



## CONTROLE ADAPTATIVO DE FORMAÇÃO PARA AGENTES AUTÔNOMOS MÓVEIS USANDO POTENCIAIS ARTIFICIAIS

Ademir Rodrigues Pereira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Liu Hsu

Rio de Janeiro  
Março de 2011

CONTROLE ADAPTATIVO DE FORMAÇÃO PARA AGENTES  
AUTÔNOMOS MÓVEIS USANDO POTENCIAIS ARTIFICIAIS

Ademir Rodrigues Pereira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

---

Prof. Liu Hsu, Dr. d'Etat

---

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

---

Prof. Mário Fernando Montenegro Campos, Ph.D.

---

Prof. Marco Henrique Terra, D. Sc

---

Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2011

Pereira, Ademir Rodrigues

Controle Adaptativo de Formação para Agentes Autônomos Móveis usando Potenciais Artificiais /Ademir Rodrigues Pereira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2011.

XIV, 129 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Liu Hsu

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2011.

Referências Bibliográficas: p. 98 – 104.

1. Controle de formação.
  2. Controle cooperativo.
  3. Sistemas multiagentes.
  4. Controle adaptativo.
  5. Rastreamento de trajetória.
- I. Hsu, Liu.  
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*A meus pais pelo empenho e pelo  
esforço na minha educação.*

# Agradecimentos

Agradeço a meu orientador, Professor Liu Hsu, pelo interesse, confiança e compreensão no decorrer da Pesquisa de Tese.

Aos Professores Fernando Lizarralde, Afonso Celso, Sérgio Lima Neto, pelos ensinamentos das aulas, que muito contribuíram com a qualidade desta Tese.

Aos companheiros do Laboratório de Controle, Prof Ramon, Jacoud, Eduardo, Toni, Lilian, Calvet, pelo ambiente agradável de trabalho e cooperação, e aos amigos Josiel e Tiago, pela constante troca de idéias que contribuíram para o desenvolvimento desta Tese.

Aos companheiros das diversas aulas, Fernando, Paula, Pedro, Elisson, Wilmar, Guilherme, Rafael, pela amizade e cooperação.

Aos meus chefes e companheiros do Centro Tecnológico do Exército pelo apoio e compreensão.

À minha esposa Gláucia, pelo incentivo e paciência durante estes anos de doutoramento. Aos meus filhos, Gabriel e Murillo, pela paciência e por suas presenças afetivas, que me deram forças para continuar.

Finalmente, agradeço a Deus por sempre me guiar.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## CONTROLE ADAPTATIVO DE FORMAÇÃO PARA AGENTES AUTÔNOMOS MÓVEIS USANDO POTENCIAIS ARTIFICIAIS

Ademir Rodrigues Pereira

Março/2011

Orientador: Liu Hsu

Programa: Engenharia Elétrica

Esta tese aborda uma solução para o controle de formação de agentes autônomos incertos. O padrão de configuração, que caracteriza a formação, é alcançado por meio de modelo cinemático gerado por adequadas funções potenciais, que pode também incorporar uma estratégia para evitar colisões com obstáculos ou entre agentes. As incertezas paramétricas do sistema são compensadas por algoritmo de controle adaptativo denominado controle binário adaptativo, que combina as propriedades de bom transitório e robustez do Controle por Modos Deslizantes com as desejáveis propriedades de estado estacionário de sistemas com parâmetros adaptativos, que entregam sinais contínuos de controle, evitando assim o fenômeno conhecido como *chattering* (chaveamento de alta frequência do sinal de controle).

A estratégia proposta é aplicada para controle de formação de agentes holonômicos e, em seguida, é estendida para um grupo de agentes não holonômicos. Em ambos os casos, são consideradas situações em que se tem ou não disponíveis para o controle as informações de velocidades dos agentes vizinhos.

Inicialmente, tanto para o caso holonômico quanto para o não holonômico, é considerado o problema de regulação, ou seja, os agentes partem de posições iniciais aleatórias e param quando alcançam o padrão geométrico desejado. Condições para estabilidade global e semiglobal dos sistemas multiagentes são estabelecidas usando a teoria de Lyapunov. Então, o esquema de controle é estendido para rastreamento de trajetória a ser realizado pelo grupo de agentes enquanto o padrão geométrico desejado é mantido. Simulações são apresentadas para ilustrar a eficácia do método de controle multiagente proposto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ADAPTIVE FORMATION CONTROL FOR AUTONOMOUS MOBILE  
AGENTS USING ARTIFICIAL POTENTIALS

Ademir Rodrigues Pereira

March/2011

Advisor: Liu Hsu

Department: Electrical Engineering

This thesis presents a solution for the formation control of a group of uncertain autonomous agents. The configuration pattern is achieved through appropriate kinematic model generated by potential functions, which may also incorporate a strategy for collision avoidance. The system parametric uncertainties are compensated by a robust adaptive control algorithm named *binary adaptive control* which combines the good transient properties and robustness of Sliding Mode Control with the desirable steady-state properties of parameter adaptive systems, delivering continuous control signals, thus avoiding chattering. First, the proposed strategy is applied to formation control of a group of holonomic agent and, then, it is extended to a group of nonholonomic agents. In both cases, scenarios are considered where the velocity information of neighboring agents is available or not are considered for the control implementation for each agent.

Initially, for both the holonomic and the non-holonomic cases, the regulation problem is considered, i.e., the agents start from random initial positions and stop when they reach the desired geometric pattern. Conditions for global and semi-global stability of the multi-agent system are established using Lyapunov theory for decentralized control schemes. Then, the control scheme is extended for trajectory tracking to be performed by a group of agents, while maintaining a desired geometric pattern.

Simulations are presented to validate the efficiency of the proposed multi-agent control method.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Estratégias de controle de formação . . . . .	2
1.2.1 Controle de formação via abordagem líder-seguidor . . . . .	3
1.2.2 Controle de formação baseada em comportamentos . . . . .	3
1.2.3 Controle de formação via coordenadas generalizadas . . . . .	4
1.2.4 Controle de formação via estrutura virtual . . . . .	5
1.2.5 Controle de formação via consenso . . . . .	6
1.2.6 Controle de formação via potenciais artificiais . . . . .	6
1.3 Colisões entre veículos . . . . .	7
1.4 Modelos matemáticos de robôs . . . . .	7
1.5 Compensação de incertezas paramétricas e perturbações externas . . . . .	11
1.5.1 Controle por modos deslizantes . . . . .	11
1.5.2 Controle adaptativo . . . . .	12
1.6 Estratégia proposta . . . . .	12
1.7 Visão geral da tese . . . . .	13
1.8 Notas Preliminares . . . . .	14
1.8.1 Normas e notações . . . . .	14
1.8.2 Classes de funções . . . . .	14
1.8.3 Gradiente e Matriz Hessiana . . . . .	15
1.8.4 Condição do complemento de Schur para matriz positiva definida . . . . .	15
1.8.5 Produto de Kronecker . . . . .	15
1.8.6 Estabilidade entrada-estado . . . . .	16
1.8.7 Estabilidade da entrada para a saída . . . . .	16
1.8.8 Estabilidade prática da entrada para a saída . . . . .	16

<b>2</b>	<b>Topologia da informação e Potenciais Artificiais</b>	<b>17</b>
2.1	Introdução . . . . .	17
2.2	Topologia da informação . . . . .	17
2.2.1	Função potencial artificial . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Resultados Preliminares</b>	<b>23</b>
3.1	Introdução . . . . .	23
3.2	Sistema massa - mola - amortecedor linear . . . . .	23
3.2.1	Modelo Matemático . . . . .	23
3.2.2	Estabilidade do sistema . . . . .	25
3.3	Sistema massa-mola não linear-amortecedor . . . . .	25
3.3.1	Estabilidade do sistema . . . . .	27
3.3.2	Exemplo ilustrativo . . . . .	27
3.4	Rastreamento de trajetória com líder virtual . . . . .	29
3.4.1	Simulações . . . . .	30
3.5	Rastreamento de trajetória para formações . . . . .	31
3.5.1	Um líder virtual . . . . .	31
3.5.2	Vários Líderes Virtuais . . . . .	34
3.6	Conclusões . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Formação de Robôs Holonômicos Incertos</b>	<b>40</b>
4.1	Modelo cinemático de primeira ordem para controle de formação . . . . .	41
4.1.1	Controle cinemático baseado em funções potenciais quadráticas . . . . .	41
4.1.2	Controle cinemático baseado em FPA Geral . . . . .	42
4.2	Modelo de segunda ordem para controle de formação . . . . .	43
4.2.1	Modelo matemático . . . . .	43
4.2.2	Estratégia proposta . . . . .	44
4.3	Controle de formação - regulação . . . . .	45
4.3.1	Regulação - posições e velocidades dos vizinhos disponíveis para controle . . . . .	45
4.3.2	Regulação - informação de velocidades dos vizinhos não disponíveis para controle . . . . .	49
4.4	Rastreamento de trajetória . . . . .	52
4.4.1	Rastreamento - estratégia 1 . . . . .	55
4.4.2	Rastreamento - Estratégia 2 . . . . .	57
4.5	Simulações . . . . .	57
4.5.1	Simulações - regulação . . . . .	58
4.5.2	Simulações - rastreamento . . . . .	62
4.6	O problema de evitar colisões com obstáculos e diferentes padrões de formação . . . . .	69

4.7	O problema dos mínimos locais . . . . .	70
4.8	Conclusões . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Formação de agentes não holonômicos incertos</b>	<b>76</b>
5.1	Introdução . . . . .	76
5.2	Formulação do problema . . . . .	77
5.2.1	Modelo matemático . . . . .	77
5.3	Controle adaptativo binário de sistemas multiagentes . . . . .	80
5.3.1	Regulação . . . . .	80
5.4	Controle formação - rastreamento de trajetória . . . . .	85
5.5	Simulações . . . . .	87
5.5.1	Exemplo ilustrativo . . . . .	87
5.6	Conclusões . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>95</b>
6.1	Conclusões . . . . .	95
6.2	Trabalhos futuros . . . . .	96
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>98</b>
<b>A</b>	<b>Demonstrações</b>	<b>105</b>
A.1	Demonstração da Proposição 1 . . . . .	105
A.2	Demonstração do Lema 1 . . . . .	106
A.3	Demonstração da Proposição 3 . . . . .	107
A.4	Demonstração do Teorema 1 . . . . .	108
A.5	Demonstração do Teorema 2 . . . . .	110
A.6	Demonstração do Teorema 3 . . . . .	112
A.7	Demonstração do Teorema 4 . . . . .	114
A.8	Demonstração do Teorema 5 . . . . .	116
A.9	Demonstração do Teorema 6 . . . . .	119
A.10	Demonstração do Teorema 7 . . . . .	121
<b>B</b>	<b>Binary Model Reference Adaptive Control</b>	<b>124</b>
<b>C</b>	<b>Produção Científica</b>	<b>126</b>
<b>D</b>	<b>Controle de formação - Regulação com FPA quadrática</b>	<b>127</b>

# Lista de Figuras

1.1	Líder - Seguidor . . . . .	3
1.2	FRP e FRF . . . . .	5
1.3	Estrutura virtual. . . . .	5
1.4	Representação esquemática de um veículo do tipo unicycle . . . . .	9
1.5	Representação de um veículo tipo carro . . . . .	9
2.1	Ramo $e_{ij}$ . . . . .	18
2.2	(a)cíclico (b) não-direcionado (c)outro . . . . .	19
2.3	Exemplo de função potencial geral . . . . .	21
2.4	Exemplo de função potencial somente repulsiva . . . . .	22
3.1	Sistema massa-mola-amortecedor . . . . .	24
3.2	Função de mola não linear . . . . .	26
3.3	Trajетórias dos agentes formando um triângulo. . . . .	28
3.4	Distância entre os agentes. . . . .	28
3.5	Sistema massa-mola-amortecedor e líder virtual . . . . .	29
3.6	Trajетória do líder virtual e do seguidor . . . . .	30
3.7	Erro de rastreamento do seguidor em relação ao líder virtual . . . . .	31
3.8	Velocidade do seguidor . . . . .	32
3.9	Trajетórias . . . . .	33
3.10	Distâncias entre os agentes . . . . .	33
3.11	Esquema básico para determinação dos líderes virtuais . . . . .	35
3.12	Trajетórias da formação . . . . .	35
3.13	Erro de formação . . . . .	36
3.14	Trajетórias dos agentes . . . . .	37
3.15	Distâncias entre os agentes . . . . .	38
4.1	Diagrama de blocos para formação de agentes holonômicos - regulação . . . . .	48
4.2	Diagrama de blocos para o $i$ -ésimo agente . . . . .	50
4.3	Estratégia 1. . . . .	53
4.4	Estratégia 2. . . . .	54
4.5	Estratégia 3. . . . .	54

4.6	Grafo de informação para seis agentes. . . . .	58
4.7	Erro de formação e $\sum  s_i $ . . . . .	60
4.8	$\theta_3(t)$ e $u_3(t)$ . . . . .	61
4.9	Erro de formação e $\sum  u_i $ . . . . .	62
4.10	Trajетórias dos agentes formando um triângulo para $K_D = 5I$ . . . . .	63
4.11	Distâncias interveiculares para $K_D = 5I$ . . . . .	64
4.12	Trajетórias dos agentes formando um triângulo para $K_D = 45I$ . . . . .	64
4.13	Distâncias interveiculares para $K_D = 45I$ . . . . .	65
4.14	Trajетória circular. . . . .	65
4.15	Erro de estado estacionário para o caso não-adaptativo. . . . .	66
4.16	Distância interveiculares para o caso não-adaptativo . . . . .	66
4.17	Erro de rastreamento para o caso adaptativo binário . . . . .	67
4.18	Distância interveiculares para o caso adaptativo binário . . . . .	67
4.19	Velocidades dos agentes - caso adaptativo binário . . . . .	68
4.20	Erro de formação $K_f = I$ - estratégia 2 . . . . .	68
4.21	Erro de formação $K_f = 3I$ - estratégia 2 . . . . .	69
4.22	Padrão hexagonal regular. . . . .	70
4.23	Agentes formando um hexágono regular. . . . .	71
4.24	Seis agentes buscando uma formação triangular. . . . .	72
4.25	Somatório das normas de velocidades dos agentes. . . . .	72
4.26	Erro de formação, sem o reordenamento de posições. . . . .	73
4.27	Visualização da reordenação dos agentes. . . . .	73
4.28	Trajетória dos agentes após reordenação. . . . .	74
5.1	Projeção do gradiente descendente de $V$ e ângulo desejado . . . . .	81
5.2	Esquema de controle de formação de agentes não-holonômicos - regulação . . . . .	83
5.3	Formação triangular de agentes autônomos . . . . .	86
5.4	Formação triangular para seis agentes . . . . .	88
5.5	Trajетórias dos agentes formando um triângulo para $K_D = 40I$ . . . . .	90
5.6	Distâncias interveiculares para $K_D = 40I$ para controle adaptativo binário . . . . .	90
5.7	Distâncias interveiculares para $K_D = 40I$ para controle adaptativo convencional . . . . .	91
5.8	Distâncias interveiculares para $K_D = 45I$ . . . . .	91
5.9	Trajетória circular . . . . .	92
5.10	Erros de rastreamento - posição . . . . .	93
5.11	Erros de rastreamento - ângulo . . . . .	93

# Lista de Tabelas

1.1	Parâmetros dos esquemas motores . . . . .	4
1.2	Tópicos dos principais trabalhos x tese - resumo . . . . .	13
4.1	Controladores para regulação . . . . .	59

# Lista de Abreviaturas

**B-MRAC** : Controlador Adaptativo Binário por Modelo de Referência (*Binary Model Reference Adaptive Control*)

**FPA** : Função Potencial Artificial

**FRP** : Ponto de Referência da Formação (*Formation Reference Point*)

**FRF** : Eixo de Referência da Formação (*Formation Reference Frame*)

**ISS** : Estável da Entrada para o Estado (*Input-to-State-Stable*)

**IOS** : Estável da Entrada para a Saída (*Input-to-Output-Stable*)

**IOP** : Estabilidade Prática da Entrada para a Saída (*Input-to-Output-Practical-Stability*)

**SMC** : Controle por Modo Deslizante (*Sliding Mode Control*)

**VANT** : Veículo Aéreo Não Tripulado

**VSC** : Controle à Estrutura Variável (*Variable Structure Control*)

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Recentes avanços tecnológicos têm impulsionado a utilização de robôs autônomos em tarefas que podem ser perigosas, ineficientes ou impossíveis para o ser humano. Com inspiração na auto-organização das interações encontradas na natureza, aliada às muitas vantagens comparadas ao uso de um simples robô autônomo, houve um crescente interesse em pesquisar o ganho em eficiência que se poderia alcançar utilizando robôs cooperativos. Os recentes avanços na tecnologia de controle, na infraestrutura de rede e da informação permitem a coordenação de sistemas multiagentes autônomos de modo eficiente e seguro, possibilitando assim a realização de tarefas que um simples agente não pode executar.

Em muitas aplicações de sistemas cooperativos, é importante que os robôs executem tarefas desejadas cooperativamente, mantendo um padrão geométrico específico, o que é conhecido como **formação**. Uma vasta literatura recente já existente na área evidencia a relevância e a complexidade do tema, que ainda apresenta muitos desafios teóricos e práticos não solucionados de maneira satisfatória.

Grupos em formação têm vantagens semelhantes a outros sistemas cooperativos tais como flexibilidade de estrutura, redundância, capacidade de reconfiguração, eficiência e robustez dos sistemas [1]. Um sistema com vários robôs fazendo algo cooperativamente significa que existe a flexibilidade de dividir os robôs em grupos de acordo com a tarefa a ser executada. Se houver perda de um ou mais agentes, os outros membros da equipe podem completar a missão, caracterizando a robustez do sistema multiagente. A eficiência pode ser evidenciada no consumo de combustível por aviões em formação de voo.

Formações têm importantes aplicações militares, principalmente quando os sensores são limitados, pois permitem que alguns membros da equipe concentrem seus sensores em uma determinada parte do ambiente, enquanto outros membros co-

brem uma outra área. Um exemplo clássico é o de pilotos de caça que direcionam seus campos visuais e radares dependendo da posição que ocupam na formação. Benefício semelhante teriam escoltas composta por robôs, nas quais cada membro abrange diferente área de modo a se alcançar a cobertura completa da área a ser vigiada/protegida.

Formação pode ter diversas aplicações civis, tais como busca e resgate em áreas perigosa e/ou hostis ao ser humano, vigilância de grandes áreas, patrulha de fronteira, transporte de grandes objetos, sistemas automatizados de rodovia expressa [2] etc.

Em [3], foi usada uma equipe cooperativa de veículos robóticos sentinelas para vigilância de perímetro, investigando alarmes de sensores de detecção de intrusão. Nesse trabalho, o objetivo do controle de formação foi desenvolver uma interface simples que permite a um único operador guiar múltiplos veículos robóticos. Em [4], um algoritmo de controle com restrições geométricas foi proposto para solucionar um problema de movimento coordenado de múltiplos robôs manipulando um grande objeto.

Na área de veículos aéreos não tripulados (VANT), as pesquisas incluem manobras coordenadas ([5], [6]) e redução do arrasto via vôo em formação cerrada [7]. Na área de veículos submarinos autônomos, as aplicações potenciais de formação incluem amostragem oceanográfica e detecção de minas marinhas ([8],[9]).

Na área de formação de micro-satélites, diversos trabalhos investigaram a capacidade de um grupo de satélites realizar imageamento de alta resolução por meio da distribuição de micro-satélites e implementação de leis de controle que permitam economia de combustível ([10], [11], [12], [13]).

## 1.2 Estratégias de controle de formação

Diversas funções devem ser realizadas por um esquema de controle de formação tais como manter o padrão geométrico, navegar, evitar colisões entre agentes e com obstáculos. Para executar tais funções, diversas estratégias de controle têm sido propostas:

- líder-seguidor
- comportamental
- coordenadas generalizadas
- estrutura virtual
- potenciais artificiais

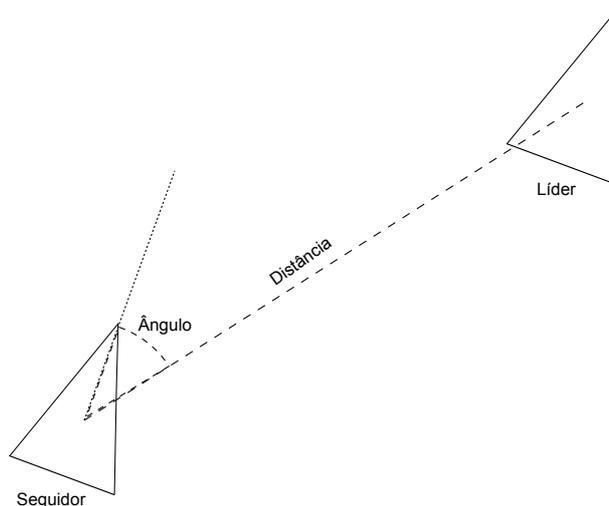


Figura 1.1: Líder - Seguidor

- consenso

### 1.2.1 Controle de formação via abordagem líder-seguidor

Na abordagem líder-seguidor, o líder realiza uma trajetória de referência e o seguidor deve manter uma determinada posição relativa em relação ao líder, definida por uma distância desejada e um ângulo relativo, como mostrado na Figura 1.1.

Em [14], utiliza-se linearização por realimentação para o controle de formação e considera-se para cada veículo somente a informação baseada em sensores locais para cada agente.

Em [15], é proposta uma estratégia de controle líder-seguidor baseada na visão para controle cooperativo de um grupo de robôs móveis não holonômicos. Em [16], é apresentada uma estratégia de controle baseada em visão, que somente requer o conhecimento da distância e a orientação relativas entre o líder e seguidor, e utiliza observador de alto ganho para estimar as derivadas temporais das posições relativas.

A abordagem líder-seguidor tem a desvantagem da independência do movimento do líder em relação aos seguidores, isto é, o líder pode mover-se sem que os seguidores possam manter a formação. Em [17], foi proposta uma solução para este problema, adotando uma estratégia denominada líder-seguidor cooperativo, onde o movimento do líder também depende dos movimentos dos seguidores.

### 1.2.2 Controle de formação baseada em comportamentos

Nos métodos comportamentais para formação, cada agente tem esquemas motores básicos, tais como, evitar colisões, evitar obstáculos estáticos, mover para o objetivo, manter a formação etc. Cada esquema motor gera um vetor que representa a resposta ao comportamento desejado. A ação de controle resultante é uma média

ponderada vetorial dos comportamentos desejados. A importância relativa de um comportamento em relação a outro é definida por meio de valores de ganho. Na Tabela 1.1, são mostrados os ganhos e outros parâmetros do esquema usados nas simulações de [18].

Tabela 1.1: Parâmetros dos esquemas motores

Parâmetro	Valores
<b>Evitar obstáculo</b>	
ganho	1.5
esfera de influência	50 metros
<b>Evitar robô</b>	
ganho	1.5
esfera de influência	20 metros
<b>Mover para o objetivo</b>	
ganho	0.8
<b>Manter a formação</b>	
ganho	1.5
espaçamento desejado	50 metros

A estratégia baseada no comportamento é bastante intuitiva, entretanto a sua complexidade matemática dificulta a análise da convergência e seu desempenho não é garantido, ou seja, a manutenção da formação não é garantida durante determinadas manobras. Em [19], foi proposta uma estratégia baseada em comportamentos para qual é feita uma análise de convergência e da manutenção da formação em manobras, concluindo que as dinâmicas internas são estáveis no sentido de Lyapunov.

### 1.2.3 Controle de formação via coordenadas generalizadas

Nesta abordagem, a configuração da formação é descrita em termos de coordenadas generalizadas, que caracterizam a posição do veículo (L), sua orientação (O) e sua forma (S). A localização da formação é definida por um ponto de referência da formação (*formation reference point* - FRP) e a orientação da formação é definida pela orientação em relação a um eixo de referência da formação (*formation reference frame* - FRF). Um exemplo é mostrado na Figura 1.2, onde FRP é definido pelo ponto médio entre os elementos 1 e 2, e a origem de FRF localizada no ponto 1 e o eixo  $y$  é definido passando pelo ponto 2. Em [20], é proposto um esquema baseado nesta abordagem onde se consegue rastreamento assintótico de trajetórias enquanto se mantém um padrão geométrico desejado.

O controle de formação via coordenadas generalizadas é um abordagem centralizada e aumenta sua complexidade à medida que aumenta o número de membros da formação.

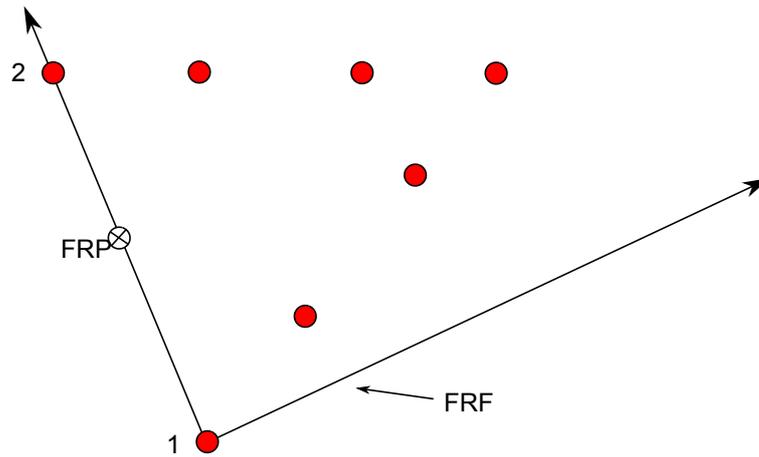


Figura 1.2: FRP e FRF

### 1.2.4 Controle de formação via estrutura virtual

A abordagem baseada em estrutura virtual descreve a formação inteira como um único corpo rígido. O grupo de agentes deve mover-se em formação e manter uma relação geométrica (semi)rígida relativa a cada outro e relativa a um eixo de referência [21], conforme mostra a Figura 1.3. O comportamento do grupo é facilmente prescrito e o padrão de formação é mantido durante as manobras.

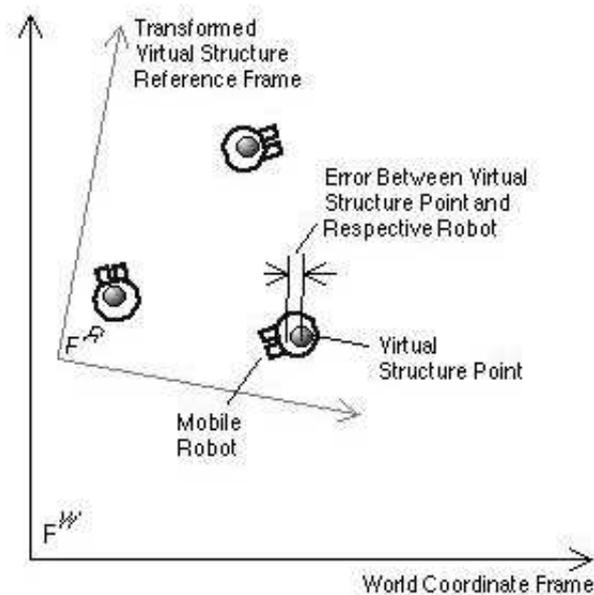


Figura 1.3: Estrutura virtual.

As estruturas virtuais são geralmente centralizadas e requerem alta complexidade computacional à medida que se aumenta o número de agentes na formação.

### 1.2.5 Controle de formação via consenso

A estratégia baseada em consenso parte da idéia que cada veículo atualiza seus estados com base nos estados de seus vizinhos locais de tal maneira que o estado final de cada veículo converge para um valor comum (ou de consenso). Por meio de adequada escolha dos estados de informação, algoritmos de consenso podem ser aplicados a problemas de controle de formação [22].

Em [23], é utilizado um algoritmo para gerar formações baseado em grafos de proximidade e potenciais artificiais. Este método foi mostrado ser estável e a convergência foi estabelecida para padrões tipo estrela na ausência de interações entre os agentes. Convergência para a fronteira de formas mais gerais foi mostrada por simulações.

Em [22] e em [24], foram apresentadas extensões do algoritmo de consenso para sistemas de segunda ordem (duplo integrador), usando ferramentas da teoria de grafos. Variantes destas estratégias de consenso são aplicadas para problema de controle de formação.

### 1.2.6 Controle de formação via potenciais artificiais

Potenciais Artificiais têm sido usado para tratar problemas relacionados ao controle e coordenação de sistemas multiagentes, tais como navegação de robôs ([25],[26]), agregação de enxames [27], controle de formação [28] etc.

Aplicadas ao controle de formação, as funções potenciais podem ser projetadas para gerar regras de interação do veículo com o ambiente e com outros membros do grupo.

Em [29], é apresentada uma estrutura para controle coordenado de grupo de agentes holonômicos modelados como duplo integradores. Nesse trabalho, foram introduzidos campos potenciais locais associados com pontos de referência móveis (denominados líderes virtuais) para dar estabilidade a formações com determinado padrão geométrico e espaçamento interveicular.

Em [30], foi usada uma abordagem para estabilização livre de colisões de uma formação de agentes holonômicos modelados como duplos integradores usando funções potenciais, com estabilidade assintótica local.

Em [27], foi considerada uma agregação de agentes autônomos modelados como simples integradores baseada em potenciais artificiais. Essa estratégia foi estendida em [31] ao se adicionar a parte que representava o ambiente e a convergência para regiões mais favoráveis.

Em [32], foi apresentada uma estratégia para agregação de agentes incertos cuja dinâmica de segunda ordem já considerava os efeitos da inclusão da matriz de inércia e efeitos gravitacionais, forças de Coriolis e força centrípeta. Essa abordagem é

baseada em modelo cinemático gerado por potenciais artificiais e controle por modos deslizantes para compensar as incertezas paramétricas. No entanto, no projeto do controlador a modos deslizantes foram consideradas hipóteses muito restritivas com relação às velocidades iniciais dos membros do agrupamento (que deveriam ser nulas) e à área de operação (também considerada limitada). A análise de estabilidade conclui que tão somente poderá haver movimentos residuais em torno do equilíbrio ideal, devido à impossibilidade de se ter deslizamento ideal e, com isso, acarretar o fenômeno de *chattering*.

Em [33], um esquema cinemático para controle de formação baseado em funções potenciais é proposto para agentes não holonômicos, incluindo evitar colisões com obstáculos e rastreamento de trajetória.

### 1.3 Colisões entre veículos

As estratégias sumariamente descritas acima permitem aos sistemas multiagentes executar as funções de manutenção do padrão geométrico da formação, evitar colisões, navegar e evitar obstáculos, desde que as posições iniciais dos agentes estejam próximas dos locais respectivos na formação. Para quaisquer condições iniciais, o esquema que usa potenciais artificiais garante o movimento livre de colisões, desde que uma adequada função potencial seja escolhida. Mesmo neste caso, não é garantido se atingir a configuração desejada, devido à existência de mínimos locais.

Idealmente, para evitar colisões entre veículos é necessário que a função potencial tenda ao infinito à medida que a distância interveicular tenda a zero. A função potencial com esta característica foi utilizada em [28], [29] e [34]. No entanto, em aplicações práticas não se consegue realizar sinais infinitos de controle, de modo que funções potenciais que tendem a um determinado valor à medida que a distância entre veículos tende a zero também são projetadas como, por exemplo, em [27].

### 1.4 Modelos matemáticos de robôs

Diversos modelos matemáticos têm sido utilizados para representar robôs. A diversidade varia desde as representações mais simples aos modelos matemáticos mais complexos. Naturalmente, a complexidade da representação matemática depende dos objetivos que se pretendem alcançar. Desse modo, o modelo mais simples descreve um robô pontual movendo-se no plano, que é descrito por simples integradores

$$\dot{z}_i = u_i \tag{1.1}$$

onde  $z_i, u_i \in \mathbb{R}^2$  e  $i = 1, \dots, N$  são, respectivamente, a posição e o sinal de controle do  $i$ -ésimo robô. Este tipo de modelo é denominado cinemático ou de primeira ordem e permite mudanças instantâneas de velocidade, que pode ser um problema relevante quando o veículo tem uma massa muito grande.

Em outras aplicações, a representação matemática obedece a Segunda Lei de Newton (*Força = massa  $\times$  aceleração*) e recebe a denominação de modelos de segunda ordem ou duplo integrador, expresso por

$$\dot{z}_i = u_i \quad (1.2)$$

$$\dot{u}_i = \frac{F_i}{m_i} \quad (1.3)$$

onde  $u_i$ ,  $m_i$  e  $F_i$  são a velocidade, a massa e o sinal de controle do agente  $i$ , respectivamente.

Os robôs que são representados por meio de simples integradores (modelos de primeira ordem) ou por meio de duplos integradores (modelos de segunda ordem) são classificados como robôs holonômicos, pois podem mover-se em qualquer direção.

Em muitas aplicações são utilizados robôs com restrições de movimento. Estes robôs são classificados como não holonômicos. Um exemplo simples e bastante utilizado de robô não-holonômico é o denominado de unicycle, que possui duas rodas fixas independentemente atuadas e uma pequena roda de movimento livre (*castor*), conforme pode ser visto na Figura 1.4. O modelo cinemático mais simples para o unicycle é dado por

$$\dot{x}_i = u_i \cos(\theta_i) \quad (1.4)$$

$$\dot{y}_i = u_i \sin(\theta_i) \quad (1.5)$$

$$\dot{\theta}_i = w_i \quad (1.6)$$

onde  $x_i, y_i, \theta_i$  são as coordenadas, orientação do  $i$ -ésimo robô, respectivamente, e as entradas  $u_i$  e  $w_i$  são as velocidades translacional e rotacional, respectivamente. Neste modelo para o unicycle também podem ocorrer variações instantâneas de velocidades.

Assim, um modelo mais completo é expresso por

$$\dot{x}_i = u_i \cos(\theta_i) \quad (1.7)$$

$$\dot{y}_i = u_i \sin(\theta_i) \quad (1.8)$$

$$\dot{\theta}_i = w_i \quad (1.9)$$

$$\dot{u}_i = F_i/m_i \quad (1.10)$$

$$\dot{w}_i = \tau_i/J_i \quad (1.11)$$

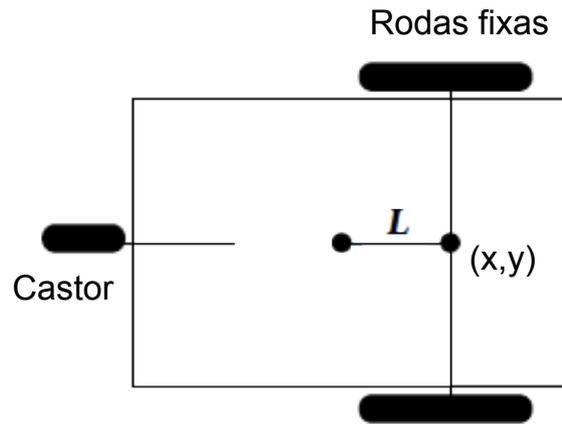


Figura 1.4: Representação esquemática de um veículo do tipo unicycle

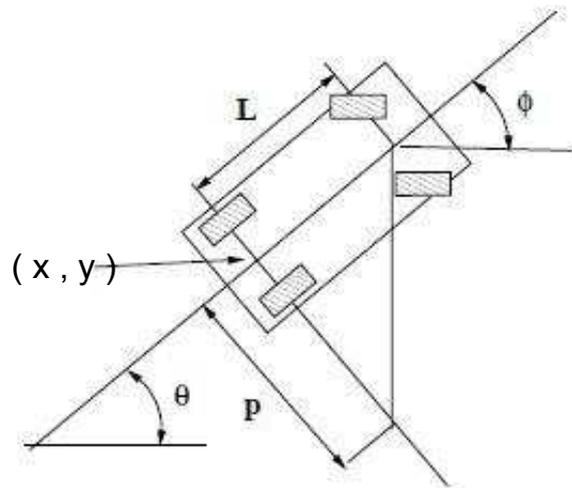


Figura 1.5: Representação de um veículo tipo carro

onde  $F_i$  e  $\tau_i/J_i$  são os sinais de controle para o agente  $i$

Outro robô não-holonômico utilizado nas pesquisas e aplicações é o modelo do tipo carro (*car-like vehicle*), cujo esquemático é mostrado na Figura 1.5. Além de não poder mover-se lateralmente, este robô possui limitações relacionadas ao giro. O modelo cinemático do *car-like vehicle* é representado pelas seguintes equações

$$\dot{x}_i = u_i \cos(\theta_i) \quad (1.12)$$

$$\dot{y}_i = u_i \sin(\theta_i) \quad (1.13)$$

$$\dot{\theta}_i = u_i \frac{\tan \phi_i}{L} \quad (1.14)$$

$$(1.15)$$

onde  $\phi_i$  é ângulo de direção das rodas e  $L$  é a distância entre os eixos.

Em algumas aplicações, é necessária a utilização de modelos matemáticos mais completos, incluindo os efeitos das forças de Coriolis e restrições não holonômicas (se houver), como expresso pela equação a seguir

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(\dot{q}_i, q_i)\dot{q}_i = B_i(q_i)\tau_i + J_i^T(q_i)\lambda_i \quad (1.16)$$

onde  $q_i \in \mathbb{R}^n$  é a coordenada generalizada do  $i$ -ésimo agente,  $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  corresponde à matriz de inércia,  $C_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de Coriolis e forças centrípetas,  $\lambda_i \in \mathbb{R}^k$  é o vetor relacionado às restrições,  $J_i(q_i) \in \mathbb{R}^{k \times n}$  é a matriz associada com as restrições (se houver),  $B_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz de transformação da entrada, com  $m = n - k$  e  $\tau_i \in \mathbb{R}^m$  indica as entradas de controle.

Muitos trabalhos envolvendo controle cooperativo têm considerado agentes móveis holonômicos. Entretanto, diversos esforços têm sido realizados para a solução do problema de formação mais difícil com agentes móveis não holonômicos que ocorrem mais frequentemente na prática, visto que robôs e veículos possuem alguma restrição de movimento.

Em [35], foi mostrado que sistemas não holonômicos não podem ser estabilizados com realimentação de estados contínua. Para o caso de formação de agentes com restrições holonômicas, o controle naturalmente torna-se mais complexo.

Em diversos trabalhos na literatura, o controle de formação de agentes não holonômicos somente considera modelos cinemáticos ([34], [36], [37]). No entanto, quando alto desempenho é exigido, por exemplo, para o caso de rastreamento de trajetória, a dinâmica do sistema deve ser considerada, principalmente quando há incertezas paramétricas dos agentes [38].

A linearização por realimentação dinâmica é uma abordagem muito usada para controle de sistemas não lineares. No entanto, para o caso de sistemas não holonômicos, o problema das singularidades estruturais impõe sérias dificuldades para a estabilização de sistemas multiagentes e, neste caso de controle cooperativo, o objetivo da formação é alcançado apenas aproximadamente. Em [19], foi considerada a posição do castor (ver Figura 1.4) ao invés do ponto médio entre as rodas ao se fazer a linearização por realimentação. Desse modo, o sistema original pode ser transformado, passando a ter um grau relativo bem definido e não existindo singularidades estruturais.

Em [39], uma abordagem baseada em função de navegação é proposta, onde cada robô não-holonômico cinemático não exige qualquer conhecimento sobre as velocidades e posições desejadas de outros membros da formação.

Em [40], uma lei de controle cinemático combinada com controle de torque é desenvolvida para controle de formação baseada na estratégia líder-seguidor utilizando a técnica conhecida como *backstepping*. Para projetar o controlador, o sistema não-

holonômico é dividido em parte cinemática e parte dinâmica conectado em cascata. Primeiramente, um controlador de formação para robôs móveis do tipo uniclo é projetado. Em seguida, as dinâmicas dos robôs são consideradas. As entradas de controle são a aceleração translacional e a velocidade rotacional (ao invés de se usar a aceleração angular, que seria mais realístico). Seguindo a filosofia geral da estratégia líder-seguidor, os agentes não partem de posições aleatórias e, por isso, não foi considerado o problema de evitar colisões entre veículos.

Em [38], um controle por realimentação de um grupo de sistemas dinâmicos não-holonômicos incertos é considerado. O esquema de controle é baseado na estratégia de consenso e é desenvolvido com auxílio de técnicas de Lyapunov, resultados da teoria de grafos e técnicas de *backstepping*.

## 1.5 Compensação de incertezas paramétricas e perturbações externas

Outro tópico abordado em diversos trabalhos sobre controle de formação trata estabilidade de sistemas multiagentes na presença de distúrbios e incertezas paramétricas. Dentre as perturbações que podem também estar sujeitos os agentes autônomos podem ser citadas

- robôs aéreos: rajadas de vento, turbulências, vento lateral
- robôs aquáticos: correntes marinhas
- robôs terrestres: ondulações do terreno

As incertezas paramétricas podem estar presentes na determinação das massas e momentos de inércia dos veículos, nas forças de Coriolis, nas constantes de atrito, etc.

A seguir, são listados os principais trabalhos sobre controle de formação envolvendo a compensação de incertezas paramétricas, por meio de controle por modos deslizantes e por meio de controle adaptativo.

### 1.5.1 Controle por modos deslizantes

Em [32], foi considerada uma estratégia de agregação de enxames baseada em potenciais artificiais e controle por modos deslizantes (em inglês, *sliding mode control* - SMC), onde se consegue mostrar que as superfícies de deslizamento são atingidas em tempo finito, considerando que as velocidades iniciais dos agentes sejam nulas e que a derivada da função potencial em relação ao tempo seja limitada. No entanto,

a análise de estabilidade do sistema não é realizada e apenas se sugere que o sistema considerado pode ser estável com base nos resultados obtidos em [27].

Dentre as vantagens da técnica de controle por modos deslizantes podemos citar robustez às incertezas paramétricas do sistema e às perturbações externas. Além disso, possui a capacidade de reduzir o problema do projeto do controlador a um espaço dimensional de menor ordem a partir de uma escolha adequada da superfície de chaveamento. A desvantagem do controle por modos deslizantes é a possível ocorrência de oscilações de alta frequência do sinal de controle, que é o fenômeno conhecido por *chattering*, resultante de imperfeições no chaveamento.

### 1.5.2 Controle adaptativo

Em [41] foi considerado o problema de controle adaptativo de formação de aeronaves sob a abordagem líder-seguidor, sem as medidas de velocidade e na presença de incertezas paramétricas. Em [42], foi proposto um algoritmo de controle adaptativo para a dinâmica de posição da aeronave seguidora relativa à aeronave líder, com convergência assintótica global. Em [43], algoritmos estáveis de controle adaptativo de formação para modelos bidimensionais de aeronaves foram desenvolvidos na presença de comandos desconhecidos do líder e das perturbações. Os trabalhos citados acima são baseados na estratégia líder-seguidor e consideram que as posições iniciais dos agentes estão próximas das desejadas, não havendo portanto a necessidade de agregação e, com isso, mecanismos para evitar colisões interveiculares não são considerados.

Uma das vantagens de sistemas de controle adaptativo são as propriedades desejáveis de estado estacionário. Um dos óbices de sistemas de controle adaptativo com lei de adaptação convencional é que podem exibir comportamento transitório indesejável. Além disso, os sistemas adaptativos básicos não são robustos às dinâmicas não modeladas ou perturbações externas [44] e modificações da lei de adaptação básica podem ser necessárias [45].

## 1.6 Estratégia proposta

Nesta tese, é apresentada uma estratégia de controle de formação baseada em seguimento de modelo cinemático para agentes modelados como sistemas Euler-Lagrange incertos. Buscou-se preencher algumas lacunas na pesquisa de controle de formação baseada em potenciais artificiais, principalmente no que se refere à utilização de modelos dinâmicos de segunda ordem, compensação de incertezas paramétricas e rastreamento de trajetórias.

Para o caso de alcançar e manter o padrão geométrico, o modelo cinemático é

baseado em potenciais artificiais. Em seguida, a estratégia é estendida para o caso de rastreamento de trajetória para o sistema multiagente.

Para compensar os efeitos das incertezas paramétricas, utiliza-se um esquema de controle adaptativo baseado no controle adaptativo binário por modelo de referência, abreviado aqui como B-MRAC (do inglês *binary model reference adaptive control*) proposto em [46], combinando as boas propriedades de transitório dos sistemas adaptativos a estrutura variável [47] com as propriedades desejáveis dos controladores a parâmetros adaptativos.

Basicamente, o B-MRAC é derivado da teoria de controle binário introduzida em [48] e consiste de uma lei adaptativa de alto ganho com projeção do vetor de parâmetros. A projeção garante que o vetor de parâmetros adaptativos seja mantido dentro de alguma bola finita no espaço paramétrico. À medida que o ganho de adaptação é aumentado, o B-MRAC tende a se comportar de modo semelhante ao controle por modos deslizantes (SMC - sliding mode control) como discutido em [46], com a vantagem de evitar o fenômeno conhecido como chattering, característico do SMC, pois o sinal de controle é contínuo.

A principal contribuição desta tese é uma estratégia de controle de formação baseada em potenciais artificiais para modelos dinâmicos incertos de segunda ordem holonômicos ou não holonômicos, que tanto pode ser aplicada para se alcançar um determinado padrão espacial estático como para o caso de um ou mais agentes seguirem trajetórias de referência enquanto o padrão espacial é mantido.

Na Tabela 1.2, são mostrados os tópicos dos principais trabalhos relacionados ao controle de formação e os tópicos abordados nesta tese.

Tabela 1.2: Tópicos dos principais trabalhos x tese - resumo

Tópico	Tese	[29]	[19]	[32]	[24]	[40]	[33]	[38]
Cinemático	X	X			X		X	
Dinâmico	X		X	X		X		X
Holonômico	X	X		X	X			
Não Holonômico	X		X			X	X	X
Incerto	X			X				X
Rastreamento	X						X	X
Colisão	X	X		X			X	
Mínimo local	X							

## 1.7 Visão geral da tese

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, são descritos os principais conceitos utilizados da teoria de grafos e potenciais artificiais que tanto se aplicam para o caso holonômico quanto para o

caso não holonômico. No Capítulo 3, apresentam-se os estudos iniciais sobre controle de formação utilizando um sistema massa-mola-amortecedor.

No Capítulo 4, são apresentados, para o caso holonômico, o modelo matemático de cada agente, a estratégia de controle proposta e a análise de estabilidade para regulação. Para este problema, são analisados dois cenários com relação às informações dos vizinhos de cada agente: primeiramente com conhecimento das posições e velocidades dos vizinhos; em seguida, somente com informações das posições dos vizinhos. Posteriormente, a estratégia é estendida para o caso de rastreamento de trajetória para o sistema multiagente. Por último, os problemas de evitar colisões com obstáculos e evitar mínimos locais são resumidamente apresentados.

No Capítulo 5, a estratégia proposta é estendida para o caso não-holonômico e são apresentados resultados das simulações que validam a técnica.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e propostas de trabalhos futuros. Nos apêndices, a estratégia do controle adaptativo binário (B-MRAC) é descrita resumidamente e são citados os artigos publicados com a participação do autor desta de tese.

## 1.8 Notas Preliminares

Nesta seção, são revisados alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento da estratégia de controle nesta tese.

### 1.8.1 Normas e notações

Utiliza-se  $\lambda_M(\cdot)$  ( $\lambda_m(\cdot)$ ) para indicar o maior (menor) autovalor de uma matriz. Utiliza-se  $\sigma_M(\cdot)$  ( $\sigma_m(\cdot)$ ) para indicar o maior (menor) valor singular de uma matriz.

A norma Euclideana de um vetor  $v$  e a correspondente norma induzida de uma matriz  $A$  é indicada por  $|v|$  e  $|A|$ , respectivamente. Para qualquer função mensurável  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\|u\|$  indica  $\text{ess sup}\{|u(t)|, t \geq 0\}$ .

### 1.8.2 Classes de funções

**Definição 1** Uma função  $\Psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  pertence à classe  $\mathcal{K}$  se for contínua, estritamente crescente e  $\Psi(0) = 0$ .

**Definição 2** Uma função  $\Pi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  pertence à classe  $\mathcal{KL}$  se, para cada  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Pi(\cdot, t) \in \mathcal{K}$  e, para cada  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Pi(a, \cdot)$  é decrescente com  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Pi(a, t) = 0$ .

**Definição 3** Uma função  $\Psi(a) \in \mathcal{K}_\infty$  se  $\Psi(a) \in \mathcal{K}$  e  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Psi(a) = +\infty$

As definições de funções  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_\infty$  e  $\mathcal{KL}$  estão de acordo com [49].

### 1.8.3 Gradiente e Matriz Hessiana

O vetor gradiente ou simplesmente gradiente de uma campo escalar  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  é dado por

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_N} \right]^T. \quad (1.17)$$

Se todas as derivadas de  $f$  forem contínuas, a matriz Hessiana de  $f$  é definida como

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

### 1.8.4 Condição do complemento de Schur para matriz positiva definida

Seja  $X$  uma matriz simétrica dada por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Seja  $S$  o complemento de Schur [50] de  $A$  em  $X$ , conforme a seguinte expressão

$$S = C - B^T A^{-1} B.$$

Então

- $X$  é positiva definida se e somente se  $A$  e  $S$  forem ambos positivos definidos.
- Se  $A$  é positiva definida, então  $X$  é positiva semidefinida se e somente se  $S$  é positiva semidefinida.

### 1.8.5 Produto de Kronecker

Dadas duas matrizes  $A \in C^{m \times n}$  e  $B \in C^{p \times q}$ , o produto de Kronecker de  $A$  por  $B$ , denotado  $A \otimes B$ , é dado por

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

onde  $a_{ij}$  é o elemento da matriz  $A$  que está na  $i$ -ésima linha e na  $j$ -ésima coluna.

### 1.8.6 Estabilidade entrada-estado

Considere um sistema não linear na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1.21}$$

O sistema (1.22) é dito estável da entrada para o estado (*input-to-state stable - ISS*)[51] com respeito a  $u$ , se para algumas funções  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  e  $\beta \in \mathcal{KL}$ , todo o estado inicial  $x(0)$  e toda a entrada  $u$ , a solução correspondente de (1.22) satisfaz a desigualdade

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma(\|u\|), \forall t \geq 0.\tag{1.22}$$

### 1.8.7 Estabilidade da entrada para a saída

O sistema (1.22) é estável da entrada para a saída (*input-to-output stable - IOS*)[51], se existirem funções  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  e  $\beta \in \mathcal{KL}$ , então

$$|y(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma(\|u\|), \forall t \geq 0.\tag{1.23}$$

### 1.8.8 Estabilidade prática da entrada para a saída

O sistema (1.22) é praticamente estável da entrada para a saída (*input-to-output practically stable - IOpS*)[51], se existirem funções  $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$  e  $\beta \in \mathcal{KL}$  e uma constante não negativa  $d$  tal que

$$|y(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma(\|u\|) + d, \forall t \geq 0.\tag{1.24}$$

Quando (1.24) é satisfeita com  $d = 0$ , o sistema (1.22) é dito IOS, como definido em (1.8.7).

# Capítulo 2

## Topologia da informação e Potenciais Artificiais

### 2.1 Introdução

Este capítulo apresenta os conceitos utilizados nesta tese relacionados à topologia de informação e funções potenciais artificiais e que são comuns tanto para o caso holonômico como para o caso não holonômico.

### 2.2 Topologia da informação

Em problemas de controle cooperativo, determinadas informações devem ser compartilhadas de acordo com os objetivos a serem alcançados como, por exemplo, posição relativa, velocidade, algoritmos de controle comum, mapa do ambiente, etc. Geralmente, em problemas reais este compartilhamento não é global e entre dois agentes pode ser uni ou bidirecional. Para analisar a topologia da informação de sistema multiagente, muitos trabalhos têm usado a teoria de grafos ([34], [52], [53], [54]). Esta seção apresenta resumidamente os principais conceitos da teoria de grafos utilizados nesta tese. Para maiores informações consultar [55].

A topologia da informação de um sistema composto por  $N$  agentes pode ser descrita por um grafo de informação  $G := \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ , onde  $\mathcal{V} := \{v_1, \dots, v_N\}$  é o conjunto de vértices ou nós (cada vértice representa um agente),  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  é o conjunto de ramos (arestas) ou pares ordenados dos vértices. Aqui,  $e_{ij} = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ , i.e.,  $v_i$  e  $v_j$  são a cabeça e a cauda do ramo (aresta)  $e_{ij}$ , respectivamente. Assim, o ramo  $e_{ij}$  representa o fluxo de informação de  $v_i$  para  $v_j$ , conforme mostra a Figura 2.1.

**Definição 4** *Se  $e_{ij} \in \mathcal{E}$  e  $v_i, v_j \in \mathcal{V}$ , então  $v_i$  e  $v_j$  são adjacentes ou vizinhos.*

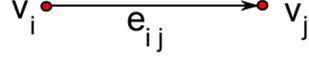


Figura 2.1: Ramo  $e_{ij}$

**Definição 5** Um caminho  $r$  de um vértice  $v_i$  para um vértice  $v_j$  é uma sequência de ramos distintos iniciando com  $v_i$  e terminando com  $v_j$ .

**Definição 6** Um grafo é dito conectado (ou conexo) se existir um caminho entre quaisquer dois vértices. Um grafo é denominado fortemente conectado se existir um caminho entre  $v_i$  e  $v_j$  e entre  $v_j$  e  $v_i$ .

**Definição 7** Um grafo é chamado completo se quaisquer dois vértices forem vizinhos.

**Definição 8** Um grafo é denominado não-direcionado se  $e_{ij} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow e_{ji} \in \mathcal{E}$

**Definição 9** A matriz Laplaciana do grafo de informação  $G$  é definida como

$$L_{ij} = \begin{cases} -1 & ; \text{se } i \neq j \text{ e } (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \\ 0 & ; \text{se } i \neq j \text{ e } (v_i, v_j) \notin \mathcal{E} \\ \text{deg}(v_i) & ; \text{se } i = j \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $L_{ij}$  é o  $ij$ -ésimo componente de  $L$ ,  $\text{deg}(v_i)$  é o grau de valência do vértice  $i$  (igual ao número de arestas incidentes no vértice).

**Observação 1** A matriz Laplaciana  $L$  captura várias propriedades do grafo. Entre estas estão as seguintes:

1. A matriz  $L$  é sempre positiva semi-definida;
2. Os seus autovalores têm partes reais não-negativas (teorema do disco de Gershgorin [56]);
3.  $u := [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$  é um autovetor com autovalor nulo, i.e.,  $Lu = 0$ , visto que  $\sum_{j=1}^n L_{ij} = 0$  conforme (2.1);
4. se o grafo de informação é conectado, este autovalor nulo é simples.

**Definição 10** O conjunto dos vizinhos de informação do agente  $i$  é denominado  $\mathcal{N}_i$  e é definido por

$$\mathcal{N}_i := \{v_j \in \mathcal{V} : e_{ij} \in \mathcal{E}\} \quad (2.2)$$

Na Figura 2.2, podem ser vistos exemplos de grafos de informação conectados.

Neste trabalho, considera-se uma topologia fixa de informação representada por um grafo  $G$  fortemente conectado. As seguintes hipóteses são consideradas:

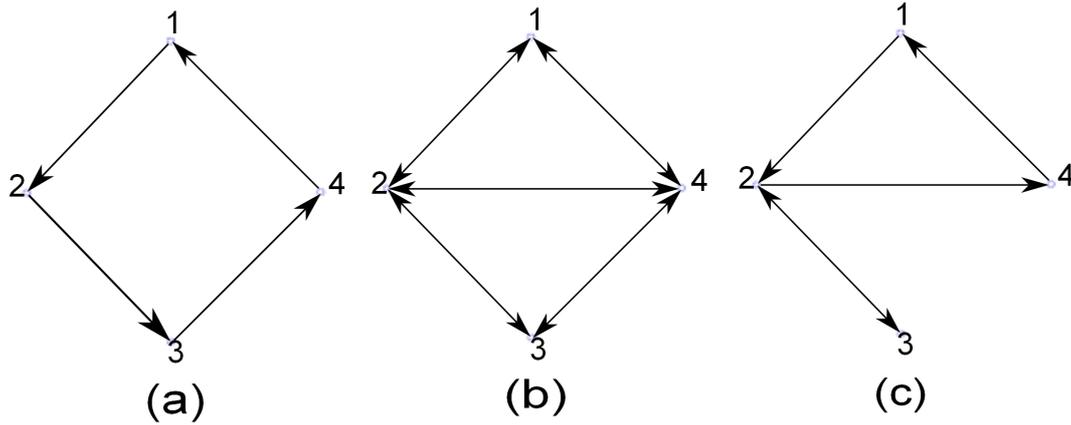


Figura 2.2: (a) cíclico (b) não-direcionado (c) outro

- O grafo  $G$  é constante com respeito ao tempo.
- O grafo  $G$  é conectado (fortemente) e permanece conectado para todo o tempo maior que zero.

### 2.2.1 Função potencial artificial

Nesta seção, apresenta-se uma classe de funções potenciais artificiais (FPA) por meio das quais são gerados os modelos cinemáticos que devem ser seguidos pelos agentes. A estratégia é baseada em forçar o movimento do robô ao longo do gradiente do campo potencial.

Uma FPA pode ser composta por duas partes: uma referente às interações entre agentes e a outra referente às interações com o meio ambiente. A primeira parte inclui funções da distância e permite gerar um padrão geométrico especificando as distâncias desejadas entre veículos. A segunda parte pode ser usada para definir a função de navegação da formação, p. ex., rastreamento de líderes virtuais ([29]), para evitar obstáculos ([33]) e para perseguição de alvos.

**Definição 11** O vetor  $z_i \in \mathbb{R}^l$  define a posição do  $i$ -ésimo agente. Para o caso planar ( $l = 2$ ), tem-se que  $z_i = [x_i \ y_i]^T$  e  $z_{ij} = z_i - z_j$  mede a posição relativa entre os agentes  $i$  e  $j$ .

**Definição 12** Uma função potencial  $J_{ij}(z_{ij})$  é uma função das distâncias  $|z_{ij}| = |z_i - z_j|$  entre agente  $i$  e  $j$ , não-negativa, radialmente ilimitada, duas vezes continuamente diferenciável, tal que  $J_{ij}$  alcança um único mínimo quando o par de agentes considerado está localizado a uma distância desejada  $d_{ij}$ .

**Definição 13** Define-se o vetor de posições relativas entre os agentes (ou erros de posição entre agentes) como um vetor  $\tilde{z}$  formado pelo empilhamento da posição

absoluta de particular veículo, p. ex.  $z_1$ , com das posições relativas entre  $N$  agentes dado pelo seguinte conjunto

$$\{z_{ij} \mid i = 1, \dots, N-1; j \in \mathcal{N}_i\}. \quad (2.3)$$

**Observação 2** A necessidade de inclusão do elemento  $z_1$  no vetor  $\tilde{z}$  se tornará mais claro brevemente.

Assume-se que a função potencial  $J_{ij}(z_{ij})$  satisfaz o seguinte

- As funções potenciais  $J_{ij}(z_{ij})$  são simétricas e satisfazem

$$\nabla_{z_i} J_{ij} = -\nabla_{z_j} J_{ij}$$

- Existe uma única distância  $d_{ij}$ , em que  $\nabla_{z_i} J_{ij} = 0$ .

Portanto, funções potenciais que satisfazem as condições acima são atrativas em distâncias  $|z_{ij}| > d_{ij}$  e repulsivas em distâncias  $|z_{ij}| < d_{ij}$ .

Para um sistema multiagente, a função potencial considerada será a soma das funções  $J_{ij}$  como se segue

$$J(\tilde{z}) = \sum_i^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} J_{ij}(z_{ij}) + J_{1b}. \quad (2.4)$$

onde  $J_{1b}$  é função radialmente ilimitada de  $z_1$ . Este termo garantirá que todos os agentes permaneçam em algum conjunto compacto, mesmo que a parte repulsiva tenda ao infinito quando dois veículos se aproximem muito. A função potencial limitante tem a forma [34]

$$J_{1b} = \begin{cases} 0 & ; \text{se } |z_1| \leq z_b \\ \Psi(|z_1|) & ; \text{se } |z_1| > z_b \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $z_b \geq 0$  é uma constante arbitrária,  $\Psi(|z_1|) > 0$ ,  $\forall |z_i| > z_b$ , e  $|z_1| \rightarrow \infty$  implica  $J_{1b} \rightarrow \infty$ .

Tendo assumido que o grafo de informação é conectado, então o erro de posição vetorial entre quaisquer dois agentes vizinhos pode sempre ser dado como a soma de um conjunto de erros de posição entre agentes vizinhos. Por exemplo, com o grafo de informação mostrado na Fig. 2.2,  $(z_1 - z_3) = (z_1 - z_2) + (z_2 - z_3)$ . Portanto, pode ser concluído que a função potencial é radialmente ilimitada com relação às posições  $(z_{ij})$  entre qualquer par de agentes assim como para suas posições absolutas  $(z_i)$ .

Dependendo da tarefa a ser realizada pelo sistema multiagente, outros requisitos para funções potenciais artificiais são necessários e podem ser mostrados em [26], [29], [27], [31] e [57].

Em estratégia do tipo consenso, pode-se considerar que lei de controle utilizada pode ser derivada da seguinte classe de funções potenciais quadráticas:

$$J(\tilde{z}) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{a_{ij}}{2} |z_i - z_j - p_{ij}|^2, \quad (2.6)$$

onde  $a_{ij}$  é uma constante positiva e  $p_{ij}$  é o vetor constante de diferença entre as posições dos agentes  $i$  e  $j$ , tal que  $|p_{ij}| = d_{ij}$ . Ao ser aplicado o operador gradiente, esta classe de funções quadráticas gera funções lineares, do seguinte modo

$$\dot{z}_i = -\nabla_{z_i} J(\tilde{z}) = - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (z_i - z_j - p_{ij}) = - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (z_i - z_j) + b_i, \quad (2.7)$$

onde  $b_i = -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} p_{ij}$ . Esta formulação é semelhante à utilizada para o problema de consenso linear (ver [24]), o que permite a utilização de diversas ferramentas de análise de convergência e de estabilidade baseadas na teoria de grafos.

A função potencial quadrática tem como característica uma boa capacidade de agregação e manutenção da coesão entre os membros mas, no caso de geração de padrão específico e dependendo das condições iniciais, não garante evitar colisões entre veículos. Assim, para garantir esta propriedade de evitar colisões interveiculares, é necessário que as forças de repulsão geradas pelo campo potencial sejam muito maiores que as forças de atração, o que não ocorre quando se usa FPA quadráticas. Assim, neste trabalho, uma função potencial com estas características assimétricas

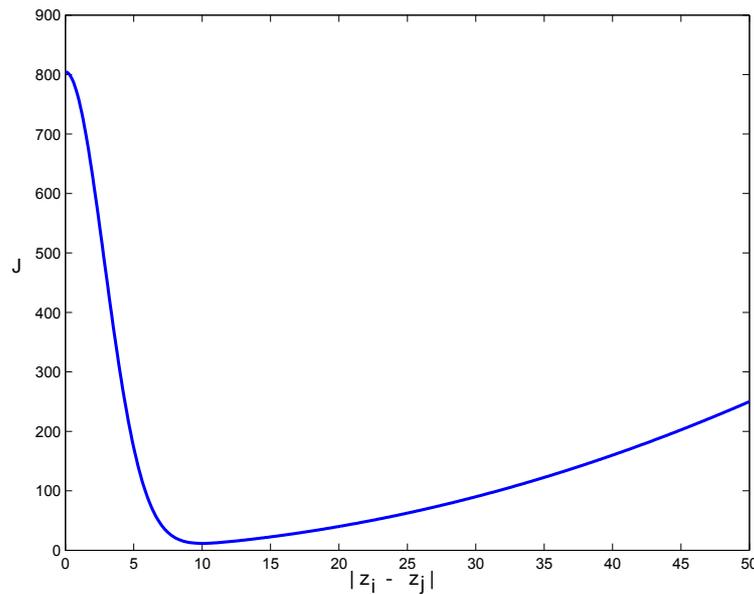


Figura 2.3: Exemplo de função potencial geral

foi denominada de FPA geral. Como exemplo de FPA geral tem-se a função utilizada em [32] definida por

$$J(\tilde{z}) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left[ \frac{a_{ij}}{2} |z_i - z_j|^2 + \frac{b_{ij}c_{ij}}{2} \exp\left(-\frac{|z_i - z_j|^2}{c_{ij}}\right) \right], \quad (2.8)$$

onde  $a_{ij}$  é uma constante de atração e  $b_{ij}$  é uma constante de repulsão. O parâmetro  $c_{ij}$  é definido por

$$c_{ij} = \frac{d_{ij}^2}{\log\left(\frac{b_{ij}}{a_{ij}}\right)}. \quad (2.9)$$

**Observação 3** A expressão da FPA representada por (2.8) só permite evitar colisões entre vizinhos ( $j \in \mathcal{N}_i$ ). Assim como em [33], para assegurar que não haja colisão entre todos os membros, considera-se nesta tese que quaisquer dois veículos próximos bastante podem se comunicar de modo que a repulsão possa ser gerada e, assim, evitar a colisão. Tal informação não é necessária quando os veículos não estiverem próximos. Uma FPA por meio da qual seja gerada esta propriedade é mostrada na Figura 2.4, onde  $L$  indica a maior dimensão do veículo.

A Figura 2.3 mostra o gráfico da função potencial geral citada, onde se pode notar a sua característica assimétrica.

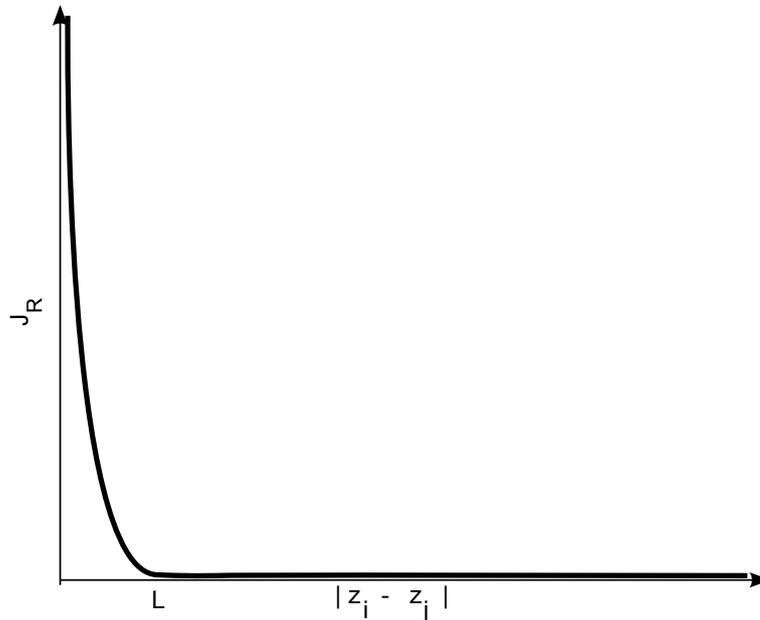


Figura 2.4: Exemplo de função potencial somente repulsiva

# Capítulo 3

## Resultados Preliminares

### 3.1 Introdução

Este capítulo apresenta os estudos iniciais sobre controle de formação, no qual o sinal de controle de cada membro da formação é emulado como um sistema massa-mola-amortecedor. Na Seção 3.2, o modelo matemático do sistema massa-mola-amortecedor linear é derivado e sua estabilidade é analisada. Na Seção 3.3, um modelo de uma mola não linear é utilizado para manter uma distância de separação entre os membros da formação e evitar colisões entre estes. Na Seção 3.4, uma estratégia de seguimento de trajetória é proposta utilizando os conceitos de sistema massa-mola-amortecedor e líder virtual. Na Seção 3.5, são propostas duas estratégias de controle de formação baseadas nos conceitos de sistemas do tipo massa-mola-amortecedor e líder virtual. A primeira estratégia utiliza o conceito de mola não linear e apenas um dos membros segue um líder virtual. Na segunda estratégia, cada membro da formação segue seu próprio líder virtual.

### 3.2 Sistema massa - mola - amortecedor linear

#### 3.2.1 Modelo Matemático

Seja um sistema composto por dois blocos de massa  $m$  ligados por uma mola de constante  $k_1$  e um amortecedor de constante  $k_2$ , conforme mostra a Figura 3.1.

Deseja-se que os blocos mantenham entre si uma distância desejada. Deste modo, o modelo matemático pode ser representado pelas seguintes equações:

$$m\ddot{x}_a + k_2(\dot{x}_a - \dot{x}_b) + k_1(x_a - x_b) = 0 \quad (3.1)$$

$$m\ddot{x}_b + k_2(\dot{x}_b - \dot{x}_a) + k_1(x_b - x_a) = 0 \quad (3.2)$$

onde  $x_a$  e  $x_b$  são as posições dos blocos  $A$  e  $B$ , respectivamente.

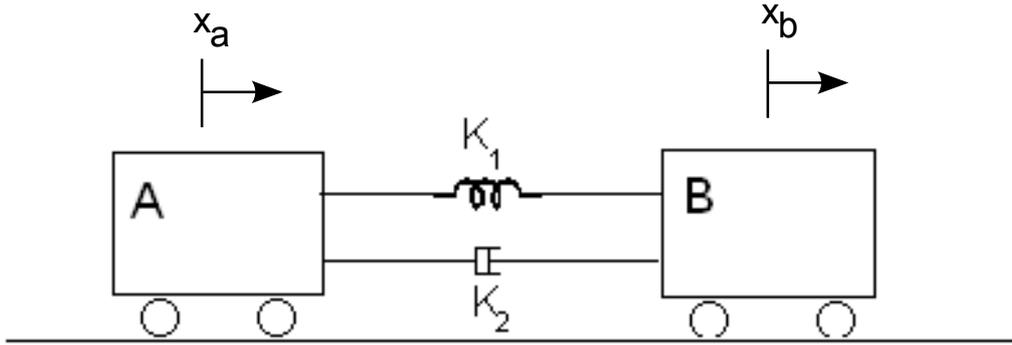


Figura 3.1: Sistema massa-mola-amortecedor

Considerando  $x_1 = x_a$ ,  $x_2 = \dot{x}_a$ ,  $x_3 = x_b$ ,  $x_4 = \dot{x}_b$ , obtém-se as seguintes equações diferenciais de 1ª ordem

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 & (3.3) \\
 \dot{x}_2 &= -(k_2/m)(x_2 - x_4) - (k_1/m)(x_1 - x_3) \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= -(k_2/m)(x_4 - x_2) - (k_1/m)(x_3 - x_1)
 \end{aligned}$$

Calculando os pontos de equilíbrio, obtém-se  $x_2 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_1 - x_3 = 0$ . Portanto, na condição de equilíbrio, as velocidades dos blocos A e B são iguais a zero e a diferença de posições é igual à distância desejada.

Representando o sistema na forma de espaço de estados, tem-se que

$$\dot{x} = Ax \quad (3.4)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1/m & -k_2/m & k_1/m & k_2/m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1/m & k_2/m & -k_1/m & -k_2/m \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A segunda e quarta linhas da matriz A são linearmente dependentes e, portanto, podem ser encontradas diferentes soluções, dependendo das condições iniciais estabelecidas.

### 3.2.2 Estabilidade do sistema

Fazendo  $e = x_a - x_b$ ,  $\dot{e} = \dot{x}_a - \dot{x}_b$  e substituindo em (3.1) e (3.2), obtém-se

$$m\ddot{x}_a + k_2\dot{e} + k_1e = 0 \quad (3.6)$$

$$m\ddot{x}_b - k_2\dot{e} - k_1e = 0 \quad (3.7)$$

Subtraindo (3.6) de (3.7), temos que

$$m\ddot{e} + 2k_2\dot{e} + 2k_1e = 0 \quad (3.8)$$

Considerando a candidata à função de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{e}^2 + \int_0^e 2k_1ede \quad (3.9)$$

A derivada de  $V$  em relação ao tempo é dada por

$$\dot{V}(x) = -2k_2\dot{e}^2 \leq 0 \quad (3.10)$$

onde  $\dot{V}$  é negativa semi-definida. Então, utilizando o Princípio de Invariância de La Salle, pode-se concluir que, à medida que  $t \rightarrow \infty$ , o erro converge para zero.

## 3.3 Sistema massa-mola não linear-amortecedor

Uma característica fundamental buscada em uma estratégia de controle de formação é evitar que seus membros colidam entre si. Esta característica não é suprida adequadamente quando se utiliza funções de repulsão lineares, utilizadas no sistema massa-mola-amortecedor discutido na seção anterior. Um modelo de mola não linear adequado seria aquele em que a força de atração se anula a uma determinada distância do outro membro. Esta força se tornaria repulsiva quando a distância entre um membro e outro fica menor do que a estabelecida. Além disso, esta força repulsiva deve tender a um valor muito grande (idealmente, valor infinito) à medida que a distância de separação dos agentes se aproxime de zero.

Considere um sistema composto por  $N$  agentes ligados por molas não-lineares e amortecedores modelados pelas seguintes equações

$$m_i\ddot{x}_i + \sum_{j \neq i}^N f(\dot{x}_i - \dot{x}_j) + \sum_{j \neq i}^N g(x_i - x_j) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.11)$$

onde  $f(\cdot)$  é a função de amortecimento e  $g(\cdot)$  é a função que representa a força de

atração e repulsão da mola não linear entre os membros, deifnidas por:

$$f = k_2(\dot{x}_i - \dot{x}_j) \quad (3.12)$$

$$g = k_1(x_i - x_j) - k_r \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{c}\right)(x_i - x_j) \quad (3.13)$$

onde

$k_1$  é a constante da parte linear da força de mola

$k_2$  é a constante de amortecimento

$k_r$  e  $c$  são as constantes da parte não linear da força de mola

A função  $g(\cdot)$  adotada neste trabalho é baseada em [27].

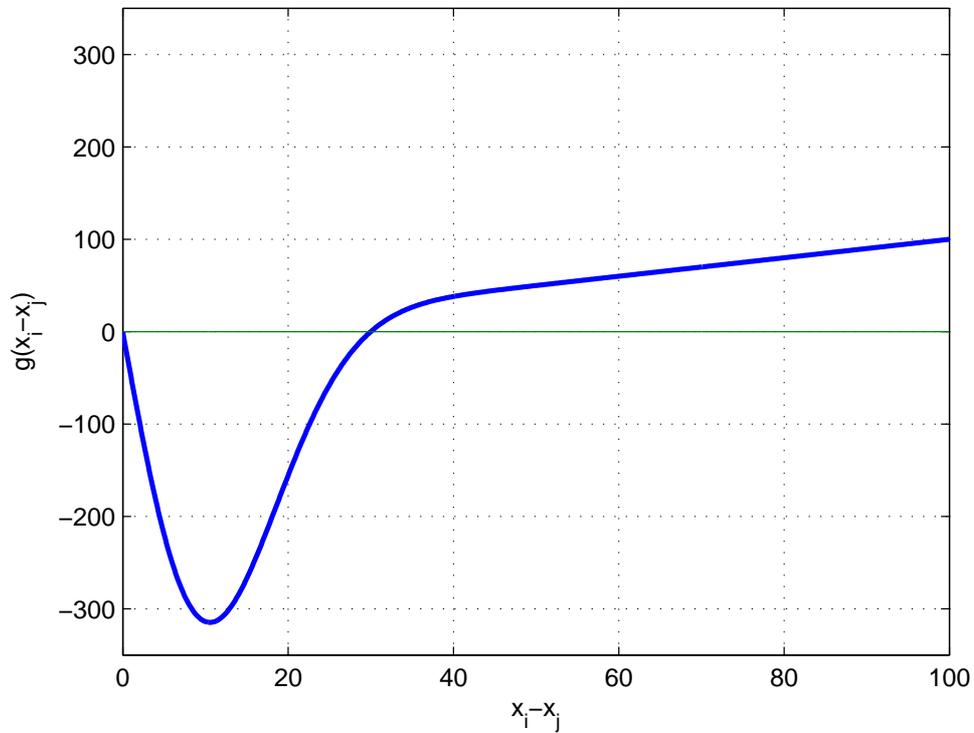


Figura 3.2: Função de mola não linear

O parâmetro  $k_r$  determina a intensidade da força repulsiva. O parâmetro  $c$  é determinado de acordo com a distância desejada entre os agentes ( $d_{ij}$ ), conforme mostra (3.14).

$$c = \frac{d_{ij}^2}{\log\left(\frac{k_r}{k_1}\right)} \quad (3.14)$$

A força de mola para uma distância desejada interagentes igual a 30 metros, com  $k_1 = 1$  e  $k_r = 50$ , é mostrada na Figura 3.2

### 3.3.1 Estabilidade do sistema

Para  $N=2$ , temos as seguintes equações:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) + g_r(x_1 - x_2) = 0 \quad (3.15)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1(x_2 - x_1) + g_r(x_2 - x_1) = 0 \quad (3.16)$$

Fazendo  $e = x_1 - x_2, \dot{e} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2, m_1 = m_2$  e substituindo em (3.15) e (3.16), obtém-se

$$m\ddot{x}_1 + k_2\dot{e} + k_1e + g_r(e) = 0 \quad (3.17)$$

$$m\ddot{x}_2 - k_2\dot{e} - k_1e - g_r(e) = 0. \quad (3.18)$$

Subtraindo (3.17) de (3.18), temos que

$$m\ddot{e} + 2k_2\dot{e} + 2k_1(e) + 2g_r(e) = 0. \quad (3.19)$$

Considere a candidata à função de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}m\dot{e}^2 + \int_0^e 2k_1ede + \int_0^e 2g_r(e)de. \quad (3.20)$$

A derivativa de  $V$  em relação ao tempo é dada por

$$\dot{V}(x) = -2k_2\dot{e}^2 \leq 0. \quad (3.21)$$

Utilizando o Princípio da Invariância de La Salle conclui-se que à medida que  $t \rightarrow \infty$  o erro converge para zero. Com isso, pode-se mostrar que o sistema utilizado é estável.

### 3.3.2 Exemplo ilustrativo

Na simulação realizada em  $\mathbb{R}^2$ , três agentes de massas iguais a  $m$  partem de posições iniciais aleatórias e alcançam uma formação em triângulo, com uma distância desejada de 30 metros entre os agentes. As constantes de mola  $k_1$  e  $k_r$  são iguais a 0,01 e 20, respectivamente. A constante de amortecimento,  $k_2$ , igual a 10. O valor calculado para o parâmetro  $c$  foi de 118,4. Todos os agentes partem do repouso. A Figura 3.3 mostra os caminhos percorridos pelos agentes. Os círculos representam a posição inicial e os losangos a posição final. As distâncias entre os membros variam conforme mostra a Figura 3.4.

Assim, o uso de molas não lineares mostra-se adequado para agregação e manutenção de distâncias pré-especificadas entre os membros de um grupo com topologia definida. Quando se deseja que os agentes se movam em formação, pode-se fazer

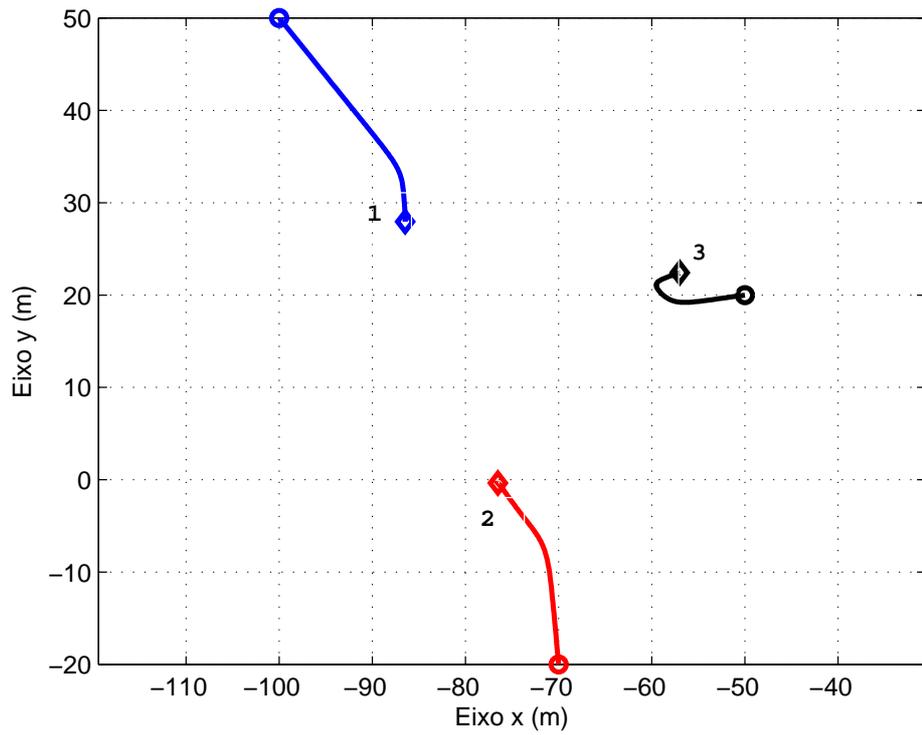


Figura 3.3: Trajetórias dos agentes formando um triângulo.

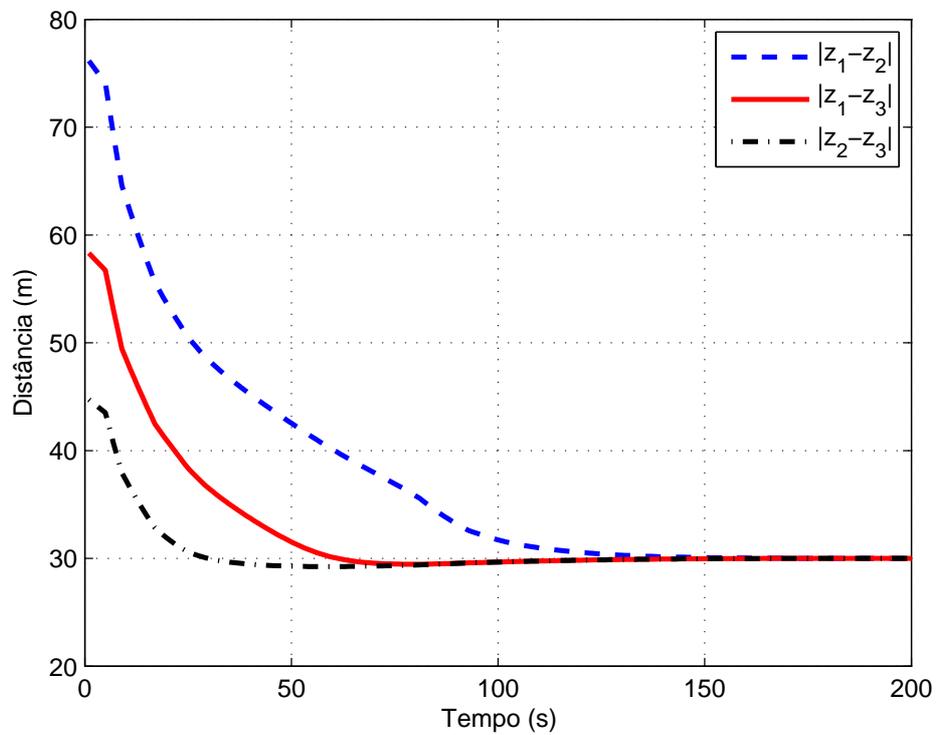


Figura 3.4: Distância entre os agentes.

com que um ou mais agentes sigam um ou mais pontos de referência móvel, como será mostrado na próxima seção.

### 3.4 Rastreamento de trajetória com líder virtual

Seja um sistema composto por um bloco de massa  $m$  e um ponto de referência móvel, denominado aqui de líder virtual, conforme a Figura 3.5. A proposta é fazer com

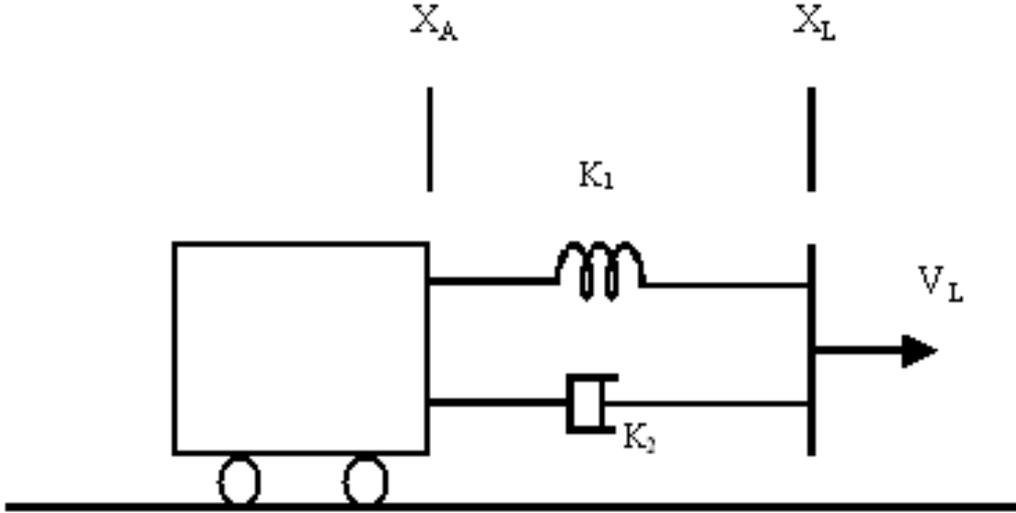


Figura 3.5: Sistema massa-mola-amortecedor e líder virtual

que o agente representado pelo bloco siga um líder virtual representado pelo ponto de referência móvel. A idéia é representar a força atuante no bloco por um sistema mola-amortecedor. Assim, o sistema é representado pela seguinte equação

$$m\ddot{x} + k_2(\dot{x} - \dot{x}_L) + k_1(x - x_L) = 0 \quad (3.22)$$

onde  $x_L$  é a posição do ponto de referência móvel no plano. Considerando o erro de posição como sendo a diferença entre a posição do bloco e a posição do ponto de referência móvel, obtém-se

$$e = x - x_L \quad (3.23)$$

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_L \quad (3.24)$$

$$\ddot{e} = \ddot{x} - \ddot{x}_L \quad (3.25)$$

Substituindo (3.23), (3.24) e (3.25) em (3.22), obtém-se a equação da dinâmica do erro

$$m\ddot{e} + k_2\dot{e} + k_1e = m\ddot{x}_L \quad (3.26)$$

Pela análise de (3.26), quando o líder descrever uma trajetória retilínea uniforme,

ou seja,  $\ddot{x}_L = 0$ , o erro tenderá a zero. Obviamente, para erro de rastreamento nulo é necessário ter também disponível para controle a derivada de segunda ordem da trajetória desejada, para que o último termo de (3.26) se anule.

### 3.4.1 Simulações

#### Modelo Cinemático do Líder Virtual

Para caracterizar o ponto de referência móvel será considerado o modelo cinemático do movimento planar de um veículo virtual, conforme as equações abaixo:

$$\dot{x}_r = v_r \cos(\psi_r) \quad (3.27)$$

$$\dot{y}_r = v_r \sin(\psi_r) \quad (3.28)$$

$$\dot{\psi}_r = w_r \quad (3.29)$$

onde  $x_r(t), y_r(t) \in \mathbb{R}^2$  são as coordenadas da posição do líder virtual,  $\psi_r$  é ângulo de rumo,  $v_r$  é a velocidade linear e  $w_r$  é a velocidade angular.

As simulações foram realizadas em  $\mathbb{R}^2$  com as constantes  $k_1, k_2$  iguais a 5 e  $m=1$ . A posição inicial do seguidor é  $x_0 = [-10; 30]$  e sua velocidade inicial é de 30 m/s. velocidade linear do líder virtual é constante e igual a 30 m/s. O ângulo de rumo de referência ( $\psi_r$ ) inicial é de 0 graus. Após 10 segundos de simulação,  $\psi_{ref} = \pi/3$ . Assim, o líder virtual descreve uma trajetória, que é seguida pelo seguidor, conforme se vê na Figura 3.6.

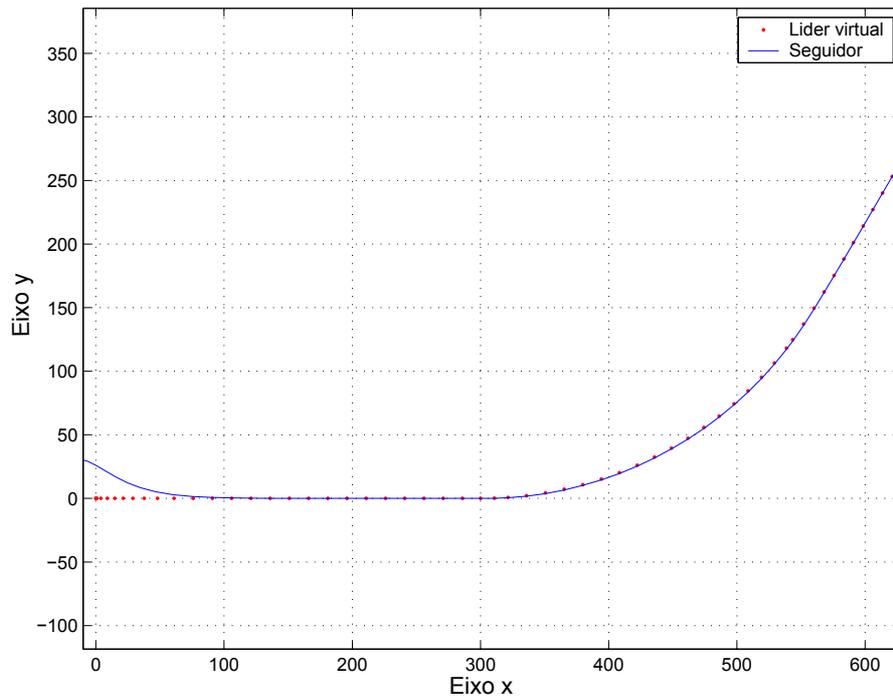


Figura 3.6: Trajetória do líder virtual e do seguidor

O erro de rastreamento tende a zero nos trechos retilíneos. Na curva, o erro de rastreamento apresenta um valor diferente de zero se vê na Figura 3.7.

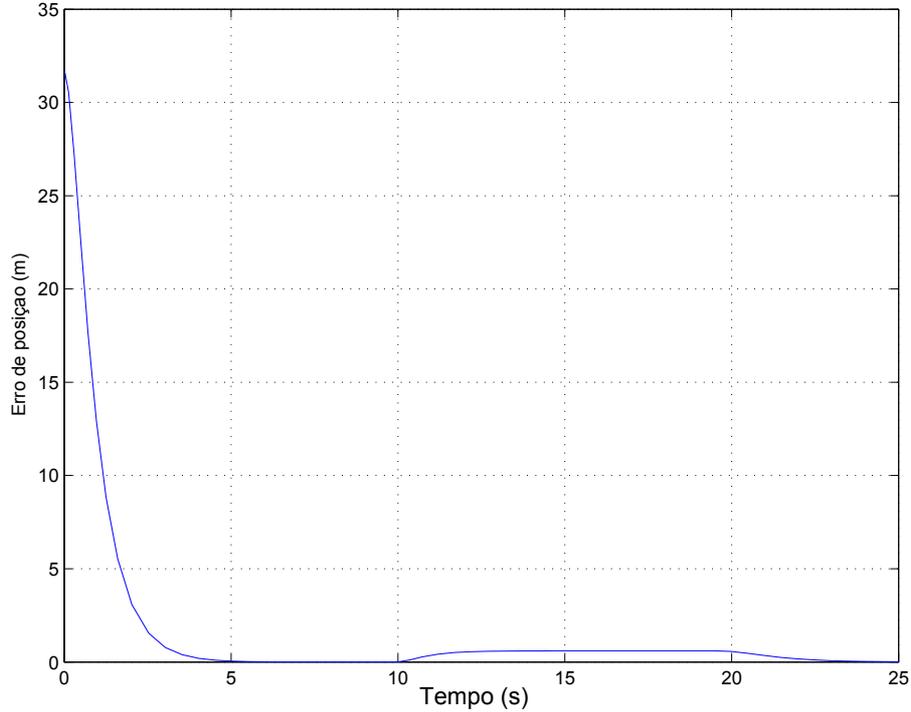


Figura 3.7: Erro de rastreamento do seguidor em relação ao líder virtual

A velocidade do seguidor tende a um valor estacionário igual à velocidade do ponto de referência móvel, como mostra a Figura 3.8.

## 3.5 Rastreamento de trajetória para formações

Duas estratégias de controle foram utilizadas. A primeira delas usa o conceito de mola não linear para atração/repulsão entre os membros para controle de formação e, para dar movimento ao grupo, um dos membros segue um líder virtual. Na segunda estratégia, cada membro do grupo segue o seu próprio líder virtual utilizando como emulador do sinal de controle os conceitos de massa-mola amortecedor.

### 3.5.1 Um líder virtual

#### Modelo do controle da formação

Considere um grupo de 3 agentes móveis, modelados com a seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{z}_1 &= -k_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_L) - k_1(z_1 - z_L) \\
 &+ \sum_{j=2}^3 f(\dot{z}_1 - \dot{z}_j) + g(z_1 - z_j)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

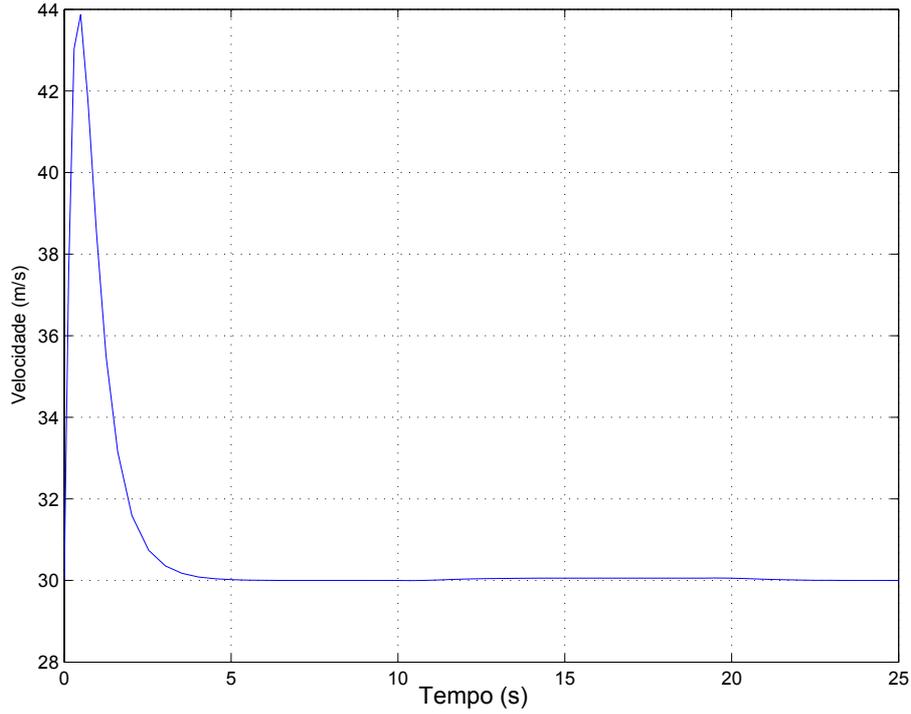


Figura 3.8: Velocidade do seguidor

$$m_i \ddot{z}_i = \sum_{i=2}^3 \sum_{j=1}^3 f(\dot{z}_i - \dot{z}_j) + g(z_i - z_j), \quad (3.31)$$

onde  $z = [x_i \ y_i]^T$  é a coordenada do  $i$ -ésimo robô,  $f(\cdot)$  e  $g(\cdot)$  são funções de atração e repulsão, respectivamente, definidas na Seção 3.3.

### Simulações

Neste tópico, foram realizadas simulações com 3 agentes móveis, com um deles seguindo um líder virtual, segundo o sistema representado por (3.30) e (3.31). A velocidade do líder virtual é de 30m/s e são nulas as velocidades iniciais dos 3 membros da formação. A distância desejada entre os agentes é de 50 metros. Como se pode ver na Figura 3.9, somente um agente segue a trajetória desejada, enquanto a formação é alcançada e mantida. As distâncias interagentes diminuem e se mantêm no valor desejado, como mostra a Figura 3.10.

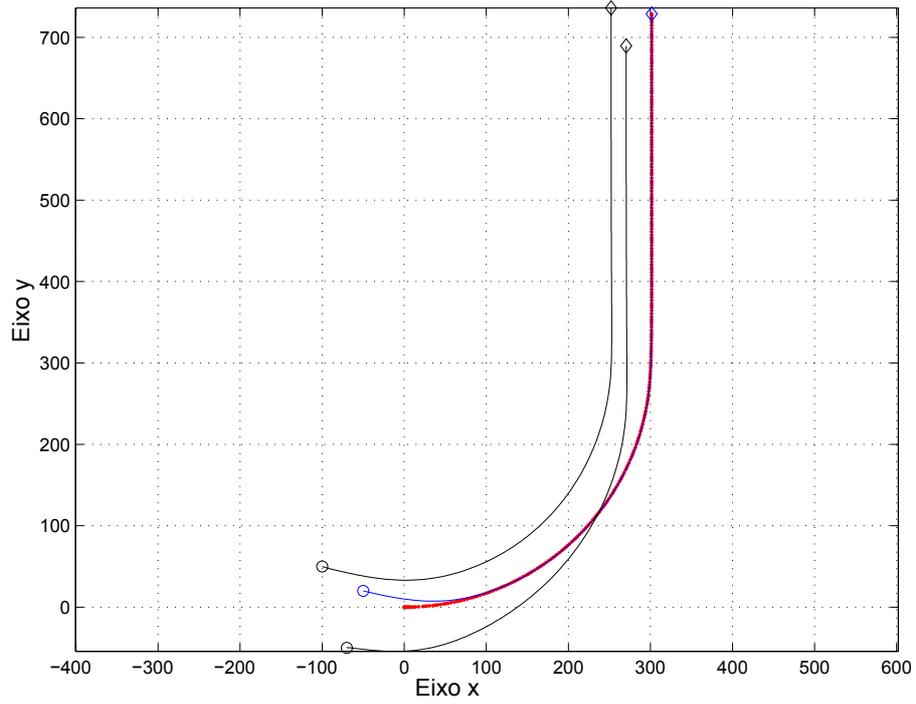


Figura 3.9: Trajetórias

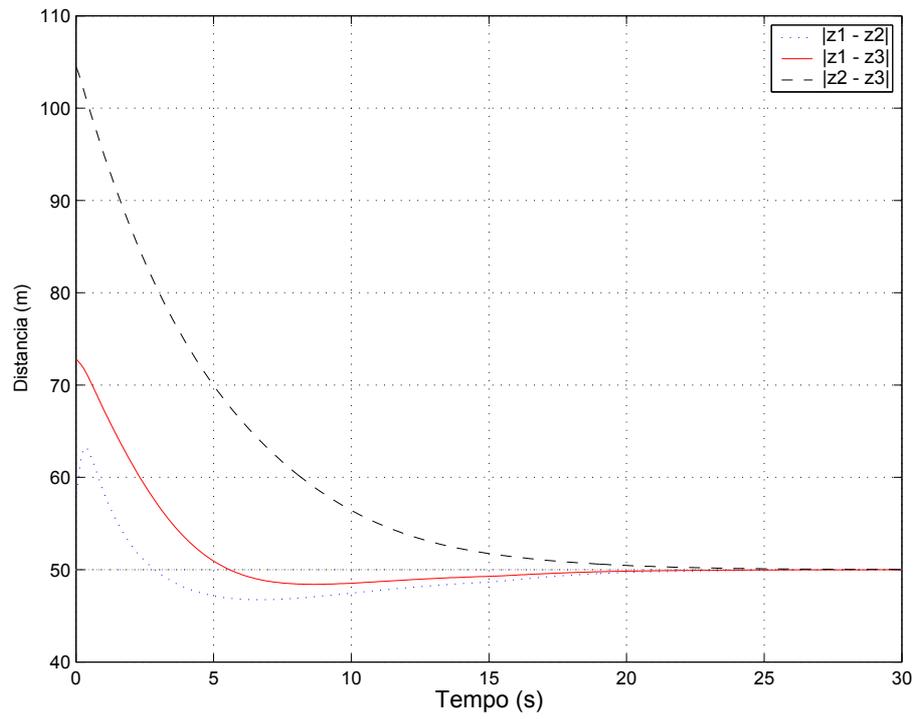


Figura 3.10: Distâncias entre os agentes

### 3.5.2 Vários Líderes Virtuais

#### Modelo do controle da formação

Considere um grupo de 3 agentes móveis, modelados com a seguinte dinâmica em malha fechada:

$$m_i \ddot{z}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 -k_2(\dot{z}_i - \dot{z}_{Li}) - k_1(z_i - z_{Li}) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 f(\dot{z}_i - \dot{x}_j) + g(z_i - z_j) \quad (3.32)$$

A posição dos líderes virtuais são determinadas por meio de um líder virtual principal ou  $x_{L1}$ , que descreve uma trajetória de referência. As equações para determinação dos demais líderes virtuais são as seguintes

$$x_{L2} = \frac{L}{2} \cos(\psi + \frac{\pi}{2}) + H \cos(\psi + \pi) + x_{L1} \quad (3.33)$$

$$y_{L2} = \frac{L}{2} \sin(\psi + \frac{\pi}{2}) + H \sin(\psi + \pi) + y_{L1} \quad (3.34)$$

$$x_{L3} = \frac{L}{2} \cos(\psi - \frac{\pi}{2}) + H \cos(\psi + \pi) + x_{L1} \quad (3.35)$$

$$y_{L3} = \frac{L}{2} \sin(\psi - \frac{\pi}{2}) + H \sin(\psi + \pi) + y_{L1}. \quad (3.36)$$

onde  $\psi$  é o rumo e  $L$  e  $H$  são constantes definidas conforme mostra a Figura 3.11.

#### Simulações

Nas simulações realizadas, as massas dos agentes foram consideradas unitárias e as constantes de mola e de amortecimento iguais a 10. O valor da velocidade do líder principal foi de 30 m/s e das distâncias  $L$  e  $H$  foram de 50 m. Em  $t=0$  s, foi comandado um ângulo de guinada  $\psi_{ref} = 0$ . No instante  $t = 15$  s, o rumo de referência foi de  $2\pi$ , ou seja, significando que o robô deve dar uma volta completa. E em  $t = 45$  s,  $\psi_{ref} = 0$ .

Analisando o gráfico da Distância interagentes ( $D_{ij}$ ) definido conforme (3.37), verifica-se que esta variável tende a zero nos trechos retilíneos e tende a um valor

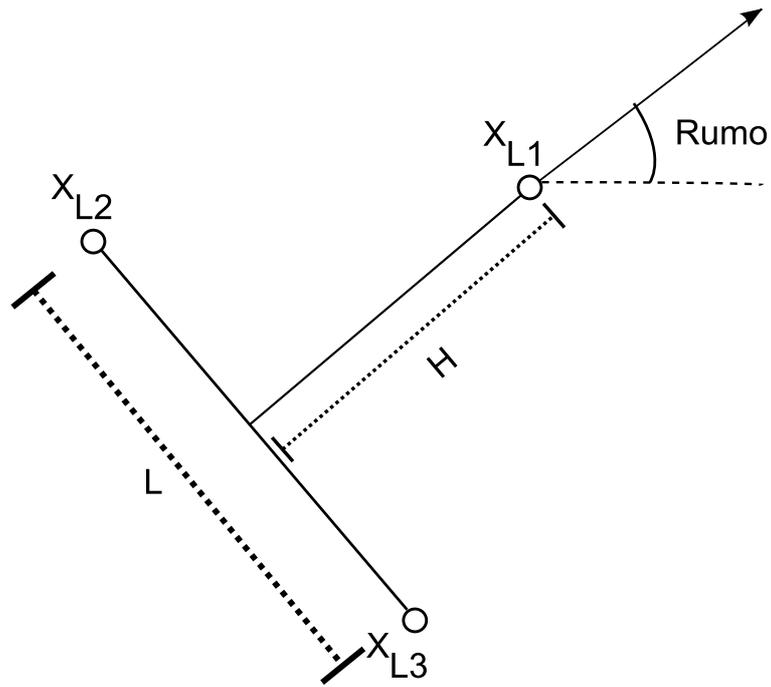


Figura 3.11: Esquema básico para determinação dos líderes virtuais

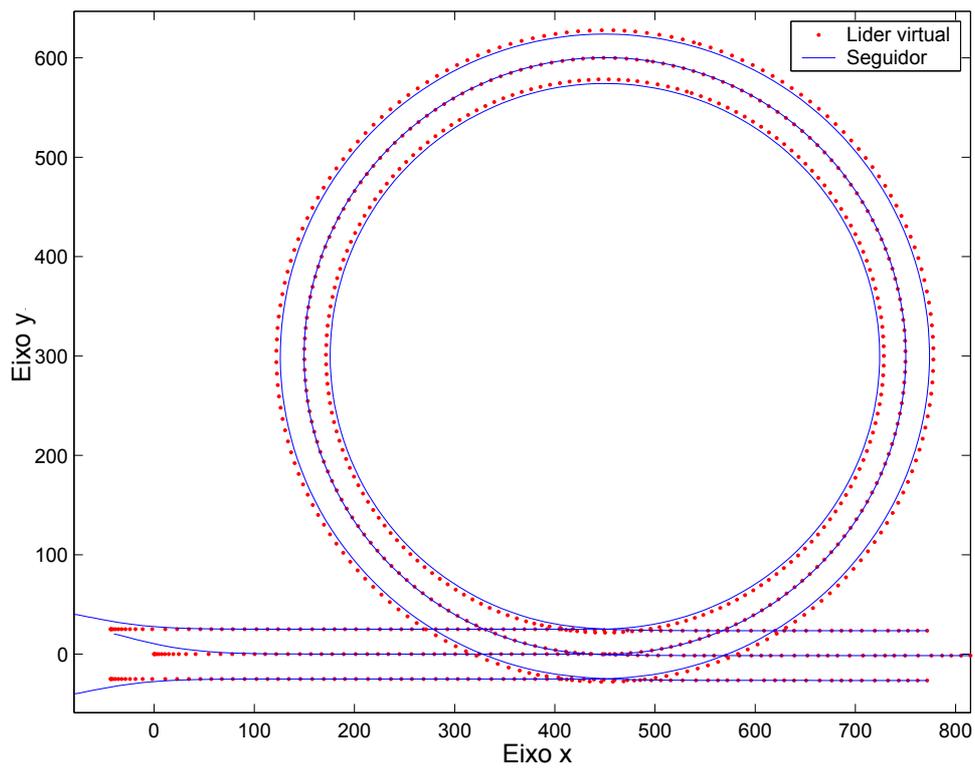


Figura 3.12: Trajetórias da formação

constante nas trajetórias curvilíneas.

$$D_{ij} = |z_i - z_{Li}| \quad (3.37)$$

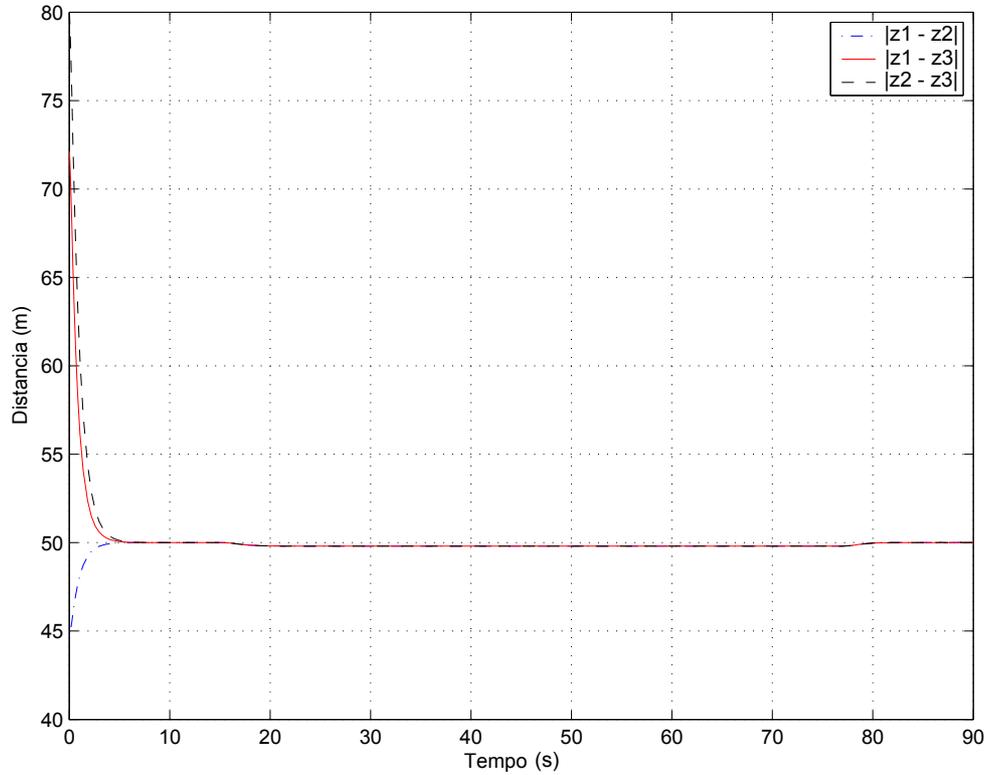


Figura 3.13: Erro de formação

Foi realizada outra simulação para verificar a capacidade de evitar colisões da estratégia de controle proposta. As posições iniciais dos agentes foram colocadas opostas a de seus líderes e a distância entre estes foi especificada em 50 metros. A distância mínima para haver repulsão foi de 30 metros. As trajetórias mostradas na Figura 3.14 aparentemente indicam a ocorrência de choques entre os veículos, mas a função de repulsão evita as colisões como mostra a Figura 3.15.

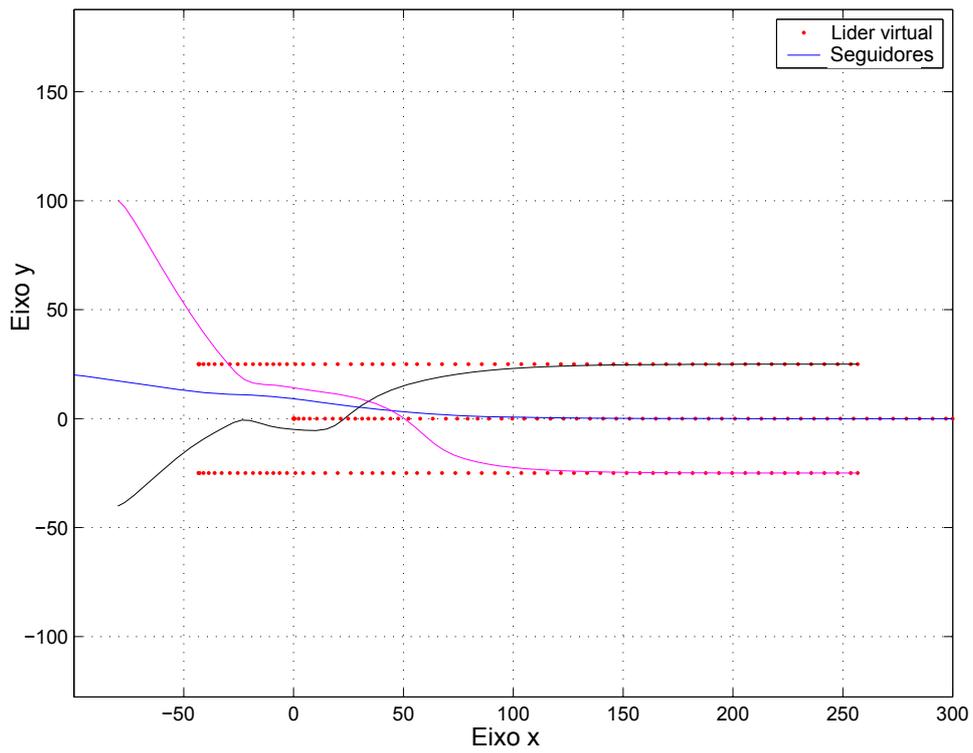


Figura 3.14: Trajetórias dos agentes

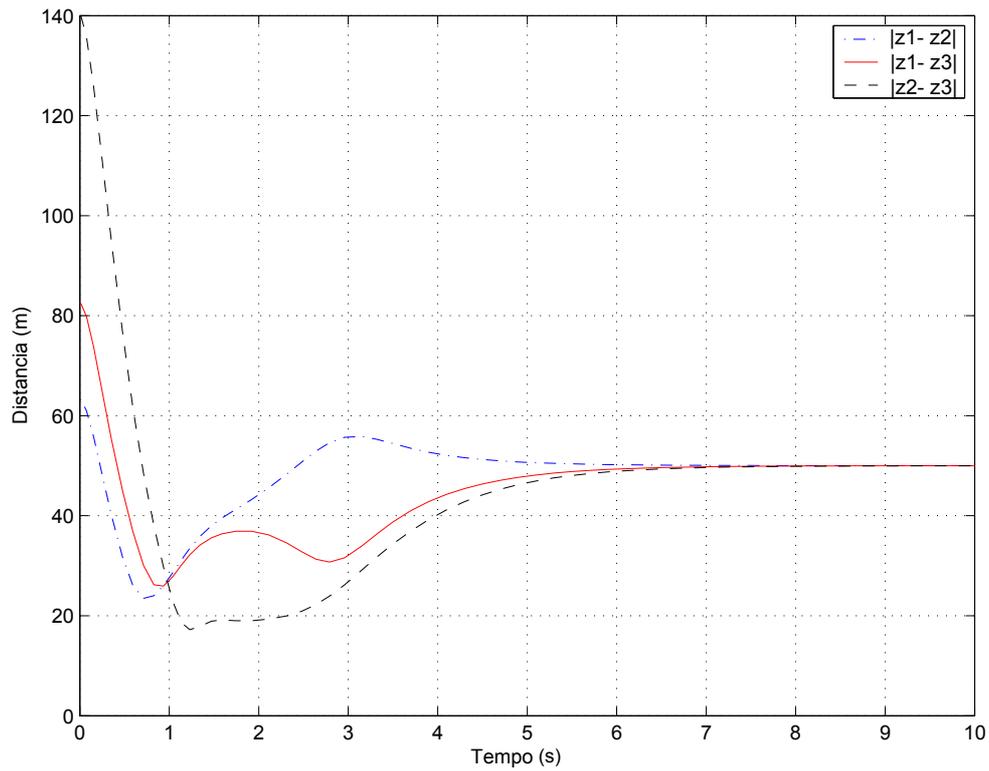


Figura 3.15: Distâncias entre os agentes

## 3.6 Conclusões

A utilização dos conceitos de um sistema massa-mola-amortecedor mostrou-se adequada para um esquema preliminar de controle de formação. O uso de força de mola não linear propiciou que se mantivessem as distâncias especificadas entre os agentes e que se evitassem as colisões entre estes. A combinação de líder virtual e sistema massa-mola-amortecedor mostrou-se razoável para rastreamento de trajetória para um veículo, apesar de resultar em erro residual para trajetórias não retilíneas.

# Capítulo 4

## Formação de Robôs Holonômicos Incertos

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos com a estratégia proposta para controle de formação usando modelo cinemático baseado em funções potenciais artificiais e controle adaptativo robusto, para o caso de agentes holonômicos. Inicialmente, são feitas considerações sobre o controle cinemático baseado em sistemas holonômicos de primeira ordem. Em seguida, o modelo matemático de cada agente da formação é descrito por uma classe de sistemas de Euler-Lagrange (EL) e os problemas de regulação e rastreamento de trajetória para o grupo dos agentes são estabelecidos. No tópico seguinte, são apresentados os resultados da estratégia de controle de formação com controle adaptativo robusto usando funções potenciais para agentes holonômicos. Em seguida, são mostradas as simulações que evidenciam as vantagens da estratégia proposta. Por último, são iniciadas as discussões para evitar mínimos locais, onde é proposto um procedimento simplificado para a reordenação das posições iniciais dos agentes.

## 4.1 Modelo cinemático de primeira ordem para controle de formação

Considere um sistema composto por  $N$  agentes holonômicos. O movimento de cada agente é determinado por meio do modelo de primeira ordem a seguir

$$\dot{z}_i = u_i \quad (4.1)$$

onde  $z_i \in \mathbb{R}^n$  é a posição do  $i$ -ésimo agente e  $u_i$  é o sinal de controle correspondente.

Deseja-se que cada agente se mova na direção do gradiente descendente de uma função potencial artificial. Assim, o sinal de controle é definido como

$$u_i = -\nabla_{z_i} J(\tilde{z}) \quad (4.2)$$

onde  $J(\tilde{z})$  é uma função potencial artificial (FPA), definida conforme Capítulo 2.

De início, a análise é feita por meio de modelos cinemáticos baseados em funções potenciais quadráticas. Em seguida, a análise é baseada em funções potenciais mais gerais.

### 4.1.1 Controle cinemático baseado em funções potenciais quadráticas

Neste tópico, é derivado um modelo cinemático de primeira ordem a ser seguido pelos agentes baseado em FPA quadrática. Este tipo de função potencial foi utilizado nos estudos iniciais por facilitar a análise matemática.

Nesta seção, a seguinte FPA é considerada

$$J(\tilde{z}) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \frac{k}{2} |z_i - z_j - p_{ij}|^2 \quad (4.3)$$

onde  $k$  é uma constante positiva e  $p_{ij}$  é o vetor constante de diferença entre as posições dos agente  $i$  e  $j$ , de modo que  $|p_{ij}| = d_{ij}$ .

Deste modo, (4.1) pode ser reescrita como

$$\dot{z}_i = - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} k(z_i - z_j - p_{ij}). \quad (4.4)$$

Para simplificação da análise e sem perda de generalidade, considera-se que  $n = 1$  e  $p_{ij} = 0$ . Conforme [54], pode ser definida a variável auxiliar  $r_i := x_i + p_{1i}$ , notando que, para  $p_{ii} = 0$ ,  $r_1 = x_1$ . Deste modo, pode ser incorporado  $p_{ij}$  em (4.4), tal que  $\dot{r}_i = \sum_{j \in N_i}^N k(x_i - x_j - p_{i1} - p_{1j}) = \sum_{j \in N_i}^N k(r_i - r_j)$ . Assim, (4.4) pode ser escrita como

$$\dot{z}_i = - \sum_{j \in N_i} k(z_i - z_j). \quad (4.5)$$

Fazendo o empilhamento de (4.5), tem-se que

$$\dot{z} = -kLz \quad (4.6)$$

onde  $z = [z_1^T \dots z_N^T]^T$  e  $L$  é a matriz Laplaciana do grafo de informação  $G$ , que tem algumas propriedades listadas Seção 2.2.

A proposição a seguir é uma simplificação do resultado mostrado em [58] e mostra o comportamento dinâmico das distâncias entre os veículos (ver também [59]).

**Proposição 1** *Considere o sistema multiagente representado por (4.6). Se o grafo  $G$  for conectado, então*

1. *para condições iniciais arbitrárias, o centróide de posição  $\bar{z}_1(t)$  é invariante, i.e.,*

$$\bar{z}_1(t) = \frac{(z_1 + z_2 + \dots + z_N)}{N} = \bar{z}_1(0), \quad \forall t \geq 0; \quad (4.7)$$

2. *as distâncias entre os agentes tenderão exponencialmente aos valores desejados, ou seja,  $|z_i - z_j| \rightarrow d_{ij}$ .*

*Prova: ver Apêndice A.1.*

## 4.1.2 Controle cinemático baseado em FPA Geral

Considere o sistema composto por  $N$  agentes representados por (4.1). A proposição a seguir mostra que  $\dot{z}(t) \rightarrow 0$ , à medida  $t \rightarrow \infty$ .

**Proposição 2** *Considere um sistema multiagente composto por  $N$  veículos representados por (4.1), onde a função potencial  $J(\tilde{z})$  satisfaz as condições estabelecidas na Definição 12. Então, pode-se estabelecer que  $\dot{z}(t) \rightarrow 0$ , à medida que  $t \rightarrow \infty$ .*

*Prova: ver demonstração em [27].* ■

**Observação 4** Para a FPA definida por (2.8), é mostrado em [27] que, para condições iniciais arbitrárias, o contróide de posição  $\bar{z}_1(t)$  é invariante, isto é,

$$\bar{z}_1(t) = \frac{(z_1 + z_2 + \dots + z_N)}{N} = \bar{z}_1(0) \quad \forall t \geq 0. \quad (4.8)$$

## 4.2 Modelo de segunda ordem para controle de formação

Tendo em vista que em aplicações reais não se conseguem variações instantâneas nas velocidades dos agentes, será utilizado para representar cada agente da formação um modelo matemático correspondente a uma classe de sistemas Euler-Lagrange. Esta representação tem a vantagem de considerar as forças de Coriolis e permite adicionar outros termos como efeitos da gravidade, forças de arrasto etc.

### 4.2.1 Modelo matemático

Considere um sistema composto por  $N$  agentes completamente atuados e modelados pelo seguinte conjunto de equações

$$M_i(z_i)\ddot{z}_i + C_i(\dot{z}_i, z_i)\dot{z}_i = \tau_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.9)$$

onde  $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  corresponde à matriz de inércia,  $C_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  corresponde à matriz de forças de Coriolis e de forças centrípetas e  $\tau_i \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de forças de controle independentes.

Neste trabalho, considera-se que as matrizes  $M_i$  e  $C_i$  são incertas no sentido de que os parâmetros são conhecidos apenas nominalmente. O modelo corresponde a uma classe de sistemas de Euler-Lagrange e tem as seguintes propriedades:

1. para todo  $i$  a matriz de inércia  $M_i$  é positiva definida e satisfaz  $h_{mi} |v|^2 \leq v^T M_i(z_i)v \leq h_{Mi} |v|^2$ , com constantes positivas  $h_{mi}$  e  $h_{Mi}$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $\dot{M}_i$  é diferenciável;
3.  $\dot{M}_i - 2C_i$  é anti-simétrica de modo que

$$v^T (\dot{M}_i - 2C_i)v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (4.10)$$

Os seguintes problemas de formação foram considerados:

1) Projetar leis de controle de modo que todos os  $N$  agentes incertos convirjam para uma determinada configuração geométrica definida pelas posições relativas dos agentes, isto é,

- $|z_i(t) - z_j(t)| \rightarrow d_{ij}$ .
- $\dot{z}_i(t) \rightarrow 0$ .

Este problema será referido no decorrer do texto como REGULAÇÃO.

2) Os  $N$  agentes devem manter o padrão geométrico desejado enquanto um ou mais agentes rastreiam trajetórias de referência (Problema de RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA), isto é,

- $|z_i(t) - z_j(t)| \rightarrow d_{ij}$ .
- $\dot{z}_i(t) \rightarrow \dot{z}_{ri}(t)$ , onde  $z_{ri}(t)$  é a trajetória de referência para o  $i$ -ésimo agente.

## 4.2.2 Estratégia proposta

Dado a dinâmica de cada agente pela Equação (4.9), deseja-se projetar cada lei de controle  $\tau_i$ , de tal maneira que o referido agente obedeça ao modelo cinemático desejado.

Tendo em vista que as entradas de controle do sistema (4.9) são expressas em termos de aceleração, define-se a função auxiliar de erro  $s_i$  como

$$s_i = \dot{z}_i - \dot{z}_{di}, \quad (4.11)$$

onde  $\dot{z}_{di}$  representa o modelo cinemático desejado. O objetivo de controle é fazer  $s_i \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ , de modo que o modelo cinemático desejado seja alcançado assintoticamente.

Fazendo a derivada temporal de (4.11), tem-se que

$$\dot{s}_i = \ddot{z}_i - \ddot{z}_{di}. \quad (4.12)$$

Manipulando (4.11) e (4.12) e substituindo em (4.9), então

$$M_i \dot{s}_i + C_i s_i = \tau_i - M_i \ddot{z}_{di} - C_i \dot{z}_{di}. \quad (4.13)$$

Note que, com o uso da função auxiliar de erro (4.11), o problema de controle pode ser considerado de primeira ordem. Deste modo, o objetivo é fazer  $s_i \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ , de modo que o movimento de cada agente obedeça ao modelo cinemático desejado.

Isto poderia ser alcançado usando funções de controle descontínuas para alcançar a superfície de deslizamento  $s_i = 0$  em tempo finito. Entretanto, a fim de evitar o chaveamento em alta frequência do sinal de controle (também conhecido como *chattering*), leis de controle contínuas serão projetadas na seção a seguir.

### 4.3 Controle de formação - regulação

Nesta seção, para que todos os  $N$  agentes formem uma determinada configuração geométrica definida pelas posições relativas dos agentes, será utilizado o seguinte modelo cinemático:

$$\dot{z}_{di} = -\nabla_{z_i} J(\tilde{z}) \quad (4.14)$$

onde  $J(\tilde{z})$  é definido por (2.8). Em outras palavras, deseja-se projetar uma lei de controle de modo que force o vetor de velocidades do agente ao longo do gradiente negativo de um determinado campo vetorial.

Em dois cenários possíveis, serão apresentados os resultados da estratégia de controle de formação para o caso de regulação, usando funções potenciais. No primeiro cenário, considera-se que cada agente conhece seu próprio estado e as posições e as velocidades dos vizinhos. Depois, são disponíveis para controle somente o próprio estado do agente considerado e as posições dos vizinhos, ou seja, não há informação das velocidades dos vizinhos.

#### 4.3.1 Regulação - posições e velocidades dos vizinhos disponíveis para controle

Neste tópico, foi assumido que as posições e velocidades dos vizinhos para cada agente estão disponíveis para controle. Este tópico foi inicialmente abordado em [60].

Considerando o modelo matemático representado por (4.13), o próximo passo consiste em projetar sinais de controle tais que as funções auxiliares de erro tendam a zero a despeito das incertezas do sistema. Foi considerado que se pode escrever a

parametrização linear  $Y_i\theta_i^* = M_i\ddot{z}_{di} + C_i\dot{z}_{di}$ , onde  $Y_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz regressora de funções conhecidas de  $z_i$  e  $\dot{z}_i$ , e  $\theta_i^* \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de parâmetros incertos ( $m$  é o número de parâmetros incertos). Substituindo  $Y_i\theta_i^*$  em (4.13), obtém-se

$$M_i\dot{s}_i + C_i s_i = \tau_i - Y_i\theta_i^*. \quad (4.15)$$

Então, a seguinte lei de controle é proposta

$$\tau_i = Y_i\theta_i - K_{D_i}s_i. \quad (4.16)$$

Introduzindo o parâmetro de erro de estimação  $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \theta_i^*$  e substituindo (4.16) em (4.15), obtém-se

$$M_i\dot{s}_i + C_i s_i = Y_i\tilde{\theta}_i - K_{D_i}s_i, \quad (4.17)$$

que é uma forma bem conhecida na teoria de controle adaptativo de robôs manipuladores [61].

Para compensar a falta de uniformidade no comportamento transitório de esquemas de controle adaptativo com lei de adaptação convencional, a seguinte lei de adaptação baseada no B-MRAC [46] foi usada

$$\dot{\theta}_i = -\sigma\theta_i - \Gamma_i Y_i^T s_i \quad (4.18)$$

onde  $\Gamma_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é matriz constante representando os ganhos de adaptação.

O fator de projeção  $\sigma$  é dado por

$$\sigma = \begin{cases} 0 & ; \text{se } |\theta_i| < M_{\theta_i} \text{ ou } \sigma_{eq} < 0 \\ \sigma_{eq} & ; \text{se } |\theta_i| \geq M_{\theta_i} \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

onde  $\sigma_{eq} = -\theta_i^T \Gamma_i Y_i^T s_i / |\theta_i|^2$  e  $M_{\theta_i} > |\theta_i^*|$  é uma constante.

Assumindo que  $|\theta_i(0)| \in B_{\theta_i}$ , onde  $B_{\theta_i} = \{\theta_i : |\theta_i| \leq M_{\theta_i}\}$ , o fator de projeção age como a seguir. Se em qualquer tempo  $\theta_i(t)$  está sobre a esfera  $|\theta_i| = M_{\theta_i}$  e o termo  $-\Gamma_i Y_i^T s_i$  aponta para fora de tal esfera, o vetor de atualização é projetado sobre um plano tangente da esfera; alternativamente, se aponta para dentro, o fator  $\sigma$  é igual a zero e  $\theta_i(t)$  move-se para o interior da esfera.

A lei de controle (4.16) e lei de adaptação (4.18) com (4.19) é dita ser baseada no B-MRAC devido à sua semelhança com a lei de controle binário dada por [48].

Note que a adaptação integral é aplicada dentro de algum conjunto invariante compacto. De modo análogo ao feito em [46], é mostrado na Lema 1 que  $|\theta_i| \leq M_{\theta_i}$  é positivamente invariante e que o vetor de parâmetros tende a este conjunto exponencialmente.

**Lema 1** *Considere o sistema representado pelas equações (4.11), (4.14) e (4.15), com a lei de controle (4.16) e lei de adaptação (4.18) com (4.19). Suponha que  $\theta_i(0) \leq |\theta_i^*| \leq M_{\theta_i}$ , sendo  $M_{\theta_i}$  uma constante. Então, o vetor de parâmetros é limitado em norma, ou seja,  $|\theta_i(t)| \leq M_{\theta_i}, \forall t \geq 0$ .*

*Prova:* A demonstração encontra-se no Apêndice A.2 ■

A proposição a seguir explica outra principal propriedade da adaptação binária e é demonstrada similarmente como em [46].

**Proposição 3** *Considere o sistema representado pelas Equações (4.11)-(4.15), com a lei de controle (4.16) e lei de adaptação (4.18) com (4.19) e a seguinte função:*

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^T M_i s_i + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i \quad (4.20)$$

*Então,  $V_i(t)$  tende exponencialmente rápido a um valor residual de ordem de  $\mathcal{O}(\gamma^{-1})$ , onde  $\gamma = \lambda_m(\Gamma_i)$ . Além disso,  $|s_i(t)|$  tende exponencialmente rápido a um valor residual de ordem de  $\mathcal{O}(\gamma^{-1/2})$ .*

*Prova:* A demonstração encontra-se no Apêndice A.3. ■

**Observação 5** *A Proposição 3 mostra que o transitório da adaptação do B-MRAC é exponencialmente rápido na direção de conjunto residual pequeno, à medida que o ganho de adaptação é aumentado.*

O diagrama de blocos da Figura 4.1 ilustra o esquema proposto para o controle de formação para cada agente.

### Análise de estabilidade

Considere o conjunto invariante de equilíbrio

$$\Omega_e = \left\{ \eta : \dot{z} = 0; \nabla_z J = 0; \dot{\theta}_i = 0 \right\} \quad (4.21)$$

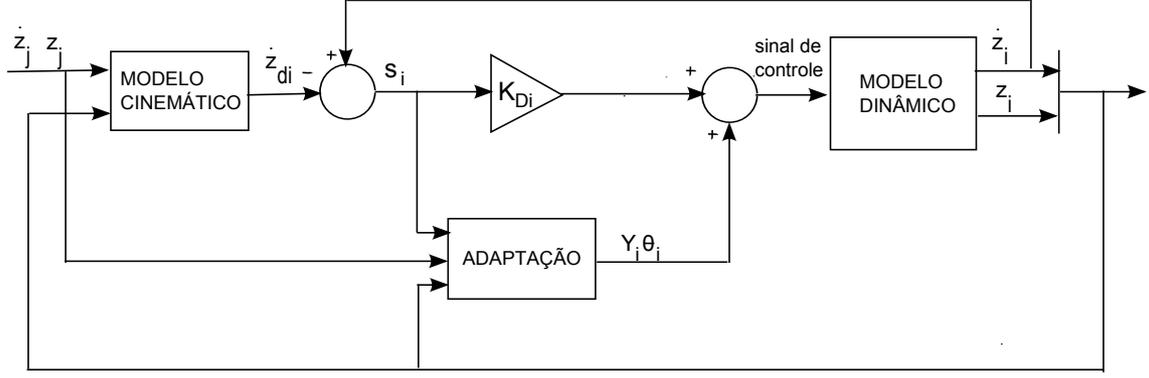


Figura 4.1: Diagrama de blocos para formação de agentes holonômicos - regulação

onde  $\eta = [z^T \quad \dot{z}^T \quad \tilde{\theta}^T]^T$  é o vetor de estados do sistema (4.9)-(4.16)-(4.18)-(4.19), onde  $z = [z_1^T \quad \dots \quad z_N^T]^T$  e  $\tilde{\theta} = [\tilde{\theta}_1^T \quad \dots \quad \tilde{\theta}_N^T]^T$ .

O teorema a seguir mostra o resultado de estabilidade global da estratégia proposta para o caso no qual se tem disponíveis para o controle de cada agente a posição e velocidade própria e as posições e as velocidades dos vizinhos (ver também [62]).

**Teorema 1** *Considere um sistema multiagente consistindo de  $N$  agentes holonômicos completamente atuados, modelados por (4.9) com a lei de controle adaptativa binária (4.16), (4.18) e (4.19)). Então, a partir de qualquer condição inicial finita num conjunto do espaço de estado satisfazendo  $J \leq c_1$ , sendo  $c_1$  uma constante positiva arbitrária,  $\forall K_D > 0$  o seguinte resultado de estabilidade global é válido:*

- as trajetórias do sistema tendem assintoticamente para o conjunto de equilíbrio  $\Omega_e$ ;
- todos os sinais de malha fechada são uniformemente limitados e o sistema multiagente tende assintoticamente para alguma formação constante correspondente a  $\nabla_{z_i} J = 0$ .

*Prova:* A demonstração encontra-se no Apêndice A.4. ■

**Observação 6** *Pelo Teorema 1, mostrou-se que  $s \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$  e, portanto, cada agente obedece ao modelo cinemático desejado, ou seja, se  $s_i = 0$  e  $\dot{z}_i = 0$ , então por (4.11),  $\dot{z}_{di} = 0$ , que corresponde a  $\nabla_{z_i} J = 0$ . Assim, as distâncias entre agentes tendem a valores constantes de modo que uma formação constante é alcançada assintoticamente.*

### 4.3.2 Regulação - informação de velocidades dos vizinhos não disponíveis para controle

Agora, considera-se um sistema de controle onde as informações de velocidades dos vizinhos não estão disponíveis para o agente considerado. Neste caso, como as informações de velocidades dos vizinhos são necessárias para o cálculo do termo  $M_i\ddot{z}_{di}$  em (4.13), foram consideradas duas abordagens de controle.

Primeiramente, é utilizada uma abordagem baseada compensação do termo relacionado às velocidades dos vizinhos (considerado neste caso como uma perturbação externa) por uma função saturação com zona linear. Em uma segunda abordagem, utiliza-se conceitos da passividade para a determinação do ganho derivativo  $K_{D_i}$  de modo que o termo relacionado às velocidades dos vizinhos seja dominado pela ação de controle.

#### Controle com função saturação

Neste caso, considera-se que o termo  $M_i\ddot{z}_{di}$  em (4.13) é uma perturbação a ser rejeitada pela ação de controle. Primeiro, define-se  $w_i = -M_i\ddot{z}_{di}$ , onde  $w_i \in \mathbb{R}^n$ , e assume-se que  $|w_i| \leq \bar{w}$ , onde  $\bar{w}$  é uma constante positiva.

Deste modo, define-se  $Y_i\theta_i^* = C_i\dot{z}_{di}$  e de (4.13), obtém-se

$$M_i\dot{s}_i + C_i s_i = \tau_i - Y_i\theta_i^* + w_i. \quad (4.22)$$

A lei de controle para este caso é proposta como

$$\tau_i = Y_i\theta_i - \bar{w} \text{sat}(\gamma_w s_i) - K_{D_i} s_i, \quad (4.23)$$

onde para  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{sat}(v) = [\text{sat}(v_1), \dots, \text{sat}(v_n)]^T$  é uma função saturação com zona linear e  $\gamma_w$  é uma constante positiva. Substituindo esta lei de controle em (4.22), tem-se que

$$M_i\dot{s}_i + C_i s_i = Y_i\tilde{\theta}_i - K_{D_i} s_i + w_i - \bar{w} \text{sat}(\gamma_w s_i). \quad (4.24)$$

O modelo do sistema global pode ser considerado como sendo composto dos subsistemas (4.24) de cada agente interconectado com os subsistemas dinâmicos

correspondentes a

$$w_i = M_i \ddot{z}_{di} \quad (4.25)$$

onde

$$\ddot{z}_{di} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial z_1 \partial z_i} & \frac{\partial^2 J}{\partial z_2 \partial z_i} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial z_i \partial z_i} & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial z_N \partial z_i} \end{bmatrix} \dot{z} \quad (4.26)$$

A dinâmica do agente em termos de diagrama de blocos pode ser visto na Figura 4.2.

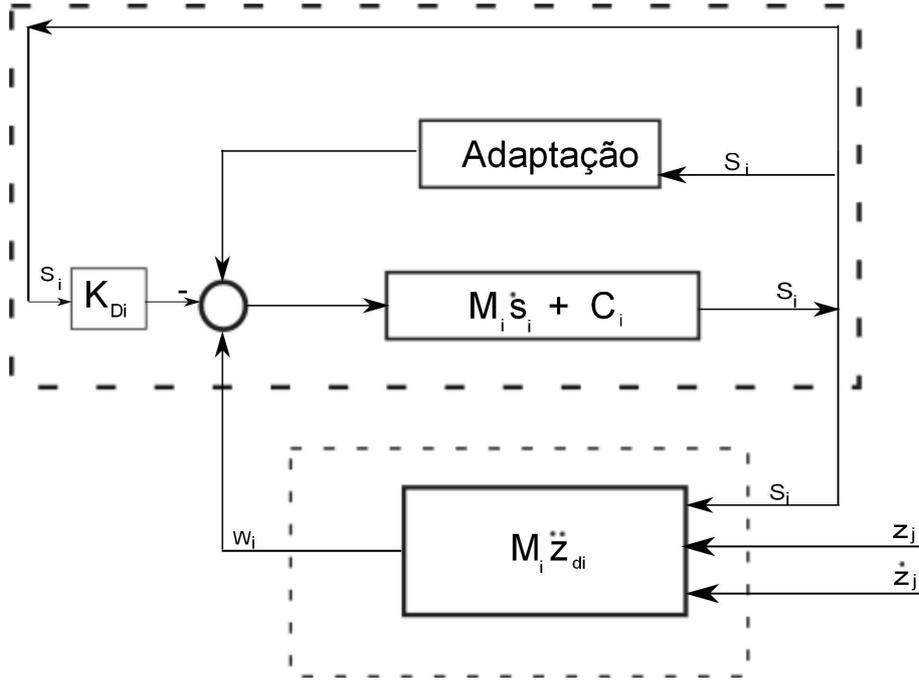


Figura 4.2: Diagrama de blocos para o  $i$ -ésimo agente

O teorema a seguir estabelece a propriedade de estabilidade semiglobal do sistema multiagente (ver também [60]).

**Teorema 2** *Considere um sistema multiagente consistindo de  $N$  agentes holonômicos completamente atuados, modelados por (4.9) com a lei de controle (4.23) e adaptação binária (4.29), (4.19). Suponha que  $w_i$  seja essencialmente limitada. Então, o seguinte é válido:*

- *o sistema multiagente alcança assintoticamente uma formação correspondente a  $\nabla_z J = \mathcal{O}(1/\gamma)$ , onde  $\gamma = \lambda_m(\Gamma_i)$  e  $\Gamma_i$  é o ganho de adaptação da adaptação binária ((4.29), (4.19)).*

- O resultado é semiglobal em relação ao parâmetro  $\bar{w}$ , i.e., o domínio de estabilidade pode ser aumentado arbitrariamente, aumentando-se  $\bar{w}$ , onde  $\bar{w}$  é uma constante positiva, tal que  $|w_i| \leq \bar{w}$ .

*Prova:* A demonstração encontra-se no Apêndice A.5. ■

No Apêndice D, é mostrado que para uma classe de funções potenciais quadráticas esta hipótese também é válida, utilizando-se de algumas ferramentas da teoria de grafos e da decomposição passiva [58].

### Abordagem via Lyapunov shaping

Em estudos posteriores, verificou-se que o termo relacionado às velocidades dos vizinhos pode ser dominado pela ação de controle derivativa, por meio de conceitos de passividade. Deste modo, não haveria necessidade de utilizar a função de saturação do tópico anterior para compensar  $M\ddot{z}_{di}$ .

Assim, definindo uma nova parametrização  $\mathcal{Y}_i\vartheta_i^* = [C_i\dot{z}_{di}]$  e de (4.13), obtém-se

$$M_i\dot{s}_i + C_i s_i = \tau_i - \mathcal{Y}_i\vartheta_i^* - M_i\ddot{z}_{di} \quad (4.27)$$

A lei de controle é

$$\tau_i = \mathcal{Y}_i\vartheta_i - K_{Di}s_i \quad (4.28)$$

onde  $K_{Di}$  é simétrica positiva definida e  $\vartheta_i$  é o novo vetor de parâmetros adaptativos. A adaptação binária é definida por

$$\dot{\vartheta}_i = -\sigma\vartheta_i - \Gamma_i Y_i^T s_i \quad (4.29)$$

Então, substituindo a lei de controle em (4.27), tem-se

$$M_i\dot{s}_i + C_i s_i = \mathcal{Y}_i\tilde{\vartheta}_i - K_{Di}s_i - M_i\ddot{z}_{di} \quad (4.30)$$

onde  $\tilde{\vartheta}_i = \vartheta_i - \vartheta_i^*$ .

#### Análise de estabilidade

Para o caso de regulação onde se tem disponíveis para o controle de cada agente a posição e velocidade próprias e somente as posições dos vizinhos, o resultado de estabilidade semiglobal é estabelecido pelo teorema seguir (ver também [62]):

**Teorema 3** *Considere um sistema multiagente consistindo de  $N$  veículos holonômicos completamente atuados, modelados por (4.9) com a lei de controle (4.28) e adaptação binária ((4.29) e (4.19)). Então, as seguintes propriedades são válidas semiglobalmente em relação a  $K_D$ , i.e., válidas para condições iniciais arbitrariamente grandes, desde que  $\sigma_m(K_D)$  seja suficientemente grande:*

- *as trajetórias do sistema tendem assintoticamente para o conjunto de equilíbrio  $\Omega_e$ , definido conforme (4.21);*
- *todos os sinais de malha fechada são uniformemente limitados e o sistema multiagente tende assintoticamente a alguma formação constante correspondente à  $\nabla_z J = 0$ .*

*Prova: ver Apêndice A.6. ■*

**Observação 7** *Os Teoremas 1 e 3 somente garantem que a formação seja alcançada assintoticamente. Note que, em geral, os mínimos locais de  $J(\tilde{z})$  são isolados. Assim, a partir das análises de Lyapunov apresentadas nos teoremas citados, conclui-se que, se o grupo começar suficientemente próximo da formação desejada, a convergência poderia ser garantida. Quando os agentes partem de posições iniciais aleatórias, a formação desejada pode não ser alcançada devido à possível ocorrência de mínimos locais de  $J(\tilde{z})$ , o que para outras abordagens de controle de formação pode significar ocorrência de colisões.*

**Observação 8** *Quando os agentes partem de posições iniciais aleatórias, a ocorrência mínimos locais podem ser minimizadas ao se fazer um rearranjo dos agentes, ou seja, a determinação das posições de cada agente na formação dos agentes são escolhidas de modo a se alcançar a formação desejada (como na maioria das abordagens de controle de formação). Nesta tese, um método simplificado é proposto para a solução do problema dos mínimos locais (ver Seção 4.7).*

## 4.4 Rastreamento de trajetória

Para o problema de rastreamento de trajetória para formações de veículos, três estratégias foram levantadas:

1. Cada agente segue seu próprio líder virtual e os agentes mantêm o padrão geométrico por meio da função potencial. Os líderes virtuais também formam o mesmo padrão geométrico desejado (Figura 4.3).

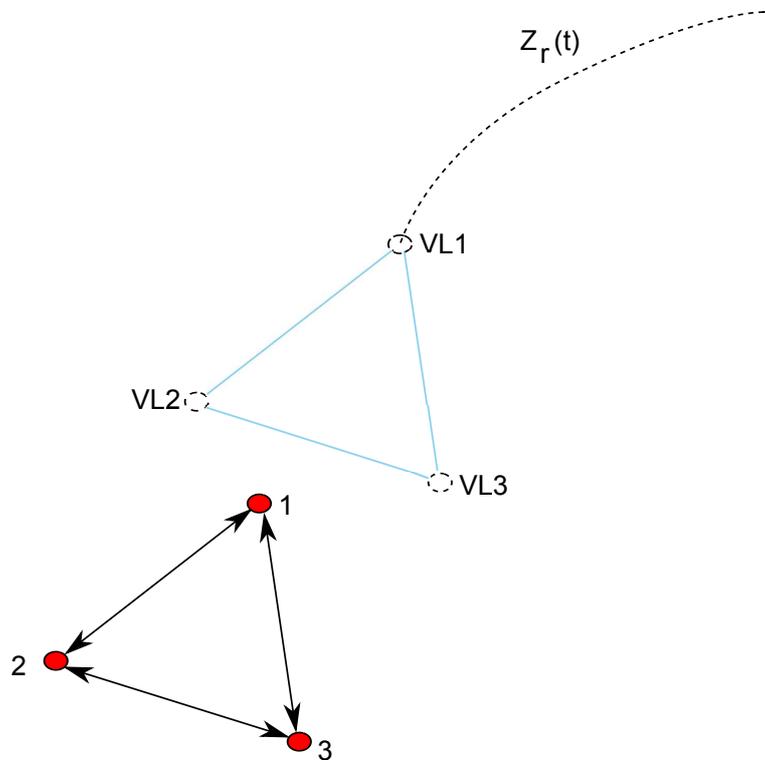


Figura 4.3: Estratégia 1.

2. Somente um agente segue seu próprio líder virtual e os agentes mantêm o padrão geométrico por meio da função potencial (Figura 4.4).
3. Cada agente segue seu próprio líder virtual e os agentes mantêm o padrão geométrico por meio da disposição espacial dos líderes virtuais. A função potencial tem somente característica de repulsão a fim de evitar colisões com outros veículos (Figura 4.5).

**Observação 9** *A estratégia 1 tem a vantagem de fornecer redundância para se obter a configuração geométrica desejada, para o caso de falha de algum sensor que forneça a posição (GPS, por exemplo). No entanto, haverá erro de formação residual, conforme será concluído pela análise apresentada mais adiante, na Subseção 4.4.1.*

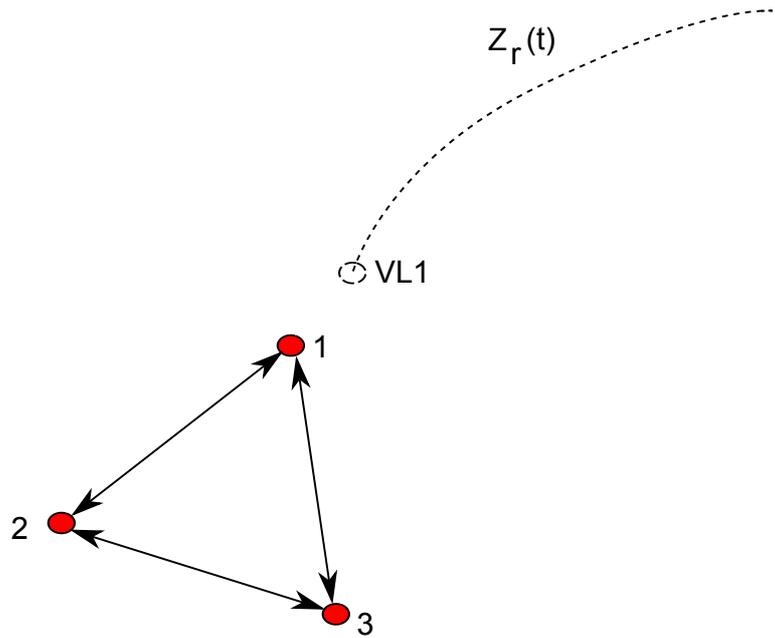


Figura 4.4: Estratègia 2.

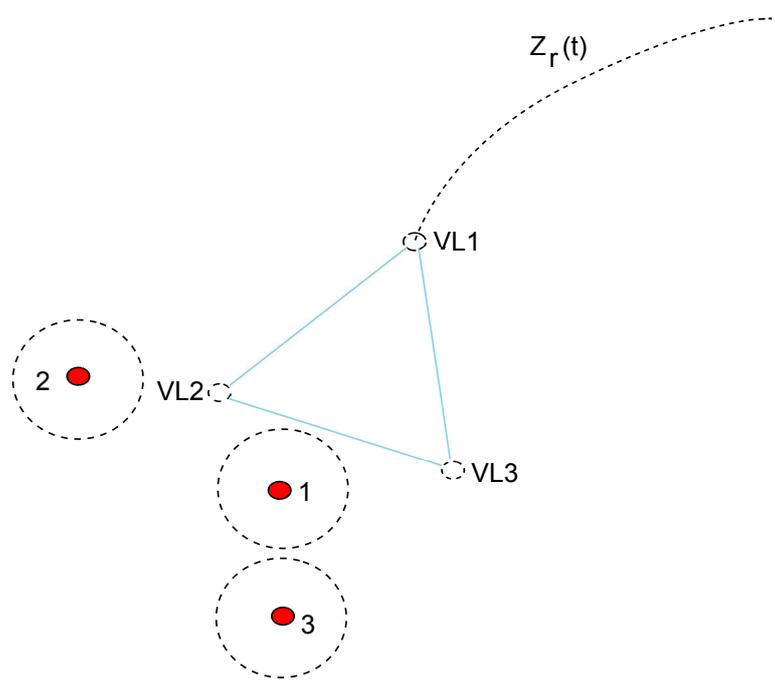


Figura 4.5: Estratègia 3.

**Observação 10** *A estratégia 2 tem a vantagem de eliminar a redundância para se alcançar o padrão geométrico desejado e simplificar a ação de controle. No entanto, haverá erro de formação não nulo. A análise de estabilidade será feita na Subseção 4.4.2.*

**Observação 11** *A estratégia 3 tem a vantagem de eliminar a redundância para se alcançar o padrão geométrico desejado e simplificar a ação de controle, além de possibilitar erro de rastreamento nulo para cada agente e, portanto, erro nulo para a manutenção da formação. A análise desta estratégia não será abordada neste trabalho, podendo ser um tópico de estudo futuro.*

#### 4.4.1 Rastreamento - estratégia 1

Nesta seção, a estratégia desenvolvida para a regulação será estendida para o caso de rastreamento de trajetória para grupos de robôs, seguindo a primeira estratégia, onde cada membro da equipe segue seu próprio líder virtual. Será considerado somente o caso onde se tem disponível para controle as informações de posição e velocidade próprias e as informações de posição dos vizinhos.

Suponha que o sistema multiagente é exigido manter uma certa formação dinâmica, i.e., quando o grupo se move em formação [33].

Para isto, define-se para cada agente o seguinte modelo cinemático

$$\dot{z}_{di} = \dot{z}_{fi} + \dot{z}_{ti} \quad (4.31)$$

onde

$$\dot{z}_{fi} = -k_{fi} \nabla_{z_i} J(\tilde{z})$$

é a parte referente à formação/manutenção do padrão geométrico (*formation*), com  $J(\tilde{z})$  definido como na Seção 2.4 e

$$\dot{z}_{ti} = \dot{z}_{ri} - k_{ri} \nabla_{z_i} J_r$$

que se refere ao controle de rastreamento (*tracking*), com  $J_r = \sum_i^N (z_i - z_{ri})^2/2$ , onde  $z_{ri} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $z_{ri} \in \mathcal{C}^2$  são especificados de acordo com a formação dinâmica desejada e a trajetória a ser rastreada. Nesta tese, é analisado o caso mais simples, que o movimento translacional da formação. Assim,  $z_{ri}$  é definido do seguinte modo

$$z_{ri} = z_{r0}(t) + d_i \quad (4.32)$$

onde  $z_{r0}(t)$  é uma trajetória de referência e  $d_i$  é um vetor constante, definido conforme o padrão geométrico desejado.

A função auxiliar de erro pode ser reescrita como

$$s_i = \dot{z}_i - \dot{z}_{fi} - \dot{z}_{ti} \quad (4.33)$$

Aplicando (4.33) e sua derivada, (4.9) torna-se

$$M_i(z_i)\dot{s}_i + C_i(\dot{z}_i, z_i)s_i = \tau_i - M_i(z_i)\ddot{z}_{ti} - C_i(\dot{z}_i, z_i)(\dot{z}_{ti} + \dot{z}_{fi}) - M_i\ddot{z}_{fi} \quad (4.34)$$

Redefinindo a parametrização linear tem-se que

$$Y_i\vartheta_i^* = -M_i(z_i)\ddot{z}_{ti} - C_i(\dot{z}_i, z_i)(\dot{z}_{ti} - \dot{z}_{fi}) \quad (4.35)$$

Escolhendo a lei de controle similar ao caso da regulação tem-se que

$$\tau_i = Y_i\vartheta_i - K_{Di}s_i \quad (4.36)$$

Aplicando a lei de controle (4.36) obtém-se

$$M_i(z_i)\dot{s}_i + C_i(\dot{z}_i, z_i)s_i = Y_i\tilde{\vartheta}_i - K_{Di}s_i - M_i\ddot{z}_{fi} \quad (4.37)$$

O teorema a seguir mostra o resultado de estabilidade semiglobal para o caso de formação dinâmica no qual cada um dos agentes segue seu próprio líder virtual.

**Teorema 4** *Considere um sistema multiagente composto por  $N$  veículos holonômicos completamente atuados, modelados por (4.9), com lei de controle adaptativa binária ((4.28), (4.18), (4.19)). Suponha que  $z_{ri}(t) \in \mathcal{C}^2$ . Então, se  $\sigma_m(K_D) > \sigma_M(M)\sigma_M(\nabla_z^2 J)$  for satisfeita e escolhendo os ganhos  $k_{ri}$  e  $k_{fi}$  de ordem  $\mathcal{O}(\gamma_r l_r)$ , onde  $l_r$  é uma constante positiva tal que  $|\dot{z}_r| < l_r$ , as seguintes propriedades se mantêm:*

- $[z_i(t) - z_{ri}(t)] \rightarrow \mathcal{O}(1/\gamma_r)$ , à medida que  $t \rightarrow \infty$ ;
- todos os sinais de malha fechada são uniformemente limitados e o sistema multiagente tende assintoticamente a uma formação correspondente a

$$\nabla_{z_i} J = \mathcal{O}(1/\gamma_r).$$

*Prova: ver Apêndice A.7* ■

## 4.4.2 Rastreamento - Estratégia 2

Neste caso, somente um agente segue seu líder virtual, por exemplo, agente 1. Então, especifica-se uma simples função desejada  $f_1(t)$ . Deste modo, a função auxiliar de erro para o agente pode ser reescrita como

$$s_1 = \dot{z}_1 - \dot{f} - \dot{z}_{d1} \quad (4.38)$$

e para os demais agentes é definida como

$$s_i = \dot{z}_i - \dot{z}_{di}, \quad i = 2, \dots, N. \quad (4.39)$$

A análise de estabilidade da estratégia 2 pode ser feita de modo bem semelhante à análise para a estratégia 1, redefinindo as seguintes matrizes

$$\bar{K} = [K_f \quad K_r E_1] \quad (4.40)$$

$$\bar{E} = [I \quad E_1] \quad (4.41)$$

$$\bar{E}_f = [E_1 \quad 0] \quad (4.42)$$

onde  $K_f$ ,  $K_r$  e  $E_1$  são definidas no Apêndice A.7

**Observação 12** *Por meio deste esquema de rastreamento com apenas um líder virtual, é possível obter uma formação dinâmica somente com posições relativas com razoável precisão. É mostrado nas simulações que o erro residual pode ser diminuído aumentando-se os ganhos  $K_{Di}$  e  $k_{fi}$ .*

## 4.5 Simulações

Para ilustrar os resultados teóricos alcançados realizaram-se dois conjuntos de simulações, considerando disponíveis para controle de cada agente posição e velocidade próprias e as posições dos vizinhos. O primeiro conjunto se refere ao caso de regulação. O segundo conjunto de simulações refere-se ao rastreamento de trajetória pelo grupo, que forma um padrão geométrico e o mantém em todo seu percurso.

### 4.5.1 Simulações - regulação

Para o caso da regulação, considera-se o controle de um grupo de seis veículos movendo-se em um plano. O objetivo do controle é fazer com que os agentes formem um padrão triangular como mostrado na Figura 4.6. A dinâmica de cada agente é descrita por

$$M_i \ddot{z}_i + D_i \dot{z}_i = \tau_i; \quad i = 1, \dots, 6 \quad (4.43)$$

onde  $z_i \in \mathbb{R}^2$  é a posição do  $i$ -ésimo veículo,  $M_i$  e  $D_i$  representam as constantes escalares de massa e de amortecimento, respectivamente. Considera-se que a topologia de informação corresponde ao grafo não direcionado mostrado na Figura 4.6.

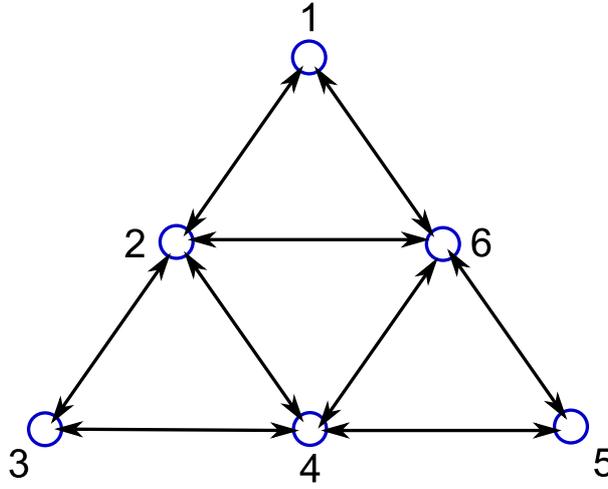


Figura 4.6: Grafo de informação para seis agentes.

Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.43), obtém-se

$$M_i \dot{s}_i + D_i s_i = \tau_i - M_i \ddot{z}_{di} - D_i \dot{z}_{di} \quad (4.44)$$

Foi usada a função potencial baseada em [32], onde  $J_{\dot{z}}$  definida por (2.8). Por simplicidade, os parâmetros nominais dos agentes são idênticos e dados por  $M_i = 20$  e  $D_i = 1$ . As velocidades iniciais foram ajustadas iguais a zero. Para a função potencial, os parâmetros foram escolhidos como  $a_{ij} = 0.1$ ,  $b_{ij} = 20$ ,  $d_{ij} = 13.28$  e, portanto,  $c_{ij} = 33.38$ ,  $\forall i, j$ .

Para o caso da regulação, o desempenho de três controladores foram comparados: um controlador com parâmetros nominais fixos ( $\tau_i = Y_i \theta_{fixo_i} - K_{D_i} \dot{s}_i$ ), um

controlador adaptativo com lei de atualização convencional, e um controlador adaptativo binário. Os parâmetros para o primeiro controlador foram escolhidos como  $\theta_{fixo_i} = [6 \ 0.3]^T$ ,  $K_{Di} = 10$  (considerando um erro de 70 por cento em relação aos valores nominais). Para o segundo e terceiro controladores,  $\theta_i(0) = [6 \ 0.3]^T$  (considerando um erro de 70 por cento em relação aos valores nominais),  $K_{Di} = 10$  e  $\Gamma_i = 2I_2$ . Em particular, para o controlador adaptativo binário,  $M_\theta = 1.2 |\theta_i^*|$ . Na Tabela 4.1, encontram-se resumidas as principais características dos três controladores considerados.

Tabela 4.1: Controladores para regulação

Controlador	Lei de Controle	Lei de adaptação	$\theta_i(0)$
Não adaptativo	$\tau_i = Y_i \theta_{fixo_i} - K_{Di} s$	–	–
Adaptativo convencional	$\tau_i = Y_i \theta_i - K_{Di} s$	$\dot{\theta}_i = -\Gamma Y_i^T s_i$	$\theta_i(0) = [6 \ .3]$
Adaptativo binário	$\tau_i = Y_i \theta_i - K_{Di} s$	$\dot{\theta}_i = \sigma \theta_i - \Gamma Y_i^T s_i$	$\theta_i(0) = [6 \ .3]$

Da Figura 4.7, pode-se ver que os tempos de acomodação para os casos adaptativos são menores para o erro de formação (definido como  $E_f = \sum(|z_i - z_j| - d_{ij})$ ) e a magnitude das funções auxiliares de erro ( $\sum |s_i|$ ). Visto que os parâmetros adaptativos ficam mantidos dentro de limites pré-estabelecidos ( $|\theta^i(t)| \leq M_\theta^i$ ), significativamente menos ação de controle é exigida para o controle adaptativo binário, conforme mostra a Figura 4.8 para o agente 3.

Em seguida, foram comparados dois controladores binários: controlador B1 (posições e velocidades dos vizinhos conhecidas) e controlador B2 (somente posições dos vizinhos conhecidas). Para este conjunto de simulações, os parâmetros do sistema e as condições iniciais foram ajustadas como no caso anterior. Neste caso  $\theta_i$  (escalar) foi também inicializado com o valor nominal  $\theta_i(0) = 1$ .

De acordo com a Figura 4.9, a curva dos erros de formação para ambos controladores (B1 e B2) estão próximas e ações de controle são de magnitude similar.

Com o objetivo de verificar o Teorema 3, dois valores para a matriz de ganho de adaptação  $K_{Di} = 5\zeta I_2$  foram testados. Foi verificado o limite inferior da desigualdade (A.57), i.e.,  $\lambda_m(K_D) = \zeta > 10$ . Para  $\zeta = 5$ , portanto violando esta desigualdade, os agentes realizaram as trajetórias mostradas na Fig. (4.10).

Na Figura 4.11, pode se ver que os agentes tendem para os valores desejados em estado estacionário. Nenhuma instabilidade foi verificada sugerindo que a desigual-

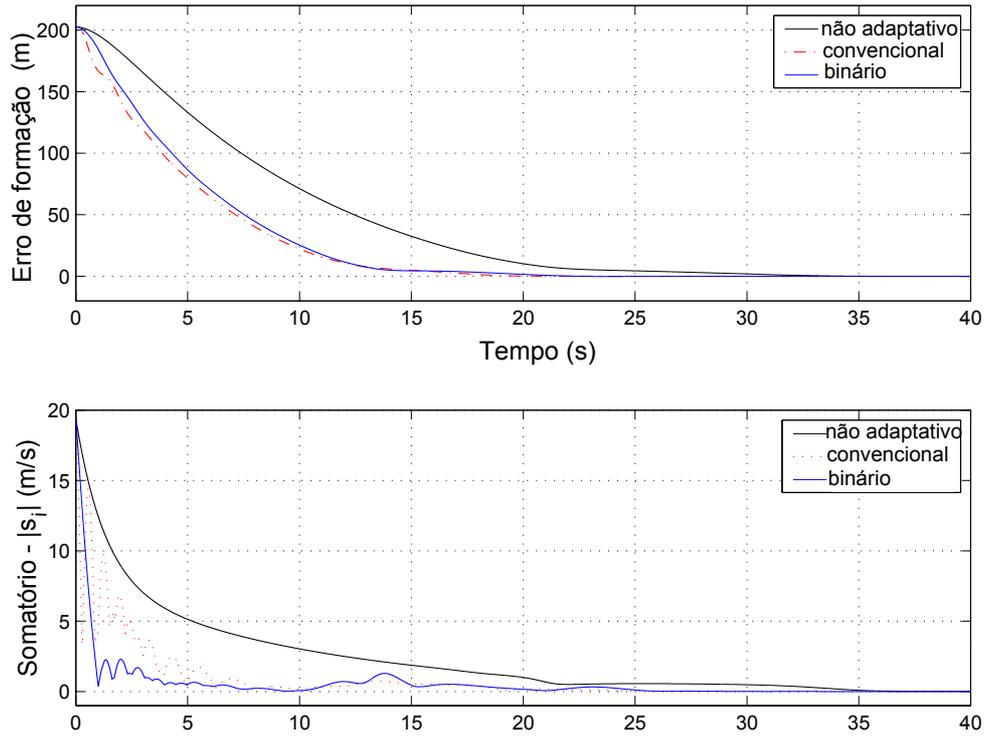


Figura 4.7: Erro de formação e  $\sum |s_i|$ .

dade (A.57) pode ser uma condição de suficiência de estabilidade. No entanto, um transitório oscilatório foi observado, podendo indicar instabilidade do sistema se  $K_D$  for muito pequeno.

Agora, aumentando  $\zeta$  para  $\zeta = 45$ , o transitório é mais rápido e muito menos oscilatório, conforme se vê pelas trajetórias dos agentes mostradas na Figura (4.13).

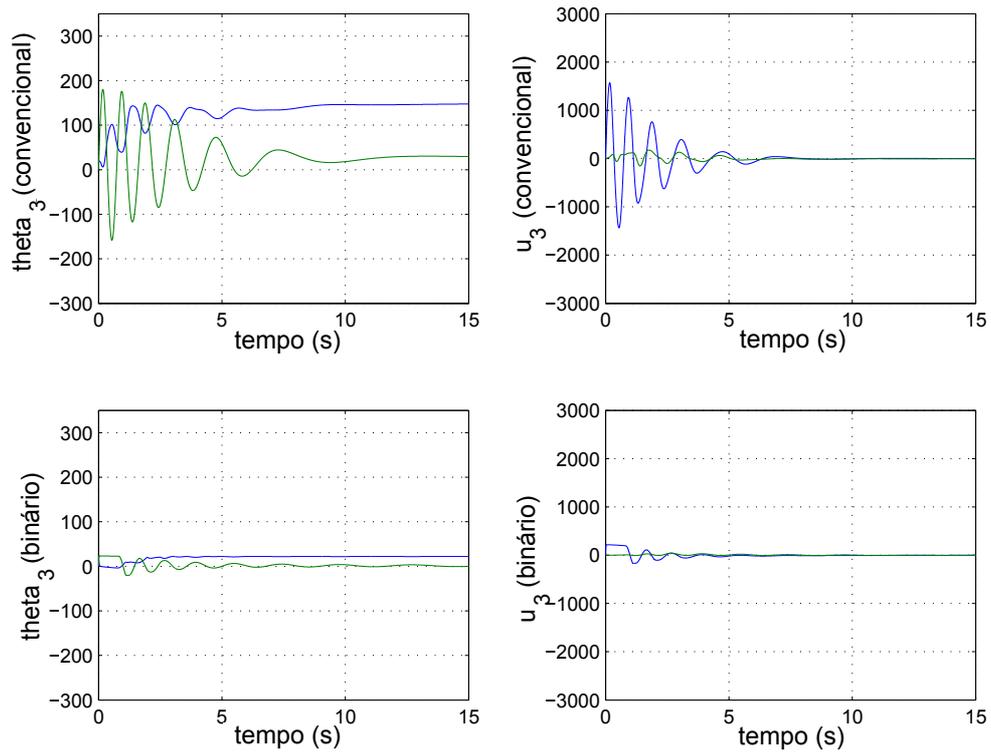


Figura 4.8:  $\theta_3(t)$  e  $u_3(t)$ .

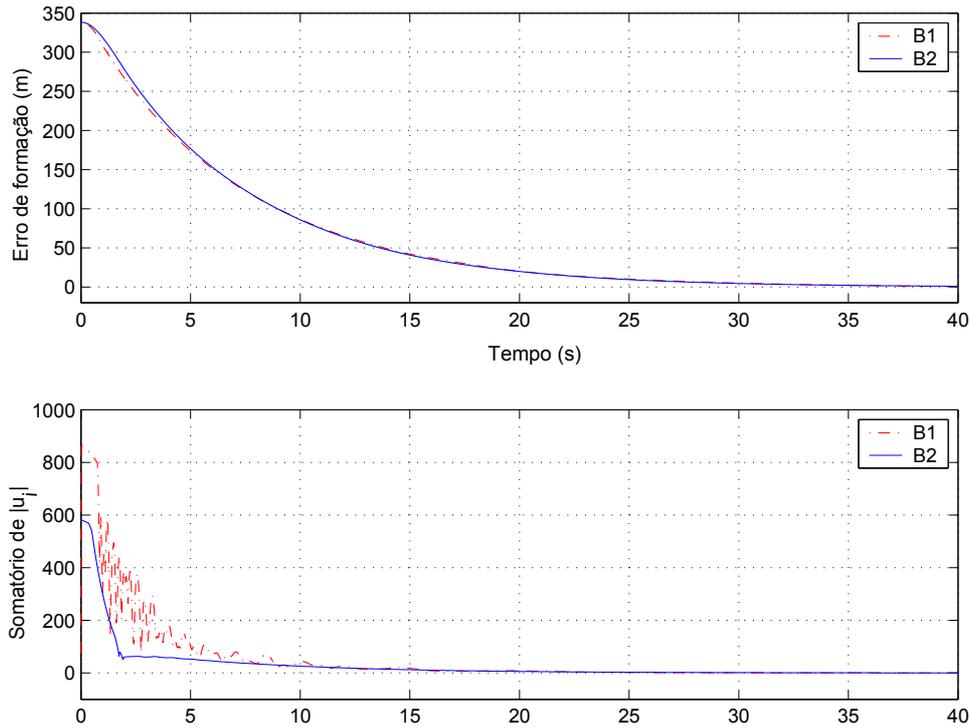


Figura 4.9: Erro de formação e  $\sum |u_i|$ .

#### 4.5.2 Simulações - rastreamento

Para mostrar os resultados da estratégia proposta aplicada ao rastreamento de trajetória pela formação, utilizou-se um grupo de robôs realizando uma trajetória circular. Os resultados foram obtidos com um grupo de três agentes por facilidade de simulações e por simplificação de trabalho computacional, mas que podem ser facilmente estendidos para um número maior de agentes.

##### Cada agente segue seu líder virtual - estratégia 1

A primeira simulação para o caso de rastreamento foi feita com esquema não adaptativo, considerando um erro de 70% na estimação dos valores do vetor  $\theta_i$ . Pela Figura 4.15 observa-se a existência de erro de estado estacionário, que diminui com o aumento do valor de  $K_{Di}$  e  $k_{fi}$ , mas que não se anula no decorrer do tempo.

Para o esquema não-adaptativo, também se observa que as distâncias entre os agentes não alcançam os valores desejados, conforme se pode ver na Figura 4.16

Fazendo a simulação com esquema adaptativo binário proposto, o erro de estado

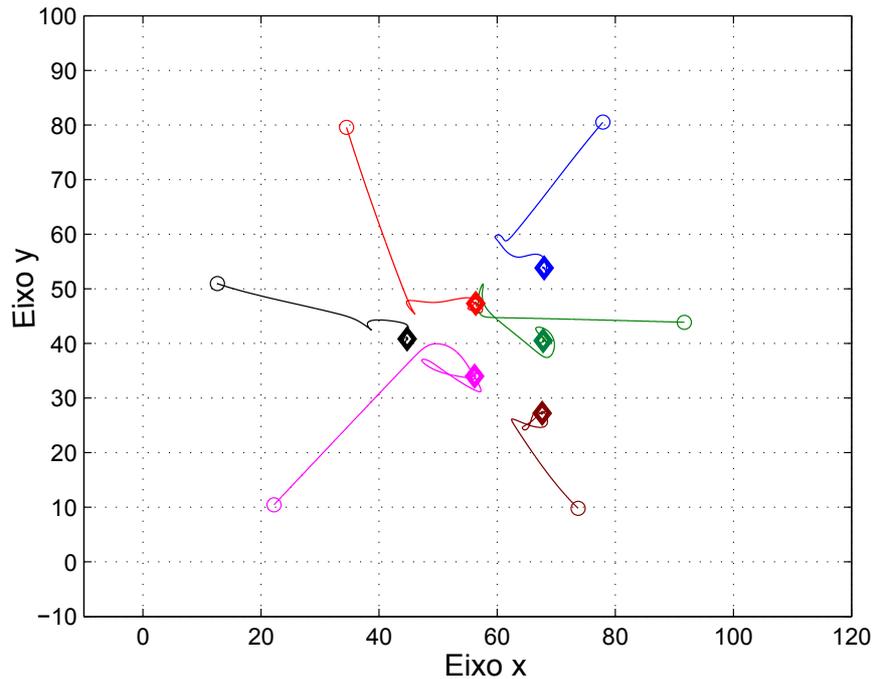


Figura 4.10: Trajetórias dos agentes formando um triângulo para  $K_D = 5I$ .

estacionário é imperceptível, conforme mostra a Figura 4.17.

As distâncias entre os agentes alcançam os valores desejados quando se usa o esquema adaptativo, conforme se pode ver na Figura 4.18.

As velocidades dos agentes tendem para a velocidade de referência, como mostra a Figura 4.19.

### Somente um agente segue seu líder virtual - estratégia 2

Foram também realizadas simulações com o mesmo grupo de três agentes para a estratégia 2 (somente um agente segue seu líder virtual).

Confirmando os resultados da análise de estabilidade feita, existe um erro de formação não nulo, como mostra a Figura 4.20. Como discutido anteriormente, este erro diminui à medida que se altera o valor do ganho  $K_f = I$  para  $K_f = 3I$ , o que pode ser visto no gráfico da Figura 4.21.

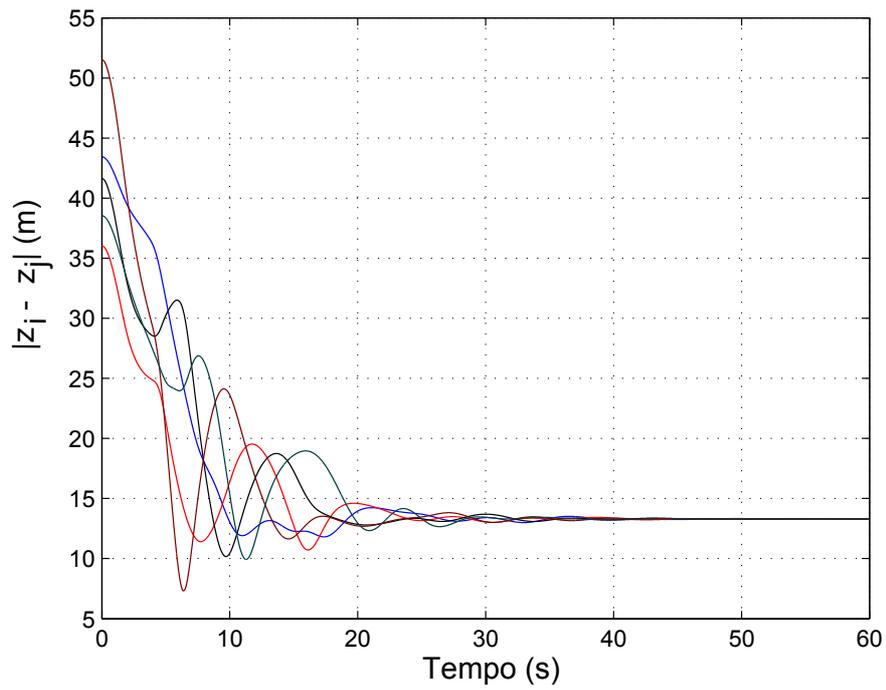


Figura 4.11: Distâncias interveiculares para  $K_D = 5I$ .

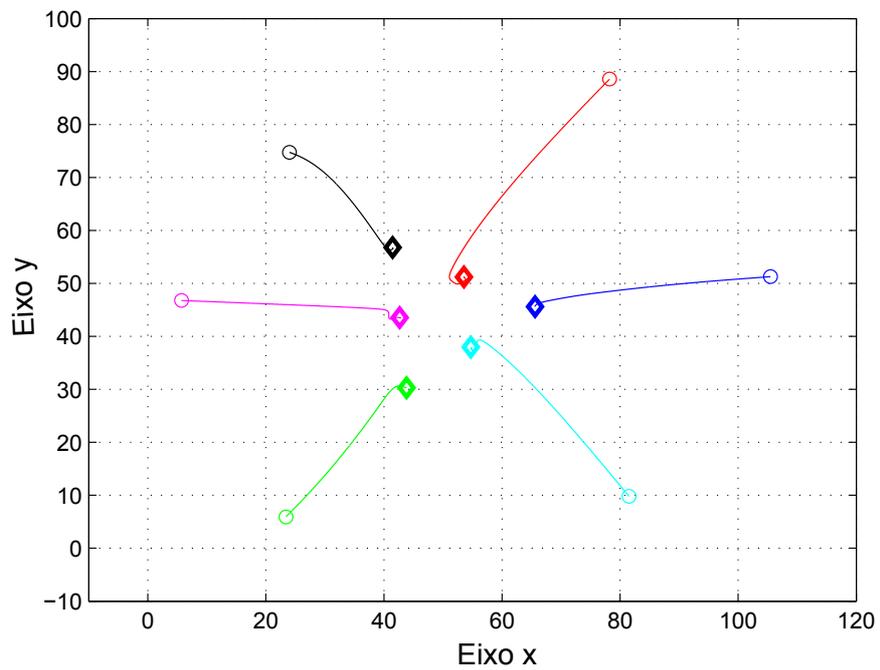


Figura 4.12: Trajetórias dos agentes formando um triângulo para  $K_D = 45I$ .

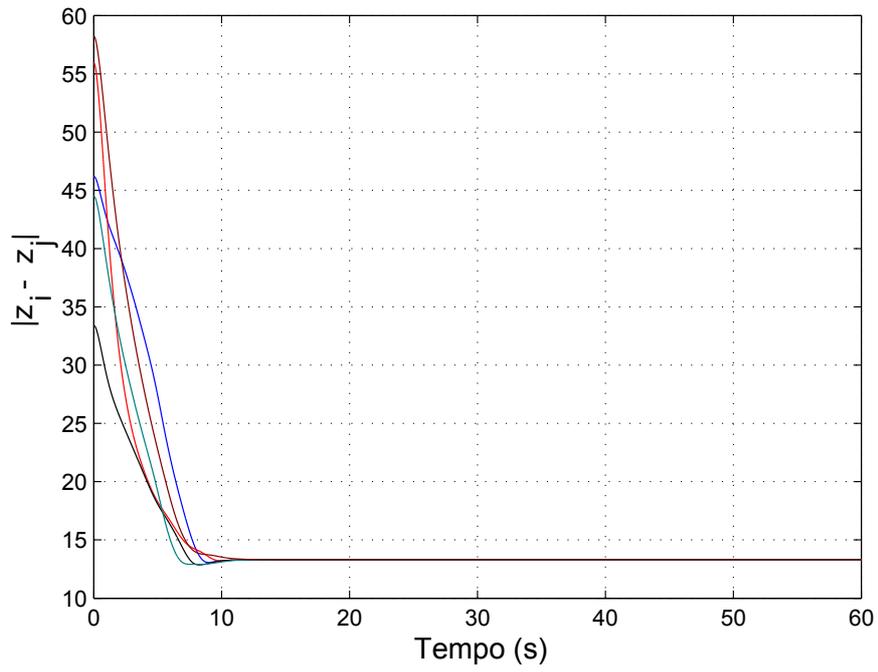


Figura 4.13: Distâncias interveiculares para  $K_D = 45I$ .

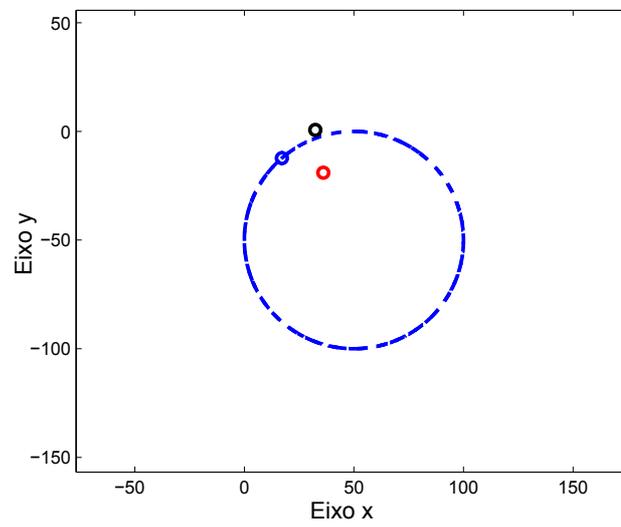


Figura 4.14: Trajetória circular.

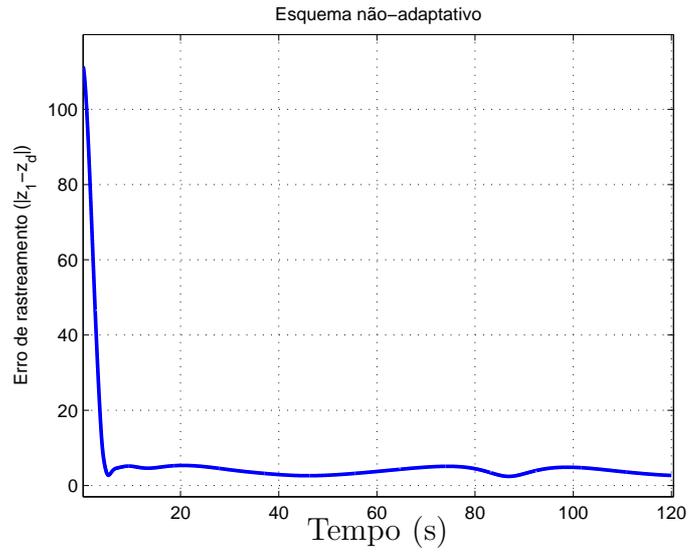


Figura 4.15: Erro de estado estacionário para o caso não-adaptativo.

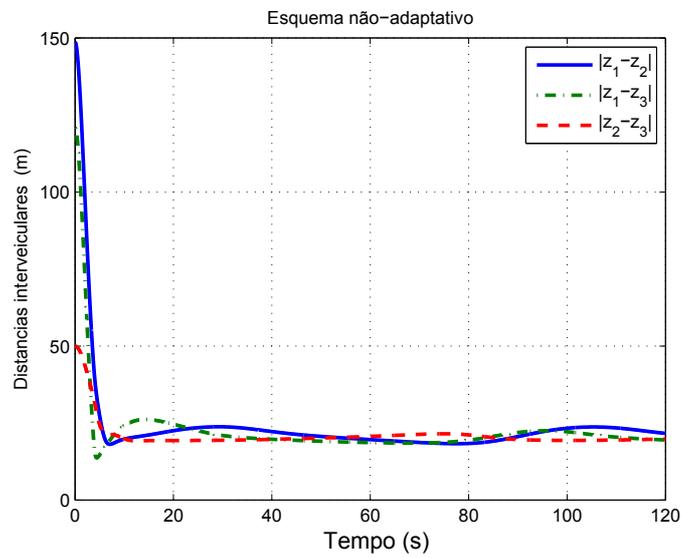


Figura 4.16: Distância interveiculares para o caso não-adaptativo

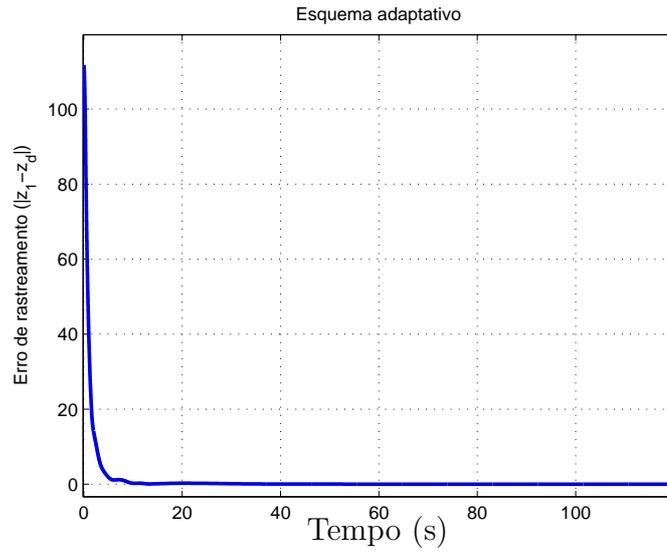


Figura 4.17: Erro de rastreamento para o caso adaptativo binário

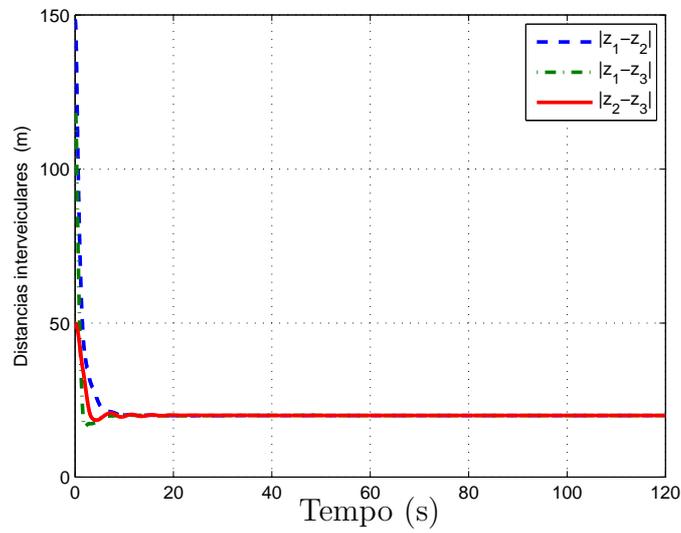


Figura 4.18: Distância interveiculares para o caso adaptativo binário

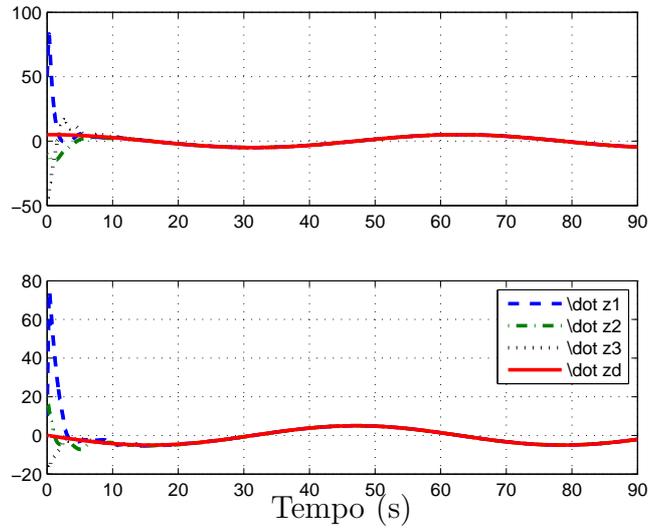


Figura 4.19: Velocidades dos agentes - caso adaptativo binário

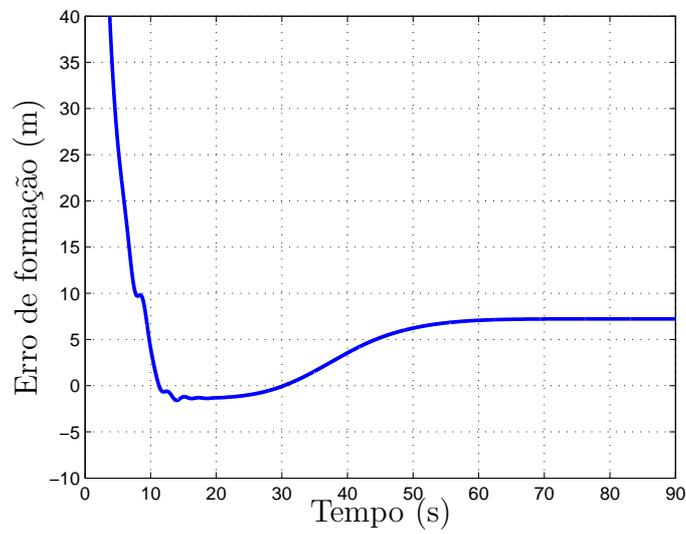


Figura 4.20: Erro de formação  $K_f = I$  - estratégia 2

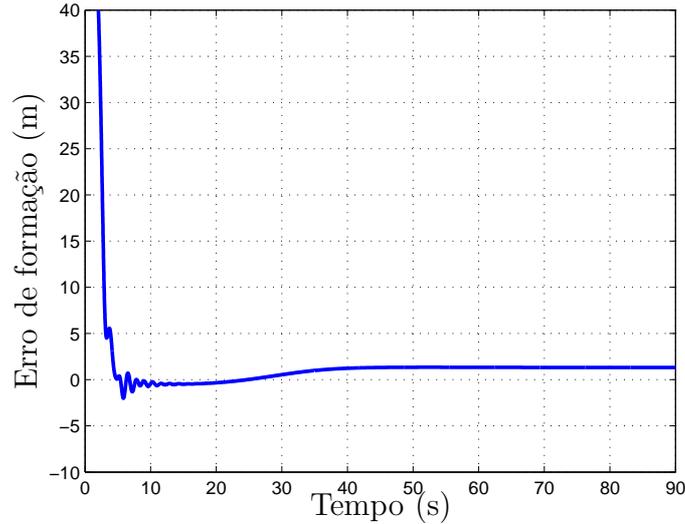


Figura 4.21: Erro de formação  $K_f = 3I$  - estratégia 2

## 4.6 O problema de evitar colisões com obstáculos e diferentes padrões de formação

Nesta tese, o problema de evitar colisões com obstáculos é abordado também com o uso de funções potenciais. A idéia básica é considerar o obstáculo como um veículo fixo, no qual somente há forças de repulsão em relação aos demais agentes móveis. Neste caso, a função potencial pode ser definida por

$$U(z) = J(\tilde{z}) + \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^P (|z_i - z_q|) \quad (4.45)$$

onde  $J(z)$  pode ser definida por (2.8) ou qualquer outra função potencial assimétrica das distâncias relativas entre os agentes  $i$  e  $j$  e  $P$  é o número de obstáculos conhecidos.

Para diferentes padrões de formação, é suficiente ajustar-se a distância interveicular  $d_{ij}$  para diferentes valores. Como exemplo, para um padrão regular hexagonal

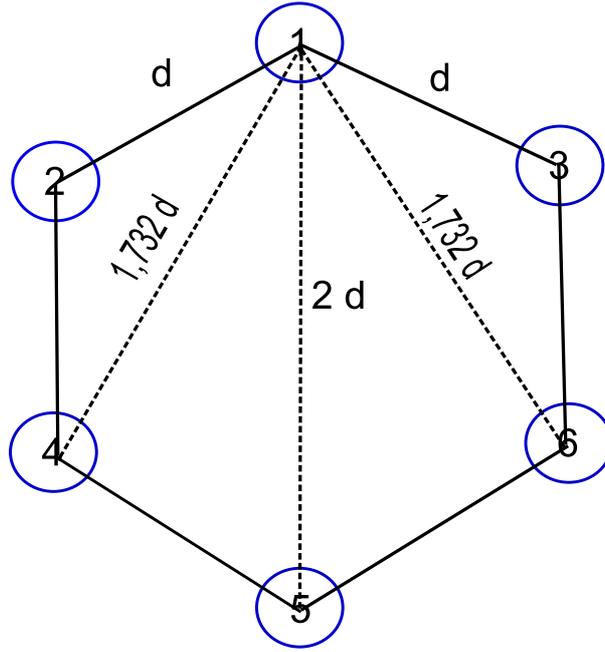


Figura 4.22: Padrão hexagonal regular.

(Figura 4.22),  $\mathbf{D}_{ij} = \{d_{ij}\}$  pode ser definido como

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 2 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 2 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 2 & 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix} * d \quad (4.46)$$

onde  $d$  é definido conforme mostra a Figura 4.22

A Figura 4.23 mostra a trajetória de veículos formando um hexágono regular e desviando de um obstáculo.

## 4.7 O problema dos mínimos locais

Como foi mencionado anteriormente, a formação desejada pode não ser alcançada devido à possível ocorrência de mínimos locais da função potencial que é um dos inconvenientes de seu emprego quando aplicado ao controle de formação, quando os

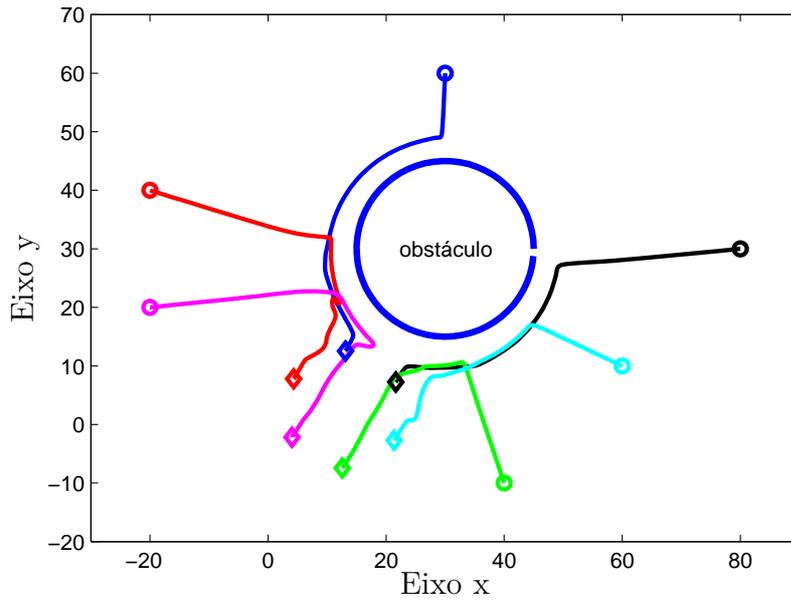


Figura 4.23: Agentes formando um hexágono regular.

agentes partem de posições iniciais aleatórias.

A Figura 4.24 mostra as trajetórias de seis agentes partindo de condições iniciais aleatórias e buscando formar um triângulo. Como pode ser observado nesta figura, a formação desejada não é alcançada, como mostra a Figura 4.26 indicando um erro de formação diferente de zero, apesar dos veículos pararem em alguma condição de equilíbrio, conforme se pode ver no gráfico de velocidades como mostra a Figura 4.25.

Um procedimento simplificado para reordenação das posições iniciais é proposto para evitar a possibilidade de mínimos locais. Basicamente, esta reordenação segue os seguintes passos:

1. Calcular o centróide  $z_c$  da formação;
2. Calcular o ângulo do vetor  $z_i - z_c$ ;
3. Reordenar os agentes segundo os ângulos correspondentes, no sentido desejado.

Este procedimento pode ser visualizado na Figura 4.27.

Após este reordenamento, pode-se ver as trajetórias dos agentes sem a ocorrência de mínimos locais na Figura 4.28.

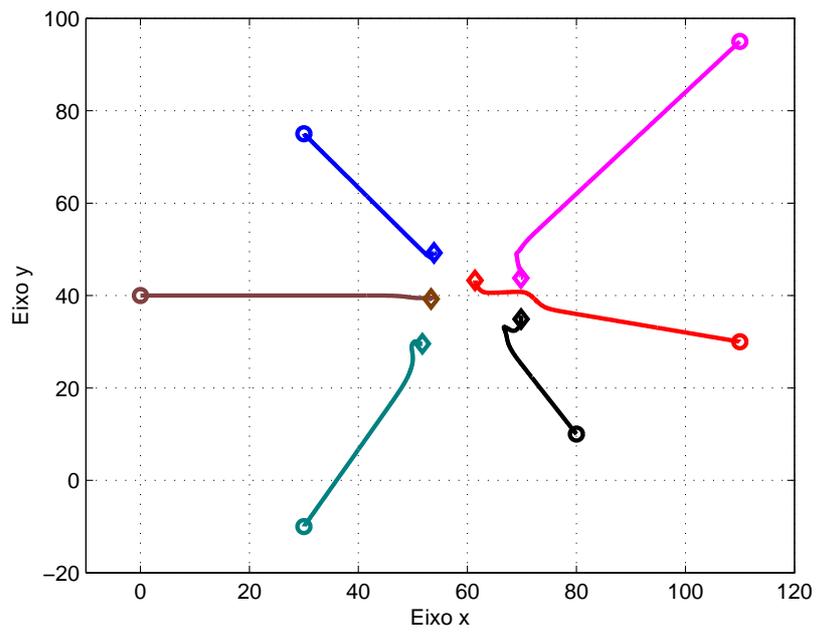


Figura 4.24: Seis agentes buscando uma formação triangular.

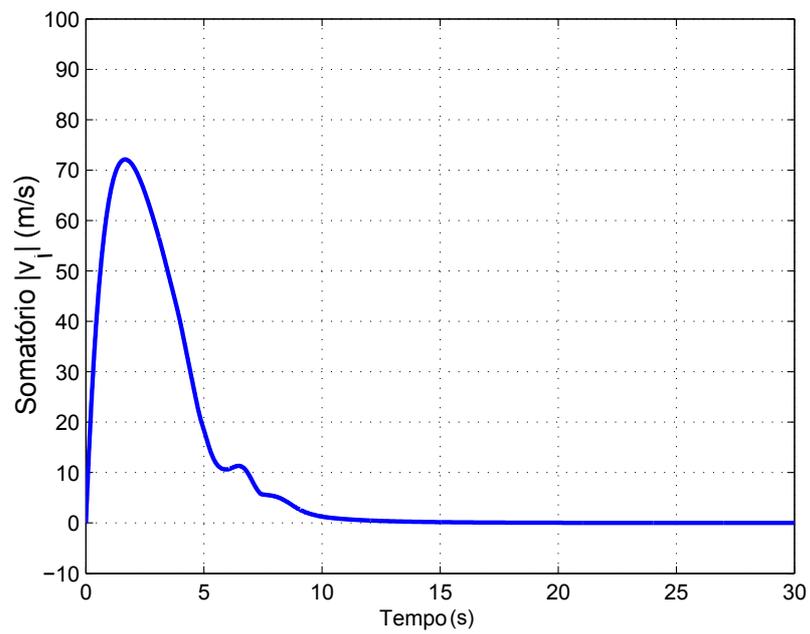


Figura 4.25: Somatório das normas de velocidades dos agentes.

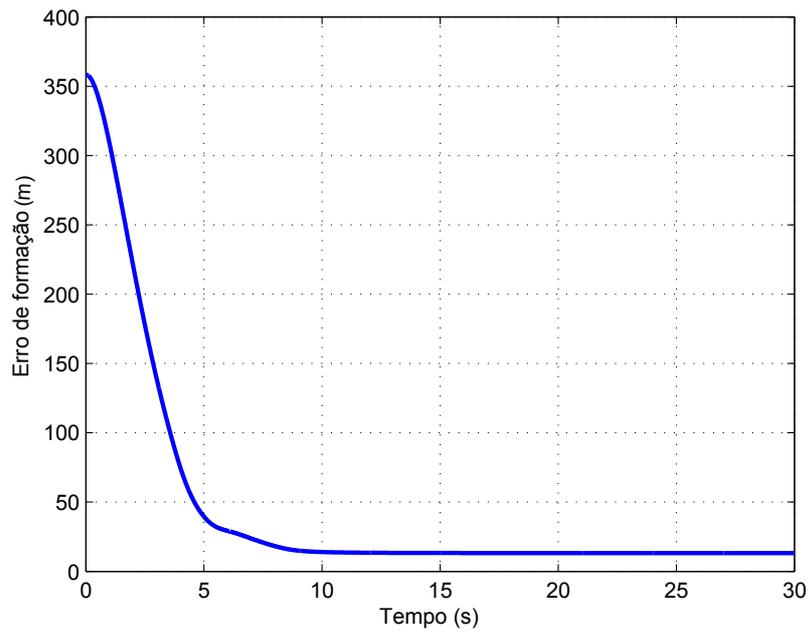


Figura 4.26: Erro de formação, sem o reordenamento de posições.

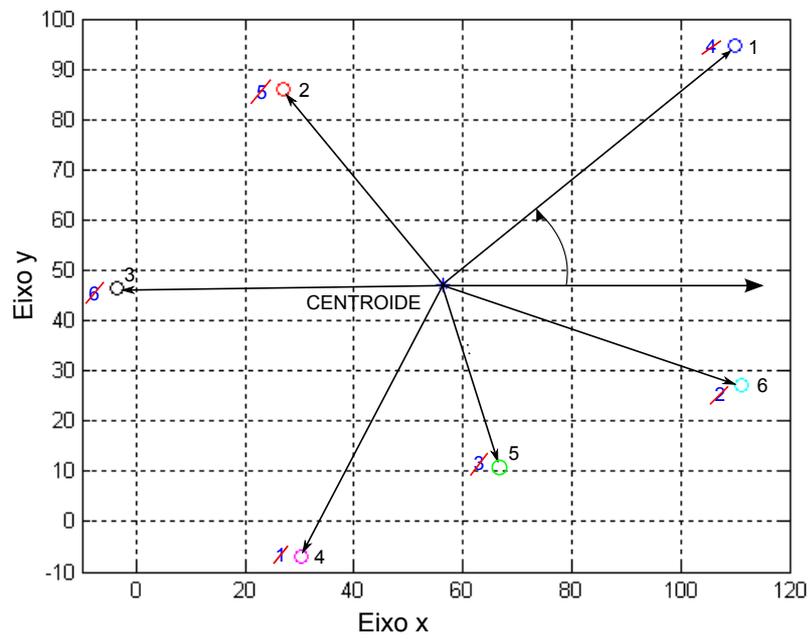


Figura 4.27: Visualização da reordenação dos agentes.

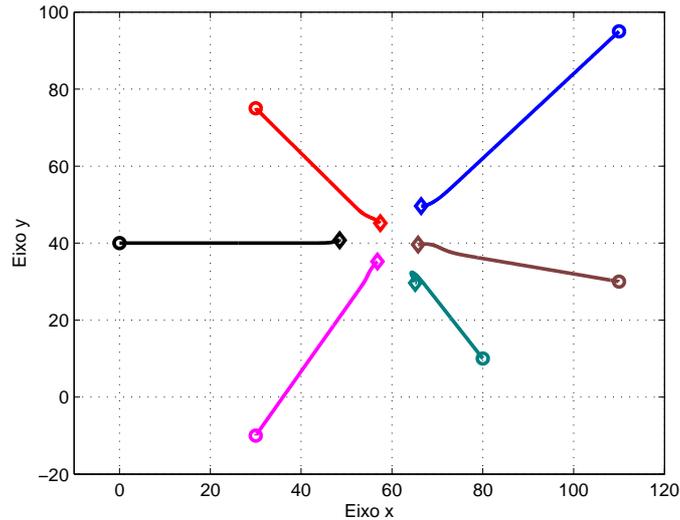


Figura 4.28: Trajetória dos agentes após reordenação.

Pelo resultado das inúmeras simulações, a possibilidade da ocorrência de mínimos locais inexistiu com a aplicação da reordenação. No entanto, este procedimento simplificado para a reordenação dos agentes necessita de estudo posterior para análise de estabilidade.

## 4.8 Conclusões

Uma estratégia baseada em seguimento de modelo cinemático foi proposta para controle de formação de agentes autônomos holonômicos. Os agentes são representados por equações diferenciais de segunda ordem (sistemas de Euler-Lagrange) e, por meio de funções auxiliares de erro, passam a ser tratados por equações diferenciais de primeira ordem. O modelo cinemático usado para gerar um padrão geométrico desejado é baseado em funções potenciais artificiais.

As incertezas do sistema são compensadas por meio de controle adaptativo binário, que garante robustez e evita o fenômeno do *chattering* tendo em vista que gera um sinal de controle contínuo (ou contínuo por partes). A versão final do controlador proposto para o caso de regulação apresenta resultados de estabilidade global somente quando se tem disponíveis para controle para cada agente as informações de posição e velocidade próprias e posições e velocidades dos vizinhos. Para o caso de regulação onde há restrições de comunicações, ou seja, quando não há

informação das velocidades dos vizinhos, o esquema proposto apresenta resultados de estabilidade apenas semiglobal.

Em seguida, a estratégia é estendida para o caso de rastreamento de trajetória pelo grupo, que mantém o padrão geométrico mesmo em movimento, apresentado resultados de estabilidade semiglobal com erro residual, que pode se ser feito arbitrariamente pequeno mediante ajuste nos ganhos do controlador. Os resultados das simulações mostram a eficácia da estratégia para controle de formação de um grupo de agentes autônomos holonômicos móveis incertos.

# Capítulo 5

## Formação de agentes não holonômicos incertos

### 5.1 Introdução

Até o momento, foi mostrado que a estratégia proposta nesta tese para controle de formação produz resultados estáveis para agentes holonômicos e completamente atuados. A ação de controle é exercida de modo que cada membro do grupo obedeça ao modelo cinemático desejado. Para o caso de manutenção de um determinado padrão geométrico o modelo cinemático é gerado a partir do gradiente descendente de uma determinada função artificial potencial. O esquema proposto, baseado em controle binário, garante robustez, diminui a exigência imposta nos atuadores e evita a ocorrência de *chattering*, pois a ação de controle gera sinais contínuos ou contínuos por partes.

Neste capítulo, a estratégia aplicada à formação de agentes holonômicos, conforme mostrada no Capítulo 4, é estendida para o caso não holonômico, onde os sistemas considerados são transformados de modo que os robôs se movam nas direções permitidas pelas restrições não holonômicas.

Neste capítulo, são desenvolvidos esquemas de controle adaptativo binário estáveis para dois casos. No primeiro caso, consideram-se disponíveis para controle de cada robô as informações de posições relativas, velocidade própria e velocidades dos vizinhos. No segundo caso, as velocidades dos vizinhos não são utilizadas para o esquema de controle. Em seguida, os resultados são estendidos para o rastreamento de trajetória. Resultados de simulações são apresentados para ilustrar o desempenho

da estratégia proposta.

## 5.2 Formulação do problema

### 5.2.1 Modelo matemático

Considere um grupo de  $N$  agentes móveis não holonômicos e modelados pelas seguintes equações

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(\dot{q}_i, q_i)\dot{q}_i = B_i(q_i)\tau_i + J_i^T(q_i)\lambda_i \quad (5.1)$$

$$J_i(q_i)\dot{q}_i = 0 \quad (5.2)$$

onde  $q_i \in \mathbb{R}^n$  é a coordenada generalizada do  $i$ -ésimo agente,  $M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  corresponde à matriz de inércia,  $C_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de Coriolis e forças centrípetas,  $\lambda_i \in \mathbb{R}^k$  é o vetor relacionado às restrições,  $J_i(q_i) \in \mathbb{R}^{k \times n}$  é a matriz associada com as restrições,  $B_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz de transformação da entrada, com  $m = n - k$ ,  $\tau_i \in \mathbb{R}^m$  indica as entradas de controle.

A classe de sistemas considerados tem as seguintes propriedades para todo  $i = 1, \dots, N$ :

- a matriz de inércia  $M_i$  satisfaz  $h_{mi} |v|^2 \leq v^T M_i(q_i)v \leq h_{Mi} |v|^2$ , com constantes positivas  $h_{mi}$  e  $h_{Mi}$ ;
- $M_i$  é diferenciável;
- a matriz  $C_i$  é escolhida baseada nos símbolos de Christoffel de modo que

$$v^T (\dot{M}_i - 2C_i)v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n; \quad (5.3)$$

- existe um vetor diferenciável  $\theta \in \mathbb{R}^n$  tal que a seguinte equação é satisfeita

$$M_i(q_i)\dot{\theta}_i + C_i(\dot{q}_i, q_i)\theta_i = Y_i(q_i, \dot{q}_i, \theta, \dot{\theta})a_i \quad (5.4)$$

onde  $a_i$  é um vetor paramétrico e  $Y_i(q_i, \dot{q}_i, \theta, \dot{\theta})$  é uma matriz cujos elementos são funções conhecidas de seus argumentos.

A exemplo do caso holonômico, dois problemas de formação foram considerados. Primeiro, leis de controle foram projetadas de modo que os  $N$  agentes converjam para um padrão geométrico desejado (REGULAÇÃO). Por último, um ou mais membros do grupo devem rastrear trajetórias de referência enquanto o padrão geométrico da formação é mantido (RASTREAMENTO).

Tendo em vista considerar as restrições não holonômicas, os problemas acima podem ser resolvidos convertendo (5.1)-(5.2) em uma forma adequada, como é bem usual [63], considerando que o vetor  $\dot{q}_i$  pode ser escrito como

$$\dot{q}_i = R_i(q_i)\nu_i \quad (5.5)$$

onde  $R_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times k}$  abrange o espaço nulo de  $J_i(q_i)$ , e  $\nu_i = [u_i \ w_i]^T$  é o vetor de velocidades, onde  $u_i$  e  $w_i$  são as velocidades linear e angular, respectivamente. Utilizando o fato que  $J_i(q_i)R_i(q_i) = 0$ , o sistema representado pelas Equações (5.1)-(5.2) pode ser expresso por

$$\bar{M}_i(q_i)\dot{\nu}_i + \bar{C}_i(\dot{q}_i, q_i)\nu_i = \bar{B}_i(q_i)\tau_i \quad (5.6)$$

onde  $\bar{C}_i(q_i) = R_i^T(q_i)M_i(q_i)\dot{R}(q_i) + R_i^T(q_i)C_i(q_i)\dot{R}_i(q_i)$ ,  $\bar{M}_i(q_i) = R_i^T(q_i)M_i(q_i)R_i(q_i)$ .  $\bar{B}_i(q_i) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  é assumida inversível e expressa por  $\bar{B}_i(q_i) = R_i^T(q_i)B_i(q_i)$ .

Como é bem conhecido, as seguintes propriedades se mantêm [38], baseadas nas propriedades de (5.1):

- a matriz  $\bar{M}_i$  satisfaz  $\bar{h}_{mi} |v|^2 \leq v^T \bar{M}_i(q_i)v \leq \bar{h}_{Mi} |v|^2$ , com constante positiva  $\bar{h}_{mi}$  e  $\bar{h}_{Mi}$ ;
- $\bar{M}_i$  is diferenciável;
- $\dot{\bar{M}}_i - 2\bar{C}_i$  é antissimétrica;
- Existe um vetor paramétrico  $\bar{\theta}$  que satisfaz

$$\bar{M}_i(q_i)\dot{\bar{\theta}}_i + \bar{C}_i(\dot{q}_i, q_i)\bar{\theta}_i = \bar{Y}_i(q_i, \dot{q}_i, \bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}})\bar{a}_i \quad (5.7)$$

onde  $\bar{a}_i$  é o vetor de parâmetro e  $\bar{Y}_i(q_i, \dot{q}_i, \bar{\theta}, \dot{\bar{\theta}})$  é uma matriz cujos elementos são funções conhecidas.

Assim, o sistema transformado representado por (5.5)-(5.6) descreve o movimento do sistema original (5.1)-(5.2).

Consideram-se robôs não holonômicos movendo-se no plano horizontal. Os robôs podem mover-se para frente e girar em torno do eixo vertical, mas não podem mover-se lateralmente nem girar em torno do eixo  $x$ . Assim,  $n = 3$ ,  $m = 2$  e  $q_i = [x_i \ y_i \ \psi_i]^T$ , onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $\psi_i$  é o ângulo de rumo do agente  $i$ . A matriz  $R_i$  é expressa por

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos(\psi_i) & 0 \\ \sin(\psi_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Deseja-se que o movimento de cada agente obedeça a um determinado modelo cinemático de primeira ordem

$$\nu_i = \nu_{di}. \quad (5.9)$$

Visto que não se pode aplicar instantaneamente as velocidades dos agentes como em um modelo cinemático, define-se a seguinte função auxiliar de erro  $s_i$  como

$$s_i = \nu_i - \nu_{di} \quad (5.10)$$

onde

$$\nu_{di} = \begin{bmatrix} u_{di} \\ w_{di} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

A derivada em relação ao tempo de (5.10) é dada por

$$\dot{s}_i = \dot{\nu}_i - \dot{\nu}_{di}. \quad (5.12)$$

Premultiplicando (5.12) por  $\bar{M}_i$  e considerando (5.6), obtém-se

$$\bar{M}_i \dot{s}_i + \bar{C}_i s_i = \bar{B}_i \tau_i - \bar{M}_i \dot{\nu}_{di} - \bar{C}_i \nu_{di}. \quad (5.13)$$

O próximo passo consiste em projetar os sinais de controle  $\tau_i$  de modo que as funções auxiliares de erro tendam a zero a despeito das incertezas do sistema. A fim de evitar chaveamento de alta frequência (também conhecido como *chattering*), não há intenção de usar lei de controle descontínua usando modo deslizante na estratégia

proposta. Somente se buscará a convergência assintótica da função auxiliar de erro  $s_i$  para zero com uma lei contínua de controle adaptativo binário. Deste modo, o movimento de cada agente obedece assintoticamente ao modelo cinemático desejado (5.5).

## 5.3 Controle adaptativo binário de sistemas multiagentes

### 5.3.1 Regulação

Nesta subseção, serão projetadas leis de controle de modo que os  $N$  agentes formem um padrão geométrico estático no espaço (formação estática), aqui denominado de Problema de Regulação. Os agentes partem de posições iniciais diferentes aleatoriamente escolhidas e com velocidades nulas ou não. A exemplo do caso holonômico, serão considerados os dois casos com relação à disponibilidade de informação das velocidades dos vizinhos.

Deseja-se que o movimento de cada agente obedeça um modelo cinemático de primeira ordem, de modo que cada agente se mova na direção do gradiente descendente de uma função potencial artificial  $(-\nabla_{z_i} J(\tilde{z}))$ , definida no Capítulo 2.

Visto que cada agente somente pode se mover no espaço de direções permitidas devido às restrições não-holonômicas e que também deve mover-se na direção do gradiente descendente, a seguinte estratégia cinemática é proposta:

- o ângulo de orientação do vetor gradiente descendente é usado como direção desejada para o do rumo do robô;
- a projeção de  $-\nabla_{z_i} J(\tilde{z})$  sobre a direção do rumo do robô é usada para controlar sua velocidade linear.

Na Figura 5.1, é mostrada a projeção do vetor gradiente descendente referido e a direção desejada.

A velocidade linear desejada  $u_{di}$  é definida como

$$u_{di} = -k_{ui}(\nabla_{z_i} J)^T \mathcal{R}_{li} \quad (5.14)$$

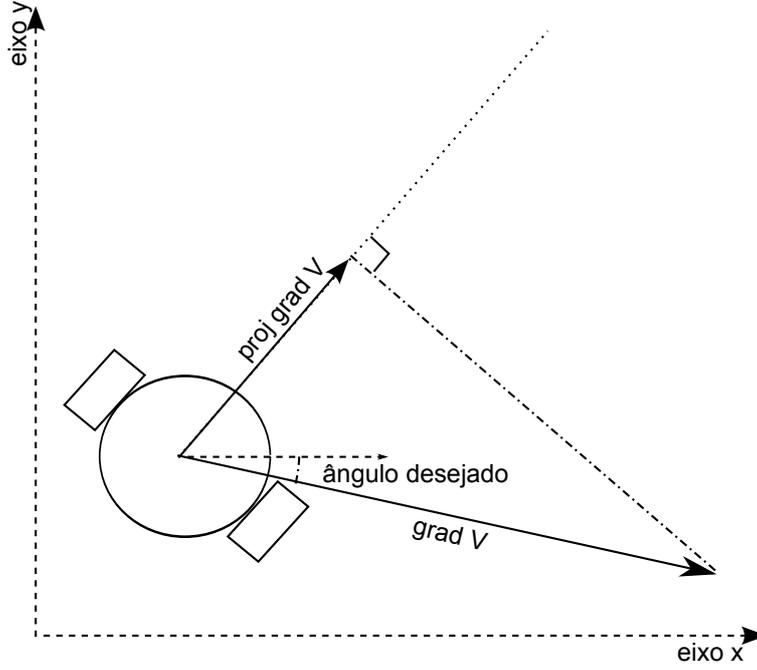


Figura 5.1: Projeção do gradiente descendente de  $V$  e ângulo desejado

onde  $k_{ui} > 0$ ,  $\mathcal{R}_{li} = [\cos(\psi_i) \quad \sin(\psi_i)]^T$ . Portanto, o termo  $-(\nabla_{z_i} J)^T \mathcal{R}_{li}$  representa a projeção escalar (ou componente escalar) do vetor  $-(\nabla_{z_i} J)$  na direção do vetor unitário  $\mathcal{R}_{li}$ .

A velocidade angular desejada  $w_{di}$  pode ser definida como

$$w_{di} = -k_{wi}(\psi_i - \psi_{di}) \quad (5.15)$$

onde  $k_{wi} > 0$ ,  $\psi_i$  é o ângulo de rumo do agente  $i$  e  $\psi_{di}$  é direção do gradiente descendente de  $V_i$ , expressa por

$$\psi_{di} = \text{atan2} \left( -\frac{\partial V}{\partial y_i}, -\frac{\partial V}{\partial x_i} \right). \quad (5.16)$$

### Caso I: velocidades e posições de vizinhos disponíveis

Neste caso, projeta-se um sistema de controle descentralizado onde cada agente tem disponível para controle as informações de velocidade e posição dos vizinhos, além da posição e velocidade próprias.

Desta maneira, considere a parametrização linear  $Y_i \theta_i^* = \bar{M}_i \dot{\nu}_{di} + \bar{C}_i \nu_{di}$ , onde

$Y_i$  é uma matriz regressora composta de funções conhecidas de  $\tilde{q}$  e  $\dot{\tilde{q}}$  e  $\theta_i^* \in \mathbb{R}^{m_i}$  é um vetor de parâmetros, onde  $m_i$  é o número de parâmetros desconhecidos para o  $i$ -ésimo agente.

Agora, (5.13) pode ser escrita como

$$\bar{M}_i \dot{s}_i + \bar{C}_i s_i = \bar{B}_i \tau_i - Y_i \theta_i^*. \quad (5.17)$$

Para atingir o objetivo, a seguinte lei de controle é proposta

$$\tau_i = \bar{B}_i^{-1}(Y_i \theta_i - K_{D_i} s_i) \quad (5.18)$$

onde  $K_{D_i}$  é simétrica positiva definida e  $\theta_i = [\theta_1 \dots \theta_{m_i}]^T$  é um vetor de parâmetros adaptativos. Introduzindo o erro de parâmetro  $\tilde{\theta}_i = \theta_i - \theta_i^*$ , pode-se escrever (5.17) como

$$\bar{M}_i \dot{s}_i + \bar{C}_i s_i = Y_i \tilde{\theta}_i - K_{D_i} s_i. \quad (5.19)$$

Baseado no controle adaptativo binário, como introduzido em [46] para projetar uma lei de controle adaptativo robusto por modelo de referência para plantas lineares (B-MRAC), a seguinte lei de adaptação é proposta

$$\dot{\theta}_i = -\sigma \theta_i - \Gamma_i Y_i^T s_i. \quad (5.20)$$

O fator  $\sigma$ , também chamado de fator de projeção, é definido por:

$$\sigma = \begin{cases} 0 & ; \text{se } |\theta_i| < M_{\theta_i} \text{ ou } \sigma_{eq} < 0 \\ \sigma_{eq} & ; \text{se } |\theta_i| \geq M_{\theta_i} \text{ ou } \sigma_{eq} \geq 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

onde  $\sigma_{eq} = -\theta_i^T \Gamma_i Y_i^T s_i / |\theta_i|^2$  e  $M_{\theta_i} (> |\theta_i^*|)$  é uma constante.

As propriedades da adaptação binária mostradas para o caso holonômico (Capítulo 4) também se mantêm para o caso não-holonômico e estão resumidamente transcritas a seguir:

- O vetor de parâmetros é limitado em norma por uma constante, ou seja,  $|\theta_i| \leq M_\theta$  para alguma constante positiva  $M_\theta$
- $|s(t)|$  tende exponencialmente rápido para um valor residual de ordem de  $\mathcal{O}(1/(\sigma_m(\Gamma))^{-1/2})$

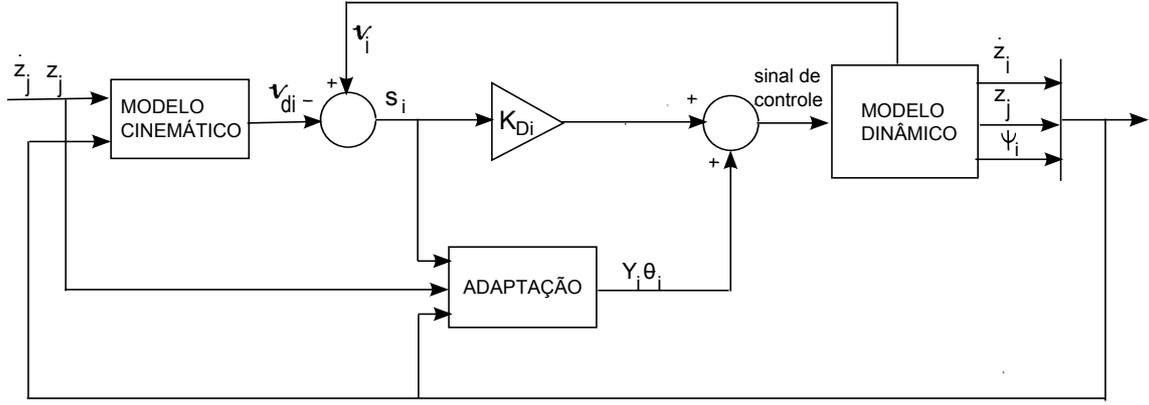


Figura 5.2: Esquema de controle de formação de agentes não-holonômicos - regulação

A Figura 5.2 ilustra o esquema de controle de formação para um agente não-holonômico. Este esquema é bastante similar ao do caso holonômico (Figura 4.1), diferindo principalmente com relação ao vetor de velocidades e à inclusão da orientação do robô.

Para a análise de estabilidade, considere o conjunto invariante de equilíbrio

$$\Omega_e = \{ \eta : \nu = 0; \nabla_z J = 0; \dot{\theta}_i = 0 \} \quad (5.22)$$

onde  $\eta = [q^T, \nu^T, \theta^T]^T$  é o vetor de estado.

O teorema a seguir estabelece a propriedade de estabilidade global para o caso de regulação para agentes não holonômicos em um cenário de comunicação irrestrita.

**Teorema 5** *Considere um sistema multiagente consistindo de  $N$  veículos não holonômicos modelados por (5.1), com lei de controle adaptativa binária ((5.18), (5.20) e (5.21)). Iniciando de algum conjunto compacto no espaço de estado dado por  $V_A(s, \theta, \tilde{z}, \psi) \leq V_{A0}$ , com  $V_A$  definido como no Apêndice A.8, com constante  $V_{A0} > 0$  grande o suficiente para obedecer a condição sobre  $\theta(0)$ , então as seguintes propriedades são válidas::*

- *as trajetórias do sistema tendem assintoticamente para o conjunto de equilíbrio  $\Omega_e$ , definido por (5.22);*
- *todos os sinais de malha fechada são uniformemente limitados e o sistema multiagente tende assintoticamente para uma formação constante;*

*Prova:* ver Apêndice A.8. ■

## Caso II: informação das velocidades dos vizinhos não disponível

Agora, considera-se um cenário de comunicação restrita onde as informações de velocidades dos vizinhos não estão disponíveis para cada agente para efeito de controle.

Neste caso, como as informações de velocidades dos vizinhos são necessárias para o cálculo do termo  $\bar{M}_i \dot{\nu}_{di}$ , redefine-se a nova parametrização  $\mathcal{Y}_i \vartheta_i^* = C_i \nu_{di}$  e deste modo (5.13) pode ser reescrita como

$$\bar{M}_i \dot{s}_i + \bar{C}_i s_i = \bar{B}_i \tau_i - \mathcal{Y}_i \vartheta_i^* - \bar{M}_i \dot{\nu}_{di} \quad (5.23)$$

A lei de controle é

$$\tau_i = \bar{B}_i^{-1} [\mathcal{Y}_i \vartheta_i - K_{D_i} s_i] \quad (5.24)$$

onde  $K_{D_i}$  é simétrica positiva definida e  $\vartheta_i$  é o novo vetor de parâmetros adaptativos. Seja  $\tilde{\vartheta}_i = \vartheta_i - \vartheta_i^*$ . Então, substituindo a lei de controle em (5.23), tem-se

$$\bar{M}_i \dot{s}_i + \bar{C}_i s_i = \mathcal{Y}_i \tilde{\vartheta}_i - K_{D_i} s_i - \bar{M}_i \dot{\nu}_{di} \quad (5.25)$$

O seguinte teorema estabelece a propriedade de estabilidade semiglobal para o caso de regulação, no qual somente se tem disponível para controle para cada agente as informações de posição e velocidade própria e das posições dos vizinhos (ver também [64]).

**Teorema 6** *Considere um sistema multiagente consistindo de  $N$  veículos não holonômicos modelados por (5.1), com lei de controle adaptativa binária ((5.18), (5.20) e (5.21)). Então, iniciando de algum conjunto compacto do espaço de estado dado por  $V_B(s, \theta, \tilde{z}, \psi) \leq V_{B0}$ , com  $V_B$  definido como no Apêndice A.9, com constante  $V_{B0} > 0$  grande o suficiente para obedecer a condição sobre  $\theta(0)$ , as seguintes propriedades são válidas::*

- *as trajetórias do sistema tendem assintoticamente para o conjunto de equilíbrio  $\Omega_e$ , definido por (5.22);*
- *todos os sinais de malha fechada são uniformemente limitados e o sistema multiagente tende assintoticamente para uma formação constante correspondente a  $\nabla_z J = 0$*

*Prova: ver Apêndice A.9.* ■

## 5.4 Controle formação - rastreamento de trajetória

Nesta seção, deseja-se que o sistema multiagente mantenha uma formação dinâmica, isto é, quando o grupo se move em formação. [33]. Neste problema, é projetado um controlador adaptativo binário para cada agente, de modo que  $z_i - z_j \rightarrow d_{ij}$  e  $q_i(t) - q_{ri}(t) \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ , onde  $q_{ri}(t) = [x_{ri}(t) \ y_{ri}(t) \ \psi_{ri}(t)]^T$  é a coordenada generalizada do  $i$ -ésimo líder virtual, definida pela seguinte expressão

$$q_{ri}(t) = q_{r0}(t) + R_o \delta q_{ri} \quad (5.26)$$

onde  $q_{r0} = [x_{r0}(t) \ y_{r0}(t) \ \psi_{r0}(t)]^T$  é a coordenada generalizada de uma trajetória de referência, definida pela seguinte cinemática

$$\dot{q}_{r0} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{r0}) & 0 \\ \sin(\psi_{r0}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \nu_{r0} \quad (5.27)$$

onde  $\nu_{r0} = [u_{r0} \ w_{r0}]^T$  é vetor de velocidades composto por  $u_{r0}$  e  $w_{r0}$ , que são as velocidades linear e angular de referência, respectivamente.  $R_o$  é a matriz constante que define a desejada orientação da formação  $\psi_o$ , expressa por

$$R_o = \begin{bmatrix} \cos(\psi_o) & -\sin(\psi_o) & 0 \\ \sin(\psi_o) & \cos(\psi_o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

O vetor constante  $\delta q_{ri} = [\delta x_{ri} \ \delta y_{ri} \ 0]^T$  é definido de acordo com o padrão geométrico desejado. Na Figura 5.3, pode-se ver uma formação com três veículos, onde  $\delta q_{r1} = [0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\delta q_{r3} = [-dx \ -dy \ 0]^T$  e  $\delta q_{r2} = [-dx \ dy \ 0]^T$

A solução proposta para o problema da formação dinâmica foi adicionar ao esquema de controle para a regulação o esquema de rastreamento de trajetória de veículos não holonômicos, como estabelecido em [63], estendido nesta tese para diversos veículos, como mostrado em [64].

Assim, redefine-se a função auxiliar de erro para cada agente, modificando  $\nu_{di}$  como se segue

$$\nu_{di} = \nu_{fi} + \nu_{ti} \quad (5.29)$$

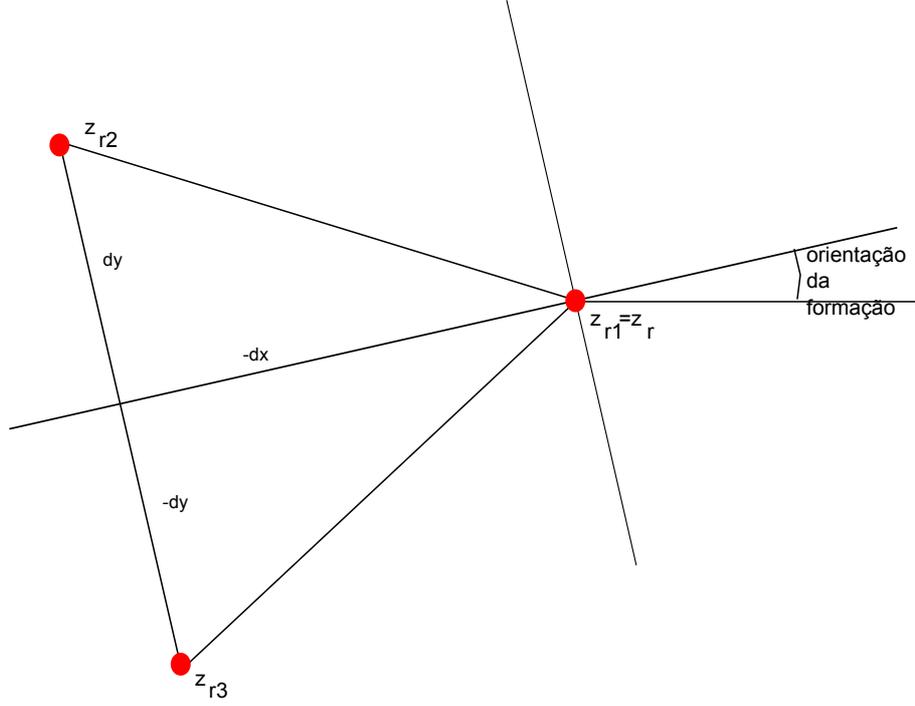


Figura 5.3: Formação triangular de agentes autônomos

onde  $\nu_{fi} = [u_{fi} \ w_{fi}]^T$  refere-se ao padrão geométrico da formação e  $\nu_{ti} = [u_{ti} \ w_{ti}]^T$  refere-se ao rastreamento de trajetória com

$$\begin{aligned} u_{fi} &= -k_{ui}(\nabla_{z_i} J_i(z_{ij}))^T \mathcal{R}_{li} \\ u_{ti} &= k_{1i}(z_{ri} - z_i)^T \mathcal{R}_{li} + u_{ri} \cos(\psi_{ri} - \psi_i) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} w_{fi} &= -k_{wi}(\psi_i - \psi_{di}) \\ w_{ti} &= u_{ri} k_{2i}(z_{ri} - z_i)^T \mathcal{R}_{ni} + k_{3i} \sin(\psi_{ri} - \psi_i) + w_{ri} \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde  $\mathcal{R}_{li} = [\cos(\psi_i) \ \sin(\psi_i)]^T$ ,  $\mathcal{R}_{ni} = [-\sin(\psi_i) \ \cos(\psi_i)]^T$ ,  $k_{li}$ ,  $k_{2i}$  e  $k_{3i}$  são constantes positivas.

Nesta tese, será analisado somente o caso no qual se tem disponíveis para controle de cada agente as informações de posição e velocidade próprias e as posições e velocidades dos vizinhos.

Assim, redefine-se a parametrização linear como se segue

$$Y_i \vartheta_i^* = \bar{M} \dot{\nu}_{di} + \bar{C}_i \nu_{di} \quad (5.32)$$

(onde as velocidades dos vizinhos são exigidas). Então, (5.13) pode ser reescrita como

$$\bar{M}_i \dot{s}_i + \bar{C}_i s_i = \bar{B}_i \tau_i - Y_i \vartheta_i^* \quad (5.33)$$

A lei de controle é definida como

$$\tau_i = \bar{B}_i^{-1} (Y_i \vartheta_i - K_{D_i} s_i) \quad (5.34)$$

Então, obtém-se as seguintes equações em malha fechada

$$\bar{M}_i \dot{s}_i + \bar{C}_i s_i = Y_i \tilde{\vartheta}_i - K_{D_i} s_i \quad (5.35)$$

O seguinte teorema estabelece o resultado de estabilidade global para o caso de rastreamento de trajetória para formação (ver também [64]).

**Teorema 7** *Considere um sistema multiagente consistindo de  $N$  veículos não holonômicos modelados por (5.5)-(5.6), com a lei de controle adaptativa binária ((5.20), (5.21) e (5.34)). Suponha que  $q_{ri}(t) \in \mathcal{C}^2$ . Então, escolhendo os ganhos  $k_{ui}, k_{wi}, k_{1i}, k_{2i}, k_{3i}$  de ordem  $\mathcal{O}(\gamma_r l_r)$ , sendo  $\gamma_r$  uma constante suficientemente alta e  $l_r$  um limitante superior das velocidades das trajetórias de referência que pode ser expresso por  $|\nu_r| < l_r$ , o seguinte é válido:*

- $q_i(t) - q_{ri}(t) \rightarrow \mathcal{O}(1/\gamma_r)$ , à medida que  $t \rightarrow \infty$ ;
- todos os sinais de malha fechada são uniformemente limitados e o sistema multiagente tende assintoticamente para alguma formação correspondente a  $\nabla_{z_i} J = \mathcal{O}(1/\gamma_r)$ .

**Prova:** veja Apêndice A.10.

## 5.5 Simulações

### 5.5.1 Exemplo ilustrativo

Nesta seção, resultados de simulação são apresentados para ilustrar o desempenho do projeto de controle cooperativo proposto. Considera-se um sistema multiagente composto de seis veículos movendo-se no plano para alcançar uma formação triangular conforme mostra a Figura 5.4.

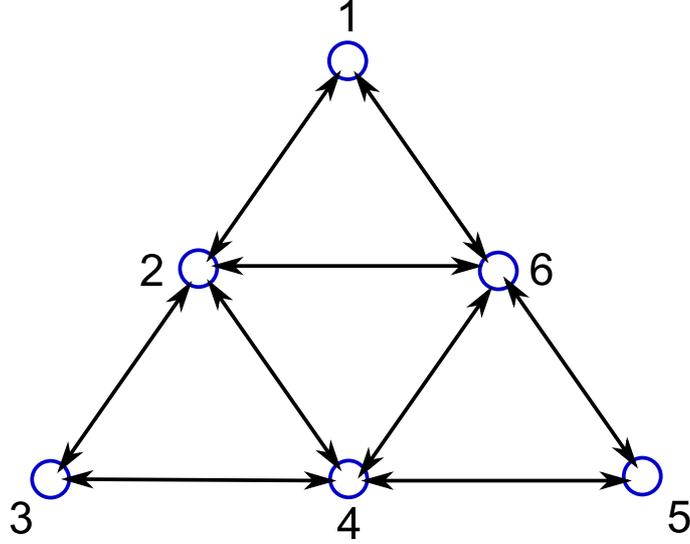


Figura 5.4: Formação triangular para seis agentes

A dinâmica de cada agente pode ser descrita pelas Equações (5.5) e (5.6) como

$$\bar{M}_{Ri} \dot{\nu}_i + \bar{C}_{Ri}(\dot{q}_i) \nu_i = \tau_i \quad (5.36)$$

$$\dot{q}_i = R_i(q_i) \nu_i \quad (5.37)$$

onde  $\nu_i = [\nu_{i1}, \nu_{i2}]^T$  com  $\nu_{i1}$  e  $\nu_{i2}$  sendo as velocidades angulares das rodas,  $q_i = [x_i \ y_i \ \psi_i]^T$  é a coordenada generalizada,  $z_i = [x_i \ y_i]^T$  é a posição do centro de gravidade do veículo  $i$  no plano,  $\tau_i = [\tau_{i1}, \tau_{i2}]^T$ , com  $\tau_{i1}$  e  $\tau_{i2}$  os torques de controle aplicados nas rodas do robô,  $\bar{M}_{Ri} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é a matriz constante de inércia definida como

$$\bar{M}_{Ri} = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$\bar{C}_{Ri}(\dot{q}_i) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é a matriz de Coriolis definida como

$$\bar{C}_{Ri} = \begin{bmatrix} 0 & c_i \dot{\psi} \\ -c_i \dot{\psi} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

e

$$R_i(q_i) = \frac{r_i}{2} \begin{bmatrix} \cos(\psi_i) & \sin(\psi_i) \\ \sin(\psi_i) & -\cos(\psi_i) \\ b_i^{-1} & -b_i^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

onde  $b_i$ ,  $c_i$  e  $r_i$  são parâmetros do robô. Os valores nominais são os seguintes:  $m_{11} = 22.02$ ,  $m_{12} = -0,86$ ,  $c_i = 7,94$ ,  $b_i = 0,75$  e  $r_i = 1,15$ .

Utilizou-se a função potencial baseada em [32] e que tem a forma da Equação (2.4), onde  $V_{ij}$  é definida pela fórmula

$$V_{ij}(z_{ij}) = \left[ \frac{a_{ij}}{2} |z_{ij}|^2 + \frac{b_{ij}c_{ij}}{2} \exp\left(-\frac{|z_{ij}|^2}{c_{ij}}\right) \right]$$

onde  $a_{ij}$  é a constante de atração e  $b_{ij}$  é a constante de repulsão. O parâmetro  $c_{ij}$  é definido por

$$c_{ij} = \frac{d_{ij}^2}{\log\left(\frac{b_{ij}}{a_{ij}}\right)}. \quad (5.41)$$

A constante  $d_{ij}$  especifica a distância desejada entre os veículos e é definida para a formação desejada mostrada na Figura 5.4, conforme a matriz  $D_{ij} = d_{ij}$  como

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} \\ 1 & 0 & \sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 2 & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 2 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 2 & 1 & \sqrt{3} & 1 & 0 \end{bmatrix} * d \quad (5.42)$$

onde  $d = 50$ .

Para a função potencial escolhida, os parâmetros são escolhidos como  $a_{ij} = 0.01$ ,  $b_{ij} = 10$  e  $c_{ij} = 33.38$ ,  $\forall i, j$ .

O parâmetro adaptativo foi inicializado no valor nominal como  $\theta_i(0) = 3$  (valores verdadeiros são 7.94) e o controle binário foi utilizado com  $M_\theta = 1.2 |\theta_i^*|$  e o ganho de adaptação  $\Gamma_i = 20I_2$ , visto que  $\theta \in \mathbb{R}^2$ .

Nas simulações, nota-se que a convergência para o padrão geométrico desejado é mais rápida para os controladores binários do que para os controladores adaptativos baseados na lei do gradiente comumente usada, para o mesmo valor de  $\Gamma$ , como pode ser visto nas Figuras 5.6 e 5.7.

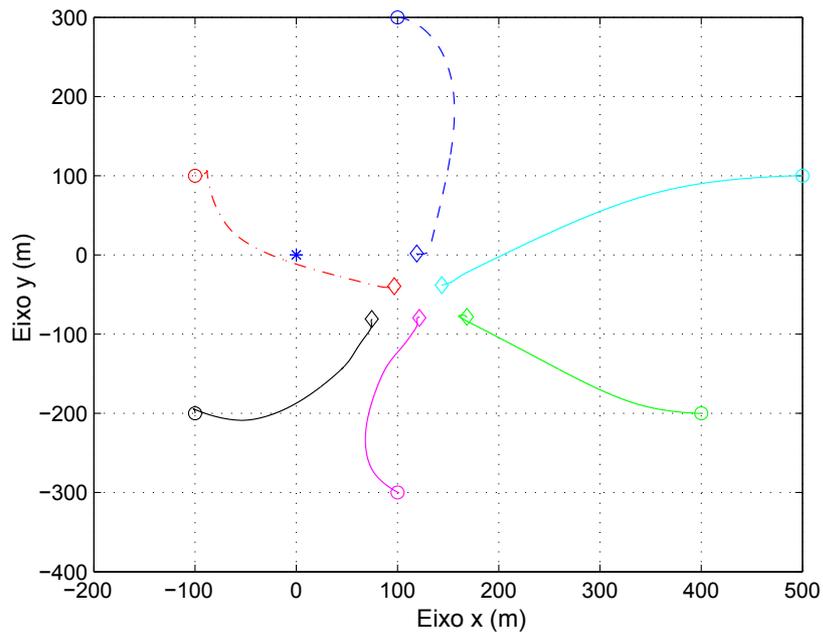


Figura 5.5: Trajetórias dos agentes formando um triângulo para  $K_D = 40I$

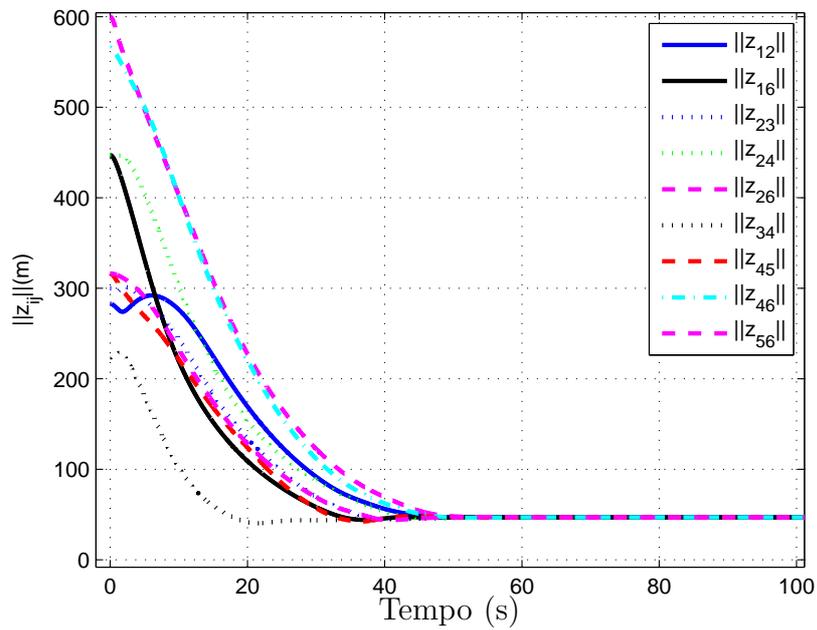


Figura 5.6: Distâncias interveiculares para  $K_D = 40I$  para controle adaptativo binário

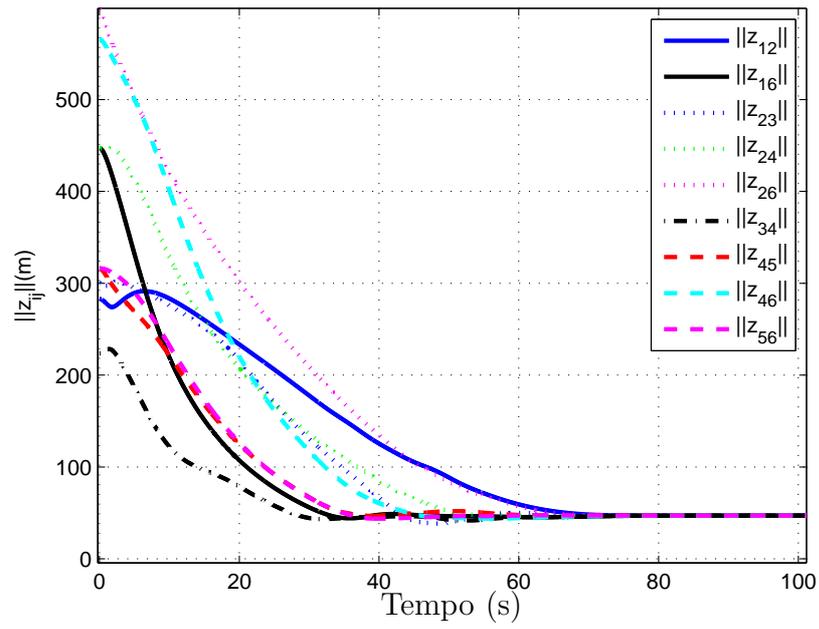


Figura 5.7: Distâncias interveiculares para  $K_D = 40I$  para controle adaptativo convencional

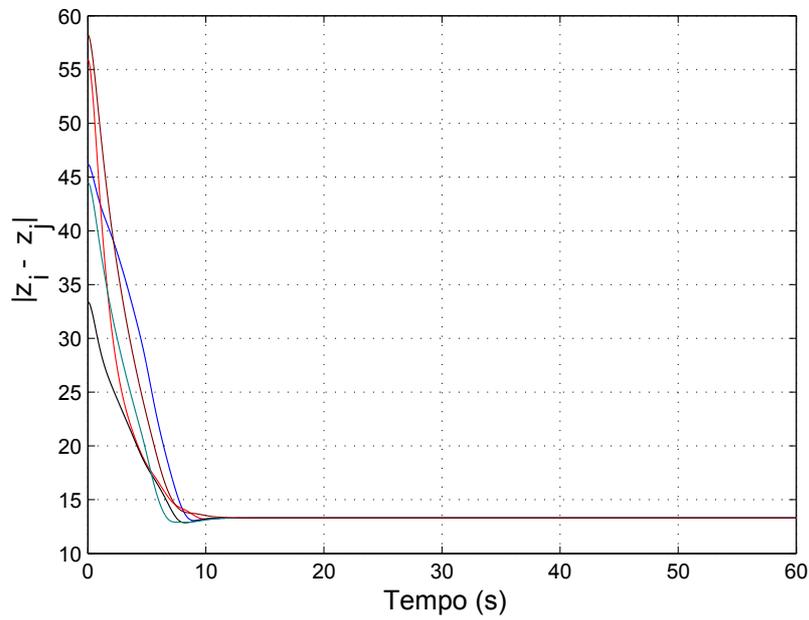


Figura 5.8: Distâncias interveiculares para  $K_D = 45I$

Para mostrar os resultados do esquema proposto para a formação dinâmica (rastreamento), simulações foram feitas com três agentes não-holonômicos incertos em trajetórias circulares como pode ser visto na Figura 5.9.

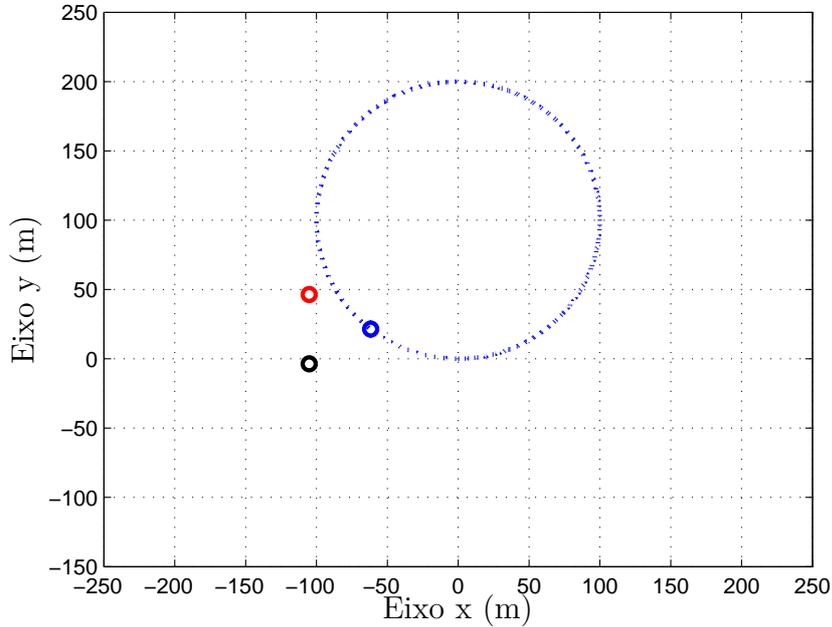


Figura 5.9: Trajetória circular

O esquema de controle adaptativo proposto permite o rastreamento com erro arbitrariamente pequeno de modo que  $(x_i - x_r), (y_i - y_r), (\psi_i - \psi_r) \rightarrow \mathcal{O}(\alpha_3^{-1})$  como mostrado na Figura 5.10 e 5.11.

## 5.6 Conclusões

A estrutura proposta para projetar controle de formação para um grupo de agentes holonômicos foi estendida para o caso não holonômico. Com o objetivo de atender às restrições não holonômicas, utilizou-se uma estratégia cinemática que forçasse o movimento do robô na direção do campo vetorial definida pelo gradiente da função potencial. Resultados de estabilidade semiglobal também foram obtidos considerando a informação de posição relativa entre os agentes. Para permitir que o grupo de agentes percorra uma trajetória mantendo a formação, à estratégia de regulação foi adicionada um esquema de rastreamento baseado em uma abordagem de

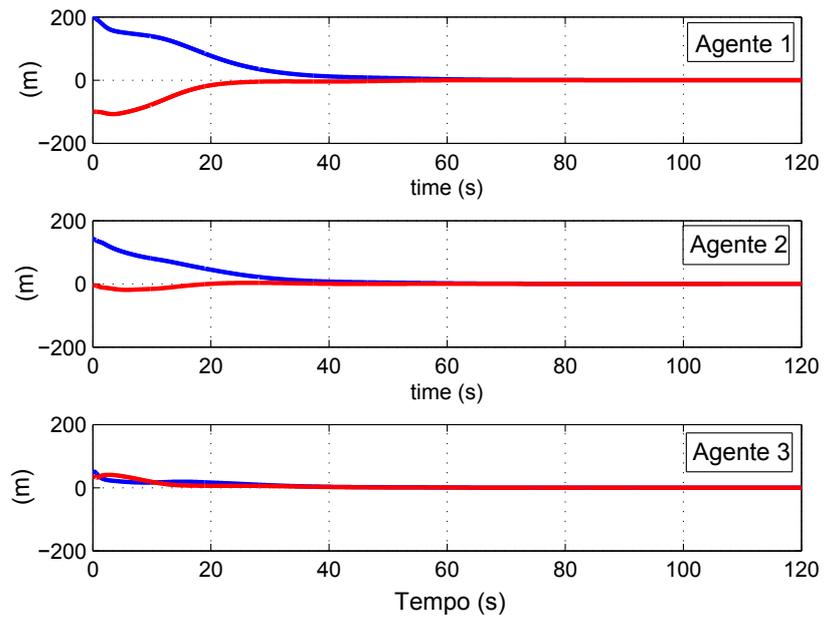


Figura 5.10: Erros de rastreamento - posição

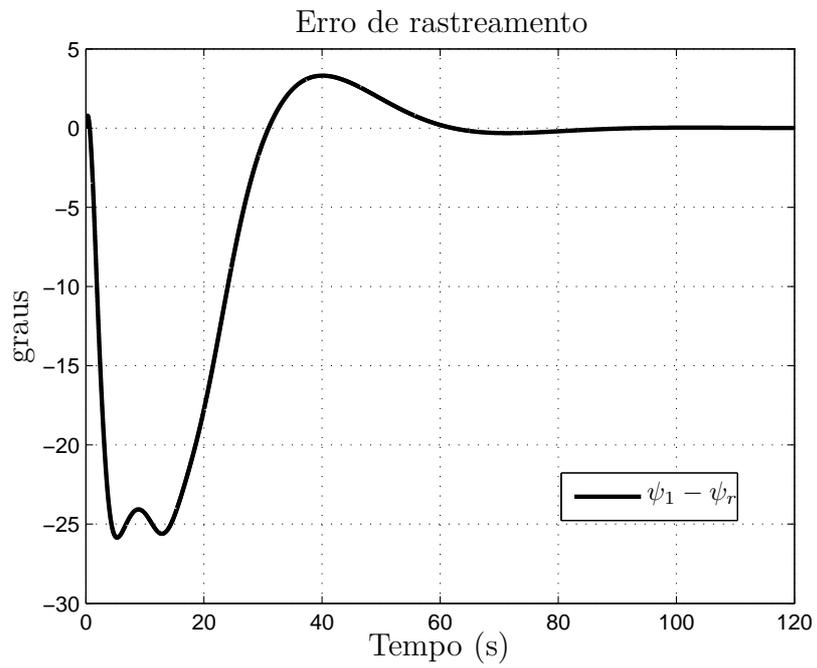


Figura 5.11: Erros de rastreamento - ângulo

rastreamento para um robô holonômico.

# Capítulo 6

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 6.1 Conclusões

Uma estratégia baseada em seguimento de modelo cinemático foi proposta para controle de formação de agentes autônomos holonômicos. Os agentes são representados por equações diferenciais de segunda ordem (sistemas de Euler-Lagrange) e, por meio de funções auxiliares de erro, passam a ser tratados por equações diferenciais de primeira ordem. O modelo cinemático usado para gerar um padrão geométrico desejado é baseado em funções potenciais artificiais.

As incertezas do sistema são compensadas por meio de controle adaptativo binário que garante robustez e evita o fenômeno do *chattering*, tendo em vista que gera um sinal de controle contínuo (ou contínuo por partes). A estratégia é usada também para um cenário onde há restrições de comunicação, ou seja, quando se tem conhecimento apenas das posições relativas entre os vizinhos. Em seguida, a estratégia é estendida para o caso de rastreamento de trajetória pelo grupo, que mantém o padrão geométrico mesmo em movimento. A versão final do controlador proposto, que é baseado em conceitos da passividade, apresenta resultados semi-globais. As simulações validam o desempenho da estratégia proposta para controle de formação de um grupo de agentes autônomos holonômicos móveis incertos, em diferentes topologias da informação. O resultado da estabilidade é válido para diferentes topologias de informação, desde que o grafo correspondente seja fortemente conectado.

A estrutura proposta para projetar controle de formação para um grupo de agentes holonômicos foi estendida para o caso não holonômico. Com o objetivo de atender

às restrições não holonômicas, utilizou-se uma estratégia cinemática que forçasse o movimento do robô na direção do campo vetorial definida pelo gradiente da função potencial. Resultados de estabilidade semiglobal também foram obtidos considerando a informação de posição relativa entre os agentes. Para permitir que o grupo de agentes percorra uma trajetória mantendo a formação, à estratégia de regulação foi adicionada um esquema baseado em uma abordagem de rastreamento para um robô holonômico.

## 6.2 Trabalhos futuros

No decorrer da pesquisa de tese, os seguintes tópicos foram visualizados como continuação deste trabalho:

1. Rejeição de perturbações externas por meio de controle binário

Em controle de formação, assim como nos sistemas de controle em geral, é desejável que o efeito de perturbações seja minimizado ou completamente anulado, após um determinado período transitório.

No caso de aeronaves não tripuladas, perturbações externas (p.ex., rajadas de vento) têm efeito relativamente forte na trajetória de voo visto que a velocidade do veículo é da mesma ordem da perturbação. Em formação de voo, as consequências destas perturbações podem se propagar e afetar o desempenho do grupo como um todo. Conforme já citado, técnicas de controle adaptativo assim como SMC são utilizadas para compensar os efeitos das perturbações externas.

Em [46], é mostrado que o B-MRAC pode fornecer sistema globalmente assintoticamente estável com relação a um conjunto compacto residual. Por meio de simulações, é possível verificar que o esquema de controle proposto baseado no B-MRAC é também capaz de rejeitar perturbações.

2. Robustez da estratégia face a situações reais, tais como falhas e atrasos na comunicação

Em [53], os efeitos do atraso de tempo na comunicação entre agentes de um grupo cooperativo de agentes móveis foram analisados com auxílio da teoria de grafos. Nesse trabalho, concluiu-se que o limite superior no atraso de tempo

admissível é inversamente proporcional ao maior valor singular da matriz Laplaciana do fluxo de informações, ou seja, há um *tradeoff* entre a robustez do protocolo para atraso no tempo e seu desempenho. Convém notar que esta análise foi feita baseada em leis de controle lineares, que podem ser derivadas de funções potenciais quadráticas. Conjectura-se, então, adotar um procedimento similar para tratar sistemas compensados com leis de controle derivadas de funções potenciais gerais, que são basicamente não lineares.

### 3. Mudança de topologia da informação

Em [65], foi proposto um método baseado na abordagem *receding-horizon* para tratar os efeitos do retardo na troca de informações entre agentes cooperativos com dinâmica não linear. A estabilidade do time de agentes foi então provada usando resultados de um teorema do pequeno ganho e de conceitos de estabilidade entrada para a saída. Acredita-se que esta metodologia possa ser estendida de modo análogo para o esquema baseado em funções potenciais de classe mais geral, pois as mesmas possuem características não lineares para efetivamente evitarem colisões entre veículos.

A variação na topologia da informação de um grupo cooperativo se deve geralmente a falhas no enlace ou para atender uma situação específica. Estas mudanças introduzem descontinuidades na lei de controle.

Em [34], na ocorrência das descontinuidades geradas por mudanças na topologia, foi proposta uma abordagem baseada em potenciais e na teoria de grafos para alinhar as velocidades dos agentes, estabilizando as distâncias entre os veículos e a respectiva análise da estabilidade foi baseada no conceito de derivada generalizada.

# Referências Bibliográficas

- [1] CHEN, Y. Q., WANG, Z. “Formation control: a review and a new consideration”. In: *Proc. of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, Edmonton, Alberta, Canada, ago. 2005.
- [2] BENDER, J. G. “An overview of systems studies of automated highway systems”, *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, v. 40, n. 1, pp. 82–99, fev. 1991.
- [3] FEDDEMA, J. T., LEWIS, C., SCHOENWALD, D. A. “Decentralized control of cooperative robotic vehicles: theory and application”, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, v. 18, n. 5, pp. 852–864, out. 2002.
- [4] KOSUGE, K., HIRATA, Y., ASAMA, H., et al. “Motion control of multiple autonomous mobile robots handling a large object in coordination”. In: *Proc. of the IEEE International Conf. on Robotics and Automation*, v. 4, pp. 2666–2673, Detroit, MI, USA, 1999.
- [5] MCLAIN, T. W., BEARD, R. W. “Trajectory planning for coordinated rendezvous of unmanned air vehicles”. In: *Proceedings of the AIAA Conference on Guidance, Navigation, and Control*, 2000.
- [6] MCLAIN, T. W., CHANDLER, P. R., PACHTER, M. “A decomposition strategy for optimal coordination of unmanned air vehicles”. In: *Proceedings of the the American Control Conference*, pp. 369–373, 2000.
- [7] GIULETTI, F., POLLINI, L., INNOCENTI, M. “Autonomous formation flight”, *IEEE Control Systems Magazine*, pp. 34–44, dez. 2000.
- [8] CURTIN, T. B., BELLINGHAM, J. G. “Autonomous ocean-sampling networks”, *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 26, n. 4, pp. 421–423, out. 2001.

- [9] HEALEY, A. J. “Application of formation control for multi-vehicle robotic minesweeping”. In: *40th IEEE Conference on Decision and Control*, v. 2, pp. 1497–1502, 2001.
- [10] MARTIN, M., KLUPAR, P., KILBERG, S., et al. “TechSat 21 and revolutionizing space missions using microsattellites”. In: *Proc. of the 15th AIAA/USU Conf. on Small Satellites*, Logan, Utah, USA, ago. 2001.
- [11] CHICHKA, D. F. “Satellite clusters with constant apparent distribution”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 24, n. 1, pp. 117–122, 2001.
- [12] YEH, H. H., NELSON, E., SPARKS, A. “Nonlinear tracking control for satellite formations”. In: *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, v. 1, pp. 328–333, 2000.
- [13] YEH, H.-H., SPARKS, A. “Geometry and control of satellite formations”. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, v. 1, pp. 384–388, set. 2000.
- [14] DESAI, J. P., OSTROWSKI, J., KUMAR, V. “Controlling formations of multiple mobile robots”. In: *Proc. of the IEEE International Conf. on Robotics and Automation*, v. 4, pp. 2864–2869, maio 1998.
- [15] DAS, A. K., FIERRO, R., KUMAR, V., et al. “A vision-based formation control framework”, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, v. 18, n. 5, pp. 813 – 825, out. 2002.
- [16] ORQUEDA, O. A. A., FIERRO, R. “A Vision-based nonlinear decentralized controller for unmanned vehicles”. In: *Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Robotics and Automation*, maio 2006.
- [17] PEREIRA, G. A. S., DAS, A. K., KUMAR, V., et al. “Formation control with configuration space constraints”. In: *Proceedings 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, v. 3, pp. 2755–2760, out. 2003.
- [18] BALCH, T., ARKIN, R. C. “Behavior-based formation control for multirobot teams”, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, v. 14, n. 6, pp. 926 – 939, dez. 1998.

- [19] LAWTON, J. R. T., BEARD, R. W., YOUNG, B. J. “A decentralized approach to formation maneuvers”, *IEEE Trans. Robotics and Automation*, v. 19, n. 6, pp. 933 – 941, dez. 2003.
- [20] SPRY, S., HEDRICK, J. K. “Formation control using generalized coordinates”. In: *Proc. of IEEE International Conf. on Decision and Control*, v. 3, pp. 2441 – 2446, Atlantis, Paradise Island, Bahamas, dez. 2004.
- [21] TAN, K., LEWIS, M. A. “Virtual structures for high-precision cooperative mobile robotic control”. In: *Proc. of the 1996 IEEE/RSJ International Conf. Intelligent Robots and Systems*, v. 1, pp. 132–139, Osaka, Japan, nov. 1996.
- [22] REN, W. “Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations”, *IET Control Theory and Applications*, v. 1, n. 2, pp. 505–512, mar. 2007.
- [23] HSIEH, M. A., KUMAR, V. “Pattern Generation with Multiple Robots”. In: *2006 IEEE International Conference and Automation*, pp. 2442–2447, maio 2006.
- [24] OLFATI-SABER, R., FAX, J., MURRAY, R. “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems”. In: *Proceedings of the IEEE*, v. 95, pp. 215–233, jan. 2007.
- [25] RIMON, E., KODITSCHKEK, D. E. “Exact robot navigation using artificial potential functions”, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, v. 8, n. 5, pp. 501–518, out. 1992.
- [26] PIMENTA, L., FONSECA, A., PEREIRA, G., et al. “Robot navigation based on electrostatic field computation”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 42, n. 4, pp. 1459–1462, abr. 2006.
- [27] GAZI, V., PASINO, K. M. “Stability analysis of swarms”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 48, n. 4, pp. 692 – 697, abr. 2003.
- [28] EGERSTEDT, M., HU, X. “Formation constrained multi-agent control”, *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, v. 17, n. 6, pp. 947 – 951, dez. 2001.

- [29] LEONARD, N. E., FIORELLI, E. “Virtual leaders, artificial potentials and coordinated control of groups”. In: *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, v. 3, pp. 2968–2973, Orlando, Florida, USA, dez. 2001.
- [30] OLFATI-SABER, R., MURRAY, R. M. “Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions”. In: *Proc. 15th IFAC World Congress*, pp. 1–7, 2002.
- [31] GAZI, V., PASINO, K. M. “Stability analysis of social foraging swarms”, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, v. 34, n. 1, pp. 539–557, fev. 2004.
- [32] GAZI, V. “Swarm aggregations using artificial potentials and sliding mode control”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 21, n. 4, pp. 1208–1214, dez. 2005.
- [33] MASTELLONE, S., STIPANOVIC, D. M., GRAUNKE, C. R., et al. “Formation control and collision avoidance for multi-agent non-holonomic systems: theory and experiments”, *International Journal of Robotics Research*, v. 27, n. 1, pp. 107–126, 2008.
- [34] TANNER, H. G., JADBABAIE, A., PAPAS, G. “Flocking in fixed and switching networks”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 5, pp. 863–868, maio 2007.
- [35] BROCKETT, R. W. “Asymptotic stability and feedback stabilization”. In: *Differential Geometry Control Theory*, Cambridge, pp. 181–191, 1983.
- [36] SHAO, J., XIE, G., WANG, L. “Leader following formation control of multiple mobile vehicles”, *IET Control Theory Appl.*, v. 1, n. 2, pp. 545–552, mar. 2007.
- [37] XIAO, F., WANG, L. “Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 53, n. 8, pp. 1804–1816, 2008.
- [38] DONG, W., FARREL, J. A. “Decentralized cooperative control of multiple nonholonomic dynamic systems with uncertainty”, *Automatica*, v. 45, pp. 706–710, 2009.

- [39] DIMAROGONAS, D. V., KYRIAKOPOULOS, K. J. “A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent nonholonomic non-point agents”. In: *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pp. 820–825, Limassol Cyprus, 2005.
- [40] DIERKS, T., JAGANNATHAN, S. “Control of nonholonomic mobile robot formations: backstepping kinematics into dynamics”. In: *IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 94–99, Singapore, 2007.
- [41] DE QUEIROZ, M. S., YAN, Q., YANG, G., et al. “Global output feedback tracking control of spacecraft formation flying with parametric uncertainty”. In: *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, dez. 1999.
- [42] WONG, H., PAN, H., DE QUEIROZ, M. S., et al. “Adaptive Learning Control for Spacecraft Formation Flying”. In: *Proc. of the 40th IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, USA, 2001.
- [43] SEMSAR, E., KHORASANI, K. “Adaptive formation control of UAVs in the presence of unknown vortex forces and leader commands”. In: *Proc. of the American Control Conf.*, Minneapolis, Minesota, USA, 2006.
- [44] ROHRS, E. C., YOUNCE, R., HARVEY, S. “Unacceptable Transient in Adaptive Controllers”. In: *SIAM Conf. on Control in 90’: Achievements, Opportunities and Challenges*, San Francisco, CA, USA, 1990.
- [45] IOANNOU, P., SUN, J. *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, 1996.
- [46] HSU, L., COSTA, R. R. “Binary control approach to design globally exponential stable systems”. In: *Proc. of the 7th International Conf. on Systems Engineering*, Las Vegas, USA, 1990.
- [47] HSU, L., ARAÚJO, A. D., COSTA, R. R. “On the design of variable structure adaptive control system using only input/output data”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. AC-39, n. 1, pp. 4–21, 1994.
- [48] EMEL'YANOV, S. V. *Binary Automatic Control Systems*. Moskow, MIR Publishers, 1987. ( English Translation).
- [49] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.

- [50] STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra, 3a. ed.* Wellesley-Cambridge Press, 2003.
- [51] SONTAG, E., WANG, Y. “On characterizations of the input-to-state stability property”, *Systems and Control Letters*, , n. 24, pp. 351–359, 1995.
- [52] FAX, J. A., MURRAY, R. M. “Information flow and cooperative control of vehicle formations”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 49, n. 9, pp. 1465–1476, set. 2003.
- [53] OLFATI-SABER, R., MURRAY, R. M. “Consensus problem in networks of mobile agents with switching topology and time-delays”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 49, n. 9, pp. 1520–1533, set. 2004.
- [54] LEE, D., SPONG, M. W. “Stable flocking of multiple inertial agents on balanced graphs”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 52, n. 8, pp. 1469–1475, ago. 2007.
- [55] GODSIL, C., ROYLE, G. *Algebraic Graph Theory, Vol. 207 of Graduate Texts in Mathematics.* New York: Springer-Verlag, 2002.
- [56] HORN, R. A., JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press, 1985.
- [57] YAO, J., ORDOÑEZ, R., GAZI, V. “Swarm tracking using artificial potentials and sliding mode control”. In: *Proc. of the 45th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 4670–4675, San Diego, CA,USA, 2006.
- [58] LEE, D. J., LI, P. Y. “Passive decomposition for multiple mechanical systems under coordination requirements”. In: *Proc. IEEE Conf. Decision Control*, pp. 1240–1245, 2004.
- [59] PEREIRA, A. R., HSU, L. “Controle adaptativo de formação de agentes autônomos usando funções potenciais quadráticas”. In: *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática*, Juiz de Fora, MG, Brasil, 2008.
- [60] PEREIRA, A. R., HSU, L. “Adaptive Formation Control using Artificial Potentials for Euler-Lagrange Agents”. In: *Proc. of the 17th IFAC World Congress*, 2008.

- [61] SLOTINE, J. E., LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, 1991.
- [62] PEREIRA, A. R., HSU, L., ORTEGA, R. “Globally Stable Adaptive Formation Control for *Euler-Lagrange* Agents via Potential Functions”. In: *Proc. of the American Control Conference*, 2009.
- [63] FUKAO, T., NAKAGAWA, H., ADACHI, N. “Adaptive tracking control of nonholonomic robot”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 4, n. 9, pp. 1465–1476, out. 2000.
- [64] PEREIRA, A. R., GOUVEA, J. A., HSU, L., et al. “Formation adaptive control for nonholonomic dynamic agents: regulation and tracking”. In: *accepted to 18th IFAC World Congress*, to be published.
- [65] FRANCO, E., MAGNI, L., PARISINI, T., et al. “Cooperative constrained control of distributed agents with nonlinear dynamics and delayed information exchange: a stabilizing receding-horizon approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 53, n. 1, fev. 2008.
- [66] HSU, L., COSTA, R. R. “Adaptive Control with Discontinuous  $\sigma$ -factor and Saturation for Improved Robustness”, *International Journal of Control*, v. 5, n. 3, pp. 843–859, 1987.
- [67] JIANG, Z. P. TEEL, A. R., , PRALY, L. “Small-Gain Theorem for *ISS* Systems and Applications”, *Math. Control Signals Systems*, v. 7, pp. 95–120, 1994.
- [68] GOUVEA, J. A., PEREIRA, A. R., HSU, L., et al. “Adaptive formation control of dynamic nonholonomic systems using potential functions”. In: *Proceedings of American Control Conference 2010*, Baltimore, Maryland, USA, 2010.
- [69] IOANNOU, P. A., KOKOTOVIC, P. V. “Robust Redesign of Adaptive Control”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. AC-29, n. 3, pp. 202–211, 1984.

# Apêndice A

## Demonstrações

### A.1 Demonstração da Proposição 1

Considere a seguinte transformação de coordenadas baseada na decomposição passiva [58]

$$\bar{z} = Tz \quad (\text{A.1})$$

onde  $\bar{z} := [\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_N]^T \in \mathbb{R}^N$  e  $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$  é definida por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Define-se  $\bar{z}_e := [\bar{z}_2, \dots, \bar{z}_N]^T \in \mathbb{R}^{N-1}$  de modo que  $z = [\bar{z}_1 \quad \bar{z}_e^T]^T$ , onde  $\bar{z}_e$  é dado por

$$\bar{z}_e = [z_1 - z_2, z_2 - z_3, \dots, z_{(N-1)} - z_N]^T \quad (\text{A.3})$$

e  $\bar{z}_1$  é o centróide de posição da formação e é definido por

$$\bar{z}_1 = \frac{(z_1 + z_2 + \dots + z_N)}{N}. \quad (\text{A.4})$$

Fazendo a transformação de coordenadas, a Equação (4.6) pode ser reescrita como

$$\dot{\bar{z}} = -kTLLT^{-1}\bar{z} \quad (\text{A.5})$$

onde a inversa de  $T$  é dada por

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_2 & \phi_3 & \dots & \phi_N \\ 1 & \phi_2 - 1 & \phi_3 & \dots & \phi_N \\ 1 & \phi_2 - 1 & \phi_3 - 1 & \dots & \phi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \phi_2 - 1 & \phi_3 - 1 & \dots & \phi_N - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

com  $\phi_i = (N + 1 - i)/N$  e

$$TLLT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{(N-1) \times (N-1)} \\ 0_{(N-1) \times 1} & \bar{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

onde  $\bar{L}$  é positiva definida. Deste modo, pode-se estabelecer o seguinte

$$\dot{\bar{z}}_1 = 0 \quad (\text{A.8})$$

Como o fluxo de informações é assumido ser bidirecional e todos os agentes estão interconectados, pode ser mostrado que  $\bar{L} = NI_{(N-1) \times (N-1)}$ . e

$$\dot{\bar{z}}_e = \bar{Z}\bar{z}_e \quad (\text{A.9})$$

onde  $\bar{Z} = -k\bar{L}$  é Hurwitz. A solução de (A.9) tem a forma

$$\bar{z}_e(t) = e^{-k\bar{L}t}\bar{z}_e(0) \quad (\text{A.10})$$

Então, pode-se concluir que  $\bar{z}_1(t) = \bar{z}_1(0)$ ,  $\forall t \geq 0$  e  $\bar{z}_e \rightarrow 0$  exponencialmente à medida que  $t \rightarrow \infty$ . A partir daí, pode-se mostrar que todas as diferenças entre vizinhos tenderão a  $d_{ij}$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ . ■

## A.2 Demonstração do Lema 1

Considere a seguinte função

$$V_\theta = \frac{1}{2}\theta_i^T\theta_i. \quad (\text{A.11})$$

Derivando (A.11) em relação ao tempo e levando em conta (4.18)-(4.19), tem-se

que

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\theta &= \theta_i^T (-\sigma\theta_i - \Gamma_i Y_i^T s) \\
&= (\sigma_{eq} - \sigma) |\theta_i|^2 \\
&= 2(\sigma_{eq} - \sigma) V_\theta
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Em virtude de (4.19), tem-se que  $(\sigma_{eq} - \sigma) \leq 0$  se  $|\theta_i| \geq M_{\theta_i}$ . Portanto, o conjunto  $|\theta_i(t)| \leq M_{\theta_i}$  é positivamente invariante. Assim,  $\tilde{\theta}_i^T \tilde{\theta}_i$  é uniformemente limitado por uma constante,  $\forall t \geq 0$  ■

### A.3 Demonstração da Proposição 3

A Equação (4.20) pode ser reescrita como

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^T M_i s_i + f(\tilde{\theta}_i) \tag{A.13}$$

onde  $f(\tilde{\theta}_i) = \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_i$ . Definindo  $\bar{V}_i = \frac{1}{2} s_i^T M_i s_i$ , pode-se obter

$$\bar{V}_i \leq \lambda_M(M_i) |s_i|^2. \tag{A.14}$$

Usando a propriedade de anti-simetria (4.10), a derivada em relação ao tempo de (4.20) é dada por

$$\dot{V}_i = -s_i^T K_{Di} s_i - \frac{\sigma}{\lambda_m(\Gamma_i)} (\tilde{\theta}_i + \theta_i^*)^T \tilde{\theta}_i. \tag{A.15}$$

Note que o segundo termo de (A.15) é não positivo (veja [45] ou [66]) e por projeção de parâmetros é limitado em norma, conforme é mostrado no Lema 1. Assim, (A.15) satisfaz

$$\dot{V}_i \leq -s_i^T K_{Di} s_i. \tag{A.16}$$

Levando em conta que  $f(\tilde{\theta}_i) \leq \mathcal{O}(1/\lambda_m(\Gamma_i))$  e considerando (A.13) e (A.14), pode-se reescrever (A.16) como

$$\dot{V}_i \leq -\lambda_1 [V_i - \mathcal{O}(1/\lambda_m(\Gamma_i))] \tag{A.17}$$

onde  $\lambda_1 = \lambda_m(K_{Di})/\lambda_M(M_i)$ .

Usando o lema da comparação, tem-se que

$$V_i \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} V_i(0) + \mathcal{O}(1/\lambda_m(\Gamma_i)) \quad (\text{A.18})$$

onde  $c_1$  é uma constante positiva.

De (A.13), pode-se reescrever (A.18) como

$$\bar{V}_i + f(\tilde{\theta}_i) \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} [\bar{V}_i(0) + f(0)] + \mathcal{O}(1/\lambda_m(\Gamma_i)) \quad (\text{A.19})$$

De (A.14), segue-se que

$$|s_i(t)|^2 \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} |s_i(0)|^2 + \mathcal{O}(1/\lambda_m(\Gamma_i)), \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{A.20})$$

Portanto, pode-se concluir que  $|s_i(t)|$  tende exponencialmente rápido a um valor residual de ordem  $\mathcal{O}((1/(\lambda_m(\Gamma_i))^{1/2}))$ . ■

## A.4 Demonstração do Teorema 1

Considere a seguinte candidata à função de Lyapunov

$$V = V_0 + \alpha J(\tilde{z}) \quad (\text{A.21})$$

onde  $\alpha$  é uma constante não negativa e  $V_0$  é definido como

$$V_0 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} s_i^T M_i s_i + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}_i \right) \quad (\text{A.22})$$

A derivada de (A.21) é dada por

$$\dot{V} = \dot{V}_0 + \alpha \frac{d}{dt} J(\tilde{z}) \quad (\text{A.23})$$

onde  $\dot{V}_0$  pode se expresso, com base em (A.16), por

$$\dot{V}_0 \leq -s^T K_D s \quad (\text{A.24})$$

onde  $s = [s_1^T, \dots, s_N^T]^T$  e  $K_D = \text{diag}\{K_{D1}, K_{D2}, \dots, K_{DN}\}$ .

Note que

$$\frac{d}{dt}J(\tilde{z}) = \frac{\partial J}{\partial z}\dot{z}$$

onde  $z = [z_1^T, \dots, z_N^T]^T$ .

Então, utilizando (4.11), obtém-se

$$\frac{d}{dt}J(\tilde{z}) = s^T \dot{z} - |\dot{z}|^2 \quad (\text{A.25})$$

Portanto, a derivada de (A.21) satisfaz o seguinte

$$\dot{V} \leq -s^T K_D s + \alpha s^T \dot{z} - \alpha |\dot{z}|^2. \quad (\text{A.26})$$

A desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} s^T & \dot{z}^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} s \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} K_D & -\frac{\alpha}{2}I \\ -\frac{\alpha}{2}I & \alpha I \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Para  $\dot{V} \leq 0$ , a matriz  $A$  deve ser positiva definida e, portanto, o complemento de Schur  $S$  deve ser positivo definido, i.e.,

$$S = \alpha I - \frac{1}{4}\alpha^2 K_D^{-1} > 0 \quad (\text{A.29})$$

que se mantém se

$$\sigma_m(K_D) > \frac{\alpha}{4}I \quad (\text{A.30})$$

Com qualquer  $\alpha > 0$ , a função Lyapunov permite concluir que  $s$  e  $\dot{z}$  são ambos limitados, e portanto  $\tilde{z}$  é limitado em norma devido  $J$  ser radialmente ilimitada. Além disso, uma vez que  $z_1$  está em  $\tilde{z}$  e o grafo de informação é suposto conectado, conclui-se que todos os veículos permanecem em algum conjunto compacto. Deste modo, o Teorema de La Salle pode ser aplicado para concluir que as trajetórias tendem assintoticamente para o conjunto de equilíbrio  $\Omega_e$ . Assim, conclui-se que  $s \rightarrow 0$  e  $\dot{z} \rightarrow 0$  e, por (4.12),  $\nabla_z J \rightarrow 0$ . Portanto, o sistema multiagente é globalmente estável com respeito ao conjunto de equilíbrio  $\Omega_e$ . ■

## A.5 Demonstração do Teorema 2

Considere o diagrama de blocos da Figura 4.2. Para o bloco superior, a candidata à função de Lyapunov é escolhida como

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^T M_i s_i + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i \quad (\text{A.31})$$

Então, pode-se escrever a desigualdade

$$V_i \leq \lambda_M(M_i) |s_i|^2 + \frac{1}{2\gamma} |(\theta_i - \theta_i^*)|^2 \quad (\text{A.32})$$

onde  $\gamma = \lambda_m(\Gamma_i)$ .

Desde que  $|\theta_i(t)| \leq M_{\theta_i}$  (conforme mostrado pelo Lema 1), obtém-se

$$V_i \leq \lambda_M(M_i) |s_i|^2 + \frac{2M_{\theta_i}^2}{\gamma} \quad (\text{A.33})$$

A derivada em relação ao tempo de (A.31) é dada por

$$\dot{V}_i = -s_i^T K_{D_i} s_i - \frac{\sigma}{\gamma} \theta_i^T \tilde{\theta}_i + s_i^T w_i(t) - s_i^T \bar{w} \text{sat}(\gamma w s_i) \quad (\text{A.34})$$

Visto que o segundo termo de (A.34) é não positivo, pode-se escrever

$$\dot{V}_i \leq -s_i^T K_{D_i} s_i + s_i^T w_i(t) - s_i^T \bar{w} \text{sat}(\gamma w s_i) \quad (\text{A.35})$$

Considerando os dois últimos termos de (A.35), define-se

$$\dot{\tilde{V}}_i = s_i^T w_i(t) - s_i^T \bar{w} \text{sat}(\gamma w s_i) \quad (\text{A.36})$$

Por simplicidade e sem perda de generalidade, define-se  $n = 2$ ,  $s_i = [s_{i1} \ s_{i2}]$ ,  $w_i = [w_{i1} \ w_{i2}]$  e  $\text{sat}(\gamma w s_i) = \text{sat}[\gamma w s_{i2} \ \gamma w s_{i2}]$ , e, supondo saturação no segundo elemento de  $\text{sat}(\gamma w s_i)$ , (A.36) pode ser reescrita como

$$\dot{\tilde{V}}_i = s_{i1} w_{i1} + s_{i2} w_{i2} - [s_{i1} \ s_{i2}] \begin{bmatrix} \gamma w s_{i1} \\ \bar{w} \text{sign}(s_{i2}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

Desenvolvendo o último termo de (A.37), obtém-se

$$\dot{V}_i = s_{i1}w_{i1} + s_{i2}w_{i2} - \gamma_w s_{i1}^2 - \bar{w}|s_{i2}| \quad (\text{A.38})$$

Como  $\bar{w}|s_{i2}| \geq s_{i2}w_{i2}$ , pode se mostrar generalizadamente que (A.38) satisfaz a seguinte desigualdade

$$\dot{V}_i \leq |s_{ri}| |w| - \gamma_w |s_{ri}|^2 \quad (\text{A.39})$$

onde  $s_{ri}$  é um vetor reduzido composto de elementos não saturados. Substituindo (A.39) em (A.35), obtém-se

$$\dot{V}_i \leq -\lambda_m(K_{Di}) |s_i|^2 + |s_{ri}| |w_i| - \gamma_w |s_{ri}|^2 \quad (\text{A.40})$$

Os dois últimos termos tem um valor máximo em  $\frac{|w_i|^2}{4\gamma_w}$ . Assim, tem-se que

$$\dot{V}_i \leq -\lambda_m(K_{Di}) |s_i|^2 + \frac{|w_i|^2}{4\gamma_w} \quad (\text{A.41})$$

Manipulando (A.33) e substituindo em (A.41)

$$\dot{V}_i \leq -\lambda_1 V_i + \lambda_1 \frac{2M_{\theta_i}^2}{\gamma} + \frac{|w_i|^2}{4\gamma_w} \quad (\text{A.42})$$

onde  $\lambda_1 = \lambda_m(K_{Di})/\lambda_M(M_i)$ . Usando o lema da comparação, pode-se mostrar que

$$V_i \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} V_i(0) + \int_0^t e^{-\lambda_1(t-\xi)} u d\xi \quad (\text{A.43})$$

onde  $u = \lambda_1 \frac{2M_{\theta_i}^2}{\gamma} + \frac{|w_i|^2}{4\gamma_w}$

Usando a desigualdade (A.33) e o limite superior do termo integral de (A.43), obtém-se após algumas manipulações algébricas

$$|s_i(t)|^2 \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} |s_i(0)|^2 + k_1 \frac{M_{\theta_i}^2}{\gamma} + k_2 \frac{|w_i|^2}{\gamma_w} \quad (\text{A.44})$$

$\forall t \geq 0$ , onde  $c_1, k_1, k_2$  são constantes positivas. Isto resulta no seguinte limite

$$|s(t)| \leq \beta_1(|s(0)|, t) + \gamma_w^{-1/2} k_3 |w| + \gamma_w^{-1/2} d_1. \quad (\text{A.45})$$

onde  $s(t) = [s_1^T(t), \dots, s_N^T(t)]^T$ ,  $w = [w_1^T, \dots, w_N^T]^T$  com  $w_i$  suposto essencialmente limitada,  $k_3$  é uma constante positiva,  $d_1$  é uma constante positiva proporcional a  $M_{\theta_i}^2$  e  $\beta_1$  é uma função de classe  $KL$  [67].

Agora, concatenando as Equações (4.25) e (4.12), tem-se que

$$w = \bar{M} \nabla^2 J \dot{z} \quad (\text{A.46})$$

$$\dot{z} = \dot{z}_d + s. \quad (\text{A.47})$$

onde  $\bar{M} = \text{diag} \{M_1 \ M_2 \ \dots \ M_N\}$ .

As Equações (A.46) e (A.47) podem ser interpretadas como um sistema dinâmico não linear com entrada  $s$  e saída  $w$ . Se este subsistema é ISS, tem-se

$$|w(t)| \leq \beta_2(|z(0)|, t) + \eta_2 \|s(t)\| \quad (\text{A.48})$$

onde  $\beta_2$  é classe  $KL$  e  $\eta_2$  é uma constante positiva. De um teorema de pequeno ganho para sistemas ISS ([67]), equações (A.45) e (A.48) implicam que o sistema (4.24)(A.46-A.47) é IOpS, i.e., praticamente estável da entrada para a saída, com conjunto residual de ordem  $\mathcal{O}(1/\gamma^{-1/2})$ . Portanto, pode se concluir que  $\nabla_z J \rightarrow \mathcal{O}(1/\gamma^{-1/2})$ .

Notando que os limitantes em (A.45) e (A.48) são independentes de  $\bar{w}$ , pode-se concluir que o sistema é semiglobalmente estável com respeito ao parâmetro  $\bar{w}$ . ■

## A.6 Demonstração do Teorema 3

A função de Lyapunov é escolhida como

$$V = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} s_i^T M_i s_i + \frac{1}{2} \tilde{\vartheta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\vartheta}_i \right) + \alpha J(\tilde{z}). \quad (\text{A.49})$$

A derivada em relação ao tempo de (A.49) é dada por

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \left( -s_i^T K_{D_i} s_i - \frac{\sigma}{\gamma} \vartheta_i^T \tilde{\vartheta}_i - s_i^T M_i \dot{z}_{di} \right) + \alpha \frac{d}{dt} J(\tilde{z}). \quad (\text{A.50})$$

O último termo de (4.30) pode ser definido em função de  $\dot{z}$ , conforme abaixo.

Considere o sistema em malha fechada representado por (4.12)-(4.30). Então,

note que

$$\ddot{z}_{di} = - \left[ \frac{\partial^2 J}{\partial z_1 \partial z_i} \quad \frac{\partial^2 J}{\partial z_2 \partial z_i} \cdots \frac{\partial^2 J}{\partial z_i \partial z_i} \cdots \frac{\partial^2 J}{\partial z_N \partial z_i} \right] \dot{z}. \quad (\text{A.51})$$

De (A.25) e (A.51), pode se reescrever (A.50) como

$$\dot{V} \leq -s^T K_D s - s^T [M(\nabla^2 J)^T - \alpha I] \dot{z} - \alpha |\dot{z}|^2 \quad (\text{A.52})$$

onde  $M = \text{diag} \{M_1, M_2, \dots, M_N\}$ .

Definindo  $M(\alpha) = M(\nabla^2 J)^T - \alpha I$ , (A.52) pode ser reescrita como

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} s^T & \dot{z}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_D & -\frac{M(\alpha)}{2} \\ -\frac{M^T(\alpha)}{2} & \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.53})$$

Já se tinha assumido que a matriz de inércia  $M_i$  em (4.9) é uniformemente limitada. Assim,  $\sigma_M \geq |M|$  para alguma constante  $\sigma_M$ . Em um domínio compacto dado por  $V \leq c_3$ , com  $c_3 > 0$  arbitrariamente grande, a matriz Hessiana é limitada em norma por uma constante  $\sigma_J$ , i.e.,  $\sigma_J \geq |\nabla^2 J|$ .

Para  $\dot{V} \leq 0$ , o complemento de Schur  $S$  deve ser positivo definido, i. e.,

$$S = \alpha I - \frac{1}{4} M^T(\alpha) K_D^{-1} M(\alpha) > 0 \quad (\text{A.54})$$

Então, (A.54) se mantém se

$$\lambda_m(K_D) > \frac{|M(\alpha)|^2}{4\alpha}, \quad (\text{A.55})$$

que implica

$$\lambda_m(K_D) > \frac{(\alpha + \sigma_M \sigma_J)^2}{4\alpha} \quad (\text{A.56})$$

O mínimo valor do lado direito de (A.55) com respeito a  $\alpha$  ocorre em  $\alpha = \sigma_M \sigma_J$ . Portanto, existe  $\alpha > 0$  tal que  $\dot{V} \leq 0$  se

$$\lambda_m(K_D) > \sigma_M \sigma_J \quad (\text{A.57})$$

Então, conclui-se que  $s \rightarrow 0$  e  $\dot{z} \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$  e o conjunto de equilíbrio  $\Omega_e$  é assintoticamente alcançado, como no caso onde as velocidades dos vizinhos não estão disponíveis para controle. A limitação uniforme dos sinais do sistema pode ser

concluída pela invariância do domínio  $V \leq c_3$  e a validade semiglobal dos resultados de convergência e estabilidade decorre do fato de  $c_3$  ser arbitrário e de que sempre existirá  $K_D$  satisfazendo (A.57).  $\blacksquare$

## A.7 Demonstração do Teorema 4

Considere a uma candidata à função de Lyapunov expressa por

$$V = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} s_i^T M_i s_i + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\vartheta}_i^T \tilde{\vartheta}_i \right) + \alpha [J(\tilde{z}) + J_r(\tilde{z}_r)]. \quad (\text{A.58})$$

onde  $J(\tilde{z})$  é uma função potencial definida por (2.4) e  $J(\tilde{z}_r) = \sum_i^N \frac{1}{2} (z_i - z_{ri})^2$ .

A derivada em relação ao tempo (A.58) é dada por

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \left( -s_i^T K_{Di} s_i - \frac{\sigma}{\gamma} \vartheta_i^T \tilde{\vartheta}_i + s_i^T M_i \ddot{z}_{di} \right) + \alpha \frac{d}{dt} J(\tilde{z}) + \alpha \frac{d}{dt} J_r(\tilde{z}_r) \quad (\text{A.59})$$

Considerando que  $\ddot{z}_{di}$  pode ser escrito como função de  $\dot{z}$  (conforme (A.51)), e que o segundo termo entre parênteses é não negativo, (A.59) se torna

$$\dot{V} \leq -s^T K_D s + s^T M [\nabla^2 J]^T \dot{z} + \alpha [\nabla_z J]^T \dot{z} + \alpha [\nabla_z J_r]^T (\dot{z} - \dot{z}_r) \quad (\text{A.60})$$

onde  $K_D = \text{diag}\{K_{Di}\}$ ,  $z = [z_1^T \dots z_N^T]^T$ ,  $z_r = [z_{r1}^T \dots z_{rN}^T]^T$ ,  $s = [s_1^T \dots s_N^T]^T$ ,  $M = \text{diag}\{M_i\}$ .

Definindo  $e_f = \nabla_z J$ ,  $e_r = \nabla_z J_r$ , como o erro de formação e o erro de rastreamento, respectivamente, e após algumas manipulações algébricas e utilizando (4.33) para eliminar a dependência de  $\dot{z}$ , obtém-se

$$\dot{V} \leq -s^T \bar{K}_D s + s^T [M(\nabla^2 J)^T + \alpha \bar{E}] e - \alpha e^T \bar{K} e + s^T M(\nabla^2 J)^T \dot{z}_r + \alpha e^T E_f \dot{z}_r \quad (\text{A.61})$$

onde  $\bar{K}_D = K_D - M(\nabla^2 J)^T$ ,  $e = [e_f \ e_r]$ ,  $\bar{K} = [K_f \ K_r]$ , com  $K_f = \text{diag}\{k_{fi}\}$  e  $K_r = \text{diag}\{k_{ri}\}$ ,  $\bar{E} = [I \ I]$ , e  $E_f = [I \ 0]$

A expressão para  $\dot{V}$  pode ser reescrita como

$$\dot{V} \leq - \begin{bmatrix} s^T & e^T \end{bmatrix} A_1 \begin{bmatrix} s \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^T & e^T \end{bmatrix} A_2 \dot{z}_r \quad (\text{A.62})$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \bar{K}_D & -\frac{1}{2}L_1(\alpha) \\ -\frac{1}{2}L_1^T(\alpha) & \alpha\bar{K} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} M(\nabla^2 J)^T \\ \alpha E_f \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

onde  $L_1(\alpha) = [M(\nabla^2 J)^T + \alpha\bar{E}]$ . Em um domínio compacto dado por  $V \leq c_4$ , com  $c_4 > 0$  arbitrariamente grande, a matriz Hessiana de  $J$  é limitada em norma por uma constante  $\sigma_M(\nabla^2 J)$ . Além disso, sabe-se que  $|M| \leq \sigma_M(M)$ . A matriz simétrica  $A_1$  é positiva definida se o complemento de Schur  $S_1$  for positivo definido, i.e.,

$$S_1 = \alpha\bar{K} - \frac{1}{4}L_1^T(\alpha)K_D^{-1}L_1(\alpha) > 0 \quad (\text{A.64})$$

que se mantém se

$$\sigma_m(K_D) > \frac{1}{4} \frac{\sigma_M^2(L_1)}{\alpha\sigma_m(\bar{K})} \quad (\text{A.65})$$

que pode ser escrito como

$$\sigma_m(K_D) > \frac{1}{4} \frac{[\alpha + \sigma_M(M)\sigma_M(\nabla_z^2 J)]^2}{\alpha\sigma_m(\bar{K})} \quad (\text{A.66})$$

O mínimo valor do lado direito de (A.66) ocorre em  $\alpha = \sigma_M(M)\sigma_M(\nabla_z^2 J)$ . Portanto, existe  $\alpha > 0$  de modo que  $A_1$  é positiva definida se

$$\sigma_m(K_D) > \frac{\sigma_M(M)\sigma_M(\nabla_z^2 J)}{\sigma_m(\bar{K})} \quad (\text{A.67})$$

Definindo  $\eta_e = [s^T \ e^T]^T$ , pode-se mostrar que  $\dot{V} \leq 0$  fora do domínio  $D_r$  dado por

$$D_r = \{\eta_E : |\eta_e| \leq \frac{\sigma_M(A_2)}{\sigma_m(A_1)} |\dot{z}_r|\} \quad (\text{A.68})$$

Supondo que  $|\dot{z}_r| < l_r$ , onde  $l_r$  é uma constante, para um determinado  $K_D$  tal que  $\sigma_m(K_D) > \sigma_M(M)\sigma_M(\nabla_z^2 J)$  seja satisfeita, pode se concluir que, se  $\bar{K}$  for escolhido grande o bastante de modo que  $\sigma_m(A_1)$  seja de ordem  $\mathcal{O}(\gamma_r l_r)$ , a norma do erro  $|\eta_e|$  e, portanto,  $\nabla_z J$ , serão de ordem  $\mathcal{O}(1/\gamma_r)$  e, portanto, podendo assim ser feitos arbitrariamente pequenos. O conjunto residual é dado por  $V \leq c_r$ , onde  $c_r = \sup_{D_r} J$ . Supondo que se pode aproximar quadraticamente a função  $J$  em torno de qualquer configuração de equilíbrio dada por  $\nabla_z J = 0$ , pode-se concluir que no conjunto residual a ordem de  $\eta_e$  é da mesma ordem que em  $D_r$ . ■

## A.8 Demonstração do Teorema 5

Considere a seguinte função candidata à função de Lyapunov

$$V_A = V_1 + \alpha_1 W_1 \quad (\text{A.69})$$

onde  $\alpha_1$  é uma constante não-negativa e

$$V_1 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} s_i^T \bar{M}_i s_i + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i \right) \quad (\text{A.70})$$

e  $W$  dado pela expressão

$$W_1 = V(\tilde{z}) + \beta_1 \Pi(\psi_i, \psi_{di}) \quad (\text{A.71})$$

onde  $\beta_1$  é uma constante não-negativa,  $V(\tilde{z})$  é definido como no Capítulo 2 e  $\Pi(\psi_i, \psi_{di}) = \frac{1}{2}(\psi_i - \psi_{di})^2$ .

Considera-se um espaço de estado da forma  $\mathcal{D}_0$  definido pela condição  $V_A < V_{A0}$ , onde é definido no estabelecimento do Teorema 5. Usando a propriedade de anti-simetria do sistema, a derivada temporal de (A.70) é dada por

$$\dot{V}_1 = \sum_{i=1}^N \left[ -s_i^T K_{Di} s_i - \frac{\sigma}{\gamma} (\tilde{\theta}_i + \theta_i^*)^T \tilde{\theta}_i \right] \quad (\text{A.72})$$

onde  $\gamma = \sigma_m(\Gamma_i^{-1})$ .

A derivada temporal de (A.69) é dada por

$$\dot{V}_A = \dot{V}_1 + \alpha_1 \dot{W}_1 \quad (\text{A.73})$$

onde, usando o fato de que o segundo termo de (A.72) é não positivo [46],  $\dot{V}_1$  satisfaz a seguinte desigualdade

$$\dot{V}_1 \leq -s^T K_D s \quad (\text{A.74})$$

e a derivada em relação ao tempo de  $W_1$  é

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N (\nabla_{z_i} J)^T \dot{z}_i + \beta_1 \left( \frac{\partial \Pi_i}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i - \frac{\partial \Pi_i}{\partial \psi_{di}} \dot{\psi}_{di} \right) \quad (\text{A.75})$$

Definindo  $\dot{z}_i = \mathcal{R}_{li} u_i$ ,  $\dot{\psi}_i = w_i$ ,  $s_i = [s_{ui} \quad s_{wi}]^T$ , que representa a partição de

$s_i$  relativa à velocidade linear e velocidade angular, respectivamente, e usando as equações (5.10), (5.14) e (5.15), pode-se escrever (A.75) como

$$\dot{W}_1 = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{u_i^2}{k_{ui}} + \frac{s_{ui}u_i}{k_{ui}} + \frac{\beta_1 w_i s_{wi}}{k_{wi}} - \frac{\beta_1 w_i^2}{k_{wi}} - \frac{\beta_1 s_{wi} \dot{\psi}_{di}}{k_{wi}} + \frac{\beta_1 w_i \dot{\psi}_{di}}{k_{wi}} \right]. \quad (\text{A.76})$$

O termo  $\dot{\psi}_{di}$  é definido por (como mostrado em [68])

$$\dot{\psi}_{di} = L_{1i} \sum_{j=1}^N L_{2ij} u_j \quad (\text{A.77})$$

$$L_{1i} = \frac{1}{\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_i}{\partial y_i}\right)^2}, \quad (\text{A.78})$$

$$L_{2ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \left( \frac{\partial^2 V_i}{\partial y_i \partial y_j} \sin(\psi_j) + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y_i \partial x_j} \cos(\psi_j) \right) - \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \left( \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i \partial x_j} \cos(\psi_j) + \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_i \partial y_j} \sin(\psi_j) \right) \quad (\text{A.79})$$

Definindo  $\dot{\psi}_D = [\dot{\psi}_{d1} \ \dot{\psi}_{d2} \ \dots \ \dot{\psi}_{dN}]^T$ , pode-se obter

$$\dot{\psi}_D = L_A u \quad (\text{A.80})$$

onde

$$L_A = \begin{bmatrix} L_{11}L_{211} & L_{11}L_{212} & \cdots & -L_{11}L_{21N} \\ L_{12}L_{221} & L_{12}L_{222} & \cdots & L_{12}L_{22N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{1N}L_{2N1} & L_{1N}L_{2N2} & \cdots & L_{1N}L_{2NN} \end{bmatrix} \quad (\text{A.81})$$

Então, (A.76) é expressa na forma vetorial como

$$\dot{W}_1 = -u^T K_u^{-1} u + u^T K_u^{-1} s_u + \beta_1 w^T K_w^{-1} s_w - \beta_1 w^T K_w^{-1} w - \beta_1 s_w L_A u + \beta_1 w^T L_a u \quad (\text{A.82})$$

onde  $s_u = [s_{u1} \ \dots \ s_{uN}]^T$  e  $s_w = [s_{w1} \ \dots \ s_{wN}]^T$ . Considerando que  $\nu = [\nu_1^T \ \dots \ s_N^T]^T$  e  $s = [s_1^T \ \dots \ s_N^T]^T$ , obtém-se

$$\dot{W}_1 = -\nu^T A_3 \nu + s^T A_4 \nu \quad (\text{A.83})$$

com  $A_3$  e  $A_4$  são definidas como

$$A_3 = T^T \begin{bmatrix} K_u^{-1} & -\frac{1}{2}\beta_1 L_A \\ -\frac{1}{2}\beta_1 L_A^T & \beta_1 K_w^{-1} \end{bmatrix} T \quad e \quad A_4 = T^T \begin{bmatrix} K_u^{-1} & 0 \\ -\beta_1 L_A^T & \beta_1 K_w^{-1} \end{bmatrix} T, \quad (\text{A.84})$$

onde a matriz de transformação  $T$  é definida tal que  $\nu = T^{-1}[u^T \ w^T]^T$ .

Em um domínio compacto dado por  $V_1 \leq c_5$ , com  $c_5 > 0$  arbitrariamente grande, a matriz Hessiana de  $J$  é limitada em norma por uma constante  $\sigma_M(\nabla^2 J)$ . A partir do argumento do complemento de Schur, segue  $\exists \beta_1$  para qualquer norma limitada de  $L_A$  tal que  $A_3$  é positiva definida.

A derivada temporal de (A.69) satisfaz

$$\dot{V}_A \leq -s^T K_D s - \alpha_1 \nu^T A_3 \nu + \alpha_1 s^T A_4 \nu \quad (\text{A.85})$$

onde  $K_D = \text{diag}\{K_{D1}, K_{D2}, \dots, K_{DN}\}$ . A desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\dot{V}_A \leq - \begin{bmatrix} s^T & \nu^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_D & -\frac{1}{2}\alpha_1 A_4 \\ -\frac{1}{2}\alpha_1 [A_4]^T & \alpha_1 A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \nu \end{bmatrix} \quad (\text{A.86})$$

Para  $\dot{V}_A \leq 0$ , o complemento de Schur  $S_1$  deve ser  $> 0$ , como segue

$$S_1 = \alpha_1 A_3 - \frac{1}{4} \alpha_1^2 [A_4]^T K_D^{-1} A_4 > 0 \quad (\text{A.87})$$

que se mantém se

$$\sigma_m(K_D) > \frac{1}{4} \frac{\alpha_1 \sigma_M^2[A_4]}{\sigma_m[A_3]} \quad (\text{A.88})$$

Então, com  $\alpha > 0$ , pode se concluir que  $\dot{V}_A$  é negativa semidefinida de modo que  $V_A$  é uniformemente limitada  $\forall t$ . Portanto, com  $K_D$  suficientemente grande, o conjunto  $\mathcal{D}_0$  é invariante (de modo que assumindo que os limites uniformes assumidos de  $L_A$  se mantêm) e pelo Lema de Barbalat pode se concluir que  $s(t)$ ,  $\nu(t) \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ . Da Equação (5.5), tem-se que  $\dot{q}_i \rightarrow 0$  e que cada  $q_i$  tende para um valor constante e que as distâncias interagentes tendem para valores constantes, de modo que alguma formação constante é alcançada assintoticamente. Além disso, se  $s_i \rightarrow 0$  e  $\nu_i \rightarrow 0$ , da Equação (5.10) então  $\nu_{di} \rightarrow 0$ , o que corresponde a  $\nabla_z J \rightarrow 0$ . Portanto, o conjunto de equilíbrio  $\Omega_e$  é alcançado assintoticamente. ■

## A.9 Demonstração do Teorema 6

Considere a seguinte candidata à função de Lyapunov

$$V_B = V_2 + \alpha_2 W_2 \quad (\text{A.89})$$

onde  $\alpha_2$  é uma constante positiva e  $V_2$  é definida como

$$V_2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} s_i^T H_i s_i + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\vartheta}_i^T \tilde{\vartheta}_i \right) \quad (\text{A.90})$$

e  $W_2$  é dada por (A.71)

A derivada temporal de (A.90) é dada por

$$\dot{V}_2 = \sum_{i=1}^N \left[ -s_i^T K_{D_i} s_i - \frac{\sigma}{\gamma} (\tilde{\theta}_i + \theta_i^*)^T \tilde{\theta}_i - s_i^T \bar{M}_i \dot{\nu}_{di} \right] \quad (\text{A.91})$$

Agora, será mostrado que o último termo de (A.91) é função de  $\nu$ . Considerando (5.11), a derivada de  $u_{di}$  é expressa por

$$\dot{u}_{di} = \frac{d}{dt} [-k_{ui} (\nabla_{z_i} J)^T \mathcal{R}_{li}] \quad (\text{A.92})$$

então pode ser mostrado que

$$\dot{u}_d = K_u H \nu \quad (\text{A.93})$$

onde  $H$  depende do gradiente e da matriz Hessiana da função potencial  $V$ .

A derivada de  $w_{di}$  pode ser expressa como  $\dot{w}_{di} = k_{wi}(-w_i - \dot{\psi}_{di})$ . Empilhando, i.e.,  $\dot{w}_d = [w_{d1} \ w_{d2} \ \dots \ w_{dN}]^T$ , tem-se que

$$\dot{w}_d = K_w A_2 \nu \quad (\text{A.94})$$

where  $K_w = \text{diag}\{k_{w1}, k_{w2}, \dots, k_{wN}\}$  e

$$A_2 = \begin{bmatrix} L_A & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} T \quad (\text{A.95})$$

onde a matriz de transformação  $T$  é definida tal que  $\nu = T^{-1}[u^T \ w^T]^T$ . Deste

modo,  $\dot{\nu}_d = [\dot{u}_d \ \dot{w}_d]^T$  é escrito como

$$\dot{\nu}_d = \bar{K}G\nu \quad (\text{A.96})$$

onde

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_u & 0 \\ 0 & K_w \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.97})$$

Portanto, a derivada de (A.90) satisfaz o seguinte

$$\dot{V}_2 \leq -s^T K_D s - s^T \bar{M} \bar{K} G \nu \quad (\text{A.98})$$

Considerando que  $\dot{W}_2$  é dada por (A.83), a derivada de (A.89) satisfaz a seguinte desigualdade

$$\dot{V}_B \leq -s^T K_D s - s^T \bar{M} \bar{K} G \nu - \alpha_2 \nu^T A_3 \nu + \alpha_2 s^T A_4 \nu \quad (\text{A.99})$$

onde  $A_3$  e  $A_4$  são definidos como no Apêndice A.8.

Em um domínio compacto dado por  $V_B \leq c_6$ , com  $c_6 > 0$  arbitrariamente grande, a matriz Hessiana de  $J$  é limitada em norma por uma constante  $\sigma_M(\nabla^2 J)$ . Assim, (A.99) pode ser reescrita como

$$\dot{V}_B \leq - \begin{bmatrix} s^T & \nu^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_D & -\frac{1}{2}H_1(\alpha_2) \\ -\frac{1}{2}H_1^T(\alpha_2) & \alpha_2 A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \nu \end{bmatrix} \quad (\text{A.100})$$

onde  $H_1(\alpha_2) = [\bar{M} \bar{K} G - \alpha_2 A_4]$ . Para  $\dot{V}_B \leq 0$ , o complement de Schur  $S_2$  deve satisfazer

$$S_2 = \alpha_2 A_3 - \frac{1}{4} H_1(\alpha_2)^T K_D^{-1} H_1(\alpha_2) > 0 \quad (\text{A.101})$$

que se mantém se

$$\sigma_m(K_D) > \frac{1}{4} \frac{\sigma_M^2(H_1(\alpha_2))}{\alpha_2 \sigma_m(A_3)} \quad (\text{A.102})$$

que pode ser escrito como

$$\sigma_m(K_D) > \frac{1}{4} \frac{[\alpha_2 + \sigma_M(\bar{M} \bar{K} G) \sigma_M(A_4)]^2}{\alpha \sigma_m(A_3)} \quad (\text{A.103})$$

O mínimo valor do lado direito de (A.103) ocorre em  $\alpha = \sigma_M(\bar{M} \bar{K} G) \sigma_M(A_4)$ . Por-

tanto, existe  $\alpha > 0$  de modo que  $\dot{V}_B$  é negativa semidefinida se

$$\sigma_m(K_D) > \frac{\sigma_M(\bar{M}\bar{K}G)\sigma_M(A_4)}{\sigma_m(A_3)} \quad (\text{A.104})$$

Então, pode se concluir que  $\dot{V}_B$  é negativa semi-definida de modo que  $V_B$  é uniformemente limitada  $\forall t$ . Portanto, para  $K_D$  suficientemente grande, o conjunto  $\mathcal{D}_0$  é invariante (de modo que os limites uniformes assumidos para  $L_A$  e  $H$  se mantêm) e pode-se concluir que  $s(t), \nu(t) \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ . Da Equação (5.5), tem-se que  $\dot{q}_i \rightarrow 0$  e cada  $q_i$  tende para uma constante e que as distâncias inte-ragentes tendem para valores constantes, de modo que alguma formação constante é alcançada assintoticamente. A limitação uniforme dos sinais do sistema pode ser concluída pela invariância do domínio  $V_B \leq c_6$  e a validade semiglobal dos resultados de convergência e estabilidade decorre do fato de  $c_6$  ser arbitrário e de que sempre existirá  $K_D$  satisfazendo (A.103). Além disso, o conjunto de equilíbrio  $\Omega_e$  é alcançado assintoticamente. ■

## A.10 Demonstração do Teorema 7

Considere a seguinte candidata à função de Lyapunov

$$V_C = V_3 + \alpha_3 W_3 \quad (\text{A.105})$$

onde  $\alpha_3$  é uma constante não negativa e  $V_3$  é definida como segue

$$V_3 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} s_i^T \bar{M}_i s_i + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\vartheta}_i^T \tilde{\vartheta}_i \right) \quad (\text{A.106})$$

e  $W_2$  é definida por

$$\begin{aligned} W_3 = & J(\tilde{z}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} [(z_{ri} - z_i)^T \mathcal{R}_{li}]^2 + \frac{1}{2} [(z_{ri} - z_i)^T \mathcal{R}_{ni}]^2 \\ & + \frac{1 - \cos(\psi_{ri} - \psi_i)}{k_{2i}} + \frac{1}{2} (\psi_i - \psi_{di})^2. \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

Note que os termos de rastreamento (três primeiros termos sob a soma) são como em [63]. A derivada  $V_3$  satisfaz

$$\dot{V}_3 \leq -s^T K_D s \quad (\text{A.108})$$

Para calcular a derivada de  $W_3$ , define-se  $e_{fi} = (\nabla_{z_i} J)^T R_{li}$ ,  $e_{\psi_{di}} = (\psi_i - \psi_{di})$ ,  $e_{1i} = (z_{ri} - z_i)^T R_{li}$ ,  $e_{2i} = [(z_{ri} - z_i)^T R_{ni}]^T$ ,  $e_{3i} = \sin(\psi_{ri} - \psi_i)$ ,  $\bar{u}_{ri} = u_{ri} \cos(\psi_{ri} - \psi_i)$ . Pode ser mostrado que  $\dot{W}_3$  satisfaz

$$\begin{aligned} \dot{W}_3 \leq & -e_f^T K_u e_f - e_{\psi_d}^T K_w e_{\psi_d} - e_1^T K_1 e_1 - e_3^T K_3 e_3 \\ & -s_u^T e_f - s_w^T e_{\psi_d} - s_u^T e_1 - s_w^T e_3 - e_{\psi_d}^T L_a s_u \\ & e_f^T \bar{u}_r + e_{\psi_d}^T w_r \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

onde  $K_u = \text{diag}\{k_{ui}\}$ ,  $K_w = \text{diag}\{k_{wi}\}$ ,  $K_1 = \text{diag}\{k_{1i}\}$ ,  $K_3 = \text{diag}\{k_{3i}/k_{2i}\}$ .

Após algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\dot{W}_3 \leq -e^T \bar{K} e - e^T \bar{L} s + e^T \bar{E} \bar{v}_r \quad (\text{A.110})$$

onde  $e = [e_f^T \ e_{\psi_d}^T \ e_1^T \ e_3^T]^T$ ,  $s = [s_u^T \ s_w^T]^T$ ,  $\bar{v}_r = [\bar{u}_r^T \ \bar{w}_r^T]^T$  and

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{L} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_A & I \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde a matriz de transformação  $T$  é definida tal que  $\nu = T^{-1}[u^T \ w^T]^T$ .

A derivada temporal de (A.105) satisfaz

$$\dot{V}_C \leq -s^T K_D s - \alpha_3 e^T \bar{K} e - \alpha_3 e^T \bar{L} s + \alpha_3 e^T \bar{E} \bar{v}_r$$

A desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\dot{V}_C \leq -[s^T \ e^T] A_3 \begin{bmatrix} s \\ e \end{bmatrix} + [s^T \ e^T] A_4 \bar{v}_r \quad (\text{A.111})$$

onde

$$A_5 = \begin{bmatrix} K_D & -\frac{1}{2}\alpha_3\bar{L} \\ -\frac{1}{2}\alpha_3\bar{L}^T & \alpha_3\bar{K} \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_3\bar{E} \end{bmatrix} \quad (\text{A.112})$$

A matriz simétrica  $A_5$  é positiva definida se o complemento de Schur  $S_3$  for positivo definido, i.e.,

$$S_3 = \alpha_3\bar{K} - \frac{1}{4}\alpha_3^2\bar{L}K_D^{-1}\bar{L} > 0 \quad (\text{A.113})$$

que se mantém se

$$\sigma_m(K_D) > \frac{1}{4} \frac{\alpha_3 \sigma_M^2(\bar{L})}{\sigma_m(\bar{K})} \quad (\text{A.114})$$

com  $\alpha_3$  suficientemente pequeno. Definindo  $\eta_e = [s^T \quad e^T]^T$ , pode-se mostrar que  $\dot{V}_C \leq 0$  fora do domínio  $D_r$  dado por

$$D_r = \{\eta_e : |\eta_e| > \frac{\sigma_M(A_6)}{\sigma_m(A_5)} |\bar{\nu}_r|\} \quad (\text{A.115})$$

Supondo que  $\bar{\nu}_r < l_r$ , onde  $l_r$  é uma constante, pode-se concluir que se  $\bar{K}$  for escolhido grande bastante de modo que  $\sigma_m(\bar{K})$  seja de ordem  $\mathcal{O}(\gamma_r l_r)$ , segue que a norma do erro  $|\eta_e|$ , e portanto  $\nabla_z J$ , serão de ordem  $\mathcal{O}(1/\gamma_r)$  e, portanto, podendo ser feitos arbitrariamente pequenos. O conjunto residual é dado por  $V_c \leq c_r$ , onde  $c_r = \sup_{D_r} V_c$ . Supondo que se pode aproximar quadraticamente a função  $J$  em torno de qualquer configuração de equilíbrio dada por  $\nabla_z J = 0$ , pode-se concluir que no conjunto residual a ordem de  $\eta_e$  é da mesma ordem que em  $D_r$ . ■

# Apêndice B

## Binary Model Reference Adaptive Control

Os resultados sobre B-MRAC para plantas com grau relativo 1, como proposto por [46], são relatados a seguir.

A conhecida equação do erro do MRAC tem a forma

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae - \bar{b}(u + \theta^{*T} \omega) \\ e_o &= y - y_m = h^T e \\ u &= \theta^T \omega \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde  $e \in \mathbb{R}^{3n-2}$  é o vetor de erro dos estados,  $n$  é a ordem da planta,  $u$  é a entrada,  $\theta \in \mathbb{R}^{2n}$  é o vetor de parâmetros ajustáveis,  $\theta^*$  é o vetor de parâmetros nominais,  $\omega \in \mathbb{R}^{2n}$  é vetor regressor,  $y$  é a saída da planta,  $y_m$  é a saída do modelo de referência,  $e_o$  é erro de rastreamento,  $\bar{b} = (\theta_{2n}^*)^{-1}b$ ,  $(A, b, h)$  é uma realização não-mínima adequada da função de transferência do modelo de referência considerado SPR.

A lei de adaptação com uma modificação  $\sigma$  [69] é dada por

$$\dot{\theta} = -\sigma\theta - \gamma e_o \omega, \quad \sigma > 0, \tag{B.2}$$

Em controle adaptativo com estrutura variável, conforme [47], a entrada  $u$  pode ser

$$u = -f(\omega) \operatorname{sgn}(e_o), \quad f(\omega) > |\theta^{*T} \omega| \quad (\text{B.3})$$

Por exemplo,  $u = -M_\theta |\omega| \operatorname{sgn}(e_o)$ ,  $M_\theta > |\theta^*|$

Uma versão binária de (B.3) é apresentada em [48] do seguinte modo

$$u = M_\theta |\omega| \mu(t), \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{\mu}(t) = \begin{cases} -\alpha \operatorname{sgn}(e_o) & ; \text{for } |\mu(t)| \leq 1, \\ -\beta \mu(t) & ; \text{for } |\mu(t)| > 1, \quad |\mu(t_o)| \leq 1, t > t_o \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes positivas e  $t_o$  tempo inicial. Pode ser mostrado que todas as soluções satisfazem  $|\mu(t)| \leq 1, \forall t > t_o$  e, além disso, quando  $\alpha \rightarrow \infty$ , (B.5) torna-se a lei tipo *bang-bang*  $\mu = -\operatorname{sgn}(e_o)$ . Assim, o controlador binário (B.4) e (B.5) tende para a lei de estrutura variável (B.3) à medida que  $\alpha \rightarrow \infty$ , em algum sentido.

Foi provado em [46] que um B-MRAC pode ser derivado usando um fator de projeção, aumentando a velocidade de adaptação, enquanto mantém o vetor de parâmetros ajustáveis  $\theta$  dentro de alguma bola finita de raio adequado. O fator de projeção é dado por (4.19) onde  $\sigma_{eq} = -\gamma e_o \theta^T \omega / |\theta|^2$ .

O B-MRAC tem excelentes propriedades de adaptação para  $\gamma$  suficientemente grandes. Isto resulta do fato se  $M_\theta > |\theta^*|$ , então  $|e(t)|^2$  tende exponencialmente rápido para algum valor de ordem  $O(1/\gamma)$ . As propriedades acima citadas foram mostradas em [46].

A principal motivação para sistemas de controle binários vem do fato que a ação de controle é baseada em funções temporais contínuas ou contínuas por partes, que diminui as exigências impostas aos atuadores. Esta é a principal vantagem sobre o controle com estrutura variável, que requer controle de ação excessiva. Além disso, problema de *chattering* pode ser minimizado usando B-MRAC.

# Apêndice C

## Produção Científica

Neste apêndice encontram-se trabalhos publicados que resumem os principais resultados obtidos até o momento.

1. PEREIRA, A. R., HSU, L. "Adaptive Formation Control using Artificial Potentials for Euler-Lagrange Agents". In: *Proc. of the 17th IFAC World Congress*, 2008.
2. PEREIRA, A. R., HSU, L. "Controle adaptativo de formação de agentes autônomos usando funções potenciais quadráticas". In: *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática*, Juiz de Fora, MG, Brasil, 2008.
3. PEREIRA, A. R., HSU, L., ORTEGA, R. "Adaptive Formation Control using Artificial Potentials for Euler-Lagrange Agents". In: *Proc. of the American Control Conference*, 2009.
4. GOUVEA, J. A., PEREIRA, A. R., HSU, L., et al. "Adaptive formation control of dynamic nonholonomic systems using potential functions". In: *Proceedings of American Control Conference 2010*, Baltimore, Maryland, USA, 2010.
5. GOUVEA, J. A., PEREIRA, A. R., HSU, L., et al. "Controle Adaptativo de Formação de Sistemas Dinâmicos Não Holonômicos usando Funções Potenciais". In: *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática*, Bonito, MS, Brasil, 2010.
6. PEREIRA, A. R., GOUVEA, J. A., HSU, L., et al. "Formation Adaptive Control for Nonholonomic Dynamic Agents: Regulation and Tracking". In: *accepted to 18th IFAC World Congress 2011*, a ser publicado.

# Apêndice D

## Controle de formação - Regulação com FPA quadrática

Utilizando a função potencial quadrática definida pela Equação (2.6), tem-se que o sistema representado por (A.46)-(A.47) pode ser considerado um sistema dinâmico **linear** com entrada  $s$  e saída  $w$ . Definindo  $g_i = \dot{z}_{di} = \nabla_{z_i} J(z)$  e considerando que  $d_{ij} = 0$ , para simplificação da análise e sem perda de generalidade. Deste modo, a função  $g_i$  pode ser escrita como

$$g_i = \sum_{j=1, j \in N^i}^N k(z_i - z_j) \quad (\text{D.1})$$

Colocando na forma de vetor a Equação (2.7), tem-se que

$$g(z) = kLz \quad (\text{D.2})$$

onde  $g = [g_1, g_2, \dots, g_N]^T \in \mathbb{R}^N$  e  $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$  é a matriz Laplaciana do grafo de informação  $G$ .

Derivando  $g$  em relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{g} = -kLg + kLs. \quad (\text{D.3})$$

Para mostrar que o sistema multiagente alcança o equilíbrio e, conseqüentemente o padrão desejado, uma transformação de coordenadas é realizada baseada na de-

composição passiva [58]. Com isso, temos que

$$f = Tg, \quad (\text{D.4})$$

onde  $f := [f_1, f_2, \dots, f_N]^T \in \mathbb{R}^N$  e  $T \in \mathbb{R}^{N \times N}$  é definida por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \cdots & \frac{1}{N} \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

Definiu-se  $f_e := [f_2, \dots, f_N]^T \in \mathbb{R}^{N-1}$  de modo que  $f = [f_1, f_e^T]^T$ . Então, de (D.4),  $f_e$  é dado por

$$f_e = [g_1 - g_2, g_2 - g_3, \dots, g_{(N-1)} - g_N]^T \quad (\text{D.6})$$

e  $f_1$  é definido como

$$f_1 = \frac{(g_1 + g_2 + \dots + g_N)}{N}, \quad (\text{D.7})$$

Fazendo a transformação de coordenadas, a Equação (D.3) pode ser reescrita como

$$\dot{f} = -kTLLT^{-1}f + kTLLs, \quad (\text{D.8})$$

onde a inversa de  $T$  é dada por

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_2 & \phi_3 & \cdots & \phi_N \\ 1 & \phi_2 - 1 & \phi_3 & \cdots & \phi_N \\ 1 & \phi_2 - 1 & \phi_3 - 1 & \cdots & \phi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \phi_2 - 1 & \phi_3 - 1 & \cdots & \phi_N - 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

com  $\phi_i = (N + 1 - i)/N$  e

$$TLLT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0_{(N-1) \times (N-1)} \\ 0_{(N-1) \times 1} & \bar{L} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.10})$$

onde  $\bar{L}$  é positiva definida.

A matriz  $TL$  pode ser escrita como

$$TL = \begin{bmatrix} 0_{1 \times N} \\ N\bar{B} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

onde  $\bar{B}$  é uma matriz positiva definida.

Deste modo, pode-se estabelecer o seguinte

$$\dot{f}_e = \bar{F}f_e + kN\bar{B}s, \quad (\text{D.12})$$

onde  $\bar{F} = -k\bar{L}$  é Hurwitz. Partindo de (D.12) e utilizando a inversa da derivada da transformação de (D.4), pode-se mostrar para o sistema representado pelas equações (A.46) e (A.47) é IOS, possuindo a seguinte propriedade

$$|w(t)| \leq \beta_2(|y(0)|, t) + \eta_2 \|s\| \quad (\text{D.13})$$

onde  $\beta_2$  é uma função de classe  $KL$  e  $\eta_2 = 2kNh_M |T^{-1}| |\bar{B}|$  é uma constante positiva. Colocando (A.44) na forma de vetor, pode-se mostrar em seguida que (4.24) representa um sistema IOpS com o limite definido pela expressão (A.45) onde  $\beta_1$  é uma função de classe  $KL$ ,  $k_3 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{\max}(K_D)}}$  e  $d_1 = \frac{2M_\theta}{\sqrt{h_M}}$ .

De um teorema de pequeno ganho para sistemas ISS ([67]), as equações (A.45) e (A.48) implicam que o sistema (4.24)(A.46-A.47) é (localmente) IOpS com entradas nulas, i.e., praticamente assintoticamente estável, com conjunto residual de tamanho  $O(1/\sqrt{\gamma})$ . Com isso, pode-se mostrar que  $|z_i - z_j - d_{ij}| \rightarrow O(1/\sqrt{\gamma})$ . Note que o sistema multi-agente é semi-globalmente estável, pois os limitantes em (A.48)(A.45) são independentes de  $\bar{w}$ .