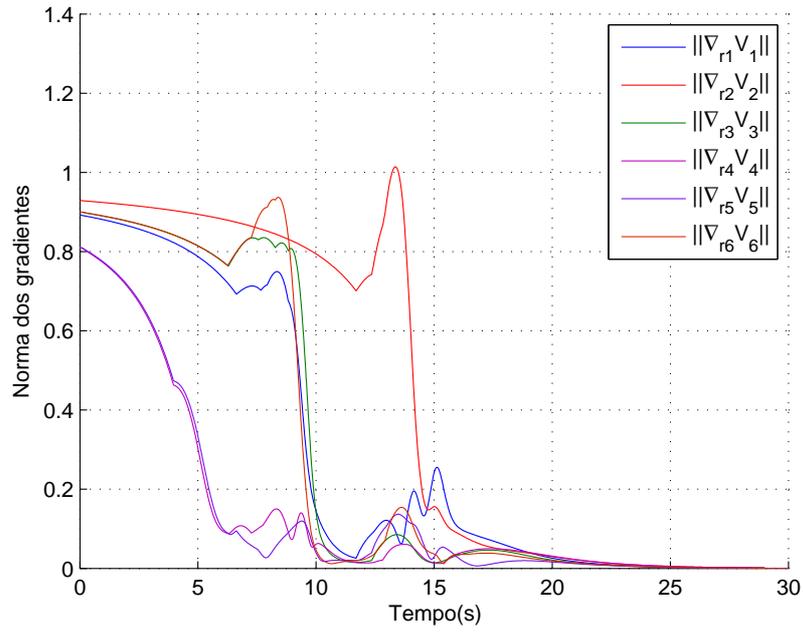


Figura 4.10: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Variação de $\|\nabla_{r_i} V_{s_i}\|$ em função do tempo com erro paramétrico.

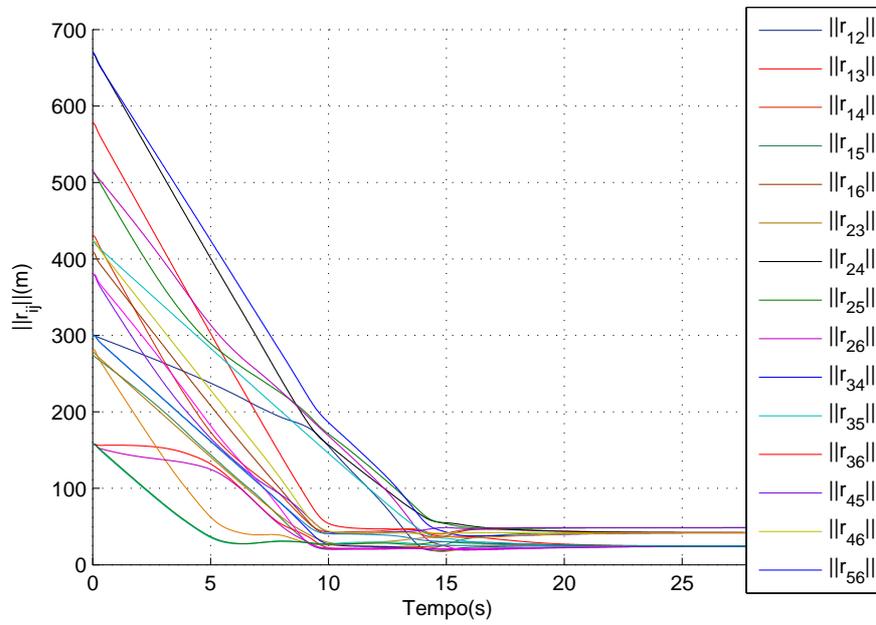


Figura 4.11: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos conhecidos: Posições relativas entre robôs com erro paramétrico.

seja, $c_i = 0.2$. Portanto, o erro paramétrico no instante inicial, também é igual. O valor do ganho da lei de adaptação (4.51) foi escolhido por tentativas, obtendo-se

- $\Gamma = 1 \times 10^{-7} I_{2N}$

onde I_{2N} é uma matriz identidade de ordem $2N$ e N é o número de robôs na formação. Esse valor de Γ foi escolhido de forma que o erro paramétrico no instante $t = 0$ não altere o comportamento transitório do sistema até alcançar a formação. Verificou-se, por simulação, que para valores de Γ maiores que este (verificou-se valores até mil vezes maior), o comportamento transitório do sistema não apresenta mudanças significativas. Contudo, se for escolhido um valor de Γ dez vezes menor ($\Gamma = 1 \times 10^{-8} I_{2N}$), há mudanças significativas no comportamento transitório do sistema.

As Figuras 4.12, 4.13 e 4.14 mostram, respectivamente, as trajetória dos robôs, a variação da norma do gradiente $\|\nabla_{r_i} V_{si}\|$ e a variação das posições relativas entre robôs. Comparando essas Figuras com as Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 (caso sem erros

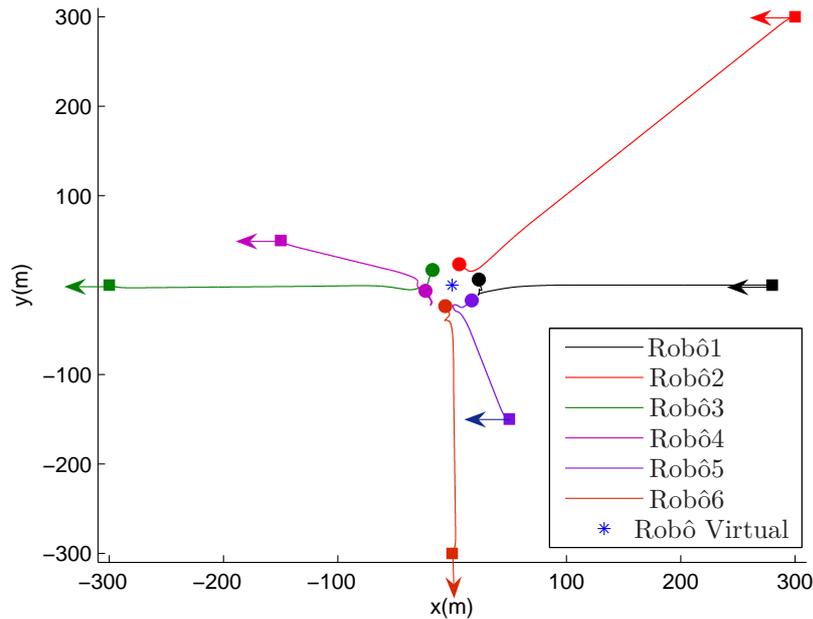


Figura 4.12: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos incertos: Trajetórias dos robôs com controle adaptativo.

nos parâmetros dinâmicos dos robôs), observa-se que a formação com o controlador adaptativo não apresenta mudança perceptível de desempenho com relação a formação com o controlador dinâmico sem erro paramétrico. Portanto, apresentou boa robustez à variação dos parâmetros dinâmicos. Essa robustez não ocorreu no controlador sem adaptação e com erro paramétrico, como mostrou as Figuras 4.9, 4.10 e 4.11.

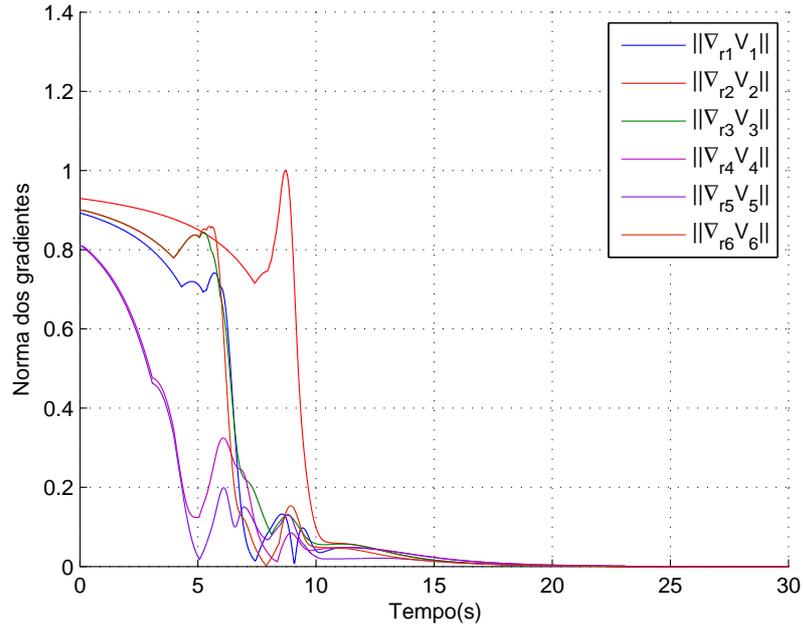


Figura 4.13: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos incertos: Variação de $\|\nabla_{r_i} V_{si}\|$ em função do tempo com controle adaptativo.

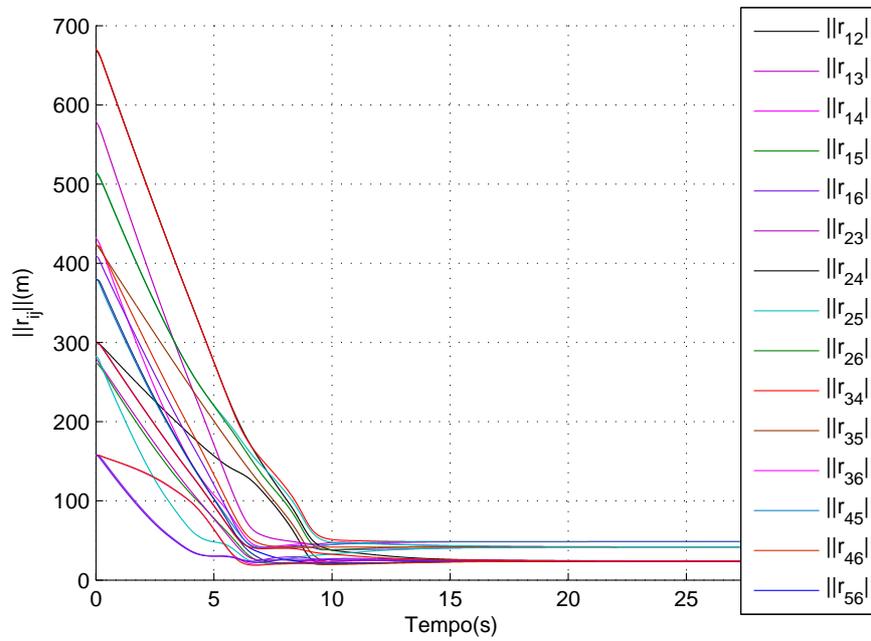


Figura 4.14: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos incertos: Posições relativas entre robôs com controle adaptativo.

Para verificar a evolução dos parâmetros dinâmicos estimados, a Figura 4.15 mostra variação destes em função do tempo.

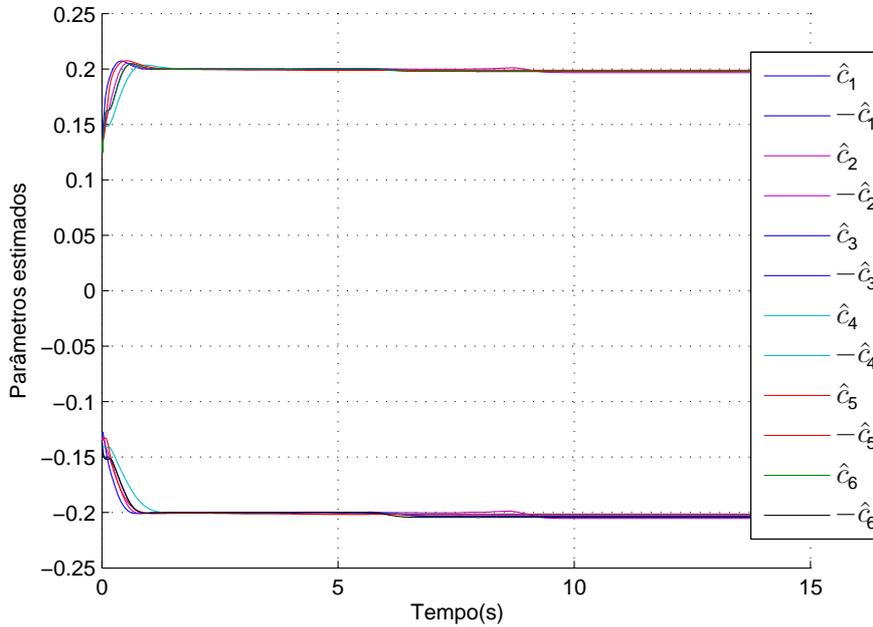


Figura 4.15: Variação dos parâmetros estimados em função do tempo.

Para ilustrar o efeito do ganho da lei de adaptação Γ , as Figuras (4.16) e (4.17) mostram, respectivamente, as trajetórias dos robôs e a variação dos parâmetros estimados para $\Gamma = 1 \times 10^{-8} I_{2N}$. Observe, comparando as Figuras 4.12 e 4.16, que o comportamento transitório do sistema é alterado. Esta alteração se torna ainda mais significativa se Γ for reduzido ainda mais. Observe também, comparando as Figuras 4.15 e 4.17 que os parâmetros estimados convergem para valores diferentes (o erro paramétrico converge para um valor maior utilizando $\Gamma = 1 \times 10^{-8} I_{2N}$).

4.4.3 Conclusões

Neste capítulo, foi abordado o problema de controle de formação de robôs móveis não-holonômicos com parâmetros dinâmicos desconhecidos. A estratégia de controle proposta, baseada em função potencial, é descentralizada, evita colisão entre robôs e aplica-se no controle de formação de uniciclos e de robôs com acionamento diferencial. Para cada veículo, uma estratégia de controle em cascata combinou um controlador de movimento adaptativo que leva em conta as incertezas na dinâmica não linear, e um controle cinemático, levando para um sistema adaptativo globalmente estável. Foram feitas simulações para uma formação com robôs uniciclos e robôs com acionamento diferencial. Em ambos os casos, os resultados de simulação

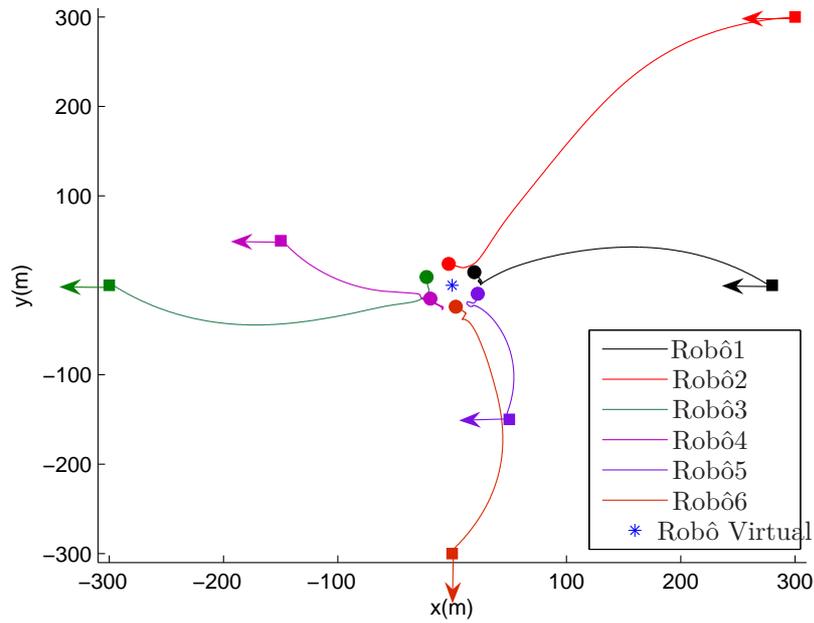


Figura 4.16: Robôs diferenciais com parâmetros dinâmicos incertos: Trajetórias dos robôs com controle adaptativo e ganho de adaptação $\Gamma = 1 \times 10^{-8} I_{2N}$.

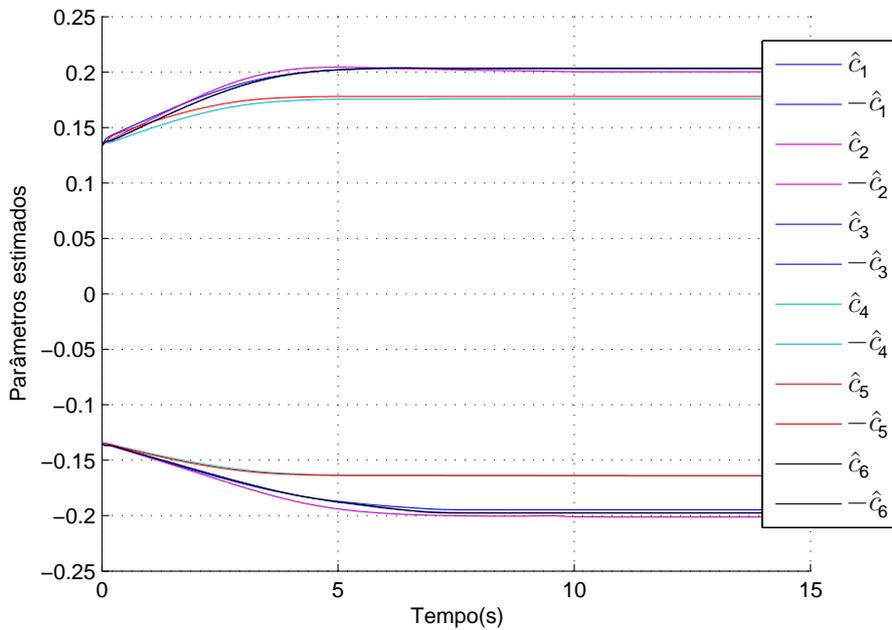


Figura 4.17: Variação dos parâmetros estimados em função do tempo para um ganho de adaptação $\Gamma = 1 \times 10^{-8} I_{2N}$.

confirmaram a eficiência do controlador de formação proposto. Também foram feitas simulações comparando o desempenho do controlador de formação adaptativo com um controlador de formação sem adaptação, considerando uma variação não medida dos parâmetros dinâmicos dos robôs. Os resultados destas simulações mostraram que o controlador de formação adaptativo possui maior robustez à variação dos parâmetros dinâmicos dos robôs.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese, foi abordado o problema de controle de formação, utilizando a abordagem por função potencial, de robôs móveis não-holonômicos. Foram considerados os seguintes robôs:

1. Pontuais, sem restrição de curvatura da trajetória e com dinâmica desprezível.
2. Não pontuais, sem restrição de curvatura da trajetória e com dinâmica desprezível.
3. Não pontuais, com restrição de curvatura da trajetória e com dinâmica desprezível (robôs tipo carro).
4. Não pontuais, sem restrição de curvatura da trajetória e com dinâmica incerta.

No caso 1, cada robô da formação é modelado como um unicyclo com dinâmica desprezível. Neste ponto, foi implementada uma lei de controle de formação que utiliza somente informações de posição dos robôs. Utilizando uma análise de estabilidade de Lyapunov, mostrou-se que o esquema de controle proposto garante a convergência da formação para o mínimo da função potencial e evita colisões entre robôs se estes forem considerados pontuais. Contudo, para evitar colisões, foi necessário considerar o grafo de comunicação completo, o que limitou a escalabilidade da lei de controle proposta. Este problema foi resolvido quando foi abordado o caso 2, onde a lei de controle proposta no caso 1 foi estendida para robôs não pontuais. Para isto, foi utilizada uma função potencial saturada e deslocada, que permite o projeto de leis de controle de formação escaláveis. Mostrou-se então, utilizando a análise de estabilidade de Lyapunov, que o esquema de controle de formação proposto, utilizando uma função potencial saturada e deslocada, também garante a convergência da formação para uma configuração que minimiza a função potencial e evita colisões entre robôs. Foram apresentados resultados de simulação, que com uma análise comparativa entre as estratégias de controle dos casos 1 e 2, ilustraram os resultados demonstrados pelas análises de estabilidade de Lyapunov.

No caso 3, em que há restrição de curvatura da trajetória, o controlador proposto no caso 1, bem como sua extensão para robôs não pontuais no caso 2, não puderam ser utilizados. Portanto, foram propostas três novas leis de controle:

1. Controlador com projeção
2. Controlador com a norma do vetor gradiente
3. Controlador com *bias*

As três leis de controle propostas utilizaram uma função potencial saturada e deslocada, sendo portanto escaláveis. Análises de estabilidade de Lyapunov (uma para cada lei de controle) mostraram que as três estratégias de controle propostas minimizam a função potencial do sistema e garantem que colisões são evitadas considerando as dimensões dos robôs. Contudo, a análise de estabilidade da formação com o primeiro controlador mostrou que a formação entra em equilíbrio quando todos os robôs são ortogonais à direção de suas forças artificiais resultantes. Portanto, mostrou-se que a função potencial é minimizada sob a hipótese que esta condição de ortogonalidade não ocorre. No entanto, as análises de estabilidade de Lyapunov também mostraram que esta hipótese é relaxada quando os outros dois controladores (norma do vetor gradiente e *bias*) são utilizados. Foram feitas simulações, que ilustraram os resultados de estabilidade teóricos obtidos pelas análises de estabilidade de Lyapunov. Além disso, estas simulações mostraram que a lei de controle com *bias*, se comparada à lei de controle com a norma do vetor gradiente, é mais eficiente para evitar o escorregamento lateral do veículo.

Finalmente, no caso 4, foram propostas, para cada agente, estratégias de controle em cascata. Estas estratégias combinaram um controlador de movimento adaptativo, devido aos parâmetros dinâmicos desconhecidos, com um controle cinemático (que utilizou uma função potencial saturada e deslocada), tornando a formação um sistema adaptativo globalmente estável. Foi resolvido o problema de controle de formação de robôs unicyclos e robôs com acionamento diferencial. Resultados de simulação ilustraram os resultados de estabilidade obtidos pela análise de Lyapunov, que mostraram que o esquema de controle proposto garante a convergência da formação para uma configuração que minimiza a função potencial.

Sabendo que o problema de controle de formação de robôs ainda tem pontos em aberto, na próxima seção são apresentadas propostas de trabalhos futuros.

5.1 Trabalhos futuros

5.1.1 Controle de formação de robôs não-holonômicos com restrição de curvatura e dinâmica desconhecida

A lei de controle de formação de robôs móveis com restrição de curvatura de trajetória do capítulo 3 considera os parâmetros dinâmicos dos robôs desprezíveis. Já a lei de controle de formação dinâmica do capítulo 4 se aplica em robôs uniciclos e robôs com acionamento diferencial. Portanto, uma continuação natural deste trabalho, é estender a lei de controle de formação dinâmica do capítulo 4, para o controle de formação de robôs móveis não-holonômicos com dinâmica desconhecida.

5.1.2 Rastreamento de trajetória utilizando informação de posição dos robôs

O rastreamento de trajetória consiste no grupo de robôs manter a formação enquanto segue uma trajetória sem utilizar informação de velocidade dos vizinhos. Para resolver o problema de rastreamento, geralmente é utilizada a abordagem líder-seguidor (ver por exemplo (Consolini et al. 2008) e suas referências), onde a trajetória desejada é definida por um líder, que pode ser um robô da formação ou um líder virtual. Contudo, a abordagem líder-seguidor tem a desvantagem da forte dependência do líder para manter a formação, além de não evitar colisão entre os robôs. Em (Mastellone et al. 2008) é proposta uma lei de controle que resolve o problema de rastreamento, utilizando a função potencial somente para evitar colisão. É controlada uma formação de robôs uniciclos com dinâmica desprezível e mostra-se que o erro de rastreamento converge para um conjunto residual que é reduzido com o aumento do ganho do controlador. Além disso, os parâmetros dinâmicos dos robôs são desprezados. Em (Pereira et al. 2011), é resolvido o problema de rastreamento de trajetória, utilizando função potencial, para uma formação de sistemas não holonômicos com dinâmica incerta. Neste caso, para que haja rastreamento, é definida, para cada robô, uma velocidade desejada. Uma proposta de trabalho futuro, é resolver o problema de rastreamento de uma trajetória utilizando somente informação de posição dos robôs.

5.1.3 Análise de robustez a atraso de comunicação e perturbações externas

Em (Olfati Saber & Murray 2004) é feita uma análise da robustez do controlador de formação, baseado em consenso, a atraso, a falha de comunicação e a perturbações externas. Esta análise tem uma significativa importância na prática. Por exemplo,

caso se queira implementar o controle de formação de aeronaves, o controlador deve ser robusto às rajadas de vento, que são uma perturbação comum no controle de aeronaves. Além disso, falhas de comunicação entre agentes podem ocorrer, seja numa formação de aeronaves, como de robôs móveis. Nesta tese, nenhuma análise de robustez a atraso, a falha de comunicação e a perturbações externas foi implementada, sendo portanto uma proposta de trabalho futuro.

5.1.4 Extensão para a forma da cadeia

Sabe-se que uma classe importante de sistemas não-holonômicos práticos, tais como, sistemas do tipo *knife edge* (Bloch et al. 1992), automóveis com direção dianteira, tratores com múltiplos *trailers* e aeronaves rígidas simétricas subatuadas, podem ser transformados para forma da cadeia (Kolmanovsky & McClamroch 1995), mostrada abaixo:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi}_1 &= \nu_1 \\
 \dot{\xi}_2 &= \nu_2 \\
 \dot{\xi}_3 &= \xi_2 \nu_1 \\
 \dot{\xi}_4 &= \xi_3 \nu_1 \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_n &= \xi_{n-1} \nu_1
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Em (Dong & Farrell 2009) a técnica de *backstepping* foi utilizada para propor uma lei de controle de formação, baseada em consenso, de um grupo de sistemas dinâmicos onde a parte cinemática é representada na forma da cadeia. Contudo, o problema de colisão não foi considerado e os parâmetros dinâmicos foram considerados conhecidos. Para resolver o problema de colisão, pode-se propor utilização da abordagem por função potencial.

Referências Bibliográficas

- Anderson, M. R. & Robbins, A. C. (1998), Formation flight as a cooperative game, *in* ‘AIAA Guidance, Navigation., Control, Conference’, Boston MA: Amer. Inst. Aeronautics Astronautics, AIAA-98-4124, pp. 244–251.
- Antonelli, G., Arrichiello, F., Chakraborti, S. & Chiaverini, S. (2007), Experiences of formation control of multi-robot systems with the null-space-based behavioral control, *in* ‘IEEE International Conference on Robotics and Automation’, Roma, Italy, pp. 1068–1073.
- Arcak, M. (2007), ‘Passivity as a design tool for group coordination’, **52**(8), 1380–1390.
- Balch, T. & Arkin, R. C. (1998), ‘Behavior-based formation control for multirobot teams’, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **14**(6), 926–939.
- Beard, R. & Hadaegh, F. (1999), Finite thrust control for satellite formation flying with slate constraints, *in* ‘IEEE American Control Conference’, San Diego, USA, pp. 4383–4387.
- Beard, R. W. & Hadaegh, F. Y. (1998), Constellation templates: An approach to autonomous formation flying, *in* ‘World Automation Congress’, Anchorage, Alaska, pp. 177.1–177.6.
- Beard, R. W., Lawton, J. & Hadaegh, F. Y. (2001), ‘A coordination architecture for spacecraft formation control’, *Transactions on Control Systems Technology* **9**(6), 777–790.
- Biggs, N. (1994), *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press.
- Bloch, A. M., Reyhanoglu, M. & McClamroch, N. H. (1992), ‘Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems’, *IEEE Transaction on automatic control* **37**(11), 1746–1757.
- Brockett, R. W. (1994), *Asymptotic stability and feedback stabilization, Differential Geometric Control Theory*, Birkhauser.

- Burns, R., McLaughlin, C., Leitner, J. & Martin, M. (2000), Techsat 21: Formation design, control, and simulation, Montana, pp. 19–25.
- Chen, Q. & Luh, J. Y. S. (1994), Coordination and control of a group of small mobile robots, *in* ‘IEEE International Conference on Robotics and Automation’, San Diego CA, pp. 2315–2320.
- Consolini, L., Morbidi, F., Prattichizzo, D. & Tosques, M. (2008), ‘Leader-follower formation control of nonholonomic mobile robots with input constraints’, *Automatica* **44**(5), 1343–1349.
- Consolini, L., Morbidi, F., Prattichizzo, D. & Tosques, M. (2009), ‘Stabilization of a hierarchical formation of unicycle robots with velocity and curvature constraints’, *IEEE Transactions on Robotics* **25**(5), 1176–1184.
- Daneshfar, F. & Bevrani, H. (2009), ‘Multi-agent systems in control engineering: A survey fatemeh daneshfar’, *Journal of Control Science and Engineering* .
- Desai, J. P., Ostrowski, J. P. & Kumar, V. (2001), ‘Modeling and control of formations of nonholonomic mobile robots’, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **17**(6), 905–908.
- Dimarogonas, D. V. & Kyriakopoulos, K. J. (2005), A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent nonholonomic non-point agents, *in* ‘IEEE International Symposium on Intelligent Control’, Limassol, Cyprus, pp. 820–825.
- Dimarogonas, D. V., Loizou, S. G., Kyriakopoulos, K. J. & Zavlanos, M. M. (2006), ‘A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent non-point agents’, *Automatica* **42**(2), 229–243.
- Do, K. D. (2007), Formation tracking control of unicycle-type mobile robots, *in* ‘IEEE International Conference on Robotics and Automation’, Roma, Italy, pp. 2391–2396.
- Dong, W. & Farrell, J. A. (2008), Consensus of multiple nonholonomic systems, *in* ‘IEEE Conf. on Decision and Control’, Cancun, México, pp. 2270–2275.
- Dong, W. & Farrell, J. A. (2009), ‘Decentralized cooperative control of multiple nonholonomic dynamic systems with uncertainty’, *Automatica* **45**(3), 706–710.

- F., X. & Wang, L. (2008), ‘Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(8), 1804–1816.
- Fahimi, F. (2008), *Autonomous Robots: Modeling, Path Planning, and Control*, 1st edn, Springer.
- Fang, L. & Antsaklis, P. J. (2006), Decentralized formation tracking of multi-vehicle systems with nonlinear dynamics, in ‘IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation’, Ancona, Italy.
- Fax, J. A. & Murray, R. M. (2004), ‘Information flow and cooperative control of vehicle formations’, *IEEE Transaction on automatic control* **49**(9), 1465–1476.
- Figueiredo, L. C. & Jota, F. G. (2004), ‘Introdução ao controle de sistemas não-holonômicos’, *Revista Controle e Automação* **15**(3), 243–268.
- Fukao, T., Nakagawa, H. & Adachi, N. (2000), ‘Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot’, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **16**(5), 609–615.
- Ghommam, J., Mehrjerdi, H., Saad, M. & Mnif, F. (2010), ‘Formation path following control of unicycle-type mobile robots’, *Robotics and Autonomous Systems* **58**(5), 727–736.
- Gouvea, J. A., Lizarralde, F. & Hsu, L. (2011), Potential function formation control of nonholonomic mobile robots with curvature constraints, in ‘IFAC World Congress’, Milano, Italy.
- Gouvea, J. A., Pereira, A. R., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2010), Adaptive formation control of dynamic nonholonomic systems using potential functions, in ‘IEEE American Control Conference’, Baltimore, Maryland, USA, pp. 230–235.
- Guenther, R. & Hsu, L. (1993), Variable structure adaptive cascade control of rigid-link electrically-driven robot manipulators, in ‘IEEE Conf. on Decision and Control’, San Antonio, pp. 2137–2142.
- Gustavi, T. & Hu, X. (2008), ‘Observer-based leader-following formation control using onboard sensor information’, *IEEE Transactions on Robotics* **24**(6), 1457–1462.

- Hoffmann, G. M. & Tomlin, C. J. (2010), ‘Mobile sensor network control using mutual information methods and particle filters’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **55**(1), 32–47.
- Howard, A., Mataric, M. J. & Sukhatme, G. S. (2002), Mobile sensor network deployment using potential fields: A distributed, scalable solution to the area coverage problem, *in* ‘International Symposium on Distributed Autonomous Robotics Systems’, Fukuoka, Japan, pp. 299–308.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1990), Binary control approach to design globally exponential stable systems, *in* ‘7th International Conference on Systems Engineering’, Las Vegas, USA.
- Hsu, L., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2007), ‘Lyapunov/passivity-based adaptive control of relative degree two mimo systems with an application to visual servoing’, *IEEE Transaction on automatic control* **52**, 364–371.
- Jadbabaie, A. (2003), On coordination strategies for mobile agents with changing nearest neighbor sets, *in* ‘IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation’, Rhodes, Greece.
- Jadbabaie, A., Lin, J. & Morse, A. S. (2003), ‘Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules’, *IEEE Transaction on automatic control* **48**(3), 988–1001.
- Jones, J. L. (2006), ‘Robots at the tipping point’, *IEEE Robotics and Automation Magazine* **13**(1), 76–78.
- Kang, Y. H., Lee, M. C., Kim, C. Y., Yoon, S. M. & Noh, C. B. (2011), A study of cluster robots line formatted navigation using potential field method, *in* ‘IEEE International Conference on Mechatronics and Automation’, Beijing, China, pp. 1723–1728.
- Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, Prentice Hall.
- Kim, D. H., Wang, H. O., Ye, G. & Shin, S. (2004), Decentralized control of autonomous swarm systems using artificial potential functions: analytical design guidelines, *in* ‘IEEE Conf. on Decision and Control’, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, pp. 159–164.
- Kobayashi, S. & Nomizu, K. (1996), *Foundations of Differential Geometry (Volume 1)*, Wiley-Interscience.
- Kolmanovsky, I. & McClamroch, H. (1995), ‘Developments in nonholonomic control problems’, *IEEE Control Systems Magazine* **15**(6), 20–36.

- Leonard, N. E. & Fiorelli, E. (2001), Virtual leaders, artificial potentials and coordinated control of groups, *in* ‘IEEE Conf. on Decision and Control’, Orlando Florida, pp. 2968–2873.
- Lewis, M. A. & Tan, K. H. (1997), ‘High precision formation control of mobile robots using virtual structures’, *Autonomous Robot* **4**(4), 387–403.
- Li, S.-M., Boskovic, J., Seereeram, S., Prasanth, R., Amin, J., Mehra, R., Beard, R. & McLain, T. (2002), Autonomous hierarchical control of multiple unmanned combat air vehicles, *in* ‘IEEE American Control Conference’, Anchorage, AK, pp. 274–279.
- Lin, Z., Broucke, M. & Francis, B. (2004), ‘Local control strategies for groups of mobile autonomous agents’, *IEEE Transaction on automatic control* **49**(4), 622–629.
- Lynch, N. A. (1997), *Distributed Algorithms*, San Mateo, CA: Morgan Kaufmann.
- Marino, A., Parker, L. E., Antonelli, G., Caccavale, F. & Chiaverini, S. (2009), A fault-tolerant modular control approach to multi-robot perimeter patrol, *in* ‘IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics’, Guilin, China, pp. 735–740.
- Mastellone, S., Mejía, J. S., Stipanovic, D. M. & Spong, M. W. (2011), ‘Formation control and coordinated tracking via asymptotic decoupling for lagrangian multi-agent systems’, *Automatica* **47**(11), 2355–2363.
- Mastellone, S., Stipanovic, D. M., Graunke, C. R., Intlekofer, K. A. & Spong, M. W. (2008), ‘Formation control and collision avoidance for multi-agent non-holonomic systems: Theory and experiments’, *International Journal of Robotics Research* **27**(1), 107–126.
- Mastellone, S., Stipanovic, D. M. & Spong, M. W. (2007), Remote formation control and collision avoidance for multi-agent nonholonomic systems, *in* ‘IEEE International Conference on Robotics and Automation’, Roma Italy, pp. 1062–1067.
- McInnes, C. R. (1995), ‘Autonomous ring formation for a planar constellation of satellites’, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **18**(5), 1215–1217.
- Mei, J., Ren, W. & Ma, G. (2011), ‘Distributed coordinated tracking with a dynamic leader for multiple euler-lagrange systems’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **56**(6), 1415–1421.

- Moreau, L. (2004), Stability of continuous-time distributed consensus algorithms, *in* ‘IEEE Conf. on Decision and Control’, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, pp. 3998–4003.
- Murray, R. M. (2007), ‘Recent research in cooperative control of multivehicle systems’, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **129**(5), 571–584.
- Murray, R. M., Li, Z. & Sastry, S. S. (1994), *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press.
- Ogren, P. & Leonard, N. E. (2002), A tractable convergent dynamic window approach to obstacle avoidance, *in* ‘IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems’, Lausanne, Switzerland, pp. 595–600.
- Ogren, P. & Leonard, N. E. (2003), Obstacle avoidance in formation, *in* ‘IEEE International Conference on Robotics and Automation’, Taipei, Taiwan, pp. 2492–2497.
- Oh, K. & Ahn, H. (2010), A survey of formation of mobile agents, *in* ‘IEEE International Symposium on Intelligent Control’, Yokohama, pp. 1470–1475.
- Olfati-Saber, R. & Murray, R. M. (2002), Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions, *in* ‘IFAC World Congress’, Barcelona, Spain.
- Olfati Saber, R. & Murray, R. M. (2004), ‘Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays’, *IEEE Transaction on automatic control* **49**(9), 1520–1533.
- Parker, L. E. (2000), Current state of the art in distributed autonomous mobile robotics, *in* ‘IEEE Conf. on Decision and Control’, Knoxville, Tennessee, USA.
- Pereira, A. R. (2011), Controle Adaptativo de Formação para Agentes Móveis Usando Potenciais Artificiais, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Pereira, A. R., Gouvea, J. A., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2011), Formation adaptive control for nonholonomic dynamic agents: Regulation and tracking, *in* ‘IFAC World Congress’, Milano, Italy.
- Pereira, A. R., Hsu, L. & Ortega, R. (2009), Globally stable adaptive formation control of euler-lagrange agents via potential functions, *in* ‘IEEE American Control Conference’, St. Louis, MO, USA, pp. 2606–2611.

- Pereira, G. A. S., Kumar, V. & Campos, M. F. M. (2008), ‘Closed loop motion planning of cooperating mobile robots using graph connectivity’, *Robotics and Autonomous Systems* **56**(4), 373–384.
- Ramaswamy, S. P. & Balakrishnan, S. N. (2008), Formation control of car-like mobile robots: A lyapunov function based approach, *in* ‘IEEE American Control Conference’, Seattle, Washington, USA, pp. 657–662.
- Ren, W. & Beard, R. W. (2005), ‘Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies’, *IEEE Transaction on automatic control* **50**(5), 655–661.
- Ren, W., Beard, R. W. & Atkins, E. M. (2007), ‘Information consensus in multi-vehicle cooperative control’, *IEEE Control Systems Magazine* **27**(2), 71–82.
- Ren, W., Beard, R. W. & Kingston, D. B. (2005), Multi-agent kalman consensus with relative uncertainty, *in* ‘IEEE American Control Conference’, Portland, OR, USA, pp. 1865–1870.
- Reynolds, C. W. (1987), ‘Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model’, *Computer Graphics* **21**(4), 25–34.
- Saska, M., Mejía, J. S., Stipanovic, D. M. & Schilling, K. (2009), Control and navigation of formations of car-like robots on a receding horizon, *in* ‘IEEE International Conference on Control Applications’, Saint Petersburg, Russia, pp. 1761–1766.
- Savkin, A. V. (2004), ‘Coordinated collective motion of groups of autonomous mobile robots: Analysis of vicsek’s model’, *IEEE Transaction on automatic control* **49**(6), 981–983.
- Scharf, D., Hadaegh, F. & Ploen, S. (2004), A survey of spacecraft formation flying guidance and control (part 11): Control, *in* ‘IEEE American Control Conference’, Boston, USA, pp. 19–25.
- Shao, J., Xie, G. & Wang, L. (2007), ‘Leader-following formation control of multiple mobile vehicles’, *Control Theory and Applications* **1**(2), 545–552.
- Shevitz, D. & Paden, B. (1994), ‘Lyapunov stability theory of nonsmooth systems’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(9), 1910–1914.

- Shimoda, S., Kuroda, Y. & Iagnemma, K. (2005), Potential field navigation of high speed unmanned ground vehicles on uneven terrain, *in* ‘IEEE International Conference on Robotics and Automation’, Barcelona, Spain, pp. 2828–2833.
- Siegwart, R. & Nourbakhsh, I. R. (2004), *Introduction to Autonomous Mobile Robots*, 1st edn, MIT Press.
- Sontag, E. D. & Wang, Y. (1995), ‘On characterizations of the input-to-state stability property’, *Systems and Control Letters* **24**(5), 351–359.
- Su, C. Y. & Stepanenko, Y. (1992), ‘Robust motion/force control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints’, *IEEE Transaction on automatic control* **39**(3), 609–614.
- Tanner, H. G., Jadbabaie, A. & Pappas, G. J. (2003), Stable flocking of mobile agents, part ii: Dynamic topology, *in* ‘IEEE Conf. on Decision and Control’, Maui, HI, pp. 2016–2021.
- Tanner, H. G., Jadbabaie, A. & Pappas, G. J. (2007), ‘Flocking in fixed and switching networks’, *IEEE Transaction on Automatic Control* **52**(5), 863–868.
- Tanner, H. G., Pappas, G. J. & Kumar, V. (2002), Input-to-state stability on formation graphs, *in* ‘IEEE Conf. on Decision and Control’, Las Vegas, Nevada USA, pp. 2439–2444.
- Tanner, H. G., Pappas, G. J. & Kumar, V. (2004), ‘Leader-to-formation stability’, *IEEE Transaction on Robotics and Automation* **20**(3), 443–455.
- Wang, P. K. C. (1989), Navigation strategies for multiple autonomous mobile robots moving in formation, *in* ‘IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems’, Tsukuba, Japan, pp. 486–493.
- Wang, Y. & Han, Z. (1998), Stability of an automated vehicle platoon, *in* ‘IEEE American Control Conference’, Philadelphia, USA, pp. 950–954.
- Widyotriatmo, A. & Hong, K. (2011), ‘Navigation function-based control of multiple wheeled vehicles’, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **58**(5), 1896–1906.
- Yamaguchi, H. & Burdick, J. W. (1998), Asymptotic stabilization of multiple nonholonomic mobile robots forming group formations, *in* ‘IEEE International Conference on Robotics and Automation’, Leuven, Belgium, pp. 3573–3580.

Yun, X., Alptekin, G. & Albayrak, O. (1997), 'Line and circle formation of distributed physical mobile robots', *Journal of Robot and System* **14**(2), 63–76.

Apêndice A

Produção Científica

Neste apêndice encontram-se trabalhos publicados que abordam os principais resultados obtidos nesta tese.

- GOUVEA, J. A., CARVALHO, L. K., LEITE, A. C. "Controle Realimentado Estabilizante de um Robô Móvel Via Modo Deslizante". In: Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática, Juiz de Fora, MG, Brasil, 2008.
- GOUVEA, J. A., PEREIRA, A. R., HSU, L., LIZARRALDE, F. C. "Adaptive formation control of dynamic nonholonomic systems using potential functions". In: Proceedings of American Control Conference 2010, Baltimore, Maryland, USA, 2010.
- GOUVEA, J. A., PEREIRA, A. R., HSU, L., LIZARRALDE, F. C. "Controle Adaptativo de Formação de Sistemas Dinâmicos Não Holonômicos usando Funções Potenciais". In: Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática, Bonito, MS, Brasil, 2010.
- PEREIRA, A. R., GOUVEA, J. A., HSU, L., LIZARRALDE, F. C. "Formation Adaptive Control for Nonholonomic Dynamic Agents: Regulation and Tracking". In: Proc. of the 18th IFAC World Congress, 2011.
- GOUVEA, J. A., LIZARRALDE, F. C., HSU, L. "Potential Function Formation Control of Nonholonomic Mobile Robots with Curvature Constraints". In: Proc. of the 18th IFAC World Congress, 2011.