

SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES MIMO COM RECONSTRUÇÃO PERFEITA

Cássio Barboza Ribeiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Marcello Luiz Rodrigues de Campos, Ph.D.

---

Prof. Paulo Sergio Ramirez Diniz, Ph.D.

---

Profª. Mariane Rembold Petraglia, Ph.D.

---

Prof. Luiz Wagner Pereira Biscainho, D.Sc.

---

Prof. Vítor Heloiz Nascimento, Ph.D.

---

Prof. Raimundo Sampaio Neto, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2007

RIBEIRO, CÁSSIO BARBOZA

Sistemas de Comunicações MIMO com  
Reconstrução Perfeita [Rio de Janeiro]  
2007

XIV, 107 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ,  
D.Sc., Engenharia Elétrica, 2007)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Equalização de Canal 2. Bancos de  
Filtros

I. COPPE/UFRJ      II. Título (série)

*À minha esposa Patricia, por me acompanhar em todos os desafios e ser a base forte que me sustenta nos momentos mais difíceis.*

## **Agradecimentos**

Aos meus orientadores, Prof. Paulo S. R. Diniz e Prof. Marcello L. R. de Campos, um sincero agradecimento pela orientação valiosa e pelo apoio dispensado nas horas mais difíceis.

Apesar do apoio técnico ter sido essencial para o desenvolvimento deste trabalho, pouco teria sido realizado sem o apoio pessoal daqueles que mantêm uma torcida constante pelo meu sucesso. Por isso, meu muito obrigado a meus pais, José Marcos e Vera Lúcia, meu irmão, Leonardo, e minha esposa, Patricia.

Agradeço também aos alunos, funcionários e professores do Laboratório de Processamento de Sinais, por proporcionarem um ambiente agradável e estimulante. Por fim gostaria de agradecer ao CNPq pelas bolsas de estudo concedidas, que tornaram viável a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES MIMO COM RECONSTRUÇÃO PERFEITA

Cássio Barboza Ribeiro

Outubro/2007

Orientadores: Paulo Sérgio Ramirez Diniz

Marcello Luiz Rodrigues de Campos

Programa: Engenharia Elétrica

Neste trabalho, buscamos estabelecer condições teóricas sobre o projeto do transmissor e do receptor em um sistema de comunicações de modo a garantir a possibilidade de reconstrução perfeita do sinal transmitido. Estendemos os resultados existentes na literatura, permitindo assim a utilização de equalizadores com ordem reduzida e um melhor aproveitamento da banda disponível, além de evitar restrições quanto ao comprimento da resposta ao impulso do canal. A relação entre a ordem do equalizador e a banda disponível é mostrada de forma explícita, permitindo um balanceamento entre a eficiência espectral e a complexidade do receptor.

Finalmente, mostramos como os resultados obtidos podem ser aplicados em sistemas de comunicações avançados, em particular naqueles empregando acesso múltiplo por divisão de código com códigos longos, modulação monoportadora e sistemas com múltiplas antenas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

MIMO COMMUNICATIONS SYSTEMS WITH PERFECT  
RECONSTRUCTION

Cássio Barboza Ribeiro

October/2007

Advisors: Paulo Sérgio Ramirez Diniz

Marcello Luiz Rodrigues de Campos

Department: Electrical Engineering

In this work we establish theoretical conditions for the design of transmitter and receiver in a communications system such that it is possible to achieve perfect reconstruction of the transmitted signal. We extended existing results in literature, allowing the use of equalizers with reduced order and a better utilization of the available bandwidth, while avoiding restrictions on the length of the channel impulse response. The relation between the order of the equalizer and the available bandwidth is derived explicitly, making it possible to trade-off spectral efficiency and receiver complexity.

Finally, we show how the obtained results can be applied to advanced communications systems, in particular to those employing code-division multiple access with long codes, single-carrier modulation and multiple-antenna systems.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bancos de Filtros em Sistemas de Comunicações</b>	<b>8</b>
2.1	Processamento de Sinais em Múltiplas Taxas . . . . .	8
2.1.1	Identidades Nobres . . . . .	9
2.2	Bancos de Filtros . . . . .	11
2.3	O Transmultiplexador Digital . . . . .	12
2.4	Representação Polifásica do Transmultiplexador . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Sistemas Variantes no Tempo</b>	<b>18</b>
3.1	Descrição de sistemas variantes no tempo . . . . .	18
3.1.1	Filtros Variantes no Tempo Periódicos . . . . .	20
3.1.2	Decimadores e Interpoladores como Sistemas Variantes no Tempo . . . . .	23
3.1.3	Cascata de Sistemas Variantes no Tempo . . . . .	25
3.2	Transmultiplexador com Filtros Variantes no Tempo . . . . .	33
3.3	Principais Contribuições . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Análise Teórica de Sistemas MIMO por Acesso Múltiplo</b>	<b>39</b>
4.1	Descrição do Sistema . . . . .	40
4.2	Trabalhos Relacionados . . . . .	44
4.3	Equalização ZF . . . . .	46
4.3.1	Equalizador ZF Invariante no Tempo . . . . .	48
4.3.2	Equalizador ZF Variante no Tempo . . . . .	54
4.3.3	Sistemas com filtros longos no transmissor . . . . .	57
4.4	Relação entre carga e complexidade . . . . .	65

4.5	Projeto do equalizador ZF-LS . . . . .	66
4.6	Principais Contribuições . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>70</b>
5.1	Sistemas com canais distintos . . . . .	70
5.2	Detecção multiusuário . . . . .	72
5.2.1	Simulações . . . . .	74
5.3	Modulação Monoportadora . . . . .	76
5.3.1	SC-FDMA . . . . .	79
5.3.2	Relação com Resultados Anteriores . . . . .	80
5.3.3	Simulações . . . . .	87
5.4	Sistemas com Múltiplas Antenas . . . . .	90
5.4.1	Simulações . . . . .	96
5.5	Principais Contribuições . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>98</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>101</b>

# Lista de Figuras

2.1	Blocos construtores para processamento de sinais em múltiplas taxas: (a) decimador, (b) interpolador. . . . .	9
2.2	Efeito do interpolador e do decimador no domínio da transformada $z$ : (a) sinal original; (b) interpolação com $L = 4$ ; (c) decimação com $M = 2$ . . . . .	10
2.3	Identities Nobres. . . . .	10
2.4	Bancos de filtros: (a) análise; (b) síntese. . . . .	11
2.5	Transmultiplexador Discreto. . . . .	12
2.6	Transmultiplexador discreto com equalizador. . . . .	14
2.7	Representação polifásica do transmultiplexador. . . . .	16
2.8	Representação alternativa do transmultiplexador usando decom- posição polifásica. . . . .	17
3.1	Sistema variante no tempo visto como um banco de $P$ filtros invari- antes no tempo, com as entradas moduladas. . . . .	22
3.2	Sistema variante no tempo visto como um banco de $P$ filtros invari- antes no tempo, com as saídas moduladas. . . . .	23
3.3	Exemplo de mapa bifreqüência. . . . .	24
3.4	Mapa bifreqüência de um decimador com $M = 4$ . . . . .	25
3.5	Mapa bifreqüência de um interpolador com $L = 4$ . . . . .	26
3.6	Cascata de dois sistemas variantes no tempo. . . . .	26
3.7	Cascata de dois sistemas variantes no tempo: (a) interpolador seguido de filtro VTP e (b) filtro VTP seguido de decimador. . . . .	27
3.8	Estrutura do mapa bifreqüência da cascata de um interpolador $L=2$ e um filtro VTP com período $N = 4$ . . . . .	30

3.9	Cascata de interpolador e filtro VTP visto como um banco de filtros LIT com as entradas moduladas. . . . .	30
3.10	Mapa bifreqüência da cascata de um filtro VTP com período $N = 4$ e um decimador com $M = 2$ . . . . .	33
3.11	Cascata de um interpolador com dois filtros VTP e um decimador. . .	33
3.12	Transmultiplexador no domínio do tempo. . . . .	34
3.13	Exemplo de mapa bi-freqüência do transmissor de um transmultiple- xador. . . . .	37
3.14	Exemplo de mapa bi-freqüência do receptor de um transmultiplexador.	38
4.1	Sistema de comunicações no domínio do tempo. . . . .	40
4.2	Representação de um transmultiplexador variante no tempo como um banco de filtros. . . . .	44
4.3	Carga máxima em função de $Q$ para $T = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = 2$ . . . . .	66
5.1	Sistema de comunicações no domínio do tempo, com um canal dife- rente associado a cada usuário. . . . .	71
5.2	Sistema de comunicações no domínio do tempo com canais distintos, onde $h_m(k) = h'_m(k) * h(k)$ e $h'_0(k) \neq h'_1(k) \neq \dots \neq h'_{M-1}(k)$ . . . . .	71
5.3	Representação de códigos longos+curtos como um código curto vari- ante no tempo. . . . .	73
5.4	Resposta em freqüência do canal definido pela equação (5.5). . . . .	74
5.5	BER em função da SNR para $N = 16$ e $M = 6, 9, 12, 14$ . . . . .	75
5.6	BER em função de SNR para $N = 16$ , $M = 12$ e $Q = 1, 2, 3, 4$ . . . . .	75
5.7	MSE como função de $N - M$ para um canal com um conjunto de zeros congruentes com 6 elementos. . . . .	77
5.8	(a) OFDM, (b) Sistema monoportadora. PC denota Prefixo Cíclico. . .	78
5.9	Diagrama em blocos de um sistema SC-FDMA. . . . .	79
5.10	Mapeamento de sub-portadoras em um sistema SC-FDMA. (a) Modo distribuído, (b) Modo localizado. . . . .	80
5.11	Estrutura do produto $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$ para $B = 1$ . . . . .	85
5.12	Estrutura do produto $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$ para $B > 1$ . . . . .	86

5.13	Relação entre os diferentes valores obtidos para $Q$ nas equações (5.21) e (5.26), para diferentes valores de $N - M$ , com $M = 256$ , $L = 32$ e $M_t = 2$ . . . . .	87
5.14	Relação entre os diferentes valores obtidos para $Q$ nas equações (5.21) e (5.26), para diferentes valores de $N - M$ , com $M = 256$ , $L = 300$ e $M_t = 2$ . . . . .	88
5.15	MSE como função de $Q$ para um sistema SC-FDMA com $N = 64$ , $M_s = 31$ , e canais de ordem $L = 6$ . . . . .	89
5.16	Sistema MIMO com duas antenas no transmissor e no receptor. . . .	91
5.17	MSE como função de $Q$ para um sistema MIMO $2 \times 2$ com $N = 32$ , $M_s = 30$ , e canais de ordem $L = 6$ . . . . .	97

# Lista de Tabelas

4.1	Condições necessárias e suficientes para equalização ZF para pré-codificador invariante no tempo . . . . .	64
4.2	Condições necessárias e suficientes para equalização ZF para precodificador variante no tempo . . . . .	64
5.1	MSE no caso em que o canal de um dos terminais possui zeros congruentes, com $N = 8$ e $L = 6$ . . . . .	89

# Glossário

3GPP	Third Generation Partnership Project
BER	Bit Error Rate
CDMA	Code Division Multiple Access
CFO	Carrier Frequency Offset
DTFT	Discrete-Time Fourier Transform
IFDMA	Interleaved SC-FDMA
LFDMA	Localized SC-FDMA
LS	Least Squares
LTE	Long-Term Evolution
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MMSE	Minimum Mean Square Error
MRC	Maximum Ratio Combining
MSE	Mean Squared Error
MUD	Multiuser Detection
OFDM	Orthogonal Frequency Division Multiplex
OFDMA	Orthogonal Frequency Division Multiple Access
PAPR	Peak-to-Average Power Ratio
PR	Perfect Reconstruction
SC	Single Carrier
SC-FDMA	Single-Carrier Frequency Division Multiple Access
SISO	Single Input Single Output
SNR	Signal to Noise Ratio
SVD	Singular Value Decomposition
UMTS	Universal Mobile Telecommunications System

VoIP		Voice over IP
ZF		Zero Forcing

# Capítulo 1

## Introdução

Até pouco tempo atrás, soluções independentes eram utilizadas para diferentes necessidades de comunicação, como, por exemplo, a comunicação oral e escrita. A comunicação por voz era realizada tipicamente por telefone, enquanto a transmissão de documentos escritos necessitava da utilização de meios físicos de transporte. Hoje, boa parte dos documentos gerados em empresas não é jamais convertida em material impresso, existindo somente na forma de informação digital armazenada em discos magnéticos ou óticos. Por outro lado, é cada vez mais comum a conversão de sinais de voz em formato digital para comunicação mais eficiente e barata entre os interlocutores, utilizando tecnologias como Voz sobre IP (*Voice over IP*, VoIP). Essa convergência nos meios em que a informação é manipulada leva também a uma convergência de equipamentos e dos meios de comunicação empregados para transmissão das informações.

Essa convergência pode ser observada hoje nos telefones celulares avançados, que são capazes de gravar fotografias e vídeos digitais, acessar sítios na Internet com conteúdo multimídia, receber e enviar e-mail, tocar músicas armazenadas em cartões de memória, além de realizar a tarefa mais esperada de um telefone, que é a comunicação por voz. Naturalmente, toda essa capacidade de geração e armazenamento de dados implica uma expectativa de compartilhar estes dados na mesma proporção. Para tanto, é preciso haver a disponibilidade de sistemas de transmissão de dados em alta velocidade, não apenas através de cabos, mas principalmente utilizando conexões sem fio.

Vários sistemas existem hoje que permitem a transmissão de dados sem fio a

velocidades acima daquelas alcançadas por transmissões utilizando linhas telefônicas comuns. As origens e avanços de cada sistema são bastante variados, e, portanto, é conveniente descrever sucintamente cada linha evolutiva em separado, para dar um panorama mais completo e mostrar a direção dos avanços futuros.

Embora os sistemas de comunicações celulares de segunda geração não tenham sido concebidos com o objetivo principal de transmissão de dados, tais sistemas evoluíram para incorporar características típicas desse tipo de transmissão, como comutação de pacotes, e incorporar um aumento nas taxas de dados além do estritamente necessário para transmissão de voz. Os sistemas celulares de segunda geração mais utilizados atualmente dividem-se em duas famílias: GSM e CDMA (IS-95) [1, 2]. Embora as tecnologias empregadas sejam distintas, assim como o caminho evolucionário seguido, podemos grosso modo afirmar que ambos os sistemas evoluíram para a chamada geração 2.5, ou 2.5G, com transmissão de dados até 144kbps, e já incorporando características como transmissão de pacotes de dados, além de permitir conexões ativas por longos períodos, trazendo a experiência de transmissão de dados pelo celular mais próxima daquela oferecida por conexões banda-larga DSL ou a cabo.

Apesar desses avanços, na prática a taxa média de transmissão de dados nos sistemas 2.5G é tipicamente bem abaixo da taxa máxima teórica. Além disso, tais sistemas foram concebidos de modo a compartilhar a interface aérea com os sistemas de segunda geração já instalados, e, portanto, não são plenamente otimizados para transmissão de dados. Os sistemas de comunicação celular de terceira geração (3G), por sua vez, foram projetados tendo a transmissão de dados como objetivo desde o início. A infra-estrutura de rede foi em grande parte compartilhada com os sistemas 2.5G, mas no caso do GSM a interface aérea foi totalmente remodelada para melhor acomodar a transmissão de dados, originando o UMTS [1, 3]. No ramo evolucionário do IS-95, o sistema de terceira geração é chamado de cdma2000 1x. Tais sistemas permitem uma taxa de transmissão de dados de até 2Mbps no enlace direto, além de acomodar uma quantidade maior de usuários transmitindo dados simultaneamente.

Enquanto as redes 3G estavam em fase final de padronização e implementação, surgiram alternativas para transmissão de dados sem fio independentes das redes de telefonia celular. A família de padrões IEEE 802.11x permite a imple-

mentação de redes locais sem fio utilizando principalmente a banda de frequência em 2.4GHz, que é de utilização livre na Europa e na América do Norte, entre outros. Apesar de vários padrões existirem dentro da mesma família, os mais frequentemente utilizados são IEEE 802.11b e IEEE 802.11g, comumente chamados de *Wi-Fi* [4], que permitem taxas máximas de 11Mbps e 54Mbps, respectivamente. Sistemas baseados em Wi-Fi são baratos e facilmente instalados em escritórios ou residências. A popularização do padrão vai além das aplicações de computadores, sendo ele encontrado também em consoles de *videogames* e telefones celulares mais avançados. Apesar da alta popularidade do Wi-Fi, a falta de coordenação entre os vários pontos de rede, pela própria natureza do Wi-Fi, pode gerar situações em que a interferência torna-se demasiado elevada, impossibilitando uma comunicação eficiente. Outras desvantagens são o baixo alcance dos pontos de acesso e deficiências nos algoritmos de segurança.

As redes 3G continuaram seu caminho evolucionário, gerando o HSxPA como evolução do UMTS, e o cdma2000 1xEVDO (incluindo Rev. A e Rev. B) como evolução do cdma2000 1x. Ambos os sistemas são conhecidos como 3.5G, e têm como objetivo permitir taxas de dados da ordem de 10-20Mbps [5,6]. Além disso, outros aspectos são abordados, como redução do tempo de latência, importante para aplicações em tempo real, como VoIP.

Um denominador comum aos sistemas de terceira geração é a utilização da técnica de Acesso Múltiplo por Divisão de Código (*Code Division Multiple Access*, CDMA) na interface de rádio. Porém, a evolução dos sistemas 3G/3.5G para a quarta geração de telefonia móvel provavelmente significará uma ruptura com a interface aérea utilizada até o momento. Na família GSM/UMTS já se encontra em desenvolvimento a chamada Evolução de Longo Prazo (*Long-Term Evolution*, LTE) do sistema 3G, também chamada não-oficialmente de 3.9G ou Super 3G. O LTE pode ser visto como uma preparação para a quarta geração (4G) e, portanto, é razoável supor que ambos os sistemas compartilharão a mesma interface aérea. A interface aérea do LTE utiliza Acesso Múltiplo por Divisão Ortogonal de Frequência (*Orthogonal Frequency Division Multiple Access*, OFDMA) para o enlace direto e sistema Monoportadora com Acesso Múltiplo por Divisão de Frequência (*Single Carrier - Frequency Division Multiple Access*, SC-FDMA) para o enlace reverso.

OFDMA é também a técnica de transmissão empregada na evolução dos sistemas Wi-Fi, conhecida como IEEE 802.16d/e, ou WiMAX [7]. A primeira versão do WiMAX, conhecido como WiMAX fixo, já se encontra em fase de implementação, mas a alternativa que prevê mobilidade, sendo, portanto, concorrente do LTE e 4G deve ter as primeiras redes comerciais lançadas em breve.

Um objetivo comum que pode ser percebido na evolução dos sistemas de comunicações móveis é a busca por formas de aproveitar da forma mais eficiente possível a banda de rádio disponível, sendo este um recurso caro e escasso. No que diz respeito à camada física, técnicas que utilizam múltiplas portadoras, como OFDM, OFDMA e SC-FDMA são muito cotadas por sua combinação de alta eficiência espectral e custo computacional relativamente baixo dos transmissores e receptores. Entretanto, a eficiência espectral de sistemas baseados em OFDM, OFDMA e SC-FDMA depende diretamente da dispersão temporal causada pelo canal de propagação, uma vez que todo bloco de dados transmitido deve ser isolado do anterior por um prefixo de duração maior ou igual à dispersão temporal do canal [8,9].

Neste trabalho analisamos um sistema de comunicações genérico do ponto de vista dos requisitos de projeto que impedem a reconstrução perfeita dos sinais transmitidos, também chamada de equalização *Zero-Forcing* (ZF), já que o objetivo é fazer com que o erro de reconstrução do sinal transmitido seja igual a zero. Em sistemas de comunicações digitais, freqüentemente não é necessária a reconstrução perfeita, bastando que a razão sinal-ruído após o receptor seja suficiente para permitir a identificação dos símbolos dentro de uma constelação pré-definida. Entretanto, para buscar alta eficiência espectral, sistemas 4G tendem a lançar mão de constelações como 64 QAM ou mais complexas onde a razão sinal-ruído após o receptor deve ser alta para permitir identificação dos símbolos originais com alta probabilidade de acerto. Assim, é importante garantir que o projeto do sistema não implique limitações que impeçam a utilização de modulações que permitam maior eficiência na utilização do canal.

Em sistemas derivados do OFDM isso é garantido através da utilização do prefixo cíclico, que promove um isolamento entre os blocos de dados, tornando possível para o receptor inverter o canal em cada sub-portadora e recuperar o sinal original. Naturalmente, devido à presença de ruído no sinal recebido, esse não é

necessariamente o receptor que proporciona a menor taxa de erro de bit, mas o fato de ser possível a reconstrução perfeita garante que é possível utilizar uma modulação de ordem arbitrariamente elevada, dependendo para isso basicamente do ruído, da interferência, e das limitações do amplificador de potência do transmissor.

O sistema considerado neste trabalho permite uma generalização com relação ao OFDM ao considerar a utilização de filtros de comprimento arbitrário no transmissor e canais com dispersão temporal arbitrária, mas inclui sistemas OFDM como um caso especial [10]. Mostramos as condições para que seja possível a reconstrução perfeita utilizando bancos de filtros de comprimento finito (*Finite Impulse Response*, FIR) no receptor, e especificamos qual a ordem dos filtros do receptor em cada caso considerado. Mostramos também que a ordem dos filtros do receptor depende da quantidade de redundância inserida na transmissão dos blocos de dados (por exemplo, em sistemas OFDM a redundância corresponde ao prefixo cíclico). Alguns trabalhos anteriores disponíveis na literatura já abordaram problemas similares [10–14], mas devido a diferenças na metodologia de análise e nos pressupostos considerados em cada trabalho, os resultados são complementares e eventualmente conflitantes. De qualquer modo, a importância da redundância na transmissão quando bancos de filtros FIR são utilizados é abordada de forma consistente nos trabalhos relacionados. Em [10, 11] mostra-se que deve ser introduzida redundância no bloco transmitido de modo a ser possível reconstrução perfeita com bancos de filtros FIR. A quantidade exata de redundância depende da realização do canal e do projeto do transmultiplexador.

Comparada com os trabalhos relacionados na literatura, a análise realizada neste trabalho é mais geral e não é restrita a sistemas em que a interferência entre símbolos é explicitamente removida [10] ou em que os filtros do transmissor são invariantes no tempo [11–13]. Mostramos que algumas condições consideradas em [10] para equalização ZF são apenas suficientes. Conseqüentemente, as relações derivadas neste trabalho permitem a utilização de equalizadores menos complexos e transmissores com menos redundância. Além disso, os resultados são aplicáveis também em situações onde a resposta ao impulso do canal é maior do que o comprimento do bloco.

Como aplicação dos resultados obtidos, mostramos que os mesmos são fer-

ramentas úteis para abordar o problema de detecção multiusuário (*MultiUser Detection*, MUD) em sistemas de comunicações, em particular naqueles empregando tecnologia CDMA. Muitos trabalhos na literatura abordam o problema de MUD para sistemas CDMA com códigos curtos [15, 16], mas MUD para sistemas CDMA com códigos longos é um problema mais complexo. Trabalhos recentes relacionados com sistemas CDMA empregando códigos longos incluem equalização com minimização de erros médios quadráticos (*Minimum Mean Square Error*, MMSE), cancelamento de interferência [17–22] e equalização ZF na presença de múltiplas antenas e subamostragem no receptor [17, 19, 23]. Códigos longos são amplamente utilizados em sistemas 3G (UMTS), e, portanto, é relevante desenvolver detectores capazes de lidar com as condições encontradas nesses sistemas comerciais. Utilizando a abordagem apresentada neste trabalho, é possível analisar o sistema de comunicações utilizando CDMA como um banco de filtros, onde os códigos longos são equivalentes a códigos curtos variantes no tempo.

Também mostramos que a análise pode ser empregada diretamente para transmissão utilizando modulação monoportadora (*Single Carrier*, SC). Levando em consideração que o LTE utilizará SC-FDMA para o enlace reverso, estendemos a análise para incluir também este tipo de configuração. A análise é realizada na mesma abordagem genérica do restante do documento, e, portanto, os resultados obtidos podem ser aplicados a outros sistemas com características semelhantes.

Finalmente, consideramos o importante caso de sistemas com múltiplas antenas, comumente chamados na literatura de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple-Input Multiple-Output*, MIMO)<sup>1</sup>. Sistemas MIMO com múltiplas antenas são considerados parte essencial dos sistemas de comunicações móveis de 3.9G e 4G [1, 7, 24], e, portanto, é de fundamental importância que sejam compreendidas as limitações de projeto para esse tipo de configuração. Mostramos que os resultados obtidos anteriormente podem ser aplicados diretamente a sistemas MIMO com múltiplas antenas, com a importante observação de que a diversidade introduzida pela existência de canais independentes conectando as múltiplas antenas

---

<sup>1</sup>O termo MIMO é empregado neste trabalho para denotar qualquer sistema com mais de uma entrada e mais de uma saída, como é o caso de sistemas baseados em bancos de filtros, mesmo que apenas uma antena seja empregada em cada lado do sistema de comunicações.

simplifica as relações para existência de equalizadores ZF. Em particular, mostramos que a redundância na transmissão pode ser reduzida do mesmo modo que quando são utilizados transmissores variantes no tempo em sistemas com apenas uma antena. Mostramos que esse resultado é válido para as três principais configurações utilizadas em sistemas MIMO com múltiplas antenas: multiplexação espacial, diversidade de transmissão e diversidade de recepção [25].

Este documento está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 mostramos uma breve revisão de bancos de filtros e sistemas multitaxas. No Capítulo 3 mostramos uma introdução a sistemas variantes no tempo, que serão utilizados no restante do trabalho, e também introduzimos a análise em frequência de sistemas variantes no tempo periódicos. No Capítulo 4 desenvolvemos a análise no domínio do tempo do sistema de comunicações, obtendo os principais resultados deste trabalho. No Capítulo 5 mostramos como os resultados obtidos no Capítulo 4 podem ser empregados para a realização de detecção multiusuário em sistemas CDMA utilizando códigos longos, sistemas com banco de filtros no enlace reverso (com aplicação para sistemas SC-FDMA) e sistemas de comunicações com múltiplas antenas. Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões finais e sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Bancos de Filtros em Sistemas de Comunicações

Vamos iniciar este capítulo introduzindo parte da terminologia e dos blocos básicos utilizados em processamento de sinais em múltiplas taxas. Vamos introduzir também o conceito de bancos de filtros e discutir algumas de suas propriedades mais importantes. Mostraremos ainda a estrutura do transmultiplexador, que será largamente utilizado neste trabalho, principalmente nos Capítulos 4 e 5.

Este capítulo tem o propósito de servir como referência rápida para o leitor e não ensinar o assunto ou servir como uma revisão aprofundada do mesmo. Maiores detalhes podem ser encontrados em [26–30].

### 2.1 Processamento de Sinais em Múltiplas Taxas

As operações essenciais em processamento de sinais em múltiplas taxas são a *decimação* e a *interpolação*. Tais operações são representadas pelos blocos mostrados na Figura 2.1. O decimador recebe uma seqüência de entrada  $x(n)$  e produz uma seqüência de saída

$$y_D(n) = x(Mn), \quad (2.1)$$

com  $M$  inteiro. Dessa forma, apenas as amostras de  $x(n)$  que ocorram em intervalos de tempo múltiplos de  $M$  serão retidas pelo decimador. O interpolador recebe uma

seqüência de entrada  $x(n)$  e produz uma seqüência de saída

$$y_I(n) = \begin{cases} x(n/L), & \text{se } n \text{ for múltiplo inteiro de } L \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.2)$$

com  $L$  inteiro. Ao contrário do decimador, o interpolador não provoca perda de informação, e, portanto,  $x(n)$  pode ser sempre recuperado a partir de  $y_I(n)$ .

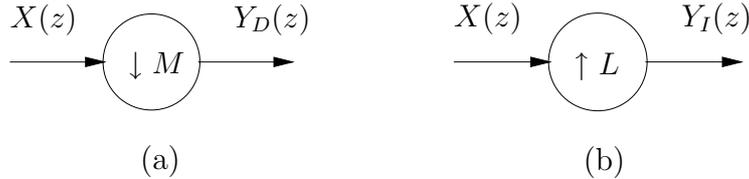


Figura 2.1: Blocos construtores para processamento de sinais em múltiplas taxas: (a) decimador, (b) interpolador.

As relações de entrada e saída do decimador e do interpolador podem ser representadas no domínio da transformada de Fourier como [26, 29]

$$Y_D(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^k), \quad W_M = e^{-j2\pi/M} \quad (2.3)$$

$$Y_I(z) = X(z^L) \quad (2.4)$$

A Figura 2.2(b) mostra o efeito da interpolação no domínio da transformada  $z$ . Podemos observar que ao interpolarmos o sinal  $X(z)$ , criamos réplicas comprimidas do mesmo, e portanto não há perda de informação. Já para a decimação, é evidente que se  $X(z)$  não for limitado em  $\pi/M$  haverá *aliasing* e conseqüente perda de informação, como mostrado na Figura 2.2(c).

### 2.1.1 Identidades Nobres

As *identidades nobres* são propriedades para a interconexão em cascata de um decimador seguido de um filtro digital e a interconexão em cascata de um filtro digital seguido de um interpolador. Essas interconexões surgem quando implementamos sistemas em múltiplas taxas de forma polifásica (c.f. Seção 2.4). As identidades nobres encontram-se resumidas na Figura 2.3.

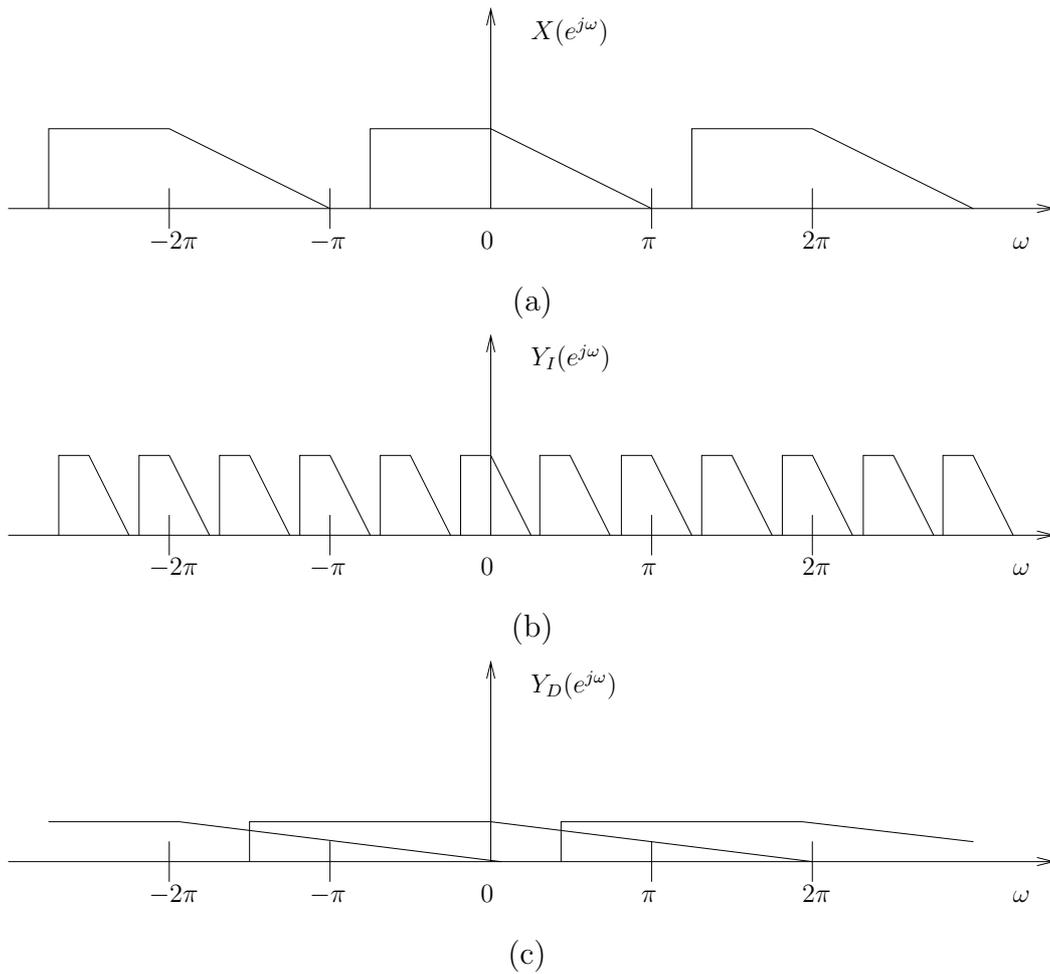


Figura 2.2: Efeito do interpolador e do decimador no domínio da transformada  $z$ :  
 (a) sinal original; (b) interpolação com  $L = 4$ ; (c) decimação com  $M = 2$ .

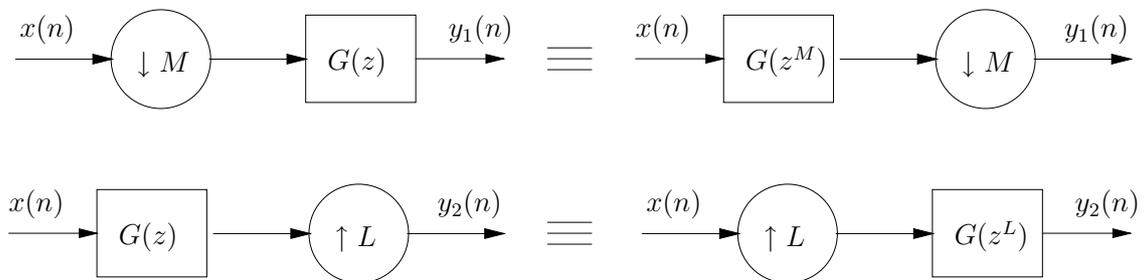


Figura 2.3: Identidades Nobres.

## 2.2 Bancos de Filtros

Um banco de filtros é um conjunto de filtros com uma entrada comum e várias saídas ou uma saída comum para várias entradas. Essas situações são mostradas na Figura 2.4. O sistema na Figura 2.4(a) é chamado de banco de filtros de análise, e os filtros  $G_k(z)$  são os filtros de análise. Esse sistema divide o sinal  $x(n)$  em  $M$  sinais  $x_k(n)$ , chamados de sinais em *sub-bandas*. O sistema mostrado na Figura 2.4(b) é chamado de banco de filtros de síntese, e os filtros  $F_k(z)$  são os filtros de síntese.

No caso em que o fator de decimação/interpolação é igual ao número de sub-bandas ( $N = M$ ), o sistema é chamado de minimamente interpolado ou maximamente decimado, já que este é o maior valor do fator de decimação tal que a informação seja preservada.

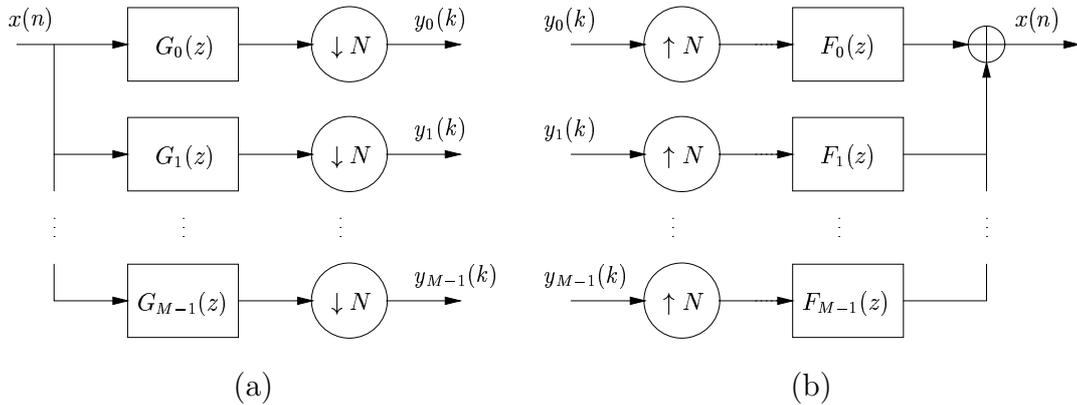


Figura 2.4: Bancos de filtros: (a) análise; (b) síntese.

Os filtros  $G_k(z)$  e  $F_k(z)$  podem ser projetados de tal forma que se um sinal for injetado no banco de filtros de análise e os sinais em sub-bandas forem injetados no banco de filtros de síntese, o resultado é o próprio sinal original; nesse caso diz-se que o banco de filtros possui a característica de *reconstrução perfeita*. Caso o banco de filtros não possua reconstrução perfeita, existem três fontes de erros no sinal reconstruído: *aliasing*, distorção de amplitude e distorção de fase.

Em muitos casos a exigência de reconstrução perfeita traz limitações severas quanto à resposta em frequência dos filtros, resultando em uma fraca atenuação na banda de rejeição e uma larga faixa de transição. Para contornar esses problemas podem ser utilizados bancos de filtros com reconstrução quase perfeita, cujos filtros são projetados de modo a minimizar os efeitos mencionados acima. Nesse caso o sinal

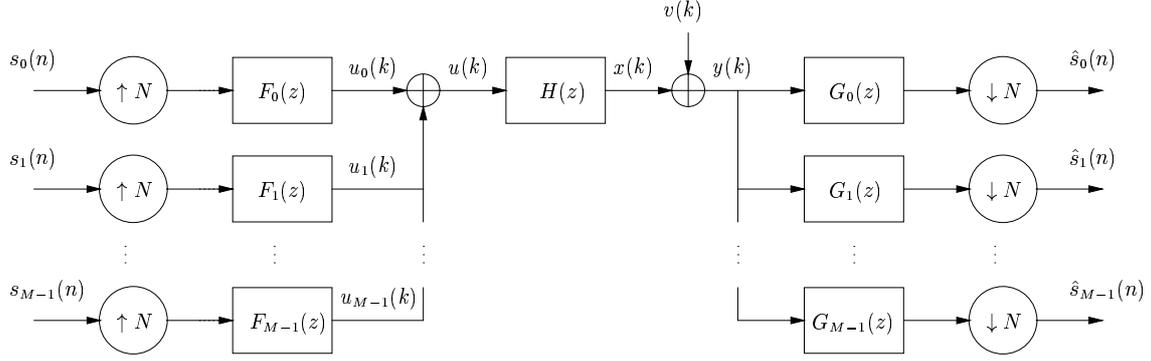


Figura 2.5: Transmultiplexador Discreto.

reconstruído diferirá ligeiramente do sinal original, mas isso não é necessariamente um problema, desde que o erro seja pequeno comparado com as demais fontes de erro no sistema como um todo (erros de quantização, ruído etc.). Normalmente, com esse procedimento é possível obter filtros com características em frequência mais atraentes.

Existem várias técnicas para projeto de bancos de filtros com reconstrução perfeita ou quase perfeita, e uma análise abrangente das mesmas pode ser encontrada em [26, 27, 31, 32].

## 2.3 O Transmultiplexador Digital

Uma estrutura de banco de filtros que é central para o desenvolvimento deste trabalho é o *transmultiplexador*. Originalmente o transmultiplexador era utilizado para converter dados multiplexados em frequência para dados multiplexados no tempo e vice-versa [30]. A estrutura do transmultiplexador é mostrada na Figura 2.5. Comparando-a com a Figura 2.4, vemos que o transmultiplexador nada mais é do que um banco de filtros onde o sinal de entrada é injetado no banco de filtros de síntese e a saída obtida no banco de filtros de análise.

Nessa configuração de transmultiplexador, os filtros  $F_m(z)$  são também chamados de *transmissores* ou *filtros de transmissão*, e suas saídas são dadas por

$$u_m(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m(n) f_m(k - nN), \quad (2.5)$$

onde  $f_m(k)$  são as respostas ao impulso dos filtros de transmissão e  $s_m(n)$  são os símbolos transmitidos no sub-canal  $m$ . Para demonstrar (2.5), vamos chamar de

$r_m(k)$  o sinal na saída de cada um dos interpoladores. Assim, podemos escrever  $u_m(k)$  como

$$u_m(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r_m(j) f_m(k - j)$$

Como  $r_m(j) \neq 0$  apenas para  $j = nN$ , então

$$u_m(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_m(nN) f_m(k - nN)$$

Como  $r_m(nN) = s_m(n)$ , obtemos (2.5).

A saída do banco de filtros de síntese é então dada por

$$u(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m(n) f_m(k - nN). \quad (2.6)$$

Se os filtros  $F_k(z)$  forem “bons” filtros passa-banda, podemos dizer que os sinais  $u_m(k)$  estão em bandas de frequência diferentes, e portanto  $u(k)$  é um sinal multiplexado em frequência.

Os filtros  $G_m(z)$  também recebem uma denominação especial quando utilizados na configuração de transmultiplexador, sendo chamados de *receptores* ou *filtros de recepção*. Os sinais  $\hat{s}_m(n)$  são os símbolos estimados no receptor, e são dados por

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k) g_m(nN - k), \quad (2.7)$$

onde  $g_m(k)$  são as respostas ao impulso dos filtros de recepção, e  $y(k)$  é o sinal que chega no transmissor. Para demonstrar (2.7), vamos chamar de  $d_m(k)$  o sinal na entrada de cada decimador. Assim podemos escrever

$$d_m(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(j) g_m(k - j).$$

Como  $\hat{s}_m(n) = d_m(nN)$ ,

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(j) g_m(nN - j).$$

Finalmente, substituindo  $j$  por  $k$  obtemos (2.7). Uma forma alternativa de representar  $\hat{s}_m(n)$  é dada por

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_m(k) y(nN - k), \quad (2.8)$$

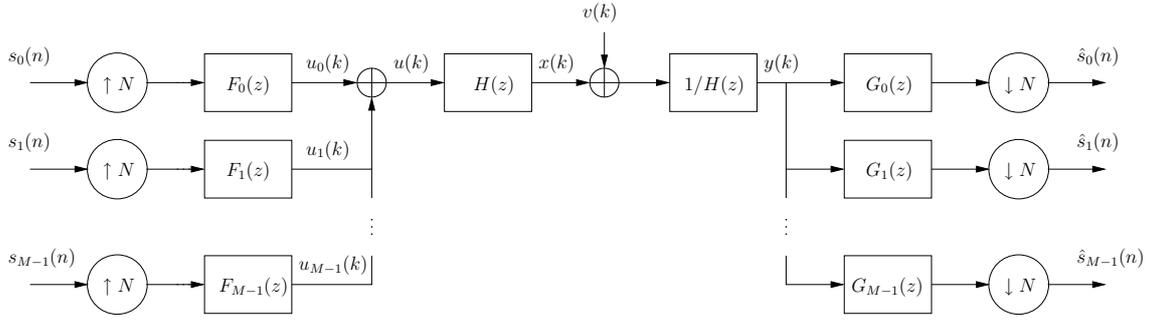


Figura 2.6: Transmultiplexador discreto com equalizador.

e a demonstração desta relação é semelhante à realizada para (2.7).

Para facilitar o entendimento, vamos supor que o modelo de canal  $H(z)$  não distorça o sinal  $u(k)$ , ou seja, que  $H(z) = 1$ . Vamos supor também que o ruído aditivo seja nulo, ou seja, que  $v(k) = 0$ . Então, para estimar os símbolos transmitidos, podemos escolher os filtros  $G_k(z)$  de forma a que o conjunto formado pelos filtros e decimadores constituam o *banco de filtros de análise* com reconstrução perfeita correspondente ao banco de filtros de síntese utilizado.

No caso geral,  $H(z) \neq 1$  e  $v(k) \neq 0$ , e, portanto, não basta utilizar um banco de filtros com reconstrução perfeita para recuperar o sinal transmitido, pois os efeitos do modelo de canal devem ser reduzidos (se possível, eliminados). Podemos modificar o sistema de comunicações para o mostrado na Figura 2.6, onde introduzimos um equalizador para eliminar os efeitos do modelo de canal. Vários critérios podem ser utilizados para o projeto do equalizador, como reconstrução perfeita do sinal transmitido<sup>1</sup> e minimização do erro médio quadrático entre um sinal de treinamento e o sinal recebido.

Convém notar que para o equalizador mostrado na Figura 2.6, a reconstrução perfeita somente será possível se todos os zeros do modelo de canal estiverem no interior do círculo unitário, ou seja, se o canal possuir fase mínima [29]. Podemos evitar esta restrição se realizarmos a equalização após a de-multiplexação no tempo para os blocos no receptor. Esse caso será estudado com mais detalhes no Capítulo 4.

---

<sup>1</sup>Para reconstrução perfeita do sinal transmitido é necessário projetar o equalizador supondo  $v(k) = 0$  e posteriormente analisar o seu desempenho com  $v(k) \neq 0$ .

## 2.4 Representação Polifásica do Transmultiplexador

Para o projeto do transmultiplexador, as equações (2.6) e (2.7) em geral levam a sistemas de equações com alto grau de complexidade, o que dificulta, e eventualmente impossibilita, que se encontre uma solução. Por isso, é interessante utilizar alguma outra forma de representar o sistema composto pelo transmultiplexador e o modelo de canal. Dentre as representações possíveis, a *decomposição polifásica* do transmultiplexador será bastante utilizada no decorrer deste trabalho.

Vamos supor uma função de transferência  $B(z)$  da forma

$$B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(n)z^{-n}. \quad (2.9)$$

Podemos reescrever  $B(z)$  como

$$\begin{aligned} B(z) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(nN)z^{-nN} + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(nN+1)z^{-nN} + \dots + \\ & + z^{-N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(nN+N-1)z^{-nN}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definindo

$$E_l(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(nN+l)z^{-n} \quad (2.11)$$

e utilizando (2.10), obtemos a representação polifásica do tipo 1 para  $B(z)$ , dada por

$$B(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} E_l(z^N). \quad (2.12)$$

Uma variante de (2.12), conhecida como representação polifásica do tipo 2, é dada por

$$B(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-(N-1-l)} R_l(z^N). \quad (2.13)$$

Os componentes da representação polifásica do tipo 2,  $R_l(z^N)$ , são obtidos através de permutações de  $E_l(z)$ , da forma  $R_l(z^N) = E_{N-1-l}(z^N)$ .

Utilizando as representações polifásicas mostradas nesta seção e utilizando as identidades nobres, podemos redesenhar o transmultiplexador da Figura 2.5 como mostrado na Figura 2.7. Para tanto basta escrever os filtros de síntese na forma

polifásica do tipo 2,

$$F_m(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-(N-1-l)} R_{l,m}(z^N), \quad (2.14)$$

onde

$$R_{l,m}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_m(Nn + N - 1 - l) z^{-n}, \quad (2.15)$$

e os filtros de análise na forma polifásica do tipo 1,

$$H_m(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} E_{m,l}(z^N), \quad (2.16)$$

onde

$$E_{m,l}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_m(Nn + l) z^{-n}. \quad (2.17)$$

As matrizes  $\mathbf{R}(z)$  e  $\mathbf{E}(z)$  são, então, definidas como

$$\mathbf{R}(z) = \begin{bmatrix} R_{N-1,M-1}(z) & \cdots & R_{N-1,0}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{0,M-1}(z) & \cdots & R_{0,0}(z) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} E_{0,0}(z) & \cdots & E_{0,N-1}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z) & \cdots & E_{M-1,N-1}(z) \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

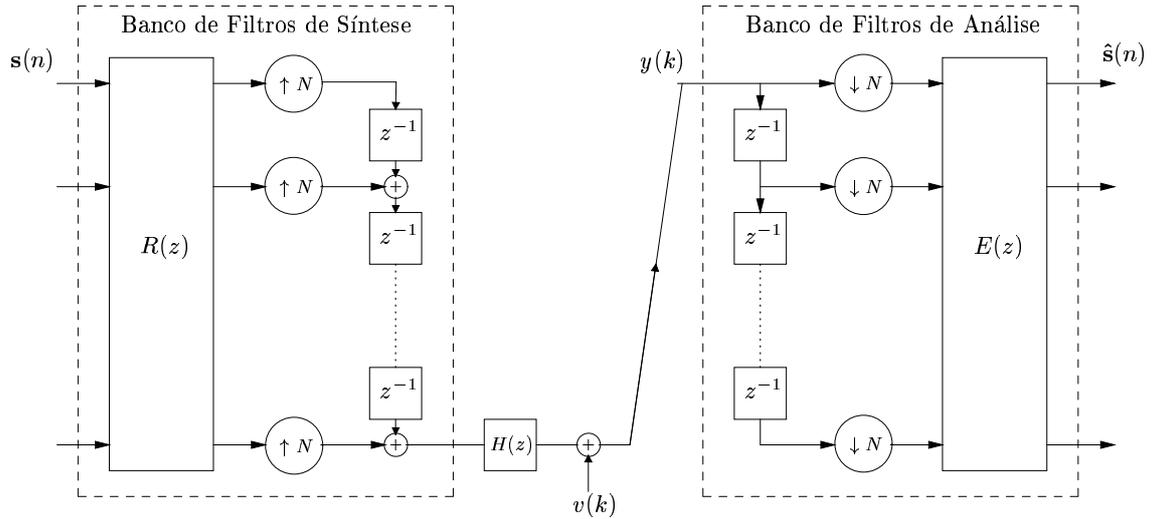


Figura 2.7: Representação polifásica do transmultiplexador.

Uma forma alternativa de representar o transmultiplexador utilizando a decomposição polifásica é mostrada na Figura 2.8. Essa forma pode ser obtida a partir



# Capítulo 3

## Sistemas Variantes no Tempo

Neste capítulo introduzimos a análise no domínio da frequência de transmultiplexadores variantes no tempo baseada em mapas bifrequência, introduzidos em [34,35]. Os resultados existentes na literatura para sistemas variantes no tempo serão estendidos para incluir sistemas multitaxas com filtros variantes no tempo. Nos capítulos seguintes veremos que a generalização dos transmultiplexadores convencionais pela utilização de sistemas variantes no tempo permite a utilização mais eficiente do canal de comunicações. Sendo assim, este capítulo tem a função de fornecer uma base teórica para os sistemas variantes no tempo que serão utilizados no restante da tese, onde será utilizada uma abordagem baseada em análise no domínio do tempo, permitindo ao leitor uma ampla compreensão dos mecanismos envolvidos.

Em especial analisaremos sistemas variantes no tempo periódicos [36–41], já que as propriedades desses sistemas permitem a obtenção de resultados relevantes. Além disso, os sistemas variantes no tempo considerados nos capítulos seguintes podem ser considerados periódicos sem perda de generalidade (*cf.* Capítulo 4).

### 3.1 Descrição de sistemas variantes no tempo

A mais fundamental relação entrada-saída usada para descrever sistemas lineares variantes no tempo é a soma de superposição usando a função de Green discreta no tempo [42]

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n, k)x(k), \quad (3.1)$$

onde  $x(k)$  é a seqüência de entrada,  $y(n)$  é a saída e  $h(n, k)$  é a resposta no tempo  $n$  a um impulso no tempo  $k$ . As taxas de amostragem de  $y(n)$  e  $x(k)$  podem ser diferentes. Para sistemas invariantes no tempo, a resposta do sistema,  $h(n, k)$ , depende apenas da diferença  $n - k$ , i.e.,

$$h(n, k) = h(0, n - k), \quad (3.2)$$

e a eq. (3.1) torna-se uma convolução.

É importante fazer uma distinção entre a função de Green  $h(n, k)$  e a *resposta ao impulso variante no tempo*,  $\bar{h}(n, k)$ . A resposta ao impulso  $\bar{h}(n, k)$  é definida como a resposta do sistema no instante  $n$  a um impulso aplicado  $k$  instantes atrás, assumindo que  $x(k)$  e  $y(n)$  possuam a mesma taxa de amostragem. Assim,

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{h}(n, k)x(n - k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{h}(n, n - k)x(k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Comparando (3.1) e (3.3), vemos que quando  $x(k)$  e  $y(n)$  possuem a mesma taxa de amostragem podemos relacionar a função de Green e a resposta ao impulso como

$$\bar{h}(n, k) = h(n, n - k). \quad (3.4)$$

Outra relação semelhante pode ser obtida escrevendo a relação entrada-saída como [43]

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(n - k, k)x(k). \quad (3.5)$$

Nesse caso, a relação entre  $\hat{h}(n, k)$  e a função de Green é dada por

$$\hat{h}(n, k) = h(n + k, k). \quad (3.6)$$

Mais uma vez, essa relação só é válida se  $x(k)$  e  $y(n)$  possuírem a mesma taxa de amostragem. Por esse motivo, a função de Green é a forma mais geral de representar a relação entrada-saída de um sistema linear, e será a forma utilizada preferencialmente neste capítulo, exceto quando indicado o contrário.

Podemos obter também uma relação no domínio da freqüência entre  $y(n)$  e  $x(k)$ . Os pares de transformadas de Fourier para os sinais  $y(n)$  e  $x(k)$  são definidos

como

$$X(e^{j\omega_x}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega_x k} \quad (3.7)$$

$$x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega_x}) e^{j\omega_x k} d\omega_x \quad (3.8)$$

e

$$Y(e^{j\omega_y}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega_y n} \quad (3.9)$$

$$y(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega_y}) e^{j\omega_y n} d\omega_y, \quad (3.10)$$

onde  $\omega_x$  e  $\omega_y$  são os domínios de frequência associados aos sinais  $x(k)$  e  $y(n)$ , respectivamente. Aplicando as eqs. (3.1) e (3.8) na eq. (3.9), obtemos a relação no domínio da frequência entre  $X(e^{j\omega_x})$  e  $Y(e^{j\omega_y})$  como

$$Y(e^{j\omega_y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n, k) e^{-j\omega_y n} e^{j\omega_x k} X(e^{j\omega_x}) d\omega_x. \quad (3.11)$$

Definindo

$$H(e^{j\omega_y}, e^{j\omega_x k}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n, k) e^{-j\omega_y n} e^{j\omega_x k}, \quad (3.12)$$

podemos reescrever a eq. (3.11) como

$$Y(e^{j\omega_y}) = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega_y}, e^{j\omega_x k}) X(e^{j\omega_x}) d\omega_x. \quad (3.13)$$

A função  $H(e^{j\omega_y}, e^{j\omega_x k})$  é chamada de *função de transmissão* ou *função bifrequência do sistema* [42].

Para o caso de sistemas invariantes no tempo, é possível mostrar [42] que a relação na eq. (3.13) é reduzida para a conhecida expressão

$$Y(e^{j\omega_y}) = H(e^{j\omega_y}) X(e^{j\omega_y}). \quad (3.14)$$

Para simplificar a notação, a partir deste ponto utilizaremos a notação  $F(\omega_y) \equiv F(e^{j\omega_y})$  para indicar a DTFT de  $f(k)$ .

### 3.1.1 Filtros Variantes no Tempo Periódicos

Se os coeficientes de um filtro variam periodicamente no índice de tempo  $n$  com período  $P$ , é fácil mostrar que sua função de Green e suas respostas ao impulso

são também periódicas em  $n$  e  $k$ . Assim, podemos escrever

$$h(n, k) = h(n + P, k + P) \quad (3.15)$$

$$\bar{h}(n, k) = \bar{h}(n + P, k) \quad (3.16)$$

$$\hat{h}(n, k) = \hat{h}(n, k + P). \quad (3.17)$$

Devido a essa periodicidade, essas funções podem ser expandidas em sua série de Fourier. Nesta seção assumimos que  $n$  e  $k$  estão na mesma taxa de amostragem, e, portanto, vamos considerar apenas as formas (3.16) e (3.17). Assim,

$$\bar{h}(n, k) = \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} \bar{h}_r(k) e^{j(2\pi/P)rn}, \quad (3.18)$$

onde

$$\bar{h}_r(k) = \sum_{n=0}^{P-1} \bar{h}(n, k) e^{-j(2\pi/P)nr}. \quad (3.19)$$

Similarmente, para  $\hat{h}(n, k)$ ,

$$\hat{h}(n, k) = \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} \hat{h}_r(n) e^{j(2\pi/P)rk}, \quad (3.20)$$

onde

$$\hat{h}_r(n) = \sum_{k=0}^{P-1} \hat{h}(n, k) e^{-j(2\pi/P)kr}. \quad (3.21)$$

Vamos calcular a forma assumida pelo mapa bifreqüência para a relação entrada-saída baseada na resposta ao impulso em (3.5). Usando a periodicidade de  $\hat{h}(n, k)$  em (3.20) e a transformada de Fourier discreta no tempo (*Discrete-Time Fourier Transform*, DTFT), obtemos

$$\begin{aligned} Y(\omega_y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\omega_y n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} \hat{h}_r(n-k) e^{j(2\pi/P)rk} \right] x(k) \right] e^{-j\omega_y n}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Usando a DTFT de  $x(k)$  obtemos

$$Y(\omega_y) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{P-1} \hat{h}_r(n-k) e^{j(2\pi/P)rk} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_x) e^{j\omega_x k} d\omega_x \right] e^{-j\omega_y n}. \quad (3.23)$$

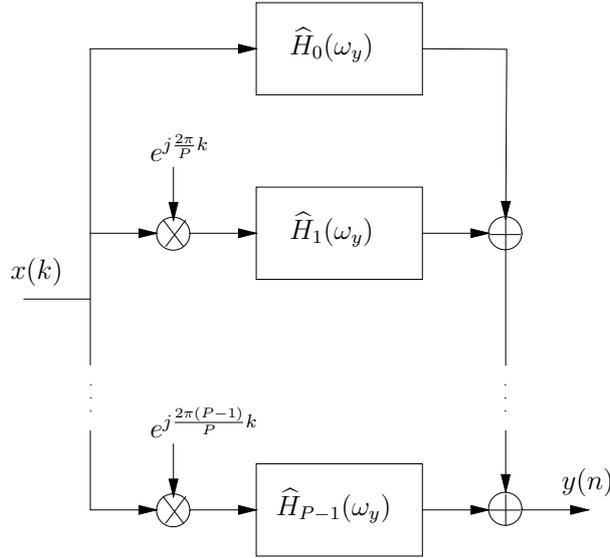


Figura 3.1: Sistema variante no tempo visto como um banco de  $P$  filtros invariantes no tempo, com as entradas moduladas.

Depois da troca de variáveis  $i = n - k$ , e alterando a ordem da integral e dos somatórios, obtemos

$$\begin{aligned}
Y(\omega_y) &= \frac{1}{2\pi P} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{h}_r(i) \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_x) \left[ \sum_{k=0}^{\infty} e^{j[(2\pi/P)r + \omega_x - \omega_y]k} \right] d\omega_x e^{-j\omega_y i} \\
&= \frac{1}{2\pi P} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{h}_r(i) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega_x) 2\pi \delta \left( \frac{2\pi}{P}r + \omega_x - \omega_y \right) d\omega_x \right] e^{-j\omega_y i} \\
&= \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{h}_r(i) e^{-j\omega_y i} \right] X \left( \omega_y - \frac{2\pi}{P}r \right) \\
&= \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} \hat{H}_r(\omega_y) X \left( \omega_y - \frac{2\pi}{P}r \right),
\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{H}_r(\omega_y) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \hat{h}_r(i) e^{-j\omega_y i} \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{P-1} \hat{h}(i, k) e^{-j(2\pi/P)kr} e^{-j\omega_y i}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Analisando a equação (3.24), percebemos que o sistema variante no tempo pode ser visto como um banco de  $P$  filtros invariantes no tempo, com as entradas moduladas [42, 43], como mostrado na Figura 3.1.

Alternativamente, podemos começar com a relação entrada-saída em (3.3),

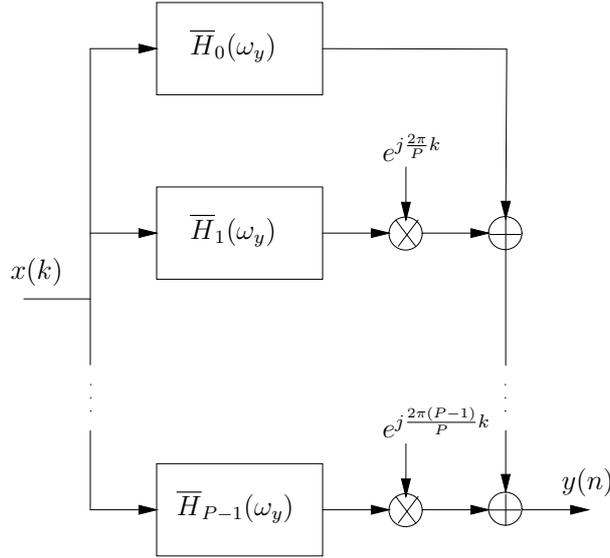


Figura 3.2: Sistema variante no tempo visto como um banco de  $P$  filtros invariantes no tempo, com as saídas moduladas.

obtendo [43]

$$Y(\omega_y) = \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} \bar{H}_r \left( \omega_y - \frac{2\pi}{P} r \right) X \left( \omega_y - \frac{2\pi}{P} r \right), \quad (3.26)$$

onde  $\omega_x = \omega_y - (2\pi/p)$  e

$$\bar{H}_r(\omega_x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{P-1} \bar{h}(n, k) e^{-j(2\pi/P)nr} e^{-j\omega_x n}. \quad (3.27)$$

A eq. (3.26) representa um sistema que também é composto por um banco de  $P$  filtros invariantes no tempo, mas neste caso as saídas é que são moduladas, como mostrado na Figura 3.2. Além disso, (3.24) e (3.26) descrevem um filtro cujo mapa bifreqüência é composto de  $P$  raias paralelas com inclinação de  $45^\circ$  no plano  $\omega_x, \omega_y$ . O valor do mapa bifreqüência ao longo da  $r$ -ésima linha é precisamente a  $r$ -ésima função de transferência  $\hat{H}_r(\omega_y)$  ou  $\bar{H}_r(\omega_y)$ . A Figura 3.3 mostra um exemplo de mapa bifreqüência.

### 3.1.2 Decimadores e Interpoladores como Sistemas Variantes no Tempo

Decimadores e interpoladores são exemplos de sistemas periodicamente variantes no tempo. A relação entrada-saída de um decimador no domínio do tempo é dada por

$$y(n) = x(nM), \quad \forall m, \quad (3.28)$$

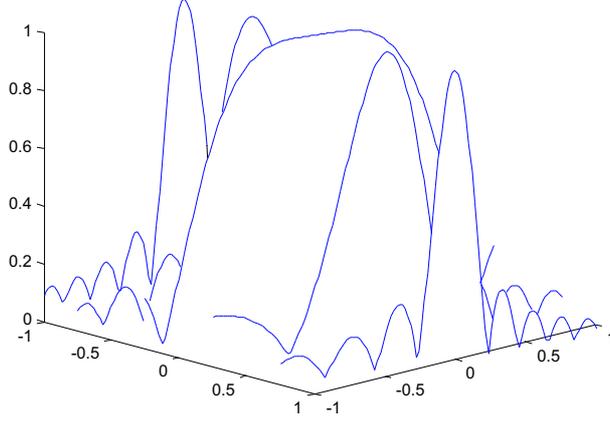


Figura 3.3: Exemplo de mapa bifreqüência.

onde  $M$  é o fator de decimação. Comparando (3.28) com (3.1), observamos que a função de Green do decimador é

$$h(n, k) = \delta(nM - k). \quad (3.29)$$

Aplicando a expressão em (3.29) em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} H(\omega_y, \omega_x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(nM - k) e^{-j\omega_y n} e^{j\omega_x k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_x M - \omega_y)n} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x M - \omega_y + 2\pi l), \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde foi usada a relação

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\theta n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\theta + 2\pi l). \quad (3.31)$$

O mapa bifreqüência do filtro em (3.30) é mostrado na Figura 3.4, onde pode ser observado que as freqüências em  $\omega_x + 2\pi m/M$ ,  $m = 0, \dots, M-1$ , são mapeadas no mesmo valor  $M\omega_x$ . Assim, o mapa bifreqüência ilustra a expansão do espectro e o *aliasing* em freqüência que ocorre ao decimarmos um sinal, um resultado bem conhecido na literatura [26, 28].

De maneira similar, o interpolador é um bom exemplo de sistema cuja função de transmissão é um mapeamento de um-para-muitos. A relação entrada-saída de um interpolador é dada por

$$y(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.32)$$

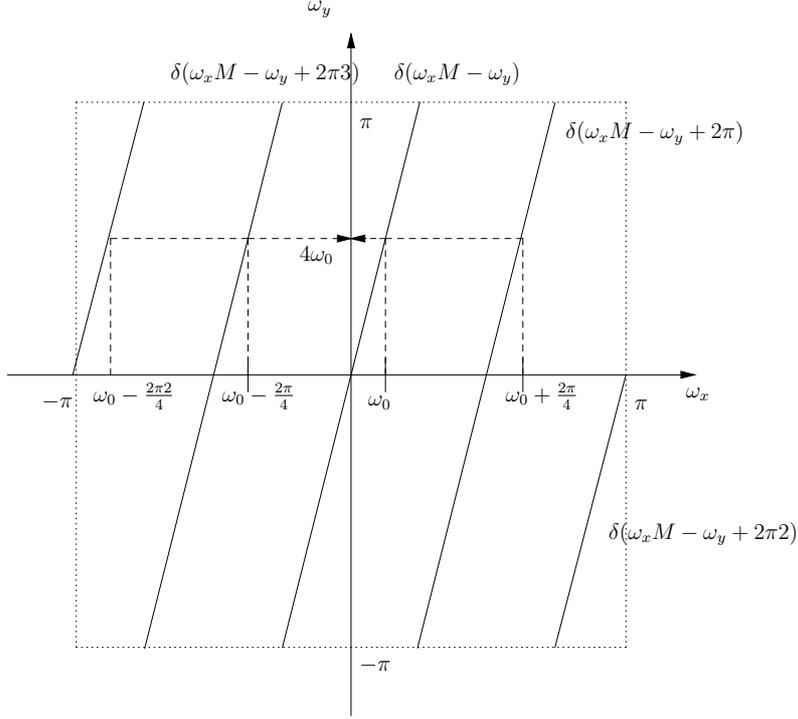


Figura 3.4: Mapa bifreqüência de um decimador com  $M = 4$ .

e, portanto,

$$h(n, k) = \delta(n - kL). \quad (3.33)$$

Aplicando (3.33) em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} H(\omega_y, \omega_x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kL) e^{-j\omega_y n} e^{j\omega_x k} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_x - \omega_y L)n} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x - \omega_y L + 2\pi l). \end{aligned} \quad (3.34)$$

O mapa bifreqüência do filtro em (3.34) é mostrado na Figura 3.5, onde pode ser observado que as freqüências em  $\omega_x$  são mapeadas em  $\omega_x/L + 2\pi m/L$ ,  $m = 0, \dots, L - 1$ . Assim, o mapa bifreqüência ilustra a repetição e compressão do espectro que ocorre ao interpolarmos um sinal, um resultado também bastante conhecido na literatura [26, 28].

### 3.1.3 Cascata de Sistemas Variantes no Tempo

A Figura 3.6 mostra um exemplo de cascata de dois sistemas descritos, respectivamente, por  $h_1(r, k)$  e  $h_2(n, r)$ . É possível mostrar que a resposta do sistema

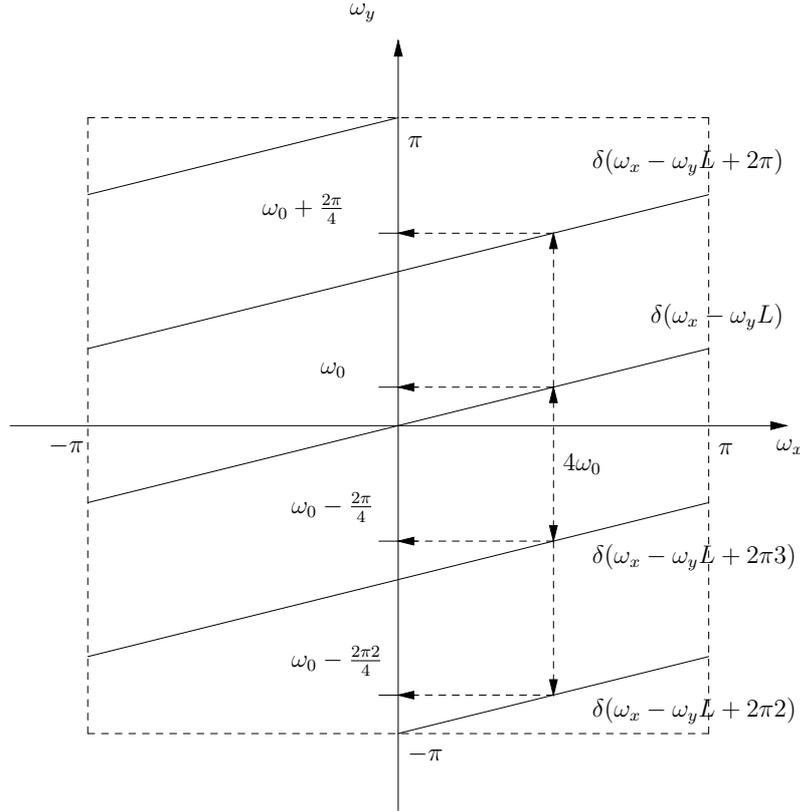


Figura 3.5: Mapa bifreqüência de um interpolador com  $L = 4$ .

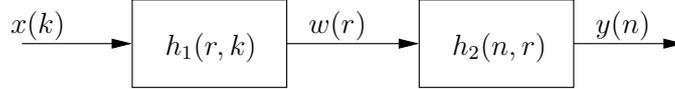


Figura 3.6: Cascata de dois sistemas variantes no tempo.

pode ser derivada em termos de  $h_1(r, k)$  e  $h_2(n, r)$  como [42]

$$h(n, k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_2(n, r)h_1(r, k). \quad (3.35)$$

De maneira similar, a função de transmissão  $H(\omega_y, \omega_x)$  do sistema pode ser representada em termos das funções de transmissão individuais  $H_1(\omega_w, \omega_x)$  e  $H_2(\omega_y, \omega_w)$  como

$$H(\omega_y, \omega_x) = \int_{-\pi}^{\pi} H_2(\omega_y, \omega_w)H_1(\omega_w, \omega_x)d\omega_w. \quad (3.36)$$

Dois casos particulares de sistema em cascata são a combinação de um filtro variante no tempo e um decimador/interpolador, como mostrado na Figura 3.7. A resposta em freqüência será analisada nas seções a seguir.

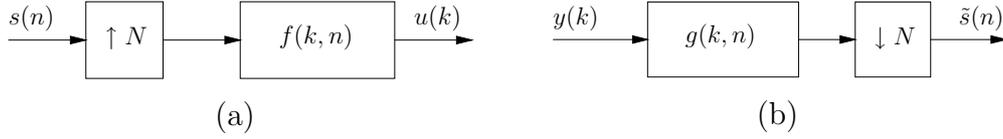


Figura 3.7: Cascata de dois sistemas variantes no tempo: (a) interpolador seguido de filtro VTP e (b) filtro VTP seguido de decimador.

### 3.1.3.1 Interpolador e Filtro LIT

A resposta de um filtro invariante no tempo em termos do mapa bifreqüência é obtida como [42]

$$H_2(\omega_y, \omega_w) = H(\omega_y) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_w - \omega_y + 2\pi l). \quad (3.37)$$

Claramente, o mapeamento em (3.37) é tal que  $\omega_w = \omega_y$ , e as raias no mapa bi-freqüência se repetem com período  $2\pi$ , correspondendo à relação entrada-saída conhecida de um sistema LIT.

Tomando como referência a Figura 3.6, a relação entrada-saída da cascata de um interpolador e um filtro invariante no tempo é obtida a partir de (3.13), (3.34), (3.36) e (3.37) como

$$\begin{aligned} Y(\omega_y) &= \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_y, \omega_x) X(\omega_x) d\omega_x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_2(\omega_y, \omega_w) H_1(\omega_w, \omega_x) X(\omega_x) d\omega_x d\omega_w \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega_y) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_w - \omega_y + 2\pi l) \sum_{l'=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x - \omega_w L + 2\pi l') X(\omega_x) d\omega_x d\omega_w \\ &= H(\omega_y) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega_w - \omega_y + 2\pi l) X(\omega_w L) d\omega_w \\ &= H(\omega_y) X(\omega_y L). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Assim, a função de transmissão  $H(\omega_y, \omega_x)$  correspondente à relação entrada-saída em (3.37) é dada por

$$H(\omega_y, \omega_x) = H(\omega_y) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x - \omega_y L + 2\pi l). \quad (3.39)$$

Vemos então que o mapa bifreqüência da cascata de um interpolador e um filtro invariante no tempo pode ser obtido através da projeção do efeito de  $H(\omega_y)$  sobre o

mapa do interpolador. Essa interpretação será útil no caso de cascata de sistemas envolvendo filtros VTP.

### 3.1.3.2 Filtro LIT e Decimador

Similarmente ao resultado obtido na Seção 3.1.3.1, o mapa bifreqüência da cascata de um filtro LIT e um decimador é obtido através da projeção de  $H(\omega_y)$  sobre o mapa do decimador em (3.30). Entretanto, como a posição do filtro no diagrama de blocos está trocada em relação à seção anterior, a projeção se dá pelo eixo horizontal ( $\omega_x$ ). Assim, a função de transmissão é dada por

$$H(\omega_y, \omega_x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x M - \omega_y + 2\pi l) H(\omega_x). \quad (3.40)$$

### 3.1.3.3 Interpolador e Filtro Variante no Tempo

A resposta no tempo do sistema mostrado na Figura 3.7(a) é dada por

$$u(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) f(k - nN, n), \quad (3.41)$$

onde  $f(k, n)$  é variante no tempo com período  $P$ . Comparando com (3.1), observamos que a função de Green do sistema em (3.41) é

$$h(k, n) = f(k - nN, n) \quad (3.42)$$

Como  $f(k, n)$  é variante no tempo com período  $P$ , ou seja,  $f(k, n) = f(k, n + P)$ , e podemos escrever  $f(k, n)$  em função de sua série de Fourier. Assim,

$$f(k, n) = \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} f_r(k) e^{j(2\pi/P)rn}, \quad (3.43)$$

onde

$$f_r(k) = \sum_{n=0}^{P-1} f(k, n) e^{-j(2\pi/P)nr}. \quad (3.44)$$

Usando a periodicidade de  $f(k, n)$  e a DTFT de  $u(k)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
U(\omega_u) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) e^{-j\omega_u k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) f(k - nN, n) \right] e^{-j\omega_u k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} f_r(k - nN) e^{j(2\pi/P)rn} \right] s(n) e^{-j\omega_u k} \\
&= \frac{1}{P} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{P-1} f_r(k - nN) e^{j(2\pi/P)rn} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega_s) e^{j\omega_s n} d\omega_s \right] e^{-j\omega_u k}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Depois da troca de variáveis  $i = k - nN$ , e alterando a ordem da integral e dos somatórios, obtemos

$$\begin{aligned}
U(\omega_u) &= \frac{1}{2\pi P} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_r(i) \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega_s) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j(\frac{2\pi}{P}r + \omega_s - \omega_u N)n} \right] d\omega_s e^{-j\omega_u i} \\
&= \frac{1}{2\pi P} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_r(i) \left[ \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega_s) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta \left( \frac{2\pi}{P}r + \omega_s - \omega_u N + 2\pi l \right) \right] d\omega_s \right] e^{-j\omega_u i} \\
&= \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_r(i) e^{-j\omega_u i} \right] S \left( \omega_u N - \frac{2\pi}{P}r \right),
\end{aligned} \tag{3.46}$$

onde foi utilizado o fato de que  $S(\omega_s)$  é periódica com período  $2\pi$ . Finalmente, podemos escrever (3.46) como

$$U(\omega_u) = \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} F_r(\omega_u) S \left( \omega_u N - \frac{2\pi}{P}r \right), \tag{3.47}$$

onde  $F_r(\omega_u)$  é definido como

$$F_r(\omega_u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{P-1} f(i, n) e^{-j(2\pi/P)nr} e^{-j\omega_u i}. \tag{3.48}$$

A Figura 3.8 ilustra a estrutura do mapa bifreqüência do sistema descrito por (3.47). Observamos que o mapa bifreqüência é uma combinação das características de (3.24) e (3.30), pois é composto de  $NP$  linhas, cada uma com a mesma inclinação das linhas do mapa em (3.30). Da equação (3.47), vemos que cada filtro  $F_r(\omega_u)$  atua sobre uma versão modulada e interpolada de  $S(\omega_s)$ , como representado na Figura 3.9.

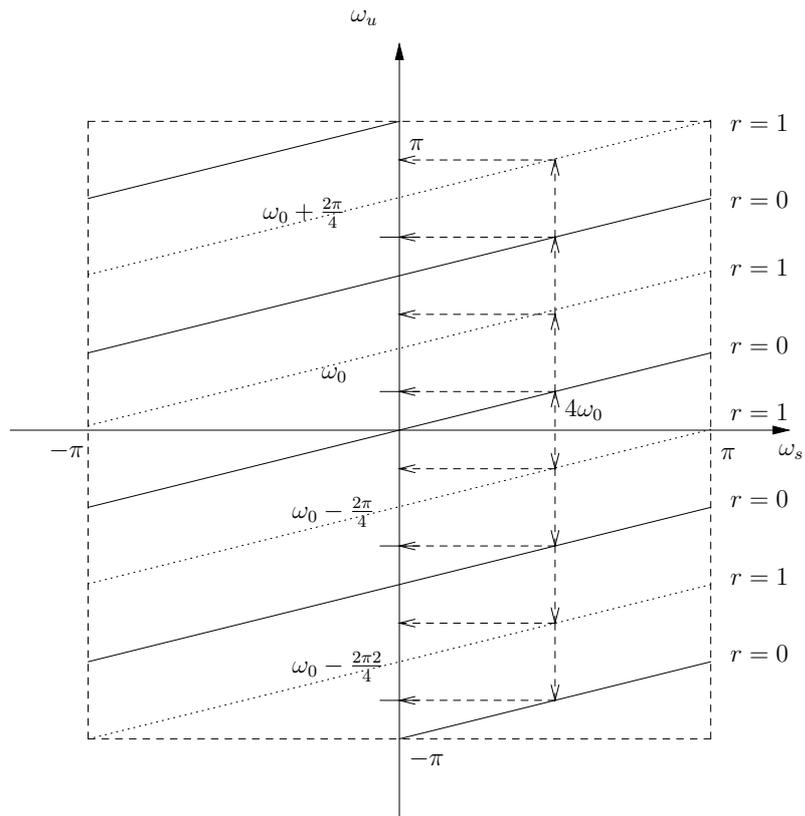


Figura 3.8: Estrutura do mapa bifreqüência da cascata de um interpolador  $L=2$  e um filtro VTP com período  $N = 4$ .

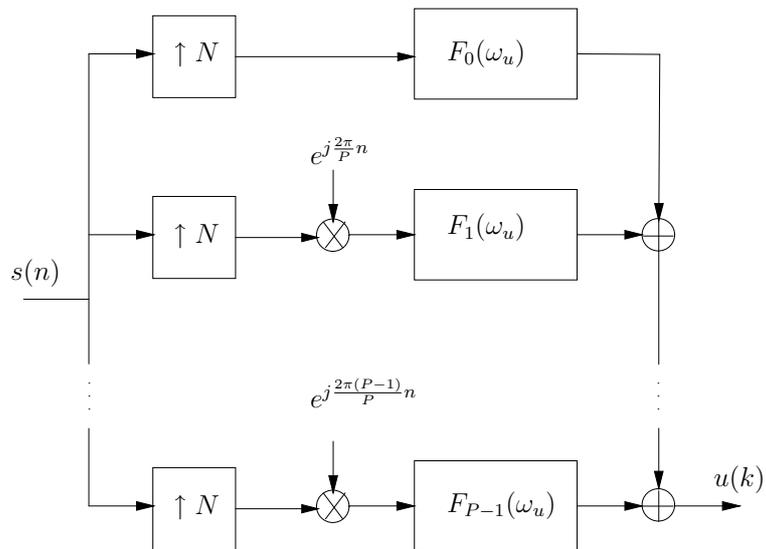


Figura 3.9: Cascata de interpolador e filtro VTP visto como um banco de filtros LIT com as entradas moduladas.

### 3.1.3.4 Filtro Variante no Tempo e Decimador

Similarmente, podemos descrever o mapa bifreqüência para a configuração mostrada na Figura 3.7(b). Sua relação entrada-saída é dada por

$$\tilde{s}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(nN - k)g(k, n), \quad (3.49)$$

onde  $g(k, n)$  é variante no tempo com período  $P$ , ou seja,  $g(k, n) = g(k, n + P)$ . A relação em (3.49) pode ser colocada na forma de (3.1) através da substituição de variáveis  $nN - k \rightarrow k$ , que leva a

$$\tilde{s}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)g(nN - k, n). \quad (3.50)$$

Comparando (3.50) com (3.1), observamos que a função de Green neste caso é  $h(n, k) = g(nN - k, n)$ . Podemos escrever  $g(k, n)$  em função de sua série de Fourier. Assim,

$$g(k, n) = \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} g_r(k) e^{j(2\pi/P)rn}, \quad (3.51)$$

onde

$$g_r(k) = \sum_{n=0}^{P-1} g(k, n) e^{-j(2\pi/P)nr}. \quad (3.52)$$

Usando a periodicidade de  $g(k, n)$  e a DTFT de  $\tilde{s}(n)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\omega_s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(n) e^{-j\omega_s n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)g(nN - k, n) \right] e^{-j\omega_s n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{P} \sum_{r=0}^{P-1} g_r(nN - k) e^{j(2\pi/P)rn} \right] y(k) e^{-j\omega_s n} \\ &= \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{P-1} g_r(nN - k) e^{j(2\pi/P)rn} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega_y) e^{j\omega_y k} d\omega_y \right] e^{-j\omega_s n}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Depois da troca de variáveis  $i = nN - k$ , e alterando a ordem da integral e

dos somatórios, obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(\omega_s) &= \frac{1}{2\pi P} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_r(i) \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega_y) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\left(\frac{2\pi}{P}r + \omega_y N - \omega_s\right)n} \right] e^{-j\omega_y i} d\omega_y \\
&= \frac{1}{2\pi P} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_r(i) \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} Y(\omega_y) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left[ \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\frac{2\pi}{P}r + \omega_y N - \omega_s + 2\pi l\right) \right] e^{-j\omega_y i} d\omega_y \right\} \\
&= \frac{1}{PN} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_r(i) e^{-j\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N}\right)i} \right] Y\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N}\right) \\
&= \frac{1}{PN} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_r\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N}\right) Y\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N}\right),
\end{aligned} \tag{3.54}$$

onde  $G_r(\omega_y)$  é definido como

$$G_r(\omega_y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{P-1} g(i, n) e^{-j(2\pi/P)nr} e^{-j\omega_y i}. \tag{3.55}$$

A Figura 3.10 ilustra o mapa bifreqüência do sistema descrito por (3.54). Observamos que o mapa bifreqüência é uma combinação das características de (3.26) e (3.34), pois é composto de  $NP$  linhas, cada uma com a mesma inclinação das linhas do mapa em (3.34).

### 3.1.3.5 Interpolador - Filtro VT - Filtro VT - Decimador

A Figura 3.11 mostra um sistema composto pela cascata dos sistemas analisados nas Seções 3.1.3.3 e 3.1.3.4. A partir de (3.47), podemos escrever

$$Y(\omega_y) = \frac{1}{P_f} \sum_{r=0}^{P_f-1} F_r(\omega_y) S\left(\omega_y N - \frac{2\pi}{P_f} r\right), \tag{3.56}$$

onde  $F_r(\omega_y)$  é como definido em (3.48). Substituindo (3.56) em (3.54), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(\omega_s) &= \frac{1}{P_f N} \sum_{r=0}^{P_f-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_r\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_f N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \\
&\quad \cdot \left[ \frac{1}{P_g} \sum_{r'=0}^{P_g-1} F_{r'}\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_f N} - \frac{2\pi l}{N}\right) S\left(\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_f N} - \frac{2\pi l}{N}\right) N - \frac{2\pi}{P_g} r'\right) \right] \\
&= \frac{1}{P_f P_g N} \sum_{r=0}^{P_f-1} \sum_{r'=0}^{P_g-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_r\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_f N} - \frac{2\pi l}{N}\right) F_{r'}\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_f N} - \frac{2\pi l}{N}\right) \\
&\quad \cdot S\left(\omega_s - 2\pi\left(\frac{r}{P_f} + \frac{r'}{P_g}\right)\right).
\end{aligned} \tag{3.57}$$

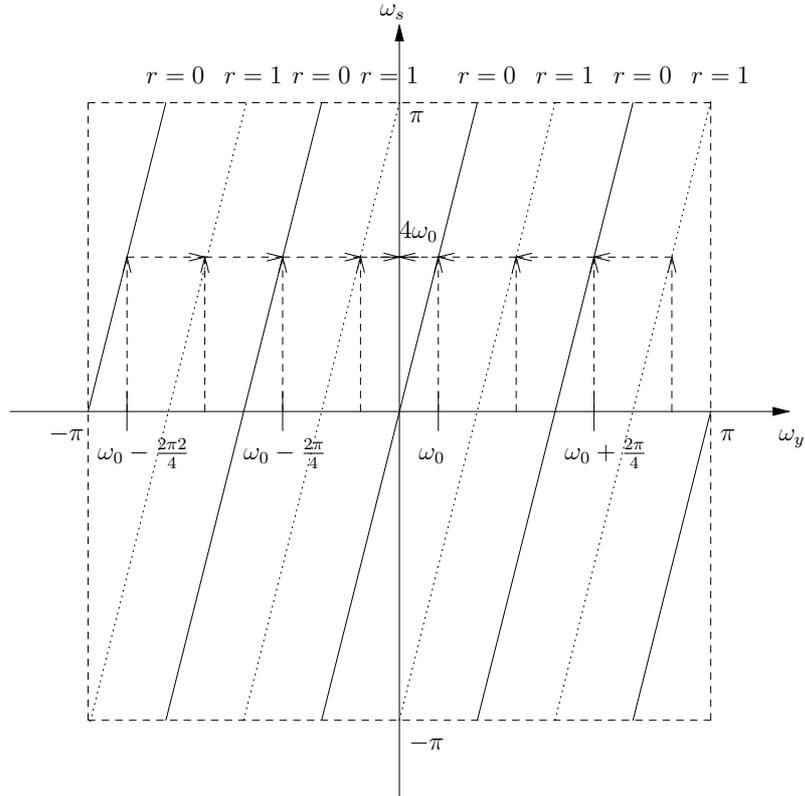


Figura 3.10: Mapa bifreqüência da cascata de um filtro VTP com período  $N = 4$  e um decimador com  $M = 2$ .

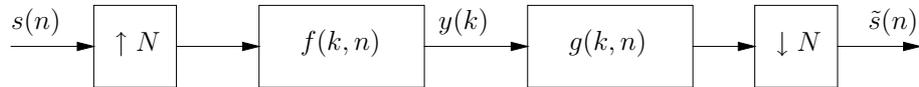


Figura 3.11: Cascata de um interpolador com dois filtros VTP e um decimador.

O número de linhas no mapa bifreqüência correspondente ao sistema descrito por (3.57) depende da relação entre  $P_f$  e  $P_g$ . Claramente, para  $P_f = P_g = P$ , o número de linhas é também  $P$ . Para  $P_f$  e  $P_g$  coprimos, os deslocamentos em freqüência de  $S(\omega_s)$ ,  $2\pi \left( \frac{r}{P_f} + \frac{r'}{P_g} \right)$ , não coincidem para nenhum valor de  $r$  e  $r'$  diferente de zero. Nesse caso, o mapa bifreqüência será composto de  $P_f P_g$  linhas.

## 3.2 Transmultiplexador com Filtros Variantes no Tempo

As expressões obtidas nas seções anteriores podem ser utilizadas para descrever a relação entrada-saída do transmultiplexador com filtros variantes no tempo representado na Figura 3.12. Transmultiplexadores variantes no tempo para trans-

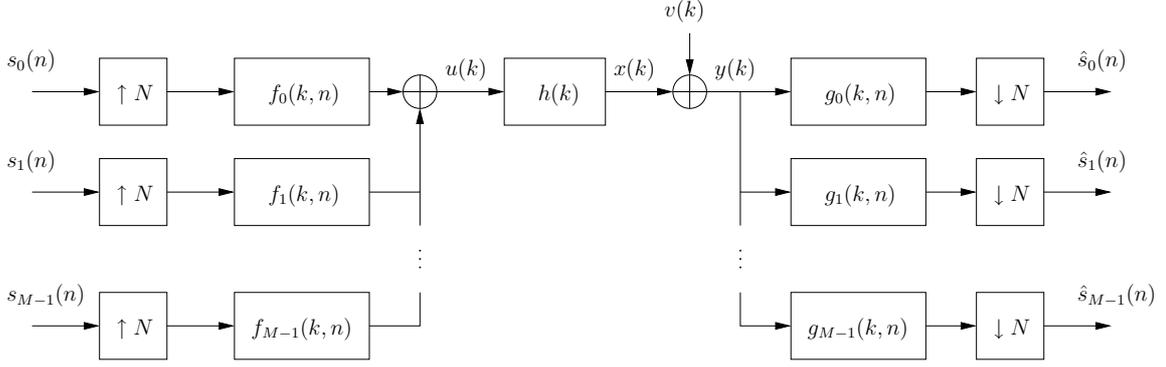


Figura 3.12: Transmultiplexador no domínio do tempo. O índice  $n$  indica que o sinal correspondente está na taxa de símbolo,  $R_s$ , enquanto o índice  $k$  indica que o sinal correspondente está na taxa do canal,  $R_c$ , com  $R_c = NR_s$ .

formar sinais multiplexados no tempo em sinais multiplexados na frequência são utilizados, por exemplo, em [37], onde é empregada uma análise no espaço de estados.

### Transmissor

A relação entrada-saída da parte do transmultiplexador correspondente ao transmissor é obtida a partir de (3.47) como

$$U(\omega_u) = \frac{1}{P} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{r=0}^{P-1} F_{r,m}(\omega_u) S_m \left( \omega_u N - \frac{2\pi}{P} r \right), \quad (3.58)$$

onde

$$F_{r,m}(\omega_u) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{P-1} f_m(i, n) e^{-j(2\pi/P)nr} e^{-j\omega_u i} \quad (3.59)$$

e

$$S_m(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m(n) e^{-j\omega n}. \quad (3.60)$$

Depois de passar  $U(\omega_u)$  pelo canal  $H(\omega_h) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega_h k}$ , obtemos

$$Y(\omega_y) = H(\omega_h)U(\omega_u) + V(\omega_h) = H(\omega_y)U(\omega_y) + V(\omega_y), \quad (3.61)$$

onde foi usado o fato de que  $\omega_y = \omega_h = \omega_u$ , uma vez que os sinais  $y(k)$  e  $u(k)$  estão na mesma taxa de amostragem, e o canal  $h(k)$  é suposto invariante no tempo.

## Receptor

A relação entrada-saída da parte do transmultiplexador correspondente ao receptor é obtida a partir de (3.54) como

$$\widehat{S}_m(\omega_s) = \frac{1}{PN} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{r,m} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N} \right) Y \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N} \right), \quad (3.62)$$

onde

$$G_{r,m}(\omega_y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{P-1} g_m(i, n) e^{-j(2\pi/P)nr} e^{-j\omega_y i}. \quad (3.63)$$

## Transmultiplexador

A resposta do sistema completo é obtida utilizando-se (3.58), (3.61) e (3.62):

$$\begin{aligned} \widehat{S}_m(\omega_s) &= \frac{1}{P_g N} \sum_{r=0}^{P_g-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{r,m} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) Y \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) \\ &= \frac{1}{P_g N} \sum_{r=0}^{P_g-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{r,m} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) H \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{P_f} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{r'=0}^{P_f-1} F_{r',m'} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) \cdot \\ &\quad \cdot S_{m'} \left( \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) N - \frac{2\pi}{P_f} r \right) + \\ &\quad + \frac{1}{P_g N} \sum_{r=0}^{P_g-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{r,m} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) V \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) \quad (3.64) \\ &= \frac{1}{P_f P_g N} \sum_{r=0}^{P_g-1} \sum_{r'=0}^{P_f-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{r,m} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) \cdot \\ &\quad \cdot H \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) \cdot F_{r',m'} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) \cdot \\ &\quad \cdot S_{m'} \left( \omega_s - 2\pi \left( \frac{r}{P_f} + \frac{r'}{P_g} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{P_g N} \sum_{r=0}^{P_g-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{r,m} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right) V \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{P_g N} - \frac{2\pi l}{N} \right). \end{aligned}$$

Para o caso particular  $P_f = P_g = P$ , podemos reescrever (3.64) como

$$\begin{aligned} \widehat{S}_m(\omega_s) &= \frac{1}{P^2 N} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{r'=0}^{P-1} \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{r,m} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N} \right) H \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N} \right) \\ &\quad \cdot F_{r',m'} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N} \right) S_{m'} \left( \omega_s - 2\pi \left( \frac{r}{P} + \frac{r'}{P} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{PN} \sum_{r=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{N-1} G_{r,m} \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N} \right) V \left( \frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N} \right). \quad (3.65) \end{aligned}$$

A Figura 3.13 mostra um exemplo de mapa bifreqüência da parte correspondente ao transmissor de um transmultiplexador, com  $N = 4$  e  $P = 2$ . As linhas grossas indicam as regiões do espectro em que  $F_{r',m'}\left(\frac{\omega_s}{N} - \frac{2\pi r}{PN} - \frac{2\pi l}{N}\right) \neq 0$ . As diferentes cores indicam que os filtros correspondem a diferentes sinais de entrada. No exemplo em questão, a variação no tempo está sendo utilizada para realizar um embaralhamento em freqüência, ao mesmo tempo em que os sinais são multiplexados. Filtros variantes no tempo para realizar embaralhamento em freqüência (sem incluir multiplexação de usuários) podem ser encontrados em [44].

O receptor deve ser capaz de separar as bandas de freqüência correspondentes ao sinal desejado e re-arrumar o espectro de freqüência. A Figura 3.14 mostra um exemplo de receptor para um dos sinais de entrada. A extensão para os demais sinais é imediata, já que a estrutura do embaralhamento em freqüência é a mesma para todas as bandas.

Naturalmente, tal transmultiplexador pode ser projetado para possuir reconstrução perfeita, invertendo o canal em cada sub-banda de freqüência. Apesar de conceitualmente simples, tal projeto requer filtros de resposta infinita, o que dificulta o projeto de equalizadores estáveis. Uma aproximação com filtros de comprimento finito é possível, porém a dificuldade do projeto de filtros com banda de transição estreita leva a filtros muito longos no transmissor e, principalmente, no receptor, como se pode verificar a partir dos resultados obtidos no Capítulo 4.

### 3.3 Principais Contribuições

Neste Capítulo apresentamos resultados obtidos na literatura para a análise em freqüência de sistemas lineares variantes no tempo periódicos através de mapas bi-freqüência. Derivamos resultados para as associações em cascata de sistemas lineares variantes no tempo periódicos que compõem o transmultiplexador digital. Em particular, derivamos o mapa bi-freqüência da associação de filtros variantes no tempo e decimadores/interpoladores. Também derivamos o mapa bi-freqüência final do transmultiplexador variante no tempo.

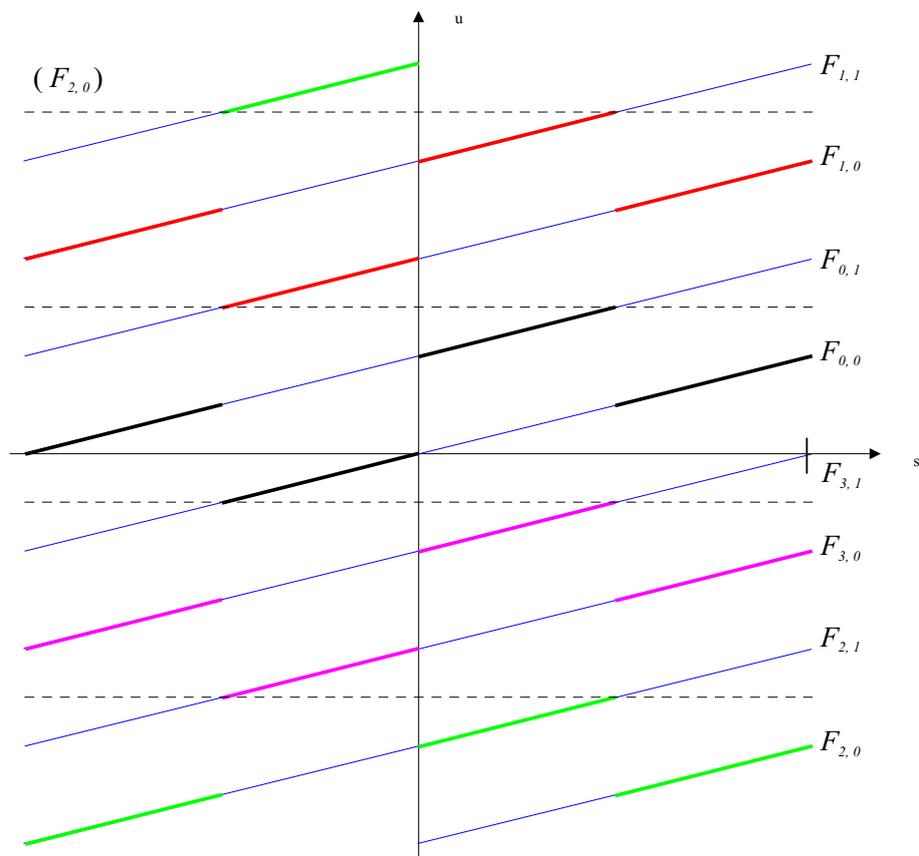


Figura 3.13: Exemplo de mapa bi-freqüência do transmissor de um transmultiplexador.

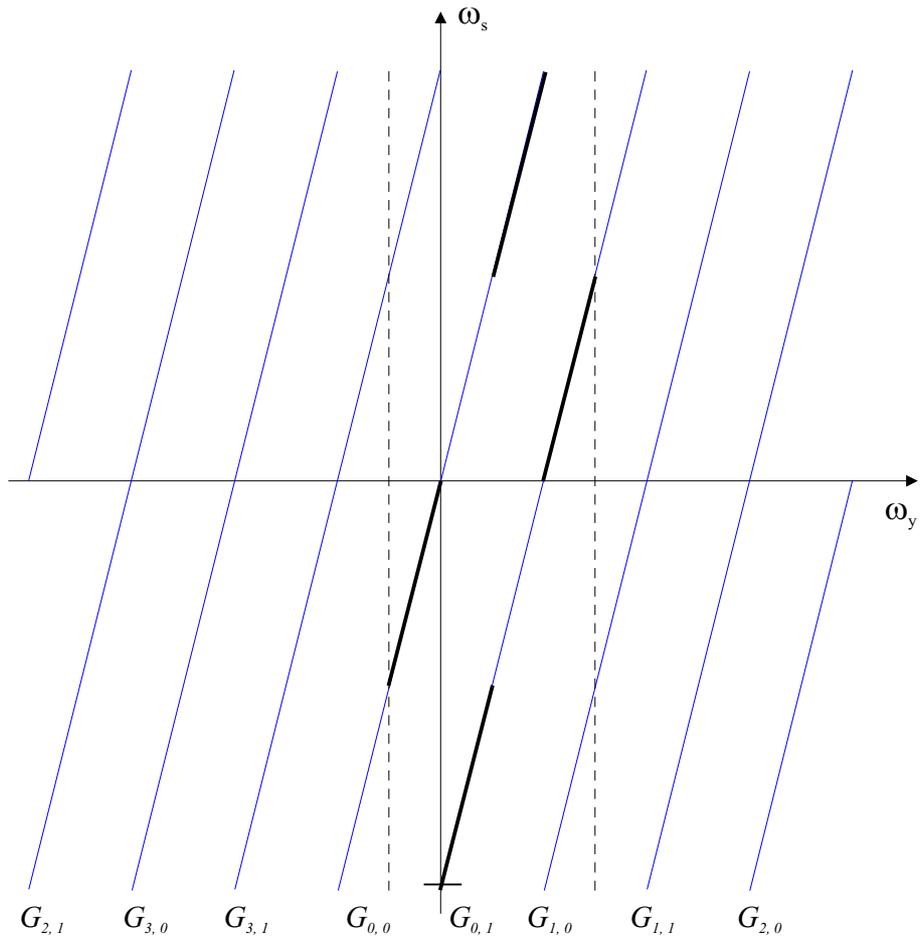


Figura 3.14: Exemplo de mapa bi-freqüência do receptor de um transmultiplexador. A figura mostra apenas o receptor correspondente a um dos sinais de entrada.

# Capítulo 4

## Análise Teórica de Sistemas MIMO por Acesso Múltiplo

Neste capítulo vamos realizar uma análise teórica de sistemas MIMO por acesso múltiplo. Encaixa-se nesta categoria qualquer sistema de comunicações com múltiplas entradas e múltiplas saídas em que os diversos sinais sejam transmitidos por um mesmo canal. Na literatura o termo MIMO é mais utilizado para denominar sistemas com múltiplas antenas no transmissor e no receptor. Neste capítulo não consideraremos sistemas com múltiplas antenas, porém é possível estender os resultados aqui encontrados para o caso de múltiplas antenas no transmissor e no receptor (*cf.* Capítulo 5).

Conforme veremos neste capítulo, importantes resultados podem ser encontrados ao consideramos que o pré-codificador e o equalizador podem ser variantes no tempo. No Capítulo 3 mostramos como um transmultiplexador variante no tempo pode ser representado no domínio da frequência através de mapas bi-frequência. Neste capítulo a análise do transmultiplexador será realizada no domínio do tempo, onde é possível extrair relações entre a redundância inserida nos blocos transmitidos e a ordem do equalizador capaz de realizar reconstrução perfeita com filtros de resposta ao impulso finita.

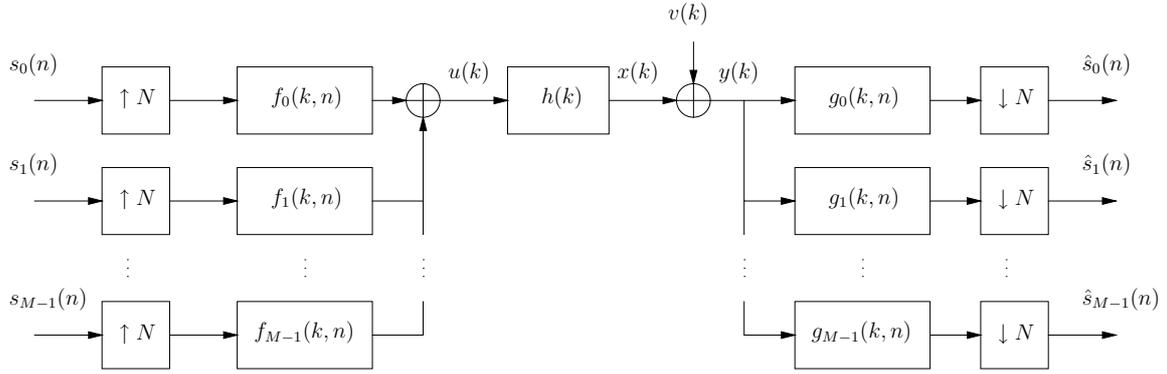


Figura 4.1: Sistema de comunicações no domínio do tempo. O índice  $n$  indica que o sinal correspondente está variando na mesma taxa dos símbolos de entrada,  $R_s$ , enquanto o símbolo  $k$  indica que o sinal correspondente está variando na mesma taxa do canal,  $R_c$ , com  $R_c = NR_s$ .

## 4.1 Descrição do Sistema

Nesta seção descrevemos o sistema de comunicações que será utilizado no restante deste capítulo. Como será mostrado nas seções seguintes e no Capítulo 5, ao definirmos adequadamente os filtros e o modelo de canal, a estrutura pode caracterizar diferentes cenários e aplicações incluindo aqueles com transmissores e receptores variantes ou invariantes no tempo. Estes por sua vez podem ser interpretados, por exemplo, como um sistema de acesso múltiplo por divisão de código (*Code Division Multiple Access*, CDMA) utilizando códigos curtos ou longos, ou ainda sistemas com modulação monoportadora (*Single-Carrier Modulation*).

O modelo do transmultiplexador no domínio do tempo é mostrado na Figura 4.1, onde  $f_m(k, n)$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$ , são os filtros do transmissor,  $h(k)$  é o modelo de canal,  $g_m(k, n)$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$ , são os filtros do receptor e  $N$  é o fator de decimação/interpolação. O índice  $k$  indica que o sinal correspondente está a uma taxa  $N$  vezes maior que aquela dos sinais com o índice  $n$ . O índice  $n$  na definição de  $f_m(k, n)$  indica que a resposta do filtro é variante no tempo na mesma taxa de  $n$ , ou seja, a resposta do filtro é constante no intervalo  $[kN, (k + 1)N)$ .

Para  $M = 1$  e  $N > 1$ , a saída do interpolador alimentado pelo sinal  $s_0(n)$  na

Figura 4.1 é dada por [26]

$$s_0^e(k) = \begin{cases} s_0(k/N) & , k/N \text{ inteiro} \\ 0 & , \text{outros} \end{cases} \quad (4.1)$$

e  $u(k)$  pode ser escrito em função de  $s_0^e(k)$  como

$$u(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_0^e(j) f_0(k - j, n). \quad (4.2)$$

A entrada e a saída na equação (4.2) estão na mesma taxa que  $k$ , mas a variação no tempo de  $f_m(k, n)$  ocorre na mesma taxa que  $n$ . Portanto, podemos reescrever a equação 4.2 como

$$u(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} s_0^e(j) f_0(k - j, \lfloor j/N \rfloor), \quad (4.3)$$

onde  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota o maior inteiro menor do que o argumento. Da equação (4.1),  $s_0^e(j)$  é diferente de zero se e somente se  $j/N$  for inteiro. Portanto, podemos escrever a equação (4.3) em função da entrada  $s_0(n)$  da forma

$$u(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_0(i) f_0(k - iN, i), \quad (4.4)$$

onde foi utilizado o mapeamento  $j = iN$ .

A partir da equação (4.4) e da Figura 4.1, a saída dos filtros do transmissor (banco de filtros de síntese) pode ser escrita como

$$u(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_m(i) f_m(k - iN, i), \quad (4.5)$$

onde  $s_m(n)$  é o símbolo transmitido pelo  $m$ -ésimo usuário no instante de tempo  $n$ , e  $f_m(k, n)$  é a resposta do filtro do transmissor correspondendo ao usuário  $m$ .

No modelo aqui adotado, o sinal transmitido é aplicado no canal linear invariante no tempo (LIT)  $h(k)$  e é recebido contaminado aditivamente com ruído gaussiano com média zero  $v(k)$ ,

$$y(k) = x(k) + v(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)u(k - l) + v(k). \quad (4.6)$$

Se o canal também for variante no tempo, esta variação pode ser incorporada na resposta dos filtros do transmissor, com  $h(k)$  acima representando a componente estática do canal (cf. Capítulo 5).

O receptor estima os símbolos transmitidos para o  $m$ -ésimo usuário filtrando o sinal  $y(k)$  por  $g_m(k, n)$  e decimando a saída por  $N$ , como mostrado na Figura 4.1. Esse processo é descrito por

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(nN - k)g_m(k, n). \quad (4.7)$$

Uma representação matricial compacta do sistema de comunicações é obtida definindo-se os vetores  $\mathbf{s}(n)$  e  $\hat{\mathbf{s}}(n)$ ,  $M \times 1$ , contendo os símbolos transmitidos e recebidos, respectivamente, como

$$\mathbf{s}(n) = \begin{bmatrix} s_0(n) & s_1(n) & \cdots & s_{M-1}(n) \end{bmatrix}^T \quad (4.8)$$

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \begin{bmatrix} \hat{s}_0(n) & \hat{s}_1(n) & \cdots & \hat{s}_{M-1}(n) \end{bmatrix}^T, \quad (4.9)$$

e os vetores  $N \times 1$

$$\mathbf{u}(n) = \begin{bmatrix} u(nN) & \cdots & u(nN + N - 1) \end{bmatrix}^T \quad (4.10)$$

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(nN) & \cdots & x(nN + N - 1) \end{bmatrix}^T \quad (4.11)$$

$$\mathbf{v}(n) = \begin{bmatrix} v(nN) & \cdots & v(nN + N - 1) \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} y(nN) & \cdots & y(nN + N - 1) \end{bmatrix}^T. \quad (4.13)$$

As equações (4.5) e (4.7) podem ser reescritas como

$$\mathbf{u}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_i(n)\mathbf{s}(n - i) \quad (4.14)$$

e

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_j(n)\mathbf{y}(n - j), \quad (4.15)$$

onde os elementos da matriz  $\mathbf{F}_i(n)$ ,  $N \times M$ , e da matriz  $\mathbf{G}_j(n)$ ,  $M \times N$ , são dados por

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}_i(n)\}_{l,m} &= f_m(iN + l, n - i) \\ \{\mathbf{G}_j(n)\}_{m,l} &= g_m(jN - l, n), \end{aligned} \quad (4.16)$$

com  $m = 0, \dots, M - 1, l = 0, \dots, N - 1$ , ou seja,

$$\mathbf{F}_i(n) = \begin{bmatrix} f_0(iN, n-i) & f_1(iN, n-i) & \cdots & f_{M-1}(iN, n-i) \\ f_0(iN+1, n-i) & f_1(iN+1, n-i) & \cdots & f_{M-1}(iN+1, n-i) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_0(iN+N-1, n-i) & f_1(iN+N-1, n-i) & \cdots & f_{M-1}(iN+N-1, n-i) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_j(n) = \begin{bmatrix} g_0(jN, n) & g_0(jN-1, n) & \cdots & g_0(jN-N+1, n) \\ g_1(jN, n) & g_1(jN-1, n) & \cdots & g_1(jN-N+1, n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{M-1}(jN, n) & g_{M-1}(jN-1, n) & \cdots & g_{M-1}(jN-N+1, n) \end{bmatrix}.$$

(4.17)

Como visto no Capítulo 3, um filtro variante no tempo pode ser representado como um banco de filtros. Na Figura 4.2 é ilustrado esse comportamento dos filtros variantes no tempo como um banco de filtros, onde assumimos que  $f_m(k, n) = f_m(k, n - \delta)$ , ou seja, que existem  $\delta$  conjuntos de filtros  $f_m(k, n)$ , e eles se repetem periodicamente com período  $\delta$ . Na Figura 4.2, o banco de filtros é descrito explicitamente em função das possíveis variações de  $f_m(k, n)$ , o que resulta em uma representação alternativa àquela mostrada no Capítulo 3, em que o filtro variante no tempo é representado como um banco de filtros com entradas moduladas.

Defina a matriz  $\mathbf{H}_l$ ,  $N \times N$ , como

$$\mathbf{H}_l = \begin{bmatrix} h(lN) & h(lN-1) & \cdots & h(lN-N+1) \\ h(lN+1) & h(lN) & \cdots & h(lN-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(lN+N-1) & h(lN+N-2) & \cdots & h(lN) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

O sinal recebido é dado por

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_l \mathbf{u}(n-l) + \mathbf{v}(n), \quad (4.19)$$

onde a convolução entre  $\mathbf{u}(n)$  e  $\mathbf{H}_l$  introduz interferência entre símbolos.

Por exemplo, supondo um canal  $h(n)$  causal FIR de ordem  $L = N - 2$  tal

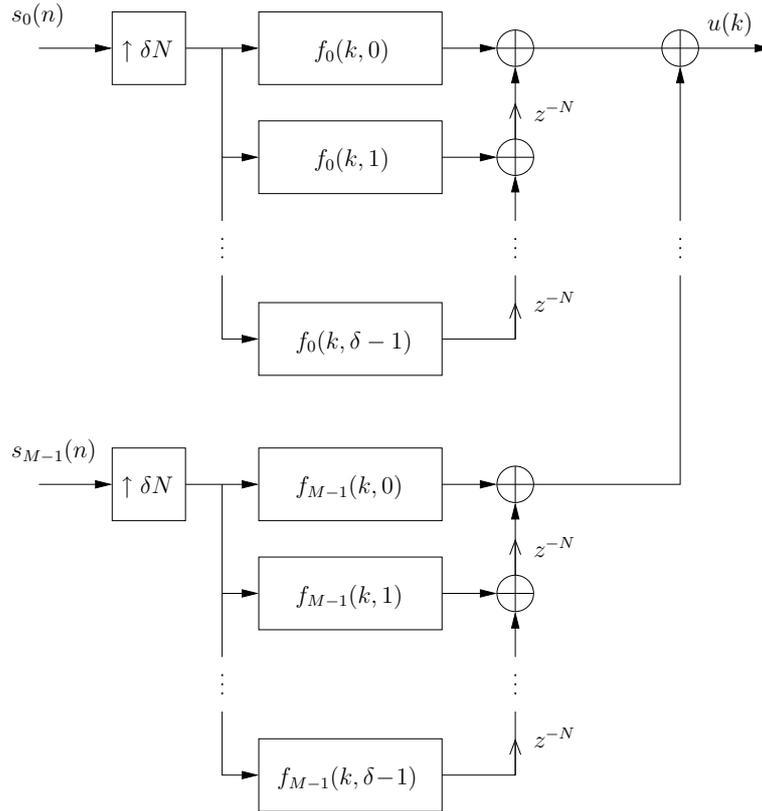


Figura 4.2: Representação de um transmultiplexador variante no tempo como um banco de filtros.

que  $h(0) \neq 0$  e  $h(L) \neq 0$ , as matrizes  $\mathbf{H}_0$  e  $\mathbf{H}_1$  definidas em (4.18) são dadas por

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(N-1) & \cdots & h(1) & h(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & h(N-1) & \cdots & h(1) \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & h(N-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

## 4.2 Trabalhos Relacionados

Em [11] Lin & Phoong estabelecem condições para equalização ZF usando bancos de filtros FIR. Seu modelo de sistema é restrito a transmissores invarian-

tes no tempo, e, portanto, os resultados não podem ser aplicados a sistemas com transmissores variantes no tempo, como sistemas CDMA com códigos longos, por exemplo (*cf.* Capítulo 5). Os pressupostos considerados em [11] são:

- (a) o canal é o mesmo para todos os usuários;
- (b) o canal é um filtro FIR de ordem  $L$ , com  $h(0) \neq 0$  e  $h(L) \neq 0$ ;
- (c) o tamanho do bloco é maior ou igual ao número de símbolos, ou seja,  $N \geq M$ ;
- (d) o transmissor é invariante no tempo.

Vamos definir *zeros congruentes* como um conjunto de zeros distintos  $v_0, v_1, \dots, v_{\mu-1}$ , tais que  $v_0^N = v_1^N = \dots = v_{\mu-1}^N$ .

Baseado nesses pressupostos, e seguindo uma análise no domínio  $Z$ , as condições necessárias e suficientes derivadas em [11] para equalização ZF são:

- (A) a redundância  $N - M$  deve ser maior ou igual a  $\mu(N)$ , onde  $\mu(N)$  é a cardinalidade do maior conjunto de zeros congruentes com respeito a  $N$  [11].
- (B) a matriz do transmissor deve ter posto completo.

Se o transmissor for variante no tempo, então as condições suficientes para equalização ZF não são mais válidas, como mostrado em [10]. Entretanto, em [10] as condições obtidas para equalização ZF são desnecessariamente restritivas. Os pressupostos considerados em [10] são:

- (a) o canal é o mesmo para todos os usuários;
- (b) o canal é um filtro FIR de ordem  $L$ , com  $h(0), h(L) \neq 0$ ;
- (c)  $N$ ,  $M$ , e  $L$  são escolhidos tal que  $N \geq M$  e  $N \geq L$ ;
- (d)  $f_m(k)$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$ , são filtros FIR causais de comprimento  $N$ , e  $g_m(k)$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$ , são filtros FIR causais de comprimento  $QN$ ,  $Q$  inteiro.

Baseado nesses pressupostos e seguindo uma análise no domínio do tempo, Scaglione et al. concluem naquele trabalho que se o transmissor for variante no tempo, as condições necessárias e suficientes para equalização ZF são:

- (A) a redundância  $N - M$  deve ser maior ou igual a 1;

- (B) o comprimento em blocos dos filtros do receptor,  $Q$ , deve ser maior ou igual a  $N/(N - M)$ ;
- (C) a matriz do transmissor deve ter posto completo, com restrições adicionais de projeto.

### 4.3 Equalização ZF

Nesta seção estendemos os resultados resumidos na Seção 4.2 removendo a limitação no comprimento dos filtros do transmissor e na resposta ao impulso do canal. Os filtros do transmissor podem, ainda, ser variantes no tempo. Nesta seção as condições para equalização ZF são derivadas considerando primeiramente filtros com respostas curtas, isto é, filtros cuja ordem é menor do que a ordem do interpolador. Então, generalizamos os resultados para filtros com respostas longas.

Alguns dos pressupostos que serão considerados no restante do capítulo para permitir a solução da equalização são:

- (a) o canal é modelado como um filtro FIR de ordem  $L$ , com  $h(0), h(L) \neq 0$ ;
- (b) o comprimento do bloco é maior ou igual ao número de símbolos de entrada, isto é,  $N \geq M$ ;
- (c)  $f_m(k, n)$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$ , são filtros causais FIR de comprimento  $N$ , e  $g_m(k, n)$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$ , são filtros causais FIR de comprimento  $QN$ , com  $Q$  inteiro.

O pressuposto (a) implica que as matrizes  $\mathbf{H}_l$  são nulas, exceto para  $l = 0, \dots, B$ , com  $B = \lceil \frac{L}{N} \rceil$ , onde  $\lceil \cdot \rceil$  denota o menor inteiro maior ou igual a  $(\cdot)$ . O pressuposto (c) implica que as matrizes  $\mathbf{F}_i(n)$  são nulas, exceto para  $i = 0$  e que as matrizes  $\mathbf{G}_j$  são nulas, exceto para  $j = 0, \dots, Q - 1$ .

Com base nesses pressupostos, temos  $\mathbf{u}(n) = \mathbf{F}_0(n)\mathbf{s}(n)$ ; portanto, a equação (4.19) pode ser reescrita como

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{l=0}^B \mathbf{H}_l \mathbf{F}_0(n-l)\mathbf{s}(n-l) + \mathbf{v}(n). \quad (4.20)$$

Vamos definir os vetores  $\bar{\mathbf{y}}(n)$  e  $\bar{\mathbf{v}}(n)$ ,  $NQ \times 1$ , como

$$\bar{\mathbf{y}}(n) = \left[ \mathbf{y}^T(n-Q+1) \quad \cdots \quad \mathbf{y}^T(n) \right]^T \quad (4.21)$$

$$\bar{\mathbf{v}}(n) = \left[ \mathbf{v}^T(n-Q+1) \quad \cdots \quad \mathbf{v}^T(n) \right]^T. \quad (4.22)$$

Podemos escrever então

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}(n) &= \begin{bmatrix} \sum_{l=0}^B \mathbf{H}_l \mathbf{F}_0(n-l-Q+1) \mathbf{s}(n-l-Q+1) \\ \vdots \\ \sum_{l=0}^B \mathbf{H}_l \mathbf{F}_0(n-l) \mathbf{s}(n-l) \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{v}}(n) \\ &= \mathcal{H} \mathcal{F} \bar{\mathbf{s}}(n) + \bar{\mathbf{v}}(n), \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde  $\mathcal{H}$  é  $QN \times (Q+B)N$ ,  $\mathcal{F}$  é  $(Q+B)N \times (Q+B)M$  e  $\bar{\mathbf{s}}(n)$  é  $(Q+B)M \times 1$ , dados por:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0(n-Q-B+1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_0(n-Q-B+2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_0(n) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\bar{\mathbf{s}}(n) = \left[ \mathbf{s}^T(n-Q-B+1) \quad \cdots \quad \mathbf{s}^T(n) \right]^T. \quad (4.26)$$

Finalmente, podemos escrever a relação entre os símbolos transmitidos e recebidos como

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathcal{G} \mathcal{H} \mathcal{F} \bar{\mathbf{s}}(n) + \mathcal{G} \bar{\mathbf{v}}(n), \quad (4.27)$$

onde a matriz  $\mathcal{G}$ ,  $M \times QN$ , é definida como

$$\mathcal{G} = \left[ \mathbf{G}_{Q-1}(n) \quad \cdots \quad \mathbf{G}_0(n) \right]. \quad (4.28)$$

### 4.3.1 Equalizador ZF Invariante no Tempo

Vamos desenvolver primeiramente as condições para equalização para transmultiplexadores invariantes no tempo. Essa configuração inclui, por exemplo, sistemas baseados em bancos de filtros, OFDM e sistemas CDMA com códigos curtos. Sendo assim, nesta seção vamos usar  $\mathbf{F}_i(n) = \mathbf{F}_i$  e  $\mathbf{G}_j(n) = \mathbf{G}_j$ .

De (4.27), a equalização ZF é obtida se

$$\mathcal{GHF} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times (Q+B-1)M} & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

A condição acima é satisfeita se e somente se o lado direito de (4.29) pertencer ao espaço gerado pelas linhas de  $\mathcal{HF}$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times (Q+B-1)M} & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}^H \in \mathcal{R}\{\mathcal{F}^H \mathcal{H}^H\}, \quad (4.30)$$

onde  $\mathcal{R}\{\cdot\}$  denota o espaço gerado pelas colunas de  $\{\cdot\}$ . Em [10] os autores afirmam que  $\mathcal{HF}$  deve ser inversível, o que é uma condição mais restritiva do que o necessário.

Vamos definir o vetor  $\mathbf{e}_r(i)$ ,  $r \times 1$ , como a  $i$ -ésima coluna da matriz identidade  $r \times r$ . Podemos dizer, então, que se existir o vetor  $\boldsymbol{\alpha}_i$ ,  $(Q+B)N \times 1$ , tal que

$$\mathcal{F}^H \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{e}_{(Q+B)M}(i + (Q+B-1)M), \quad (4.31)$$

a condição (4.30) é satisfeita se e somente se  $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathcal{R}(\mathcal{H}^H)$ .

Observando as equações (4.18) e (4.24), vemos que as linhas de  $\mathcal{H}$  são formadas pela resposta ao impulso do canal,  $h(n)$ . Com isso, sendo  $v_l$ ,  $l = 0, \dots, L-1$ , os zeros de  $H(z)$ , então

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ v_0 & \cdots & v_{L-1} \\ v_0^2 & \cdots & v_{L-1}^2 \\ \vdots & & \vdots \\ v_0^{(Q+B)N-1} & \cdots & v_{L-1}^{(Q+B)N-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

Vemos, então, que o espaço nulo de  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{N}\{\mathcal{H}\}$ , pode ser facilmente caracterizado em função dos zeros do canal, e por isso vamos utilizá-lo para expressar a condição de equalização no lugar de  $\mathcal{R}\{\mathcal{H}^H\}$ . Como  $\mathcal{R}\{\mathcal{H}^H\} \perp \mathcal{N}\{\mathcal{H}\}$  [27], se  $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathcal{R}(\mathcal{H}^H)$  então  $\boldsymbol{\alpha}_i$  é ortogonal a todos os vetores em  $\mathcal{N}\{\mathcal{H}\}$ .

Já esboçamos  $\mathcal{N}\{\mathcal{H}\}$  em (4.32), mas precisamos levar também em consideração que se  $L$  não for múltiplo de  $N$ ,  $\mathbf{H}_B$  terá  $BN - L$  colunas não nulas. Logo, uma caracterização completa de  $\mathcal{N}\{\mathcal{H}\}$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{H}) = & \mathcal{R}\{\mathbf{e}_{(Q+B)N}(i), i = 1, \dots, BN - L\} \\ & \oplus \mathcal{R}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times BN-L} & 1 & v_l & \dots & v_l^{QN+L-1} \end{bmatrix}^T, \right. \\ & \left. l = 0, \dots, L - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde  $v_l$  são as raízes do polinômio  $h(n)$ ,  $\mathcal{N}(\mathcal{H})$  é o espaço nulo de  $\mathcal{H}$  e  $\oplus$  denota a operação de soma direta. Então, a condição (4.30) é satisfeita se e somente se o vetor  $\boldsymbol{\alpha}_i$  que satisfaz (4.31) também satisfizer

$$\boldsymbol{\alpha}_i^H \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}(\mathcal{H}). \quad (4.34)$$

Supondo que  $\mathbf{F}_0$  possua posto completo por colunas, podemos assumir sem perda de generalidade

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \mathbf{F}, \quad (4.35)$$

onde  $\boldsymbol{\Phi}$  é  $N - M \times M$  e a matriz  $\mathbf{F}$ ,  $M \times M$ , possui posto completo<sup>1</sup>. Então,

$$\mathcal{F}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^H & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{F}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_M \ \boldsymbol{\Phi}^H] & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & [\mathbf{I}_M \ \boldsymbol{\Phi}^H] \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Podemos então reescrever (4.31) como

$$\text{diag}\{[\mathbf{I}_M \ \boldsymbol{\Phi}^H], \dots, [\mathbf{I}_M \ \boldsymbol{\Phi}^H]\} \boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+B-1)M \times 1} \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

onde  $\mathbf{f}_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $(\mathbf{F}^H)^{-1}$ . Para simplificar a notação, vamos considerar  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_i$  e  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_i$ .

Para parametrizar a solução de (4.37), vamos caracterizar  $\boldsymbol{\alpha}$  que satisfaça a equação (4.37). Vamos dividir o vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  em  $Q + B$  seções de comprimento  $N$  da

---

<sup>1</sup>Um particionamento alternativo da matriz  $\mathbf{F}_0$  com correspondência com prefixo cíclico em sistemas OFDM é aquele em que as primeiras  $N - M$  linhas correspondem à redundância.

forma

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{Q+B-1} \\ \hat{\alpha}_{Q+B-1} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

onde  $\tilde{\alpha}_q$  e  $\hat{\alpha}_q$  têm dimensões  $M \times 1$  e  $(N - M) \times 1$ , respectivamente, para  $q = 0, \dots, Q + B - 1$ . Das equações (4.37) e (4.38), temos

$$\tilde{\alpha}_q + \boldsymbol{\Phi}^H \hat{\alpha}_q = \begin{cases} 0 & , q = 1, \dots, Q + B - 1 \\ \mathbf{f} & , q = 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Agora, temos que estabelecer restrições sobre os valores de  $Q$ ,  $N - M$  e  $L$  que garantam ortogonalidade entre  $\boldsymbol{\alpha}$  e os vetores no conjunto  $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ . Vamos definir a matriz com os vetores que formam uma base para  $\mathcal{N}(\mathcal{H})$  como

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{BN-L \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{BN-L \times 1} & \mathbf{I}_{BN-L} \\ v_0^0 & \cdots & v_{L-1}^0 & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_0^{QN+L-1} & \cdots & v_{L-1}^{QN+L-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Utilizando (4.39), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^H \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{V}^H \left( \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}^H \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \hat{\alpha}_{Q+B-1} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}^H \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+B-1)N \times 1} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{0}_{N-M \times 1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{V}^H \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}^H \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}^H \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{Q+B-1} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} + \mathbf{V}^H \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+B-1)N \times 1} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{0}_{N-M \times 1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{V}^H \boldsymbol{\Theta} \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\gamma}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi^H \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \begin{bmatrix} -\Phi^H \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{Q+B-1} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\gamma = \mathbf{V}^H \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+B-1)N \times 1} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{0}_{N-M \times 1} \end{bmatrix}.$$

Da equação (4.41), podemos reescrever (4.34) como

$$\mathbf{V}^H \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{V}^H \Theta \hat{\alpha} + \gamma = \mathbf{0}_{BN-1 \times 1}. \quad (4.43)$$

Portanto, a equalização ZF será possível se e somente se existir um vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  tal que

$$\mathbf{V}^H \Theta \hat{\alpha} = -\gamma. \quad (4.44)$$

Como nós desejamos garantir a existência da solução para (4.44) independentemente de  $\gamma$  (e de  $\mathbf{F}$ , conseqüentemente), a condição necessária e suficiente é posto  $(\mathbf{V}^H \Theta) = BN$ .

Para simplificar a notação e tornar mais explícita a estrutura de  $\mathbf{V}^H \Theta$ , vamos definir a matriz  $\Psi$ ,  $N \times N - M$ , dada por

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\Phi^H \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

e os vetores  $\mathbf{v}_l$  e  $\tilde{\mathbf{v}}_l$ ,  $N \times 1$ , dados por

$$\mathbf{v}_l = \begin{bmatrix} v_l^0 & \cdots & v_l^{N-1} \end{bmatrix}^T \quad (4.46)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times BN-L} & v_l^0 & \cdots & v_l^{L-(B-1)N-1} \end{bmatrix}^T, \quad (4.47)$$

para  $l = 0, \dots, L - 1$ , onde  $\tilde{\mathbf{v}}_l$  representa a estrutura das  $N$  primeiras linhas da  $l$ -ésima coluna de  $\mathbf{V}$ , e  $\mathbf{v}_l$  representa as  $N$  linhas subseqüentes da mesma coluna de  $\mathbf{V}$ . Com essas novas matrizes podemos escrever

$$\mathbf{V}^H \Theta = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_0^H \Psi & \mathbf{v}_0^H \Psi & v_0^N \mathbf{v}_0^H \Psi & \dots & v_0^{(Q+B-2)N} \mathbf{v}_0^H \Psi \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \tilde{\mathbf{v}}_{L-1}^H \Psi & \mathbf{v}_{L-1}^H \Psi & v_{L-1}^N \mathbf{v}_{L-1}^H \Psi & \dots & v_{L-1}^{(Q+B-2)N} \mathbf{v}_{L-1}^H \Psi \\ \tilde{\Psi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

onde  $\tilde{\Psi} = \Psi_{1:BN-L, 1:N-M}$ .

Vemos então que a equação (4.48) possui uma estrutura que se repete em todas as suas colunas, com exceção das primeiras  $N$  colunas (e últimas  $BN - L - 1$  linhas), que possuem uma estrutura diferente se o número de coeficientes de  $h(n)$  não for múltiplo de  $N$ . Essa diferença na estrutura traz uma série de restrições e complicações na análise que podem ser evitadas se restringirmos a solução de (4.44) para

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-M \times 1} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

onde  $\boldsymbol{\beta}$ , de dimensão  $(Q + B - 1)(N - M) \times 1$ , passa a ser o vetor de incógnitas.

Vamos definir a matriz

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} v_0^{L-(B-1)N} & \dots & v_{L-1}^{L-(B-1)N} \\ \vdots & & \vdots \\ v_0^{QN+L-1} & \dots & v_{L-1}^{QN+L-1} \end{bmatrix}, L \times (Q + B - 1)N, \quad (4.50)$$

e a matriz

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi^H \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \begin{bmatrix} -\Phi^H \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, (Q+B-1)N \times (Q+B-1)(N-M). \quad (4.51)$$

Assumindo  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  que satisfaça a equação (4.49), podemos, então, reescrever a equação (4.44) como

$$\bar{\mathbf{V}}^H \bar{\Theta} \boldsymbol{\beta} = -\bar{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (4.52)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$  é um vetor formado com os primeiros  $L$  elementos de  $\boldsymbol{\gamma}$ .

Esta solução não apenas evita impor restrições a  $\Psi$ , mas também simplifica a análise do sistema de equações. A equação (4.52) admite solução se e somente se  $\text{posto}(\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta}) = L$ . Então, uma condição necessária para a existência de solução é

$$(Q + B - 1)(N - M) \geq L \Rightarrow Q \geq \left\lceil \frac{L}{N - M} \right\rceil - B + 1. \quad (4.53)$$

Vamos analisar em que condições  $\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta}$  apresentaria deficiência de posto. Suponha que existam  $\mu$  zeros de  $h(n)$  tais que  $v_l^N = \rho$ ,  $l = 0, \dots, \mu - 1$ . Esses são chamados de zeros congruentes [11, 12] (ver Seção 4.2). Então,  $\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta}$  será dado por

$$\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta} = \begin{bmatrix} \rho^0 \mathbf{v}_0^H \Psi & \dots & \rho^{Q+B-2} \mathbf{v}_0^H \Psi \\ \vdots & & \vdots \\ \rho^0 \mathbf{v}_{\mu-1}^H \Psi & \dots & \rho^{Q+B-2} \mathbf{v}_{\mu-1}^H \Psi \\ v_\mu^{0N} \mathbf{v}_\mu^H \Psi & \dots & v_\mu^{(Q+B-2)P} \mathbf{v}_\mu^H \Psi \\ \vdots & & \vdots \\ v_{L-1}^{0N} \mathbf{v}_{L-1}^H \Psi & \dots & v_{L-1}^{(Q+B-2)P} \mathbf{v}_{L-1}^H \Psi \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Podemos escrever as primeiras  $\mu$  linhas de  $\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta}$  como

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta})_{1:\mu, 1:(Q+B-1)(N-M)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^H \Psi & \dots & \mathbf{v}_0^H \Psi \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_{\mu-1}^H \Psi & \dots & \mathbf{v}_{\mu-1}^H \Psi \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-M} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{I}_{N-M} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \rho^{Q+B-2} \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Na equação (4.55), a matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^H \Psi & \dots & \mathbf{v}_0^H \Psi \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_{\mu-1}^H \Psi & \dots & \mathbf{v}_{\mu-1}^H \Psi \end{bmatrix}$$

possui no máximo  $\min(\mu, N - M)$  colunas independentes. Logo, se  $N - M < \mu$ , a matriz  $\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\mathbf{\Theta}}$  não possuirá posto completo por linhas, e a equalização ZF não será possível.

### 4.3.2 Equalizador ZF Variante no Tempo

É possível reduzir ainda mais a redundância mínima se considerarmos que o transmultiplexador pode ser variante no tempo. Os resultados desta seção estendem aqueles encontrados em [10], pois permitem encontrar relações mais eficientes para a ordem do equalizador e a redundância mínima.

Os pressupostos (a)–(c) descritos na página 46 continuam valendo, sendo que agora no pressuposto (c),  $f_m(k, n)$  são filtros FIR variantes no tempo causais de comprimento  $N$ . Como verificaremos mais adiante, não é necessário que os filtros  $f_m(k, n_1) \neq f_m(k, n_2) \forall n_1 \neq n_2$ . Basta que dentro de um conjunto finito de filtros haja uma determinada quantidade de filtros distintos. Assim, podemos simplificar a análise supondo que a variação no tempo de  $f_m(k, n)$  se dá de forma periódica, com período  $Q + B$ , ou seja,

$$f_m(k, n) = f_m(k, n + Q + B) \quad (4.56)$$

e conseqüentemente

$$\mathbf{F}_0(n) = \mathbf{F}_0(n - Q - B). \quad (4.57)$$

As condições para equalização ZF não se alteram, e, portanto, as equações de (4.27) a (4.34) continuam válidas. Supondo que  $\mathbf{F}_0(n)$  possua posto completo por colunas, podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\mathbf{F}_0(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{\Phi}(n) \end{bmatrix} \mathbf{F}, \quad (4.58)$$

onde  $\Phi(n)$  é  $N - M \times M$ , e a matriz  $\mathbf{F}$ ,  $M \times M$ , possui posto completo. Então,

$$\mathcal{F}^H = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^H & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^H & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}^H \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left[ \mathbf{I}_M \quad \Phi^H(n - Q - B + 1) \right] & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \left[ \mathbf{I}_M \quad \Phi^H(n - Q - B + 2) \right] & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \left[ \mathbf{I}_M \quad \Phi^H(n) \right] \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Seguindo um raciocínio semelhante ao utilizado na seção anterior, e redefinindo

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} -\Phi^H(n - Q - B + 1) \\ \mathbf{I}_{N-M} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{array} \right] & \cdots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \left[ \begin{array}{c} -\Phi^H(n) \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{array} \right] \end{bmatrix}, \quad (4.60)$$

chegamos novamente à conclusão de que a equalização ZF é possível se e somente se a equação

$$\bar{\mathbf{V}}^H \bar{\Theta} \beta = -\bar{\gamma}$$

admitir solução. Novamente podemos dizer que uma condição necessária para a existência de uma solução é

$$(Q + B - 1)(N - M) \geq L \Rightarrow Q \geq \left\lceil \frac{L}{N - M} \right\rceil - B + 1. \quad (4.61)$$

Como vimos na Seção 4.3.1, a presença de zeros congruentes requer a introdução de restrições adicionais para garantir a existência de equalizadores ZF. Para verificarmos se essas restrições são necessárias no caso do transmissor ser variante no tempo, vamos analisar novamente o que acontece se  $h(n)$  possuir  $\mu$  zeros

congruentes tais que  $v_l^N = \rho$ ,  $l = 0, \dots, \mu - 1$ . Nesse caso,  $\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta}$  será dado por

$$\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta} = \begin{bmatrix} \rho^0 \mathbf{v}_0^H \Psi(n - Q - B + 2) & \cdots & \rho^{n-Q-B+2} \mathbf{v}_0^H \Psi(n) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho^0 \mathbf{v}_{\mu-1}^H \Psi(n - Q - B + 2) & \cdots & \rho^{Q+B-2} \mathbf{v}_{\mu-1}^H \Psi(n) \\ v_\mu^{0N} \mathbf{v}_\mu^H \Psi(n - Q - B + 2) & \cdots & v_\mu^{(Q+B-2)P} \mathbf{v}_\mu^H \Psi(n) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{L-1}^{0N} \mathbf{v}_{L-1}^H \Psi(n - Q - B + 2) & \cdots & v_{L-1}^{(Q+B-2)P} \mathbf{v}_{L-1}^H \Psi(n) \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

onde a matriz  $\Psi(n)$  é definida como

$$\Psi(n) = \begin{bmatrix} -\Phi^H(n) \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Podemos escrever as primeiras  $\mu$  linhas de (4.62) como

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta})_{1:\mu, 1:(Q+B-1)(N-M)} &= \left( \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^H \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{\mu-1}^H \end{bmatrix} \times \left[ \Psi(n - Q - B + 2) \cdots \Psi(n) \right] \right) \times \\ &\times \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-M} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{I}_{N-M} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \rho^{Q+B-2} \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Analisando a equação (4.64), verificamos que devemos ter ao menos  $\delta$  matrizes  $\Psi(n)$  distintas tais que

$$\text{posto} \left\{ \left[ \Psi(n - \delta + 1) \quad \Psi(n - \delta + 2) \quad \cdots \quad \Psi(n) \right] \right\} = \delta(N - M), \quad (4.65)$$

para que o lado esquerdo da equação (4.64) possua  $\min(\mu, (N - M)\delta, N)$  colunas linearmente independentes, com  $(N - M)\delta \geq N$ . Assim, com (4.65) satisfeita,  $\overline{\mathbf{V}}^T \overline{\Theta}$  possui posto completo por linhas se e somente se  $(N - M)\delta \geq \mu$ , e, portanto,

$$(N - M)\delta \geq \mu \Rightarrow \delta \geq \frac{\mu}{N - M}. \quad (4.66)$$

Como é necessário que  $N \geq \mu$ , e por definição  $L \geq \mu$ , a condição para equalização ZF sem conhecimento do número exato de zeros congruentes é dada por

$$\delta \geq \frac{\min(N, L)}{N - M}. \quad (4.67)$$

Caso o valor de  $Q$  seja grande, há contribuição de vários blocos transmitidos para calcular o bloco desejado, e, conseqüentemente, a influência de vários filtros distintos do transmissor. Entretanto, não é necessário que todos os filtros envolvidos na reconstrução de um bloco sejam distintos. Basta que o número de filtros distintos seja igual ao previsto pela equação (4.67) para garantir a reconstrução perfeita. Essa observação é importante pois pode ser utilizada para o projeto simplificado de filtros do transmissor e do equalizador que garantam a reconstrução perfeita.

A equação (4.61) mostra que para uma determinada ordem do canal, é possível obter uma solução de compromisso entre a ordem do equalizador e a redundância inserida no sinal. Essa relação não é contemplada em [11], já que os autores não consideraram que o pré-codificador poderia ser variante no tempo. A equação (4.61) também difere dos resultados encontrados em [10], onde o projeto de  $\Psi(i)$  é muito mais restritivo e a relação entre  $Q$  e  $N - M$  não depende diretamente da ordem do canal, e sim do tamanho do bloco, o que leva a ordens muito elevadas do equalizador.

### 4.3.3 Sistemas com filtros longos no transmissor

Em várias situações será interessante utilizar filtros no pré-codificador que possuam resposta ao impulso maior do que o tamanho do bloco. Isso é útil, por exemplo, em sistemas baseados em bancos de filtros, onde a utilização de filtros longos no transmissor permite que os mesmos possuam maior seletividade, reduzindo o efeito de interferência em sub-bandas vizinhas sobre a sub-banda de interesse [45–48]. Outra aplicação será demonstrada no Capítulo 5, onde a configuração de *uplink* de um sistema CDMA será interpretada como um transmultiplexador com filtros longos.

Para essa generalização do pré-codificador, o pressuposto (c) deve ser modificado para [49]

(c.1)  $f_m(k, n)$  são filtros FIR causais de comprimento  $TN$ , e  $g_m(k, n)$  são filtros FIR causais de comprimento  $QN$ ,  $T$  e  $Q$  inteiros.

Com essa modificação, agora as matrizes  $\mathbf{F}_i(n)$  são nulas, exceto para  $i = 0, \dots, T - 1$ . Baseado nesse pressuposto e nos pressupostos a) e b) definidos anteriormente,

podemos escrever as relações entrada-saída do sistema de forma similar à equação (4.27). Para tanto, observamos que a equação (4.14) pode ser reescrita como

$$\mathbf{u}(n) = \sum_{i=0}^{T-1} \mathbf{F}_i \mathbf{s}(n-i) \quad (4.68)$$

A equação (4.68) mostra claramente que ao utilizarmos filtros no transmissor de comprimento maior do que  $N$ , o pré-codificador passa a ser um sistema com memória, uma vez que o bloco transmitido é uma combinação do bloco de dados atual com os blocos anteriores. Assim, podemos escrever

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{F}^{FB}(n)\bar{\mathbf{s}}(n) + \mathcal{G}\bar{\mathbf{v}}(n), \quad (4.69)$$

onde a matriz  $\mathcal{F}^{FB}(n)$ ,  $(B+Q)N \times (B+Q+T-1)M$ , é dada por

$$\mathcal{F}^{FB} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T-1}(n-Q-B+1) & \cdots & \mathbf{F}_0(n-Q-B+1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{F}_{T-1}(n) & \cdots & \mathbf{F}_0(n) \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Mais uma vez, da equação (4.69), a equalização ZF é obtida se  $v(k) = 0$  e

$$\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{F}^{FB} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times (Q+B+T-1)M} & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Para considerar o pior caso de interferência entre símbolos, vamos assumir que  $\text{posto}(\mathbf{F}_{T-1}(n)) \geq \text{posto}(\mathbf{F}_t(n))$ ,  $t = 1, \dots, T-2$ , e vamos definir

$$\bar{\mathbf{F}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T-1}(n) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_0(n) \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

A análise é similar àquela desenvolvida na Seção 4.3.2 para pré-codificadores com filtros de resposta curta, mas como  $\mathcal{F}$  não é mais diagonal em blocos, não é suficiente assumir que  $\mathbf{F}_0(n)$  tenha posto completo por colunas. A relação  $\mathcal{F}^H \boldsymbol{\alpha}$  pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T-1}^H(n-Q-B+1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{F}_0^H(n-Q-B+1) & \cdots & \mathbf{F}_{T-1}^H(n-1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & & \mathbf{F}_{T-1}^H(n) \\ \vdots & & \mathbf{F}_0^H(n-1) & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_0^H(n) \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(T-1)M \times 1} \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

onde o vetor  $\gamma$  é  $(Q + B)M \times 1$ . Vamos assumir por simplicidade que  $\text{posto}(\mathbf{F}_{T-1}(n)) \geq \text{posto}(\mathbf{F}_t(n))$ ,  $t = 1, \dots, T-2$ . Vamos assumir também que  $\mathbf{F}_0(n)$  possui posto completo por colunas. Então, analisando as linhas de  $\mathcal{F}^H$  observamos que

$$\text{posto}(\mathcal{F}^H) \leq (Q + B)M + (T - 1)\text{posto}(\mathbf{F}_{T-1}(n)). \quad (4.74)$$

Vamos definir a matriz  $TM \times N$

$$\bar{\mathbf{F}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T-1}(n) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_0(n) \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Comparando (4.75) com (4.73), observamos que

$$\text{posto}(\mathcal{F}^H) \leq \sum_{q=0}^{Q+B-1} \text{posto}(\bar{\mathbf{F}}(n-q)). \quad (4.76)$$

Assumindo por simplicidade que  $\text{posto}(\bar{\mathbf{F}}(n)) = \text{posto}(\bar{\mathbf{F}}(n-q))$ ,  $q = 1, \dots, Q+B-1$ , a expressão para o posto por colunas é dada por  $\text{posto}(\mathcal{F}^H) \leq (Q + B)\text{posto}(\bar{\mathbf{F}}(n))$ . Para garantir que o projeto dos filtros do transmissor não seja o fator limitante na existência do equalizador ZF, estes devem ser projetados de tal forma que

$$\text{posto}(\bar{\mathbf{F}}(n)) \geq M + \frac{T-1}{Q+B}\text{posto}(\mathbf{F}_{T-1}(n)). \quad (4.77)$$

Mesmo se a relação na equação (4.77) for satisfeita, a existência de solução para a equação (4.73) não é garantida, em geral, se  $\text{posto}(\mathcal{F}^H) < (Q + B)M + (T - 1)\text{posto}(\mathbf{F}_{T-1}(n))$ . De modo a derivar condições no projeto dos filtros do transmissor que evitem essa deficiência de posto em  $\mathcal{F}^H$ , vamos escrever, sem perda de generalidade:

$$\mathbf{F}_t(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\text{posto}(\mathbf{F}_t(n))} & \bar{\Phi}_t(n) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \Phi_t(n) \end{bmatrix} \mathbf{F}'_t(n), \quad (4.78)$$

onde a matriz  $\mathbf{F}'_t(n)$ ,  $M \times M$ , possui posto completo,  $\Phi_t(n)$  é  $(N - M) \times M$  e  $\bar{\Phi}_t(n)$  é  $M \times (M - \text{posto}(\mathbf{F}_t(n)))$ ,  $t = 0, \dots, T - 1$ . De modo a simplificar a notação, vamos assumir  $\text{posto}(\mathbf{F}_t(n)) = M$ ,  $\forall t$ . Se  $\mathbf{F}'_t(n) = \dots = \mathbf{F}'_0(n)$ , podemos escrever a

equação (4.73) como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & \Phi_{T-1}^H(n-Q-B+1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_M & \Phi_0^H(n-Q-B+1) & \dots & \mathbf{I}_M & \Phi_{T-1}^H(n-1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots & \vdots & \mathbf{I}_M & \Phi_{T-1}^H(n) \\ \vdots & & & \mathbf{I}_M & \Phi_0^H(n-1) & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_M & \Phi_0^H(n) \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(T-1)M \times 1} \\ \gamma' \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

Através de operações lineares nas linhas do lado esquerdo da equação (4.79), suas  $M$  últimas linhas podem ser obtidas como

$$\left[ \mathbf{0} \pm \sum_{t=0}^{T-1} a_t \Phi_t^H(n-Q-B+1) \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \pm \sum_{t=0}^{T-1} a_t \Phi_t^H(n) \right], \quad (4.80)$$

onde  $a_t$ ,  $t = 0, \dots, T-1$ , são coeficientes escalares. A matriz na equação (4.80) deve possuir posto completo por linhas de modo a garantir que exista solução para a equação (4.79).

O posto da equação (4.80) é menor ou igual a  $\min(M, (N-M)\delta)$ , uma vez que existem no máximo  $\delta$  filtros distintos no período de variação no tempo do pré-codificador. Portanto, o posto da equação (4.80) é igual a  $M$  se e somente se  $\delta \geq M/(N-M)$ . É imediato verificar que a restrição em  $\delta$  pode ser generalizada para  $\delta \geq M/(N-M) - (M - \text{posto}(\mathbf{F}_{T-1}(n)))$ .

Uma vez que podemos garantir a existência de solução para a equação (4.73),

observamos que a mesma pode ser dividida em dois termos,

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_0^H(n-Q-B+1) \dots \mathbf{F}_{T-1}^H(n-1) & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & & \mathbf{F}_{T-1}^H(n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_0^H(n) \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\
& + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T-1}^H(n-Q-B+1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{F}_1^H(n-Q-B+1) & \dots & \mathbf{F}_{T-1}^H(n-2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(T-1)M \times 1} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}, \quad (4.81)
\end{aligned}$$

onde se assumiu que  $T \leq B+Q$ . Como será visto mais tarde, essa relação será sempre satisfeita uma vez que as demais condições de projeto sejam satisfeitas. Como a equação (4.81) deve possuir solução para qualquer vetor  $\boldsymbol{\gamma}$ , depois de algumas manipulações algébricas concluímos que a equação (4.81) é equivalente a

$$\text{diag}(\mathbf{F}_0^H(n-Q-B+1), \dots, \mathbf{F}_0^H(n)) \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}_1 \mathbf{1} \quad (4.82)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (4.83)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{T-1}^H(n-Q-B+1) & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{F}_1^H(n-Q-B+1) & \dots & \mathbf{F}_{T-1}^H(n-2) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

A relação  $\mathcal{F}^H \boldsymbol{\alpha}$  é agora dividida em duas, e precisamos encontrar condições para a existência de um vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  que satisfaça simultaneamente as equações (4.82) e (4.83). Através de uma análise similar à realizada na Seção 4.3.2 para pré-codificadores com resposta curta, a condição de ZF é satisfeita se e somente se existir um vetor  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  tal que

$$\mathbf{V}^H \boldsymbol{\Theta} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = -\mathbf{V}^H \boldsymbol{\gamma}'_1, \quad (4.85)$$

onde as colunas de  $\mathbf{V}$ ,  $BN - 1 \times (Q + B)N$ , formam uma base para  $\mathcal{N}(\mathcal{H})$  e  $\Theta$ ,  $(Q + B)N \times (Q + B)(N - M)$ , é dado por

$$\Theta = \text{diag} \left\{ \left[ -\Phi(n - Q - B + 1) \quad \mathbf{I}_{N-M} \right]^T, \dots, \left[ -\Phi(n) \quad \mathbf{I}_{N-M} \right]^T \right\}. \quad (4.86)$$

Como na Seção 4.3.2, vamos evitar lidar diretamente com as colunas de  $\mathbf{V}$  que não correspondam a zeros de  $h(k)$ , que existem apenas se  $L$  não for múltiplo de  $N$ . Assim, vamos restringir a solução para

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-M \times 1} \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Conseqüentemente, a equação (4.85) é modificada para

$$\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta} \beta = -\overline{\gamma}'_1, \quad (4.88)$$

onde  $\overline{\mathbf{V}}^H$  e  $\overline{\Theta}$  são definidas como nas equações (4.50) e (4.51), respectivamente.

A solução da equação (4.82) já foi encontrada na Seção 4.3.2, portanto precisamos agora encontrar o conjunto de restrições que devem ser adicionadas à solução da equação (4.82) de modo a solucionar as equações (4.82) e (4.83) simultaneamente. A diferença entre o número de colunas e o número de linhas de  $(\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta})$  é o número de graus de liberdade na solução da equação (4.88). O vetor  $\beta$  que satisfaz a equação (4.88) pode ser reescrito como

$$\beta = \beta^* + \overline{\mathbf{K}} \epsilon, \quad (4.89)$$

onde  $\beta^*$  é uma solução para a equação (4.52). A matriz  $\overline{\mathbf{K}}$ ,  $(Q + B - 1)(N - M) \times (Q + B - 1)(N - M) - L$ , gera o espaço nulo de  $\overline{\mathbf{V}}^H \overline{\Theta}$  e  $\epsilon$  é um vetor  $(Q + B - 1)(N - M) - L \times 1$ . Da equação (4.87), podemos escrever  $\hat{\alpha}$  como

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-M \times 1} \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-M \times 1} \\ \beta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-M \times 1} \\ \overline{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \epsilon. \quad (4.90)$$

É possível agora verificar que condições a solução da equação (4.82) deve satisfazer de modo a ser também uma solução da equação (4.83). Substituindo a equação (4.90) na equação (4.83) e usando  $\alpha = \Theta \hat{\alpha} + \gamma'_1$ , obtemos

$$\tilde{\mathbf{F}} \Theta \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-M \times 1} \\ \beta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-M \times 1} \\ \overline{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \epsilon \right) + \tilde{\mathbf{F}} \gamma'_1 = \mathbf{0}, \quad (4.91)$$

que pode ser reescrita como

$$\left( \tilde{\mathbf{F}}\Theta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} - \tilde{\mathbf{F}}\boldsymbol{\gamma}'_1 - \tilde{\mathbf{F}}\Theta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta}^* \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

Para que a equação acima possua solução para qualquer  $\boldsymbol{\beta}^*$ ,  $\boldsymbol{\gamma}'_1$  e  $\mathbf{F}_t^H$ ,  $t = 0, \dots, T-1$ , é necessário que o número de colunas da matriz multiplicando  $\boldsymbol{\epsilon}$  na equação acima seja maior ou igual ao número de linhas, ou seja,

$$\begin{aligned} (Q+B)(N-M) - L &\geq (T-1)M \Rightarrow \\ \Rightarrow Q &\geq \left\lceil \frac{L + (T-1)M}{N-M} \right\rceil - B. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Portanto, ao permitir um número suficiente de graus de liberdade no projeto do receptor é possível garantir a reconstrução perfeita dos símbolos transmitidos. É importante notar na equação (4.93) que um aumento de  $(T-1)$  no comprimento (em blocos) do filtro do transmissor não corresponde a um aumento na mesma proporção nos filtros do receptor. O aumento real no comprimento dos filtros do receptor é  $(T-1)M/(N-M)$ . Se o sistema for projetado para ter alta eficiência de transmissão, o que implica fazer com que a razão  $M/(N-M)$  seja alta, então a complexidade do equalizador aumentará consideravelmente. Por outro lado, se a complexidade do receptor é um fator importante, então adicionando redundância é possível reduzir-se o impacto dos filtros longos no transmissor, especialmente se  $M/(N-M) < 1$ .

Esse resultado pode ser usado, por exemplo, no projeto de sistemas onde filtros longos são utilizados no transmissor de modo a alcançar alta eficiência espectral [45, 47, 48, 50]. Essa é uma propriedade útil em cenários onde interferência de banda estreita ou interferidores intencionais (*jammers*) são prováveis e bandas sofrendo interferência podem ser “desconectadas”, levando à rejeição da interferência. Estratégias similares são consideradas em sistemas baseados em OFDM, mas com menor eficiência, já que apenas filtros de respostas curtas são usados, sendo definidos pela matriz de IFFT no transmissor. Ao projetar o sistema de acordo com as condições especificadas nesta seção, é possível utilizar filtros de alta eficiência espectral no transmissor sem fazer o receptor proibitivamente complexo.

As condições necessárias e suficientes para equalização ZF encontram-se resumidas nas Tabelas 4.1 e 4.2. Convém notar que, do ponto de vista do transmissor,

Tabela 4.1: Condições necessárias e suficientes para equalização ZF para pré-codificador invariante no tempo

Condições da matriz do transmissor	$\text{posto}(\mathbf{F}_0) = M$ $\text{posto}(\overline{\mathbf{F}}) \geq M + \frac{T-1}{Q+B}\text{posto}(\mathbf{F}_{T-1})$
Quantidade de redundância	$N - M \geq \mu$
Número de precodificadores	1
Tamanho mínimo do bloco	$N \geq \mu$
Comprimento dos filtros do receptor	$Q \geq \left\lceil \frac{L+(T-1)M}{N-M} \right\rceil - B + 1$

Tabela 4.2: Condições necessárias e suficientes para equalização ZF para precodificador variante no tempo

Condições da matriz do transmissor	$\text{posto}(\mathbf{F}_0(n)) = M$ $\text{posto}(\overline{\mathbf{F}}(n)) \geq M + \frac{T-1}{Q+B}\text{posto}(\mathbf{F}_{T-1}(n))$ $\text{posto}(\overline{\Psi}) = N$
Quantidade de redundância	$N - M \geq 1$
Número de precodificadores	$\delta \geq \frac{\mu}{N-M}$ (or $\delta \geq \frac{\min(N,L)}{N-M}$ ) $\delta \geq \frac{M}{N-M}$ (se $\mathbf{F}'_{T-1}(n) = \dots = \mathbf{F}'_0(n)$ )
Tamanho mínimo do bloco	$N \geq \mu$
Comprimento dos filtros do receptor	$Q \geq \left\lceil \frac{L+(T-1)M}{N-M} \right\rceil - B + 1$

apenas informação parcial sobre o estado do canal é necessária, especificamente um limite superior na ordem do canal e um limite superior no número de zeros congruentes. Essa informação é usada para especificar as dimensões do sistema. O projeto do filtro do transmissor é independente de uma realização específica do canal. Naturalmente é possível projetar o transmissor de modo a explorar características específicas da resposta do canal, mas tal complexidade não é necessária para a existência do equalizador ZF visto neste capítulo.

## 4.4 Relação entre carga e complexidade

A partir das equações mostradas nas Tabelas 4.1 e 4.2, não é imediato inferir de que modo as escolhas de comprimento dos filtros, do tamanho do bloco e da quantidade de redundância afetam a complexidade do receptor. Nesta seção derivamos relações visando a compreender como esses diferentes parâmetros se relacionam. A discussão inclui exemplos para algumas escolhas particulares dos parâmetros do sistema.

Vamos definir a carga do sistema de comunicações como

$$\eta = \frac{M}{N} \quad (4.94)$$

É possível, então, reescrever a equação (4.93) em função de  $\eta$  como

$$\begin{aligned} Q &\geq \frac{L + (T - 1)M}{N - M} - B + 1 = \\ &= \frac{L}{(1 - \eta)N} + (T - 1)\frac{\eta}{1 - \eta} - B + 1 \\ &= \frac{L + (T - 1)\eta N}{(1 - \eta)N} - B + 1 \end{aligned} \quad (4.95)$$

e também  $\eta$  em função de  $Q$ ,  $T$ ,  $B$  e  $N$  como

$$\eta \leq \frac{(Q + B - 1)N - L}{(Q + B + T - 2)N} = \frac{Q + B - 1 - \frac{L}{N}}{Q + B + T - 2}. \quad (4.96)$$

Definimos, então, a *carga máxima* do sistema como o maior valor de  $\eta$  tal que equalização ZF ainda é possível. Da equação (4.96),

$$\eta_M = \frac{Q + B - 1 - \frac{L}{N}}{Q + B + T - 2}. \quad (4.97)$$

A Figura 4.3 mostra o comportamento da carga máxima em função do comprimento do equalizador  $Q$ , para blocos de comprimento  $N = 128$ , comprimento dos filtros do pré-codificador  $T = \{1, 2, 3, 4\}$  e ordem do canal  $L = 129$  (o que implica  $B = 2$ ). Pode-se observar, então, que mesmo no caso em que tanto os filtros do pré-codificador quanto o canal possuem respostas mais longas que o comprimento  $N$  do bloco, é possível alcançar equalização ZF utilizando apenas um bloco no receptor, desde que a carga do sistema seja baixa. Por exemplo, com  $T = 1$  é possível ter equalização ZF para  $\eta < 0.50$ , e com  $T = 2$  equalização ZF é possível para  $\eta < 0.33$ . Embora a variação em  $\eta$  por causa de uma variação em  $Q$  seja grande para valores

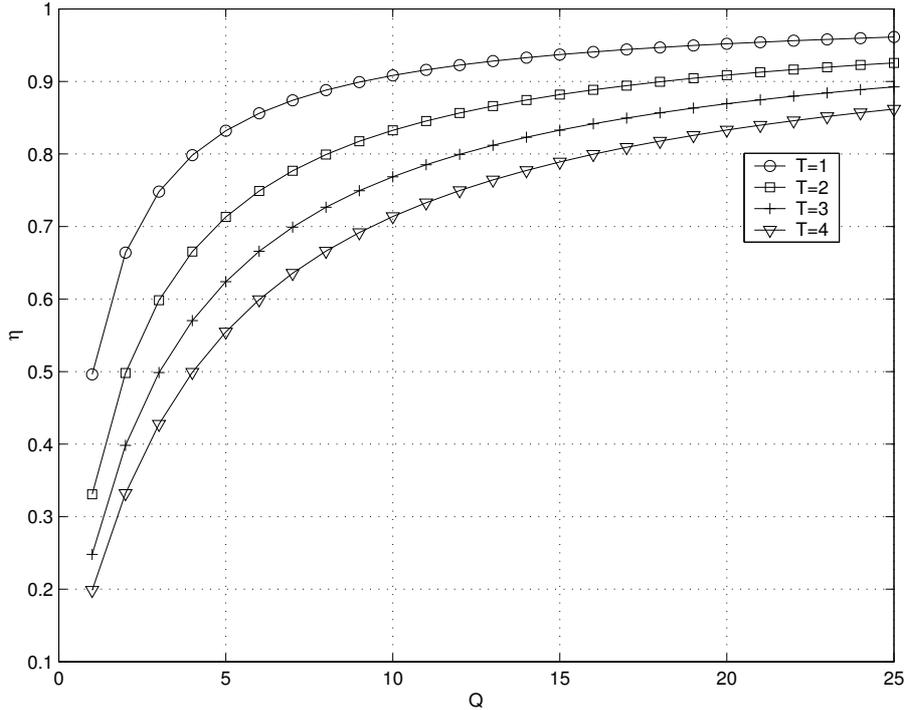


Figura 4.3: Carga máxima em função de  $Q$  para  $T = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = 2$ .

pequenos de  $Q$ , essa variação é pequena para valores grandes de  $Q$ , de modo que aumentar muito a complexidade do receptor não traz um grande aumento na carga máxima que o sistema suporta.

## 4.5 Projeto do equalizador ZF-LS

Na presença de ruído, o equalizador ZF pode ter o desempenho comprometido, uma vez que o projeto do receptor não leva em consideração as características do ruído. Este problema é particularmente crítico se a razão sinal-ruído for baixa. Em [51], notamos que este problema típico de equalizadores ZF pode ser evitado se a matriz  $\mathcal{G}$  for aproximada por uma solução de mínimo quadrados, utilizando uma pseudo-inversa ou uma abordagem alternativa, como filtragem adaptativa. Nesta seção, descrevemos o equalizador de mínimos quadrados (*Least Squares*, LS) e derivamos o equalizador de mínimo erro quadrático médio (*Minimum Mean Square Error*, MMSE) para o sistema descrito nas seções anteriores. Soluções combinando pré-codificadores e equalizadores ZF e MMSE são considerados, por exemplo, no contexto de sistemas MIMO multiusuário [52].

## ZF-LS

Vamos definir a matriz  $\mathbf{S}$ ,  $M \times \infty$ , e a matriz  $\mathbf{X}$ ,  $N \times \infty$ , como

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{s}(-1) & \mathbf{s}(0) & \mathbf{s}(1) & \cdots \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{x}(-1) & \mathbf{x}(0) & \mathbf{x}(1) & \cdots \end{bmatrix}. \quad (4.99)$$

A matriz  $M \times N$  que minimiza o erro quadrático entre os símbolos recebidos e transmitidos é  $\mathbf{G} = \mathbf{S}(\mathbf{X})^\dagger$ , onde  $(\cdot)^\dagger$  denota a pseudo-inversa [53]. Uma aproximação de  $\mathbf{G}$  usando um número finito de símbolos é dada por

$$\mathbf{G} \approx \tilde{\mathbf{S}}(\tilde{\mathbf{X}})^\dagger, \quad (4.100)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{S}} = [\mathbf{s}(n1) \ \cdots \ \mathbf{s}(n2)], \quad \tilde{\mathbf{X}} = [\mathbf{x}(n1) \ \cdots \ \mathbf{x}(n2)], \quad (4.101)$$

com  $n1 < n2 < \infty$ .

## ZF-MMSE

A partir da equação (4.27), ou equivalentemente equação (4.69), podemos definir o erro quadrático médio (*mean squared error*, MSE) na estimação dos símbolos transmitidos como

$$\begin{aligned} \xi &= E[|\hat{\mathbf{s}}(n) - \mathbf{s}(n - \Delta)|^2] \\ &= E[|\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}\bar{\mathbf{s}}(n) + \mathbf{G}\bar{\mathbf{v}}(n) - \mathbf{s}(n - \Delta)|^2] \\ &= E[\bar{\mathbf{s}}^H(n)\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}\bar{\mathbf{s}}(n) - \bar{\mathbf{s}}^H(n)\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H\mathbf{s}(n - \Delta) + \\ &\quad + \bar{\mathbf{v}}^H(n)\mathbf{G}^H\mathbf{G}\bar{\mathbf{v}}(n) - \mathbf{s}^H(n - \Delta)\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}\bar{\mathbf{s}}(n) + \mathbf{s}^H(n - \Delta)\mathbf{s}(n - \Delta)] \\ &= E[\text{traço}\{\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}\bar{\mathbf{s}}(n)\bar{\mathbf{s}}^H(n)\} - \text{traço}\{\mathbf{F}^H\mathbf{H}^H\mathbf{G}^H\mathbf{s}(n - \Delta)\bar{\mathbf{s}}^H(n)\} + \\ &\quad + \text{traço}\{\mathbf{G}^H\mathbf{G}\bar{\mathbf{v}}(n)\bar{\mathbf{v}}^H(n)\} - \text{traço}\{\mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{F}\bar{\mathbf{s}}(n)\mathbf{s}^H(n - \Delta)\} + \\ &\quad + \mathbf{s}^H(n - \Delta)\mathbf{s}(n - \Delta)], \end{aligned} \quad (4.102)$$

onde  $\Delta$  é o atraso na recepção, que se assume conhecido. Antes de proceder com a derivação do receptor, vamos definir as seguintes matrizes de correlação:

$$\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{s}}} = E[\bar{\mathbf{s}}(n)\bar{\mathbf{s}}^H(n)] \quad (4.103)$$

$$\mathbf{R}_{\Delta} = E[\bar{\mathbf{s}}(n)\mathbf{s}^H(n - \Delta)] \quad (4.104)$$

$$\mathbf{R}_v = E[\bar{\mathbf{v}}(n)\bar{\mathbf{v}}^H(n)]. \quad (4.105)$$

Usando as definições das equações (4.103)–(4.105) na equação (4.102), o erro  $\xi$  pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \xi = & \text{traço}\{\mathcal{F}^H \mathcal{H}^H \mathcal{G}^H \mathcal{G} \mathcal{H} \mathcal{F} \mathbf{R}_{\bar{s}}\} - \text{traço}\{\mathcal{F}^H \mathcal{H}^H \mathcal{G}^H \mathbf{R}_{\Delta}^H\} + \\ & + \text{traço}\{\mathcal{G}^H \mathcal{G} \mathbf{R}_v\} - \text{traço}\{\mathcal{G} \mathcal{H} \mathcal{F} \mathbf{R}_{\Delta}\} + E_s, \end{aligned} \quad (4.106)$$

onde  $E_s = E[\mathbf{s}^H(n - \Delta)\mathbf{s}(n - \Delta)]$ . A equação (4.106) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \xi = & \text{traço}\{\mathcal{G} \mathcal{H} \mathcal{F} \mathbf{R}_{\bar{s}} \mathcal{F}^H \mathcal{H}^H \mathcal{G}^H\} - \text{traço}\{\mathbf{R}_{\Delta}^H \mathcal{F}^H \mathcal{H}^H \mathcal{G}^H\} + \\ & + \text{traço}\{\mathcal{G} \mathbf{R}_v \mathcal{G}^H\} - \text{traço}\{\mathcal{G} \mathcal{H} \mathcal{F} \mathbf{R}_{\Delta}\} + E_s. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Calculando a derivada da equação (4.107) com respeito aos elementos de  $\mathcal{G}^*$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \mathcal{G}^*} = & \mathcal{G} \mathcal{H} \mathcal{F} \mathbf{R}_{\bar{s}} \mathcal{F}^H \mathcal{H}^H - \mathbf{R}_{\Delta}^H \mathcal{F}^H \mathcal{H}^H + \mathcal{G} \mathbf{R}_v \\ = & \mathcal{G} (\mathcal{H} \mathcal{F} \mathbf{R}_{\bar{s}} \mathcal{F}^H \mathcal{H}^H + \mathbf{R}_v) - \mathbf{R}_{\Delta}^H \mathcal{F}^H \mathcal{H}^H \end{aligned} \quad (4.108)$$

O MSE é minimizado pela matriz  $\mathcal{G}$  tal que a equação (4.108) seja igual a zero. Portanto,

$$\mathcal{G}_{MMSE} = \mathbf{R}_{\Delta}^H \mathcal{F}^H \mathcal{H}^H (\mathcal{H} \mathcal{F} \mathbf{R}_{\bar{s}} \mathcal{F}^H \mathcal{H}^H + \mathbf{R}_v)^{-1}. \quad (4.109)$$

Derivações similares para o equalizador MSE podem ser encontradas em [10, 14], porém convém notar que as restrições sobre o projeto das matrizes envolvidas não são as mesmas consideradas neste trabalho, como mostrado na Seção 4.2.

## 4.6 Principais Contribuições

Neste Capítulo analisamos o transmultiplexador no domínio do tempo, e derivamos condições necessárias e suficientes para a existência de transmultiplexadores FIR com reconstrução perfeita. As condições foram derivadas para diferentes configurações do sistema, visando incorporar características de diversos sistemas de comunicações práticos, como será visto no Capítulo 5. Os resultados obtidos neste Capítulo estendem aqueles existentes na literatura em vários aspectos, como:

- Resultados obtidos para canais de ordem arbitrária. Não há nenhuma restrição entre a ordem do canal e o tamanho do bloco de dados.
- A ordem prevista para o equalizador é em geral menor do que o valor encontrado em [10], o que implica menor complexidade computacional.

- Os resultados são derivados para filtros variantes no tempo com resposta ao impulso longa (maior do que a duração do bloco de dados), o que permite a aplicação dos resultados a uma variedade maior de sistemas.
- Relação explícita entre a eficiência do sistema e o comprimento do equalizador.

A análise realizada neste Capítulo também confirma alguns dos resultados obtidos na literatura, como a dependência entre a quantidade de redundância e o número de zeros congruentes no caso de transmissores invariantes no tempo. No caso de transmissores variantes no tempo, encontramos resultados explícitos para o número de transmissores distintos que são necessários e suficientes para garantir a recepção com reconstrução perfeita. Esse resultado pode ser utilizado para o projeto de transmissores e receptores de baixa complexidade.

# Capítulo 5

## Aplicações

Neste capítulo mostramos algumas aplicações da análise desenvolvida no Capítulo 4. Mostramos que o sistema de comunicações considerado até então pode representar um sistema CDMA com códigos longos, e, portanto, os resultados são úteis para entender as condições para que seja possível realizar detecção multiusuário neste tipo de aplicação.

Para tanto, primeiro estendemos a análise para incorporar o enlace reverso de um sistema de comunicações, assumindo que cada sinal de entrada corresponda a um usuário. Mais tarde essa restrição será relaxada, quando considerarmos a aplicação de SC-FDMA no enlace reverso.

Finalmente, mostramos que com a redefinição dos filtros do transmissor e receptor, é possível representar também sistemas com múltiplas antenas, permitindo aplicar a análise para sistemas MIMO em geral.

### 5.1 Sistemas com canais distintos

Um próximo passo na generalização do sistema de comunicações é considerar que cada sinal transmitido passa por um canal diferente até chegar no receptor, modelado por  $h_m(k)$ , como ilustrado na Figura 5.1. Como discutido sucintamente em [54], esse modelo de sistema é adequado para representar cenários de enlace reverso (uplink) em um sistema de comunicações.

De modo a acomodar essa nova definição dos canais, o pressuposto (a) na Seção 4.3 precisa ser modificado para

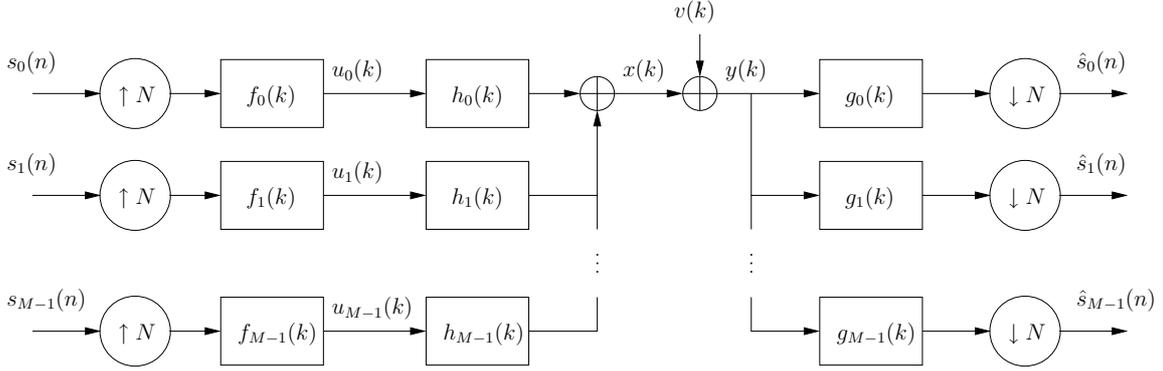


Figura 5.1: Sistema de comunicações no domínio do tempo, com um canal diferente associado a cada usuário.

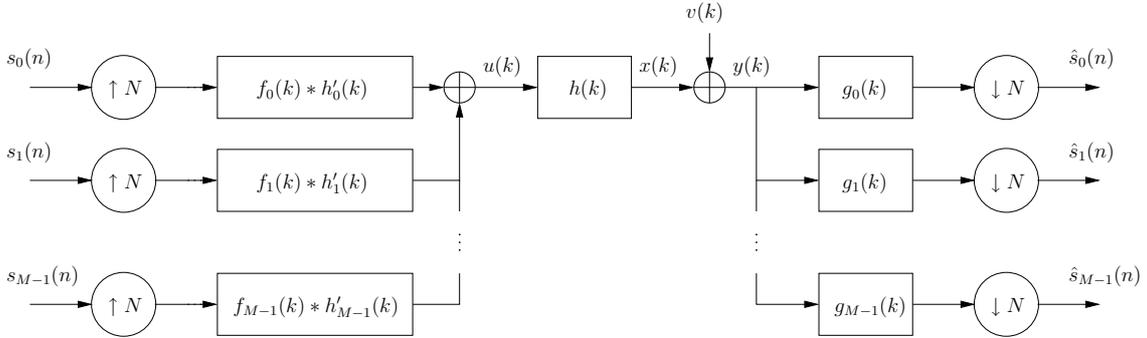


Figura 5.2: Sistema de comunicações no domínio do tempo com canais distintos, onde  $h_m(k) = h'_m(k) * h(k)$  e  $h'_0(k) \neq h'_1(k) \neq \dots \neq h'_{M-1}(k)$ .

(a.1) cada canal é modelado como um filtro FIR de ordem  $L_m$ , com  $h_m(0)$  e  $h_m(L_m) \neq 0$ ;

Visando a simplificar a análise, consideramos a seguir, sem perda de generalidade, que a ordem de todos os canais é  $L = \max\{L_m\}$ .

O multipercurso distorce o sinal transmitido de cada estação móvel de maneira diferente porque os usuários estão localizados em posições diferentes dentro de uma célula de um sistema de comunicações móveis. Portanto, vamos assumir que todos os canais podem ser fatorados como  $h_m(k) = h'_m(k) * h(k)$ , onde  $h'_0(k) \neq h'_1(k) \neq \dots \neq h'_{M-1}(k)$ . É possível então modificar a representação na Figura 5.1 para a que é mostrada na Figura 5.2.

Para transmissores invariantes no tempo, podemos definir

$$w_m(k) = f_m(k) * h'_m(k). \quad (5.1)$$

Para transmissores variantes no tempo, o filtro equivalente à associação de  $f_m(k, n)$  e  $h'_m(k)$  pode ser representada como um filtro FIR de comprimento  $(N + L - 1)$ , denotado por  $w_m(k, n)$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$  [55] (ver Seção 3.1.3). E nesse caso, o seguinte pressuposto será considerado adicionalmente ao pressuposto (a.1) e aos pressupostos (b) e (c) na Seção 4.3:

- (d)  $w_m(k, n)$  são filtros FIR causais de comprimento  $TN$ , com  $T$  inteiro.

Observamos que as condições para equalização ZF do sistema na Figura 5.2 já foram investigadas na Seção 4.3.3. Um grau extra de generalização é obtido se observarmos que na definição de  $w_m(k, n)$  é irrelevante se os filtros do transmissor ou os canais são variantes no tempo. Isso implica que a análise pode ser aplicada a canais variantes no tempo, assumindo que os mesmos possam ser decompostos como na Figura 5.2.

## 5.2 Detecção multiusuário

Em um sistema de comunicações empregando tecnologia CDMA, a seqüência de símbolos de cada usuário é multiplicada por um código em taxa mais elevada. Esse processo pode ser representado pelo modelo de transmultiplexador apresentado neste trabalho.

Sistemas CDMA comerciais (e.g. UMTS) normalmente empregam códigos longos de modo a ajudar a mitigar a distorção e interferência causada pelo multipercurso. Um código longo é uma seqüência pseudo-aleatória que eleva a taxa do sinal da mesma forma que um código curto, mas o primeiro é  $\Delta$  vezes mais longo que o segundo, onde  $\Delta \gg 1$  é inteiro. Nesses sistemas, os símbolos de cada usuário são espalhados por um código curto e então multiplicados na taxa mais elevada (taxa de chip) por um código longo, também chamado de *código de mistura*.

Vamos denotar por  $c_m(k)$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$ , o código curto alocado ao  $m$ -ésimo usuário e por  $c_m^{(\text{scr})}(k)$ ,  $m = 0, \dots, M - 1$ , o código de mistura de comprimento  $\Delta N$ . O sinal transmitido é dado por

$$u(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m(n) c_m(k - nN) c_m^{(\text{scr})}(k - \lfloor \frac{n}{\Delta} \rfloor \Delta N), \quad (5.2)$$

onde  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota o maior inteiro menor que  $(\cdot)$ .

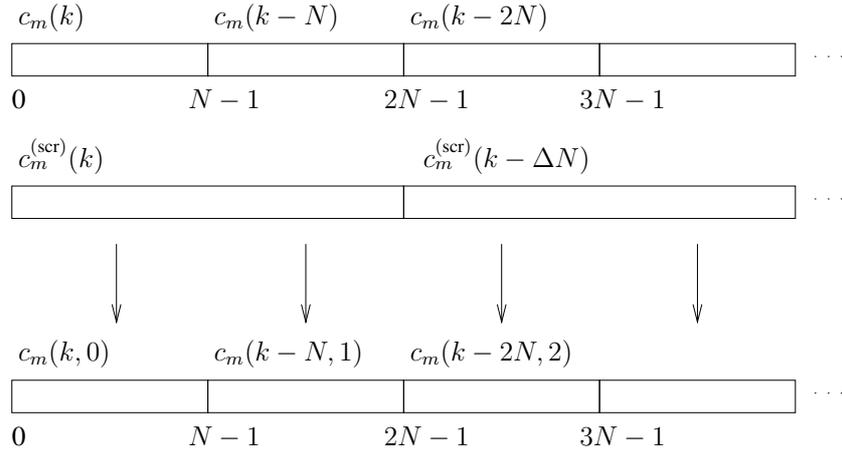


Figura 5.3: Representação de códigos longos+curtos como um código curto variante no tempo.

Isso equivale a considerar que o código curto de cada usuário é variante no tempo, e que a variação é periódica com período  $\Delta N$ . Esse código curto variante no tempo é dado por

$$c_m(k - nN, n) = c_m(k - nN)c_m^{(\text{scr})}(k - \lfloor \frac{n}{\Delta} \rfloor \Delta N), \quad (5.3)$$

como representado na Figura 5.3. A equação (5.2) pode ser reescrita como

$$u(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m(n)c_m(k - nN, n). \quad (5.4)$$

Dessa forma, o sistema de comunicações descrito neste trabalho pode representar esse sistema CDMA de códigos longos se fizermos  $f_m(k, n) = c_m(k, n)$ .

Uma vez que tenha sido estabelecida a relação entre o sistema considerado neste trabalho e sistemas CDMA com códigos longos, é imediato concluir que detecção multiusuário (*MultiUser Detection*, MUD) utilizando equalização ZF (ZF-MUD) é possível se as condições na Tabela 4.1 forem observadas.

Caso não seja desejável utilizar receptores de comprimento arbitrariamente grande, então a possibilidade de realizar ZF-MUD é condicionada ao número de códigos não utilizados,  $N - M$ , como mostrado na Seção 4.4. Para códigos curtos, é necessário também levar em consideração o número de zeros congruentes, enquanto que para códigos longos ZF-MUD é possível desde que o sistema não esteja operando com capacidade completa, ou seja, se  $N > M$ . Apesar disso, pode ser interessante

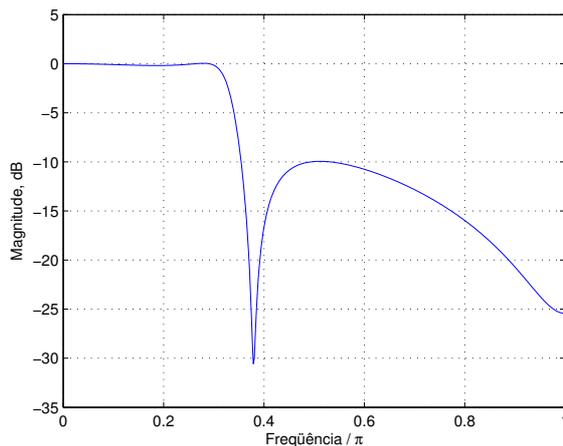


Figura 5.4: Resposta em frequência do canal definido pela equação (5.5).

estabelecer um valor mínimo na diferença  $N - M$  visando a manter a complexidade do receptor sob controle.

### 5.2.1 Simulações

Nesta seção apresentamos algumas simulações de computador de modo a verificar os resultados teóricos obtidos até o momento e destacar sua utilidade. As simulações apresentadas são resultado da combinação de 50 transmissões através de um canal FIR, cada transmissão consistindo de  $\approx 10000$  símbolos BPSK para cada  $s_m(n)$ , para  $m = 0, \dots, M - 1$ . O desempenho é medido na forma de taxa de erro de bit (*Bit Error Rate*, BER). O transmissor consiste de códigos aleatórios para cada usuário, cada código gerado a partir de uma distribuição gaussiana com média zero e variância unitária. O equalizador é projetado como na Seção 4.5, usando o critério LS com  $8NQ$  blocos de dados para o cálculo do receptor. O modelo de canal é dado pela aproximação FIR com 14 coeficientes da seguinte função de transferência

$$P(z) = 0.314 \frac{1 + 0.067z^{-1} + 0.394z^{-2} + 0.784z^{-3}}{1 - 1.084z^{-1} + 0.946z^{-2} - 0.157z^{-3}}, \quad (5.5)$$

cuja resposta em frequência é mostrada na Figura 5.4.

Na Figura 5.5 mostramos a BER em função da razão sinal-ruído (*Signal to Noise Ratio*, SNR) para  $N = 16$  e  $M = 6, 9, 12, 14$ . Os pontos em que  $BER = 0$  não são mostrados nesta e nas demais figuras. Como esperado, quanto maior a redundância menor a BER, indicando que o número de usuários deve ser controlado

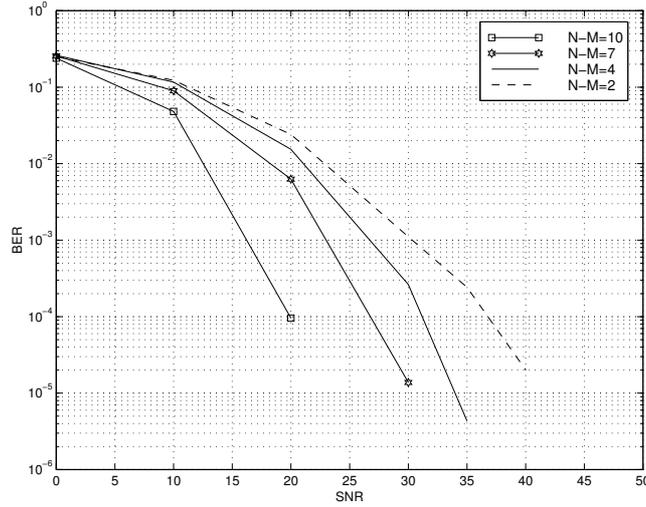


Figura 5.5: BER em função da SNR para  $N = 16$  e  $M = 6, 9, 12, 14$ .

de modo a atingir um valor pré-definido de BER.

A Figura 5.6 mostra a BER em função da SNR para  $N = 16$ ,  $M = 12$  e  $Q = 1, 2, 3, 4$ . Da equação (4.61),  $Q = 4$  é o valor mínimo para  $Q$ , e, portanto, alguma degradação em desempenho é esperada à medida que  $Q$  é reduzido abaixo desse limite. Esta degradação é pouco perceptível para  $Q = 2, 3$ , mas para  $Q = 1$  há uma perda considerável.

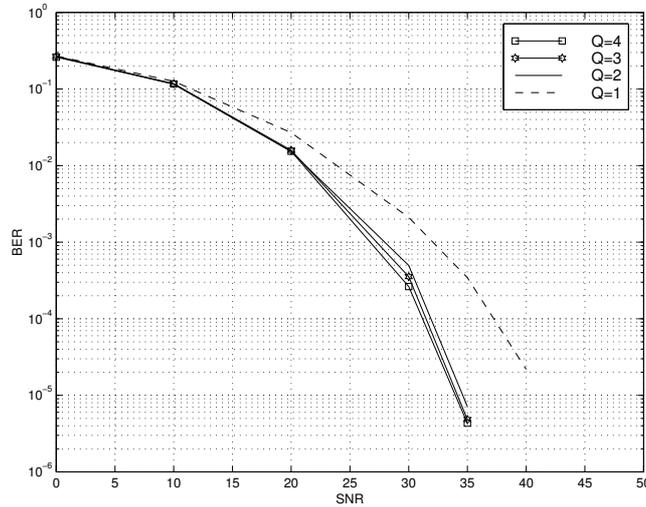


Figura 5.6: BER em função de SNR para  $N = 16$ ,  $M = 12$  e  $Q = 1, 2, 3, 4$ .

Em um segundo experimento, os filtros do transmissor são projetados usando as primeiras  $M$  seqüências de Gold [56] de comprimento 511, formando a matriz  $\mathbf{F}^{gold}$ ,  $511 \times M$ . Assim fazemos  $\mathbf{F}_0(n) = \mathbf{F}_{n+1:n+N}^{gold}$ ,  $n = 0, \dots, D - 1$ , onde  $D$  é o

período de variação no tempo de  $\mathbf{F}_0(n)$ . O equalizador também é projetado como na Seção 4.5, usando o critério LS com  $8NQ$  blocos de dados para o cálculo do receptor.

A Figura 5.7 mostra a variação de MSE em função da redundância  $N - M$ . As simulações foram realizadas com  $N = 10$ ,  $N - M = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e  $D = 1$  para as transmissões de enlace direto, e  $D = 6$  para as transmissões de enlace reverso. Para as transmissões de enlace reverso os canais  $h'_m(k)$  foram gerados aleatoriamente como um processo gaussiano normalizado. O modelo de canal  $h(k)$  é um filtro FIR de 14 coeficientes e zeros  $\{1.8 e^{j2\pi/5}, 1.8 e^{-j2\pi/5}, 1.8 e^{j3\pi/5}, 1.8 e^{-j3\pi/5}, 1.8 e^{j4\pi/5}, 1.8 e^{-j4\pi/5}, 1.1 e^{j7\pi/8}, 1.1 e^{-j7\pi/8}, 0.9 e^{j7\pi/8}, 0.9 e^{-j7\pi/8}, e^{j5\pi/10}, e^{-j5\pi/10}, 0.8\}$ .

Esse modelo para  $h(k)$  é utilizado por conter um conjunto de zeros congruentes de seis elementos para  $N = 10$ . Portanto, para transmissões invariantes no tempo (p. ex. CDMA com códigos curtos) equalização ZF é possível somente se  $N - M$  for maior ou igual ao número de elementos no conjunto de zeros congruentes com maior número de elementos. Para o canal em questão, equalização ZF será possível para  $N - M \geq 6$ , como pode ser verificado a partir da Figura 5.7 para os enlaces reverso e direto. Para transmissões variantes no tempo (p. ex. CDMA com códigos longos) equalização ZF é possível para qualquer valor  $N - M \geq 1$ , desde que exista um número suficiente de transmissões distintos, como mostrado na Seção 4.3.2. Isso também pode ser observado na Figura 5.7, tanto no enlace direto quanto no enlace reverso. Na Figura 5.7, o valor do MSE não é igual a zero devido à precisão numérica do simulador. O condicionamento das matrizes envolvidas influenciam no erro numérico, e a precisão numérica varia inversamente com a quantidade de redundância. Uma alternativa para aumentar a precisão numérica é permitir um atraso no sinal recebido.

### 5.3 Modulação Monoportadora

Sistemas de comunicações móveis avançados têm como objetivo taxas de dados elevadas. Para alcançar as metas definidas para a evolução dos sistemas de terceira geração, é necessário utilizar a interface aérea de maneira eficiente. Para tanto, WiMAX utiliza OFDMA nos enlaces direto e reverso [7], enquanto 3GPP LTE

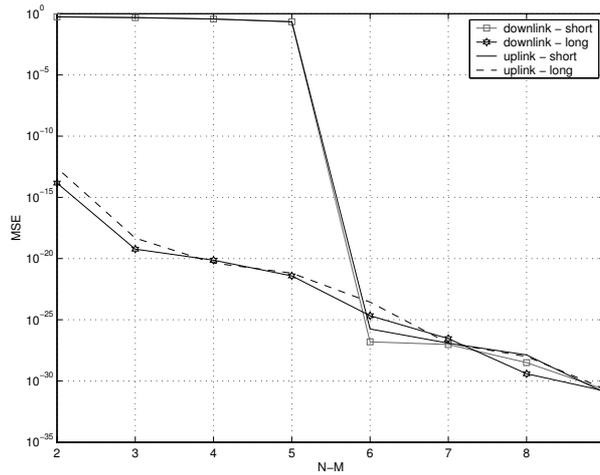


Figura 5.7: MSE como função de  $N - M$  para um canal com um conjunto de zeros congruentes com 6 elementos.

utiliza OFDMA no enlace direto e SC-FDMA no enlace reverso [1]. Nesta seção descreveremos as vantagens de SC-FDMA sobre o OFDMA, especialmente no que diz respeito às características do enlace reverso. Então, descreveremos como um sistema SC-FDMA se relaciona com os resultados obtidos no Capítulo 4, e estenderemos a análise para acomodar as particularidades do sistema SC-FDMA.

A Figura 5.8 mostra um diagrama de blocos de um sistema OFDM e um sistema monoportadora. A diferença principal da modulação monoportadora em relação ao OFDM é a ausência da operação de IFFT no transmissor. A princípio, isso implica a remoção também da FFT no receptor, porém é computacionalmente interessante realizar a equalização no receptor no domínio da frequência, o que implica realizar as operações de FFT e IFFT no receptor [57–61]. As principais vantagens de um sistema monoportadora em relação a um sistema OFDM são discutidas a seguir. Também é possível construir o sistema monoportadora utilizando extensão por zeros no lugar do prefixo cíclico. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes em [62, 63].

- (a) Em um sistema OFDM, a razão de potência pico-média (*peak-to-average power ratio*, PAPR) do sinal é alta, exigindo *backoff* de potência, o que reduz a eficiência do amplificador de potência. Técnicas de redução de PAPR podem ser utilizadas para controlar a distorção não-linear resultante do processo de amplificação de potência, porém mesmo assim o nível de PAPR resultante

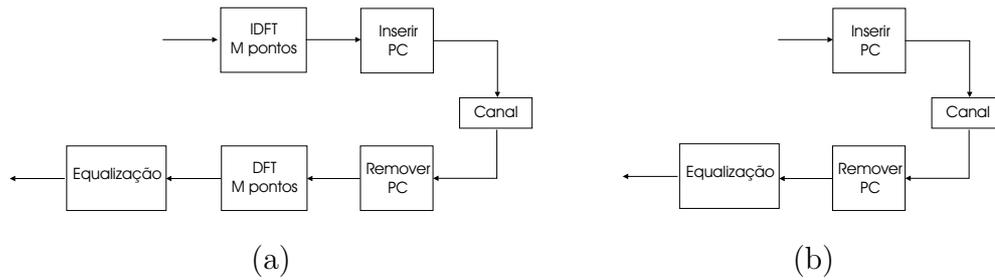


Figura 5.8: (a) OFDM, (b) Sistema monoportadora. PC denota Prefixo Cíclico.

é bem acima daquele obtido com modulação monoportadora. Isso porque na modulação monoportadora o sinal é colocado diretamente na entrada no canal, sendo a formatação de pulso o único fator contribuindo para aumentar o PAPR.

- (b) Uma vez que os símbolos de informação são transmitidos em sub-portadoras, a OFDM é sensível a diferenças nos osciladores dos transmissores e receptores, e também ao efeito Doppler, que causa desvios de frequência de portadora (*carrier frequency offset*, CFO). Naturalmente, esse problema não existe em modulação monoportadora, pois não há a transmissão em sub-portadoras.
- (c) OFDM não-codificado não permite a utilização de diversidade de frequência devido ao multipercurso, já que cada sub-portadora é recebida de forma independente. Essa diversidade é explorada em sistemas monoportadora. Convém notar entretanto que essa deficiência de sistemas OFDM pode ser compensada com o uso de códigos corretores de erro entre as portadoras.

Essas vantagens são particularmente relevantes no enlace reverso, pois neste caso a eficiência do amplificador de potência está diretamente relacionada ao tempo de carga da bateria. Além disso, a potência transmitida pode ser muito baixa ou até mesmo insuficiente para garantir a conexão, sendo essencial utilizar técnicas de diversidade para garantir a cobertura de toda a célula. Finalmente, a estação-base tem maior potencial computacional para realizar a equalização, que é ligeiramente mais complexa para a modulação monoportadora.

No enlace direto, o OFDM pode se beneficiar da seletividade em frequência, principalmente se houver um canal de retorno disponível, permitindo ajustar a transmissão do sinal em cada sub-portadora de acordo com as condições do canal. Além

disso, como o canal de cada terminal conectado à estação-base é diferente, é possível transmitir para cada terminal apenas nas sub-portadoras em que o canal seja mais favorável.

### 5.3.1 SC-FDMA

Uma vantagem de um sistema OFDM sobre o sistema monoportadora discutido na seção anterior é a facilidade de atribuir sub-portadoras a diferentes usuários. Neste caso é comum se referir ao sistema como acesso múltiplo por multiplexação de frequência ortogonal (*Orthogonal Frequency Division Multiple Access*, OFDMA). Entretanto, também é possível compartilhar o espectro entre terminais diferentes utilizando o que é conhecido como sistema monoportadora com acesso múltiplo por divisão de frequência (*Single Carrier - Frequency Division Multiple Access*, SC-FDMA) [9], mostrado na Figura 5.9.

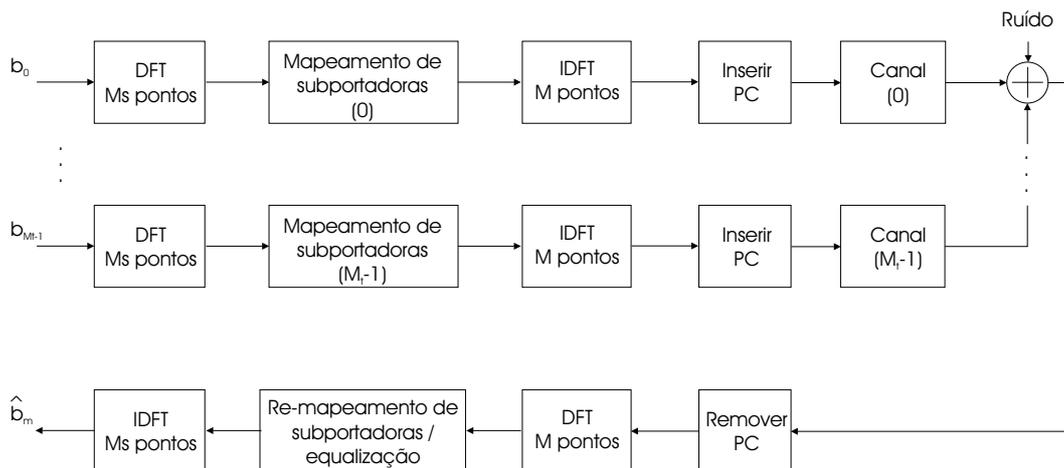


Figura 5.9: Diagrama em blocos de um sistema SC-FDMA. PC denota Prefixo Cíclico.

A principal diferença do SC-FDMA com relação ao sistema monoportadora convencional é o mapeamento do sinal de entrada em sub-portadoras, de tal forma que os sinais transmitidos pelos diferentes usuários sejam ortogonais entre si. Para tanto, o sinal é transformado para o domínio da frequência e transformado novamente para o domínio do tempo após o mapeamento. Logo, os princípios básicos da modulação monoportadora são preservados, mas com o benefício adicional de ser possível multiplexar o sinal de vários terminais simultaneamente, bastando para

isso garantir a ortogonalidade do mapeamento do sinal nas sub-portadoras. Entretanto, a forma como as portadoras são distribuídas afeta o desempenho do sistema SC-FDMA.

Apesar de a princípio qualquer mapeamento arbitrário de sub-portadoras ser válido, duas estratégias são tipicamente consideradas em sistemas SC-FDMA: sub-portadoras localizadas (*Localized SC-FDMA*, LFDMA) ou distribuídas (*Interleaved SC-FDMA*, IFDMA) [9]. A Figura 5.10 ilustra as duas técnicas em questão. O IFDMA aproveita melhor a diversidade de frequência, já que são utilizadas sub-portadoras espalhadas por todo o espectro disponível. Por outro lado, o LFDMA pode aproveitar melhor o ganho de escalonamento dependente do canal, já que é possível escalonar os terminais nas sub-portadoras onde o canal lhes seja mais favorável. Pode-se mostrar que o IFDMA possui desempenho superior ao LFDMA com relação ao PAPR [9].

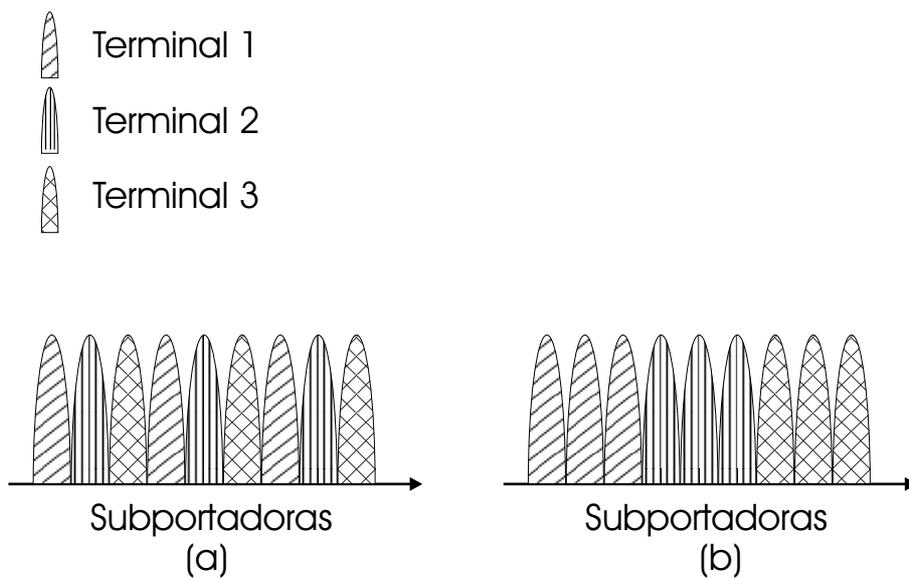


Figura 5.10: Mapeamento de sub-portadoras em um sistema SC-FDMA. (a) Modo distribuído, (b) Modo localizado.

### 5.3.2 Relação com Resultados Anteriores

Nesta seção vamos mostrar a relação entre o sistema SC-FDMA e os resultados obtidos no Capítulo 4. Vamos assumir que existem  $M_t$  terminais transmitindo simultaneamente, cada terminal utilizando  $M_s$  sub-portadoras. O número total de

sub-portadoras disponível é  $M$ , e o tamanho total do bloco após a adição do prefixo cíclico é  $N$ . Assim, a saída do transmissor para o terminal  $m$ ,  $m = 0, \dots, M_t - 1$ , é dada por

$$\mathbf{u}_m(n) = \mathbf{P}_{cp} \mathbf{W}_M \mathbf{\Gamma}_m(n) \mathbf{W}_{M_s} \mathbf{b}_m(n), \quad (5.6)$$

onde a matriz  $\mathbf{P}_{cp}$ ,  $N \times M$ , adiciona o prefixo cíclico, a matriz  $\mathbf{W}_M$ ,  $M \times M$ , faz a operação de DFT de tamanho  $M$ , a matriz  $\mathbf{\Gamma}_m(n)$ ,  $M \times M_s$ , mapeia os símbolos do terminal  $m$  nas sub-portadoras, a matriz  $\mathbf{W}_{M_s}$ ,  $M_s \times M_s$ , faz a operação de IDFT de tamanho  $M_s$ , e, finalmente, o vetor  $\mathbf{b}_m$  contém os símbolos a serem transmitidos. Comparando com a equação (4.14), vemos que o sinal transmitido por cada terminal se encaixa no modelo analisado no Capítulo 4 se fizermos

$$\mathbf{F}_0(n) = \mathbf{P}_{cp} \mathbf{W}_M \mathbf{\Gamma}_m(n) \mathbf{W}_{M_s} \quad (5.7)$$

e

$$\mathbf{s}_m(n) = \mathbf{b}_m(n). \quad (5.8)$$

O índice  $n$  em (5.7) indica que o mapeamento nas sub-portadoras pode ser variante no tempo. Além das vantagens em utilizar um transmissor variante no tempo mostradas no Capítulo 4, o mapeamento nas sub-portadoras pode ser alterado no tempo, por exemplo, para escalonar cada terminal para transmissão nas bandas de frequência onde o canal lhe seja mais favorável. O leitor interessado pode encontrar mais informações sobre escalonamento dependente de frequência em [9].

Para analisar um sistema SC-FDMA completo, com todos os terminais transmitindo simultaneamente, é necessário estender os resultados obtidos no Capítulo 4 e na Seção 5.1 para acomodar sistemas com transmissão em blocos em canais distintos, permitindo, assim, a análise de sistemas genéricos operando no enlace reverso.

Se considerarmos o caso especial em que apenas um terminal está transmitindo enquanto os demais estão desligados, é evidente que o modelo do sistema é o mesmo daquele analisado no Capítulo 4. Logo, as mesmas condições necessárias e suficientes para reconstrução perfeita se aplicam neste caso também, com a importante observação de que o comprimento do receptor na equação (4.61) agora é dado por

$$Q_{\min} \geq \left\lceil \frac{L}{N - M_s} \right\rceil - B + 1. \quad (5.9)$$

O caso  $M_s = M$  corresponde ao sistema monoportadora mostrado na Figura 5.8(b). Em uma aplicação SC-FDMA típica,  $M_s \ll M$ , desde que o número de terminais alocados simultaneamente seja maior do que um. Como  $M_s = M/M_t$ , é evidente a partir da equação (5.9) que a complexidade do receptor é reduzida se o número de terminais alocados para transmissão,  $M_t$ , for grande. Na realidade,  $Q_{\min} > 1$  se e somente se  $L > N - M_s$ .

A análise acima não leva em consideração ainda que o receptor necessita também ser capaz de suprimir a interferência causada pela transmissão dos demais terminais. Sem perda de generalidade, vamos assumir que o canal de todos os terminais é um filtro linear invariante no tempo de ordem  $L$ . Vamos assumir também que os filtros não possuem zeros em comum. O sinal na entrada do receptor pode ser escrito como

$$\mathbf{y}(n) = \sum_{m=0}^{M_t-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{l,m} \mathbf{u}_m(n-l) + \mathbf{v}(n), \quad (5.10)$$

onde  $\mathbf{H}_{l,m}$  denota a matriz  $N \times N$  definida como na equação (4.18), cujos elementos vêm da resposta ao impulso do canal do terminal  $m$ , ou seja,

$$\mathbf{H}_{l,m} = \begin{bmatrix} h_m(lN) & h_m(lN-1) & \cdots & h_m(lN-N+1) \\ h_m(lN+1) & h_m(lN) & \cdots & h_m(lN-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m(lN+N-1) & h_m(lN+N-2) & \cdots & h_m(lN) \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Podemos escrever então

$$\bar{\mathbf{y}}(n) = \sum_{m=0}^{M_t-1} \mathcal{H}_m \mathcal{F}_m \bar{\mathbf{s}}_m(n) + \bar{\mathbf{v}}(n), \quad (5.12)$$

onde  $\mathcal{H}_m$  é  $QN \times (Q+B)N$ ,  $\mathcal{F}_m$  é  $(Q+B)N \times (Q+B)M_s$  e  $\bar{\mathbf{s}}_m(n)$  é  $(Q+B)M_s \times 1$ , dados por:

$$\mathcal{H}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{B,m} & \cdots & \mathbf{H}_{0,m} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{B,m} & \cdots & \mathbf{H}_{0,m} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_{B,m} & \cdots & \mathbf{H}_{0,m} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathcal{F}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{0,m}(n-Q-B+1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{0,m}(n-Q-B+2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{0,m}(n) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\bar{\mathbf{s}}_m(n) = \left[ \mathbf{s}_m^T(n-Q-B+1) \cdots \mathbf{s}_m^T(n) \right]^T. \quad (5.15)$$

Vamos assumir sem perda de generalidade que estamos interessados em calcular o receptor para o terminal  $m = 0$ . Assim, a condição de reconstrução perfeita pode ser escrita como

$$\mathcal{F}_0^H \mathcal{H}_0^H \mathcal{G}_0^H = \left[ \mathbf{0}_{M \times (Q+B-1)M_s} \quad \mathbf{I}_{M_s} \right]^H \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_1^H \mathcal{H}_1^H \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{M_t-1}^H \mathcal{H}_{M_t-1}^H \end{bmatrix} \mathcal{G}_0^H = \mathbf{0}. \quad (5.17)$$

A solução de (5.16) não é única, e pode ser caracterizada como

$$\mathcal{G}_0^H = \tilde{\mathcal{G}}_0^H + \Delta \mathbf{z}, \quad (5.18)$$

onde  $\tilde{\mathcal{G}}_0^H$  é uma solução de (5.16) e  $\Delta$  é uma matriz cujas colunas são a base de  $\mathcal{N}\{\mathcal{F}_0^H \mathcal{H}_0^H\}$ . A condição em (5.17) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_1^H \mathcal{H}_1^H \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{M_t-1}^H \mathcal{H}_{M_t-1}^H \end{bmatrix} \left( \tilde{\mathcal{G}}_0^H + \Delta \mathbf{z} \right) = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

Logo,

$$\left( \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1^H \mathcal{H}_1^H \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{M_t-1}^H \mathcal{H}_{M_t-1}^H \end{bmatrix} \Delta \right) \mathbf{z} = - \left( \begin{bmatrix} \mathcal{F}_1^H \mathcal{H}_1^H \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{M_t-1}^H \mathcal{H}_{M_t-1}^H \end{bmatrix} \tilde{\mathcal{G}}_0^H \right). \quad (5.20)$$

Em uma primeira análise, assumimos que a matriz  $\Delta$  seja  $(Q+B)M_s \times [QN - (Q+B)M_s]$ , e assim a equação (5.20) terá solução se

$$QN - (Q+B)M_s \geq (Q+B)M_s(M_t-1) \quad \Rightarrow \quad Q_1 \geq \left\lceil \frac{BM}{N-M} \right\rceil. \quad (5.21)$$

Entretanto, esse valor de  $Q$  se revela um limite demasiado grande, o que é evidenciado se considerarmos o caso  $M_s = M$ , que tem o valor de  $Q$  previsto pela equação (5.9). Um valor mais exato para  $Q$  pode ser encontrado se observamos a estrutura da matriz  $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$ . Para simplificar a análise, vamos considerar um caso particular de bastante interesse, onde a ordem do canal é menor que o tamanho do bloco, ou seja,  $L < N$ , e, conseqüentemente,  $B = 1$ .

A Figura 5.11 ilustra a estrutura em blocos das matrizes  $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$ , onde as áreas sombreadas indicam partições das matrizes com valores (possivelmente) diferentes de zero. Podemos identificar claramente duas partições na matriz resultante do produto matricial: a partição composta pelas últimas  $QM_s$  linhas de  $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$  possui posto completo por linhas, porém a partição formada pelas primeiras  $M_s$  linhas possui posto limitado pelo número de colunas não nulas em  $\mathbf{F}_{0,m} \mathbf{H}_{1,m}$ . Pela definição de  $\mathbf{H}_{1,m}$  na equação (5.11), e auxiliados pela Figura 5.11, concluímos que o posto da partição formada pelas primeiras  $M_s$  linhas de  $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$  é no máximo  $L$ . Assim, podemos considerar como pior caso

$$\text{posto}\{\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H\} = QM_s + L. \quad (5.22)$$

Assim, a dimensão do espaço nulo de  $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$  é

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{N}\{\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H\}) &= QN - \text{posto}\{\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H\} \\ &= QN - (QM_s + L). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Desse modo, vemos que a matriz  $\Delta$  na realidade possui dimensão  $(Q+1)M_s \times [QN - (QM_s + L)]$ . É importante notar que é possível escolher os vetores que formam a base de  $\mathcal{N}\{\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H\}$  de tal forma que as primeiras  $L$  linhas de  $\Delta$  sejam iguais a zero. Essa estrutura é motivada observando-se que as primeiras linhas de  $\mathcal{F}_0^H \mathcal{H}_0^H \Delta = \mathbf{0}$  são dadas por

$$\mathcal{F}_0^H \mathcal{H}_0^H = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{0,0}(n - Q - B + 1) \mathbf{H}_{B,0}^H & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \Delta = \mathbf{0}. \quad (5.24)$$

Como  $\text{posto}\{\mathbf{H}_{B,0}^H\} = L$  e apenas as primeiras  $L$  colunas de  $\mathbf{H}_{B,0}^H$  são diferentes de zero, em geral para  $M_s > L$  a equação (5.24) só possui solução se as primeiras  $L$  linhas de  $\Delta$  forem iguais a zero.

Com essa restrição na definição de  $\Delta$ , as primeiras  $M_s$  linhas de  $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H \Delta$  são nulas, e, portanto, não contribuem para o posto da matriz. Uma observação

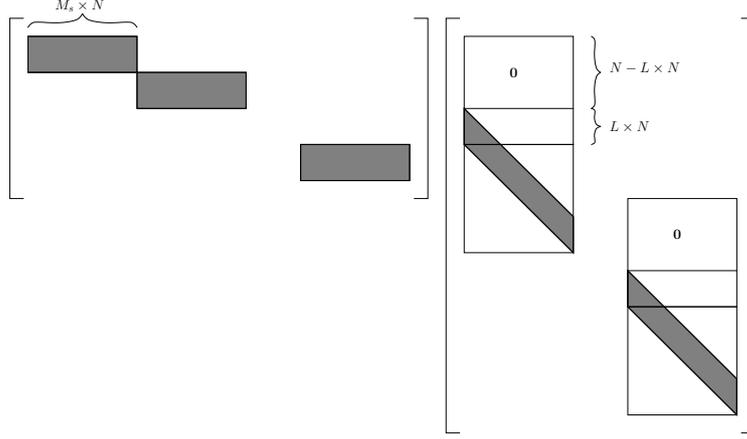


Figura 5.11: Estrutura do produto  $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$  para  $B = 1$ . As áreas sombreadas indicam partições das matrizes com valores (possivelmente) diferentes de zero.

importante é que também as primeiras  $L$  linhas de  $\tilde{\mathcal{G}}_0^H$  são nulas, o que pode ser utilizado para simplificar o cálculo do receptor.

Assim, concluímos que para a equação (5.20) ter solução é suficiente que a matriz

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_1^H \mathcal{H}_1^H \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{M_t-1}^H \mathcal{H}_{M_t-1}^H \end{bmatrix} \Delta$$

tenha posto completo por colunas, ou seja,

$$\begin{aligned} QN - (QM_s + L) &\geq QM_s(M_t - 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q(N - M_s M_t) \geq L \\ &\Rightarrow Q \geq \frac{L}{N - M} \end{aligned} \quad (5.25)$$

A Figura 5.12 mostra a estrutura das matrizes para  $L$  genérico. Seguindo o mesmo raciocínio desenvolvido anteriormente, concluímos que

$$\begin{aligned} QN - (QM_s + (B - 1)M_s + L) &\geq (QM_s + (B - 1)M_s)(M_t - 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow Q_{\text{int}} \geq \frac{L}{N - M} - B + 1. \end{aligned} \quad (5.26)$$

O resultado na equação (5.26) é apenas suficiente porque não leva em conta possíveis combinações do produto  $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$  que permitam solução com complexidade menor do receptor.

A Figura 5.13 relaciona os diferentes valores obtidos para  $Q$  nas equações (5.21) e (5.26), para diferentes valores de  $N - M$ , com  $M = 256$ ,  $L = 32$  e  $M_t = 2$ .

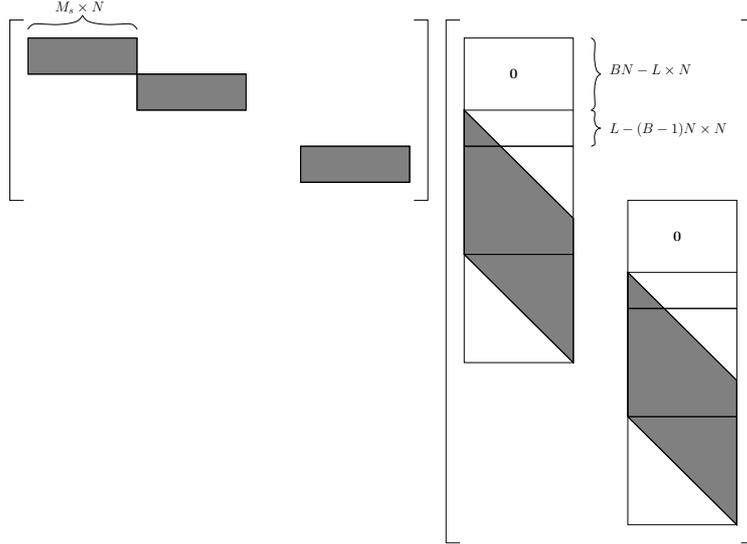


Figura 5.12: Estrutura do produto  $\mathcal{F}_m^H \mathcal{H}_m^H$  para  $B > 1$ . As áreas sombreadas indicam partições das matrizes com valores (possivelmente) diferentes de zero.

Também é mostrado o valor mínimo de  $Q$ , obtido pela equação (5.9). É evidente que o valor obtido por (5.21) é demasiado grande comparado com o valor obtido em (5.26) através da análise de supressão de interferência. Ambos são maiores que o valor de  $Q$  em (5.9). Entretanto, isso não é necessariamente verdade para canais de ordem elevada, como mostrado na Figura 5.14. Nesse caso os valores previstos pelas equações (5.21) e (5.26) são mais próximos, e eventualmente o valor previsto por (5.21) é menor em uma unidade.

Portanto, uma estimativa mais precisa do valor mínimo de  $Q$  que torne possível a equalização ZF é dada por

$$Q \geq \max[Q_{\min}, \min(Q_{\text{int}}, Q_1)] \quad (5.27)$$

Apesar de as relações acima terem sido desenvolvidas para o caso particular de um sistema SC-FDMA, as relações são suficientemente genéricas para serem aplicadas a sistemas de comunicações em geral. Essa análise complementa aquela desenvolvida na Seção 4, contemplando sistemas de comunicações gerais, tanto com características próprias do enlace direto como com características de enlace reverso.

A análise acima foi realizada assumindo que para a equalização de um terminal o sinal transmitido pelos demais são tratados como interferência. Além disso, a redundância inserida na transmissão não é removida no receptor, e sim utilizada para auxiliar na equalização. Assim, a análise acima não assume que haja sincronismo

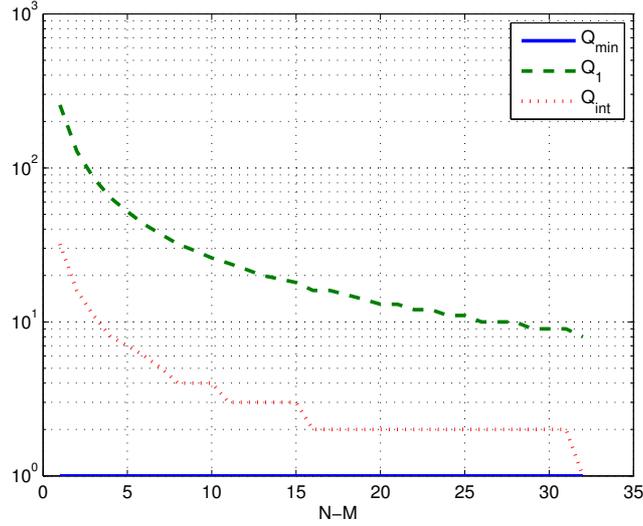


Figura 5.13: Relação entre os diferentes valores obtidos para  $Q$  nas equações (5.21) e (5.26), para diferentes valores de  $N - M$ , com  $M = 256$ ,  $L = 32$  e  $M_t = 2$ . Também é mostrado o valor mínimo de  $Q$ , obtido pela equação (5.9).

entre os terminais, podendo ser aplicada a sistemas assíncronos.

### 5.3.3 Simulações

Nesta seção apresentamos resultados obtidos através de simulações em computador para destacar os pontos principais das relações desenvolvidas na Seção 5.3. O sistema possui dois terminais, cada um com o mesmo número  $M_s$  de sub-portadoras. O transmissor é projetado como na equação (5.7), repetida aqui por conveniência,

$$\mathbf{F}_0(n) = \mathbf{P}_{cp} \mathbf{W}_M \mathbf{\Gamma}_m(n) \mathbf{W}_{M_s}.$$

A matriz de mapeamento nas sub-portadoras é invariante no tempo,  $\mathbf{\Gamma}_m(n) = \mathbf{\Gamma}_m$ , e é definida tal que o primeiro terminal é mapeado nas primeiras  $M_s$  sub-portadoras e o segundo terminal é mapeado nas  $M_s$  sub-portadoras restantes, ou seja,

$$\mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M_s} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{M_s} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

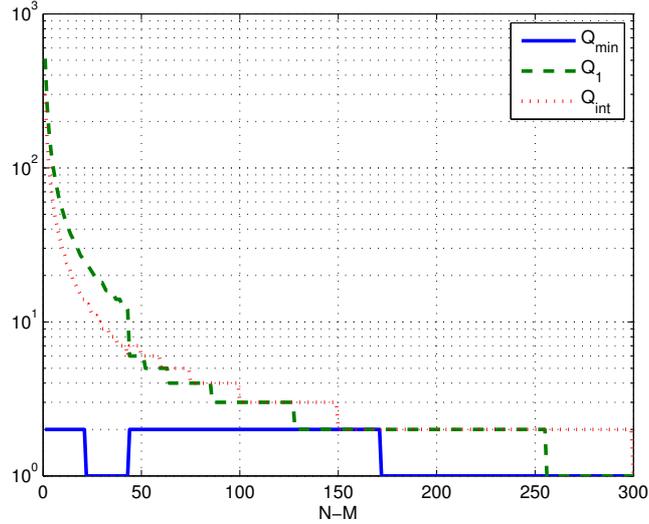


Figura 5.14: Relação entre os diferentes valores obtidos para  $Q$  nas equações (5.21) e (5.26), para diferentes valores de  $N - M$ , com  $M = 256$ ,  $L = 300$  e  $M_t = 2$ . Também é mostrado o valor mínimo de  $Q$ , obtido pela equação (5.9).

O receptor é projetado resolvendo-se diretamente as equações (5.16) e (5.17), que podem ser reescritas como

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_0^H \mathcal{H}_0^H \\ \mathcal{F}_1^H \mathcal{H}_1^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_0^H & \mathcal{G}_1^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times (Q+B-1)M_s} & \mathbf{0}_{M \times (Q+B)M_s} \\ \mathbf{I}_{M_s} & \mathbf{0}_{M \times (Q+B-1)M_s} \\ \mathbf{0}_{M \times (Q+B)M_s} & \mathbf{I}_{M_s} \end{bmatrix}^H \quad (5.29)$$

$$(5.30)$$

Para verificar o comportamento do sistema SC-FDMA na presença de zeros congruentes, vamos assumir que o canal de um terminal,  $h_0$ , consiste de um filtro FIR com 7 coeficientes ( $L = 6$ ) com zeros  $\{1.3 e^{j3\pi/4}, 1.3 e^{-j3\pi/4}, 1.3, 1.3 e^{j\pi/4}$  e  $1.3 e^{-j\pi/4}\}$ , de modo que o canal  $h_0$  possui 6 zeros congruentes para  $N = 8$ . O canal do segundo terminal,  $h_1$ , consiste de 7 coeficientes complexos gerados aleatoriamente. Ambos os canais são normalizados de tal forma que  $\|h_m\|^2 = 1$ .

O tamanho do bloco transmitido é  $N = 8$ , e  $Q$  é calculado como na equação (5.27). A Tabela 5.1 mostra o valor de MSE para uma média de 50 realizações de canal  $h_1$  e a transmissão de  $5000 \times M_s$  símbolos QPSK para cada realização do canal. Ao aumentar o valor de  $Q$  em uma unidade, é possível utilizar os graus de liberdade extras para diminuir o MSE do sinal transmitido no canal  $h_0$ , mas ainda assim não

Tabela 5.1: MSE no caso em que o canal de um dos terminais possui zeros congruentes, com  $N = 8$  e  $L = 6$

	MSE, terminal 1	MSE, terminal 2
$N - M_s = 5$ ( $Q = 3$ )	$5,91 \times 10^3$	$3,25 \times 10^{-27}$
$N - M_s = 5$ ( $Q = 4$ )	1,97	$0,29 \times 10^{-27}$
$N - M_s = 6$ ( $Q = 1$ )	$0,13 \times 10^{-27}$	$0,03 \times 10^{-27}$

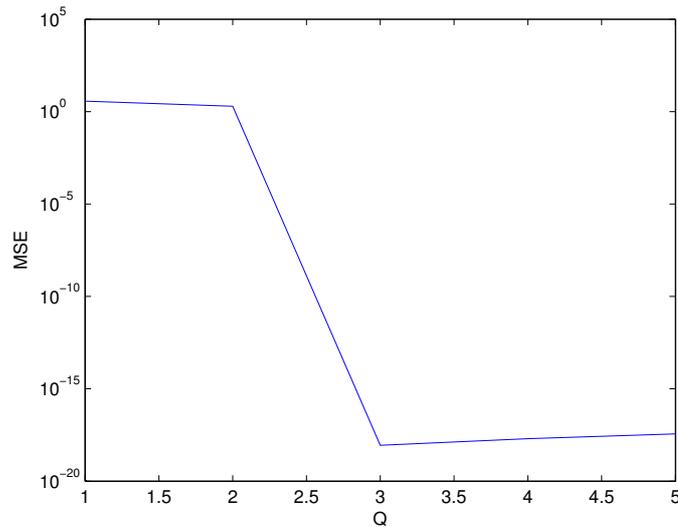


Figura 5.15: MSE como função de  $Q$  para um sistema SC-FDMA com  $N = 64$ ,  $M_s = 31$ , e canais de ordem  $L = 6$ .

é possível realizar a reconstrução perfeita, e o nível de MSE é ainda elevado.

Os resultados mostram que a reconstrução perfeita do sinal transmitido pelo canal  $h_0$  é obtida apenas para  $N - M_s = L$ , como previsto pela análise teórica. O sinal transmitido pelo canal  $h_1$  não é afetado pelos zeros congruentes de  $h_0$ , e a reconstrução perfeita é possível para qualquer valor de  $N - M_s$ .

A Figura 5.15 mostra o MSE em função de  $Q$  para  $N = 64$ ,  $M_s = 31$ , e canais de ordem  $L = 6$ . Os canais consistem de coeficientes complexos gerados aleatoriamente, e são normalizados tal que  $\|h_m\|^2 = 1$ . Para essa configuração do sistema, a equação (5.27) indica que  $Q \geq 3$ , como verificado na Figura 5.15.

## 5.4 Sistemas com Múltiplas Antenas

Sistemas com múltiplas antenas são considerados um componente essencial para alcançar as audaciosas metas de eficiência espectral e taxa de transmissão estabelecidas para os sistemas celulares avançados, como WiMAX, 3GPP LTE e IMT-Advanced, que representam a quarta geração de sistemas de comunicações móveis. Sistemas com múltiplas antenas tanto no transmissor como no receptor permitem a transmissão de diversos fluxos de dados em paralelo, que podem ser decodificados em separado no receptor. Para tanto são necessários equalizadores projetados para explorar o fato de que o multipercurso afeta de forma distinta o sinal propagado entre cada antena do transmissor e do receptor. Essa técnica é normalmente conhecida como multiplexação espacial. É possível mostrar que, para razão sinal-ruído elevada, a capacidade de canal de um sistema empregando multiplexação espacial é igual àquela de um sistema SISO multiplicada por  $\min(N_T, N_R)$ , onde  $N_T$  e  $N_R$  denotam o número de antenas no transmissor e no receptor, respectivamente [25,64].

Outras configurações de múltiplas antenas bastante utilizadas em sistemas de comunicações são aquelas em que apenas o transmissor ou o receptor possuem múltiplas antenas. Nesses casos não é possível realizar multiplexação espacial, mas é possível extrair ganho de diversidade, o que é especialmente útil para transmissões com baixa razão sinal-ruído, em que não é vantajoso realizar multiplexação espacial [25]. Um esquema bastante popular para sistemas com duas antenas no transmissor é a “codificação de Alamouti” [65], enquanto que a combinação de razão máxima (*Maximum Ratio Combining*, MRC) é bastante utilizada no caso em que apenas o receptor seja equipado com múltiplas antenas.

Uma outra aplicação importante de sistemas com múltiplas antenas é o direcionamento do sinal transmitido/recebido, criando um fecho virtual na direção de propagação do sinal. Essa técnica é conhecida na literatura como *beamforming* [25,66].

Nesta seção, vamos mostrar como os resultados obtidos no Capítulo 4 podem ser empregados para sistemas com múltiplas antenas, combinando a transmissão de múltiplos sinais para um mesmo usuário e através de diversas antenas. Inicialmente, vamos considerar o importante caso particular de um sistema com duas antenas no transmissor e duas antenas no receptor, como mostrado na Figura 5.16. Posteriormente, indicaremos como esses resultados podem ser facilmente generalizados para

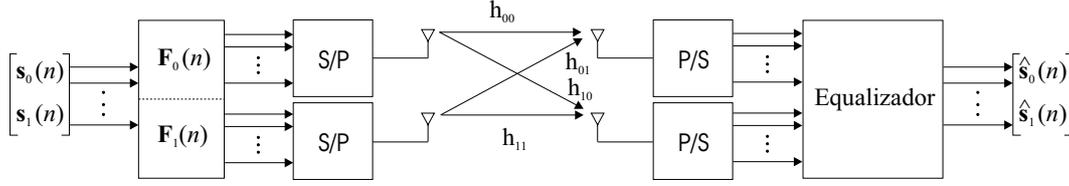


Figura 5.16: Sistema MIMO com duas antenas no transmissor e no receptor.

$N_T$  e  $N_R$  antenas no transmissor e no receptor, respectivamente.

No transmissor, cada bloco de dados  $\mathbf{s}(n)$ , de comprimento  $2M$ , é multiplicado pelo pré-codificador  $\mathbf{F}_0(n)$ ,  $2N \times 2M$ . Em seguida, os primeiros  $N$  símbolos são transmitidos por uma antena, enquanto os demais  $N$  símbolos são transmitidos pela segunda antena. Para representar essa operação, vamos considerar que a matriz  $\mathbf{F}_0(n)$  seja particionada como

$$\mathbf{F}_0(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{0,0}(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{0,1}(n) \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

onde tanto  $\mathbf{F}_{0,0}(n)$  como  $\mathbf{F}_{0,1}(n)$  são de dimensão  $N \times M$ . Assim, podemos escrever

$$\mathbf{u}_0(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{0,0}(n) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{s}(n) \quad (5.32)$$

e

$$\mathbf{u}_1(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_{0,1}(n) \end{bmatrix} \mathbf{s}(n). \quad (5.33)$$

Em princípio, também é possível assumir que  $\mathbf{F}_0(n)$  seja uma matriz “cheia”, o que implica a ocorrência de produtos cruzados entre os blocos de dados a serem transmitidos em cada antena. Uma matriz desse tipo pode ser projetada de modo a pré-compensar a interferência causada entre os fluxos de dados paralelos, facilitando o trabalho do equalizador. Nesta seção, vamos considerar o pior caso, em que a estrutura de  $\mathbf{F}_0(n)$  é como descrita na equação (5.31).

O sinal recebido na primeira antena do receptor é dado por

$$\mathbf{y}_0(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{l,0,0} \mathbf{u}_0(n-l) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{l,0,1} \mathbf{u}_1(n-l) + \mathbf{v}_0(n), \quad (5.34)$$

onde  $\mathbf{H}_{l,r,t}$  denota a matriz  $N \times N$  definida como na equação (4.18), cujos elementos advêm da resposta ao impulso do canal da antena  $t$  do transmissor até a antena  $r$

do receptor, ou seja,

$$\mathbf{H}_{l,r,t} = \begin{bmatrix} h_{r,t}(lN) & h_{r,t}(lN-1) & \cdots & h_{r,t}(lN-N+1) \\ h_{r,t}(lN+1) & h_{r,t}(lN) & \cdots & h_{r,t}(lN-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{r,t}(lN+N-1) & h_{r,t}(lN+N-2) & \cdots & h_{r,t}(lN) \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Podemos escrever então

$$\bar{\mathbf{y}}_0(n) = \mathcal{H}_{0,0} \mathcal{F}_0 \bar{\mathbf{s}}(n) + \mathcal{H}_{0,1} \mathcal{F}_1 \bar{\mathbf{s}}(n) + \bar{\mathbf{v}}_0(n), \quad (5.36)$$

onde  $\mathcal{H}_{r,t}$  é  $QN \times (Q+B)N$ ,  $\mathcal{F}_t$  é  $(Q+B)N \times 2(Q+B)M$  e  $\bar{\mathbf{s}}(n)$  é  $(Q+B)2M \times 1$ , dados por:

$$\mathcal{H}_{r,t} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{B,r,t} & \cdots & \mathbf{H}_{0,r,t} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{B,r,t} & \cdots & \mathbf{H}_{0,r,t} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_{B,r,t} & \cdots & \mathbf{H}_{0,r,t} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$\mathcal{F}_0 = \begin{bmatrix} [\mathbf{F}_{0,0}(n-Q-B+1) \ \mathbf{0}] & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{F}_{0,0}(n-Q-B+2) \ \mathbf{0}] & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & [\mathbf{F}_{0,0}(n) \ \mathbf{0}] \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{F}_{0,1}(n-Q-B+1)] & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{0} \ \mathbf{F}_{0,1}(n-Q-B+2)] & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & [\mathbf{0} \ \mathbf{F}_{0,1}(n)] \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$\bar{\mathbf{s}}(n) = [\mathbf{s}^T(n-Q-B+1) \ \cdots \ \mathbf{s}^T(n)]^T. \quad (5.40)$$

Naturalmente, o sinal recebido pela segunda antena do receptor é dado por

$$\bar{\mathbf{y}}_1(n) = \mathcal{H}_{1,0} \mathcal{F}_0 \bar{\mathbf{s}}(n) + \mathcal{H}_{1,1} \mathcal{F}_1 \bar{\mathbf{s}}(n) + \bar{\mathbf{v}}_1(n). \quad (5.41)$$

O equalizador,  $\mathcal{G}$ , combina linearmente os sinais nas equações (5.34) e (5.41) para obter uma estimativa do bloco transmitido, ou seja,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{s}}(n) &= \mathcal{G} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_0(n) \\ \bar{\mathbf{y}}_1(n) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{G} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{0,0} & \mathcal{H}_{0,1} \\ \mathcal{H}_{1,0} & \mathcal{H}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}(n) + \mathcal{G} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_0 \\ \bar{\mathbf{v}}_1 \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{G} \tilde{\mathcal{H}} \tilde{\mathcal{F}} \bar{\mathbf{s}}(n) + \mathcal{G} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_0 \\ \bar{\mathbf{v}}_1 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (5.42)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{0,0} & \mathcal{H}_{0,1} \\ \mathcal{H}_{1,0} & \mathcal{H}_{1,1} \end{bmatrix}\quad (5.43)$$

e

$$\tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \end{bmatrix}.\quad (5.44)$$

Multiplexação espacial em canais de ordem zero é possível apenas através de canais de posto maior ou igual à quantidade de fluxos de dados paralelos [25]. Assim, vamos assumir também que  $\tilde{\mathcal{H}}$ ,  $2QN \times 2(Q+B)N$ , possui posto completo por linhas. Assim, podemos realizar uma análise similar àquela do Capítulo 4 para obtermos uma relação entre a complexidade do receptor e a redundância do sistema. As condições para equalização ZF não se alteram, e, portanto, as equações (4.27) a (4.34) continuam válidas. De (5.42), a equalização ZF é obtida se

$$\mathcal{G} \tilde{\mathcal{H}} \tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2M \times (Q+B-1)2M} & \mathbf{I}_{2M} \end{bmatrix}.\quad (5.45)$$

A condição acima é satisfeita se e somente se o lado direito de (5.45) pertencer ao espaço gerado pelas linhas de  $\tilde{\mathcal{H}} \tilde{\mathcal{F}}$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2M \times (Q+B-1)2M} & \mathbf{I}_{2M} \end{bmatrix}^H \in \mathcal{R}\{\tilde{\mathcal{F}}^H \tilde{\mathcal{H}}^H\},\quad (5.46)$$

onde  $\mathcal{R}\{\cdot\}$  denota o espaço gerado pelas colunas de  $\{\cdot\}$ . As equações acima são equivalentes às equações (4.29) e (4.30) na Seção 4.3.

Supondo que  $\mathbf{F}_{0,t}(n)$  possua posto completo por colunas, podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$\mathbf{F}_{0,t}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \Phi_t(n) \end{bmatrix} \mathbf{J}_t, \quad t = \{0, 1\},\quad (5.47)$$

onde  $\Phi_t(n)$  é  $N - M \times M$  e a matriz  $\mathbf{J}_t$ ,  $M \times M$ , possui posto completo.

Seguindo um raciocínio semelhante ao utilizado nas Seções 4.3.1 e 4.3.2, e definindo

$$\Theta = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi_0^H(n-Q-B+1) \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} -\Phi_1^H(n-Q-B+1) \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \begin{bmatrix} -\Phi_0^H(n) \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} -\Phi_1^H(n) \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

chegamos novamente à conclusão de que a equalização ZF é possível se e somente se a equação

$$\mathbf{V}^H \Theta \hat{\alpha} = -\gamma \quad (5.49)$$

admitir solução para qualquer vetor  $\gamma$ , onde os vetores da matriz  $\mathbf{V}$ ,  $2(Q+B)N \times 2BN$ , formam a base do espaço nulo de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Assim como no Capítulo 4, vamos restringir a solução de (5.49) para

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-M \times 1} \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

onde  $\beta$ ,  $2(Q+B-1)(N-M) \times 1$ , passa a ser o vetor de incógnitas. A matriz  $\bar{\mathbf{V}}$ ,  $2(Q+B-1)N \times 2L$ , é definida pelos vetores de  $\mathbf{V}$  correspondentes às colunas não-nulas de  $\tilde{\mathcal{H}}$ , e  $\bar{\Theta}$  corresponde à partição formada pelas últimas  $2(Q+B-1)N$  linhas e  $2(Q+B-1)(N-M)$  colunas de  $\Theta$ . Assim, a condição expressa na equação (5.49) pode ser reescrita como

$$\bar{\mathbf{V}}^H \bar{\Theta} \beta = -\bar{\gamma}.$$

Novamente, podemos dizer que uma condição necessária para a existência de uma solução é

$$2(Q+B-1)(N-M) \geq 2L \Rightarrow Q \geq \left\lceil \frac{L}{N-M} \right\rceil - B + 1, \quad (5.51)$$

que é idêntica à condição encontrada na Seção 4.3.2. À primeira vista a equação acima indica que a multiplexação espacial não causa um aumento de complexidade do receptor, entretanto é importante observar que o número de colunas e linhas na matriz  $\mathcal{G}$  é multiplicado por 2. Apenas a ordem em blocos do receptor é a mesma.

É direto verificar que o espaço nulo de  $\tilde{\mathcal{H}}$  não admite vetores na forma de Vandermonde, a não ser que haja zeros comuns a todos os sub-canais envolvidos. Nesse caso, devem ser tomados os mesmos cuidados observados anteriormente com relação aos zeros congruentes, ou seja, a quantidade de redundância deve ser maior ou igual à cardinalidade do maior conjunto de zeros congruentes. Entretanto, a probabilidade de tal coincidência é baixa, e, portanto, na maioria dos casos não é preciso levar em consideração os zeros congruentes dos sub-canais. Nesse sentido a diversidade introduzida pela utilização de múltiplas antenas é equivalente à utilização de precodificadores variantes no tempo, uma vez que é possível a equalização ZF mesmo com redundância maior ou igual a um símbolo. Naturalmente, vale reforçar que esse resultado é válido considerando que não existam zeros congruentes que sejam comuns aos sub-canais.

A partir da equação (5.42), vemos que o sinal recebido no caso de duas antenas no transmissor e uma antena no receptor é dado por

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathcal{G} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{0,0} & \mathcal{H}_{0,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_0 \\ \mathcal{F}_1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}(n) + \mathcal{G} \bar{\mathbf{v}}_0, \quad (5.52)$$

e no caso de 1 antena no transmissor e 2 antenas no receptor o sinal recebido é dado por

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathcal{G} \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{0,0} \\ \mathcal{H}_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F}_0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{s}}(n) + \mathcal{G} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_0 \\ \bar{\mathbf{v}}_1 \end{bmatrix}. \quad (5.53)$$

A partir das equações (5.52) e (5.53) acima, é imediato verificar que o espaço nulo da matriz de canal também não contém vetores com estrutura de Vandermonde, e, portanto, não é necessário cuidar para que a redundância seja maior que o número de zeros congruentes, bastando que seja maior do que zero. É fácil verificar que a equação (5.51) é válida também para essas configurações.

Pela estrutura das equações (5.48), (5.49) e (5.50), e assumindo o mesmo número de antenas no transmissor e no receptor, é possível verificar que as conclusões acima se aplicam a um número arbitrário de antenas.

### 5.4.1 Simulações

Nesta seção apresentamos resultados obtidos através de simulações em computador para destacar os pontos principais das relações desenvolvidas na Seção 5.4. Consideramos um sistema MIMO com duas antenas no transmissor e duas antenas no receptor. A matriz do transmissor,  $\mathbf{F}_0(n)$ , definida na equação (5.31), é projetada tal que

$$\mathbf{F}_{0,0} = \mathbf{F}_{0,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-M,M} \\ \mathbf{I}_M \end{bmatrix}, \quad (5.54)$$

onde  $\mathbf{I}_{N-M,M}$  denota as  $N - M$  primeiras linhas da matriz identidade  $M \times M$ . O receptor é projetado resolvendo diretamente a equação (5.45).

Para verificar o comportamento do sistema MIMO na presença de zeros congruentes, vamos assumir que o canal  $h_{0,0}$  consiste do mesmo filtro FIR com 6 zeros congruentes utilizado na Seção 5.3.3, ou seja,  $\{1.3 e^{j3\pi/4}, 1.3 e^{-j3\pi/4}, 1.3, 1.3 e^{j\pi/4}$  e  $1.3 e^{-j\pi/4}\}$ . O canal  $h_{0,1}$  consiste de um filtro FIR com os mesmos zeros de  $h_{0,0}$ , porém multiplicados por  $0.8 e^{j0.1\pi}$ . Os demais canais,  $h_{0,0}$  e  $h_{0,1}$ , consistem de filtros FIR com 7 coeficientes gerados aleatoriamente. Todos os canais são normalizados tal que  $\|h_{r,t}\|^2 = 1$ ,  $r = 0, 1$ ,  $t = 0, 1$ .

O tamanho do bloco transmitido é  $N = 8$  e  $M = 6$ . O valor de  $Q$  é calculado como na equação (5.51), obtendo  $Q = 3$ . Para esse valor de  $N$ , ambos os canais  $h_{0,0}$  e  $h_{0,1}$  possuem conjuntos de zeros congruentes com 6 elementos cada. Entretanto, como observado anteriormente, apenas a presença de zeros congruentes comuns a todos os canais seria suficiente para que não fosse possível a equalização ZF. De fato, em simulações de 50 realizações de canal  $h_{0,0}$  e  $h_{0,1}$ , com a transmissão de  $5000 \times M$  símbolos QPSK para cada realização, o valor MSE obtido é de apenas  $3,70 \times 10^{-26}$ , que está na ordem de grandeza da precisão numérica do simulador.

A Figura 5.17 mostra a MSE em função de  $Q$  para  $N = 64$ ,  $M_s = 31$ , e canais de ordem  $L = 6$ . Os canais consistem de coeficientes complexos gerados aleatoriamente, e são normalizados tal que  $\|h_{r,t}\|^2 = 1$ ,  $r = 0, 1$ ,  $t = 0, 1$ . Para essa configuração do sistema, a equação (5.51) indica que reconstrução perfeita é possível apenas para  $Q \geq 3$ , como verificado na Figura 5.17.

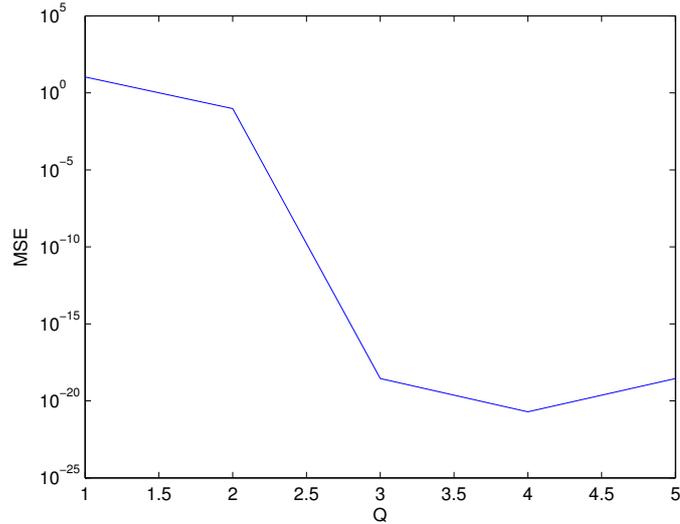


Figura 5.17: MSE como função de  $Q$  para um sistema MIMO  $2 \times 2$  com  $N = 32$ ,  $M_s = 30$ , e canais de ordem  $L = 6$ .

## 5.5 Principais Contribuições

Neste Capítulo mostramos como os resultados obtidos no Capítulo 4 podem ser aplicados a diversos sistemas de comunicações de interesse prático. Em particular, mostramos que sistemas CDMA com códigos longos podem ser interpretados como um transmultiplexador variante no tempo, e, portanto, os resultados obtidos anteriormente podem ser utilizados também neste contexto.

Mostramos também que os resultados podem ser aplicados a sistemas baseados em modulação monoportadora, e estendemos a análise realizada no Capítulo 4 para englobar sistemas com transmissão em blocos no enlace reverso. Essa extensão permite a aplicação dos resultados a sistemas SC-FDMA, que são utilizados, por exemplo, no enlace reverso do 3GPP LTE [1]. A extensão é realizada de forma genérica, e, portanto, pode ser aplicada também a outros sistemas. Além disso, os resultados não assumem que haja sincronismo entre os sinais dos diferentes usuários.

Finalmente, a análise é aplicada a sistemas com múltiplas antenas no transmissor e no receptor. Mostramos que a diversidade introduzida pelos diferentes canais tem papel similar à variação no tempo dos filtros do transmissor, eliminando a dependência entre a quantidade de redundância e o número de zeros congruentes.

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho analisamos um sistema de comunicações baseado em bancos de filtros FIR, do ponto de vista dos requisitos de projeto que permitem o compromisso entre maior eficiência espectral na transmissão e menor complexidade no receptor.

Mostramos no Capítulo 4 que é possível realizar a transmissão com maior eficiência espectral do que aquela obtida com sistemas OFDM, onde é necessária a utilização de um prefixo cíclico com comprimento maior ou igual à ordem do canal, e ainda assim obter reconstrução perfeita do sinal. Mostramos as condições para que seja possível a reconstrução perfeita utilizando bancos de filtros de comprimento finito (*Finite Impulse Response*, FIR) no receptor, e especificamos qual a ordem dos filtros do receptor em cada caso considerado. Mostramos também que a ordem dos filtros do receptor depende da quantidade de redundância inserida na transmissão dos blocos de dados (por exemplo, em sistemas OFDM a redundância corresponde ao prefixo cíclico).

A análise é realizada de forma genérica, de modo que não há limitações sobre a ordem do canal, e mostramos que a transmissão com reconstrução perfeita é possível mesmo para casos em que a ordem do canal é maior do que a redundância inserida na transmissão, ou até mesmo maior que os blocos transmitidos. Também não é exigido que o transmissor seja projetado de acordo com a atual realização do canal, o que simplifica o projeto e elimina a necessidade de um canal de retorno para informar a condição do canal. Naturalmente, tal informação pode ser explorada para otimizar o projeto do transmissor e do equalizador, mas é importante ressaltar que isso não é uma condição necessária para que as condições derivadas neste trabalho

sejam válidas.

Transmissores variantes no tempo mostram-se ferramentas bastante úteis, visto que permitem maior eficiência espectral devido a menor redundância na transmissão, e permitem relaxar algumas condições sobre o canal.

Como aplicação dos resultados obtidos, mostramos no Capítulo 5 que eles são ferramentas úteis para abordar o problema de detecção multiusuário em sistemas de comunicações, em particular naqueles empregando tecnologia CDMA.

Também mostramos que a análise pode ser empregada diretamente para transmissão utilizando modulação monoportadora (*single carrier*, SC). Infelizmente, a aplicação dos resultados para um sistema SC-FDMA no enlace direto não é imediata, uma vez que nesse caso cada terminal transmite um bloco de dados através de canais independentes. Mas uma vez que o 3GPP LTE utilizará SC-FDMA para o enlace reverso, estendemos a análise para incluir também este tipo de configuração. A análise é realizada na mesma abordagem genérica do restante do documento, e, portanto, os resultados obtidos podem ser aplicados a outros sistemas com características semelhantes.

Finalmente, estendemos a análise realizada no Capítulo 4 para sistemas com múltiplas antenas. Dessa forma, a análise comporta sistemas MIMO genéricos, ou seja, tanto os sistemas MIMO por acesso múltiplo ou por múltiplas antenas, ou ainda as duas opções combinadas, como os empregados em sistemas de comunicações móveis para 3.9G e 4G. Mostramos que utilizando definições apropriadas, os resultados obtidos anteriormente podem ser aplicados diretamente a sistemas MIMO com múltiplas antenas, com a importante observação de que a diversidade introduzida pelos canais independentes conectando as múltiplas antenas simplifica as relações para existência de equalizadores ZF. A redundância na transmissão pode ser reduzida, de maneira similar ao que ocorre quando são utilizados transmissores variantes no tempo em sistemas com apenas uma antena. Mostramos que esse resultado é válido para as três principais configurações utilizadas em sistemas MIMO com múltiplas antenas: multiplexação espacial, diversidade de transmissão e diversidade de recepção.

Como sugestão para trabalhos futuros, uma extensão natural do trabalho realizado nesta tese é desenvolver técnicas de projeto dos transmissores e receptores

segundo critérios de desempenho. Por exemplo, pode-se realizar uma otimização conjunta de transmissor e receptor visando a minimizar a taxa de erro de bit ou o erro quadrático médio, ou então especificar uma estrutura do transmissor que permita um projeto simplificado do receptor. Tais projetos devem contemplar também transmissores variantes no tempo e sistemas com múltiplas antenas, devido às vantagens associadas ao seu uso, demonstradas nos Capítulos 4 e 5. A análise teórica realizada no Capítulo 3 pode ser utilizada como base teórica para projeto de transmultiplexadores variantes no tempo.

A análise também pode ser estendida para incorporar diretamente a variação no tempo do canal. No escopo deste trabalho, o canal é considerado constante durante a transmissão de um bloco de dados. Receptores de ordem elevada precisam combinar vários blocos anteriores para obter uma estimativa do bloco de interesse, o que implica que o canal deve ser constante por um tempo maior. Assim, para esses casos é relevante estender a análise para incorporar explicitamente a variação no tempo do canal. Vale lembrar que a análise na Seção 5.1 pode ser utilizada como base para a análise estendida, uma vez que na definição da convolução do filtro com o canal não é relevante se a variação no tempo se dá por causa do canal, do filtro ou de ambos. Logo, resultados equivalentes devem ser obtidos se a variação no tempo do canal for considerada de forma explícita.

# Referências Bibliográficas

- [1] “Third Generation Partnership Project”, <http://www.3gpp.org>.
- [2] “Third Generation Partnership Project 2”, <http://www.3gpp2.org>.
- [3] Ojanperä, T., Prasad, R. (eds.), *WCDMA: Towards IP Mobility and Mobile Internet*. Boston, Artech, 2001.
- [4] “Wi-Fi Alliance”, <http://www.wi-fi.org>.
- [5] QIU, R., ZHU, W., ZHANG, Y.-Q., “Third-generation and beyond (3.5G) wireless networks and its applications”. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, v. 1, pp. I-41 – I-44, May 2002.
- [6] BEHESHTI, B., “Study of the technology migration path of the cellular wireless industry from 3G to 3.5G and beyond”. In: *IEEE Conference Long Island Systems, Applications and Technology*, pp. 15–28, May 2005.
- [7] “WiMAX Forum”, <http://www.wimaxforum.org/home>.
- [8] NEE, R. V., PRASAD, R., *OFDM Wireless Multimedia Communications*. Boston, Artech, 2000.
- [9] MYUNG, H. G., LIM, J., GOODMAN, D. J., “Single carrier FDMA for uplink wireless transmission”, *IEEE Vehicular Technology Magazine*, v. 1, n. 3, pp. 30–38, Sep. 2006.
- [10] SCAGLIONE, A., GIANNAKIS, G. B., BARBAROSSA, S., “Redundant Filterbank Precoders and Equalizers Part I: Unification and Optimal Designs”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 7, pp. 1988–2006, July 1999.

- [11] LIN, Y.-P., PHOONG, S.-M., “Minimum Redundancy for ISI Free FIR DMT Transceivers”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 50, n. 4, pp. 842–859, May 2002.
- [12] XIA, X.-G., “New Precoding for Intersymbol Interference Cancellation Using Nonmaximally Decimated Multirate Filterbanks with Ideal FIR Equalizers”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 45, n. 10, pp. 2431–2441, Oct. 1997.
- [13] XIA, X.-G., SU, W., LIU, H., “Filterbank Precoders for Blind Equalization: Polynomial Ambiguity Resistant Precoders (PARP)”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*, v. 48, n. 2, pp. 193–209, Feb. 2001.
- [14] SCAGLIONE, A., GIANNAKIS, G. B., BARBAROSSA, S., “Redundant Filterbank Precoders and Equalizers Part II: Blind Channel Estimation, Synchronization, and Direct Equalization”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 7, pp. 2007–2022, July 1999.
- [15] LUPAS, R., VERDU, S., “Linear Multiuser Detectors for Synchronous Code-Division Multiple-Access Channels”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 35, n. 1, pp. 123–136, Jan. 1989.
- [16] WANG, X., LU, W.-S., ANTONIOU, A., “Constrained Minimum-BER Multiuser Detection”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, n. 10, pp. 2903–2909, Oct. 2000.
- [17] KRAUSS, T. P., ZOLTOWSKI, M. D., “Oversampling Diversity Versus Dual Antenna Diversity for Chip-Level Equalization on CDMA Downlink”. In: *Proceedings of the 2000 IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, pp. 47–51, Cambridge, USA, Mar. 2000.
- [18] KRAUSS, T. P., HILLERY, W. J., ZOLTOWSKI, M. D., “MMSE Equalization for Forward Link in 3G CDMA: Symbol-Level Versus Chip-Level”. In: *Proceedings of the Tenth IEEE Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pp. 18–22, Pocano Manor, USA, Aug. 2000.

- [19] LENARDI, M., MEDLES, A., SLOCK, D. T. M., “Downlink Intercell Interference Cancellation in WCDMA by Exploiting Excess Codes”. In: *Proceedings of the 2000 IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop*, pp. 40–44, Cambridge, USA, Mar. 2000.
- [20] HOOLI, K., JUNTTI, M., “Interference Suppression in WCDMA Downlink by Symbol-Level channel Equalization”. In: *Proceedings of EUSIPCO 2002*, Toulouse, France, Sep. 2002.
- [21] HOOLI, K., JUNTTI, M., HEIKKILLÄ, M. J., KOMULAINEN, P., LATVA-AHO, M., LILLEBERG, J., “Chip-Level Channel Equalization in W-CDMA Downlink”, *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, v. 8, pp. 1–14, Jan 2002.
- [22] VANDENDORPE, L., HORLIN, F., SARTENAER, T., “FSLE and FSDF Joint Detectors for Long DS-CDMA Codes”. In: *Proc. IEEE Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, v. 4, pp. 2261–2264, May 2001.
- [23] ZOLTOWSKI, M. D., KRAUSS, T. P., “Two-Channel Zero Forcing Equalization on CDMA Forward Link: Trade-Offs Between Multi-User Access Interference and Diversity Gains”. In: *Conference Record of the Thirty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, 1999*, v. 2, pp. 1541–1545, Pacific Grove, USA, Oct. 1999.
- [24] “Wireless World Initiative New Radio”, <https://www.ist-winner.org>.
- [25] GESBERT, D., SHAFI, M., SHIU, D.-S., SMITH, P. J., NAGUIB, A., “From Theory to Practice: An Overview of MIMO Space-Time Coded Wireless Systems”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 21, n. 3, pp. 281–302, Apr. 2003.
- [26] VAIDYANATHAN, P. P., *Multirate Systems and Filter Banks*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1993.
- [27] STRANG, G., NGUYEN, T., *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge, 2000.

- [28] DINIZ, P. S. R., da SILVA, E. A. B., NETTO, S. L., *Digital Signal Processing: System Analysis and Design*. Cambridge, 2002.
- [29] MITRA, S. K., *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*. New York, McGraw-Hill, 1998.
- [30] VAIDYANATHAN, P. P., “Filter Banks in Digital Communications”, *IEEE Circuits and Systems Magazine*, v. 1, n. 2, pp. 4–25, Second Quarter 2001.
- [31] MALVAR, H. S., *Signal Processing with Lapped Transforms*. Boston, Artech, 1992.
- [32] VAIDYANATHAN, P. P., MITRA, S. K., “Polyphase Networks, Block Digital Filtering, LPTV Systems, and Alias-Free QMF Banks: A Unified Approach Based on Pseudocirculants”, *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, v. 36, n. 3, pp. 381–391, Mar. 1988.
- [33] RIBEIRO, C. B., *Equalização de Canal em Sistemas de Comunicações Utilizando Transmissão em Blocos*. M.Sc. dissertation, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [34] ZADEH, L. A., “Frequency Analysis of Variable Networks”, *Proceedings of the IRE*, v. 38, n. 3, pp. 291–299, Mar. 1950.
- [35] CLAASEN, T. A. C. M., MECKLENBRAÜKER, W. F. G., “On Stationary Linear Time-Varying Systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. CAS-29, pp. 169–184, Mar. 1982.
- [36] AKKARAKARAN, S., VAIDYANATHAN, P. P., “Bifrequency and Bispectrum Maps: A New Look at Multirate Systems with Stochastic Inputs”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, n. 3, pp. 723–736, Mar. 2000.
- [37] PRATER, J. S., LOEFFLER, C. M., “Analysis and Design of Periodically Time-Varying IIR Filters, with Applications to Transmultiplexing”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 40, n. 11, pp. 2715–2725, Nov. 1992.
- [38] VETTERLI, M., “Invertibility of Linear Periodically Time-Varying Filters”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 36, n. 1, pp. 148–150, Jan. 1989.

- [39] LEMMA, A. N., DEPRETTERE, E. F., “Time-Varying Biorthogonal filter Banks: A State-State Approach”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 45, n. 3, pp. 280–289, Mar. 1998.
- [40] PHOONG, S.-M., VAIDYANATHAN, P. P., “Time-varying filters and filter banks: some basic principles”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 44, n. 12, pp. 2971–2987, Dec. 1996.
- [41] WADA, S., TAKAHASHI, N., “A method for time-frequency multirate filtering”. In: *Proceedings of the IEEE-SP International Symposium on Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, pp. 37–40, Paris, France, Jun. 1996.
- [42] CROCHIERE, R. E., RABINER, L. R., *Multirate Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1983.
- [43] LOEFFLER, C. M., BURRUS, C. S., “Optimal Design of Periodically Time-Varying and Multirate Digital Filters”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. ASSP-32, n. 5, pp. 991–997, Oct. 1984.
- [44] ISHII, R., KAKISHITA, M., “A Design Method for a Periodically Time-Varying Digital Filter for Spectrum Scrambling”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 38, n. 7, pp. 1219–1222, Jul. 1990.
- [45] TZANNES, M. A., TZANNES, M. C., PROAKIS, J., HELLER, P. N., “DMT Systems, DWMT Systems and Digital Filter Banks”. In: *Int. Conf. on Communications*, pp. 311–315, New Orleans, USA, May 1994.
- [46] VIHOLAINEN, A., SARAMÄKI, T., RENFORS, M., “Cosine-Modulated Filter Bank Design for Multicarrier VDSL Modems”. In: *IEEE Int. Workshop on Intelligent Signal Processing and Communications Systems*, pp. 143–147, Melbourne, Australia, Nov. 1998.
- [47] SANDBERG, S. D., TZANNES, M. A., “Overlapped Discrete Multitone Modulation for High Speed Copper Wire Communications”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 13, n. 9, Dec. 1995.

- [48] RIBEIRO, C. B., DINIZ, P. S. R., RENFORS, M., de CAMPOS, M. L. R., “Transmultiplex Using Fractional Delays”. In: *Proc. of GLOBECOM*, v. 1, pp. 222–226, San Antonio, USA, Nov. 2001.
- [49] RIBEIRO, C. B., de CAMPOS, M. L. R., DINIZ, P. S. R., “Zero-Forcing Equalization for Time-Varying Systems with Memory”. In: *Proc. of International Symposium on Circuits and Systems*, v. 5, pp. 413–416, Vancouver, Canada, May 2004.
- [50] IHALAINEN, T., ALHAVA, J., VIHOLAINEN, A., XING, H., RINNE, J., RENFORS, M., “On the Performance of Filter Bank Based Multicarrier Systems in xDSL and WLAN Applications”. In: *2000 IEEE International Conference on Communications*, v. 2, pp. 1120–1124, New Orleans, USA, Jun 2000.
- [51] RIBEIRO, C. B., de CAMPOS, M. L. R., DINIZ, P. S. R., “FIR Equalizers with Minimum Redundancy”. In: *Proc. IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, v. 3, Apr. 2002.
- [52] SPENCER, Q. H., SWINDLEHURST, A. L., HAARDT, M., “Zero-Forcing Methods for Downlink Spatial Multiplexing in Multiuser MIMO Channels”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 52, n. 2, pp. 461–471, Feb. 2004.
- [53] GOLUB, G. H., Van Loan, C. F., *Matrix Computations*. Baltimore, John Hopkins, 1983.
- [54] RIBEIRO, C. B., de CAMPOS, M. L. R., DINIZ, P. S. R., “Zero-Forcing Multiuser Detection in CDMA Systems Using Long Codes”. In: *Proc. of GLOBECOM*, v. 5, pp. 2463–2467, Dec. 2003.
- [55] CROCHIERE, R. E., RABINER, L. R., *Multirate Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1983.
- [56] LEE, J. S., MILLER, L. E., *CDMA Systems Engineering Handbook*. Boston, Artech, 1998.
- [57] CZYLWIK, A., “Comparison between adaptive OFDM and single carrier modulation with frequency domain equalization”. In: *IEEE 47th Vehicular Technology Conference*, v. 2, pp. 865–869, May 1997.

- [58] CZYLWIK, A., “OFDM and related methods for broadband mobile radio channels”. In: *Proceedings International Zurich Seminar on Broadband Communications*, pp. 91–98, Feb. 1998.
- [59] DENEIRE, L., GYSELINCKX, B., ENGELS, M., “Training Sequence vs. Cyclic Prefix: A new look on Single Carrier Communication”. In: *IEEE Global Telecommunications Conference*, v. 2, pp. 1056–1060, Nov 2000.
- [60] FALCONER, D., ARIYAVISITAKUL, S., BENYAMIN-SEEYAR, A., ELDSON, B., “Frequency Domain Equalization for Single-Carrier Broadband Wireless Systems”, *IEEE Communications Magazine*, pp. 58–66, Apr. 2002.
- [61] SARI, H., KARAM, G., JEANCLAUDE, I., “Transmission techniques for digital terrestrial TV broadcasting”, *IEEE Communications Magazine*, v. 33, n. 2, pp. 100–109, Feb. 1995.
- [62] ZHENGDAO, W., GIANNAKIS, G., “Linearly precoded or coded OFDM against wireless channel fades?” In: *IEEE Third Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications*, pp. 267–270, Taiwan, Mar. 2001.
- [63] WANG, Z., MA, X., GIANNAKIS, G. B., “OFDM or Single-Carrier Block Transmissions?”, *IEEE Transactions on Communications*, v. 52, n. 3, pp. 380–394, Mar. 2004.
- [64] SALO, J., SUVIKUNNAS, P., EL-SALLABI, H., VAINIKAINEN, P., “On the characteristics of MIMO mutual information at high SNR”. In: *Proceedings of the 6th Nordic Signal Processing Symposium*, pp. 280–283, Espoo, Finland, Jun. 2004.
- [65] ALAMOUTI, S. M., “A Simple Transmit Diversity Technique for Wireless Communications”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, v. 16, n. 8, pp. 1451–1458, Oct. 1998.
- [66] WILLINK, T. J., “MIMO OFDM for fixed wireless access”. In: *Proc. of 15th Int. Conf. on Wireless Commun.*, Calgary, Canada, Jul. 2003.