

UMA CONTRIBUIÇÃO POR MEIO DE PRÉ-COMPENSAÇÃO
NORMALIZANTE E PARAMETRIZAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO EFETIVA DO
MÉTODO DO LUGAR CARACTERÍSTICO

Marcos Vicente de Brito Moreira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. João Carlos dos Santos Basilio, D. Phil.

Prof. Liu Hsu, Dr. d'Etat

Prof. Eugenius Kaszkurewicz, D. Sc.

Prof. Gilberto Oliveira Corrêa, Ph. D.

Prof. Pedro Luis Dias Peres, Docteur

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2006

MOREIRA, MARCOS VICENTE DE BRITO

Uma contribuição por meio de pré-compensação normalizante e parametrização para utilização efetiva do método do lugar característico [Rio de Janeiro] 2006

XVI, 174 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Elétrica, 2006)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Sistemas multivariáveis
2. Sistemas lineares
3. Domínio da frequência

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus por todas as vitórias e toda a ajuda nos momentos difíceis, possibilitando que este trabalho pudesse ser concluído. Apesar de todas as dificuldades, nunca me senti sozinho.

Devo também agradecer a Deus por ter me presenteado com os meus pais, Odelio e Sueli, que com todo o esforço e carinho permitiram que eu pudesse me dedicar aos estudos, concluindo mais uma etapa em minha vida que foi a elaboração deste trabalho.

Agradeço também a Deus pelo meu irmão Claudio, que nunca se negou a me ajudar em todos os momentos em que precisei.

Agradeço a Deus por ter colocado em minha vida alguém tão especial quanto a minha esposa, Tatiana, que é a minha inspiração e a minha força para continuar nos momentos mais difíceis. Sem ela certamente não teria conseguido concluir esta tese e, por isso, dedico este trabalho a ela.

Agradeço também a todos os meus amigos que me apoiaram e fizeram desta minha longa caminhada mais alegre e mais fácil de ser trilhada. Em especial agradeço ao meu amigo e professor João Carlos Basilio pelos ensinamentos, por ter confiado em mim e pelo companheirismo nestes oito anos em que trabalhamos juntos, desde o curso de graduação, passando pelo mestrado e terminando agora com esta tese de doutorado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UMA CONTRIBUIÇÃO POR MEIO DE PRÉ-COMPENSAÇÃO
NORMALIZANTE E PARAMETRIZAÇÃO PARA UTILIZAÇÃO EFETIVA DO
MÉTODO DO LUGAR CARACTERÍSTICO

Marcos Vicente de Brito Moreira

Março/2006

Orientador: João Carlos dos Santos Basilio

Programa: Engenharia Elétrica

O método do lugar característico (MLC) é uma ferramenta poderosa para o projeto de sistemas de controle multivariáveis lineares, permitindo que objetivos de projeto conflitantes tais como estabilidade e desempenho sejam simultaneamente considerados a partir de uma única forma de representação do sistema. Contudo, esse método tem dois problemas importantes: (i) quando a matriz de transferência do modelo nominal da planta for muito diferente de uma matriz normal, os lugares característicos do sistema em malha aberta são muito sensíveis a incertezas nos parâmetros do modelo da planta; (ii) o MLC propõe o projeto de um controlador que possui as mesmas matrizes de autovetores e autovetores duais que a planta e, portanto, o controlador obtido através da interconexão em série das matrizes de autovetores e autovetores duais da planta e a matriz diagonal formada pelos autovalores do controlador é, em geral, irracional.

Nesta tese, tanto o problema da sensibilidade dos lugares característicos quanto o problema da obtenção de controladores comutativos racionais serão abordados. Visando contornar o problema da sensibilidade dos lugares característicos, serão propostas duas novas abordagens para o projeto de pré-compensadores normalizantes. Com relação ao projeto de controladores comutativos racionais, serão apresentadas uma parametrização para todos os controladores comutativos racionais estabilizantes e uma caracterização de todos os graus de liberdade resultantes dessa parametrização. Condições necessárias e suficientes para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes são também apresentadas nesse trabalho. Conforme pode ser visto a partir dos resultados preliminares aqui apresentados, em que os graus de liberdade da parametrização são utilizados para obter controladores que comutam com uma planta pré-compensada aproximadamente normal em uma faixa de frequências de interesse, esta tese provê uma nova perspectiva para o MLC, *i.e.*, a possibilidade de se levar em conta objetivos de projeto tais como estabilidade e desempenho robustos, que até então não eram considerados quando da utilização do MLC.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A CONTRIBUTION VIA NORMALIZING PRE-COMPENSATION AND
PARAMETRIZATION FOR THE EFFECTIVE USE OF THE
CHARACTERISTIC LOCUS METHOD

Marcos Vicente de Brito Moreira

March/2006

Advisor: João Carlos dos Santos Basilio

Department: Electrical Engineering

The characteristic locus methods (CLM) is a powerful tool for the design of linear multivariable control systems, allowing conflicting design objectives such as stability and performance be addressed by using a single system representation. However, this design methodology suffers from two problems: (*i*) when the transfer matrix that represents the plant nominal model is very far from normal, the characteristic loci of the open-loop transfer matrix are very sensitive to uncertainty in the parameters of the plant model; (*ii*) the CLM proposes the design of a controller that possesses the same eigenvector and dual-eigenvector matrices as the plant, and therefore, the controller formed with the series interconnection of the plant eigenvector and dual-eigenvector matrices and the diagonal matrix formed with the controller eigenfunctions is, in general, irrational.

In this thesis, both the characteristic locus sensitivity problem and the problem of designing rational commutative controllers are dealt with. With the view to circumventing the characteristic locus sensitivity, two new approaches for the design of normalizing precompensators are proposed. As far as the design of rational commutative controller is concerned, a parametrization of all rational stabilizing commutative controllers and a characterization of all degrees of freedom available in this parametrization are presented. Necessary and sufficient conditions for the existence of rational stabilizing commutative controllers are also given in this work. As it can be seen from the preliminary results presented here, where the degrees of freedom are deployed to design controllers that commute with an approximately normal precompensated plant in a frequency range of interest, the thesis provide a new perspective for the CLM, *i.e.*, the possibility of addressing design objectives such as robust stability and robust performance, which, so far, have not been addressed within the CLM.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 O Método do Lugar Característico	9
2.1 Critério de Nyquist Generalizado	9
2.1.1 Lugares característicos	11
2.1.2 Direções características	14
2.1.3 Critério de Nyquist generalizado	14
2.2 Controladores Comutativos	15
2.2.1 Controladores Comutativos Aproximados	17
2.3 Sensibilidade dos lugares característicos	21
2.3.1 Representações de incertezas não-estruturadas	21
2.3.2 O problema de sensibilidade dos lugares característicos	26
2.3.3 Métodos para contornar o problema de sensibilidade dos lugares caraterísticos	30
2.4 Comentários finais	33
3 Pré-compensadores Normalizantes	36
3.1 Método das Cadeias de Nyquist: pré-compensação visando a obtenção de dominância diagonal	38
3.2 Pré-condicionadores	40
3.3 Normalização pelo método de Basilio e Sahate	43

3.4	Normalização por alinhamento das matrizes de direções principais de entrada e de saída da planta	45
3.4.1	Formulação do problema	46
3.4.2	Solução do problema de otimização	56
3.4.3	Implementação do pré-compensador	58
3.4.4	Exemplos	60
3.5	Pré-compensadores normalizantes estáticos	69
3.5.1	Formulação do problema	70
3.5.2	Solução do problema de otimização	76
3.5.3	Problema de otimização multi-freqüencial	78
3.5.4	Exemplos	80
3.6	Comentários finais	87
4	Controladores Comutativos Estabilizantes	89
4.1	Fundamentos teóricos	91
4.1.1	Base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial	91
4.1.2	Pólos e zeros de uma matriz de transferência	95
4.1.3	Pólos e zeros de funções características	96
4.1.4	Modos fixos de um sistema multivariável	97
4.2	Uma parametrização para todos os controladores comutativos estabilizantes	98
4.2.1	Formulação do problema	98
4.2.2	Existência de controladores comutativos estabilizantes	103
4.2.3	Solução geral e caracterização dos graus de liberdade	116
4.3	Exemplos	118
4.4	Comentários finais	125
5	Fundamentos para o projeto de controladores comutativos robustos	126
5.1	Resultados preliminares	127
5.1.1	Estabilidade Robusta	128

5.1.2	Rastreamento de sinal de referência e rejeição de sinais externos de perturbação na saída da planta	130
5.1.3	Interação	131
5.1.4	Desempenho robusto	132
5.2	Exemplos	135
5.3	Comentários finais	146
6	Conclusões e trabalhos futuros	148
A	Uma solução numericamente robusta para a identidade de Bezout polinomial generalizada	152
A.1	Cálculo das matrizes $M(s)$, $N(s)$, $\tilde{M}(s)$ e $\tilde{N}(s)$	154
A.2	Cálculo de $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$	155
A.3	Exemplos	160

Lista de Figuras

2.1	Sistema multivariável com realimentação unitária negativa.	10
2.2	Planta nominal $G(s)$ com perturbação aditiva $\Delta_a(s)$	22
2.3	Planta nominal $G(s)$ com perturbação multiplicativa na entrada da planta, $\Delta_i(s)$	22
2.4	Planta nominal $G(s)$ com perturbação multiplicativa na saída da planta, $\Delta_o(s)$	23
3.1	Sistema em malha aberta com perturbação multiplicativa $\Delta_i(s)$, diagonal, na entrada da planta.	41
3.2	Sistema em malha aberta equivalente ao sistema da figura 3.1, onde $K(s) = D\bar{K}(s)$	41
3.3	Medidas de normalidade $\delta(G(j\omega))$ (linha contínua) e desalinhamento $m(G(j\omega))$ (linha traço-pontilhada).	62
3.4	Medida de desalinhamento $m(GK_u)$ para $K_u = I$ (linha pontilhada), $K_u = K_{u_1}$ (linha tracejada), $K_u = K_{u_2}$ (linha traço-pontilhada) e $K_u = K_{u_3}$ (linha contínua).	63
3.5	Medidas de normalidade $\delta(\bar{G})$ (linha contínua) e desalinhamento $m(\bar{G})$ (linha traço-pontilhada).	64
3.6	Número de condicionamento da matriz de autovetores de $G(j\omega)\bar{K}_p(j\omega)$, $W_p(j\omega)$	65
3.7	Medidas de normalidade $\delta(G(j\omega))$ (linha contínua) e desalinhamento $m(G(j\omega))$ (linha traço-pontilhada).	67
3.8	Número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de $G(j\omega)$, $W(j\omega)$	67

3.9	Magnitude de $K_u(j\omega)$ (linha marcada com x) e para a aproximação racional $K_p(j\omega)$ (linha contínua).	68
3.10	Medidas de desalinhamento $m(G)$ (linha tracejada), $m(GK_u)$ (linha traço-pontilhada) e $m(GK_p)$ (linha contínua).	69
3.11	Medidas de normalidade $\delta(G)$ (linha tracejada), $\delta(GK_u)$ (linha traço-pontilhada) e $\delta(GK_p)$ (linha contínua).	69
3.12	Números de condicionamento ótimos das matrizes de autovetores de $G(j\omega)$, $G(j\omega)K_u(j\omega)$ e $G(j\omega)K_p(j\omega)$	70
3.13	Números de condicionamento ótimos da matriz de autovetores de $G(j\omega)$ (linha contínua), $G(j\omega)K_p$ (linha tracejada) e $K_pG(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) para o exemplo 3.4.	83
3.14	Números de condicionamento ótimos das matrizes de autovetores de $G(j\omega)$ (linha contínua), $G(j\omega)K_{p_1}$ (linha tracejada) e $K_{p_1}G(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) para o exemplo 3.5.	85
3.15	Números de condicionamento das matrizes de autovetores de $G(j\omega)$ (linha contínua), $G(j\omega)K_{p_2}$ (linha tracejada) e $K_{p_2}G(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) para o exemplo 3.5. Problema de otimização para duas frequências.	87
3.16	Números de condicionamento ótimos das matrizes de autovetores de $G(j\omega)K_{p_3}$ (linha contínua), $G(j\omega)K_{p_2}$ (linha tracejada) e $K_{p_2}G(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) para o exemplo 3.5.	88
4.1	Sistema multivariável com realimentação unitária negativa.	99
4.2	Lugares característicos de $T_o(s) = G(s)K_pK_c(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).	122
4.3	Erro percentual entre lugares característicos de $T_o(s) = G(s)K_pK_c(s)$ e o produto dos lugares característicos de $G(s)K_p$ e $K_c(s)$ a cada frequência ω	122

4.4	Lugares característicos de $T_o(s) = G(s)K_p$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).	124
4.5	Lugares característicos de $T_o(s) = G(s)(-K_p)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).	124
5.1	Sistema com realimentação unitária negativa.	128
5.2	Família de círculos M.	129
5.3	Lugares característicos de $T_o(s) = G(s)K_pK_c(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua). Círculo parametrizado por b , onde $b = 2,2807$ (linha traço-pontilhada).	136
5.4	Lugares característicos de $T_o(s) = 2G(s)K_pK_c(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua). Círculo parametrizado por b , onde $b = 1,4$ (linha traço-pontilhada).	137
5.5	Lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s) = G(s)K(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).	138
5.6	Ângulos de desalinhamento entre os autovetores de $G(s)K_p$ e a base canônica.	139
5.7	Lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s) = G(s)K(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua). Círculo obtido para $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (linha traço-pontilhada).	139
5.8	Valores singulares de $T_c(s)$ (linha contínua).	140
5.9	Respostas do sistema realimentado, $y_i(t)$, para uma sinal igual ao degrau unitário, $u_0(t)$, aplicado em cada uma das entradas do sistema $c_i(t)$ para $i = 1,2$	141

5.10	Número de condicionamento de $G(s)$	141
5.11	Respostas do sistema realimentado, $y_i(t)$, para uma sinal igual ao degrau unitário, $u_0(t)$, aplicado em cada uma das entradas do sistema $c_i(t)$ para $i = 1, 2$, considerando o sistema com perturbação na entrada da planta.	142
5.12	Lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s) = G(s)K(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).	144
5.13	Módulos dos lugares característicos de $T_c(s)$ (linha tracejada) e valores singulares de $T_c(s)$ (linha contínua).	144
5.14	Ângulos de desalinhamento entre os autovetores de $G(s)K_p$ e a base canônica.	145
5.15	Respostas do sistema realimentado, $y_i(t)$, para uma sinal igual ao degrau unitário, $u_0(t)$, aplicado em cada uma das entradas do sistema $c_i(t)$ para $i = 1, 2$	145
5.16	Número de condicionamento de $G(s)$	146

Lista de Definições

Definição 2.1 Suponha que a cada função característica $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ esteja associada uma superfície de Riemann, \mathbf{S}_i , para $i = 1, \dots, k$ e suponha que há δ_i cópias do contorno D em cada uma das folhas de Riemann, a partir das quais \mathbf{S}_i , para $i = 1, \dots, k$, são formadas. Quando s caminha ao longo do contorno D , em sentido horário, percorrendo um caminho fechado na superfície de Riemann \mathbf{S}_i , uma curva fechada em \mathbb{C} , \mathbf{C}_i , para a função característica $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ é traçada. As curvas \mathbf{C}_i , $i = 1, \dots, k$, são contínuas e são definidas como os lugares característicos de $G(s)$.

Definição 2.2 Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é normal se $A^*A = AA^*$, isto é, se A comuta com a sua conjugada transposta.

Definição 2.3 Uma matriz $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é dita ser aproximadamente δ -normal quando $\delta(G) < \epsilon$, onde $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ define o grau de proximidade da normalidade desejada.

Definição 2.4 Uma matriz $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é dita ser aproximadamente ν -normal se $\mathcal{C}(W) = 1 + \nu$, onde W é a matriz de autovetores de G e $\nu \in \mathbb{R}^+$ define o grau de proximidade da normalidade desejada.

Definição 3.1 Seja $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e considere uma decomposição espectral de G dada por $G = W\Lambda V$. O número de condicionamento ótimo de W , denotado por $\mathcal{C}_{opt}[W]$, é obtido resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\mathcal{C}_{opt}[W] = \inf_{D \in \mathbb{D}_+^{m \times m}} \mathcal{C}[WD],$$

onde $\mathbb{D}_+^{m \times m}$ denota o conjunto das matrizes diagonais com elementos reais positivos.

Definição 3.2 Seja G uma matriz complexa. Se todas as possíveis decomposições

por valores singulares de $G = Y\Sigma U^*$ são tais que Y e U são alinhadas, isto é,

$$U^*Y = e^{j\Theta},$$

onde $\Theta = \text{diag}\{\theta_i, i = 1, \dots, m\}$, então G é denominada alinhada.

Definição 4.1 O posto normal de uma matriz polinomial $A(s)$ ($p \times q$) é o número inteiro r tal que $\max_{s \in \mathbb{C}} \rho[A(s)] = r$, onde $\rho(\cdot)$ denota o posto de uma matriz complexa.

Definição 4.2 Seja $A(s)$ uma matriz com posto normal r e seja $F(s) = \begin{bmatrix} \underline{f}_1(s) & \underline{f}_2(s) \\ \dots & \underline{f}_{\bar{n}}(s) \end{bmatrix}$, onde $gr[\underline{f}_i(s)] = \phi_i$, uma matriz polinomial tal que $A(s)F(s) = O$. Então, $F(s)$ forma uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $A(s)$ se e somente se $\sum_{i=1}^{\bar{n}} \phi_i$ é mínimo.

Definição 4.3 Seja $G(s)$ uma matriz racional ($p \times q$). Então, os zeros finitos de $G(s)$ são definidos como o conjunto de todos os zeros do conjunto de polinômios $\{\epsilon_i(s) : i = 1, \dots, r\}$. Os pólos de $G(s)$ são definidos como o conjunto de todos os zeros do conjunto de polinômios $\{\psi_i(s) : i = 1, \dots, r\}$, onde $\epsilon_i(s)$ e $\psi_i(s)$ são coprimos e são obtidos a partir da forma de Smith-McMillan de $G(s)$.

Definição 4.4 Considere a equação algébrica associada à função característica $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$:

$$b_{i0}(s)\hat{\lambda}_{g_i}^{\delta_i} + b_{i1}(s)\hat{\lambda}_{g_i}^{\delta_i-1} + \dots + b_{i\delta_i}(s) = 0.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $b_{i0}(s) \neq 0$ e $b_{i\delta_i}(s) \neq 0$. Dessa forma, os pólos da função característica $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ são definidos (MacFarlane e Postlethwaite, 1977) como os valores de s que satisfazem:

$$b_{i0}(s) = 0,$$

enquanto que os zeros são definidos como os valores de s que satisfazem:

$$b_{i\delta_i}(s) = 0.$$

Definição 4.5 Seja $e(s)$ um polinômio mônico cujos zeros são pólos da matriz de transferência da planta $G(s)$ ($m \times m$) e que não são pólos de nenhuma das funções

características de $G(s)$. Então, os pólos $p_i \in \mathbb{C}$ de $G(s)$ tais que $e(p_i) = 0$ são chamados de modos fixos de $G(s)$.

Definição 4.6 O grau de um vetor polinomial $\underline{h}(s)$, denotado por $gr[\underline{h}(s)]$, é igual ao maior grau dos elementos do vetor $\underline{h}(s)$.

Lista de Abreviaturas e Símbolos

$G(s)$	—	Matriz de transferência da planta nominal
$G_p(s)$	—	Matriz de transferência da planta com perturbação
$K(s)$	—	Matriz de transferência do controlador
$\Delta_i(s)$	—	Perturbação multiplicativa na entrada da planta
$\Delta_o(s)$	—	Perturbação multiplicativa na saída da planta
$\Delta_a(s)$	—	Perturbação aditiva na planta
\mathbb{R}	—	Corpo dos números reais
\mathbb{C}	—	Corpo dos números complexos
$\mathbb{R}^{p \times q}[s]$	—	Conjunto das matrizes polinomiais $p \times q$
$\mathbb{R}^{p \times q}(s)$	—	Conjunto das matrizes racionais $p \times q$
$RH_\infty^{p \times q}$	—	Conjunto de todas as matrizes $p \times q$ racionais, próprias e estáveis
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	—	Produto interno entre dois vetores
$ \cdot $	—	Módulo de um número complexo
$\bar{\sigma}[\cdot]$	—	Maior valor singular de uma matriz complexa
$\underline{\sigma}[\cdot]$	—	Menor valor singular de uma matriz complexa
$\mathcal{C}[\cdot]$	—	Número de condicionamento de uma matriz complexa
$\mathcal{C}_{opt}[\cdot]$	—	Número de condicionamento ótimo de uma matriz complexa
$\ \cdot\ _2$	—	Norma espectral de uma matriz ou norma Euclidiana de um vetor
$\ \cdot\ _{\mathcal{F}}$	—	Norma de Frobenius
$\ \cdot\ _\infty$	—	Norma infinita
$tr(\cdot)$	—	Traço de uma matriz complexa
$det(\cdot)$	—	Determinante de uma matriz complexa
$\rho(\cdot)$	—	Posto de uma matriz complexa
r	—	Posto normal de uma matriz polinomial

Capítulo 1

Introdução

Os primeiros métodos a utilizar o domínio da frequência para o projeto de sistemas de controle multivariáveis surgiram no fim da década de 60 no século passado e consistiam de uma generalização de técnicas clássicas de projeto de sistemas de controle monovariáveis (Rosenbrock, 1969; Rosenbrock, 1970; Mayne, 1973; MacFarlane e Belletruti, 1973). Entre essas técnicas estão os chamados Método das Cadeias de Nyquist (Rosenbrock, 1970), e o Método do Lugar Característico (MLC) (MacFarlane e Belletruti, 1973; MacFarlane e Kouvaritakis, 1977; MacFarlane e Postlethwaite, 1977). Ambos os métodos têm como principal motivação, a possibilidade de transformar o problema de projetar um controlador multivariável para um sistema de ordem m , em um problema de se projetar m sistemas monovariáveis utilizando-se, para tanto, técnicas clássicas para sistemas monovariáveis no domínio da frequência (Nyquist, 1932; Bode, 1945).

O Método do Lugar Característico, assim como os Métodos das Cadeias de Nyquist, é baseado no critério de estabilidade de Nyquist generalizado (MacFarlane, 1970; MacFarlane e Kouvaritakis, 1977; Desoer e Wang, 1980), que fornece uma maneira de verificar a estabilidade do sistema multivariável em malha fechada a partir dos lugares característicos da matriz de transferência do sistema em malha aberta. De acordo com o critério de Nyquist generalizado, um sistema multivariável, em que $G(s)$ e $K(s)$ são as matrizes de transferência quadradas de dimensão $m \times m$ da planta e do controlador, respectivamente, é estável se e somente se a soma dos envoltimentos em sentido anti-horário do ponto crítico $(-1 + j0)$ feito pelos lugares

característicos de $T_o(s) = G(s)K(s)$ for igual ao número de pólos instáveis de $G(s)$ e $K(s)$. Os lugares característicos de uma determinada matriz de transferência $T_o(s)$ são as respostas em frequência das suas funções de autovalores.

Apesar de ambos os métodos serem baseados no mesmo critério de estabilidade, as abordagens utilizadas por cada um deles é diferente. Os Métodos das Cadeias de Nyquist consistem em projetar um controlador em duas etapas. Na primeira etapa um pré-compensador é utilizado para tornar, quando possível, a matriz de transferência da planta pré-compensada diagonal dominante. Uma vez obtida a dominância diagonal, o sistema passa a se comportar aproximadamente como m sistemas monovariáveis independentes. A segunda etapa do método consiste, então, em projetar um conjunto de m controladores monovariáveis independentes, um para cada malha, de forma a fazer com que o sistema multivariável em malha fechada satisfaça o critério de estabilidade de Nyquist generalizado. Diferentemente dos Métodos das Cadeias de Nyquist, o Método do Lugar Característico não requer que seja obtida a dominância diagonal da planta e utiliza diretamente os lugares característicos do sistema em malha aberta para satisfazer o critério de Nyquist generalizado. Para tanto, é necessário que o controlador possua as mesmas matrizes de autovetores que a matriz de transferência da planta. Neste caso, é possível verificar que a planta e o controlador comutam com relação à multiplicação e, por este motivo esses controladores são denominados controladores comutativos.

Embora o MLC tenha surgido como uma ferramenta poderosa para o projeto de sistemas de controle multivariáveis, em Doyle e Stein (1981), este e todos os métodos baseados no critério de estabilidade de Nyquist generalizado, são seriamente criticados por serem baseados na resposta em frequência das funções de autovalores de matrizes de transferência (lugares característicos), que podem ser, em alguns casos, muito sensíveis a variações nos parâmetros dessa matriz. Conseqüentemente, os pesquisadores passaram, então, a estudar outras alternativas para o projeto de controladores multivariáveis, considerando perturbações no modelo nominal da planta, como, por exemplo, a teoria de controle H_∞ (Francis, 1987; Zhou et al., 1996). Contudo, o uso da síntese de controladores H_∞ requer para que sejam considerados

todos os objetivos de projeto conflitantes de um sistema de controle multivariável a escolha de várias funções de ponderação, que não possuem uma forma simples de serem escolhidas. Os lugares característicos do sistema em malha aberta, por sua vez, permitem que os objetivos conflitantes de estabilidade e desempenho sejam simultaneamente analisados por uma única forma de representação do sistema e, por este motivo, o MLC mostra ser uma abordagem de projeto eficiente para sistemas de controle multivariáveis quando os lugares característicos do sistema em malha aberta são pouco sensíveis a variações na planta. Em Doyle e Stein (1981), Postlethwaite (1982) e Hung e MacFarlane (1982) é mostrado que os lugares característicos do sistema em malha aberta são menos sensíveis a variações na matriz de transferência da planta, quando a matriz de transferência do sistema em malha aberta é normal, uma vez que, neste caso, os módulos dos lugares característicos são iguais aos valores singulares do sistema em malha aberta. Além disso, em Postlethwaite (1982) é comentado que o método de projeto das Cadeias de Nyquist, por ter como uma primeira etapa o projeto de um pré-compensador que diagonaliza, ao máximo, a matriz de transferência da planta então, este procedimento pode ser visto como uma pré-compensação normalizante que reduz a sensibilidade dos lugares característicos do sistema em malha aberta com relação à incertezas modeladas na saída da planta. Porém, para incertezas modeladas na entrada da planta, que sempre estão presentes em todo sistema real (Skogestad et al., 1988; Skogestad e Havre, 1996), não há como garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada pelos Métodos das Cadeias de Nyquist.

Algumas tentativas de contornar o problema de sensibilidade dos lugares característicos foram formuladas (Daniel e Kouvaritakis, 1983; Daniel e Kouvaritakis, 1984; Hung e MacFarlane, 1982). A primeira tentativa (Daniel e Kouvaritakis, 1983; Daniel e Kouvaritakis, 1984) consiste em escrever a matriz de transferência da planta nominal como a soma de uma matriz normal mais um erro obtido na aproximação da matriz de transferência nominal por uma normal, e, em seguida, aplicar o MLC ao modelo da planta aproximado por uma matriz de transferência normal. Dessa forma, supondo que um controlador que comuta perfeitamente com a planta seja

projetado pelo MLC, então é esperado que não haja deterioração da normalidade ao fazer o produto da parte normal da planta com o controlador comutativo. O maior problema com relação a essa técnica é a possibilidade de amplificação da região de incerteza que contém os lugares característicos do sistema em malha aberta, uma vez que agora, além da incerteza da planta, devido geralmente a dinâmicas não-modeladas, há ainda a incerteza causada pela aproximação da planta nominal por uma planta normal. A segunda técnica sugerida, menos direta do que a anterior, deu origem aos chamados controladores normalizantes de molduras reversas (CNMR) (Hung e MacFarlane, 1982; Basilio e Kouvaritakis, 1997b). Essa técnica é baseada nos chamados quase-lugares de Nyquist e não nos lugares característicos da planta, que são os verdadeiros indicadores da estabilidade do sistema em malha fechada. Assim, somente quando uma perfeita normalização é alcançada é que os lugares característicos e os quase-lugares de Nyquist coincidem.

Uma terceira técnica de normalização da matriz de transferência da planta é apresentada em Sahate (1998) e Basilio e Sahate (2000), onde é proposto o projeto de um pré-compensador normalizante para a planta para que, em seguida, seja projetado um controlador pelo MLC para a planta pré-compensada. Porém, o método proposto em Sahate (1998) e Basilio e Sahate (2000) é baseado em um problema de otimização cuja solução depende da solução de equações de graus elevados, mesmo para casos simples.

Nesse trabalho, uma nova técnica de normalização por pré-compensação será proposta (Moreira e Basilio, 2005). O método proposto é baseado no alinhamento das matrizes de direções principais da planta, com solução mais simples do que a obtida em Basilio e Sahate (2000). Assim como o método proposto em Basilio e Sahate (2000), o método aqui apresentado faz restrições na estrutura adotada para o pré-compensador que podem ser, em alguns casos, muito conservadoras. Além disso, esse método leva ao projeto de um pré-compensador dinâmico que torna a planta pré-compensada o mais próximo possível de normal para a faixa de frequências considerada.

Além de ser apresentado o projeto de um pré-compensador normalizante di-

nâmico, uma outra abordagem para o projeto de pré-compensadores normalizantes é apresentada. Esta nova abordagem é baseada no mesmo problema de otimização proposto em Moreira e Basilio (2005), mas não faz tantas restrições quanto à estrutura do pré-compensador como em Moreira e Basilio (2005) e Basilio e Sahate (2000). Contudo, o método proposto leva ao projeto de um pré-compensador estático no lugar de um pré-compensador dinâmico. A motivação para isso vem do fato de que, em muitos casos, a pré-compensação normalizante é importante somente em uma faixa de frequências em torno da frequência de cruzamento (frequências em que os lugares característicos do sistema em malha aberta estão mais próximos do ponto crítico $-1 + j0$) e não em todas as frequências. Uma outra vantagem do pré-compensador normalizante estático é que o problema de otimização proposto tem solução simples, sendo resolvido encontrando-se o menor autovalor de uma matriz simétrica com elementos reais e o correspondente autovetor associado.

Uma vez alcançada a normalização aproximada da matriz de transferência da planta, o próximo passo é então projetar um controlador pelo MLC. O MLC requer que um controlador com as mesmas matrizes de autovetores que a planta seja projetado (controlador comutativo). Contudo, em geral, as funções de autovalores e os elementos das funções de autovetores da planta são expressões irracionais da variável complexa s . Portanto, o controlador comutativo construído como a conexão em série dos sistemas formados pela matriz de autovetores da planta, matriz de autovalores do controlador e a inversa da matriz de autovetores da planta, levam, em geral, a um controlador cujos elementos são expressões irracionais de s . Visando contornar este problema, várias formas de aproximar a matriz de autovetores da planta por uma matriz com coeficientes racionais foram desenvolvidas, dando origem a diferentes técnicas de projeto de controladores comutativos: (i) controladores comutativos aproximados (CCA) (MacFarlane e Kouvaritakis, 1977); (ii) controladores comutativos aproximadamente exatos (CCAЕ) (Cloud e Kouvaritakis, 1987); (iii) controladores comutativos causais (CCC) (Kouvaritakis e Basilio, 1994) e (iv) controladores comutativos racionais (CCR) (Basilio e Kouvaritakis, 1995). Todas essas técnicas buscam uma comutatividade aproximada entre a planta e o controlador

na maior faixa de frequências possível e, portanto, não há garantias de que a comutatividade aproximada não destrua a normalização obtida com o pré-compensador; uma forma de garantir que a normalização não seja destruída é através do projeto de um controlador que comute perfeitamente com a planta em todas as frequências.

Em um trabalho recente (Basilio, 1995), são apresentadas condições para a existência de controladores que estabilizam o sistema em malha fechada e que comutam exatamente com a planta, onde é mostrado que estes controladores sempre existem quando a matriz de transferência da planta é estável. Visando estender este resultado, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade interna de um sistema em malha fechada com um controlador comutativo exato é apresentada em Basilio et al. (2002), onde é mostrado que para quase todas as plantas $G(s)$, exceto possivelmente para um conjunto de medida nula, existem controladores comutativos racionais estabilizantes (CCRE). Além disso, utilizando a parametrização de Youla-Kucera (Youla et al., 1976; Kucera, 1979) e a teoria de bases polinomiais mínimas (Forney, 1975), uma parametrização para todos os CCRE e uma caracterização de todos os graus de liberdade disponíveis nesta parametrização, são apresentadas em Basilio et al. (2002). A obtenção desta parametrização requer o cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial e em Basilio e Moreira (2004) um algoritmo para o cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial é apresentado. Por ser baseado na decomposição por valores singulares de matrizes de convolução, fornece assim, uma maneira numericamente robusta para se obter a parametrização de todos os controladores comutativos racionais estabilizantes.

Apesar de Basilio et al. (2002) apresentar uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes, essas condições não definem uma classe de plantas que podem ser estabilizadas por controladores comutativos. Visando encontrar condições mais simples de serem verificadas a partir da matriz de transferência da planta, uma condição suficiente que garante a existência de controladores comutativos estabilizantes para plantas instáveis é apresentada em Moreira e Basilio (2004) e Moreira et al. (2005). Esta condição

é satisfeita por uma vasta classe de plantas e pode ser verificada a partir de uma análise simples de $G(s)$. Neste trabalho, uma condição necessária e suficiente para a existência de CCRE é apresentada (Moreira et al., 2006). Esta condição é fácil de ser verificada e mostra que realmente, somente em casos muito especiais, não existem CCRE. Além disso, em Basilio et al. (2002), apesar da parametrização ser baseada na obtenção de uma base para o espaço nulo de uma matriz polinomial, a nulidade dessa matriz não é conhecida. Será aqui mostrado (ver também Moreira et al. (2006)), que a nulidade dessa matriz é caracterizada em função do conhecimento dos lugares característicos da matriz de transferência da planta e, portanto, é possível definir exatamente os graus de liberdade disponíveis na parametrização antecipadamente, simplesmente analisando-se os lugares característicos da planta. Em resumo, os resultados apresentados (Basilio e Moreira, 2004; Moreira et al., 2005; Moreira et al., 2006) fornecem todas as informações necessárias para a obtenção da parametrização de todos os CCRE, assim como uma caracterização exata de todos os graus de liberdade disponíveis nesta parametrização, e uma condição necessária e suficiente para a existência dos CCRE. Assim, utilizando esta parametrização, a normalização obtida a partir do pré-compensador normalizante é mantida, fazendo com que objetivos de projeto como estabilidade robusta e desempenho sejam agora alcançados a partir de um posicionamento adequado dos lugares característicos da matriz de transferência do sistema em malha aberta.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 são apresentados alguns conceitos fundamentais para o estudo do Método do Lugar Característico (MLC). Entre os conceitos principais destacam-se: (i) o critério de Nyquist generalizado; (ii) o projeto de um controlador comutativo baseado no MLC e (iii) o problema de sensibilidade do MLC na presença de perturbações no modelo nominal da planta. No capítulo 3, o problema de se projetar um pré-compensador de forma a tornar a matriz de transferência da planta aproximadamente normal é considerado. No capítulo 4 é apresentada uma parametrização para todos os controladores comutativos racionais estabilizantes e uma condição necessária e suficiente para a sua existência. No capítulo 5 são apresentados alguns resultados preliminares visando

obter uma maneira sistemática de posicionar os lugares característicos do sistema em malha aberta de forma a atender vários objetivos de projeto, incluindo o objetivo de estabilidade robusta. Por fim, no capítulo 6, é feito um resumo dos principais resultados apresentados neste trabalho e são propostos trabalhos futuros a serem desenvolvidos. No apêndice A, uma solução numericamente robusta para a identidade de Bezout polinomial generalizada é apresentada. Essa solução foi obtida no decorrer deste trabalho, sendo uma aplicação o algoritmo de cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial. Além disso, caso o estudo aqui realizado seja aplicado a plantas descritas por modelos discretos, a obtenção de uma fatoração duplamente coprima em RH_∞ se resume a obter uma fatoração duplamente coprima no conjunto de matrizes polinomiais (Kucera, 1979). Todos os algoritmos sugeridos neste trabalho foram implementados utilizando-se o Matlab como ferramenta. As operações com matrizes polinomiais foram realizadas utilizando-se a toolbox Polymat (Barcelos, 2005).

Capítulo 2

O Método do Lugar Característico

O objetivo principal deste capítulo é apresentar os conceitos fundamentais para o estudo do Método do Lugar Característico (MLC). Será inicialmente revisado o critério de Nyquist generalizado, que é a base para o MLC e, em seguida, feita uma breve revisão do projeto de um controlador comutativo baseado no MLC. Será ainda considerado o problema de sensibilidade do MLC na presença de perturbações no modelo nominal da planta.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 2.1 o critério de Nyquist generalizado é apresentado. Em seguida, na seção 2.2 são definidos os controladores comutativos, bem como são descritas brevemente algumas técnicas de obtenção destes controladores, sendo dado maior destaque para os controladores comutativos aproximados. Na seção 2.3 o problema de sensibilidade dos lugares característicos é analisado e algumas técnicas para contornar o problema são apresentadas. Finalmente, conclusões são apresentadas na seção 2.4.

2.1 Critério de Nyquist Generalizado

Considere o sistema com realimentação unitária negativa apresentado na figura 2.1, na qual $G(s)$ e $K(s)$ são, respectivamente, as matrizes de transferência quadradas da planta e do controlador, ambas $m \times m$. Desta forma, a matriz de transferência do sistema em malha aberta $T_o(s)$ é definida como:

$$T_o(s) = G(s)K(s). \quad (2.1)$$

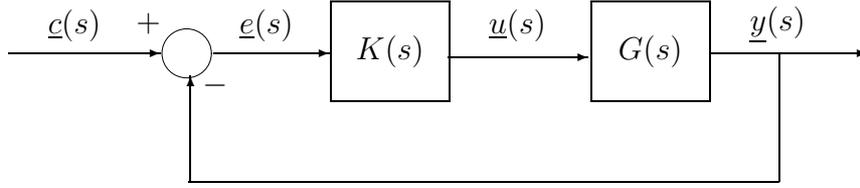


Figura 2.1: Sistema multivariável com realimentação unitária negativa.

Define-se ainda a matriz de transferência diferença de retorno como:

$$F(s) = I + G(s)K(s). \quad (2.2)$$

A partir da equação (2.2) pode-se mostrar que (MacFarlane e Postlethwaite, 1977)

$$\det[F(s)] = \alpha \frac{p_c(s)}{p_o(s)}, \quad (2.3)$$

onde $\det[\cdot]$ denota o determinante de uma matriz, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p_c(s)$ é o polinômio característico do sistema em malha fechada e $p_o(s)$ é o polinômio característico do sistema em malha aberta. Portanto, é imediato perceber que, para generalizar o critério de estabilidade de Nyquist para sistemas multivariáveis, basta utilizar o princípio dos argumentos no determinante de $F(s)$. Por conveniência, o princípio dos argumentos é apresentado a seguir.

Lema 2.1 (Princípio dos Argumentos)

Seja \mathcal{C} um contorno simples fechado no plano complexo e $w = f(z)$ uma função da variável complexa z analítica no contorno \mathcal{C} e no interior de \mathcal{C} exceto em um número finito de pólos. Sejam Z e P , o número de zeros e pólos, respectivamente, da função $f(z)$ contidos no interior do contorno \mathcal{C} e $\Delta_c \arg[f(z)]$ a variação da fase de $f(z)$ quando z completa uma volta sobre o contorno \mathcal{C} em sentido horário. Então

$$\Delta_c \arg[f(z)] = 2\pi(Z - P) \quad (2.4)$$

□

O princípio dos argumentos, quando aplicado ao determinante de $F(s)$, leva a uma maneira gráfica de verificar a estabilidade de sistemas multivariáveis. Escolhendo-se o contorno \mathcal{C} como o contorno clássico D e denotando por n_c e n_o o número de

pólos instáveis do sistema em malha fechada e em malha aberta, respectivamente, então o princípio dos argumentos estabelece que o número de envoltimentos da origem, em sentido anti-horário, n_F , feito pelo determinante de $F(s)$, à medida que s caminha uma vez sobre o contorno clássico D em sentido horário, é $n_F = n_c - n_o$. Como, para a estabilidade do sistema em malha fechada, todos os pólos devem estar no semi-plano da esquerda do plano complexo s , então n_c deve ser igual a zero. Logo, o seguinte critério para a estabilidade de sistemas multivariáveis pode ser enunciado.

Teorema 2.1 (Critério de Nyquist Generalizado) Suponha que $G(s)$ e $K(s)$ não possuam modos instáveis não-controláveis e/ou não-observáveis. Então, o sistema da figura 2.1 é estável, se e somente se o número de envoltimentos da origem pelo diagrama de Nyquist de $\det[F(s)]$, em sentido anti-horário, é igual ao número de zeros instáveis do polinômio característico em malha aberta, $p_o(s)$. \square

Apesar do teorema 2.1 ser uma importante generalização do critério de Nyquist para sistemas multivariáveis, a forma como é estabelecido não deixa claro como manipular $K(s)$ de tal sorte que o determinante de $F(s)$ seja tal que satisfaça o critério de Nyquist generalizado. Assim, é necessário obter uma nova formulação para o teorema 2.1. Para tanto, é importante, inicialmente, definir os lugares característicos de uma matriz racional (MacFarlane e Postlethwaite, 1977).

2.1.1 Lugares característicos

Seja $G(s)$ uma matriz $m \times m$ cujos elementos são funções racionais da variável complexa s . Para todo $s = s_0$ ($s_0 \in \mathbb{C}$), tem-se que $G(s_0)$ será uma matriz com elementos complexos e terá autovalores $\{\lambda_{g_i}(s_0) : i = 1, 2, \dots, m\}$ que formam um conjunto de números complexos. Portanto, as funções de autovalores de $G(s)$ são também funções da variável complexa s .

Considere agora, a equação característica:

$$\Delta(\lambda_g, s) = \det[\lambda_g(s)I - G(s)] = 0. \quad (2.5)$$

É fácil verificar que o polinômio em λ_g , $\Delta(\lambda_g, s)$, não pode ser, em geral, expresso como o produto de fatores lineares em λ_g , isto é, em geral, $\Delta(\lambda_g, s)$ não pode ser

expresso como

$$\Delta(\lambda_g, s) = \prod_{i=1}^m [\lambda_g(s) - \lambda_{g_i}(s)], \quad (2.6)$$

onde $\lambda_{g_i}(s)$ é uma função racional em s . Logo, a matriz $G(s)$ não terá necessariamente funções de autovalores racionais em s .

Em geral, $\Delta(\lambda_g, s)$ pode ser reduzido à seguinte forma:

$$\Delta(\lambda_g, s) = \Delta_1(\lambda_g, s) \Delta_2(\lambda_g, s) \dots \Delta_k(\lambda_g, s) \quad (2.7)$$

onde os fatores $\{\Delta_i(\lambda_g, s) : i = 1, 2, \dots, k\}$ são polinômios que são irredutíveis sobre o corpo das funções racionais de s . Suponha que os fatores irredutíveis $\Delta_i(\lambda_g, s)$ têm a forma

$$\Delta_i(\lambda_g, s) = \hat{\lambda}_{g_i}^{\delta_i} + a_{i1}(s) \hat{\lambda}_{g_i}^{\delta_i-1} + \dots + a_{i\delta_i}(s), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.8)$$

onde δ_i é o grau do i -ésimo polinômio irredutível e os coeficientes $\{a_{ij}(s) : i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, \delta_i\}$ são funções racionais em s . A notação $\hat{\lambda}_g$ é utilizada para diferenciar esta função das funções de autovalores λ_g .

Note que se $b_{i0}(s)$ é o mínimo múltiplo comum de todos os denominadores dos coeficientes $\{a_{ij}(s) : j = 1, \dots, \delta_i\}$, então é possível reescrever a equação (2.8) da seguinte forma:

$$b_{i0}(s) \hat{\lambda}_{g_i}^{\delta_i} + b_{i1}(s) \hat{\lambda}_{g_i}^{\delta_i-1} + \dots + b_{i\delta_i}(s) = 0, \quad (2.9)$$

onde, agora, os coeficientes $b_{ij}(s)$ para $j = 0, 1, \dots, \delta_i$ são polinômios em s . A função de uma variável complexa $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$, obtida resolvendo-se a equação (2.9), é chamada de função algébrica (Bliss, 1966). As funções características de $G(s)$ são definidas como o conjunto das funções algébricas $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ para $i = 1, \dots, k$. Note que cada função característica $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ é definida por uma equação irredutível da forma apresentada na equação (2.9) e, portanto, para cada valor de $s \in \mathbb{C}$ tal que $b_{i0}(s) \neq 0$, $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ tem δ_i valores distintos. Desta forma, esses δ_i valores formam funções analíticas localmente distintas chamadas ramos de $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ (isto ocorre em quase todos os pontos, exceto nos chamados pontos de ramificação, que são os pontos onde alguns ramos tornam-se iguais). Logo, para cada valor de s tem-se vários valores para $\hat{\lambda}_{g_i}$ e não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o domínio, plano- s , e o

plano complexo \mathbb{C} . Para contornar este problema, pode-se imaginar que cada valor de s não é um único ponto no plano complexo \mathbb{C} , mas δ_i pontos, um sobre o outro, sendo que cada um pertence a uma cópia do plano complexo \mathbb{C} , chamada folha de Riemann e que será denotada por \mathbf{R}_{ij} , $j = 1, \dots, \delta_i$.

Para identificar as folhas de Riemann, \mathbf{R}_{ij} , é necessário calcular os δ_i valores de $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ para cada valor de s , e separar esses valores de maneira a formar δ_i funções contínuas. Essas funções contínuas são as funções de autovalores de $G(s)$, $\lambda_g(s)$. Note que, uma vez que os pontos de ramificação são pontos em que alguns ramos possuem o mesmo valor, então estes pontos pertencem a mais de uma folha de Riemann. Estes pontos de ramificação podem ser ligados através de segmentos de reta chamados de cortes de ramificação. Esses cortes de ramificação ligam as δ_i folhas de Riemann \mathbf{R}_{ij} , formando a superfície de Riemann, \mathbf{S}_i , que pode ser utilizada como o domínio de definição de $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ e, portanto, agora existe uma correspondência biunívoca entre a superfície de Riemann \mathbf{S}_i e o plano complexo \mathbb{C} . Além disso, é possível garantir que ao se percorrer um caminho fechado na superfície de Riemann, se obtém um caminho fechado no plano complexo. A seguir, uma importante definição para a reformulação do critério de estabilidade apresentado no teorema 2.1 é enunciada.

Definição 2.1 Suponha que a cada função característica $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ esteja associada uma superfície de Riemann, \mathbf{S}_i , para $i = 1, \dots, k$ e suponha que há δ_i cópias do contorno D em cada uma das folhas de Riemann, a partir das quais \mathbf{S}_i , para $i = 1, \dots, k$, são formadas. Quando s caminha ao longo do contorno D , em sentido horário, percorrendo um caminho fechado na superfície de Riemann \mathbf{S}_i , uma curva fechada em \mathbb{C} , \mathbf{C}_i , é traçada para a função característica $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$. As curvas \mathbf{C}_i , $i = 1, \dots, k$, são contínuas e são definidas como os lugares característicos de $G(s)$.

□

Observação 2.1 Quando as funções de autovalores de $G(s)$ são irracionais, deve-se passar de uma folha de Riemann a outra nos pontos de ramificação para que o gráfico polar resultante dos lugares característicos sejam formados por contornos fechados. Desta forma, o diagrama polar resultante dos lugares característicos de $G(s)$ serão

formados por $k \leq m$ contornos fechados. □

2.1.2 Direções características

Correspondendo a cada função característica $\hat{\lambda}_o(s)$ da matriz de transferência do sistema em malha aberta, $T_o(s)$, tem-se uma função vetorial da variável complexa s , $\underline{\hat{w}}(s)$, cujos elementos são funções algébricas e têm como domínio a mesma superfície de Riemann que as funções características. É possível mostrar que em quase todos os pontos do plano complexo, exceto nos pontos de ramificação, para cada função de autovalor $\lambda_{o_i}(s)$ da função de transferência em malha aberta está associada uma função de autovetor $\underline{w}_i(s)$ para $i = 1, \dots, m$. Portanto, tem-se que:

$$T_o(s) \begin{bmatrix} \underline{w}_1(s) & \underline{w}_2(s) & \dots & \underline{w}_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1(s) & \underline{w}_2(s) & \dots & \underline{w}_m(s) \end{bmatrix} \Lambda_o(s), \quad (2.10)$$

onde $\Lambda_o(s) = \text{diag}\{\lambda_{o_i}(s), i = 1, \dots, m\}$. Desta forma, a seguinte decomposição por valores característicos de $T_o(s)$ é obtida:

$$T_o(s) = W(s)\Lambda_o(s)V(s), \quad (2.11)$$

onde $W(s) = \begin{bmatrix} \underline{w}_1(s) & \underline{w}_2(s) & \dots & \underline{w}_m(s) \end{bmatrix}$ é uma matriz formada pelas funções de autovetores de $T_o(s)$ e $V(s) = W^{-1}(s)$. Os vetores $\underline{w}_i(s)$ são denominados direções características de $T_o(s)$.

2.1.3 Critério de Nyquist generalizado

A partir da decomposição por valores característicos de $T_o(s)$, é possível estabelecer um critério para a estabilidade de sistemas multivariáveis equivalente ao apresentado no teorema 2.1. Para tanto, note que, utilizando a equação (2.11), $F(s)$ pode ser reescrita como:

$$F(s) = I + T_o(s) = I + W(s)\Lambda_o(s)V(s) \quad (2.12)$$

$$= W(s) [I + \Lambda_o(s)] V(s). \quad (2.13)$$

Note, ainda, que se $\underline{w}_i(s)$ é uma função de autovetor de $T_o(s)$, então também é uma função de autovetor de $F(s)$ e que as funções de autovalores de $T_o(s)$, $\lambda_{o_i}(s)$, e de

$F(s)$, $\lambda_{f_i}(s)$, estão relacionadas da seguinte forma:

$$\lambda_{f_i}(s) = \lambda_{o_i}(s) + 1. \quad (2.14)$$

De acordo com o teorema 2.1, a estabilidade do sistema em malha fechada depende do diagrama de Nyquist de $\det[F(s)]$. Porém, é fácil verificar, a partir das propriedades dos determinantes e da equação (2.14), que

$$\det[F(s)] = \prod_{i=1}^m \lambda_{f_i}(s) = \prod_{i=1}^m [\lambda_{o_i}(s) + 1]. \quad (2.15)$$

A aplicação direta do lema 2.1, utilizando a definição 2.1 e a equação (2.15), leva ao seguinte resultado.

Teorema 2.2 (MacFarlane e Postlethwaite, 1977) Suponha que o sistema realimentado da figura 2.1 não tenha modos não-controláveis e/ou não-observáveis com parte real positiva em malha aberta. Então, o sistema realimentado da figura 2.1 é estável se e somente se a soma dos envoltimentos do ponto crítico $-1 + j0$, em sentido anti-horário, feitos pelos lugares característicos de $T_o(s)$, é igual ao número de pólos instáveis de $G(s)$ e $K(s)$. \square

Uma prova alternativa para o teorema 2.2 é apresentada em Desoer e Wang (1980), onde não é utilizada a teoria de funções algébricas, cortes de ramificação ou superfícies de Riemann. Utilizando o fato de que funções de autovalores são funções contínuas de s , é mostrado em Desoer e Wang (1980), que à medida que s percorre o contorno de Nyquist clássico, os autovalores da matriz do sistema em malha aberta percorrem $k \leq m$ caminhos fechados. Portanto, para a obtenção dos lugares característicos de $T_o(s)$ na prática é sugerido o seguinte procedimento: (i) selecione um número finito de frequências ω_l , $l = 1, \dots, p$; (ii) para cada frequência ω_l , $l = 1, \dots, p$, calcule os autovalores $\lambda_{o_i}(j\omega_l)$, $i = 1, \dots, m$ de $T_o(j\omega_l)$; (iii) ordene os autovalores frequência a frequência de forma a traçar curvas suaves fechadas.

2.2 Controladores Comutativos

Os lugares característicos do sistema em malha aberta, além de fornecerem informação com relação à estabilidade do sistema realimentado, fornecem também, supondo

que algumas condições sejam satisfeitas (essas condições serão discutidas em maiores detalhes na seção 2.3), informação sobre o desempenho do sistema em malha fechada, ou seja, uma especificação de desempenho do sistema realimentado dada no domínio do tempo pode ser traduzida em um adequado posicionamento dos lugares característicos de $T_o(s)$. Desta forma, um problema de controle interessante é a obtenção de um controlador $K(s)$, que seja capaz de posicionar os lugares característicos de $T_o(s) = G(s)K(s)$, de forma a satisfazer especificações de desempenho desejadas do sistema em malha fechada. Contudo, a principal dificuldade de projetar o controlador está em escolher uma forma apropriada para a matriz de transferência de $K(s)$, uma vez que, em geral, não existe relação entre os autovalores e autovetores do produto de matrizes e os autovalores e autovetores das matrizes que compõem o produto. Uma exceção a este fato ocorre quando as matrizes comutam em relação à multiplicação, isto é,

$$G(s)K(s) = K(s)G(s). \quad (2.16)$$

Neste caso, $G(s)$ e $K(s)$ compartilham as mesmas funções de autovetores e, conseqüentemente, as funções de autovalores de $T_o(s)$ são iguais ao produto das funções de autovalores de $G(s)$ e $K(s)$. Para visualizar este fato, considere as seguintes decomposições por valores característicos da planta e do controlador:

$$G(s) = W(s)\Lambda_G(s)V(s) \text{ e } K(s) = W(s)\Lambda_K(s)V(s), \quad (2.17)$$

onde $\Lambda_G(s) = \text{diag}\{\lambda_{g_i}(s), i = 1, \dots, m\}$ e $\Lambda_K(s) = \text{diag}\{\lambda_{k_i}(s), i = 1, \dots, m\}$, com $\lambda_{g_i}(s)$ e $\lambda_{k_i}(s)$ denotando as funções de autovalores de $G(s)$ e $K(s)$, respectivamente. Portanto, a matriz de transferência em malha aberta é dada por:

$$T_o(s) = W(s)\Lambda_G(s)V(s)W(s)\Lambda_K(s)V(s) = W(s)\Lambda_G(s)\Lambda_K(s)V(s). \quad (2.18)$$

O controlador $K(s)$ definido de acordo com a equação (2.17) é denominado controlador comutativo (MacFarlane e Belletruti, 1973) e o seu projeto consiste em fazer com que as suas funções de autovetores sejam iguais às da planta e as suas funções de autovalores sejam escolhidas de forma a satisfazer o critério de estabilidade de Nyquist generalizado (teorema 2.2) e os objetivos de projeto desejados.

Apesar de reduzir o problema de projetar um sistema de controle multivariável ao projeto de vários sistemas monovariáveis a partir da manipulação dos lugares característicos da matriz de transferência em malha aberta $T_o(s)$, em geral, o controlador comutativo é de difícil implementação devido à sua complexidade e à possibilidade da presença de expressões irracionais de s nas funções de autovetores de $G(s)$. Para contornar este problema, várias formas de aproximar a matriz de autovetor, $W(s)$, e a sua inversa, $V(s)$, por matrizes racionais foram desenvolvidas: (i) controladores comutativos aproximados (CCA) (MacFarlane e Kouvaritakis, 1977); (ii) controladores comutativos aproximadamente exatos (CCAЕ) (Cloud e Kouvaritakis, 1987); (iii) controladores comutativos causais (CCC) (Kouvaritakis e Basilio, 1994) e (iv) controladores comutativos racionais (CCR) (Basilio e Kouvaritakis, 1995).

Neste trabalho, apesar dos outros métodos formulados para aproximar as matrizes de autovetores $W(s)$ e $V(s)$ por matrizes racionais levarem a uma melhor comutatividade entre a planta e o controlador, será revisto o projeto dos controladores comutativos aproximados. Isto se deve ao fato do projeto do controlador comutativo aproximado fornecer uma maneira sistemática de escolha dos lugares característicos do sistema em malha aberta $G(s)K(s)$, de forma a satisfazer vários requisitos de desempenho do sistema. Além disso, o método utiliza o algoritmo ALIGN que serve como base para alguns resultados que serão apresentados neste trabalho.

2.2.1 Controladores Comutativos Aproximados

O problema de aproximar as matrizes de autovetores da planta $G(s)$ por matrizes polinomiais foi inicialmente abordado por MacFarlane e Kouvaritakis (1977). A essência desse trabalho inicial é aproximar as matrizes $W(s)$ e $V(s)$ por matrizes polinomiais de grau zero, W_R e V_R , respectivamente, em uma dada frequência ω_0 . Como as matrizes W_R e V_R são aproximações das matrizes $W(j\omega_0)$ e $V(j\omega_0)$, então estes controladores garantem uma comutatividade aproximada somente para frequências em torno de ω_0 . Por essa razão, esses controladores foram denominados

controladores comutativos aproximados (CCA). A estrutura para os controladores comutativos aproximados é dada por:

$$K(s) = W_R \Lambda_K(s) V_R, \quad (2.19)$$

onde $W_R, V_R \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

A principal vantagem do controlador comutativo aproximado é que ele é de fácil implementação. Além disso, os controladores obtidos são de ordem baixa, e as funções de autovalores do controlador podem ser projetadas através de técnicas clássicas de projeto de sistemas de controle monovariáveis como, por exemplo, controladores PID e controladores por avanço/atraso de fase.

O cálculo de W_R e V_R é feito através de um algoritmo simples denominado ALIGN (MacFarlane e Kouvaritakis, 1977), baseado no seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{w}_{R_i} \in \mathbb{R}^m} \Phi_i(\underline{w}_{R_i}),$$

onde

$$\Phi_i(\underline{w}_{R_i}) = \sum_{j=1, j \neq i}^m \frac{|\langle \underline{v}_j(j\omega_0), \underline{w}_{R_i} \rangle|^2}{|\langle \underline{v}_i(j\omega_0), \underline{w}_{R_i} \rangle|^2}, \quad (2.20)$$

onde \underline{w}_{R_i} é a i -ésima coluna de W_R , \underline{v}_j^t representa a j -ésima linha de $V(j\omega_0)$ e $\langle \dots \rangle$ denota o produto interno em \mathbb{C}^m . A minimização da função custo $\Phi_i(\underline{w}_{R_i})$, dada pela equação (2.20), tem por objetivo reduzir o desalinhamento entre o vetor \underline{w}_{R_i} e o autovetor \underline{w}_i (i -ésima coluna da matriz de autovetores $W(j\omega_0)$). É fácil verificar que se \underline{w}_{R_i} é igual a \underline{w}_i , então o produto $V(j\omega_0)\underline{w}_{R_i} = \underline{e}_i$, onde \underline{e}_i é a i -ésima coluna da matriz identidade de ordem m . Logo, se \underline{w}_{R_i} é aproximadamente igual a \underline{w}_i , então

$$V(j\omega_0)\underline{w}_{R_i} = [\epsilon_1 \ \dots \ \epsilon_{i-1} \ \epsilon_i \ \epsilon_{i+1} \ \dots \ \epsilon_m]^t. \quad (2.21)$$

onde $\epsilon_j = \underline{v}_j^t \underline{w}_{R_i}$ para $j \neq i$ é um valor pequeno. É possível mostrar que minimizar $\Phi_i(\underline{w}_{R_i})$ é equivalente a minimizar a razão entre a soma dos quadrados dos módulos de ϵ_j , $j = 1, \dots, m$, $j \neq i$, e o quadrado do módulo de ϵ_i . Isto significa que, quanto menor a razão apresentada em (2.20), melhor é o alinhamento entre \underline{w}_{R_i} e \underline{w}_i .

Seja $\underline{v}_i(j\omega_0) = \underline{a}_i + j\underline{b}_i$, onde $\underline{a}_i, \underline{b}_i \in \mathbb{R}^m$ e defina $C_i = \underline{a}_i \underline{a}_i^t + \underline{b}_i \underline{b}_i^t$ e $D_i = \sum_{j=1, j \neq i}^m \underline{a}_j \underline{a}_j^t + \underline{b}_j \underline{b}_j^t$. Então, pode-se mostrar que, quando D_i é positiva definida,

tem-se que:

$$(D_i^{-1}C_i) \underline{w}_{R_i} = \frac{1}{\Phi_i} \underline{w}_{R_i}, \quad (2.22)$$

o que mostra que o vetor \underline{w}_{R_i} que minimiza o custo dado pela equação (2.20) é o autovetor de $D_i^{-1}C_i$, correspondente ao maior autovalor.

Aplicando o algoritmo ALIGN repetidas vezes para $i = 1, 2, \dots, m$, obtém-se uma aproximação para a matriz de autovetores $W(j\omega_0)$, $W_R = [\underline{w}_{R_1} \ \underline{w}_{R_2} \ \dots \ \underline{w}_{R_m}]$. O mesmo algoritmo pode ser utilizado para a obtenção de uma aproximação $V_R \in \mathbb{R}$ para a matriz $V(j\omega_0)$.

Uma vez obtidas as matrizes W_R e V_R , o próximo passo para a obtenção do controlador comutativo aproximado é o projeto da matriz diagonal $\Lambda_K(s)$. De acordo com o método do lugar característico, a matriz $\Lambda_K(s)$ deve ser escolhida de forma que o sistema em malha fechada seja estável, com boas margens de estabilidade relativas e que atenda adequadamente os requisitos de rastreamento do sinal de referência e baixa interação entre entradas e saídas, ou seja, somente o k -ésimo sinal de saída $y_k(s)$ responda à entrada de referência $c_k(s)$, enquanto que as demais saídas, $y_i(s)$ para $i = 1, \dots, m$ e $i \neq k$, permanecem suficientemente pequenas.

Como a comutatividade entre a planta $G(s)$ e o controlador comutativo aproximado dado pela equação (2.19), $K(s)$, somente pode ser garantida em uma determinada faixa de freqüências em torno de uma dada freqüência ω_0 , então o projeto do controlador pode ser feito, de forma sistemática, dividindo o problema em três etapas, sendo que cada uma corresponde a uma faixa de freqüências:

1. Para um adequado rastreamento do sinal de referência e, conseqüentemente, haver baixa interação entre entradas e saídas do sistema em malha fechada, os ganhos característicos devem ser suficientemente elevados. Porém, ganhos elevados somente são viáveis em baixas freqüências, uma vez que, para as altas freqüências, ganhos elevados normalmente levam à amplificação de ruídos e também à possibilidade de saturação de atuadores durante o regime transitório. Com relação à estabilidade do sistema realimentado, ganhos elevados em altas freqüências são um empecilho para que o critério de Nyquist generaliza-

do seja satisfeito. Assim sendo, uma forma alternativa de reduzir a interação nas altas frequências é reduzir o desalinhamento existente entre as colunas de $G(s)K(s)$ e as colunas da matriz identidade, em uma determinada frequência elevada ω_h . Isto é feito utilizando-se o algoritmo ALIGN para projetar um pré-compensador estático K_h que se aproxima da matriz $G^{-1}(j\omega)$ na frequência $\omega = \omega_h$.

2. Nas frequências intermediárias, é necessário introduzir uma compensação de ganho/fase para melhorar as margens de estabilidade da planta compensada $G(s)K_h$. Novamente o algoritmo ALIGN é utilizado para gerar aproximações reais, W_{R_m} e V_{R_m} para as matrizes de autovetores de $G(j\omega)K_h$, em uma determinada frequência intermediária $\omega = \omega_m$. Em seguida, para as funções de autovalores do controlador intermediário, $\lambda_{k_i}(s)$, são escolhidos compensadores por avanço/atraso de fase de forma que o controlador intermediário, $K_m(s)$, tenha a seguinte estrutura:

$$K_m(s) = W_{R_m} \Lambda_{K_m}(s) V_{R_m}, \quad (2.23)$$

onde $\Lambda_{K_m}(s) = \text{diag}\{\lambda_{k_i}(s), i = 1, \dots, m\}$.

3. Nas baixas frequências o objetivo é melhorar a precisão em regime permanente. Isto pode ser obtido utilizando-se um controlador PI. Desta forma, nas baixas frequências, o problema reduz-se a projetar o controlador

$$K_l(s) = \frac{\alpha}{s} K_l + I_m, \quad (2.24)$$

onde α é uma constante escolhida para se obter uma transição suave entre as frequências médias e baixas e

$$K_l = W_{R_l} \Lambda_{K_l} V_{R_l}, \quad (2.25)$$

com $W_{R_l}, V_{R_l} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sendo aproximações das matrizes de autovetores de $G(j\omega)K_h K_m(j\omega)$, para $\omega = \omega_l$ e $\Lambda_{K_l} = \text{diag}\{\hat{\lambda}_{k_i}, i = 1, \dots, m\}$, onde $\hat{\lambda}_{k_i}$ são constantes reais escolhidas para amplificar/balancear o módulo dos lugares característicos na frequência ω_l .

Portanto, o controlador a ser implementado será:

$$K(s) = K_h K_m(s) K_l(s), \quad (2.26)$$

onde K_h , $K_m(s)$ e $K_l(s)$ são calculados seguindo os passos de 1 a 3 acima.

2.3 Sensibilidade dos lugares característicos

O método do lugar característico, de acordo com a seção 2.2, está fundamentado no critério de estabilidade de Nyquist generalizado. Este critério de estabilidade tem como base os lugares característicos da matriz de transferência do sistema em malha aberta, sendo o projeto do controlador comutativo feito de forma que o sistema realimentado seja estável e satisfaça os seguintes objetivos de projeto: rastreamento assintótico, rejeição de sinais externos de perturbação, boas margens de estabilidade relativas e baixa interação entre entradas e saídas. Porém, em situações práticas, o modelo da planta não é conhecido exatamente e a matriz de transferência da planta nominal representa apenas uma aproximação para a planta real. Além disso, incertezas podem surgir devido a dinâmicas não modeladas, características desconhecidas de atuadores, etc. Portanto, um método de projeto de um sistema de controle realimentado, para ser confiável do ponto de vista de robustez, deve ser tal que o sistema em malha fechada permaneça estável mesmo com perturbações no modelo da planta nominal. Na subseção a seguir, são apresentados os modelos de incertezas não-estruturadas mais comumente utilizados para descrever plantas sujeitas a algum tipo de perturbação nos seus parâmetros. Além disso, as relações entre esses modelos são apresentadas.

2.3.1 Representações de incertezas não-estruturadas

Seja $G(s)$ a matriz de transferência da planta nominal (suposta conhecida) e seja $G_p(s)$ o modelo da planta com perturbação (desconhecido por hipótese). As representações de incertezas mais utilizadas para relacionar $G(s)$ e $G_p(s)$ são as seguintes:

(i) Incerteza aditiva:

$$G_p(s) = G(s) + \Delta_a(s), \quad (2.27)$$

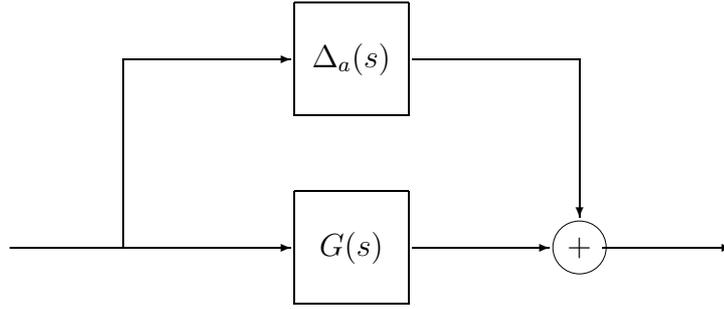


Figura 2.2: Planta nominal $G(s)$ com perturbação aditiva $\Delta_a(s)$.

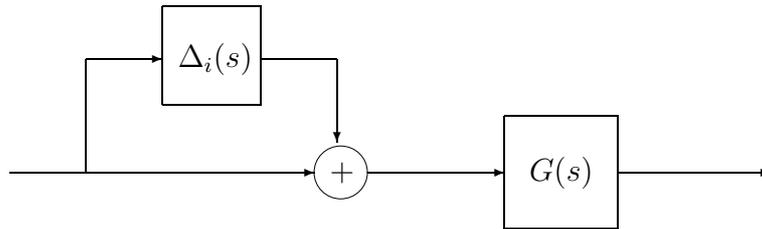


Figura 2.3: Planta nominal $G(s)$ com perturbação multiplicativa na entrada da planta, $\Delta_i(s)$.

onde Δ_a representa a perturbação aditiva como mostrado na figura 2.2.

(ii) Incerteza multiplicativa na entrada da planta:

$$G_p(s) = G(s) [I + \Delta_i(s)], \quad (2.28)$$

onde Δ_i representa a perturbação multiplicativa como mostrado na figura 2.3.

(iii) Incerteza multiplicativa na saída da planta:

$$G_p(s) = [I + \Delta_o(s)] G(s), \quad (2.29)$$

onde Δ_o representa a perturbação multiplicativa como mostrado na figura 2.4.

As únicas restrições usualmente impostas a esses modelos são: (i) a magnitude da perturbação Δ , que pode ser medida frequência a frequência, utilizando para tanto o maior valor singular de Δ , $\bar{\sigma}[\Delta(j\omega)]$, ou pode ser medida pela norma infinito de Δ , $\|\Delta\|_\infty$; (ii) $G(s)$ e $G_p(s)$ devem ter o mesmo número de pólos instáveis.

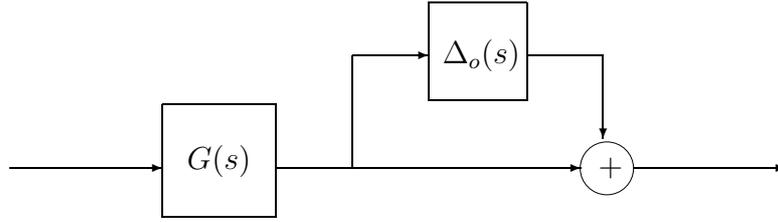


Figura 2.4: Planta nominal $G(s)$ com perturbação multiplicativa na saída da planta, $\Delta_o(s)$.

Os modelos de incerteza multiplicativa são, em geral, mais realistas do que os modelos de incerteza aditiva, uma vez que $\|\Delta_i\|_\infty$ e $\|\Delta_o\|_\infty$ representam valores relativos, enquanto que $\|\Delta_a\|_\infty$ representa um valor absoluto (Maciejowski, 1989). Uma outra vantagem dos modelos de incerteza multiplicativa é que a mesma representação para a incerteza da planta nominal $G(s)$ pode ser utilizada para a função de transferência do sistema compensado em malha aberta $G(s)K(s)$ (Doyle e Stein, 1981; Zhou et al., 1996).

É importante ressaltar também que é necessário utilizar tanto o modelo de incerteza multiplicativa na entrada quanto na saída da planta, uma vez que a multiplicação de matrizes é não-comutativa.

Um aspecto importante envolvendo incertezas multiplicativas é que apesar de ser possível referenciar uma perturbação multiplicativa na entrada da planta à saída e vice-versa, essas perturbações podem possuir magnitudes (medidas pelos maiores valores singulares das matrizes de perturbação) muito diferentes. Para tanto, denote por Δ_i^o a perturbação multiplicativa na entrada da planta referenciada à sua saída. Então,

$$(I + \Delta_i^o)G = G(I + \Delta_i) \Rightarrow \Delta_i^o G = G \Delta_i. \quad (2.30)$$

Supondo que G seja invertível, tem-se que

$$\Delta_i^o = G \Delta_i G^{-1} \text{ e } \Delta_i = G^{-1} \Delta_i^o G. \quad (2.31)$$

A partir das equações (2.31), pode-se verificar que

$$\bar{\sigma}[\Delta_i^o] \leq \bar{\sigma}[G]\bar{\sigma}[\Delta_i]\bar{\sigma}[G^{-1}] = \mathcal{C}[G]\bar{\sigma}[\Delta_i], \quad (2.32)$$

e que

$$\bar{\sigma}[\Delta_i] \leq \bar{\sigma}[G^{-1}]\bar{\sigma}[\Delta_i^o]\bar{\sigma}[G] = \mathcal{C}[G]\bar{\sigma}[\Delta_i^o], \quad (2.33)$$

onde

$$\mathcal{C}[G] = \bar{\sigma}[G]\bar{\sigma}[G^{-1}] \quad (2.34)$$

denota o número de condicionamento de G . Portanto,

$$\frac{\bar{\sigma}[\Delta_i]}{\mathcal{C}[G]} \leq \bar{\sigma}[\Delta_i^o] \leq \mathcal{C}[G]\bar{\sigma}[\Delta_i], \quad (2.35)$$

o que mostra que se a planta $G(s)$ possui número de condicionamento elevado para algum $s = j\omega_0$, então é possível que haja uma amplificação na magnitude da perturbação $\Delta_i^o(j\omega_0)$ com relação à magnitude da perturbação na entrada da planta $\Delta_i(j\omega_0)$.

O número de condicionamento da matriz G elevado também está relacionado a dificuldades em controlar essas plantas (Skogestad e Morari, 1987; Skogestad et al., 1988; Skogestad e Havre, 1996). Isto ocorre porque plantas cujas matrizes de transferência são mal-condicionadas são fortemente dependentes das direções aplicadas em sua entrada, que podem variar muito quando modelos com incertezas multiplicativas na entrada da planta são utilizados, podendo levar a um desempenho ruim do sistema realimentado, ou mesmo à sua instabilidade. Em Skogestad e Havre (1996) é mostrado que o desempenho robusto, medido pelo maior valor singular da função de sensibilidade do sistema com perturbação, é pouco alterado quando modelos com incertezas multiplicativas na saída são utilizados na modelagem da planta. Porém, para incertezas na entrada da planta e supondo a planta mal-condicionada, o desempenho robusto pode ser muito deteriorado. Este efeito pode ser, em parte, explicado pela desigualdade (2.35). Note que se $\mathcal{C}[G]$ é aproximadamente igual a 1, ou seja, se G não é mal-condicionada, então $\bar{\sigma}[\Delta_i^o] \approx \bar{\sigma}[\Delta_i]$. Dessa forma, como o desempenho robusto é pouco alterado para incertezas na saída da planta e a incerteza na entrada da planta pode ser referenciada à sua saída sem alteração na sua

magnitude, então é esperado que o desempenho robusto não seja também deteriorado por incertezas de pequena magnitude na entrada da planta. Porém, o mesmo não pode ser afirmado quando $\mathcal{C}[G]$ é elevado.

É importante ressaltar ainda que, em alguns casos, não é apropriado referir todas as incertezas para a entrada ou para a saída da planta. Quando isto ocorre, é necessário considerar o modelo de incerteza aditiva, ou, por exemplo, o modelo de incerteza multiplicativa dado por:

$$G_p(s) = [I + \Delta_o(s)] G(s) [I + \Delta_i(s)]. \quad (2.36)$$

Para a planta com perturbação descrita pela equação (2.36), é possível obter um sistema compensado equivalente em malha fechada na qual a perturbação passa a ter uma estrutura bloco-diagonal. Como a estrutura para a incerteza é definida, então essas incertezas são denominadas estruturadas (Doyle, 1982). Incertezas estruturadas também podem surgir considerando-se uma forma específica para as matrizes de perturbação Δ_i ou Δ_o . Em Skogestad et al. (1988) e Skogestad e Havre (1996) é afirmado que incertezas diagonais na entrada e na saída da planta estão sempre presentes em todo sistema real devido a características desconhecidas nos atuadores e imperfeições nos dispositivos de medição, respectivamente. Porém, neste trabalho, somente incertezas não-estruturadas serão consideradas, uma vez que se deseja uma representação da incerteza que leve em consideração também dinâmicas não-modeladas da planta, que não possuem necessariamente uma forma diagonal.

Observação 2.2 Outras formas de considerar incertezas na matriz de transferência da planta podem ser encontradas na literatura. Essas formas estão relacionadas a um conhecimento prévio do tipo de perturbação existente no modelo nominal da planta e, por isso, essas incertezas são denominadas estruturadas. As abordagens presentes na literatura para considerar esse tipo de incerteza podem ser basicamente classificadas como: (i) polinomial (Bhattacharyya et al., 1995); (ii) por espaço de estados ou de Lyapunov (Oliveira e Peres, 2006; Yedavalli, 1985; Barmish, 1985); (iii) pela síntese de controladores μ (Doyle, 1982; Zhou et al., 1996); e (iv) estabilização simultânea de multi-modelos (Vidyasagar, 1985). \square

2.3.2 O problema de sensibilidade dos lugares característicos

Considere o problema de se estabilizar uma família de plantas centradas em uma planta nominal, $G(s)$, e com incerteza multiplicativa na saída de $G(s)$, ou seja, modelada de acordo com a equação (2.29). O problema de estabilidade robusta pode ser, então, enunciado como: encontre $K(s)$ que estabiliza $G_p(s) = [I + \Delta_o(s)]G(s)$, onde $\bar{\sigma}[\Delta_o(j\omega)] \leq \mu_G(\omega)$, e $\mu_G(\omega)$ é uma função real não-negativa. O teorema a seguir fornece uma condição necessária e suficiente para o problema de estabilidade robusta e é conhecido como teorema do pequeno ganho.

Teorema 2.3 $K(s)$ estabiliza $G_p(s)$ se e somente se $K(s)$ estabiliza $G(s)$ e

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma} \{G(j\omega)K(j\omega) [I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\} < \gamma_m, \quad (2.37)$$

onde

$$\gamma_m = \frac{1}{\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_G(j\omega)}. \quad (2.38)$$

Prova. Ver Doyle e Stein (1981) e Vidyasagar (1985). \square

Portanto, de acordo com o teorema 2.3, $K(s)$ estabiliza $G_p(s)$ se e somente se $K(s)$ estabiliza $G(s)$ e

$$\bar{\sigma} \{G(j\omega)K(j\omega) [I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\} < \frac{1}{\mu_G(j\omega)}, \quad (2.39)$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Usando as propriedades dos valores singulares e supondo GK invertível, pode-se reescrever o termo à esquerda da inequação (2.39) como:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} \{G(j\omega)K(j\omega) [I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\} &= \frac{1}{\underline{\sigma} \{[I + G(j\omega)K(j\omega)] [G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\}} \\ &= \frac{1}{\underline{\sigma} \{I + [G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

onde $\underline{\sigma}[\cdot]$ denota o menor valor singular. Assim sendo, uma nova condição para a estabilidade robusta do sistema realimentado é dada por:

$$\underline{\sigma} \{I + [G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\} > \mu_G(\omega). \quad (2.41)$$

Como o menor valor singular de uma matriz é um limitante inferior para os módulos dos autovalores desta matriz, tem-se:

$$|\lambda_i \{I + [G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\}| \geq \underline{\sigma} \{I + [G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\}, \quad (2.42)$$

onde $|\cdot|$ denota o módulo de um número complexo. Além disso,

$$\begin{aligned}\lambda_i \{I + [G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\} &= 1 + \lambda_i \{[G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\} \\ &= 1 + \frac{1}{\lambda_i \{G(j\omega)K(j\omega)\}}.\end{aligned}\quad (2.43)$$

Logo, a inequação (2.42) e a equação (2.43) levam à seguinte condição para a estabilidade robusta utilizando os autovalores da matriz de transferência em malha aberta em uma frequência específica ω :

$$\left|1 + \frac{1}{\lambda_i \{G(j\omega)K(j\omega)\}}\right| = \left|\frac{1 + \lambda_i \{G(j\omega)K(j\omega)\}}{\lambda_i \{G(j\omega)K(j\omega)\}}\right| > \mu_G(\omega).\quad (2.44)$$

Note que a condição apresentada na inequação (2.44) implica que para a estabilidade robusta do sistema em malha fechada, os lugares característicos de $G(s)K(s)$ devem estar suficientemente afastados do ponto crítico $-1 + j0$. Porém, esta condição é apenas necessária para a estabilidade robusta, uma vez que é possível ter $\left|\frac{1 + \lambda_i \{G(j\omega)K(j\omega)\}}{\lambda_i \{G(j\omega)K(j\omega)\}}\right| > \mu_G(\omega)$ e $\underline{\sigma} \{I + [G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\} \leq \mu_G(\omega)$. Isto mostra que a situação ideal para a aplicação do MLC, ocorre quando o módulo dos autovalores de $G(j\omega)K(j\omega)$ são iguais aos seus valores singulares a cada frequência ω . Uma classe de matrizes que satisfaz a esta condição é a classe de matrizes normais.

Definição 2.2 Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é normal se $A^*A = AA^*$, isto é, se A comuta com a sua conjugada transposta. \square

No teorema a seguir, usualmente chamado de teorema espectral para matrizes normais, são apresentadas as propriedades fundamentais da classe de matrizes normais.

Teorema 2.4 Se $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times m}$ tem autovalores $\lambda_{a_1}, \dots, \lambda_{a_m}$, então as seguintes afirmativas são equivalentes:

1. A é normal;
2. $\sum_{i,j=1}^m |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^m |\lambda_{a_i}|^2$; e
3. Existe um conjunto ortonormal de m autovetores de A .

Prova. Ver Horn e Johnson (1990). □

A partir do teorema 2.4, afirmativa 3, é fácil verificar que os valores singulares de uma matriz A são idênticos aos módulos dos seus autovalores se e somente se A é normal. Portanto, se $G(j\omega)K(j\omega)$ é normal para todo $\omega \in \mathbb{R}$, e $G(s)K(s)$ representa a função de transferência de um sistema em malha aberta, internamente estável em malha fechada, então os lugares característicos de $G(s)K(s)$ podem ser utilizados para garantir a estabilidade robusta do sistema realimentado.

Observação 2.3 Um resultado semelhante ao apresentado no teorema 2.3 pode ser obtido considerando-se perturbação multiplicativa na entrada da planta (equação (2.28)). Para tanto, basta substituir a matriz $G(s)K(s)$ pela matriz $K(s)G(s)$ na desigualdade (2.37). Assim sendo, uma condição necessária para a estabilidade robusta é obtida em função dos lugares característicos de $K(s)G(s)$, e essa condição torna-se também suficiente quando $K(s)G(s)$ é normal. □

É importante ressaltar que, de acordo com o MLC, um controlador $K(s)$ que comuta com a planta $G(s)$ deve ser projetado. Supondo, que esse controlador comuta perfeitamente com a planta, então o produto $G(s)K(s)$ possui as mesmas matrizes de autovetores que a planta, como mostrado na equação (2.18). Portanto, de acordo com o teorema 2.4, o produto $G(s)K(s)$ será normal se e somente se $G(s)$ for normal. Este fato mostra que a situação ideal para o uso do MLC ocorre quando $G(s)$ é normal.

Uma outra maneira de verificar a necessidade da planta ser normal para o uso do MLC pode ser obtida utilizando-se o teorema de Bauer-Fike (Bauer e Fike, 1960) e considerando o modelo de incerteza aditiva na planta, conforme será visto a seguir.

Teorema 2.5 Seja $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ uma matriz diagonalizável tal que $G = W\Lambda_G V$, onde $V = W^{-1}$, é uma decomposição espectral de G e seja $\Delta_a \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Portanto, se $\hat{\lambda}$ é um autovalor de $G + \Delta_a$, então existe algum autovalor λ_i de G tal que

$$|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leq \bar{\sigma}(W)\bar{\sigma}(V)\bar{\sigma}(\Delta_a) = \mathcal{C}[W]\bar{\sigma}(\Delta_a). \quad (2.45)$$

Prova. Ver Horn e Johnson (1990). □

A partir do teorema 2.5 acima e supondo uma perturbação aditiva $\Delta_a(s)$ na planta,

onde $\bar{\sigma}[\Delta_a(j\omega)] \leq \delta_a(j\omega)$, e $\delta_a(j\omega)$ é uma função real não-negativa da variável ω , que representa um limitante superior para a perturbação $\Delta_a(j\omega)$, em cada frequência ω , tem-se que os autovalores de $G_p(j\omega)$ estão contidos em discos centrados nos autovalores de $G(j\omega)$ e com raio igual a $\mathcal{C}[W(j\omega)]\delta_a(j\omega)$, ou seja,

$$|\lambda_{g_p}(j\omega) - \lambda_g(j\omega)| \leq \mathcal{C}[W(j\omega)]\delta_a(j\omega), \quad (2.46)$$

onde $\lambda_{g_p}(j\omega)$ e $\lambda_g(j\omega)$ são, respectivamente, os autovalores de $G_p(j\omega)$ e $G(j\omega)$. A inequação (2.46) mostra que, quando os autovetores da matriz de transferência da planta $G(j\omega)$ são quase paralelos, o que faz com que o número de condicionamento de $W(j\omega)$ seja elevado, ocorre um alargamento dos discos que contêm os lugares característicos da planta com perturbação $G_p(j\omega)$.

Contudo, de acordo com o teorema 2.4, toda matriz normal é diagonalizável por matrizes unitárias e, portanto, se $G(j\omega)$ é normal então $\mathcal{C}[W(j\omega)]$ é igual a 1 e os autovalores de $G_p(j\omega)$ estarão contidos em discos de raio igual à magnitude da perturbação aditiva. Apesar do teorema de Bauer-Fike ser conservador, ele mostra que a situação ideal para o uso do MLC ocorre quando a matriz de transferência da planta é normal.

Apesar dos resultados apresentados nesta subseção mostrarem que a menor sensibilidade dos lugares característicos do sistema em malha aberta ocorre quando sua matriz de transferência é normal, em Hung e MacFarlane (1982) é dito que o conjunto das matrizes normais é relativamente pequeno se comparado ao conjunto das matrizes aproximadamente normais, e que é possível para matrizes aproximadamente normais obter-se uma aceitável sensibilidade dos seus lugares característicos. Portanto, para definir matrizes aproximadamente normais duas medidas serão utilizadas neste trabalho. A primeira é baseada na definição 2.2 de matrizes normais (Sahate, 1998; Basilio e Sahate, 2000) e é dada por:

$$\delta(G) = \frac{\|G^*G - GG^*\|_{\mathcal{F}}^2}{\|G^*G\|_{\mathcal{F}}^2}, \quad (2.47)$$

onde $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ denota a norma de Frobenius definida como

$$\|E\|_{\mathcal{F}}^2 = \text{tr}(E^*E), \quad (2.48)$$

onde $tr(\cdot)$ denota o traço de uma matriz. Note que $\delta(G)$ é igual a zero se e somente se G é normal. A medida de normalidade (2.47) leva à seguinte definição de matrizes aproximadamente normais.

Definição 2.3 Uma matriz $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é dita ser aproximadamente δ -normal quando $\delta(G) < \epsilon$, onde $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ define o grau de proximidade da normalidade desejada. \square

A segunda medida de normalidade de uma matriz G é baseada na afirmativa 3 do teorema 2.4, e é obtida medindo-se o número de condicionamento da matriz de autovetores de G (Hung e MacFarlane, 1982; Basilio e Sahate, 2000), levando à seguinte definição de matrizes aproximadamente normais.

Definição 2.4 Uma matriz $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é dita ser aproximadamente ν -normal se $\mathcal{C}(W) = 1 + \nu$, onde W é a matriz de autovetores de G e $\nu \in \mathbb{R}^+$ define o grau de proximidade da normalidade desejada. \square

Ambas as definições 2.3 e 2.4 de matrizes aproximadamente normais serão utilizadas neste trabalho.

2.3.3 Métodos para contornar o problema de sensibilidade dos lugares característicos

Algumas tentativas de contornar o problema de sensibilidade dos lugares característicos do sistema em malha aberta podem ser encontradas na literatura. A primeira (Daniel e Kouvaritakis, 1983; Daniel e Kouvaritakis, 1984) consiste em decompor a matriz $G(j\omega)$ na soma de uma matriz normal $G_N(j\omega)$ e uma matriz de erro $E(j\omega)$ obtida ao se aproximar $G(j\omega)$ por $G_N(j\omega)$, ou seja,

$$G(j\omega) = G_N(j\omega) + E(j\omega). \quad (2.49)$$

Desta forma, considerando como planta nominal a matriz normal $G_N(j\omega)$, a planta com perturbação aditiva $G_p(j\omega)$ pode ser escrita como:

$$G_p(j\omega) = G_N(j\omega) + \Delta_N(j\omega), \quad (2.50)$$

onde $\Delta_N(j\omega) = E(j\omega) + \Delta_a(j\omega)$. Se a aproximação de $G(j\omega)$ pela matriz $G_N(j\omega)$ é feita de forma que o erro, $E(j\omega)$, seja tal que o seu maior valor singular seja

suficientemente pequeno, então um limitante superior para o maior valor singular de $\Delta_N(j\omega)$ é obtido, como pode ser observado na expressão a seguir:

$$\bar{\sigma} [\Delta_N(j\omega)] \leq \bar{\sigma} [E(j\omega)] + \bar{\sigma} [\Delta_a(j\omega)] \leq \bar{\sigma} [E(j\omega)] + \delta_a(j\omega). \quad (2.51)$$

Portanto, se $\bar{\sigma} [E(j\omega)]$ for suficientemente pequeno, então o método do lugar característico pode ser aplicado a $G_N(j\omega)$ no lugar de $G(j\omega)$ levando a resultados confiáveis com relação à robustez. Porém, quando a matriz $G(j\omega)$ tem autovetores quase paralelos, o valor de $\bar{\sigma} [E(j\omega)]$ é elevado e, portanto, o MLC não pode ser aplicado a $G_N(j\omega)$.

Uma outra alternativa para contornar o problema de sensibilidade dos lugares característicos é através dos controladores normalizantes de molduras reversas (CNMR) (Hung e MacFarlane, 1982; Basilio e Kouvaritakis, 1997b). O CNMR tem como base a quase-decomposição e os quase-lugares de Nyquist da matriz de transferência da planta nominal $G(s)$. Para a obtenção da quase-decomposição de Nyquist de uma matriz complexa G considere, inicialmente, a seguinte decomposição por valores singulares de G :

$$G = Y\Sigma U^*, \quad (2.52)$$

onde Y e U são as matrizes de direções principais de saída e de entrada, respectivamente, e $\Sigma = \text{diag} \{\sigma_i, i = 1, 2, \dots, m\}$, onde σ_i denota o i -ésimo valor singular de G . Suponha também que todos os valores singulares de G sejam distintos e considere, agora, o seguinte problema de minimização

$$\min_{\Theta = \text{diag}\{e^{j\theta_i}\}} \|U^*Y - \Theta\|_2, \quad (2.53)$$

onde $\|\cdot\|_2$ denota a norma espectral de uma matriz. Suponha que o problema de minimização (2.53) seja resolvido para o valor ótimo de Θ , Θ_0 , e defina

$$\Gamma_G = \Theta_0\Sigma, \quad (2.54)$$

$$Z = Y\Theta_0^*. \quad (2.55)$$

Como Θ_0 é uma matriz unitária, então a equação (2.52) pode ser reescrita como:

$$G = (Y\Theta_0^*)(\Theta_0\Sigma)U^* = Z\Gamma_G U^*. \quad (2.56)$$

A decomposição apresentada em (2.56) é chamada de quase-decomposição de Nyquist de G . Note que, diferentemente dos elementos da diagonal de Σ , os elementos da diagonal principal de Γ_G , γ_{G_i} para $i = 1, 2, \dots, m$, apresentam fases e que as matrizes Z e U são matrizes unitárias.

Para a obtenção dos quase-lugares de Nyquist de $G(s)$, suponha que $G(s)$ não tenha pólos sobre o contorno D de Nyquist. Assim, aplicando-se a quase-decomposição de Nyquist de $G(s)$ para cada s pertencente ao contorno D , obtém-se

$$G(s) = Z(s)\Gamma_G(s)U(s)^*, \quad (2.57)$$

onde $\Gamma_G(s) = \text{diag}\{\gamma_{G_i}(s), i = 1, 2, \dots, m\}$. À medida que s percorre o contorno D , $\gamma_{G_i}(s)$, $i = 1, \dots, m$, descrevem $n \leq m$ curvas fechadas. Essas curvas são definidas como os quase-lugares de Nyquist de $G(s)$. A partir da quase-decomposição de Nyquist de $G(s)$, pode-se definir o seguinte controlador:

$$K(s) = U(s)\Gamma_K(s)Z(s)^*, \quad (2.58)$$

onde os elementos da matriz diagonal $\Gamma_K(s) = \text{diag}\{\gamma_{K_i}(s), i = 1, 2, \dots, m\}$ devem ser escolhidos. Note que as matrizes de direções principais de $K(s)$ são as mesmas de $G(s)$, mas posicionadas em ordem reversa. Além disso, note que as matrizes de transferência $G(s)K(s)$ e $K(s)G(s)$ têm a seguinte forma:

$$G(s)K(s) = Z(s)\Gamma_G(s)U(s)^*U(s)\Gamma_K(s)Z(s)^* = Z(s)\Gamma_G(s)\Gamma_K(s)Z(s)^* \quad (2.59)$$

$$K(s)G(s) = U(s)\Gamma_K(s)Z(s)^*Z(s)\Gamma_G(s)U(s)^* = U(s)\Gamma_G(s)\Gamma_K(s)U(s)^* \quad (2.60)$$

e, portanto, são, de acordo com o teorema 2.4, matrizes normais. Por estes motivos o controlador dado pela expressão (2.58) é chamado de controlador normalizante de molduras reversas.

A partir da equações (2.59) e (2.60) pode-se verificar que os quase-lugares de Nyquist de $G(s)K(s)$ e $K(s)G(s)$ são coincidentes com os seus lugares característicos. Assim sendo, a escolha dos elementos da diagonal de $\Gamma_K(s)$ deve ser feita de forma que o critério de estabilidade de Nyquist generalizado seja satisfeito pelos quase-lugares de Nyquist de $G(s)K(s)$.

É fácil verificar que, assim como o controlador comutativo, o controlador normalizante reverso é, em geral, irracional. Porém, é possível, em muitos casos, aproximar os CNMR por controladores racionais. Em Hung e MacFarlane (1982) e Basilio e Kouvaritakis (1997b) técnicas para a aproximação dos CNMR por controladores racionais são apresentadas, bem como é mostrado como escolher os elementos de $\Gamma_K(s)$ para atender os objetivos de estabilidade, robustez e desempenho do sistema compensado.

Embora o CNMR seja capaz de, teoricamente, tornar ambas as matrizes GK e KG normais, e portanto insensíveis a incertezas multiplicativas modeladas na entrada ou na saída da planta, o método de projeto é baseado nos quase-lugares de Nyquist da planta, que em geral, não substituem os lugares característicos como uma ferramenta para a análise da estabilidade do sistema realimentado (Hung e MacFarlane, 1982).

Visando contornar esses problemas, uma terceira forma de abordar o problema de sensibilidade dos lugares característicos da planta é sugerida em Sahate (1998) e Basilio e Sahate (2000), onde o objetivo é obter a normalidade de $G(s)K(s)$ através do projeto de um pré-compensador dinâmico, $K_p(s)$, que faça com que o sistema pré-compensado, $\tilde{G}(s) = G(s)K_p(s)$, seja o mais próximo possível da normalidade em uma faixa de frequências de interesse. Uma vez feito isso, o método do lugar característico é, então, aplicado a $\tilde{G}(s)$, projetando-se um controlador comutativo $K_c(s)$. Dessa forma, o controlador a ser implementado passa a ser dado por:

$$K(s) = K_p(s)K_c(s). \quad (2.61)$$

O método apresentado em Basilio e Sahate (2000) será revisto, com maiores detalhes, no capítulo 3.

2.4 Comentários finais

Neste capítulo foi feita uma revisão dos fundamentos teóricos do método do lugar característico (MLC). Foi visto que a idéia principal do MLC é projetar um controlador que tenha as mesmas matrizes de autovetores que a matriz de transferência da

planta nominal e, em seguida, manipular as funções de autovalores do controlador de forma que o sistema em malha fechada seja estável (satisfaça o critério de estabilidade de Nyquist generalizado) e satisfaça objetivos de desempenho como, por exemplo, rejeição de perturbação, rastreamento e desempenho transitório. Contudo, isto, em geral, leva a dois problemas importantes: (i) exceto em alguns casos, as matrizes de autovetores possuem em seus elementos expressões irracionais em s ; (ii) para plantas com autovetores quase paralelos em determinadas frequências, os lugares característicos do sistema em malha aberta são muito sensíveis a perturbações nos parâmetros da planta nominal nessas frequências.

O problema (i) é contornado aproximando-se as matrizes de autovetores do controlador por matrizes racionais, ou utilizando a parametrização para todos os controladores comutativos estabilizantes que será apresentada no capítulo 4, enquanto que para contornar o problema (ii) três abordagens foram sugeridas: a primeira consiste em decompor a matriz de transferência nominal como a soma de uma matriz normal mais um erro de aproximação e, em seguida, aplicar o MLC à planta normal; a segunda abordagem levou aos chamados controladores normalizantes de molduras reversas (CNMR); e uma terceira abordagem, que consiste em projetar pré-compensadores normalizantes. As duas primeiras abordagens possuem as seguintes desvantagens: a possibilidade de amplificação da região que contém os lugares característicos da planta com perturbação (primeira abordagem), e o uso de quase-lugares de Nyquist ao invés dos lugares característicos, que são os verdadeiros indicadores da estabilidade nominal do sistema realimentado (segunda abordagem). Por esses motivos, não mais serão consideradas essas duas abordagens aqui.

Neste trabalho, serão apresentados dois novos métodos para a obtenção de pré-compensadores normalizantes, sendo que ambos os métodos têm como objetivo obter um sistema em malha fechada pouco sensível a perturbações multiplicativas na entrada ou na saída da planta. A escolha do modelo de incerteza multiplicativa se deve ao fato de que essas incertezas possuem maior significado em sistemas reais e também porque a mesma magnitude de perturbação pode ser considerada tanto para a planta, quanto para o sistema compensado, como justificado na subseção

2.3.1. O primeiro método consiste na obtenção de um pré-compensador dinâmico, baseado no alinhamento das direções principais de entrada e de saída da planta (Moreira e Basilio, 2005), enquanto que o segundo método propõe a obtenção de um pré-compensador estático para uma determinada faixa de frequências de interesse. Essas abordagens serão apresentadas em maiores detalhes no capítulo 3.

Capítulo 3

Pré-compensadores Normalizantes

Neste capítulo, serão inicialmente revistas as diferentes técnicas existentes na literatura para a pré-compensação de matrizes, e serão propostas duas novas técnicas para o projeto de pré-compensadores de forma a tornar o sistema realimentado pouco sensível a incertezas multiplicativas modeladas tanto na entrada quanto na saída da planta.

Na seção 3.1 uma técnica de projeto de controladores multivariáveis conhecida como método das cadeias de Nyquist é revista. Essa técnica, assim como o método do lugar característico, é baseada no critério de estabilidade de Nyquist generalizado e tem como a primeira etapa no projeto do controlador, o projeto de um pré-compensador que torna a matriz de transferência da planta o mais próximo possível de uma matriz diagonal. Como matrizes diagonais são normais, então a primeira etapa de projeto do método das cadeias de Nyquist pode ser vista como uma forma de pré-compensação normalizante.

Em seguida, como o problema de sensibilidade do sistema realimentado também pode ser associado ao número de condicionamento da matriz de transferência da planta, na seção 3.2, são revistos métodos de obtenção de pré-condicionadores, que são matrizes diagonais que possuem o objetivo de escalonar linhas ou colunas de matrizes complexas, de forma a reduzir o seu número de condicionamento. Contudo, será mostrado que os pré-condicionadores podem ser eficientes para a redução da sensibilidade do sistema com perturbação multiplicativa na entrada da planta, somente quando esta perturbação é estruturada (a matriz de perturbação tem es-

trutura diagonal).

Na seção 3.3, o método de Basilio e Sahate para a obtenção de pré-compensadores normalizantes é revisto. Um problema com relação a esse método é que o problema de otimização sugerido requer a solução de uma equação polinomial de grau elevado, mesmo para casos simples. Além disso, na implementação do pré-compensador, as fases dos elementos projetados são arbitradas sem que haja uma preocupação com a deterioração do custo de otimização definido no projeto. Para contornar esses problemas, na seção 3.4, um novo método de normalização por alinhamento das direções principais de entrada e de saída da planta é sugerido (Moreira e Basilio, 2005). Assim como no método de Basilio e Sahate, o pré-compensador aqui projetado é dinâmico, porém, a solução do novo problema de otimização pode ser obtida de forma mais simples.

Apesar do novo método proposto na seção 3.4 levar a uma maior robustez do sistema realimentado para incertezas multiplicativas do que o método proposto por Basilio e Sahate, a estrutura adotada para o pré-compensador pode ser muito restritiva. Dessa forma, visando contornar esse problema, e observando que a necessidade de pré-compensação normalizante ocorre somente em uma faixa de frequências, determinada pelas características de desempenho desejadas do sistema em malha fechada, na seção 3.5 uma técnica para o projeto de pré-compensadores normalizantes estáticos, baseado em um problema de otimização semelhante ao apresentado na seção 3.4, é sugerida. Este método também é capaz de tornar os lugares característicos do sistema em malha aberta pouco sensíveis a perturbações na entrada e na saída da planta, quando um controlador que comuta perfeitamente com a planta pré-compensada é utilizado, e o problema de otimização sugerido possui solução simples e pode ser descrito como o problema de encontrar o autovetor associado ao menor autovalor de uma matriz com coeficientes reais.

Por fim, na seção 3.6 as conclusões são apresentadas.

3.1 Método das Cadeias de Nyquist: pré-compensação visando a obtenção de dominância diagonal

O grande apelo para o uso do Método das Cadeias de Nyquist (MCN) está no fato de que este método tem grande aplicação em processos industriais, que, na maioria das vezes, se utiliza de controladores PI ou PID descentralizados. O MCN é baseado no seguinte teorema.

Teorema 3.1 Teorema de Gershgorin

Seja G uma matriz complexa $m \times m$. Então os autovalores de G pertencem à união dos m círculos, cada um com centro em g_{ii} , e raio dado por $R = \min(R_l, R_c)$, onde:

$$R_l = \sum_{j=1, j \neq i}^m |g_{ij}|, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.1)$$

$$R_c = \sum_{j=1, j \neq i}^m |g_{ji}|, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.2)$$

Prova. Ver Rosenbrock (1974). □

Note que, considerando a matriz de transferência de um sistema $G(s)$, em uma dada frequência $s = j\omega$, é possível, de acordo com o teorema 3.1, definir regiões (círculos) no plano complexo onde os autovalores de $G(j\omega)$ estão localizados. Esses círculos são denominados círculos de Gershgorin. Note ainda que se os círculos de Gershgorin possuem raios suficientemente pequenos, então os lugares característicos de $G(j\omega)$ podem ser aproximadamente localizados no plano complexo a partir desses círculos, com uma certa precisão. Supondo que esses círculos sejam pequenos em cada frequência, então pode-se aplicar o critério de Nyquist generalizado aos círculos de Gershgorin, calculados frequência a frequência, formando-se o que se chama de bandas de Gershgorin, ao invés de diretamente aplicar o critério de Nyquist generalizado aos lugares característicos de $G(s)$. Dessa forma, o primeiro passo para utilizar as bandas de Gershgorin para a obtenção da estabilidade do sistema realimentado, consiste em encontrar um pré-compensador que seja capaz de tornar a matriz de transferência da planta $G(j\omega)$ o mais próximo possível de diagonal a cada frequência ω . Para tanto, muitos métodos foram desenvolvidos, como, por exemplo,

os apresentados em Maciejowski (1989), Nobakhti et al. (2003), Nobakhti e Munro (2004) e Chughtai e Munro (2004). Uma outra vantagem de se obter a dominância diagonal da planta é que quanto mais as bandas de Gershgorin são estreitas, mais o sistema multivariável $m \times m$ se aproxima de m sistemas monovariáveis independentes, com uma pequena interação entre eles. Dessa forma, uma vez obtida, quando possível, a dominância diagonal da planta, projeta-se, então, um controlador com estrutura diagonal, sendo, em geral, utilizados controladores simples como, por exemplo, controladores PI ou PID (Maciejowski, 1989; Ho et al., 2000; Chen e Seborg, 2003), para satisfazer os objetivos de desempenho do sistema em malha fechada.

Embora, o MCN clássico possa levar a sistemas de controle que atendam a vários objetivos de desempenho com controladores com estruturas mais simples que outros métodos existentes na literatura (como, por exemplo, controladores obtidos pela teoria de controle H_∞ ou obtidos pela síntese μ), o MCN não considera diretamente a existência de incertezas no modelo nominal da planta, o que pode levar a sistemas realimentados muito sensíveis a variações na planta nominal. Recentemente, alguns trabalhos têm sido realizados na tentativa de contornar este problema. Por exemplo, em Chen e Seborg (2002) e Ivezic e Petrovic (2003) controladores multivariáveis são projetados pelos MCN, levando em consideração incertezas estruturadas na planta, enquanto que em Nobakhti e Munro (2004) é proposto o projeto de um controlador de forma que o sistema tolere perturbações não-estruturadas na saída da planta, obtendo-se, para tanto, limitantes para os valores singulares do sistema compensado, a cada frequência, a partir dos seus círculos de Gershgorin. Porém, para que o método proposto em Nobakhti e Munro (2004) funcione, é necessário que seja obtida uma forte dominância diagonal da planta pré-compensada, ou seja, a planta pré-compensada deve ser quase diagonal, o que indiretamente significa que esta deve ser quase normal.

É importante ressaltar ainda que nenhum dos métodos recentemente propostos aborda o problema de robustez com relação a perturbações não-estruturadas na entrada da planta, o que pode levar a sistemas de controle realimentados muito sen-

síveis a essas perturbações, mesmo que este tolere incertezas elevadas modeladas na saída da planta, uma vez que é garantido pelo Método das Cadeias de Nyquist que GK seja diagonal dominante, mas nada pode ser garantido quanto a KG , que pode ser não-normal (Postlethwaite, 1982). Uma exceção a esse caso ocorre quando o número de condicionamento da planta ou do controlador são aproximadamente iguais a 1. Em Skogestad e Havre (1996) é mostrado que, para incertezas modeladas na entrada ou na saída da planta, quando isto ocorre, o desempenho robusto, medido a partir do maior valor singular da matriz de sensibilidade do sistema com perturbação é pouco deteriorado com relação ao desempenho robusto do sistema nominal. Contudo, o número de condicionamento da planta pode ser elevado e restrições no número de condicionamento do controlador levam a resposta do sistema a ser muito dependente do sinal de referência adotado, ou de um sinal externo de perturbação na saída do sistema em malha aberta (Skogestad et al., 1988).

Uma alternativa para contornar o problema do número de condicionamento elevado da planta seria projetar um pré-condicionador para a planta (Braatz e Morari, 1994; Kaszkurewicz et al., 1995). Porém, como será visto na seção 3.2 a seguir, isso somente poderia ser feito considerando-se uma matriz de perturbação diagonal na planta, o que significaria restringir a incerteza a ser estruturada.

3.2 Pré-condicionadores

Nesta seção, o projeto de pré-condicionadores para matrizes complexas, será brevemente revisto e será mostrado que, para perturbações com estrutura diagonal e se for possível tornar o número de condicionamento da planta pré-condicionada aproximadamente igual a um, então o sistema em malha fechada pode ser robusto tanto a incertezas na entrada quanto na saída da planta, mesmo que a planta tenha um número de condicionamento elevado. Para tanto, considere o sistema em malha aberta apresentado na figura 3.1, com perturbação multiplicativa na entrada da planta, onde Δ_i é uma matriz diagonal. Suponha também que o controlador K seja formado pelo produto de uma matriz diagonal D (pré-condicionador), que faz com

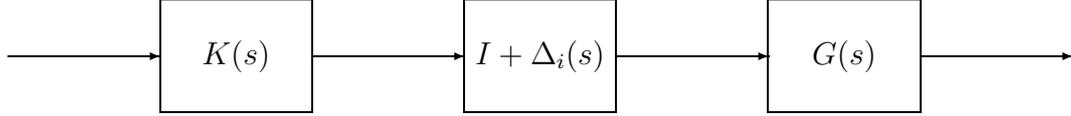


Figura 3.1: Sistema em malha aberta com perturbação multiplicativa $\Delta_i(s)$, diagonal, na entrada da planta.

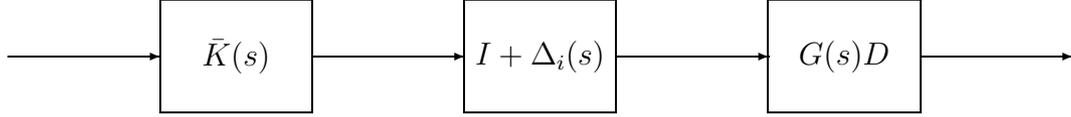


Figura 3.2: Sistema em malha aberta equivalente ao sistema da figura 3.1, onde $K(s) = D\bar{K}(s)$.

que a planta GD tenha número de condicionamento menor possível em uma faixa de frequências de interesse, com um controlador \bar{K} , obtido por um método qualquer que seja capaz de tornar o sistema realimentado pouco sensível a incertezas na saída da planta. Neste caso, como a matriz de perturbação Δ_i tem estrutura diagonal, então a seguinte igualdade pode ser obtida:

$$G(I + \Delta_i)K = G(I + \Delta_i)D\bar{K} \quad (3.3)$$

$$= GD(I + \Delta_i)\bar{K}. \quad (3.4)$$

Portanto, o sistema da figura 3.1 é equivalente ao sistema da figura 3.2, ou seja, a planta para projeto será a planta pré-condicionada GD . Logo, supondo que GD tenha um número de condicionamento suficientemente próximo de um, e de acordo com a inequação (2.35), observa-se que, se $GD\bar{K}$ tolera incertezas na saída da planta de uma determinada magnitude, então o sistema tolera incertezas diagonais na entrada da planta de magnitude aproximadamente iguais às da saída.

Em Braatz e Morari (1994) é mostrado que o problema de encontrar a matriz diagonal D que torna GD com o menor número de condicionamento possível, pode ser transformado em um problema convexo de otimização. Para ver este fato, os seguintes resultados são necessários.

Teorema 3.2 A seguinte igualdade é verdadeira:

$$\inf_{D \in \mathbb{D}^{m \times m}} \mathcal{C}[GD] = \inf_{D \in \mathbb{D}_+^{m \times m}} \bar{\sigma}^2 \left(\begin{bmatrix} D^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & G^{-1} \\ G & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & O \\ O & I \end{bmatrix} \right), \quad (3.5)$$

onde $\mathbb{D}^{m \times m}$ e $\mathbb{D}_+^{m \times m}$ denotam, respectivamente, o conjunto das matrizes diagonais e das matrizes diagonais com todos os elementos da diagonal principal positivos.

Prova. Ver Braatz e Morari (1994). □

Teorema 3.3 O seguinte problema de otimização é convexo:

$$\inf_{D \in \mathbb{D}^{2m \times 2m}} \bar{\sigma}^2(e^D M e^{-D}), \quad (3.6)$$

onde M é uma matriz complexa qualquer $2m \times 2m$.

Prova. Ver Sezginer e Overton (1990). □

Uma vez que e^D , onde D é uma matriz diagonal, é uma matriz também diagonal com todos os elementos da diagonal principal positivos, então os problemas de otimização (3.5) e (3.6) são equivalentes e, portanto, a matriz D que leva a matriz GD , em uma dada frequência, a possuir o menor número de condicionamento possível pode ser calculada utilizando-se programação convexa. É importante ressaltar, ainda, que, para o caso de matrizes G , 2×2 , a matriz diagonal que leva ao menor número de condicionamento possível é aquela que escalona as colunas da matriz GD de forma que elas possuam norma euclidiana igual a um (Kaszkurewicz et al., 1995).

É possível então concluir que o uso de pré-condicionadores para a planta pode ser uma alternativa considerando-se perturbações estruturadas na sua entrada. Contudo, neste trabalho, as incertezas consideradas são não-estruturadas, o que implica na necessidade de se introduzir uma nova técnica para o projeto de pré-compensadores. Uma alternativa é o projeto de pré-compensadores normalizantes considerando-se perturbações aditivas na planta (Sahate, 1998; Basilio e Sahate, 2000), que surge como a primeira etapa no projeto de controladores multi-variáveis pelo método do lugar característico. Esse método será visto na próxima seção.

Apesar dos pré-condicionadores não poderem ser utilizados para a redução da sensibilidade dos lugares característicos do sistema em malha aberta quando incertezas não-estruturadas são consideradas, pré-condicionadores serão utilizados neste trabalho para calcular o número de condicionamento ótimo das matrizes de autovetores da planta, definido da seguinte forma:

Definição 3.1 Seja $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e considere uma decomposição espectral de G dada por $G = W\Lambda V$. O número de condicionamento ótimo de W , denotado por $\mathcal{C}_{opt}[W]$, é obtido resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\mathcal{C}_{opt}[W] = \inf_{D \in \mathbb{D}_+^{m \times m}} \mathcal{C}[WD]. \quad (3.7)$$

□

De acordo com o teorema 3.3, o problema de otimização (3.7) pode ser transformado em um problema de otimização convexa que pode ser resolvido utilizando-se técnicas conhecidas de programação convexa (Fletcher, 1987).

3.3 Normalização pelo método de Basilio e Sahate

Uma forma direta para abordar o problema de projetar um pré-compensador normalizante para a planta foi apresentada em Basilio e Sahate (2000), onde um pré-compensador dinâmico, $K_p(s)$, é obtido a partir do projeto de pré-compensadores estáticos, $\bar{K}_p(j\omega_k)$, para um número finito de frequências ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Para cada frequência ω_k , $\bar{K}_p(j\omega_k)$ é encontrado de forma a tornar a matriz de transferência

$$\bar{G}(j\omega_k) = G(j\omega_k)\bar{K}_p(j\omega_k) \quad (3.8)$$

aproximadamente δ -normal (definição 2.3).

Para tanto, é solucionado o seguinte problema de otimização

$$\min_{\bar{K}_p(j\omega_k)} \delta(\bar{G}(j\omega_k)), \quad (3.9)$$

sujeito a restrições na forma do pré-compensador e no módulo de seus elementos. A forma de $\bar{K}_p(j\omega)$ utilizada em Basilio e Sahate (2000) é motivada pela estrutura usualmente obtida para o pré-compensador estático

$$K_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

encontrado através do algoritmo ALIGN para reduzir a interação em altas frequências para matrizes de transferência da planta 2×2 . Desta forma, $\bar{K}_p(j\omega_k)$ é feito

sempre igual a uma permutação da matriz identidade em que um dos elementos é igual a $re^{j\phi}$, onde $r \in (0,1]$ e $\phi \in [0,2\pi)$. Para o caso 2×2 , tem-se que

$$\bar{K}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ re^{j\phi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Observação 3.1 A restrição quanto ao módulo dos elementos de $\bar{K}_p(j\omega_k)$ se deve à necessidade do pré-compensador ter maior valor singular aproximadamente igual a 1. De acordo com o teorema de Bauer-Fike (teorema 2.5), os autovalores de $G_p(j\omega_k)\bar{K}_p(j\omega_k)$, onde $G_p(j\omega_k)$ é a matriz de transferência do sistema com perturbação aditiva, estão contidos em discos centrados nos autovalores de $G(j\omega_k)\bar{K}_p(j\omega_k)$ e com raio igual a $\mathcal{C}[W_p]\bar{\sigma} [\Delta_a(j\omega_k)\bar{K}_p(j\omega_k)] \leq \mathcal{C}[W_p]\bar{\sigma} [\Delta_a(j\omega_k)] \bar{\sigma} [\bar{K}_p(j\omega_k)]$, onde W_p denota a matriz de autovetores de $G(j\omega_k)\bar{K}_p(j\omega_k)$. Portanto, se $\bar{\sigma} [\bar{K}_p(j\omega_k)] \approx 1$, não há uma amplificação da magnitude da perturbação do sistema pré-compensado.

□

Resolvendo-se o problema de minimização (3.9) para um número finito de frequências ω_k , obtêm-se os valores de $\bar{K}_p(j\omega_k)$. Assim sendo, o pré-compensador a ser implementado, $K_p(s)$, pode ser encontrado utilizando-se como elementos, funções de transferência racionais, próprias e estáveis, que aproximem a resposta em frequência dos elementos de $K_p(s)$ à dos elementos de $\bar{K}_p(j\omega_k)$, para $k = 1, \dots, n$. É importante ressaltar que os módulos e as fases dos elementos de $\bar{K}_p(j\omega_k)$ podem sofrer descontinuidades à medida que ω varia. Portanto, é necessário que as curvas de resposta em frequência dos elementos de $K_p(s)$ façam uma transição suave entre os pontos de descontinuidade observados nos diagramas de módulo e fase de $\bar{K}_p(j\omega_k)$.

Surgem aqui dois problemas com relação ao projeto do pré-compensador normalizante sugerido em Basilio e Sahate (2000): (i) a solução do problema de otimização (3.9) requer a solução de uma equação polinomial de grau elevado, mesmo para casos simples; (ii) apesar dos módulos dos elementos de $\bar{K}_p(j\omega_k)$ poderem, em geral, ser facilmente aproximados pelos módulos dos elementos de $K_p(j\omega_k)$, o mesmo não acontece com as suas fases, que podem diferir muito. Apesar desse fato não ter ocasionado, para os exemplos utilizados em Basilio e Sahate (2000), uma deterioração significativa do custo de otimização considerado, nenhuma análise é

feita com relação a essa possível deterioração. Para maiores detalhes, veja Basilio e Sahate (2000) e Sahate (1998).

Um terceiro problema com relação ao método de Basilio e Sahate é que, como ele foi desenvolvido considerando-se perturbações aditivas na planta, somente a normalização de GK_p é necessária (com restrições adicionais na estrutura de K_p). Dessa forma, o método proposto não garante que $K(s)G(s)$ também seja normal, onde $K(s) = K_p(s)K_c(s)$ [equação (2.61)], o que significa que o sistema realimentado não é necessariamente robusto a incertezas multiplicativas na entrada da planta.

Visando contornar os problemas encontrados em Basilio e Sahate (2000), em Moreira e Basilio (2005), é proposta uma nova técnica de normalização da planta. Esta nova técnica propõe o projeto de um pré-compensador dinâmico com estrutura semelhante à adotada em Basilio e Sahate (2000), com maior valor singular também aproximadamente igual a um, e visa a redução do desalinhamento entre as direções principais de entrada e de saída da planta, o que leva o sistema pré-compensado a ser também aproximadamente δ -normal. Além de ter solução mais simples, uma outra vantagem dessa nova abordagem é que, quando da implementação do pré-compensador, as suas fases são levadas em consideração e, portanto, podem ser escolhidas de forma a não deteriorar o custo de otimização. Finalmente, deve ser ainda ressaltado que esse novo método é capaz de tornar os lugares característicos do sistema em malha aberta pouco sensíveis a incertezas multiplicativas modeladas tanto na entrada quanto na saída da planta.

3.4 Normalização por alinhamento das matrizes de direções principais de entrada e de saída da planta

Nesta seção, será apresentada uma técnica de projeto de pré-compensadores normalizantes dinâmicos (Moreira e Basilio, 2005), $K_p(s)$, a partir do projeto de pré-compensadores estáticos, $\bar{K}_p(j\omega_k)$, para um número finito de frequências ω_k , da mesma forma em que é sugerido em Basilio e Sahate (2000). A principal diferença entre o método proposto neste trabalho e o método proposto por Basilio e Sahate

(2000), está no fato de que a normalização é obtida aqui por alinhamento das direções principais de entrada e de saída da planta pré-compensada, e não diretamente como em Basilio e Sahate (2000), onde é definida uma medida para o desvio da normalidade da matriz pré-compensada e, em seguida, é definido um problema de minimização a partir dessa medida.

3.4.1 Formulação do problema

De acordo com o capítulo 2, subseção 2.3.2, é sabido que uma das maneiras de abordar o problema da normalização de ambas as matrizes GK e KG , é através dos chamados controladores normalizantes de molduras reversas (CNMR)(Hung e MacFarlane, 1982), cuja justificativa teórica é apresentada a seguir.

Lema 3.1 Suponha que $G, K \in \mathbb{C}^{m \times m}$ sejam matrizes de posto m e seja

$$G = Y\Sigma U^* \quad (3.12)$$

uma decomposição por valores singulares de G , onde $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_i, i = 1, 2, \dots, m\}$. Então, GK e KG são matrizes normais se e somente se

$$K = U\Gamma_K Y^* \quad (3.13)$$

para alguma matriz diagonal não-singular $\Gamma_K \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

Prova. Ver Hung e MacFarlane (1982). □

De acordo com o lema 3.1, os lugares característicos do sistema em malha aberta serão menos sensíveis a pequenas perturbações multiplicativas na entrada e na saída da planta, se e somente se as molduras principais de $K(s)$ são iguais às molduras de $G(s)$ tomadas em ordem reversa. Porém, como o controlador $K(s)$ é definido de acordo com a equação (2.61), isto é, $K(s) = K_p(s)K_c(s)$, então $\bar{K}_p(j\omega_0)$ deve ter uma estrutura específica para que $G(j\omega_0)K(j\omega_0)$ e $K(j\omega_0)G(j\omega_0)$ sejam ambas normais em uma dada frequência ω_0 . Para a obtenção desta estrutura para $\bar{K}_p(j\omega_0)$, nesta seção será suposto que o pré-compensador a ser implementado, $K_p(s)$, seja igual ao pré-compensador estático $\bar{K}_p(j\omega_0)$, na frequência ω_0 , ou seja, $K_p(j\omega_0) =$

$\bar{K}_p(j\omega_0)$. Como será visto na subseção 3.4.4, através de exemplos extraídos da literatura, $\bar{K}_p(j\omega)$ e $K_p(j\omega)$ podem ser feitos iguais ou aproximadamente iguais para quase todas as frequências de interesse ω e, portanto, esta suposição não é conservadora.

Teorema 3.4 Suponha que $G, K \in \mathbb{C}^{m \times m}$ sejam ambas não-singulares e considere a decomposição por valores singulares de G dada pela equação (3.12). Além disso, seja $K = \bar{K}_p K_c$, onde $K_c \in \mathbb{C}^{m \times m}$ comuta exatamente com relação à multiplicação com $G\bar{K}_p$. Então, GK e KG são ambas matrizes normais se e somente se $\bar{K}_p = U\Phi Y^*$, para alguma matriz não-singular Φ .

Prova. (\Rightarrow) Se GK e KG são normais, então, de acordo com o lema 3.1,

$$K = \bar{K}_p K_c = U\Gamma_K Y^*. \quad (3.14)$$

Portanto, a partir das equações (3.12) e (3.13), $GK = Y\Sigma U^* U\Gamma_K Y^* = Y\Sigma\Gamma_K Y^*$, que é uma decomposição espectral para GK . Supondo que K_c e $G\bar{K}_p$ comutem com relação à multiplicação, então GK e K_c possuem os mesmos autovetores, o que significa que uma decomposição espectral de K_c pode ser escrita como $K_c = Y\Lambda_c Y^*$, onde Λ_c é a matriz diagonal dos autovalores de K_c . Portanto, a equação (3.14) pode ser reescrita como:

$$\bar{K}_p Y\Lambda_c Y^* = U\Gamma_K Y^* \Leftrightarrow \bar{K}_p = U\Gamma_K \Lambda_c^{-1} Y^*. \quad (3.15)$$

Logo, definindo $\Phi = \Gamma_K \Lambda_c^{-1}$, conclui-se a prova.

(\Leftarrow) A prova é imediata e será omitida. □

O teorema 3.4 mostra que os lugares característicos serão menos sensíveis a incertezas multiplicativas na entrada e na saída da planta, em uma dada frequência ω_0 , quando o pré-compensador normalizante for tal que a matriz $U(j\omega_0)^* \bar{K}_p(j\omega_0) Y(j\omega_0)$ seja diagonal. Contudo, uma vez que o conjunto das matrizes normais é relativamente pequeno, se comparado ao das matrizes aproximadamente normais, então, ao invés de tentar obter a exata normalidade da matriz pré-compensada, é mais realista encontrar formas de tornar ambas as matrizes $G(j\omega)K(j\omega)$ e $K(j\omega)G(j\omega)$

aproximadamente normais, projetando-se um pré-compensador $\bar{K}_p(j\omega)$ para a faixa de frequências de interesse.

Nesta seção, será mostrado que, com um pré-compensador com estrutura dada por

$$\bar{K}_p(j\omega) = \alpha(j\omega)K_u(j\omega), \quad (3.16)$$

onde $\alpha(j\omega) \in \mathbb{C}$ e $K_u(j\omega)$ é uma matriz unitária, é possível obter-se o mesmo grau de normalidade para $G(j\omega)K(j\omega)$ e $K(j\omega)G(j\omega)$, no sentido de que os números de condicionamento das suas matrizes de autovetores sejam iguais. Além disso, como será mostrado a seguir, se $G(j\omega)\bar{K}_p(j\omega)$ é aproximadamente ν -normal (definição 2.4), com \bar{K}_p dado pela equação (3.16), então $G(j\omega)K(j\omega)$ e $K(j\omega)G(j\omega)$ também são ambas aproximadamente ν -normais.

Lema 3.2 Suponha que $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ tenha a decomposição por valores singulares dada pela equação (3.12), e defina a matriz complexa

$$M = U^* \bar{K}_p Y. \quad (3.17)$$

Então, $G\bar{K}_p$ é normal se e somente se ΣM é normal.

Prova. A prova é imediata e será omitida. □

Teorema 3.5 Seja a matriz \bar{K}_p dada pela equação (3.16) e seja $K = \bar{K}_p K_c$, onde K_c comuta exatamente com $G\bar{K}_p$. Se $G\bar{K}_p$ é aproximadamente ν -normal, então GK e KG são ambas matrizes aproximadamente ν -normais.

Prova. Usando as equações (3.12) e (3.17) tem-se que o produto $G\bar{K}_p$ pode ser escrito como:

$$G\bar{K}_p = Y \Sigma M Y^*. \quad (3.18)$$

Suponha que ΣM tenha a seguinte decomposição espectral:

$$\Sigma M = W_{\Sigma M} \Lambda_{\Sigma M} V_{\Sigma M}, \quad (3.19)$$

onde $\Lambda_{\Sigma M}$ é a matriz diagonal dos autovalores de ΣM , $W_{\Sigma M}$ é a matriz de autovetores de ΣM e $V_{\Sigma M} = W_{\Sigma M}^{-1}$. Desta forma, $G\bar{K}_p$ pode ser escrito como:

$$G\bar{K}_p = Y W_{\Sigma M} \Lambda_{\Sigma M} V_{\Sigma M} Y^*. \quad (3.20)$$

Uma vez que Y é unitária, então o número de condicionamento da matriz de autovetores de $G\bar{K}_p$ é igual ao número de condicionamento da matriz de autovetores de ΣM , *i.e.*, $\mathcal{C}[YW_{\Sigma M}] = \mathcal{C}[W_{\Sigma M}]$. Portanto, para provar o teorema basta mostrar que os números de condicionamento das matrizes GK e KG são ambos iguais a $\mathcal{C}[W_{\Sigma M}]$.

Uma vez que K_c comuta exatamente com $G\bar{K}_p$, então K_c possui a mesma matriz de autovetores que $G\bar{K}_p$. Logo,

$$K_c = YW_{\Sigma M}\Lambda_c V_{\Sigma M}Y^*. \quad (3.21)$$

Portanto, uma decomposição espectral para GK pode ser dada por:

$$GK = YW_{\Sigma M}\Lambda_{\Sigma M}\Lambda_c V_{\Sigma M}Y^*, \quad (3.22)$$

o que mostra que o número de condicionamento da matriz de autovetores de GK é igual a $\mathcal{C}[W_{\Sigma M}]$ e, portanto, se $G\bar{K}_p$ é aproximadamente ν -normal, então GK é aproximadamente ν -normal.

Para mostrar que KG é aproximadamente ν -normal quando $G\bar{K}_p$ é aproximadamente ν -normal, note, para $\bar{K}_p = \alpha K_u$ onde K_u é uma matriz unitária, que:

$$M = U^*\bar{K}_p Y = \alpha U^*K_u Y = \alpha M_u, \quad (3.23)$$

onde $M_u = U^*K_u Y$ é uma matriz unitária. Portanto, utilizando as equações (3.12), (3.17) e (3.21), obtém-se

$$KG = UMW_{\Sigma M}\Lambda_c V_{\Sigma M}\Sigma U^*. \quad (3.24)$$

De acordo com a equação (3.19), $V_{\Sigma M}\Sigma M = \Lambda_{\Sigma M}V_{\Sigma M}$, e portanto,

$$V_{\Sigma M}\Sigma = \Lambda_{\Sigma M}V_{\Sigma M}M^{-1}. \quad (3.25)$$

Substituindo a equação (3.25) em (3.24) e fazendo $M = \alpha M_u$, resulta:

$$KG = UM_u W_{\Sigma M}\Lambda_{\Sigma M}\Lambda_c V_{\Sigma M}M_u^*U^*. \quad (3.26)$$

A partir da equação (3.26), é imediato verificar que o número de condicionamento da matriz de autovetores de KG é também igual a $\mathcal{C}[W_{\Sigma M}]$, o que completa a prova.

□

O teorema 3.5 mostra que, com a estrutura para o pré-compensador dada por (3.16), é possível tornar $G(j\omega)K(j\omega)$ e $K(j\omega)G(j\omega)$ ambas aproximadamente ν -normais, simplesmente procurando por um $\bar{K}_p(j\omega)$ que torne $G(j\omega)\bar{K}_p(j\omega)$ aproximadamente ν -normal. Por este motivo, a estrutura para $\bar{K}_p(j\omega)$ dada por (3.16) será adotada nesta seção.

Observação 3.2 Note que, se $G(j\omega)\bar{K}_p(j\omega)$ for aproximadamente normal, para $\bar{K}_p(j\omega)$ dado pela equação (3.16), então $G(j\omega)K_u(j\omega)$ será aproximadamente normal e vice-versa. Portanto, embora o número complexo $\alpha(j\omega)$ não seja necessariamente igual a um, por simplicidade, em alguns resultados será suposto que $\bar{K}_p(j\omega) = K_u(j\omega)$. Como será visto mais adiante, a escolha de $\alpha(j\omega)$ tem um papel fundamental na aproximação da resposta em frequência de $\bar{K}_p(j\omega)$ por uma matriz de transferência racional, própria e estável. □

A seguir é mostrado que a normalização aproximada de GK_u (aproximadamente δ -normal ou ν -normal) pode ser relacionada a uma forma aproximadamente diagonal de $U(j\omega)^*K_u(j\omega)Y(j\omega)$. Para tanto, é necessário introduzir primeiro o conceito de matrizes alinhadas.

Definição 3.2 Seja G uma matriz complexa. Se todas as possíveis decomposições por valores singulares de $G = Y\Sigma U^*$ são tais que Y e U são alinhadas, isto é,

$$U^*Y = e^{j\Theta}, \quad (3.27)$$

onde $\Theta = \text{diag}\{\theta_i, i = 1, \dots, m\}$, então G é denominada alinhada. □

A definição 3.2 leva ao seguinte resultado.

Lema 3.3 Seja G uma matriz complexa com valores singulares todos distintos. Então, G é alinhada se e somente se G é normal.

Prova. Ver Hung e MacFarlane (1982). □

A partir do lema 3.3, é possível estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 3.6 Seja K_u uma matriz unitária e $G = Y\Sigma U^*$ uma decomposição por valores singulares de G , onde todos os valores singulares são distintos. Então, o produto GK_u é normal, se e somente se existe $\Theta = \text{diag}\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, tal que

$$U^*K_uY = e^{j\Theta}. \quad (3.28)$$

Prova. Suponha que GK_u seja uma matriz normal. Então $GK_u = Y\Sigma U^*K_u = Y\Sigma\bar{U}^*$, onde $\bar{U}^* = U^*K_u$ é também uma matriz unitária. Portanto, $GK_u = Y\Sigma\bar{U}^*$ pode ser visto como uma decomposição por valores singulares de GK_u . De acordo com o lema 3.3, uma vez que, por hipótese, GK_u é normal e G possui todos os valores singulares distintos, então GK_u é uma matriz alinhada. Logo, $\bar{U}^*Y = e^{j\Theta}$, ou seja, $U^*K_uY = e^{j\Theta}$.

O contrário pode ser facilmente provado observando-se que se a igualdade $U^*K_uY = e^{j\Theta}$ for satisfeita então GK_u é normal. \square

O teorema 3.6 mostra que, quando todos os valores singulares de G são distintos, a forma diagonal de U^*K_uY é também uma condição necessária e suficiente para que GK_u seja normal, isto é, GK_u será normal se e somente se GK_u for alinhada. Portanto, se $K_u(j\omega) = U(j\omega)e^{j\Theta}Y(j\omega)^*$ para qualquer matriz diagonal Θ , o pré-compensador estático $\bar{K}_p(j\omega) = \alpha(j\omega)K_u(j\omega)$, normaliza a planta. Contudo, esse pré-compensador não pode ser, em geral, aproximado na faixa de frequências desejada por um pré-compensador dinâmico, $K_p(s)$, com todos os elementos sendo escolhidos como funções de transferência racionais, próprias e estáveis como feito em Basilio e Sahate (2000). Isto sugere que a busca pelo exato alinhamento entre $K_u(j\omega)^*U(j\omega)$ e $Y(j\omega)$ seja substituída pela busca por um pré-compensador $K_u(j\omega)$ que torne essas duas matrizes aproximadamente alinhadas. Para tanto, é necessário definir uma medida de alinhamento¹:

$$m(G) = \min_{\Theta} \|U^*Y - e^{j\Theta}\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (3.29)$$

onde $m(G) = 0$ quando $G(j\omega)$ for alinhada e $m(G) = 2m$ quando $G(j\omega)$ for totalmente desalinhada. O resultado a seguir mostra que se $G(j\omega)$ é aproximadamente

¹Essa medida de alinhamento é a mesma utilizada em Hung e MacFarlane (1982) [problema de otimização (2.53)] com uma norma diferente.

alinhada, ou seja, se $m(G) \rightarrow 0$, então $G(j\omega)$ é aproximadamente δ -normal.

Teorema 3.7 De acordo com as medidas definidas em (2.47) e (3.29), tem-se que se $m(G) \rightarrow 0$ então $\delta(G) \rightarrow 0$.

Prova. Seja $G = Y\Sigma U^*$ uma decomposição por valores singulares de G . Portanto,

$$\begin{aligned}
\|GG^* - G^*G\|_{\mathcal{F}} &= \|Y\Sigma U^*U\Sigma Y^* - U\Sigma Y^*Y\Sigma U^*\|_{\mathcal{F}} \\
&= \|Y\Sigma^2 Y^* - U\Sigma^2 U^*\|_{\mathcal{F}} = \|U^*Y\Sigma^2 - \Sigma^2 U^*Y\|_{\mathcal{F}} \\
&= \|(U^*Y - e^{j\Theta})\Sigma^2 - \Sigma^2(U^*Y - e^{j\Theta})\|_{\mathcal{F}} \\
&\leq \|U^*Y - e^{j\Theta}\|_{\mathcal{F}}\|\Sigma^2\|_{\mathcal{F}} + \|\Sigma^2\|_{\mathcal{F}}\|U^*Y - e^{j\Theta}\|_{\mathcal{F}} \\
&= 2\|\Sigma^2\|_{\mathcal{F}}\|U^*Y - e^{j\Theta}\|_{\mathcal{F}}.
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os termos da inequação acima por $\|G^*G\|_{\mathcal{F}}$ e observando que $\|\Sigma^2\|_{\mathcal{F}} = \|G^*G\|_{\mathcal{F}}$, pode-se escrever:

$$\frac{\|GG^* - G^*G\|_{\mathcal{F}}}{\|G^*G\|_{\mathcal{F}}} \leq 2\|U^*Y - e^{j\Theta}\|_{\mathcal{F}},$$

o que leva a $\delta(G) \leq 4m(G)$. □

O teorema 3.7 mostra que se existe uma matriz unitária K_u tal que GK_u seja aproximadamente alinhada, então GK_u será aproximadamente normal, ou seja, se existe K_u tal que $\|U^*K_uY - e^{j\Theta}\|_{\mathcal{F}}^2$ seja pequeno o suficiente, então GK_u será aproximadamente δ -normal.

É importante ressaltar que é possível mostrar também que se $\|U^*\bar{K}_pY - e^{j\Theta}\|_{\mathcal{F}}$ for suficientemente pequeno, então $G\bar{K}_p$ será aproximadamente ν -normal. Para tanto, é necessário apresentar primeiro os seguintes resultados.

Lema 3.4 Seja $\Upsilon \in \mathbb{C}^{m \times m}$ tal que $\Upsilon = e^{j\Psi} + \Upsilon_0$, onde Ψ é uma matriz diagonal e $\Upsilon_0 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é tal que $\bar{\sigma}[\Upsilon_0] = \epsilon$. Então,

$$\mathcal{C}[\Upsilon] \leq \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}. \tag{3.30}$$

Prova. Usando propriedades dos valores singulares obtém-se:

$$\mathcal{C}[\Upsilon] = \frac{\bar{\sigma}[\Upsilon]}{\underline{\sigma}[\Upsilon]} \leq \frac{\bar{\sigma}[e^{j\Psi}] + \bar{\sigma}[\Upsilon_0]}{\underline{\sigma}[\Upsilon]} \leq \frac{\bar{\sigma}[e^{j\Psi}] + \bar{\sigma}[\Upsilon_0]}{\underline{\sigma}[e^{j\Psi}] - \bar{\sigma}[\Upsilon_0]} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}. \tag{3.31}$$

□

Observação 3.3 Note, de acordo com o lema 3.4, que se $\epsilon \ll 1$, ou seja, Υ é aproximadamente diagonal e unitária, então $\mathcal{C}[\Upsilon] \approx 1$. \square

Teorema 3.8 Seja $G = Y\Sigma U^*$ uma decomposição por valores singulares de G onde $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_i : i = 1, \dots, m\}$ e defina

$$E = U^* \bar{K}_p Y - e^{j\Theta}. \quad (3.32)$$

Se $\|E\|_{\mathcal{F}}$ é tal que

$$\min_{i \neq \ell} \frac{|z_i - z_\ell|}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_k^2}} \gg 2\sqrt{m} \|E\|_{\mathcal{F}}, \quad (3.33)$$

para $i = 1, \dots, m$ e $\ell = 1, \dots, m$, onde z_i denota o i -ésimo elemento da diagonal principal de $Z = \Sigma e^{j\Theta}$, então $G\bar{K}_p$ é aproximadamente ν -normal.

Prova. Considere a seguinte decomposição espectral do produto $G\bar{K}_p$ dada por:

$$G\bar{K}_p = W_p \Lambda_p V_p, \quad (3.34)$$

onde $V_p = W_p^{-1}$, e note que a matriz de autovetores de $G\bar{K}_p$, W_p , sempre pode ser escrita como:

$$W_p = Y\Upsilon, \quad (3.35)$$

onde $\Upsilon \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é uma matriz não-singular com todas as suas colunas com norma euclidiana igual a um. Logo, utilizando as equações (3.34) e (3.35), pode-se escrever:

$$G\bar{K}_p = W_p \Lambda_p V_p = Y\Upsilon \Lambda_p \Upsilon^{-1} Y^*. \quad (3.36)$$

Substituindo \bar{K}_p na equação acima, de acordo com a equação (3.32), obtém-se:

$$G(UEY^* + Ue^{j\Theta}Y^*) = Y\Upsilon \Lambda_p \Upsilon^{-1} Y^*. \quad (3.37)$$

Portanto, a partir da decomposição em valores singulares de G , a equação (3.37) pode ser reescrita como:

$$Y\Sigma EY^* + Y\Sigma e^{j\Theta}Y^* = Y\Upsilon \Lambda_p \Upsilon^{-1} Y^*. \quad (3.38)$$

Multiplicando-se a equação acima à esquerda por Y^* e à direita por Y , obtém-se:

$$\Sigma E + \Sigma e^{j\Theta} = \Upsilon \Lambda_p \Upsilon^{-1}. \quad (3.39)$$

Utilizando o teorema de Bauer-Fike (teorema 2.5) na equação (3.39), tem-se que, associado a cada valor da diagonal principal de $\Sigma e^{j\Theta}$, $\sigma_i e^{j\theta_i}$, existe um autovalor de Λ_p , λ_{p_i} , tal que:

$$|\sigma_i e^{j\theta_i} - \lambda_{p_i}| \leq \bar{\sigma}(\Sigma E) \leq \|\Sigma\|_{\mathcal{F}} \|E\|_{\mathcal{F}}. \quad (3.40)$$

Portanto, definindo a matriz complexa

$$\hat{\Delta} = \Sigma e^{j\Theta} - \Lambda_p, \quad (3.41)$$

pode-se verificar, a partir da inequação (3.40) e observando que $\hat{\Delta}$ é uma matriz diagonal, que

$$\bar{\sigma}(\hat{\Delta}) = \max_i |\sigma_i e^{j\theta_i} - \lambda_{p_i}| \leq \|\Sigma\|_{\mathcal{F}} \|E\|_{\mathcal{F}}. \quad (3.42)$$

Substituindo, agora, Λ_p de acordo com a equação (3.41), pode-se reescrever a equação (3.39) como:

$$\Sigma E + \Sigma e^{j\Theta} = \Upsilon(\Sigma e^{j\Theta} - \hat{\Delta})\Upsilon^{-1}, \quad (3.43)$$

e, após algumas manipulações algébricas simples, a equação (3.43) pode ser reescrita como:

$$\Upsilon \Sigma e^{j\Theta} - \Sigma e^{j\Theta} \Upsilon = \Sigma E \Upsilon + \Upsilon \hat{\Delta}. \quad (3.44)$$

Aplicando, agora, a norma de Frobenius na equação (3.44) e utilizando a propriedade sub-multiplicativa da norma de matrizes, tem-se que:

$$\|\Upsilon \Sigma e^{j\Theta} - \Sigma e^{j\Theta} \Upsilon\|_{\mathcal{F}} \leq \|\Sigma\|_{\mathcal{F}} \|E\|_{\mathcal{F}} \|\Upsilon\|_{\mathcal{F}} + \|\Upsilon \hat{\Delta}\|_{\mathcal{F}}. \quad (3.45)$$

Note que, como todas as colunas de Υ possuem norma euclidiana igual a um, então $\|\Upsilon\|_{\mathcal{F}} = \sqrt{m}$. Além disso, pode-se verificar que

$$\|\Upsilon \hat{\Delta}\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{i=1}^m |\hat{\delta}_i|^2 \|\psi_i\|_2^2 \leq m \max_i |\hat{\delta}_i|^2 = m \bar{\sigma}^2(\hat{\Delta}), \quad (3.46)$$

onde $\hat{\delta}_i$ denota o i -ésimo elemento da diagonal principal de $\hat{\Delta}$. Portanto, utilizando as inequações (3.42) e (3.46) na desigualdade (3.45), encontra-se a seguinte expressão:

$$\|\Upsilon \Sigma e^{j\Theta} - \Sigma e^{j\Theta} \Upsilon\|_{\mathcal{F}} \leq 2\sqrt{m} \|\Sigma\|_{\mathcal{F}} \|E\|_{\mathcal{F}}, \quad (3.47)$$

que é equivalente a:

$$\frac{\|\Upsilon \Sigma e^{j\Theta} - \Sigma e^{j\Theta} \Upsilon\|_{\mathcal{F}}}{\|\Sigma\|_{\mathcal{F}}} \leq 2\sqrt{m}\|E\|_{\mathcal{F}}. \quad (3.48)$$

Denotando por $Z = \Sigma e^{j\Theta}$, então, pode-se observar que o elemento (i, ℓ) de $Z\Upsilon - \Upsilon Z$ é dado por $(z_i - z_\ell)v_{i\ell}$, onde $v_{i\ell}$ denota o elemento (i, ℓ) de Υ . Logo,

$$\|Z\Upsilon - \Upsilon Z\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{\ell=1}^m \sum_{i=1, i \neq \ell}^m |z_i - z_\ell|^2 |v_{i\ell}|^2. \quad (3.49)$$

Portanto, pode-se verificar que o termo à esquerda da inequação (3.48) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\left(\sum_{\ell=1}^m \sum_{i=1, i \neq \ell}^m |v_{i\ell}|^2 \right)^{1/2} \min_{i \neq \ell} \frac{|z_i - z_\ell|}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_k^2}} \leq \frac{\|\Upsilon \Sigma e^{j\Theta} - \Sigma e^{j\Theta} \Upsilon\|_{\mathcal{F}}}{\|\Sigma\|_{\mathcal{F}}}. \quad (3.50)$$

Portanto, a partir das inequações (3.48) e (3.50), tem-se que:

$$\left(\sum_{\ell=1}^m \sum_{i=1, i \neq \ell}^m |v_{i\ell}|^2 \right)^{1/2} \min_{i \neq \ell} \frac{|z_i - z_\ell|}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_k^2}} \leq 2\sqrt{m}\|E\|_{\mathcal{F}}. \quad (3.51)$$

Supondo, agora, que $\|E\|_{\mathcal{F}}$ satisfaz a condição (3.33), então

$$\left(\sum_{\ell=1}^m \sum_{i=1, i \neq \ell}^m |v_{i\ell}|^2 \right)^{1/2} \ll 1. \quad (3.52)$$

Como Υ tem a restrição de ter todas as suas colunas com norma euclidiana igual a um, a inequação (3.52) implica que Υ é uma matriz aproximadamente diagonal e unitária, o que, de acordo com o lema 3.4 e observação 3.3, mostram que o número de condicionamento de Υ é aproximadamente igual a um, concluindo a prova, uma vez que $\mathcal{C}[W_p] = \mathcal{C}[Y\Upsilon] = \mathcal{C}[\Upsilon]$. \square

Observação 3.4 Note que na condição dada pela inequação (3.33), tanto o termo à esquerda quanto o termo à direita dependem de Θ . Portanto, mesmo que $\|E\|_{\mathcal{F}}$ tenha um valor pequeno, é possível que $G\bar{K}_p$ não seja aproximadamente ν -normal se a condição (3.33) não for satisfeita. \square

Os teoremas 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 mostram que o problema de projetar um pré-compensador que torne a planta pré-compensada aproximadamente normal, em uma dada frequência, pode ser formulado como:

$$\mathbf{Prob. 1:} \min_{K_u} \min_{\Theta} J(K_u, \Theta), \quad (3.53)$$

onde

$$J(K_u, \Theta) = \|U^* K_u Y - e^{j\Theta}\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (3.54)$$

sujeito a K_u ser uma matriz unitária e cada elemento da diagonal principal de Θ , $\theta_i \in (0, 2\pi]$, para $i = 1, \dots, m$.

3.4.2 Solução do problema de otimização

Utilizando a definição da norma de Frobenius (equação (2.48)) e após algumas manipulações algébricas, a equação (3.54) pode ser escrita da seguinte forma:

$$J(K_u, \Theta) = 2m - 2\text{Re}\{\text{tr}(U^* K_u Y e^{-j\Theta})\}, \quad (3.55)$$

onde $\text{Re}\{\cdot\}$ denota a parte real de uma matriz complexa.

Definindo as matrizes unitárias $T_u = U^* K_u Y$ e $H_u = U^* K_u Y e^{-j\Theta}$, e denotando cada elemento de H_u por h_{ij} , então a equação (3.55) pode ser reescrita como:

$$J(K_u, \Theta) = 2m - 2[\text{Re}(h_{11}) + \text{Re}(h_{22}) + \dots + \text{Re}(h_{mm})]. \quad (3.56)$$

A partir da equação (3.55), é possível ver que cada elemento $e^{-j\theta_i}$ da diagonal principal de $e^{-j\Theta}$ multiplica a i -ésima coluna de T_u . Denotando por t_{ij} cada elemento de T_u , então Θ que minimiza a função custo $J(K_u, \Theta)$, dada pela equação (3.56), é tal que cada número complexo $h_{ii} = t_{ii} e^{-j\theta_i}$ deve ser real e positivo. Logo, definindo $t_{ii} = |t_{ii}| e^{j\alpha}$, então o valor ótimo para θ_i , $i = 1, 2, \dots, m$ será dado por $\theta_i = \alpha_i + 2\kappa\pi$, onde $\kappa \in \mathbb{Z}$. Portanto, o valor mínimo de $J(K_u, \Theta)$ depende somente de K_u e é dado por:

$$J_{\min}(K_u) = 2m - 2(|t_{11}| + |t_{22}| + \dots + |t_{mm}|). \quad (3.57)$$

Conseqüentemente, de acordo com a equação (3.57), o problema de otimização 1 é equivalente a:

$$\mathbf{Prob. 2:} \max_{K_u} J_{\max}(K_u), \quad (3.58)$$

onde

$$J_{\max}(K_u) = \sum_{i=1}^m |t_{ii}|. \quad (3.59)$$

Note, de acordo com a equação (3.59) e a definição de T_u , que o pré-compensador K_u que soluciona o problema 2 torna a matriz unitária T_u o mais dominante diagonal possível. Neste trabalho, assim como a estrutura para o pré-compensador utilizada em Basilio e Sahate (2000), a estrutura adotada para K_u será de uma matriz diagonal permutada, sendo dada por:

$$K_u = P_l K_d, \quad (3.60)$$

onde P_l ($l = 1, 2, \dots, m!$) é uma matriz obtida entre todas as possíveis permutações das colunas da matriz identidade (matriz de permutação) e K_d é uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são iguais a 1 ou -1 , para garantir que K_u seja unitária. Note que, uma vez que ao multiplicar uma matriz unitária por -1 o resultado ainda é uma matriz unitária, então é possível formar 2^{m-1} matrizes diagonais diferentes K_d . Essa escolha para K_u é motivada pelo fato do uso de matrizes de permutação ser comum no projeto de pré-compensadores pelos Métodos das Cadeias de Nyquist (Maciejowski, 1989; Edmunds, 1998) para a obtenção de dominância diagonal. Além disso, é importante ressaltar que, para um número finito de frequências ω_k , pré-compensadores estáticos $K_u(j\omega_k)$ serão calculados. Note que esses pré-compensadores devem ter uma estrutura que seja possível, ao final, encontrar um pré-compensador dinâmico, $K_p(s)$, que aproxime a magnitude da resposta em frequência de seus elementos da magnitude dos elementos de $K_u(j\omega_k)$. Portanto, a estrutura para $K_u(j\omega_k)$ deve ser a mais simples possível.

É importante ressaltar também que a escolha para $K_u(j\omega)$ dada pela expressão (3.60) está de acordo com a proposta original do método do lugar característico. Segundo MacFarlane e Belletruti (1973), os controladores projetados devem ser os mais simples possíveis, sendo sugeridas, entre outras estruturas, as seguintes formas para os pré-compensadores:

(i) Matriz de transformações elementares

$$K_i(s) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & k_{\ell\ell}(s) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.61)$$

onde $k_{\ell\ell}(s)$ é uma função de transferência racional, estável e de fase mínima.

(ii) Matriz de permutação

$$K_i(s) = P_l. \quad (3.62)$$

3.4.3 Implementação do pré-compensador

Tendo $K_u(j\omega)$ sido calculada para cada frequência ω na faixa de frequências de interesse, o próximo passo é o projeto de um pré-compensador normalizante dinâmico $K_p(s)$. Note que $K_u(j\omega)$ é real e unitária, enquanto que $K_p(s)$ deve ter como elementos somente funções de transferência racionais, próprias e estáveis. Isto mostra a necessidade de se adicionar fase e módulo a cada elemento diferente de zero de $K_u(j\omega)$. Note, porém, que o pré-compensador estático \bar{K}_p foi feito igual a K_u somente por simplicidade (observação 3.2), sendo na verdade igual a $\bar{K}_p(j\omega) = \alpha(j\omega)K_u(j\omega)$ onde $\alpha(j\omega)$ é um número complexo. Portanto, escolhendo-se apropriadamente os valores de $\alpha(j\omega)$, é possível adicionar a mesma fase e módulo a cada elemento diferente de zero de $K_u(j\omega)$ de forma a aproximá-los de uma função de transferência racional, própria e estável. É importante ressaltar também que, uma vez que K_u é unitária, então é necessário impor a condição $|\alpha| \leq 1$ para evitar o alargamento das regiões que contêm os lugares característicos da planta pré-compensada, quando a incerteza é modelada como uma perturbação aditiva na planta, assim como é feito em Basilio e Sahate (2000).

Na prática, porém, não é necessário escolher $\alpha(j\omega)$ a cada frequência para, em seguida, calcular os elementos de $K_p(s)$. Note que $K_p(s)$ pode ser obtido escolhendo-se, para uma determinada faixa de frequências, uma única função de transferência

para os seus elementos que estão associados aos elementos diferentes de zero de $K_u(j\omega)$, de forma que as suas magnitudes sejam aproximadamente iguais às magnitudes dos elementos diferentes de zero de $K_u(j\omega)$. Este procedimento, como será visto na subsecção 3.4.4, leva a um pré-compensador dinâmico $K_p(s)$ que aproximadamente alinha a planta pré-compensada $G(j\omega)K_p(j\omega)$ quando $K_u(j\omega)$ alinha $G(j\omega)K_u(j\omega)$. Uma exceção é feita na vizinhança das frequências onde ocorrem saltos nos elementos de K_u , uma vez que, nessas frequências, os módulos dos elementos de $K_p(j\omega)$ são diferentes dos elementos de $K_u(j\omega)$. Esse problema pode ser contornado aumentando-se a ordem dos pólos ou zeros associados às frequências onde ocorrem os saltos; embora com este procedimento haja um aumento na ordem do pré-compensador. Neste trabalho, visando tornar o sistema pré-compensado com a menor ordem possível, somente aproximações por funções de transferência de primeira ordem serão consideradas.

O procedimento para obtenção do pré-compensador dinâmico pode ser resumido no seguinte algoritmo.

Algoritmo 3.1

1. Forme as 2^{m-1} matrizes diagonais K_d de dimensão m com 1 ou -1 na sua diagonal principal.
2. Selecione um número finito de frequências ω_k , $k = 1, 2, \dots, n$ e faça $l = 1$ e $k = 1$.
3. Se $l = 1$, escolha uma matriz de permutação P_l . Se $l > 1$ forme uma matriz de permutação P_l diferente das matrizes de permutação já formadas.
4. Usando P_l definida no passo 3, calcule, para cada uma das 2^{m-1} matrizes K_d , definidas no passo 1, $T_u = U^* P_l K_d Y$ e a função custo $J_{max}(P_l, K_d) = \sum_{i=1}^m |t_{ii}|$. Encontre $J_{max}(l) = \max_{K_d} J_{max}(P_l, K_d)$ e a matriz K_d^{max} que leva a $J_{max}(l)$.
5. Faça $l = l + 1$ e repita os passos 3 e 4 até que $l = m!$.

6. Entre todos os l custos $J_{max}(l)$, calculados no passo 4, encontre $J_{max} = \max_l J_{max}(l)$ e selecione as matrizes K_d^{opt} e P_l^{opt} que levam a J_{max} . Forme $K_u(j\omega_k) = P_l^{opt} K_d^{opt}$.
7. Faça $k = k + 1$ e $l = 1$ e retorne para o passo 3. Repita os passos 3 a 7 até que $k = n$.
8. Encotre funções de transferência racionais, próprias e estáveis para cada elemento de $K_p(s)$, tal que as magnitudes das respostas em frequência de seus elementos se aproximem das magnitudes dos elementos de $K_u(j\omega_k)$, para $k = 1, \dots, n$.

□

Exemplos de aplicação do método proposto nesta seção serão apresentados na próxima subseção.

3.4.4 Exemplos

Nesta subseção dois exemplos extraídos da literatura serão usados para ilustrar o método de pré-compensação apresentado nesta seção: o primeiro exemplo corresponde a um sistema 2×2 que foi utilizado em Doyle e Stein (1981) para mostrar o problema de sensibilidade do MLC e o segundo exemplo corresponde a um sistema 3×3 representando o modelo linearizado da dinâmica vertical de uma aeronave (Hung e MacFarlane, 1982; Maciejowski, 1989; Moreira e Basilio, 2005).

Exemplo 3.1 Seja

$$G(s) = \frac{1}{d(s)}N(s)$$

onde $d(s) = (s + 1)(s + 2)$ e

$$N(s) = \begin{bmatrix} -47s + 2 & 56s \\ -42s & 50s + 2 \end{bmatrix}.$$

O primeiro passo é decidir se a planta necessita de pré-compensação normalizante. Para tanto, é necessário calcular o número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de $N(s)$ $[C_{opt}(W)]$ e o desvio de $G(s)$ da normalidade ($\delta(G)$),

definido na equação (2.47)). Como pode ser observado neste exemplo o número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores é muito elevado (aproximadamente 196) em todas as frequências, exceto na frequência dc, $\omega = 0$. Os valores de $\delta(G)$ são mostrados na figura 3.3 (linha contínua), de onde se pode verificar que $\delta(G)$ é elevado para quase todas as frequências. Logo, $G(s)$ não é normal em quase todas as frequências. Na figura 3.3 é também apresentado o gráfico do desvio do alinhamento de $G(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) ($m(G)$, definida na equação (3.29)), que, como esperado, mostra que $G(s)$ não é alinhada para quase todas as frequências.

É importante ressaltar que, neste exemplo, apesar da medida de alinhamento ser praticamente igual a zero próximo da frequência dc, o número de condicionamento da matriz de autovetores é elevado. Isto ocorre porque ao se resolver o problema de otimização (3.53), (3.54), para frequências próximas da frequência dc, com $K_u = I$, os valores da diagonal principal de $\Sigma e^{j\Theta}$ são muito próximos e, portanto, mesmo com $m(G)$ tendo um valor pequeno nessas frequências, o número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de G é elevado. Para entender melhor este fato, considere a matriz de transferência da planta na frequência $\omega = 0,005$,

$$G(j0,005) = \begin{bmatrix} 0,9991 - 0,1250j & 0,001 + 0,14j \\ -0,0008 - 0,1050j & 1,0009 + 0,1175j \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

e considere uma decomposição por valores singulares de $G(j\omega) = Y(j\omega)\Sigma(j\omega)U^*(j\omega)$, onde $\omega = 0,005$, dada por:

$$Y(j0,005) = \begin{bmatrix} -0,7064 + 0,0887j & -0,6969 + 0,0868j \\ 0,0026 + 0,7022j & -0,0020 - 0,7119j \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

$$\Sigma(j0,005) = \begin{bmatrix} 1,13 & 0 \\ 0 & 0,885 \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

e

$$U(j0,005) = \begin{bmatrix} -0,6996 & -0,7145 \\ 0,0856 + 0,7094j & -0,0838 - 0,6946j \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

Como mostrado na subseção 3.4.2, o valor de Θ ótimo para o problema de otimização (3.53) é dado pelos ângulos dos elementos da diagonal principal da matriz $T_u = U^*Y$:

$$T_u = \begin{bmatrix} 0,9926 - 0,0037j & -0,0176 - 0,1203j \\ 0,0167 - 0,1204j & 0,9926 - 0,0037j \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

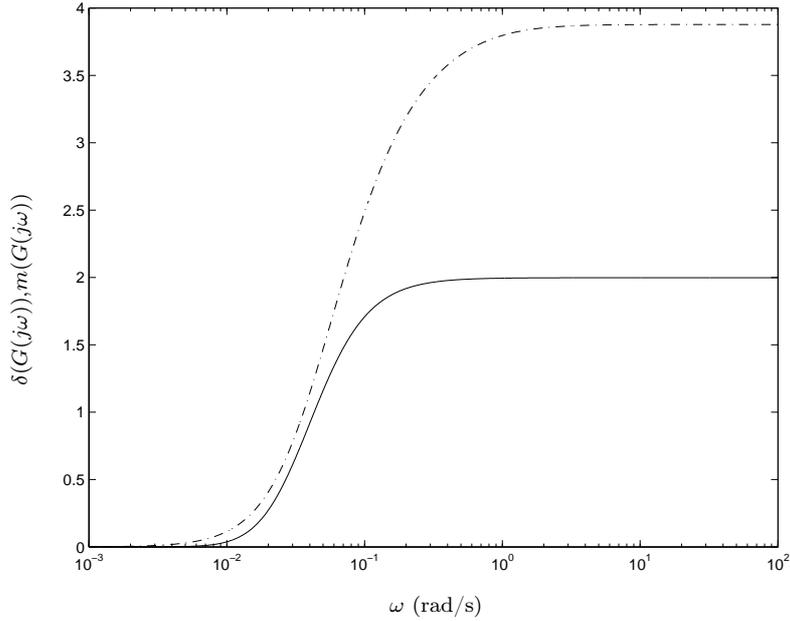


Figura 3.3: Medidas de normalidade $\delta(G(j\omega))$ (linha contínua) e desalinhamento $m(G(j\omega))$ (linha traço-pontilhada).

que, como pode ser visto, são iguais. Logo, os elementos da diagonal principal da matriz $\Sigma e^{j\Theta}$ são todos aproximadamente iguais, o que faz com que mesmo com $m(G) \approx 0$, a condição suficiente imposta pelo teorema 3.8 não seja satisfeita, uma vez que:

$$\frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 0,1707 \quad \text{e} \quad 2\sqrt{2}\|E\|_{\mathcal{F}} = 0,4873.$$

Visando tornar o sistema robusto a perturbações multiplicativas modeladas na entrada ou na saída da planta e observando que a planta é desalinhada em quase todas as frequências, uma alternativa é procurar o alinhamento da planta pré-compensada. Para tanto, é seguido o procedimento descrito no algoritmo 3.1. Como a matriz de transferência da planta é 2×2 , então é necessário verificar o alinhamento das matrizes GK_{u_i} , para $i = 1,2,3$, onde cada K_{u_i} é dado por:

$$K_{u_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, K_{u_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, K_{u_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Na figura 3.4 são apresentadas as medidas de desalinhamento de $G(j\omega)K_{u_i}(j\omega)$ para $i = 1,2,3$, onde pode-se observar que para K_{u_3} a medida de desalinhamento $m(GK_{u_3})$ é praticamente igual a zero para todas as frequências. A figura 3.5 mostra

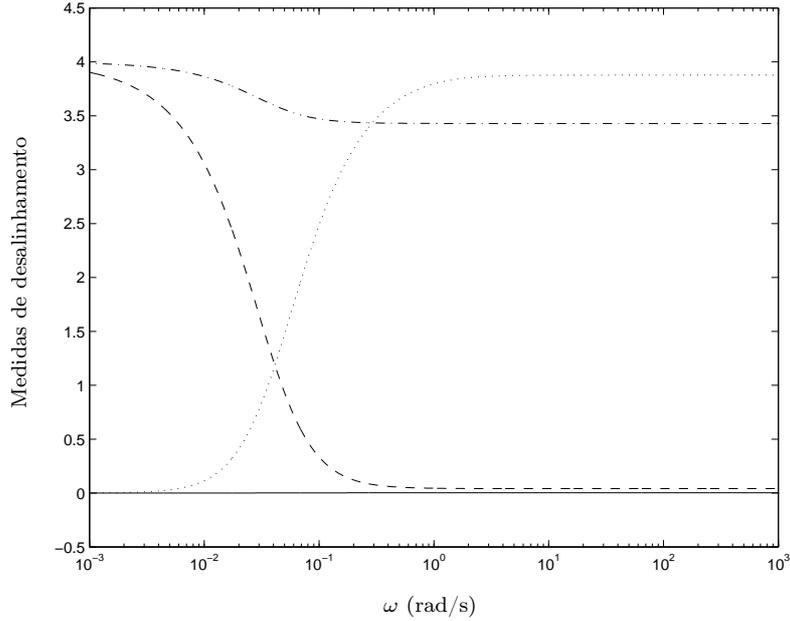


Figura 3.4: Medida de desalinhamento $m(GK_u)$ para $K_u = I$ (linha pontilhada), $K_u = K_{u_1}$ (linha tracejada), $K_u = K_{u_2}$ (linha traço-pontilhada) e $K_u = K_{u_3}$ (linha contínua).

o gráfico para as medidas de normalidade (linha contínua) e desalinhamento (linha traço-pontilhada) para $\bar{G}(s) = G(s)K_{u_3}$, onde pode ser visto que $m(\bar{G}) < 2 \times 10^{-3}$, *i.e.*, $\bar{G}(j\omega)$ é aproximadamente alinhada para todas as frequências. Como esperado, de acordo com o teorema 3.7, o sistema pré-compensado é aproximadamente δ -normal para $\bar{K}_p = K_{u_3}$ em todas as frequências, como mostrado na figura 3.5. Além disso, $G(j\omega)K_{u_3}$ é também aproximadamente ν -normal para todas as frequências, inclusive para as frequências onde os valores singulares são próximos, como mostrado na figura 3.6. Isto ocorre porque agora, apesar dos valores singulares de $G(j\omega)K_{u_3}$ serem ainda aproximadamente iguais nas frequências próximas da frequência dc, os valores da diagonal de $e^{j\Theta}$ não são iguais. Para ilustrar este fato considere, agora, a matriz T_u para o sistema pré-compensado na frequência $\omega = 0,005$, $T_u = U^*(j0,005)K_{u_3}Y(j0,005)$, dada por:

$$T_u = \begin{bmatrix} -0,0042 - 1,0000j & -0,0005 - 0,0037j \\ 0,0005 - 0,0037j & 0,0033 + 1,0000j \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

Como pode ser verificado a partir da equação acima, os valores de $e^{j\Theta}$ são praticamente opostos, o que significa que os valores dos elementos da diagonal de $\Sigma e^{j\Theta}$ estão suficientemente afastados, satisfazendo a condição suficiente do teorema 3.8

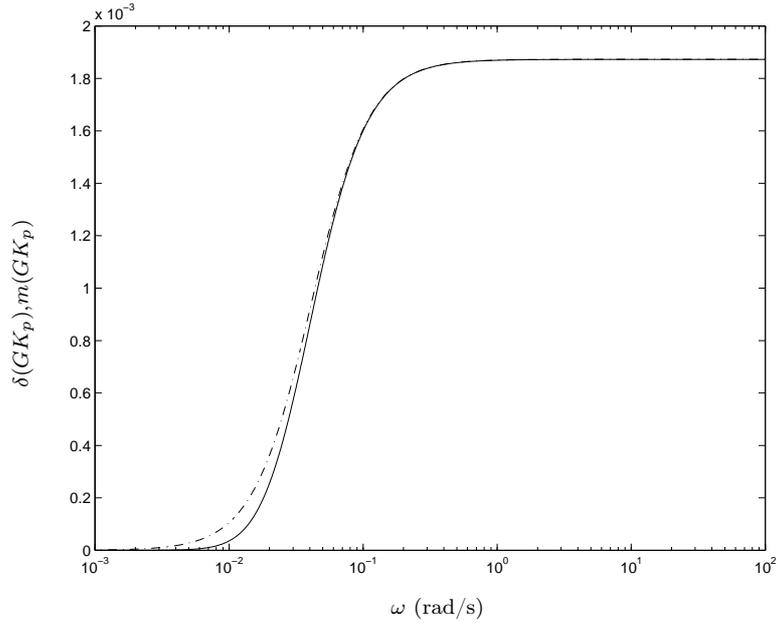


Figura 3.5: Medidas de normalidade $\delta(\bar{G})$ (linha contínua) e desalinhamento $m(\bar{G})$ (linha traço-pontilhada).

como mostrado abaixo:

$$\frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 1,4039 \quad \text{e} \quad 2\sqrt{2}\|E\|_{\mathcal{F}} = 0,0149$$

e, portanto, como $0,0149 \ll 1,4039$, então $\mathcal{C}_{opt}[W_p] \approx 1$.

Neste exemplo, como para $\bar{K}_p = K_{u_3}$ a normalidade de $G(j\omega)\bar{K}_p$ foi obtida para todas as frequências, então não é necessário projetar um pré-compensador dinâmico.

Uma vez que o sistema pré-compensado é aproximadamente normal em todas as frequências, é possível então aplicar agora o MLC, de forma confiável, do ponto de vista de robustez, na matriz pré-compensada GK_p .

Exemplo 3.2 Considere, agora, a seguinte matriz de transferência do modelo linearizado da dinâmica vertical de uma aeronave:

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} n_{11}(s) & n_{12}(s) & n_{13}(s) \\ n_{21}(s) & n_{22}(s) & n_{23}(s) \\ n_{31}(s) & n_{32}(s) & n_{33}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

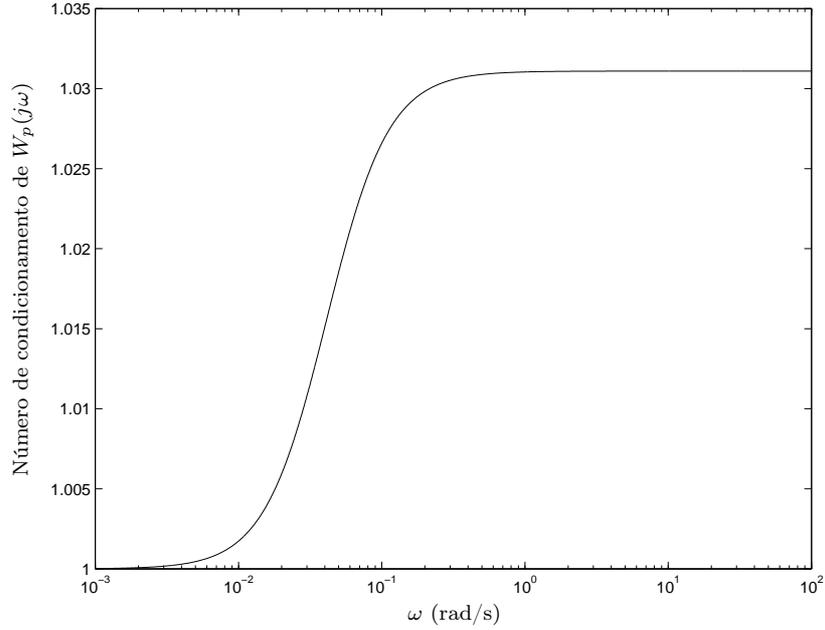


Figura 3.6: Número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de $G(j\omega)\bar{K}_p(j\omega)$, $W_p(j\omega)$.

onde

$$\begin{aligned}
 d(s) &= s^5 + 1,5953s^4 + 1,7572s^3 + 0,1112s^2 + 0,0561s \\
 n_{11}(s) &= -1,5750s^3 - 1,1190s^2 + 1,5409s - 0,0816 \\
 n_{12}(s) &= 0,2909s^2 + 0,2527s + 0,3712 \\
 n_{13}(s) &= 0,0732s^3 - 0,0646s^2 - 1,2125s - 0,0204 \\
 n_{21}(s) &= -0,12s^4 - 0,0739s^3 - 0,5319s^2 - 0,2458s \\
 n_{22}(s) &= s^4 + 1,5415s^3 + 1,6537s^2 \\
 n_{23}(s) &= -0,0052s^3 + 0,1570s^2 + 0,1828s \\
 n_{31}(s) &= 4,419s^3 + 1,6674s^2 + 0,1339s \\
 n_{32}(s) &= 0,0485s^2 + 0,3279s \\
 n_{33}(s) &= -1,6650s^3 - 1,1574s^2 - 0,0918s.
 \end{aligned}$$

Para utilizar o MLC no projeto de um controlador comutativo para $G(s)$, deve-se em primeiro lugar verificar se $G(j\omega)$ é aproximadamente normal. Isto é feito calculando-se as medidas de normalidade e desalinhamento de $G(j\omega)$, de acordo com as equações (2.47) e (3.29), respectivamente. Como pode ser visto a partir da figura 3.7 (linha contínua), $G(j\omega)$ não é normal nas baixas frequências e é aproximadamente δ -normal nas frequências superiores a 10 rad/s). Além disso, na figura 3.7 (linha traço-pontilhada) pode-se ver que $G(j\omega)$ não é alinhada para todas as frequências. Na figura 3.8 é apresentado o número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de $G(j\omega)$, $\mathcal{C}_{opt}[W]$, obtido resolvendo-se o problema de otimização (3.7), onde pode ser visto que para frequências baixas o sistema não é normal,

assim como para frequências altas. A discrepância nas altas frequências entre a δ -normalidade e a ν -normalidade se deve ao fato de que $G(j\omega) \rightarrow O$ para frequências superiores a 10 rad/s. Isto mostra que a medida do desvio da normalidade $\delta(G)$ não é, nesse exemplo, confiável para medir a sensibilidade dos lugares característicos da função de transferência do sistema em malha aberta $G(s)K(s)$, uma vez que para um controlador comutativo $K(s)$ projetado de forma que $G(j\omega)K(j\omega)$ não seja mais aproximadamente igual a uma matriz nula para $\omega = 10$ rad/s, então pelo número de condicionamento dos autovetores de $G(j\omega)$, pode-se concluir que $G(j\omega)K(j\omega)$ será uma matriz não-normal.

Supondo que o objetivo seja tornar a planta pré-compensada aproximadamente normal na maior faixa de frequências possível, será projetado um pré-compensador dinâmico. Para tanto, o projeto é feito de acordo com o algoritmo 3.1. Uma vez que $m = 3$ (a dimensão de $G(s)$), o primeiro passo é formar $2^{m-1} = 4$ matrizes diagonais K_d com 1 e -1 na sua diagonal principal. Portanto, K_d tem as seguintes formas:

$$K_{d_1} = I_3, K_{d_2} = \text{diag}\{-1, 1, 1\}, K_{d_3} = \text{diag}\{1, -1, 1\} \text{ e } K_{d_4} = \text{diag}\{1, 1, -1\}. \quad (3.71)$$

Além disso, existem $l = m! = 6$ matrizes de permutação P_l e, portanto, os passos 3 e 4 do algoritmo 3.1 serão repetidos 6 vezes para cada matriz K_{d_i} , $i = 1, \dots, 4$, dadas pelas expressões (3.71). O próximo passo é obter K_d^{opt} e P_l^{opt} para cada frequência ω_k , levando a uma resposta em frequência desejada $K_u(j\omega_k)$, como mostrado na figura 3.9 (linha marcada com x). Note que, para o $K_u(j\omega)$ obtido, a planta pré-compensada GK_u é aproximadamente alinhada para quase todas as frequências, conforme pode ser visto na figura 3.10 (linha traço-pontilhada). Isto implica, de acordo com os teoremas 3.7 e 3.8, que GK_u é também, nessas mesmas frequências, aproximadamente δ -normal como mostrado na figura 3.11 e aproximadamente ν -normal como mostrado na figura 3.12 (linhas traço-pontilhadas).

O último passo (passo 8) no projeto do pré-compensador é encontrar funções de transferência racionais, próprias e estáveis para cada elemento de $K_p(s)$, tal que a magnitude da resposta em frequência de seus elementos se aproxime da magnitude dos elementos diferentes de zero de $K_u(j\omega)$, mostrados na figura 3.9, para cada

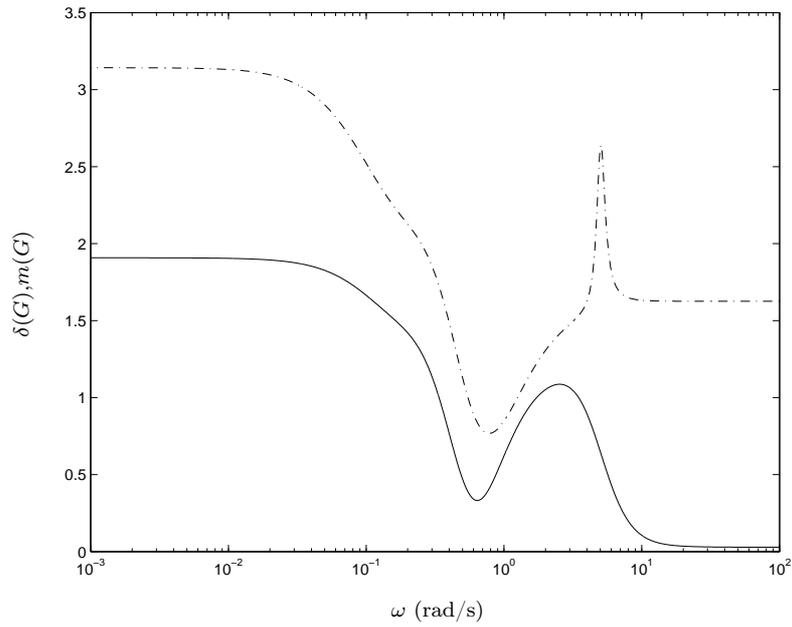


Figura 3.7: Medidas de normalidade $\delta(G(j\omega))$ (linha contínua) e desalinhamento $m(G(j\omega))$ (linha traço-pontilhada).

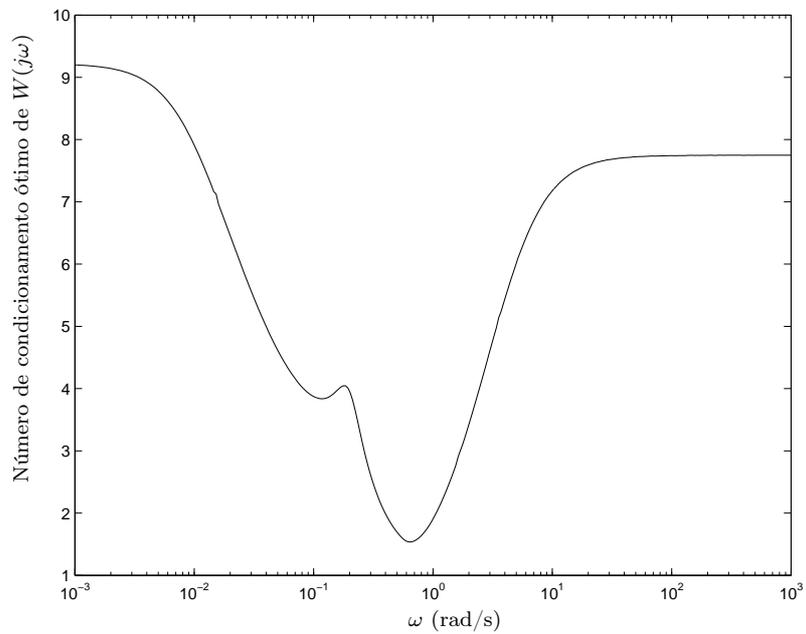


Figura 3.8: Número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de $G(j\omega)$, $W(j\omega)$.

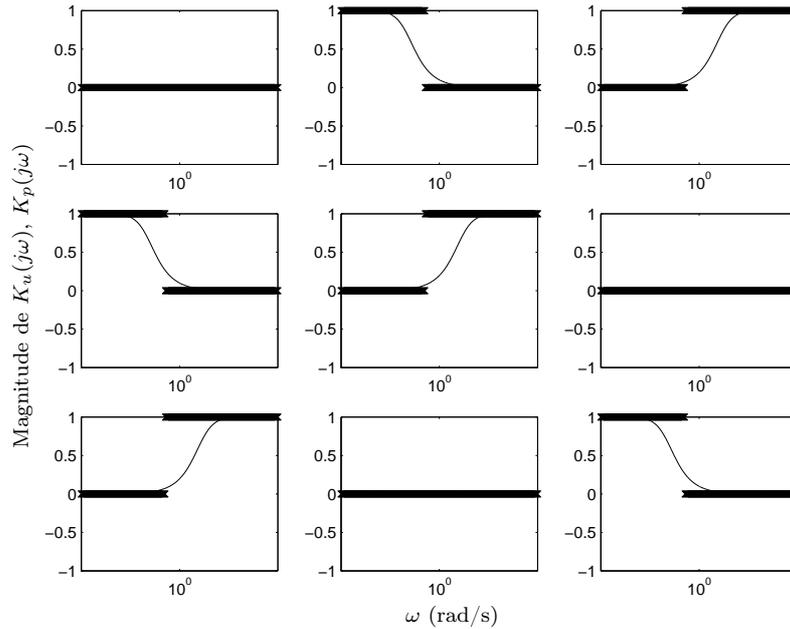


Figura 3.9: Magnitude de $K_u(j\omega)$ (linha marcada com x) e para a aproximação racional $K_p(j\omega)$ (linha contínua).

freqüência ω . Note que, neste exemplo, os elementos de $K_p(s)$ podem ser escolhidos como uma função de transferência de primeira ordem nas baixas freqüências, de forma que esses elementos sejam aproximadamente iguais, em magnitude, aos elementos diferentes de zero de $K_u(j\omega)$, indo para zero nas altas freqüências, e outra função de transferência que se aproxime em magnitude dos elementos de $K_u(j\omega)$ diferentes de zero nas altas freqüências, e seja igual a zero nas baixas freqüências. Um pré-compensador dinâmico que satisfaz esses requisitos é dado por:

$$K_p(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{0,1}{s+0,1} & \frac{s}{s+5} \\ \frac{0,1}{s+0,1} & \frac{s}{s+5} & 0 \\ \frac{s}{s+5} & 0 & \frac{0,1}{s+0,1} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

Note, a partir da figura 3.9, que as magnitudes de cada elemento de $K_u(j\omega)$ e $K_p(j\omega)$ se aproximam bastante, o que leva a um pré-compensador dinâmico $K_p(s)$ aproximadamente unitário nas baixas e altas freqüências. Como pode ser visto nas figuras 3.12 e 3.11, exceto na vizinhança das freqüências onde ocorrem saltos nas respostas em freqüência dos elementos de K_u , as medidas de normalidade e o número de condicionamento ótimo da matriz dos autovetores de GK_p (linhas contínuas) são muito próximas das desejadas (linhas traço-pontilhadas). Portanto, também neste

exemplo, obtêm-se uma planta pré-compensada aproximadamente normal (ν -normal e δ -normal) em quase todas as frequências, e o método do lugar característico pode ser aplicado à planta pré-compensada.

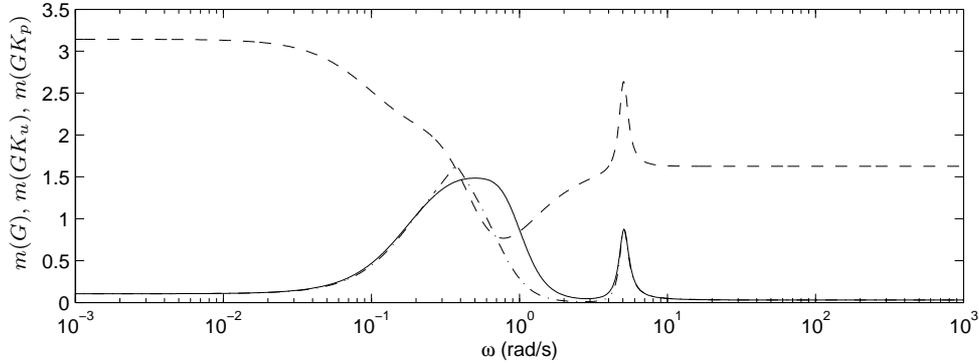


Figura 3.10: Medidas de desalinhamento $m(G)$ (linha tracejada), $m(GK_u)$ (linha traço-pontilhada) e $m(GK_p)$ (linha contínua).

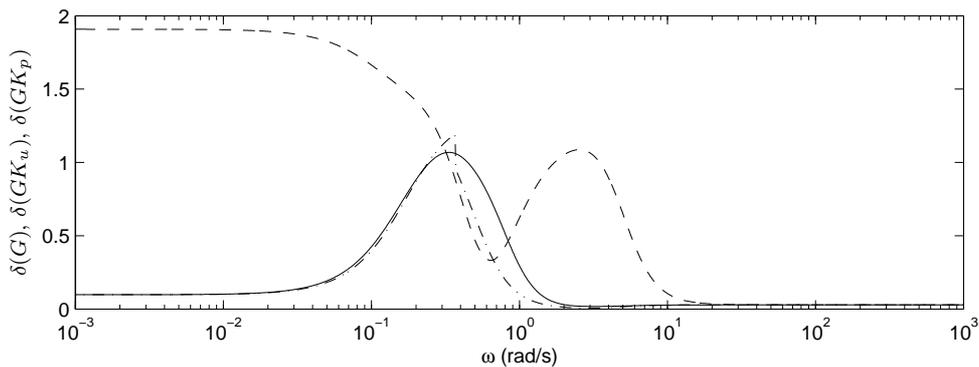


Figura 3.11: Medidas de normalidade $\delta(G)$ (linha tracejada), $\delta(GK_u)$ (linha traço-pontilhada) e $\delta(GK_p)$ (linha contínua).

3.5 Pré-compensadores normalizantes estáticos

Na seção anterior, pré-compensadores foram projetados para tornar a planta pré-compensada aproximadamente normal na maior faixa de frequências possível. Para tanto, pré-compensadores dinâmicos são necessários, uma vez que, em geral, não é possível normalizar a planta em todas as frequências com um único pré-compensador estático. Desta forma, uma estrutura simples para o pré-compensador projetado a cada frequência deve ser adotada para que seja possível obter-se uma boa aproximação por um pré-compensador dinâmico, o que implica em uma restrição quanto

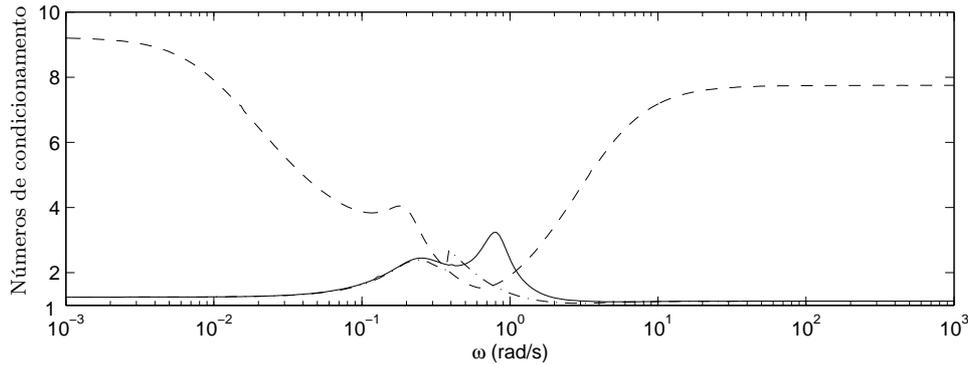


Figura 3.12: Números de condicionamento ótimos das matrizes de autovetores de $G(j\omega)$ (linha tracejada), $G(j\omega)K_u(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) e $G(j\omega)K_p(j\omega)$ (linha contínua).

à forma do pré-compensador, que pode ser muito conservadora. Além disso, no método de normalização por alinhamento das direções principais de entrada e de saída da planta, a normalização não é obtida diretamente, e como o alinhamento aproximado é uma condição apenas suficiente para garantir a normalização, é possível que existam plantas que não sejam aproximadamente alinhadas, mas que sejam ainda aproximadamente normais.

Visando contornar esses problemas, nesta seção, baseado no problema de otimização formulado na seção 3.4, uma nova metodologia de projeto de pré-compensadores é apresentada. Este novo método é baseado no fato de que a pré-compensação normalizante, como será visto na próxima subseção, é necessária somente em uma faixa de frequências, e não em todas as frequências, o que permite o projeto de um pré-compensador estático ao invés de um pré-compensador dinâmico. Este fato torna possível o projeto de pré-compensadores mais simples, uma vez que, agora, são matrizes reais, e não possuem restrições quanto à sua forma (como no projeto dos pré-compensadores estáticos a cada frequência da seção anterior), permitindo que seja utilizada uma maior classe de pré-compensadores estáticos.

3.5.1 Formulação do problema

Para verificar que a pré-compensação normalizante pode ser limitada a apenas uma faixa de frequências, não sendo necessária em todas as frequências, é necessário

mostrar primeiro que os números de condicionamento ótimos das matrizes de autovalores de $G(j\omega)K(j\omega)$ e $K(j\omega)G(j\omega)$ podem ser usados para fornecer um limitante superior para a variação da robustez do sistema em malha fechada, considerando-se incerteza multiplicativa na saída e na entrada da planta, respectivamente. Para tanto, note, de acordo com o teorema do pequeno ganho (teorema 2.3), que uma condição necessária e suficiente para estabilidade robusta do sistema realimentado, com perturbação na saída da planta, é dada por:

$$\bar{\sigma} \{G(j\omega)K(j\omega) [I + G(j\omega)K(j\omega)]^{-1}\} < \frac{1}{\mu_G(j\omega)}, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (3.73)$$

A partir da inequação (3.73), na subseção 2.3.2 foi obtida a seguinte condição necessária, em função dos autovalores do sistema em malha aberta, para a robustez do sistema em malha fechada com perturbação multiplicativa na saída da planta:

$$\max \left| \frac{\lambda\{G(j\omega)K(j\omega)\}}{1 + \lambda\{G(j\omega)K(j\omega)\}} \right| < \frac{1}{\mu_G(j\omega)}. \quad (3.74)$$

Visando, agora, obter uma condição suficiente para a estabilidade robusta, é necessário apresentar o seguinte resultado.

Lema 3.5 Seja A uma matriz quadrada, $m \times m$, e suponha que $A = W_A \Lambda_A V_A$, onde $V_A = W_A^{-1}$, seja uma decomposição espectral de A em que W_A tem o menor número de condicionamento possível. Então,

$$\frac{\bar{\sigma}\{A\}}{\mathcal{C}(W_A)} \leq \max |\lambda\{A\}|. \quad (3.75)$$

Prova. Note que

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}\{A\} &= \bar{\sigma}\{W_A \Lambda_A V_A\} \leq \bar{\sigma}\{W_A\} \bar{\sigma}\{\Lambda_A\} \bar{\sigma}\{V_A\} \\ &= \frac{\bar{\sigma}\{W_A\}}{\underline{\sigma}\{W_A\}} \bar{\sigma}\{\Lambda_A\} = \mathcal{C}(W_A) \max |\lambda\{A\}|. \end{aligned} \quad (3.76)$$

□

A partir do teorema do pequeno ganho e do lema 3.5, a seguinte condição suficiente para a robustez do sistema em malha fechada, considerando-se incerteza multiplicativa na saída da planta, pode ser obtida.

Teorema 3.9 Seja $G_p(s) = [I + \Delta_o(s)]G(s)$, onde $\Delta_o(s)$ é tal que $\bar{\sigma}[\Delta_o(j\omega)] \leq \mu_G(j\omega)$, para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Então, se $K(s)$ estabiliza $G(s)$ e

$$\max \left| \frac{\lambda\{G(j\omega)K(j\omega)\}}{1 + \lambda\{G(j\omega)K(j\omega)\}} \right| < \frac{1}{\mu_G(\omega)[1 + \nu(j\omega)]} \quad (3.77)$$

para cada $\omega \in \mathbb{R}$, onde $\nu(j\omega) = \mathcal{C}[W(j\omega)] - 1$ com $W(j\omega)$ denotando a matriz de autovetores de $G(j\omega)K(j\omega)$, então $K(s)$ estabiliza $G_p(s)$.

Prova. A prova é imediata e será omitida. \square

Observação 3.5 Resultados similares aos do teorema 3.9 e inequação (3.74) podem ser obtidos considerando-se incerteza multiplicativa na entrada da planta, ou seja, $G_p(s) = G(s)[I + \Delta_i(s)]$. Nesse caso, os limitantes superiores são obtidos em função dos autovalores de $K(j\omega)G(j\omega)$ e do número de condicionamento da matriz de autovetores de $K(j\omega)G(j\omega)$. \square

O teorema do pequeno ganho, o teorema 3.9 e a inequação (3.74) fornecem toda a informação necessária para o projeto de controladores comutativos confiáveis do ponto de vista de robustez. Note que:

- (i) Nas frequências altas, $G(j\omega)K(j\omega) \rightarrow O$. Logo, $\lambda_i[G(j\omega)K(j\omega)] \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Portanto, as condições (3.74) e (3.77), tornam-se, respectivamente:

$$\epsilon < \frac{1}{\mu_G} \text{ e } \epsilon < \frac{1}{\mu_G(1 + \nu)}, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad (3.78)$$

que são satisfeitos para valores arbitrariamente elevados de μ_G . Isto implica que não há necessidade de normalização em frequências elevadas (Postlethwaite, 1982).

- (ii) Nas frequências baixas, em geral, é utilizada uma ação integral como visto na subseção 2.2.1, o que implica que $G(j\omega)K(j\omega)$ torna-se infinito e portanto, de acordo com a inequação (3.73), $\mu_G < 1$ torna-se uma condição necessária e suficiente para a estabilidade robusta do sistema em malha fechada. Isto implica que a condição suficiente dada pela inequação (3.77), que leva em consideração o desvio de $G(j\omega)K(j\omega)$ da normalidade, é conservadora. Conseqüentemente,

a normalização não é um requisito crucial para a baixa sensibilidade dos lugares característicos nas baixas frequências.

(iii) Nas frequências próximas da frequência de corte (ω_b), a condição (3.77), além de suficiente, é também necessária quando $\nu \rightarrow 0$, isto é, se $G(j\omega_b)K(j\omega_b)$ é aproximadamente ν -normal.

A discussão acima mostra que se é possível encontrar um pré-compensador estático que torne a planta pré-compensada aproximadamente normal na faixa de frequências em torno da frequência de corte ω_b , então não é necessário o uso de pré-compensadores dinâmicos, o que reduz a ordem do controlador final a ser implementado, uma vez que agora passa a ser dado por:

$$K(s) = K_p K_c(s), \quad (3.79)$$

onde, agora, $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

De acordo com o teorema 3.4, em uma dada frequência ω_0 , para obter a exata normalidade de $G(j\omega_0)K(j\omega_0)$ e $K(j\omega_0)G(j\omega_0)$ poder-se-ia escolher qualquer matriz diagonal não-singular Φ e obter K_p fazendo:

$$K_p = U(j\omega_0)\Phi Y(j\omega_0)^*, \quad (3.80)$$

onde $U(j\omega_0)$ e $Y(j\omega_0)$ são obtidas a partir de uma decomposição por valores singulares de $G(j\omega_0)$:

$$G(j\omega_0) = Y(j\omega_0)\Sigma(j\omega_0)U^*(j\omega_0). \quad (3.81)$$

Porém, K_p deve ser uma matriz com coeficientes reais e, portanto, somente em casos especiais é possível obter-se K_p real escolhendo-se Φ , uma vez que $U(j\omega_0)$ e $Y(j\omega_0)$ são, em geral, matrizes complexas $m \times m$. Em Hung e MacFarlane (1982) o projeto de pré-compensadores estáticos com estrutura dada por (3.80) é considerado em dois casos em que é possível obter-se pré-compensadores reais, ou seja, na frequência d.c. ($\omega_0 = 0$) e em frequências muito elevadas ($\omega_0 \rightarrow \infty$). Em ambos os casos, as matrizes $U(j\omega_0), Y(j\omega_0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Contudo, como mostrado anteriormente, a necessidade de normalização é maior nas frequências próximas do ponto crítico $-1 + j0$, isto é, na

freqüência de corte, que é usualmente definida nas especificações desejadas para o sistema em malha fechada, como, por exemplo, na velocidade de resposta desejada a um degrau unitário. Como a exata normalidade de $G(j\omega_0)K(j\omega_0)$ e $K(j\omega_0)G(j\omega_0)$ não é normalmente obtida para freqüências próximas da freqüência de corte, então é mais realista tentar obter uma normalização aproximada. Os resultados a seguir relacionam a ν -normalidade de $G(j\omega)K(j\omega)$ e $K(j\omega)G(j\omega)$ com a ν -normalidade de $G(j\omega)K_p$ e $K_pG(j\omega)$, respectivamente.

Teorema 3.10 Seja $K(s)$ dado pela equação (3.79) e seja ω_0 uma freqüência dada. Então, $G(j\omega_0)K(j\omega_0)$ é aproximadamente ν -normal se $G(j\omega_0)K_p$ é aproximadamente ν -normal.

Prova. A prova é imediata e é devida à hipótese de que $K_c(j\omega_0)$ comuta exatamente com $G(j\omega_0)K_p$. □

Teorema 3.11 Sob as mesmas hipóteses do teorema 3.10, e supondo que todos os autovalores de $K_pG(j\omega_0)$ são distintos, então $K(j\omega_0)G(j\omega_0)$ é aproximadamente ν -normal se $K_pG(j\omega_0)$ é aproximadamente ν -normal.

Prova. Seguindo os mesmos passos da prova do teorema 3.5 e utilizando as mesmas definições, pode-se mostrar que uma decomposição espectral para KG é dada por:

$$KG = UMW_{\Sigma M}\Lambda_c\Lambda_{\Sigma M}V_{\Sigma M}M^{-1}U^*. \quad (3.82)$$

Note, agora, que usando a equação (3.81) e o fato de que $M = U^*K_pY$, então K_pG pode ser escrito como:

$$K_pG = UM\Sigma U^* = UM\Sigma MM^{-1}U^*. \quad (3.83)$$

Substituindo $\Sigma M = W_{\Sigma M}\Lambda_{\Sigma M}V_{\Sigma M}$ na equação acima, resulta em:

$$K_pG = UMW_{\Sigma M}\Lambda_{\Sigma M}V_{\Sigma M}M^{-1}U^*, \quad (3.84)$$

que pode ser visto como uma decomposição espectral de K_pG . Suponha, agora, que todos os autovalores de K_pG sejam distintos. Então, a matriz de autovetores

de $K_p G$ é igual a $UMW_{\Sigma M}$ e pode ser escalonada para ter o menor número de condicionamento possível (definição 3.1). Portanto, se a matriz de autovetores de $K_p G$ tem número de condicionamento aproximadamente igual a um, isto é, se $K_p G$ é aproximadamente ν -normal, e uma vez que KG e $K_p G$ possuem a mesma matriz de autovetores, então KG é também aproximadamente ν -normal. \square

Os teoremas 3.4, 3.10 e 3.11 levam à formulação do seguinte problema de otimização para o cálculo de um pré-compensador real K_p que torne $G(j\omega_0)K_p$ e $K_p G(j\omega_0)$ aproximadamente ν -normais:

$$\min_{K_p, \Phi} \|K_p - U\Phi Y^*\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (3.85)$$

sujeito a $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ser uma matriz diagonal não-singular, e $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Note que este problema de otimização é muito parecido com o problema de otimização (3.53) formulado na seção 3.4, com a substituição da matriz diagonal $e^{j\Theta}$ por Φ e sem restrições na estrutura de K_p . Assim como o problema de otimização (3.53) pode levar a $G(j\omega_0)K_p$ aproximadamente ν -normal, como mostrado no teorema 3.8, é possível mostrar que o problema de otimização (3.85) pode levar $G(j\omega_0)K_p$ e $K_p G(j\omega_0)$ a serem ambas aproximadamente ν -normais.

Teorema 3.12 Sejam $G = Y\Sigma U^*$ uma decomposição por valores singulares de G , $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times m}$ uma matriz diagonal e $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Defina $E = U^* K_p Y - \Phi$. Então, se $Z = \Sigma\Phi$ for uma matriz diagonal com todos os elementos da diagonal principal z_i distintos e se

$$\min_{i \neq \ell} \frac{|z_i - z_\ell|}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \sigma_k^2}} \gg 2\sqrt{m} \|E\|_{\mathcal{F}}, \quad (3.86)$$

para $i = 1, \dots, m$ e $\ell = 1, \dots, m$, então GK_p e $K_p G$ são ambas matrizes aproximadamente ν -normais.

Prova. Para mostrar que GK_p é aproximadamente ν -normal quando $\|E\|_{\mathcal{F}}$ satisfaz a condição (3.86), basta substituir na prova do teorema 3.8, \bar{K}_p por K_p e $e^{j\Theta}$ por Φ . Para mostrar que $K_p G$ é aproximadamente ν -normal quando $\|E\|_{\mathcal{F}}$ satisfaz (3.86), deve-se substituir na prova do teorema 3.8, \bar{K}_p por K_p , $e^{j\Theta}$ por Φ e fazer a matriz de autovetores de $K_p G$, \hat{W}_p , igual a $U\Upsilon$, onde Υ é ainda uma matriz com todas as colunas com norma euclidiana igual a um. \square

3.5.2 Solução do problema de otimização

Defina a função custo do problema (3.85) como:

$$J(K_p, \Phi) = \|K_p - U\Phi Y^*\|_{\mathcal{F}}^2. \quad (3.87)$$

Então, aplicando a definição da norma de Frobenius na equação (3.87), e após algumas manipulações algébricas simples, obtém-se:

$$J(K_p, \Phi) = tr(K_p K_p^T) - 2Re\{tr(U^* K_p Y \Phi^*)\} + tr(\Phi^* \Phi). \quad (3.88)$$

Sejam U_R (U_I), Y_R (Y_I), e Φ_R (Φ_I) as partes reais (imaginárias) de U , Y , e Φ , respectivamente. Logo:

$$\begin{cases} U(j\omega) = U_R(j\omega) + jU_I(j\omega), \\ Y(j\omega) = Y_R(j\omega) + jY_I(j\omega), \\ \Phi(j\omega) = \Phi_R(j\omega) + j\Phi_I(j\omega). \end{cases} \quad (3.89)$$

Usando, agora, as equações (3.89), então é possível escrever a equação (3.88) da seguinte forma:

$$J(K_p, \Phi) = tr(K_p K_p^T) - 2H + tr(\Phi^* \Phi), \quad (3.90)$$

onde

$$H = Re\{tr[(U_R^T - jU_I^T)K_p(Y_R + jY_I)(\Phi_R - j\Phi_I)]\}. \quad (3.91)$$

Após algumas manipulações algébricas simples na equação (3.91), tem-se que:

$$\begin{aligned} H &= tr(U_R^T K_p Y_R \Phi_R) + tr(U_R^T K_p Y_I \Phi_I) - tr(U_I^T K_p Y_R \Phi_I) \\ &+ tr(U_I^T K_p Y_I \Phi_R). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Note que cada termo do lado direito da equação (3.92) tem a mesma estrutura dada por $tr(\hat{U}^T K_p \hat{Y} \hat{\Phi})$, onde \hat{U} , \hat{Y} e $\hat{\Phi}$ são iguais às partes reais ou imaginárias de U , Y e Φ , respectivamente.

Defina, agora, o vetor $\hat{\phi}$ como o vetor coluna formado com os elementos da diagonal principal de $\hat{\Phi}$. Além disso, denote as colunas de K_p por \underline{k}_i , para $i = 1, \dots, m$ e forme o vetor $\underline{k} = [\underline{k}_1^T \ \underline{k}_2^T \ \dots \ \underline{k}_m^T]^T$. Assim sendo, denotando as colunas de \hat{U} por $\underline{\hat{u}}_i$, para $i = 1, \dots, m$ e os elementos de \hat{Y} por \hat{y}_{ij} , pode-se verificar que:

$$tr(\hat{U}^T K_p \hat{Y} \hat{\Phi}) = \underline{k}^T A \hat{\phi}, \quad (3.93)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \hat{y}_{11} & \hat{u}_2 \hat{y}_{12} & \cdots & \hat{u}_m \hat{y}_{1m} \\ \hat{u}_1 \hat{y}_{21} & \hat{u}_2 \hat{y}_{22} & \cdots & \hat{u}_m \hat{y}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{u}_1 \hat{y}_{m1} & \hat{u}_2 \hat{y}_{m2} & \cdots & \hat{u}_m \hat{y}_{mm} \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

Portanto, definindo os vetores $\underline{\phi}_R$ e $\underline{\phi}_I$ como os vetores coluna formados com os elementos da diagonal de Φ_R e Φ_I , respectivamente, e formando o vetor $\underline{\phi} = \begin{bmatrix} \underline{\phi}_R^T & \underline{\phi}_I^T \end{bmatrix}^T$, então a equação (3.88) pode ser reescrita como:

$$J(\underline{k}, \underline{\phi}) = \underline{k}^T \underline{k} - 2\underline{k}^T \tilde{A} \underline{\phi} + \underline{\phi}^T \underline{\phi}, \quad (3.95)$$

onde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{RR} + A_{II} & A_{RI} - A_{IR} \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

com as matrizes A_{RR} , A_{II} , A_{IR} e A_{RI} formadas de acordo com a equação (3.94), onde o primeiro índice representa a parte real (R) ou imaginária (I) de U e o segundo índice representa a parte real (R) ou imaginária (I) de Y . Portanto, $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m^2 \times 2m}$, $\underline{\phi} \in \mathbb{R}^{2m}$ e $\underline{k} \in \mathbb{R}^{m^2}$.

A partir da equação (3.95) pode ser visto que, fixando-se os valores dos elementos do vetor $\underline{\phi}$, a função custo $J(\underline{k}, \underline{\phi})$ descreve um parabolóide com mínimo dado por:

$$J_{min}(\underline{\phi}) = \underline{\phi}^T \underline{\phi} - \underline{k}^T \underline{k}. \quad (3.97)$$

onde $\underline{k} = \tilde{A} \underline{\phi}$ e, portanto, o problema de minimizar $J(\underline{k}, \underline{\phi})$, dado pela equação (3.95), é equivalente ao seguinte problema de otimização:

$$\min_{\underline{\phi}} \underline{\phi}^T (I - \tilde{A}^T \tilde{A}) \underline{\phi}, \quad (3.98)$$

sujeito a $\underline{\phi}$ ser tal que Φ é uma matriz não-singular.

Observação 3.6 Note que a função custo do problema (3.98) é equivalente à norma definida na equação (3.87). Portanto, a matriz $(I - \tilde{A}^T \tilde{A})$ é, em geral, positiva definida (a matriz pode ser também positiva semi-definida). \square

Uma vez que Φ deve ser uma matriz não-singular, então a norma euclidiana do vetor $\underline{\phi}$ deve ser diferente de zero. Logo, suponha que $\|\underline{\phi}\|_2 = 1$. Então, usando

o princípio de Rayleigh-Ritz (Horn e Johnson, 1990, p. 176) e a observação 3.6, é possível verificar que o mínimo do problema (3.98) é obtido para $\underline{\phi} = \underline{v}_1$, onde \underline{v}_1 denota o autovetor associado ao menor autovalor, λ_1 , da matriz $(I - \tilde{A}^T \tilde{A})$. Além disso, o valor mínimo da função custo do problema (3.98) é dado por λ_1 .

Observação 3.7 Em geral, o autovetor \underline{v}_1 associado ao menor autovalor λ_1 de $(I - \tilde{A}^T \tilde{A})$, leva a uma matriz Φ não-singular. Contudo, se a matriz Φ associada a \underline{v}_1 é singular, então sempre é possível realizar uma combinação linear dos autovetores de $(I - \tilde{A}^T \tilde{A})$, de forma a obter um vetor $\bar{\phi}$, tal que $\bar{\phi}^T (I - \tilde{A}^T \tilde{A}) \bar{\phi} = \lambda_1$ e a nova matriz Φ , obtida a partir de $\bar{\phi}$, seja não-singular. Então, $\bar{\phi}$ deve ser normalizada levando a um valor de custo $J_{min}(\underline{\phi}_s) = \lambda_1 / \|\bar{\phi}\|_2^2$, onde $\underline{\phi}_s = \bar{\phi} / \|\bar{\phi}\|_2$. Uma outra situação em que pode ser necessária a escolha de uma matriz Φ , diferente daquela obtida pelo autovetor \underline{v}_1 , é quando, apesar de λ_1 ser um valor pequeno, a matriz pré-compensada $G(j\omega)K_p$ não possui matriz de autovetores com número de condicionamento aproximadamente igual a 1. Neste caso, uma mudança na matriz Φ pode ser feita na tentativa de satisfazer a condição do teorema 3.12, levando a uma planta pré-compensada aproximadamente ν -normal. Como será visto na subseção 3.5.4, para os três exemplos considerados, o problema de otimização (3.98) leva a sistemas pré-compensados aproximadamente ν -normais na frequência de corte, como desejado. \square

Em alguns casos a solução do problema de otimização (3.98) para uma única frequência não leva a uma planta pré-compensada aproximadamente normal em toda a faixa de frequências de interesse. Nesses casos, mais de uma frequência na faixa de frequências de interesse devem ser utilizadas para calcular o pré-compensador K_p , levando a um problema de otimização multi-freqüencial, a ser tratado na subseção seguinte.

3.5.3 Problema de otimização multi-freqüencial

Suponha que sejam escolhidas l frequências distintas ω_k na faixa de frequências próximas da frequência de corte. Então, a função custo do problema de otimização

(3.85) pode ser modificada para calcular o pré-compensador normalizante K_p da seguinte forma:

$$J(K_p, \Phi_k) = \sum_{k=1}^l p_k \|K_p - U_k \Phi_k Y_k^*\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (3.99)$$

onde $\{p_k\}$, $k = 1, \dots, l$, é um conjunto de pesos, sendo cada p_k um escalar real e positivo, $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Phi_k \in \mathbb{C}^{m \times m}$ é uma matriz diagonal, e U_k, Y_k são tomados a partir de uma decomposição por valores singulares de $G(j\omega_k)$, para $k = 1, \dots, l$. Note que, se o valor da função custo (3.99) puder ser feito suficientemente pequeno, então $G(j\omega_k)K_p$ e $K_p G(j\omega_k)$ serão aproximadamente ν -normais nas frequências selecionadas ω_k .

A minimização de $J(K_p, \Phi_k)$ é também um problema de autovalor, que pode ser facilmente resolvido. Para tanto, note, de acordo com a equação (3.95), que a equação (3.99) pode ser reescrita como:

$$J(\underline{k}, \underline{\phi}_k) = \sum_{k=1}^l p_k (\underline{k}^T \underline{k} - 2\underline{k}^T \tilde{A}_k \underline{\phi}_k + \underline{\phi}_k^T \underline{\phi}_k), \quad (3.100)$$

onde $\underline{\phi}_k$ é o vetor formado com os elementos da diagonal de Φ_k , e \tilde{A}_k é a matriz formada, de acordo com a equação (3.96), a partir das direções principais de entrada e de saída de $G(j\omega_k)$, U_k e Y_k , respectivamente, para $k = 1, \dots, l$. Note que a equação (3.100) pode ser também escrita como:

$$\begin{aligned} J(\underline{k}, \underline{\phi}_k) &= (p_1 + p_2 + \dots + p_l) \underline{k}^T \underline{k} - 2\underline{k}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 & \dots & \tilde{A}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \underline{\phi}_1 \\ p_2 \underline{\phi}_2 \\ \vdots \\ p_l \underline{\phi}_l \end{bmatrix} \\ &+ p_1 \underline{\phi}_1^T \underline{\phi}_1 + p_2 \underline{\phi}_2^T \underline{\phi}_2 + \dots + p_l \underline{\phi}_l^T \underline{\phi}_l. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Logo, definindo

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 & \dots & \tilde{A}_l \end{bmatrix}, \quad (3.102)$$

e

$$\bar{\phi} = \begin{bmatrix} p_1 \underline{\phi}_1 \\ p_2 \underline{\phi}_2 \\ \vdots \\ p_l \underline{\phi}_l \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

então, pode ser visto que, fixando o valor de $\bar{\phi}$, o mínimo de $J(\underline{k}, \underline{\phi}_k)$ é obtido para:

$$\underline{k} = \frac{1}{\sum_{k=1}^l p_k} \bar{A} \bar{\phi}. \quad (3.104)$$

Portanto, substituindo \underline{k} , dado pela equação (3.104), na equação (3.101), e seguindo os mesmos passos utilizados no caso para uma única frequência, obtém-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\bar{\phi}} \bar{\phi}^T P \bar{\phi}, \quad (3.105)$$

onde

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} I_{2m} & & & \\ & \frac{1}{p_2} I_{2m} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{p_l} I_{2m} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sum_{k=1}^l p_k} \bar{A}^T \bar{A}, \quad (3.106)$$

com I_{2m} denotando a matriz identidade de ordem $2m$. É importante ressaltar que encontrar a solução para o problema de otimização (3.105) é equivalente a encontrar a solução para o problema (3.99), o que implica que P deve ser uma matriz positiva definida ou positiva semi-definida. Desta forma, supondo que $\bar{\phi}$ tenha norma euclidiana fixa igual a um, então o mínimo do problema (3.105) é obtido para $\bar{\phi} = \underline{v}_{P_1}$, onde \underline{v}_{P_1} é o autovetor de P associado ao menor autovalor, λ_{P_1} . Além disso, o menor valor para a função custo do problema (3.105) é dado por λ_{P_1} .

O desenvolvimento acima mostra que tanto o caso multi-freqüencial quanto o caso de uma única frequência podem ser resolvidos como um problema de se encontrar o menor autovalor e o autovetor correspondente de uma determinada matriz simétrica.

3.5.4 Exemplos

Nesta subseção três exemplos serão utilizados para ilustrar o projeto de pré-compensadores normalizantes estáticos. Será inicialmente revisto o exemplo 3.1 e, em seguida, será apresentado o exemplo de uma turbina a gás automotiva, usado em Nobakhti e Munro (2004) para ilustrar uma nova metodologia de projeto de controladores multivariáveis robustos baseado no Método das Cadeias de Nyquist. O terceiro exemplo será o modelo linearizado da dinâmica vertical de um avião apresentado anteriormente no exemplo 3.2.

Exemplo 3.3 Considere novamente a planta apresentada no exemplo 3.1:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} -47s+2 & 56s \\ -42s & 50s+2 \end{bmatrix}. \quad (3.107)$$

Como visto anteriormente esta planta possui número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores elevado para todas as frequências, exceto na frequência dc, e possui, portanto, lugares característicos muito sensíveis a variações. Isto mostra a necessidade do projeto de um pré-compensador normalizante para que se possa utilizar o MLC.

Suponha que a frequência de corte seja especificada como $\omega_b = 1 \text{ rad/s}$. Portanto, para frequências próximas de 1 rad/s , é desejado que os lugares característicos não sejam sensíveis a perturbações multiplicativas na entrada e na saída da planta, uma vez que na faixa de frequências em torno da frequência de corte, os lugares característicos estarão mais próximos do ponto crítico $-1+j0$. Para projetar, portanto, o pré-compensador normalizante, o problema de otimização (3.98) é formulado. Logo, considere a seguinte decomposição por valores singulares de $G(j1)$:

$$G(j1) = Y(j1)\Sigma(j1)U(j1)^*, \quad (3.108)$$

onde

$$Y(j1) = \begin{bmatrix} -0,6970 - 0,2652j & 0,0270 - 0,6656j \\ -0,6318 - 0,2112j & 0,0003 + 0,7458j \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

e

$$U(j1) = \begin{bmatrix} 0,6431 & 0,7658 \\ -0,7652 - 0,0317j & 0,6425 + 0,0266j \end{bmatrix}, \quad (3.110)$$

e forme a matriz \tilde{A} , de acordo com a equação (3.96):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0,4482 & 0,0207 & -0,1706 & -0,5097 \\ 0,5417 & -0,0004 & 0,1809 & -0,4284 \\ -0,4063 & 0,0003 & -0,1358 & 0,5711 \\ 0,4901 & 0,0201 & 0,1416 & 0,4792 \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

Calculando, agora, o menor autovalor de $(I - \tilde{A}^T \tilde{A})$, λ_1 , e o autovetor \underline{v}_1 , obtém-se:

$$\lambda_1 = 4.4389 \times 10^{-16} \text{ e } \underline{v}_1 = [0,6710 \quad 0,0004 \quad 0,2232 \quad -0,7071]^T, \quad (3.112)$$

o que mostra que $(I - \tilde{A}^T \tilde{A})$ é singular e o menor valor para função custo do problema (3.98) é igual a zero. Então,

$$\underline{k} = \tilde{A} \underline{\phi} = \begin{bmatrix} 0,0216 \\ 0,7068 \\ -0,7068 \\ 0,0216 \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

e, portanto, o pré-compensador estático ótimo é dado por:

$$K_p = \begin{bmatrix} 0,0216 & -0,7068 \\ 0,7068 & 0,0216 \end{bmatrix}. \quad (3.114)$$

Pode-se verificar que os números de condicionamento ótimos das matrizes de autovetores de $G(j\omega)K_p$ e $K_p G(j\omega)$, $\mathcal{C}_{opt}[W_p(j\omega)]$ e $\mathcal{C}_{opt}[\hat{W}_p(j\omega)]$, respectivamente, são iguais a um para todas as frequências, ou seja, $G(j\omega)K_p$ e $K_p G(j\omega)$ são ambas matrizes normais. Portanto, o MLC pode ser, então, aplicado de forma confiável à matriz de transferência $G(s)K_p$ de forma a calcular o controlador comutativo $K_c(s)$ que satisfaça as especificações desejadas de projeto.

Exemplo 3.4 Considere agora a matriz de transferência de uma turbina a gás de um automóvel dada por:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{0,806s + 0,264}{s^2 + 1,15s + 0,202} & \frac{-15s - 1,42}{s^3 + 12,8s^2 + 13,6s + 2,36} \\ \frac{1,95s^2 + 2,12s + 0,49}{s^3 + 9,15s^2 + 9,39s + 1,62} & \frac{7,14s^2 + 25,8s + 9,35}{s^4 + 20,8s^3 + 116,4s^2 + 111,6s + 18,8} \end{bmatrix}, \quad (3.115)$$

e suponha, como especificado em Nobakhti e Munro (2004), que o sistema em malha fechada tenha uma frequência de corte próxima de 1 rad/s.

O número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de $G(j\omega)$, $\mathcal{C}_{opt}[W(j\omega)]$, é apresentado na figura 3.13 (linha contínua), onde pode ser visto que $\mathcal{C}_{opt}[W(j\omega)]$ é um pouco elevado para frequências próximas da frequência de corte, sendo aproximadamente igual a 2,6 na frequência de 0,5 rad/s. Portanto, é desejável também neste exemplo projetar um pré-compensador normalizante para a planta. Assim sendo, considere a decomposição por valores singulares de $G(j1) = Y(j1)\Sigma(j1)U(j1)^*$, onde:

$$Y(j1) = \begin{bmatrix} -0,5612 + 0,8181j & -0,1101 - 0,0606j \\ -0,0454 - 0,1172j & -0,8857 + 0,4470j \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

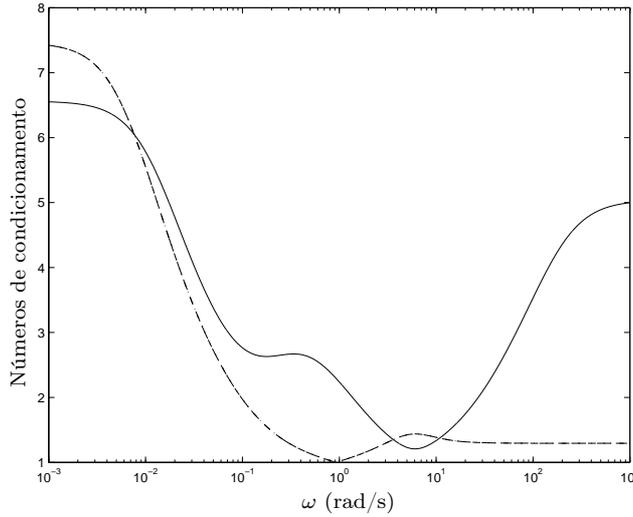


Figura 3.13: Números de condicionamento ótimos da matriz de autovetores de $G(j\omega)$ (linha contínua), $G(j\omega)K_p$ (linha tracejada) e $K_pG(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) para o exemplo 3.4.

e

$$U(j1) = \begin{bmatrix} -0,5469 & -0,8372 \\ 0,8200 - 0,1689j & -0,5356 + 0,1103j \end{bmatrix}, \quad (3.117)$$

e forme a matriz \tilde{A} , de acordo com a equação (3.96):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0,3069 & 0,0921 & 0,4474 & -0,0507 \\ -0,5984 & 0,0523 & -0,5760 & -0,0446 \\ 0,0248 & 0,7415 & -0,0641 & 0,3742 \\ -0,0174 & 0,5237 & 0,1037 & 0,1417 \end{bmatrix}. \quad (3.118)$$

Calculando o menor autovalor de $(I - \tilde{A}^T \tilde{A})$, λ_1 , e o autovetor associado a λ_1 , \underline{v}_1 , obtém-se:

$$\lambda_1 = 0,0001 \text{ e } \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -0,4750 & -0,6514 & 0,5238 & 0,2751 \end{bmatrix}^T. \quad (3.119)$$

Portanto, \underline{k} é dado por:

$$\underline{k} = \tilde{A} \underline{\phi} = \begin{bmatrix} -0,4262 \\ 0,5642 \\ -0,5642 \\ -0,4262 \end{bmatrix}, \quad (3.120)$$

que leva ao seguinte pré-compensador ótimo:

$$K_p = \begin{bmatrix} -0,4262 & -0,5642 \\ 0,5642 & -0,4262 \end{bmatrix}. \quad (3.121)$$

Na figura 3.13 é mostrado o número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de $G(j\omega)K_p$ (linha tracejada) e de $K_pG(j\omega)$ (linha traço-pontilhada), onde

pode ser visto que $\mathcal{C}_{opt}[W_p(j\omega)]$ e $\mathcal{C}_{opt}[\hat{W}_p(j\omega)]$ são novamente iguais para todas as frequências. Além disso, os números de condicionamento são iguais a um na frequência de corte de 1 rad/s como desejado, e na vizinhança dessa frequência, $\mathcal{C}_{opt}[W_p(j\omega)]$ e $\mathcal{C}_{opt}[\hat{W}_p(j\omega)]$ são aproximadamente iguais a um.

Uma vez que a normalização foi obtida na faixa de frequências desejada, o MLC pode ser então aplicado de forma confiável à planta pré-compensada $G(s)K_p$.

Exemplo 3.5 Considere novamente a matriz de transferência do exemplo 3.2:

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} n_{11}(s) & n_{12}(s) & n_{13}(s) \\ n_{21}(s) & n_{22}(s) & n_{23}(s) \\ n_{31}(s) & n_{32}(s) & n_{33}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

onde

$$\begin{aligned} d(s) &= s^5 + 1,5953s^4 + 1,7572s^3 + 0,1112s^2 + 0,0561s \\ n_{11}(s) &= -1,5750s^3 - 1,1190s^2 + 1,5409s - 0,0816 \\ n_{12}(s) &= 0,2909s^2 + 0,2527s + 0,3712 \\ n_{13}(s) &= 0,0732s^3 - 0,0646s^2 - 1,2125s - 0,0204 \\ n_{21}(s) &= -0,12s^4 - 0,0739s^3 - 0,5319s^2 - 0,2458s \\ n_{22}(s) &= s^4 + 1,5415s^3 + 1,6537s^2 \\ n_{23}(s) &= -0,0052s^3 + 0,1570s^2 + 0,1828s \\ n_{31}(s) &= 4,419s^3 + 1,6674s^2 + 0,1339s \\ n_{32}(s) &= 0,0485s^2 + 0,3279s \\ n_{33}(s) &= -1,6650s^3 - 1,1574s^2 - 0,0918s. \end{aligned}$$

Suponha que neste exemplo se deseja uma frequência de corte em torno de 10 rad/s (Maciejowski, 1989). Portanto, como visto no exemplo 3.2, é possível ver que próximo da frequência de 10 rad/s, o sistema não é normal, necessitando de pré-compensação. Isto é confirmado na figura 3.14 (linha contínua) onde é mostrado o número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de $G(j\omega)$ (linha contínua), calculado de acordo com a equação (3.7), podendo ser verificado que o número de condicionamento da matriz de autovetores de $G(j10)$ é aproximadamente igual a 7. Assim, é importante que seja projetado um pré-compensador que normalize a planta na vizinhança da frequência de corte escolhida.

Uma decomposição por valores singulares de $G(j10)$ é dada por $G(j10) =$

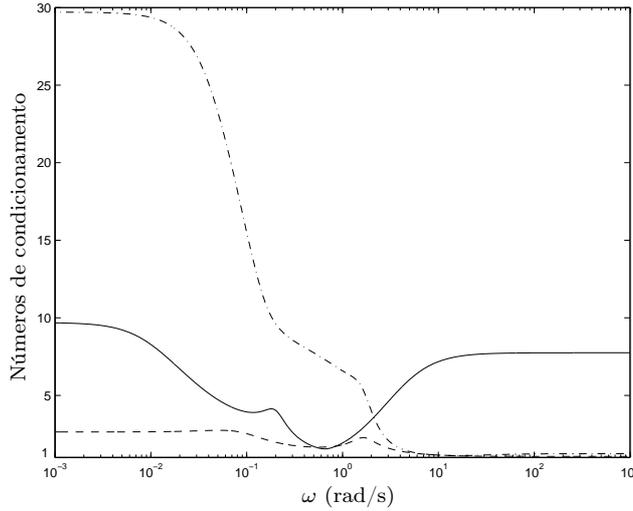


Figura 3.14: Números de condicionamento ótimos das matrizes de autovetores de $G(j\omega)$ (linha contínua), $G(j\omega)K_{p_1}$ (linha tracejada) e $K_{p_1}G(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) para o exemplo 3.5.

$Y(j10)\Sigma(j10)U(j10)^*$, onde

$$Y(j10) = \begin{bmatrix} -0,0239 + 0,0007j & -0,3064 - 0,0297j & -0,9494 - 0,0582j \\ 0,1005 - 0,9924j & -0,0076 + 0,0704j & -0,0031 + 0,0017j \\ 0,0662 + 0,0086j & 0,9417 + 0,1161j & -0,3076 - 0,0271j \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

e

$$U(j10) = \begin{bmatrix} -0,1473 & -0,9343 & -0,3245 \\ 0,9845 + 0,0944j & -0,1417 - 0,0138j & -0,0390 - 0,0032j \\ 0,0097 - 0,0002j & 0,3266 + 0,0094j & -0,9447 - 0,0269j \end{bmatrix}. \quad (3.124)$$

Formando a matriz \tilde{A} , e calculando o menor autovalor λ_1 de $(I - \tilde{A}^T \tilde{A})$, e o autovetor associado a λ_1 , \underline{v}_1 , obtém-se:

$$\lambda_1 = 0,0001 \text{ e } \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -0,0002 & 0,0523 & 1,7298 & 0,0244 & 0,0060 & 0,0663 \end{bmatrix}^T. \quad (3.125)$$

O vetor \underline{v}_1 leva ao seguinte pré-compensador:

$$K_{p_1} = \begin{bmatrix} 0,5493 & 0,0052 & 0,1265 \\ 0,0666 & -0,0240 & 0,0138 \\ 1,5508 & 0,0046 & 0,5213 \end{bmatrix}, \quad (3.126)$$

para o qual o número de condicionamento da matriz de autovetores de $G(j\omega)K_{p_1}$, $\mathcal{C}_{opt}[W_p(j\omega)]$, é também mostrado na figura 3.14 (linha tracejada), onde pode ser visto que $G(j\omega)K_{p_1}$ é aproximadamente ν -normal para a faixa de frequências de

interesse. Porém, esse pré-compensador leva a um número de condicionamento ótimo da matriz de autovetores de $K_{p_1}G$, $\mathcal{C}_{opt}[\hat{W}_p(j\omega)]$, (linha traço-pontilhada na figura 3.14) elevado próximo da frequência de corte, sendo aproximadamente igual a 4 na frequência de 2 rad/s. Portanto, neste exemplo, é necessário considerar mais de uma frequência na faixa de frequências de interesse, ou seja, é necessário formular um problema de otimização multi-frequencial (3.105).

Logo, escolhendo duas frequências $\omega_1 = 1$ rad/s e $\omega_2 = 10$ rad/s, e os pesos $p_1 = 1$ e $p_2 = 1$, então pode-se formar de acordo com a equação (3.106), a matriz 12×12 , P , e calcular o seu menor autovalor λ_{P_1} e o autovetor associado a λ_{P_1} , \underline{v}_{P_1} :

$$\lambda_{P_1} = 0,0335, \quad (3.127)$$

$$\underline{v}_{P_1} = \begin{bmatrix} -0,0343 & 0,0067 & -0,3704 & 0,5157 & -0,2771 & -0,1238 \\ 0,0039 & 0,5190 & -0,3928 & -0,2759 & 0,0591 & -0,0146 \end{bmatrix}. \quad (3.128)$$

A partir da equação (3.104) e do vetor \underline{v}_{P_1} obtido, encontra-se o seguinte pré-compensador ótimo:

$$K_{p_2} = \begin{bmatrix} 0,1851 & -0,0817 & -0,9711 \\ -0,0683 & 0,5303 & -0,1237 \\ -0,7982 & -0,1022 & 0,0072 \end{bmatrix}. \quad (3.129)$$

Na figura 3.15 são mostrados os números de condicionamento ótimos das matrizes de autovetores de GK_{p_2} (linha tracejada) e $K_{p_2}G$ (linha traço-pontilhada), onde pode ser observado que, agora, ambas as matrizes são aproximadamente ν -normais na faixa de frequências próximas da frequência de corte (o número de condicionamento das matrizes de autovetores é menor do que 1,5 para todas as frequências maiores que 0,8 rad/s).

É importante observar, ainda neste exemplo, que é possível obter-se um pré-compensador estático diferente de K_{p_2} e que é capaz de tornar a planta pré-compensada aproximadamente normal na faixa de frequências em torno da frequência de corte $\omega_b = 10$ rad/s. Para tanto, basta utilizar o procedimento do algoritmo 3.1 para a obtenção de normalização por alinhamento das direções principais de entrada e de saída da planta somente para esta faixa de frequências. Procedendo desta maneira

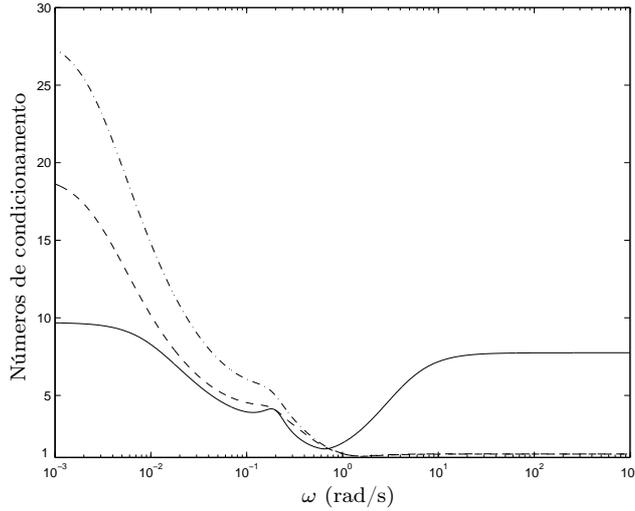


Figura 3.15: Números de condicionamento das matrizes de autovetores de $G(j\omega)$ (linha contínua), $G(j\omega)K_{p_2}$ (linha tracejada) e $K_{p_2}G(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) para o exemplo 3.5. Problema de otimização para duas frequências.

é possível ver que o pré-compensador:

$$K_{p_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.130)$$

é capaz de normalizar a planta em torno de $\omega_b = 10$ rad/s, como pode ser observado na figura 3.16, onde são mostrados os números de condicionamento ótimos das matrizes de autovetores de $G(j\omega)K_{p_3}$ e $K_{p_3}G(j\omega)$ (linha contínua), que são iguais para todas as frequências.

3.6 Comentários finais

Neste capítulo, dois métodos originais de normalização da matriz de transferência da planta são apresentados, sendo ambos mais simples que outro método existente na literatura. O primeiro desses métodos é baseado no alinhamento das direções principais de entrada e de saída da planta levando ao projeto de um pré-compensador com estrutura definida como uma matriz unitária obtida a partir de permutações das colunas da matriz identidade, enquanto o segundo método, baseado no mesmo problema de otimização, leva ao projeto de pré-compensadores estáticos sem restrições na sua estrutura. Exemplos extraídos da literatura são utilizados para mostrar a eficiência de ambos os métodos.

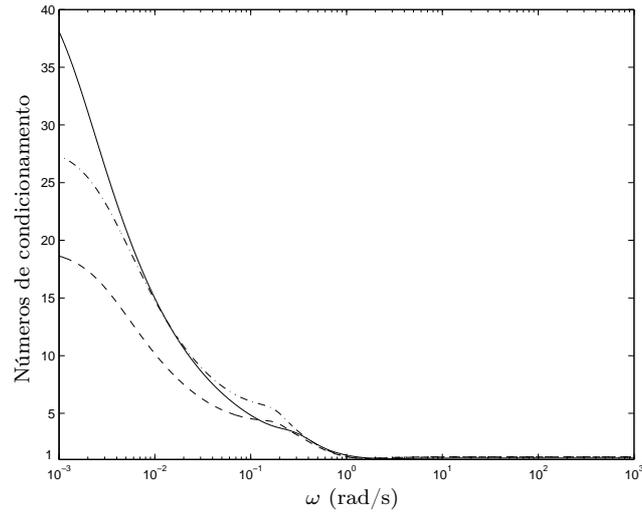


Figura 3.16: Números de condicionamento ótimos das matrizes de autovetores de $G(j\omega)K_{p_3}$ (linha contínua), $G(j\omega)K_{p_2}$ (linha tracejada) e $K_{p_2}G(j\omega)$ (linha traço-pontilhada) para o exemplo 3.5.

A pré-compensação visando a normalização da planta torna possível a aplicação do MLC sobre o sistema pré-compensado e, portanto, deve ser considerada como uma etapa inicial do projeto dos controladores comutativos estabilizantes nos capítulos a seguir.

Capítulo 4

Controladores Comutativos Estabilizantes

No capítulo 3, o problema de sensibilidade dos lugares característicos da matriz de transferência do sistema em malha aberta foi abordado e projetos de pré-compensadores normalizantes foram propostos. Assim sendo, dado que a matriz de transferência da planta pré-compensada seja aproximadamente normal na faixa de frequências de interesse, pode-se então utilizar, de modo confiável, do ponto de vista de estabilidade robusta, o método do lugar característico (MLC) no sistema pré-compensado. Neste capítulo, portanto, as matrizes de transferência da planta serão consideradas sempre aproximadamente normais.

O MLC consiste em projetar controladores que comutam com a matriz de transferência da planta, *i.e.*, controladores que possuem as mesmas matrizes de autovetores e autovetores duais que a planta. Em seguida, as funções de autovalores do controlador são escolhidas, sendo, em geral, funções de transferência de compensadores por avanço ou por atraso de fase, ou PID, de forma que os sistemas realimentados sejam estáveis, com margens de estabilidade relativas satisfatórias, e satisfaçam requisitos de desempenho tais como rejeição de perturbação, rastreamento do sinal de referência e resposta transitória. Quando outros objetivos de controle como estabilidade robusta e desempenho robusto (que são usualmente formulados como problemas de otimização H_∞) são considerados, é necessário primeiro garantir a estabilidade interna do sistema em malha fechada. Recentemente (Basilio e Kouvaritakis, 1995), uma condição necessária para a estabilidade interna de um

sistema compensado com um controlador comutativo foi apresentada, *i.e.*, desde que não haja cancelamentos entre pólos e zeros instáveis das matrizes de transferência do controlador e da planta, então o sistema em malha fechada é internamente estável se o critério de Nyquist generalizado for satisfeito.

Um outro problema com relação ao MLC é que a matriz de autovetores da planta é, em geral, irracional, o que faz com que o controlador seja também irracional, a menos que sejam impostas restrições sobre as funções de autovalores para torná-lo racional. Este problema foi inicialmente contornado utilizando-se aproximações racionais para a matriz de autovetores e de autovetores duais da planta (MacFarlane e Kouvaritakis, 1977; Cloud e Kouvaritakis, 1987; Kouvaritakis e Basilio, 1994; Basilio e Kouvaritakis, 1995). Mais recentemente Bandeira (2000) e Basilio et al. (2002) propõem uma outra abordagem para a obtenção de um controlador racional que comute com a planta. Utilizando-se a parametrização de Youla-Kucera e a teoria de bases polinomiais mínimas, é obtida uma parametrização para todos os controladores racionais estabilizantes que comutam exatamente com a planta, sendo também apresentada uma caracterização de todos os graus de liberdade disponíveis nesta parametrização.

Apesar da existência do controlador comutativo racional estabilizante ser garantida em Bandeira (2000) e Basilio et al. (2002) para o caso de plantas com matrizes de transferência estáveis, a existência do controlador comutativo estabilizante não é garantida quando a matriz de transferência da planta é instável. Visando estender este resultado para plantas instáveis, uma condição necessária e suficiente para a estabilidade interna de um sistema realimentado com um controlador comutativo racional é apresentada em Moreira et al. (2005). Contudo, a condição apresentada em Moreira et al. (2005), tem elevado custo computacional, uma vez que requer o cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial.

Neste capítulo, a parametrização descrita em Basilio et al. (2002) será revista, e será apresentada uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos estabilizantes (Moreira et al., 2006) para plantas modeladas

por matrizes de transferência instáveis, baseada explicitamente na matriz de transferência da planta. Esta condição leva a uma forma mais simples de se verificar a existência dos controladores comutativos racionais estabilizantes do que a apresentada em Moreira et al. (2005).

Este capítulo está estruturado da seguinte forma. Na seção 4.1, é feita uma breve revisão sobre alguns fundamentos teóricos necessários para a obtenção da parametrização dos controladores comutativos racionais estabilizantes e da condição necessária e suficiente para a sua existência. Entre esses fundamentos está a teoria de bases polinomiais mínimas, quando também será apresentado um algoritmo numericamente robusto para o cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial (Basilio e Moreira, 2004). Em seguida, na seção 4.2, uma parametrização para todos os controladores comutativos racionais estabilizantes é apresentada, sendo também caracterizados todos os graus de liberdade disponíveis nesta parametrização. Ainda na seção 4.2, uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes para plantas instáveis é apresentada. Os resultados deste capítulo são ilustrados através de dois exemplos na seção 4.3. Finalmente, na seção 4.4 as conclusões são apresentadas.

4.1 Fundamentos teóricos

4.1.1 Base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial

Sejam $\mathbb{R}^{p \times q}[s]$ e $\mathbb{R}^{p \times q}(s)$, os conjuntos das matrizes polinomiais e racionais, respectivamente, $p \times q$. Além disso, suponha que uma matriz $A(s) \in \mathbb{R}^{p \times q}[s]$ ($p < q$ por simplicidade) tenha a seguinte forma de Smith:

$$\Sigma_A(s) = \begin{bmatrix} \epsilon_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon_2(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \epsilon_p(s) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

onde $\epsilon_k(s) = 0$ para $k = p - \eta + 1, \dots, p$. Neste caso, a matriz $A(s)$ é dita ter um espaço nulo de dimensão $\bar{\eta} = q - p + \eta$, levando à seguinte definição de posto normal de uma matriz polinomial.

Definição 4.1 O posto normal de uma matriz $A(s)$ é o número inteiro r tal que $\max_{s \in \mathbb{C}} \rho[A(s)] = r$, onde $\rho(\cdot)$ denota o posto de uma matriz complexa. \square

A partir da definição 4.1, duas importantes observações podem ser feitas: (i) $A(s)$ tem posto menor do que o posto normal, r , somente para um número finito de valores de s , isto é, para os zeros dos polinômios invariantes $\epsilon_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, r$; (ii) é sempre possível encontrar $\bar{\eta} = q - r$ vetores polinomiais $\underline{f}(s)$ sobre o corpo das funções racionais tais que $A(s)\underline{f}(s) = \underline{0}$. A observação (ii) leva à seguinte definição de base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial.

Definição 4.2 (Forney, 1975) Seja $A(s)$ uma matriz com posto normal r e seja $F(s) = \begin{bmatrix} \underline{f}_1(s) & \underline{f}_2(s) & \dots & \underline{f}_{\bar{\eta}}(s) \end{bmatrix}$, onde $gr[\underline{f}_i(s)] = \phi_i$, uma matriz polinomial tal que $A(s)F(s) = O$. Então, $F(s)$ forma uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $A(s)$ se e somente se $\sum_{i=1}^{\bar{\eta}} \phi_i$ é mínimo. \square

Para a obtenção de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $A(s)$, o primeiro passo é determinar o posto normal de $A(s)$. Para tanto, pode-se utilizar o algoritmo para redução por coluna proposto em Basilio e Kouvaritakis (1997a) e Basilio (2002). O uso deste algoritmo leva a uma matriz reduzida por coluna com número de colunas com elementos todos nulos igual à dimensão do seu espaço nulo. Uma vez calculado o posto normal (r) de $A(s)$, então a matriz $A(s)$ tem um espaço nulo de dimensão $\bar{\eta} = q - r$, ou seja, é sempre possível encontrar um conjunto de $\bar{\eta}$ vetores polinomiais linearmente independentes $\underline{f}_i(s)$ de graus mínimos, sobre o corpo das funções racionais, tais que $A(s)\underline{f}_i(s) = 0$. Para a obtenção de um método numericamente robusto para o cálculo dos vetores $\underline{f}_i(s)$ é necessário apresentar primeiro o seguinte resultado.

Teorema 4.1 Seja $F(s) = \begin{bmatrix} \underline{f}_1(s) & \dots & \underline{f}_{\bar{\eta}}(s) \end{bmatrix}$, onde $gr[\underline{f}_i(s)] = \phi_i$, é uma matriz polinomial tal que $A(s)F(s) = O$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $F(s)$ é uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $A(s)$.
2. $F(s)$ é reduzida por coluna e irredutível.

3. $F(s)$ tem ordem mínima, i.e. $\sum_{i=1}^{\bar{\eta}} \phi_i$.

Prova. Ver Kailath (1980), teorema 6.5-10, p. 458. \square

O teorema 4.1 sugere a seguinte forma para calcular uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $A(s)$: encontre um vetor polinomial $\underline{f}_1(s)$ não-nulo, com o menor grau possível ϕ_1 , tal que $A(s)\underline{f}_1(s) = \underline{0}$; em seguida, encontre um vetor $\underline{f}_2(s)$ satisfazendo $A(s)\underline{f}_2(s) = \underline{0}$, com menor grau possível $\phi_2 \geq \phi_1$, entre todos os vetores que são linearmente independentes de $\underline{f}_1(s)$; continuando desta forma, $\bar{\eta}$ vetores polinomiais $\underline{f}_i(s)$ com graus $\phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_{\bar{\eta}}$ serão obtidos.

Quando a dimensão do espaço nulo de uma matriz polinomial for conhecida, então o problema de encontrar o espaço nulo de uma matriz polinomial $A(s)$ pode ser transformado no problema de se calcular o espaço nulo de uma matriz de coeficientes reais (Basilio e Moreira, 2004). Para tanto, escreva $A(s) = A_0s^\alpha + A_1s^{\alpha-1} + \dots + A_\alpha$ e $\underline{f}_i(s) = \underline{f}_{i0}s^{\phi_i} + \underline{f}_{i1}s^{\phi_i-1} + \dots + \underline{f}_{i\phi_i}$, $A_i \in \mathbb{R}^{p \times q}$ e $\underline{f}_{ij} \in \mathbb{R}^q$. Definindo

$$C_{\phi_i}(A) = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \dots & 0 \\ A_1 & A_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_\alpha & A_{\alpha-1} & \dots & A_0 \\ 0 & A_\alpha & \dots & A_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_\alpha \end{bmatrix} \text{ e } \underline{f}^{(i)} = \begin{bmatrix} \underline{f}_{i0} \\ \underline{f}_{i1} \\ \vdots \\ \underline{f}_{i\phi_i} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde $C_{\phi_i}(A) \in \mathbb{R}^{p(\alpha+\phi_i+1) \times q(\phi_i+1)}$ e $\underline{f}^{(i)} \in \mathbb{R}^{q(\phi_i+1)}$, então, é claro que

$$A(s)\underline{f}_i(s) = \underline{0} \Leftrightarrow C_{\phi_i}(A)\underline{f}^{(i)} = \underline{0}. \quad (4.3)$$

A matriz $C_{\phi_i}(A)$, acima, é usualmente chamada de matriz de convolução de $A(s)$ de ordem ϕ_i . O seguinte resultado pode ser então enunciado.

Teorema 4.2 Uma condição necessária para que um vetor polinomial $\underline{f}_i(s)$ de grau ϕ_i seja um elemento da base polinomial mínima do espaço nulo de $A(s)$ é que $C_{\phi_i}(A)$ não tenha posto completo e o vetor $\underline{f}^{(i)}$ formado empilhando-se os coeficientes dos vetores $\underline{f}_i(s)$, como na equação (4.2), pertença ao espaço nulo de $C_{\phi_i}(A)$. \square

Os teoremas 4.1 e 4.2 juntos podem ser usados para gerar um algoritmo numericamente robusto para o cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço

nulo de uma matriz polinomial, *i.e.*, a busca por um vetor polinomial da base pode ser feita calculando-se uma decomposição por valores singulares de $C_{\phi_i}(A)$, ou seja, $C_{\phi_i}(A) = Y_{\phi_i} \Sigma_{\phi_i} U_{\phi_i}^T$. Vetores polinomiais candidatos para formar uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $A(s)$ serão formados a partir das colunas de U_{ϕ_i} associadas aos valores singulares de $C_{\phi_i}(A)$ iguais a zero, ou ainda, se $C_{\phi_i}(A)$ tem mais colunas do que linhas, a partir das colunas correspondentes ao excesso de colunas. Logo, uma matriz $F(s) = [\underline{f}_1(s) \ \underline{f}_2(s) \ \dots \ \underline{f}_{\bar{\eta}}(s)]$, cujas colunas formam uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $A(s)$, pode ser calculada da seguinte forma:

Algoritmo 4.1 Seja $\bar{\eta}$ a dimensão do espaço nulo de $A(s)$.

PASSO 1: Faça $i = 1$ e defina $gr[\underline{f}_i(s)] = \phi_i = 0$.

PASSO 2: Forme a matriz $C_{\phi_i}(A)$ de acordo com a equação (4.2) e calcule sua decomposição por valores singulares $C_{\phi_i}(A) = Y_{\phi_i} \Sigma_{\phi_i} U_{\phi_i}^T$.

PASSO 3: Seja n_{ϕ_i} a dimensão do espaço nulo de $C_{\phi_i}(A)$, que é dado pelo número de valores singulares iguais a zero de $C_{\phi_i}(A)$ mais o número de colunas em excesso. Se $n_{\phi_i} = 0$, faça $\phi_i = \phi_i + 1$ e volte para o passo 2.

Se $n_{\phi_i} > 0$, então existem até n_{ϕ_i} vetores polinomiais de grau ϕ_i que podem ser inseridos na base. Esses vetores serão formados pelas últimas n_{ϕ_i} colunas de U_{ϕ_i} . Quando $n_{\phi_i} > 0$ e $i = 1$ um vetor $\underline{f}^{(1)}$ será usado para formar um vetor polinomial da base desde que ao menos um de seus primeiros q elementos seja diferente de zero. Além disso, uma vez que $F(s)$ tem que ser reduzida por coluna, então, quando $n_{\phi_i} > 1$, outros vetores polinomiais serão também vetores da base polinomial mínima se a matriz formada pelos coeficientes de maior grau da matriz polinomial, formada com os vetores polinomiais que já pertencem à base, e aquele formado a partir da coluna apropriada de U_{ϕ_i} , tenha posto completo (isto pode ser feito de maneira numericamente robusta calculando-se os valores singulares da matriz dos coeficientes de maior grau). Repita este passo até que todos os possíveis vetores formados a partir de U_{ϕ_i} tenham sido verificados, ou até a base estar completa. Faça $i = i + 1$, a cada vez que um vetor polinomial tiver sido adicionado à base.

PASSO 4: Se $i < \bar{\eta}$, então faça $i = i + 1$ e $\phi_i = \phi_i + 1$ e retorne ao passo 2. \square

Observação 4.1

1. O teorema 4.1 sugere que a busca pelo vetor polinomial da base pode ser feita aumentando-se de um em um os graus dos vetores polinomiais. Quando estes vetores formam uma matriz reduzida por coluna, é imediato ver que os vetores são linearmente independentes e, portanto, de acordo com o teorema 4.1, esses vetores também pertencem à base polinomial mínima. Além disso, de acordo com o teorema 4.2, os vetores de coeficientes reais formados empilhando-se os coeficientes dos vetores polinomiais devem satisfazer a equação (4.3). Isto é o que é feito no passo 3 do algoritmo 4.1.
2. Neste trabalho, o cálculo de bases polinomiais mínimas terão um papel chave na parametrização dos controladores comutativos estabilizantes. Outras aplicações de bases polinomiais mínimas podem ser encontradas na literatura. Neste trabalho será apresentada uma outra aplicação do cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial: a solução numericamente robusta para identidade de Bezout polinomial generalizada (Basilio e Moreira, 2004). Esta aplicação é apresentada no Apêndice A. \square

4.1.2 Pólos e zeros de uma matriz de transferência

Seja $G(s)$ uma matriz de transferência $m \times m$. Então existem matrizes unimodulares $H_S(s)$ e $J_S(s)$ tais que:

$$G(s) = H_S(s)M_S(s)J_S(s), \quad (4.4)$$

onde

$$M_S(s) = \begin{bmatrix} \tilde{M}_S(s) & O_{r,m-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,m-r} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

onde r é o posto normal de $G(s)$ e $\tilde{M}_S(s) = \text{diag} \left[\frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)}, \frac{\epsilon_2(s)}{\psi_2(s)}, \dots, \frac{\epsilon_r(s)}{\psi_r(s)} \right]$ com $\{\epsilon_i(s), \psi_i(s)\}$ coprimos para $i = 1, \dots, r$. A matriz $M_S(s)$ é única e é chamada de forma de Smith-McMillan de $G(s)$. A partir da forma de Smith-McMillan pode-se, então, definir os pólos e zeros de $G(s)$.

Definição 4.3 Os zeros finitos de $G(s)$ são definidos como o conjunto de todos os zeros do conjunto de polinômios $\{\epsilon_i(s) : i = 1, \dots, r\}$. Os pólos de $G(s)$ são definidos como o conjunto de todos os zeros do conjunto de polinômios $\{\psi_i(s) : i = 1, \dots, r\}$. \square

A partir da definição 4.3 é possível obter então o polinômio dos pólos de $G(s)$, $p_G(s)$,

$$p_G(s) = \prod_{i=1}^r \psi_i(s), \quad (4.6)$$

e o polinômio dos zeros de $G(s)$, $z_G(s)$,

$$z_G(s) = \prod_{i=1}^r \epsilon_i(s). \quad (4.7)$$

É importante ressaltar que os polinômios $p_G(s)$ e $z_G(s)$ não são necessariamente coprimos.

Observação 4.2 Uma forma alternativa para a obtenção de $p_G(s)$ e $z_G(s)$ é apresentada em Kontakos (1973), evitando-se o cálculo da forma de Smith-McMillan de $G(s)$, qual seja: (i) $p_G(s)$ é o mínimo múltiplo comum entre todos os denominadores, de todos os menores diferentes de zero, de todas as ordens de $G(s)$; (ii) $z_G(s)$ é o máximo divisor comum dos numeradores de todos os menores de $G(s)$ de ordem r , sendo que todos os menores devem ser ajustados de forma a ter $p_G(s)$ como denominador comum. \square

4.1.3 Pólos e zeros de funções características

Definição 4.4 Considere a equação algébrica associada à função característica $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$:

$$b_{i0}(s)\hat{\lambda}_{g_i}^{\delta_i} + b_{i1}(s)\hat{\lambda}_{g_i}^{\delta_i-1} + \dots + b_{i\delta_i}(s) = 0. \quad (4.8)$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $b_{i0}(s) \neq 0$ e $b_{i\delta_i}(s) \neq 0$. Dessa forma, os pólos da função característica $\hat{\lambda}_{g_i}(s)$ são definidos (MacFarlane e Postlethwaite, 1977) como os valores de s que satisfazem:

$$b_{i0}(s) = 0, \quad (4.9)$$

enquanto que os zeros são definidos como os valores de s que satisfazem:

$$b_{i\delta_i}(s) = 0. \quad (4.10)$$

□

Portanto, considerando de acordo com o capítulo 2 que existem $k \leq m$ funções características irreduzíveis para $G(s)$, tem-se, a partir da definição 4.4, que o polinômio cujas raízes são os pólos das funções características de $G(s)$ é dado por:

$$p_{G_f}(s) = \prod_{i=1}^k b_{i0}(s), \quad (4.11)$$

enquanto que o polinômio cujas raízes são os zeros das funções características de $G(s)$ é igual a:

$$z_{G_f}(s) = \prod_{i=1}^k b_{i\delta_i}(s). \quad (4.12)$$

4.1.4 Modos fixos de um sistema multivariável

Para obter condições necessárias e suficientes para a estabilidade do sistema realimentado, é fundamental observar que, em alguns casos, os pólos do sistema em malha aberta não são pólos das suas funções características. Para ver este fato, é importante recordar que pólos e zeros das funções características de uma matriz $G(s)$ são obtidos a partir da equação:

$$\det[\lambda_g(s)I - G(s)] = \lambda_g^m + a_1(s)\lambda_g^{m-1} + a_2(s)\lambda_g^{m-2} + \dots + a_m(s). \quad (4.13)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \det[\lambda_g(s)I - G(s)] &= \lambda_g^m - [\text{traço } G(s)] \lambda_g^{m-1} \\ &+ \left[\sum \text{menores principais de } G(s) \text{ de ordem } 2 \right] \lambda_g^{m-2} - \dots + (-1)^m \det G(s), \end{aligned}$$

então pode-se verificar que os coeficientes $a_i(s)$ são todos obtidos a partir de somas de menores principais de $G(s)$. Desta forma, o polinômio $p_{G_f}(s)$ da equação (4.11) é o mínimo múltiplo comum entre todos os denominadores, de todos os menores principais, de todas as ordens de $G(s)$. Como $p_G(s)$ é, de acordo com a observação

4.2, o mínimo múltiplo comum entre todos os denominadores, de todos os menores diferentes de zero, de todas as ordens de $G(s)$, então, se $e(s)$ é um polinômio mônico cujos zeros são pólos de $G(s)$ que não são pólos de $\lambda_g(s)$, tem-se que:

$$p_G(s) = e(s)p_{G_f}(s). \quad (4.14)$$

Além disso, pode-se verificar que (MacFarlane e Postlethwaite, 1977)

$$z_G(s) = e(s)z_{G_f}(s). \quad (4.15)$$

Dessa forma, observa-se que $e(s)$ é um polinômio cujos zeros são pólos de $G(s)$ que não são pólos de nenhuma de suas funções características. Esse fato leva à seguinte definição de modos fixos.

Definição 4.5 Os pólos $p_i \in \mathbb{C}$ de $G(s)$ tais que $e(p_i) = 0$ são chamados de modos fixos de $G(s)$. □

Uma importante característica dos zeros de $e(s)$, que justifica o nome de modos fixos, é apresentada no lema a seguir.

Lema 4.1 Os modos fixos de $G(s)$ são o conjunto de pólos que permanecem fixos sob qualquer realimentação por um escalar kI , onde $k \in \mathbb{R}$.

Prova. Ver Smith (1981). □

4.2 Uma parametrização para todos os controladores comutativos estabilizantes

4.2.1 Formulação do problema

Considere o sistema com realimentação unitária negativa apresentado na figura 4.1, onde $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$ é a matriz de transferência da planta e $K(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$ é a matriz de transferência do controlador a ser projetado. Considere também que

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (4.16)$$

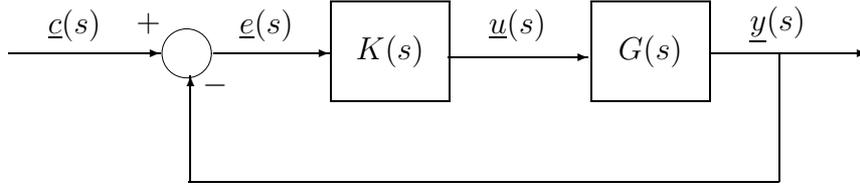


Figura 4.1: Sistema multivariável com realimentação unitária negativa.

é uma fatoração duplamente coprima de $G(s)$ sobre $RH_{\infty}^{m \times m}$ (o conjunto de todas as matrizes racionais, próprias e estáveis). Desta forma, existem matrizes $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s) \in RH_{\infty}^{m \times m}$ que satisfazem a identidade de Bezout generalizada

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ -N(s) & X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Em Basilio et al. (2002) o problema de projetar um controlador comutativo, isto é, um controlador $K(s)$ tal que $G(s)K(s) = K(s)G(s)$ ou, equivalentemente,

$$G(s)K(s) - K(s)G(s) = O, \quad (4.18)$$

que estabiliza internamente o sistema em malha fechada da figura 4.1 é abordado e uma parametrização para todos os controladores comutativos racionais estabilizantes é apresentada. Para tanto, é utilizada a conhecida parametrização de Youla-Kucera (Youla et al., 1976; Kucera, 1979) para a classe de todos os controladores, $K(s)$, que estabilizam internamente o sistema em malha fechada, sendo dada por:

$$\begin{aligned} K(s) &= U(s)V^{-1}(s) = \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s) \\ &= [Y(s) + M(s)Q(s)][X(s) - N(s)Q(s)]^{-1} \\ &= [\tilde{X}(s) - Q(s)\tilde{N}(s)]^{-1}[\tilde{Y}(s) + Q(s)\tilde{M}(s)], \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $Q(s) \in RH_{\infty}^{m \times m}$. Portanto, substituindo $G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ e $K(s) = U(s)V^{-1}(s) = \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s)$ na equação (4.18), obtém-se:

$$\tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)U(s)V^{-1}(s) - \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s)N(s)M^{-1}(s) = O. \quad (4.20)$$

Pode-se verificar que pré-multiplicando e pós-multiplicando a equação (4.17) por

$$\begin{bmatrix} I & -Q(s) \\ O & I \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} I & Q(s) \\ O & I \end{bmatrix},$$

respectivamente e, em seguida, definindo $U(s)$, $V(s)$, $\tilde{U}(s)$ e $\tilde{V}(s)$ de acordo com (4.19), então a identidade de Bezout generalizada (4.17) ainda é válida. Logo, as seguintes equações podem ser obtidas:

$$\tilde{N}(s)U(s) = I - \tilde{M}(s)V(s) \text{ e } \tilde{U}(s)N(s) = I - \tilde{V}(s)M(s). \quad (4.21)$$

Substituindo-se (4.21) em (4.20) e após algumas manipulações algébricas, a equação (4.20) é reduzida a

$$V(s)\tilde{M}(s) - M(s)\tilde{V}(s) = O. \quad (4.22)$$

Finalmente, fazendo $V(s) = X(s) - N(s)Q(s)$ e $\tilde{V}(s) = \tilde{X}(s) - Q(s)\tilde{N}(s)$ na equação (4.22) acima, obtém-se:

$$N(s)Q(s)\tilde{M}(s) - M(s)Q(s)\tilde{N}(s) = C(s), \quad (4.23)$$

onde

$$C(s) = X(s)\tilde{M}(s) - M(s)\tilde{X}(s). \quad (4.24)$$

Escrevendo $Q(s) = [\underline{q}_1(s) \quad \underline{q}_2(s) \quad \dots \quad \underline{q}_m(s)]$ e $C(s) = [\underline{c}_1(s) \quad \underline{c}_2(s) \quad \dots \quad \underline{c}_m(s)]$, onde $\underline{q}_i(s)$ e $\underline{c}_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$, denotam, respectivamente, as colunas de $Q(s)$ e $C(s)$, tem-se que a equação (4.23) é equivalente a:

$$P(s)\underline{q}(s) = \underline{c}(s), \quad (4.25)$$

onde

$$\begin{aligned} P(s) &= \tilde{M}^t(s) \otimes N(s) - \tilde{N}^t(s) \otimes M(s), \\ \underline{q}(s) &= [\underline{q}_1^t(s) \quad \underline{q}_2^t(s) \quad \dots \quad \underline{q}_m^t(s)]^t, \\ \underline{c}(s) &= [\underline{c}_1^t(s) \quad \underline{c}_2^t(s) \quad \dots \quad \underline{c}_m^t(s)]^t, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde \otimes denota o produto de Kronecker. Portanto, a partir de (4.25) e (4.26), uma condição necessária e suficiente para a existência de um controlador comutativo racional estabilizante pode ser expressa da seguinte forma: existe $K(s)$ que estabiliza e comuta com a planta $G(s)$ se e somente se existe um vetor $\underline{q}(s) \in RH_\infty^{m^2 \times 1}$, tal que a equação (4.25) seja satisfeita.

É importante ressaltar que as matrizes racionais $N(s)$, $M(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{M}(s)$, $X(s)$, $\tilde{X}(s)$, $Y(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ podem ser sempre formadas de modo que tenham todas o mesmo polinômio no denominador, utilizando, para tanto, o método descrito em Nett et al. (1984). Para tanto, suponha que a matriz de transferência da planta $G(s)$ tenha a seguinte representação em espaço de estados:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (4.27)$$

onde A , B , C e D são matrizes reais com o par (A, B) estabilizável e (C, A) detectável. Escolhendo-se duas matrizes reais F_R e H_R tais que $A_F = A + BF_R$ e $A_H = A + H_R C$ sejam estáveis (todos os autovalores com parte real negativa) e com os mesmos autovalores e definindo-se as matrizes $C_F = C + DF_R$ e $B_H = B + H_R D$, então é possível mostrar (Nett et al., 1984) que as seguintes matrizes satisfazem a identidade de Bezout generalizada (4.17):

$$\begin{aligned} M(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} A_F & B \\ \hline F & I \end{array} \right], & N(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} A_F & B \\ \hline C_F & D \end{array} \right], \\ \tilde{M}(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} A_H & H \\ \hline C & I \end{array} \right], & \tilde{N}(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} A_H & B_H \\ \hline C & D \end{array} \right], \\ X(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} A_F & -H \\ \hline C_F & I \end{array} \right], & Y(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} A_F & H \\ \hline F & O \end{array} \right], \\ \tilde{X}(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} A_H & -B_H \\ \hline F & I \end{array} \right], & \tilde{Y}(s) &:= \left[\begin{array}{c|c} A_H & H \\ \hline F & O \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Desta forma, é sempre possível considerar na equação (4.25), $P(s) \in \mathbb{R}^{m^2 \times m^2}[s]$ e $\underline{c}(s) \in \mathbb{R}^{m^2}[s]$. Portanto, o problema de encontrar um controlador comutativo racional estabilizante pode ser formulado como: encontre um vetor $\underline{q}(s) \in RH_\infty^{m^2 \times 1}$ tal que (4.25) seja satisfeita, com $P(s)$ e $\underline{c}(s)$ matrizes polinomiais formadas de acordo com (4.26). Em seguida, a partir do vetor $\underline{q}(s)$ obtido, forme a matriz $Q(s) \in RH_\infty^{m \times m}$ e calcule, utilizando a parametrização de Youla-Kucera (equação 4.19), o controlador comutativo racional estabilizante $K(s)$.

Uma observação deve ser feita para o caso em que a matriz de transferência da planta $G(s)$ é estável. Quando isto ocorre, uma fatoração duplamente coprima

sobre $\mathbb{R}H_\infty^{m \times m}$ pode ser obtida fazendo-se:

$$N(s) = \tilde{N}(s) = G(s), M(s) = \tilde{M}(s) = I, X(s) = \tilde{X}(s) = I, Y(s) = \tilde{Y}(s) = O, \quad (4.29)$$

o que é equivalente a fazer $F_R = H_R = O$ nas equações (4.28). Com essas definições pode-se verificar que a matriz $C(s)$, dada pela equação (4.24), é uma matriz com todos os elementos iguais a zero e, dessa forma, a condição sobre a matriz $Q(s)$ para a comutatividade entre a planta e o controlador, dada pela equação (4.23), passa a ser dada por:

$$G(s)Q(s) - Q(s)G(s) = O, \quad (4.30)$$

o que mostra que para o caso da planta $G(s)$ ser estável, o controlador $K(s)$, obtido a partir da equação (4.19), comuta com relação à multiplicação com a planta, se e somente se o parâmetro livre $Q(s)$ da parametrização de Youla-Kucera também comuta com a planta. Logo, escrevendo $G(s) = \frac{1}{d_G(s)}N_G(s)$ e $Q(s) = \frac{1}{d_Q(s)}N_Q(s)$, onde $d_G(s)$ e $d_Q(s)$ são, respectivamente, os polinômios formados pelos mínimos múltiplos comuns entre todos os denominadores de $G(s)$ e de $Q(s)$, e $N_G(s), N_Q(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$, então a equação (4.30), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$N_G(s)N_Q(s) - N_Q(s)N_G(s) = O. \quad (4.31)$$

Portanto, para o caso de plantas estáveis, a equação (4.25) pode ser modificada obtendo-se uma condição mais simples para a comutatividade entre $G(s)$ e $K(s)$. Para tanto, denote por $\underline{n}_{Q_i}(s)$, para $i = 1, \dots, m$, as colunas da matriz polinomial $N_Q(s)$. Logo, como $C(s) = O$, a equação (4.25) pode ser reescrita como:

$$P_e(s)\underline{n}_Q(s) = \underline{0}, \quad (4.32)$$

onde

$$\begin{aligned} P_e(s) &= I \otimes N_G(s) - N_G^t(s) \otimes I, \\ \underline{n}_Q(s) &= \left[\underline{n}_{Q_1}^t(s) \quad \underline{n}_{Q_2}^t(s) \quad \dots \quad \underline{n}_{Q_m}^t(s) \right]^t. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Portanto, quando $G(s)$ é estável, o problema de encontrar um controlador comutativo racional estabilizante para a planta $G(s)$ pode ser formulado como o

problema de encontrar uma matriz racional própria e estável $Q(s) = \frac{1}{d_Q(s)}N_Q(s)$, tal que $N_Q(s)$ satisfaça a condição de comutatividade dada pela equação (4.32) e, em seguida, obter o controlador $K(s)$ utilizando a parametrização de Youla-Kucera que, de acordo com as definições apresentadas nas equações (4.29), passa a ser dada por:

$$\begin{aligned} K(s) &= U(s)V^{-1}(s) = \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s) \\ &= Q(s) [I - G(s)Q(s)]^{-1} \\ &= [I - Q(s)G(s)]^{-1} Q(s). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Note que, nesse caso, a matriz de transferência do sistema em malha fechada, $T_c(s)$, passa a ser dada por (Doyle et al., 1992):

$$T_c(s) = G(s)K(s) [I + G(s)K(s)]^{-1} = G(s)Q(s), \quad (4.35)$$

onde, supondo que $Q(s)$ satisfaça a equação (4.32), então $G(s)$ e $Q(s)$ comutam com relação à multiplicação. Este fato mostra, então, que as funções de autovalores do sistema em malha fechada são iguais ao produto das funções de autovalores de $G(s)$ e $Q(s)$.

4.2.2 Existência de controladores comutativos estabilizantes

Um controlador comutativo estabilizante $K(s)$ sempre existe quando a matriz de transferência da planta $G(s)$ é estável (Basilio, 1995). Neste caso,

$$Q_e(s) = -M^{-1}(s)Y(s) = -\tilde{Y}(s)\tilde{M}^{-1}(s) \in RH_\infty^{m \times m} \quad (4.36)$$

e satisfaz a condição de comutatividade (4.23). Porém, uma vez que os pólos instáveis da planta são também pólos de $Q_e(s)$, então, quando $G(s)$ não é estável, $Q_e(s) \notin RH_\infty^{m \times m}$. Assim, para abordar o caso geral de plantas instáveis, é necessário caracterizar o espaço gerado por todas as soluções da equação (4.25). Para tanto, escreva

$$\underline{q}(s) = \frac{1}{d_Q(s)}\underline{n}_Q(s), \quad (4.37)$$

onde $\underline{n}_Q(s) \in \mathbb{R}^{m^2}[s]$ e $d_Q(s)$ é um polinômio. Substituindo $\underline{q}(s)$, dado pela equação (4.37), na equação (4.25), resulta:

$$P(s) \frac{1}{d_Q(s)} \underline{n}_Q(s) = \underline{c}(s), \quad (4.38)$$

ou equivalentemente,

$$T(s) \begin{bmatrix} \underline{n}_Q(s) \\ d_Q(s) \end{bmatrix} = \underline{0}. \quad (4.39)$$

onde

$$T(s) = \begin{bmatrix} P(s) & -\underline{c}(s) \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Portanto, as soluções (estáveis e instáveis) da equação (4.25) serão definidas pelo espaço nulo à direita de $T(s)$ e serão obtidas a partir de combinações lineares dos elementos de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $T(s)$. Assim, é imperativo obter a nulidade de $T(s)$. Para tanto, o seguinte resultado é necessário.

Lema 4.2 Seja $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ uma matriz diagonalizável e suponha que cada autovalor distinto de A , λ_i , $i = 1, \dots, l$, tenha multiplicidade η_i . Então, existem $\sum_{i=1}^l \eta_i^2$ matrizes linearmente independentes sobre o corpo dos números complexos (\mathbb{C}) que comutam, com relação à multiplicação, com A .

Prova. Seja $A = W\Lambda_A W^{-1}$ uma decomposição espectral de A onde $\Lambda_A = \text{diag}\{\Lambda_{A_k}, k = 1, 2, \dots, l\}$, $\Lambda_{A_k} = \lambda_k I_{\eta_k}$, com I_{η_k} denotando a matriz identidade de ordem η_k e considere a matriz B que comuta com relação à multiplicação com A . Portanto, se $AB = BA$, então

$$W\Lambda_A W^{-1}B = BW\Lambda_A W^{-1}, \quad (4.41)$$

ou equivalentemente:

$$\Lambda_A(W^{-1}BW) = (W^{-1}BW)\Lambda_A. \quad (4.42)$$

Fazendo $\bar{B} = (W^{-1}BW)$, então, a partir da equação (4.42), pode-se observar que B comuta com A se e somente se \bar{B} comuta com Λ_A . É possível verificar também que \bar{B} deve ser bloco diagonal, ou seja, $\bar{B} = \text{diag}\{\bar{B}_k, k = 1, 2, \dots, l\}$, onde $\bar{B}_k \in \mathbb{C}^{\eta_k \times \eta_k}$. Além disso, uma vez que Λ_{A_k} é uma matriz diagonal, Λ_{A_k} comuta com qualquer matriz \bar{B}_k . Considere que $E_{i\ell}$ denota uma matriz cujos elementos são todos iguais

a zero exceto pelo elemento (i, ℓ) , que é igual a 1. É imediato ver, então, que todas as matrizes \bar{B}_k podem ser expressas como uma combinação linear de $E_{i\ell}$, *i.e.*,

$$\bar{B}_k = \sum_{i=1}^{\eta_k} \sum_{\ell=1}^{\eta_k} \bar{b}_{i\ell}^{(k)} E_{i\ell}, \quad (4.43)$$

onde $\bar{b}_{i\ell}^{(k)}$ denota o elemento (i, ℓ) de \bar{B}_k , definindo assim η_k^2 matrizes linearmente independentes que comutam com Λ_{A_k} . Portanto, uma vez que existem l blocos distintos Λ_{A_k} , é fácil ver que existem $\sum_{k=1}^l \eta_k^2$ matrizes linearmente independentes B que comutam com A . \square

A partir do lema 4.2 é possível se obter a nulidade de $P(s)$ a partir das funções de autovalores da planta, conforme será visto a seguir.

Teorema 4.3 Seja $G(s)$ a matriz de transferência da planta e suponha que $G(s)$ tenha l funções de autovalores $\lambda_{g_i}(s)$ distintas com multiplicidade η_i . Então, o posto normal de $P(s)$ é igual a $m^2 - \bar{\eta}$, onde $\bar{\eta} = \sum_{i=1}^l \eta_i^2$. Além disso, a nulidade de $T(s)$ é igual a $\bar{\eta} + 1$.

Prova. Para que $P(s)$ tenha posto normal $r < m^2$, devem existir $\bar{\eta} = m^2 - r$ vetores polinomiais $\underline{\alpha}(s) \in \mathbb{R}^{m^2}[s]$, linearmente independentes, tais que:

$$\underline{\alpha}^t(s)P(s) = \underline{0}^t, \quad (4.44)$$

onde $\underline{\alpha}^t(s) = [\underline{\alpha}_1^t(s) \ \underline{\alpha}_2^t(s) \ \dots \ \underline{\alpha}_m^t(s)]$, $\underline{\alpha}_i(s) \in \mathbb{R}^m[s]$. Definindo

$$A(s) = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1^t(s) \\ \underline{\alpha}_2^t(s) \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_m^t(s) \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

pode-se verificar que a equação (4.44) será satisfeita se existir uma matriz $A(s)$, formada de acordo com a equação (4.45), que satisfaça:

$$\tilde{M}(s)A(s)N(s) - \tilde{N}(s)A(s)M(s) = O. \quad (4.46)$$

Multiplicando-se a equação (4.46) à esquerda por $\tilde{M}^{-1}(s)$ e à direita por $M^{-1}(s)$, resulta:

$$A(s)N(s)M^{-1}(s) - \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)A(s) = O. \quad (4.47)$$

Como $G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ e escrevendo-se $G(s) = N_G(s)/d_G(s)$, tem-se que a equação (4.47) é equivalente a:

$$A(s)\frac{1}{d_G(s)}N_G(s) = \frac{1}{d_G(s)}N_G(s)A(s). \quad (4.48)$$

Uma vez que $G(s)$ tem, por hipótese, l funções de autovalores $\lambda_{g_i}(s)$ distintas com multiplicidade η_i , então para um número infinito de frequências ω_k , $N_G(j\omega_k)$, tem l autovalores distintos e cada um com multiplicidade η_i . Seja ω_k tal que $j\omega_k$ não é um zero de $d_G(s)$. Então, a equação (4.48) é satisfeita se e somente se $A(j\omega_k)$ comuta com $N_G(j\omega_k)$. Como, de acordo com o lema 4.2, existem $\sum_{i=1}^l \eta_i^2$ matrizes linearmente independentes que comutam com $N_G(j\omega_k)$, então para um número infinito de valores ω_k , a nulidade de $P(j\omega_k)$ é $\bar{\eta} = \sum_{i=1}^l \eta_i^2$, ou equivalentemente, o posto de $P(j\omega_k)$ é igual a $m^2 - \bar{\eta}$ para um número infinito de valores $\omega_k \in \mathbb{R}$. Assim, de acordo com a definição 4.1, o posto normal de $P(s)$ é $m^2 - \bar{\eta}$.

Finalmente, note que a condição de comutatividade dada pela equação (4.23) é sempre satisfeita para $Q(s) = Q_e(s)$ dada pela equação (4.36), o que implica que o vetor $\underline{c}(s)$ sempre pertence ao espaço gerado pelas colunas de $P(s)$. Portanto, supondo que a matriz polinomial $P(s)$ tenha nulidade $\bar{\eta}$, então $T(s)$, dado pela equação (4.40), terá nulidade $\bar{\eta} + 1$. \square

Observação 4.3 Note que o lema 4.2 também leva à dimensão para o espaço nulo da matriz $P_e(s)$ definida pela equação (4.33). A partir da equação (4.31) pode-se observar que o número de vetores linearmente independentes pertencentes ao espaço nulo de $P_e(s)$ é igual ao número de matrizes linearmente independentes que comutam com relação à multiplicação com $N_G(s)$. Portanto, seguindo os mesmos passos da prova do teorema 4.3 e utilizando o lema 4.2 conclui-se que a dimensão do espaço nulo de $P_e(s)$ é também igual a $\bar{\eta} = \sum_{i=1}^l \eta_i^2$, onde η_i denota a multiplicidade da i -ésima função de autovalor de $G(s)$. \square

De acordo com o teorema 4.3, a caracterização de todas as soluções da equação (4.39) é dada pelo espaço nulo de $T(s)$ que possui dimensão $\bar{\eta} + 1$, e pode ser gerado pelos vetores de uma base polinomial mínima. Desta forma, denotando por $H(s)$, a

matriz polinomial de dimensão $(m^2 + 1) \times (\bar{\eta} + 1)$ cujas colunas formam uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $T(s)$, então $T(s)H(s) = O$. Logo, todos os vetores $\underline{q}(s)$ que satisfazem a equação (4.39) podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{n}_Q(s) \\ d_Q(s) \end{bmatrix} = H(s)\underline{\psi}(s), \quad (4.49)$$

onde $\underline{\psi}(s)$ é um vetor polinomial. Particionando-se $H(s)$ como

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_t(s) \\ \underline{h}_b^t(s) \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

então $d_Q(s)$ é dado por:

$$d_Q(s) = \sum_{i=1}^{\bar{\eta}+1} h_{b_i}(s)\psi_i(s), \quad (4.51)$$

que é uma equação Diophantina generalizada. Logo, a equação (4.25) tem solução estável se e somente se existem polinômios $\psi_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, \bar{\eta} + 1$, tais que $d_Q(s)$ seja um polinômio de Hurwitz e $Q(s)$, formada a partir da equação (4.49), seja própria. Portanto, o problema de se encontrar um controlador comutativo racional estabilizante para uma dada planta $G(s)$ se transforma no problema de se encontrar um polinômio $d_Q(s)$ de Hurwitz de forma que $Q(s)$ seja uma matriz própria.

Um importante resultado que relaciona os pólos da matriz de transferência da planta com o vetor $\underline{h}_b(s)$, definido na equação (4.50), é apresentado a seguir. Esse resultado será usado para se obter uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes.

Lema 4.3 Se $\underline{h}_b^t(s_0) = \underline{0}^t$, para algum $s_0 \in \mathbb{C}$, então s_0 é um pólo de $G(s)$.

Prova. Note que, uma vez que $Q_e(s) = -M^{-1}(s)Y(s)$ satisfaz a equação (4.23), então o vetor racional $\underline{q}_e(s)$, construído a partir de $Q_e(s)$ de acordo com a equação (4.26), satisfaz a equação (4.25). Logo, escrevendo $\underline{q}_e(s) = \frac{1}{d_{Q_e}(s)}\underline{n}_{Q_e}(s)$, é imediato perceber que, uma vez que os pólos de $G(s)$ são os pólos de $Q_e(s)$, os zeros de $d_{Q_e}(s)$ são os pólos de $G(s)$. Portanto, se algum valor de $s = s_0$ for tal que $\underline{h}_b^t(s_0) = \underline{0}^t$, então s_0 será um pólo da planta. \square

Antes de apresentar uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes, é necessário ainda apresentar alguns resultados. Para tanto, a seguinte definição é necessária.

Definição 4.6 O grau de um vetor polinomial $\underline{h}(s)$, denotado por $gr[\underline{h}(s)]$, é igual ao maior grau dos elementos do vetor $\underline{h}(s)$. \square

De acordo com a definição acima, os seguintes resultados podem ser apresentados.

Lema 4.4 Seja $H(s)$ uma matriz polinomial com todas as colunas linearmente independentes e, para qualquer vetor polinomial $\underline{\psi}(s)$, defina

$$\underline{p}(s) = H(s)\underline{\psi}(s). \quad (4.52)$$

Então, $H(s)$ é reduzida por coluna se e somente se

$$gr[\underline{p}(s)] = \max_{i:\psi_i(s) \neq 0} \{gr[\underline{h}_i(s)] + gr[\psi_i(s)]\}, \quad (4.53)$$

onde $\psi_i(s)$ e $\underline{h}_i(s)$ denotam, respectivamente, o i -ésimo elemento do vetor $\underline{\psi}(s)$ e a i -ésima coluna de $H(s)$.

Prova. Ver Kailath (1980, p. 387). \square

Lema 4.5 Seja $H(s)$ uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $T(s)$, definida de acordo com a equação (4.40). Então, pelo menos uma das colunas de $H(s)$, $\underline{h}_k(s)$, é tal que $gr[\underline{h}_{t_k}(s)] \leq gr[h_{b_k}(s)]$, para algum $k \in \{1, 2, \dots, \bar{\eta} + 1\}$.

Prova. A partir da equação (4.49), observa-se que $\underline{n}_Q(s)$ e $d_Q(s)$ são sempre obtidos a partir de uma combinação linear das colunas de $H(s)$ e, como $H(s)$ é uma base polinomial mínima (portanto, reduzida por coluna), tem-se, de acordo com o lema 4.4, que:

$$gr \left[\begin{array}{c} \underline{n}_Q(s) \\ d_Q(s) \end{array} \right] = \max_{i:\psi_i(s) \neq 0} \{gr[\underline{h}_i(s)] + gr[\psi_i(s)]\}. \quad (4.54)$$

Suponha que todos os elementos do vetor $\underline{h}_b(s)$ possuam grau menor do que o grau da coluna de $H_i(s)$ correspondente, isto é, $gr[h_{b_i}(s)] < gr[\underline{h}_{t_i}(s)]$, para $i = 1, 2, \dots, \bar{\eta} + 1$. Então, $gr[\underline{h}_i(s)] = gr[\underline{h}_{t_i}(s)]$ e, dessa forma, a equação (4.54) pode ser reescrita como:

$$gr \left[\begin{array}{c} \underline{n}_Q(s) \\ d_Q(s) \end{array} \right] = \max_{i:\psi_i(s) \neq 0} \{gr[\underline{h}_{t_i}(s)] + gr[\psi_i(s)]\}. \quad (4.55)$$

Por outro lado, é imediato verificar que

$$gr[d_Q(s)] \leq \max_{j:\psi_j(s) \neq 0} \{gr[h_{b_j}(s)] + gr[\psi_j(s)]\}. \quad (4.56)$$

De acordo com a equação (4.55), para que $Q(s)$ seja própria, então o grau de $d_Q(s)$ deve ser dado por:

$$gr[d_Q(s)] = \max_{i:\psi_i(s) \neq 0} \{gr[\underline{h}_{t_i}(s)] + gr[\psi_i(s)]\}. \quad (4.57)$$

Neste caso, a partir da inequação (4.56) e da equação (4.57), tem-se que:

$$\max_{j:\psi_j(s) \neq 0} \{gr[h_{b_j}(s)] + gr[\psi_j(s)]\} \geq \max_{i:\psi_i(s) \neq 0} \{gr[\underline{h}_{t_i}(s)] + gr[\psi_i(s)]\}. \quad (4.58)$$

Suponha que o valor máximo do lado esquerdo da desigualdade acima seja atingido para $i = k$. Então:

$$gr[h_{b_k}(s)] + gr[\psi_k(s)] \geq \max_{i:\psi_i(s) \neq 0} \{gr[\underline{h}_{t_i}(s)] + gr[\psi_i(s)]\} \geq gr[\underline{h}_{t_k}(s)] + gr[\psi_k(s)], \quad (4.59)$$

e, desta forma, $gr[h_{b_k}(s)] \geq gr[\underline{h}_{t_k}(s)]$. Note que essa desigualdade nunca é satisfeita, uma vez que, por hipótese, $gr[h_{b_i}(s)] < gr[\underline{h}_{t_i}(s)]$, $i = 1, 2, \dots, \bar{\eta} + 1$. Assim, pode-se concluir que quando $gr[h_{b_i}(s)] < gr[\underline{h}_{t_i}(s)]$, para $i = 1, \dots, \bar{\eta} + 1$, então todos os vetores $[\underline{n}_Q^t(s) \ d_Q(s)]^t$, obtidos a partir da equação (4.49), devem satisfazer a desigualdade $gr[d_Q(s)] < gr[\underline{n}_Q(s)]$ e, portanto, devem sempre levar a matrizes $Q(s)$ impróprias. Contudo, $Q_e(s)$ satisfaz a condição de comutatividade (4.49) e, além disso, é uma matriz própria, o que contradiz o fato de que $gr[h_{b_i}(s)] < gr[\underline{h}_{t_i}(s)]$, para $i = 1, \dots, \bar{\eta} + 1$. Conseqüentemente, pelo menos uma das colunas de $H(s)$, $\underline{h}_k(s)$, satisfaz a condição $gr[h_{b_k}(s)] \geq gr[\underline{h}_{t_k}(s)]$. \square

Lema 4.6 Sejam $p_1(s), p_2(s), \dots, p_n(s)$ polinômios e suponha, sem perda de generalidade, que esses polinômios sejam coprimos. Suponha também que $\psi_1(s), \psi_2(s), \dots, \psi_n(s)$ sejam polinômios, e seja $d(s)$ o polinômio formado a partir da seguinte equação Diophantina generalizada:

$$d(s) = p_1(s)\psi_1(s) + p_2(s)\psi_2(s) + \dots + p_n(s)\psi_n(s). \quad (4.60)$$

Portanto, supondo que o grau de $\psi_k(s)$ seja escolhido de forma que $gr[d(s)] = gr[p_k(s)\psi_k(s)]$, então sempre é possível encontrar $\psi_i(s)$, para $i = 1, 2, \dots, n$, tais que $d(s)$ seja um polinômio de Hurwitz.

Prova. Para provar este resultado considere inicialmente a equação Diophantina formada somente com os polinômios $p_k(s)$ e $p_i(s)$, $i \neq k$:

$$d_{ki}(s) = p_k(s)\bar{\psi}_k(s) + p_i(s)\bar{\psi}_i(s), \quad (4.61)$$

onde $\bar{\psi}_k(s)$ e $\bar{\psi}_i(s)$ são polinômios tais que $gr[\bar{\psi}_k(s)] \geq gr[\bar{\psi}_i(s)]$ e seja $d_{ki}(s)$ um polinômio de Hurwitz de grau igual a $gr[p_k(s)] + gr[\bar{\psi}_k(s)]$ e defina:

$$p_k(s) = p_{k_0}s^{\beta_1} + p_{k_1}s^{\beta_1-1} + \dots + p_{k_{\beta_1}}, \quad (4.62)$$

$$p_i(s) = p_{i_0}s^{\beta_2} + p_{i_1}s^{\beta_2-1} + \dots + p_{i_{\beta_2}}, \quad (4.63)$$

$$\bar{\psi}_k(s) = \bar{\psi}_{k_0}s^{\alpha_1} + \bar{\psi}_{k_1}s^{\alpha_1-1} + \dots + \bar{\psi}_{k_{\alpha_1}}, \quad (4.64)$$

$$\bar{\psi}_i(s) = \bar{\psi}_{i_0}s^{\alpha_2} + \bar{\psi}_{i_1}s^{\alpha_2-1} + \dots + \bar{\psi}_{i_{\alpha_2}}. \quad (4.65)$$

Então, supondo que $gr[p_k(s)\bar{\psi}_k(s)] > gr[p_i(s)\bar{\psi}_i(s)]$ pode-se verificar que resolver a equação Diophantina (4.61) é equivalente a resolver a seguinte equação matricial com elementos reais:

$$A\underline{\bar{\psi}}_{ki} = \underline{d}_{ki}, \quad (4.66)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} p_{k_0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{k_1} & p_{k_0} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k_{\beta_1}} & p_{k_{\beta_1-1}} & \dots & p_{k_0} & p_{i_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{k_{\beta_1}} & \dots & p_{k_1} & \vdots & p_{i_0} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_{k_2} & p_{i_{\beta_2}} & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{k_3} & 0 & p_{i_{\beta_2}} & \dots & p_{i_0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{k_{\beta_1}} & 0 & 0 & \dots & p_{i_{\beta_2}} \end{bmatrix}, \quad \underline{\bar{\psi}}_{ki} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{k_0} \\ \bar{\psi}_{k_1} \\ \vdots \\ \bar{\psi}_{k_{\alpha_1}} \\ \bar{\psi}_{i_0} \\ \bar{\psi}_{i_1} \\ \vdots \\ \bar{\psi}_{i_{\alpha_2}} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

e \underline{d}_{ki} é o vetor formado pelos coeficientes do polinômio de Hurwitz $d_{ki}(s)$ desejado. Note que A é uma matriz de ordem $(\alpha_1 + \beta_1 + 1) \times (\alpha_1 + \alpha_2 + 2)$. Portanto, para que A seja quadrada é necessário que $\alpha_2 = \beta_1 - 1$. Além disso, suponha que o grau de $\bar{\psi}_k(s)$, α_1 , seja qualquer número inteiro maior ou igual a $\beta_2 - 1$. Quando isto ocorre, é possível ver que a matriz A passa a ter a seguinte estrutura:

$$A = \begin{bmatrix} L & O \\ B & S \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

onde L é uma matriz quadrada, triangular inferior, com todos os elementos da diagonal principal iguais a p_{k_0} , O é uma matriz de ordem $(\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_2 - \beta_2) \times \beta_1$, com todos os elementos iguais a zero, e S é a matriz de Sylvester formada pelos coeficientes dos polinômios de $p_k(s)$ e $p_i(s)$. Portanto, como, por hipótese, $p_k(s)$ e $p_i(s)$ são coprimos, então A é não-singular, o que implica que qualquer polinômio de Hurwitz de grau igual à soma dos graus de $p_k(s)$ e $\bar{\psi}_k(s)$ pode ser obtido. É importante ressaltar ainda que o grau de $\bar{\psi}_i(s)$, α_2 , tem um valor fixo que depende do grau de $p_k(s)$, enquanto que o grau de $\bar{\psi}_k(s)$, α_1 , pode ser qualquer número inteiro maior ou igual a $\beta_2 - 1$.

Para mostrar agora que o polinômio $d(s)$, obtido a partir da equação (4.60), pode ser sempre feito igual a um polinômio de Hurwitz, basta observar que para todo $\ell \neq k$ e $\ell \neq i$, é possível repetir o procedimento acima com $d_{ki}(s)$ e $p_\ell(s)$, formando uma nova equação Diophantina $d_{kil}(s) = d_{ki}(s)\bar{\psi}_{kil}(s) + p_\ell(s)\bar{\psi}_\ell(s)$, de forma a garantir que o grau de $d_{kil}(s)$ seja igual à soma dos graus de $d_{ki}(s)$ e de $\bar{\psi}_{kil}(s)$. Note que, utilizando a equação (4.61), resulta:

$$d_{kil}(s) = p_k(s)\bar{\psi}_k(s)\bar{\psi}_{kil}(s) + p_i(s)\bar{\psi}_i(s)\bar{\psi}_{kil}(s) + p_\ell(s)\bar{\psi}_\ell(s). \quad (4.69)$$

Assim, por construção, $gr[d_{kil}(s)] = gr[p_k(s)] + gr[\bar{\psi}_k(s)] + gr[\bar{\psi}_{kil}(s)]$. Repetindo o procedimento acima para todo i , obtém-se o resultado desejado. \square

O lema 4.6 acima sugere uma maneira de se obter sempre um polinômio de Hurwitz $d_Q(s)$ tal que $gr \begin{bmatrix} n_Q(s) \\ d_Q(s) \end{bmatrix} = gr[d_Q(s)]$, levando, portanto, a uma matriz $Q(s) \in RH_\infty^{m \times m}$.

Para entender o mecanismo proposto no lema 4.6 acima, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 4.1 Suponha que $\bar{\eta} = 1$ e que os graus das colunas de $H_t(s)$ e $\underline{h}_b^t(s)$, sejam dados por:

$$\begin{bmatrix} gr[\underline{h}_{t_1}(s)] & gr[\underline{h}_{t_2}(s)] \\ gr[h_{b_1}(s)] & gr[h_{b_2}(s)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

onde $h_{b_1}(s)$ e $h_{b_2}(s)$ são coprimos. Procedendo de acordo com o lema 4.6, então deve-se escolher $gr[\psi_2(s)] = 3$. Isso fará com que $gr[\psi_1(s)] \geq 6$ para que $gr[n_Q(s)] \leq$

$gr[d_Q(s)]$. Deve-se ressaltar ainda que quando $gr[\psi_1(s)] \geq 6$ e $gr[\psi_2(s)] = 3$, a matriz A (equação 4.67) será sempre quadrada e não-singular e, portanto, $d_Q(s)$ pode ser feito igual a qualquer polinômio de Hurwitz onde $gr[d_Q(s)] \geq 10$. \square

A partir dos lemas 4.3, 4.5 e 4.6 uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes pode ser agora apresentada.

Teorema 4.4 Seja $G(s)$ a matriz de transferência da planta. Então, existem controladores comutativos racionais estabilizantes para $G(s)$ se e somente se $\underline{h}_b^t(s_0) \neq \underline{0}^t$, para todo s_0 igual a um pólo instável da planta.

Prova. (\Rightarrow) Note que não existem $\psi_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, \bar{\eta} + 1$, que fazem com que $d_Q(s)$ seja Hurwitz se e somente se o máximo divisor comum de $h_{b_i}(s)$, para $i = 1, 2, \dots, \bar{\eta} + 1$, $\chi(s)$, tiver um zero instável, ou seja, $\chi(s_0) = 0$ e s_0 possua parte real não-negativa. Isto significa que não existem controladores comutativos estabilizantes se $\underline{h}_b^t(s_0) = \underline{0}^t$ para algum $s_0 \in \mathbb{C}$ com parte real não-negativa. De acordo com o lema 4.3, se $\underline{h}_b^t(s_0) = \underline{0}^t$ então s_0 é um pólo da planta.

(\Leftarrow) Suponha que $\underline{h}_b^t(s_0) \neq \underline{0}^t$ para todo s_0 igual a um pólo instável da planta. Então, sempre é possível obter-se um polinômio de Hurwitz, $d_Q(s)$, a partir da equação Diophantina generalizada (4.51). Dessa forma, a única restrição para que exista um controlador comutativo estabilizante, é que os polinômios $\psi_i(s)$ que levam ao polinômio $d_Q(s)$ Hurwitz sejam tais que $Q(s)$, obtida a partir da equação (4.49), seja própria. De acordo com o lema 4.5, pelo menos para uma das colunas de $H(s)$, $\underline{h}_k(s)$, o grau de $h_{b_k}(s)$ é maior ou igual ao grau de $\underline{h}_{t_k}(s)$. Dessa forma, para garantir que $Q(s)$ seja própria basta fazer uma restrição nos graus de $\psi_i(s)$ de forma que $gr[d_Q(s)] = gr[h_{b_k}(s)] + gr[\psi_k(s)]$ e que $gr[d_Q(s)] = \max_i \{gr[\underline{h}_i(s)] + gr[\psi_i(s)]\}$. Esta restrição não impede que sejam obtidos ainda polinômios $d_Q(s)$ de Hurwitz uma vez que, como $\underline{h}_b^t(s_0) \neq \underline{0}^t$ para todo s_0 igual a um pólo instável da planta, então sempre é possível resolver equações Diophantinas de forma a modificar os zeros instáveis de $h_{b_i}(s)$, para $i = 1, \dots, \bar{\eta} + 1$, levando a um polinômio de Hurwitz,

como mostrado no lema 4.6. Além disso, a restrição nos graus de $\psi_k(s)$ e de $d_Q(s)$ garantem que $Q(s)$, obtida a partir da equação (4.49), seja própria. \square

Observação 4.4 Note que quando $\underline{h}_b^t(s_0) = \underline{0}^t$, para algum s_0 igual a um pólo instável da planta, então toda matriz $Q(s)$ (própria ou imprópria), que satisfaça a condição de comutatividade dada pela equação (4.23), possui o pólo instável de $G(s)$, s_0 , como um pólo. \square

Embora o teorema 4.4 tenha levado a uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes, nenhuma propriedade da planta é explicitamente associada a esta condição. Além disso, o uso desta condição tem elevado custo computacional uma vez que requer o cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $T(s)$ para, em seguida, verificar os valores do vetor $\underline{h}_b^t(s_0)$ para cada pólo instável da planta $s = s_0$. Portanto, torna-se mais interessante encontrar uma condição, baseada explicitamente na matriz de transferência da planta, para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes que seja mais simples de ser verificada do que a fornecida pelo teorema 4.4. Para obter essa condição é necessário primeiro apresentar o seguinte resultado.

Lema 4.7 Seja $s_0 \in \mathbb{C}$ e $Re(s_0) > 0$. Então s_0 é um zero do polinômio característico do sistema em malha fechada, se e somente se s_0 é um pólo de $Q(s)$, o parâmetro livre na parametrização de Youla-Kucera (equação (4.19)), associada com um controlador próprio $K(s)$ não-estabilizante.

Prova. Seja $K(s)$ a matriz de transferência de um controlador próprio não-estabilizante, e seja $Q(s)$ a matriz, obtida de acordo com a equação (4.19), associada a essa escolha de $K(s)$. Considere a matriz diferença de retorno $F(s)$, dada por:

$$F(s) = I + G(s)K(s). \quad (4.71)$$

Como mostrado no capítulo 2,

$$\det[F(s)] = \alpha \frac{p_c(s)}{p_o(s)}, \quad (4.72)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, e $p_c(s)$ e $p_o(s)$ denotam, respectivamente, os polinômios característicos do sistema em malha fechada e em malha aberta. Seja $G(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ uma fatoração coprima à esquerda de $G(s)$ sobre $RH_\infty^{m \times m}$ e seja $K(s) = U(s)V^{-1}(s)$ obtida de acordo com a equação (4.19). Logo,

$$\begin{aligned} \det[F(s)] &= \det[I + \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)U(s)V^{-1}(s)] \\ &= \det[\tilde{M}^{-1}(s)]\det[\tilde{M}(s)V(s) + \tilde{N}(s)U(s)]\det[V^{-1}(s)] \\ &= \det[\tilde{M}^{-1}(s)]\det[V^{-1}(s)]. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Definindo $p_G(s)$ e $p_K(s)$ como os polinômios dos pólos de $G(s)$ e $K(s)$, respectivamente, e $p_{\tilde{M}}(s)$ e $p_V(s)$ como os polinômios dos pólos de $\tilde{M}(s)$ e $V(s)$, e combinando as equações (4.72) e (4.73), resulta em:

$$\frac{p_G(s)p_K(s)}{p_{\tilde{M}}(s)p_V(s)} = \frac{p_o(s)}{p_c(s)}. \quad (4.74)$$

Supondo que $G(s)$ e $K(s)$ não possuem modos escondidos (modos não-observáveis e/ou não-controláveis), então a equação (4.74) leva a

$$p_c(s) = p_{\tilde{M}}(s)p_V(s). \quad (4.75)$$

Note que, uma vez que $\tilde{M}(s) \in RH_\infty^{m \times m}$, então $p_{\tilde{M}}(s)$ é um polinômio de Hurwitz e assim, uma vez que por hipótese o sistema em malha fechada é instável, então os zeros instáveis de $p_c(s)$ são zeros de $p_V(s)$, ou equivalentemente, são pólos instáveis de $V(s)$. De acordo com a equação (4.19),

$$V(s) = X(s) - N(s)Q(s), \quad (4.76)$$

e, portanto, uma vez que $X(s), N(s) \in RH_\infty^{m \times m}$, então todos os pólos instáveis de $V(s)$ são pólos de $Q(s)$. Por outro lado, é sabido que se $Q(s)$ tem um pólo instável então o sistema em malha fechada é instável, o que significa que $p_c(s)$ não é um polinômio de Hurwitz. \square

O teorema 4.4, a observação 4.4 e o lema 4.7 levam ao seguinte resultado.

Lema 4.8 Suponha que não existam controladores comutativos racionais estabilizantes para $G(s)$. Então, para todo $K(s)$ próprio comutativo, o polinômio característico do sistema em malha fechada, $p_c(s)$, possui um zero instável igual a um pólo instável de $G(s)$.

Prova. A prova pode ser obtida de forma imediata a partir do teorema 4.4 e do lema 4.7. \square

Uma vez que o lema 4.8 associa a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes com os modos instáveis da matriz de transferência da planta $G(s)$, então é possível obter uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes tendo como base esses modos. Isso é feito no teorema a seguir.

Teorema 4.5 Seja $G(s)$ a matriz de transferência da planta. Então, não existem controladores comutativos racionais estabilizantes para $G(s)$ se e somente se $G(s)$ tem um modo fixo instável.

Prova. (\Rightarrow) Suponha que $G(s)$ possua um modo fixo instável s_0 . Então, se $K(s)$ comuta exatamente com $G(s)$, então $K(s)$ e $G(s)$ têm a mesma matriz de autovetores $W(s)$, ou seja, se $G(s) = W(s)\Lambda_G(s)V(s)$ é uma decomposição espectral de $G(s)$, onde $V(s) = W^{-1}(s)$, então $K(s) = W(s)\Lambda_K(s)V(s)$ é uma decomposição espectral para $K(s)$. Dessa forma, a matriz de transferência do sistema em malha aberta $T_o(s) = G(s)K(s)$, possui a seguinte decomposição espectral:

$$T_o(s) = W(s)\Lambda_G(s)\Lambda_K(s)V(s), \quad (4.77)$$

que mostra que as funções de autovalores de $T_o(s)$ são iguais ao produto das funções de autovalores de $G(s)$ e $K(s)$. Portanto, os pólos das funções de autovalores de $T_o(s)$ são os pólos das funções de autovalores de $G(s)$ e de $K(s)$. Porém, como s_0 é um modo fixo de $G(s)$, então, como observado na subseção 4.1.4, s_0 é um pólo de $G(s)$ que não é pólo de nenhuma de suas funções de autovalores, o que implica que s_0 não pode ser um pólo das funções de autovalores de $T_o(s)$. Portanto, se s_0 é um pólo de $T_o(s)$, s_0 é um modo fixo de $T_o(s)$, e de acordo com o lema 4.1, s_0 é um zero

de $p_c(s)$. Por outro lado, se s_0 não é um pólo de $T_o(s)$, então, uma vez que s_0 é um pólo de $G(s)$, s_0 é um modo escondido de $T_o(s)$, o que também implica que s_0 é um zero de $p_c(s)$.

(\Leftarrow) Suponha que $G(s)$ não possua modos fixos instáveis e que não existam controladores comutativos racionais estabilizantes para $G(s)$. De acordo com o lema 4.8, se não existem controladores comutativos racionais estabilizantes para $G(s)$, então, para toda matriz de transferência do controlador $K(s)$ própria que comuta exatamente com $G(s)$, o polinômio característico do sistema em malha fechada tem um zero igual a um pólo instável de $G(s)$, s_0 . Considere o seguinte controlador comutativo próprio kI , onde $k \in \mathbb{R}$. Então, de acordo com o lema 4.8, se não existe um controlador comutativo estabilizante, então o pólo instável de $G(s)$, s_0 , permanece inalterado sob qualquer realimentação por um escalar kI , o que, de acordo com o lema 4.1, implica que s_0 é um modo fixo de $G(s)$. \square

4.2.3 Solução geral e caracterização dos graus de liberdade

A solução geral para o problema de encontrar uma matriz $Q(s) \in RH_\infty^{m \times m}$, que leva a um controlador comutativo racional estabilizante $K(s)$, formulado na subseção 4.2.1, é apresentada a seguir.

Teorema 4.6 Seja $G(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$ e suponha que $G(s)$ satisfaça as condições impostas pelo teorema 4.5 para a existência de um controlador comutativo racional estabilizante. Então, a classe de todos os controladores comutativos racionais estabilizantes é parametrizada pela matriz de transferência racional, própria e estável $Q(s)$ cujas colunas $\underline{q}_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$ são obtidas da seguinte forma:

$$\underline{q}(s) = \begin{bmatrix} \underline{q}_1(s) \\ \underline{q}_2(s) \\ \vdots \\ \underline{q}_m(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d_Q(s)} H_t(s) \underline{\psi}(s) \quad (4.78)$$

onde

1. $H(s) = \begin{bmatrix} H_t(s) \\ \underline{h}_b^t(s) \end{bmatrix}$ é uma matriz $(m^2 + 1) \times (\bar{\eta} + 1)$ polinomial cujas colunas formam uma base polinomial mínima para o espaço nulo da matriz $T(s) = [P(s) \quad -\underline{c}(s)]$, definida na equação (4.40);

2. $\underline{\psi}(s)$ é um vetor de dimensão $(\bar{\eta} + 1)$ cujos elementos são polinômios, sendo os graus de liberdade disponíveis na solução geral a serem empregados para obter um polinômio de Hurwitz $d_Q(s) = \sum_{i=1}^{\bar{\eta}+1} h_{b_i}(s)\psi_i(s)$, onde $h_{b_i}(s)$ é um elemento do vetor $\underline{h}_b(s)$. \square

Note que o teorema 4.6 leva a uma parametrização para todos os controladores comutativos racionais estabilizantes considerando-se tanto plantas estáveis quanto plantas instáveis. Contudo, para o caso especial de plantas estáveis, uma parametrização mais simples pode ser obtida se a fatoração duplamente coprima de $G(s)$ for definida de acordo com as equações (4.29), como apresentado a seguir.

Corolário 4.1 Seja $G(s)$ uma matriz de transferência estável e considere a fatoração duplamente coprima para $G(s)$ sobre $RH_\infty^{m \times m}$ dada pelas equações (4.29). Então, a classe de todos os controladores comutativos estabilizantes será parametrizada pela matriz de transferência racional, própria e estável $Q(s) = \frac{1}{d_Q(s)}N_Q(s)$, onde as colunas de $Q(s)$ são obtidas da seguinte forma:

$$\underline{q}(s) = \begin{bmatrix} \underline{q}_1(s) \\ \underline{q}_2(s) \\ \vdots \\ \underline{q}_m(s) \end{bmatrix} = H_e(s)\underline{\psi}_e(s) \quad (4.79)$$

onde

1. $H_e(s)$ é uma matriz $m^2 \times \bar{\eta}$ polinomial cujas colunas formam uma base polinomial mínima para o espaço nulo da matriz $P_e(s)$, definida na equação (4.33);
2. $\underline{\psi}_e(s)$ é um vetor de dimensão $\bar{\eta}$ cujos elementos são agora funções racionais de s , sendo os graus de liberdade disponíveis na solução geral a serem empregados para obter uma $Q(s)$ racional, própria e estável. \square

A partir do corolário 4.1, pode-se verificar que para a obtenção de $Q(s)$ racional, própria e estável basta escolher adequadamente o grau relativo de cada elemento do vetor $\underline{\psi}_e(s)$ e fazer com que todos os polinômios dos denominadores dos elementos de $\underline{\psi}_e(s)$ sejam polinômios de Hurwitz. Isto mostra que para o caso de plantas estáveis não há mais a necessidade de se resolver uma equação Diophantina generalizada como no caso de plantas instáveis.

4.3 Exemplos

Nesta seção, os exemplos 3.1 e 3.4 são novamente considerados e uma parametrização para a classe de todos os controladores comutativos estabilizantes, em função de uma matriz $Q(s) \in RH_{\infty}^{m \times m}$ obtida de acordo com a equação (4.78), é apresentada.

Exemplo 4.2 Considere a matriz de transferência da planta apresentada no exemplo 3.1:

$$G(s) = \frac{1}{d_G(s)} N_G(s)$$

onde $d_G(s) = (s - 1)(s + 2)$ e

$$N_G(s) = \begin{bmatrix} -47s + 2 & 56s \\ -42s & 50s + 2 \end{bmatrix}.$$

Na seção 3.4 é projetado o seguinte pré-compensador K_p que torna a matriz de transferência $G(s)K_p$ aproximadamente ν -normal em todas as frequências:

$$K_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Desta forma, $G(s)K_p$ é dado por:

$$G(s)K_p = \frac{1}{d_G(s)} N_G(s)K_p \quad (4.81)$$

onde

$$N_G(s)K_p = \begin{bmatrix} -56s & -47s + 2 \\ -(50s + 2) & -42s \end{bmatrix}.$$

De acordo com o teorema 4.5, existe um controlador comutativo estabilizante para $G(s)$ se e somente se $G(s)$ não possui modos fixos instáveis. Note que a forma de Smith-McMillan de $G(s)K_p$ é dada por:

$$M_S(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(s - 1)(s + 2)}, \frac{s + 1}{s - 1} \right\}, \quad (4.82)$$

de onde se pode verificar que $G(s)K_p$ possui dois pólos instáveis iguais a 1. Uma vez que este pólo não é um zero de $G(s)K_p$, então esse modo instável não pode ser um modo fixo. Portanto, a condição do teorema 4.5 é satisfeita e a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes para $G(s)K_p$ está garantida.

Considere, agora, o problema de se encontrar uma parametrização para todos os controladores comutativos racionais estabilizante para $G(s)K_p$. O primeiro passo é calcular uma fatoração duplamente coprima para $G(s)K_p$ sobre $RH_\infty^{m \times m}$, *i.e.*, calcular matrizes estáveis $N(s)$, $M(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{M}(s)$, $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s) \in RH_\infty^{m \times m}$ que satisfaçam a identidade de Bezout generalizada (4.17). Para tanto, utilizando-se as expressões (4.28) de forma que todas as matrizes da identidade de Bezout generalizada possuam modos iguais a -1 , com multiplicidade dois, e -2 , com multiplicidade 1, e, em seguida, formando-se, de acordo com as equações (4.26a) e (4.26c), a matriz polinomial $P(s) = [p_{ij}(s)]$ e o vetor polinomial $\underline{c}(s)$, obtém-se $P(s) = [p_{ij}(s)] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}[s]$ onde:

$$\begin{aligned}
p_{11}(s) &= 8289,8s^4 + 11756s^3 - 4823,2s^2 - 11756s - 3466,6 \\
p_{21}(s) &= -50s^5 - 8783,2s^4 - 9484,9s^3 + 7981,5s^2 + 9534,9s + 801,72 \\
p_{31}(s) &= 47s^5 + 5931,2s^4 + 5035,5s^3 - 6732,9s^2 - 5082,5s + 801,72 \\
p_{41}(s) &= -8289,8s^4 - 11756s^3 + 4823,2s^2 + 11756s + 3466,6 \\
p_{12}(s) &= -47s^5 + 6943,3s^4 + 9966,2s^3 - 4014,4s^2 - 9919,2s - 2928,9 \\
p_{22}(s) &= 14s^5 - 7352,8s^4 - 8057,9s^3 + 6675,8s^2 + 8043,9s + 677,06 \\
p_{32}(s) &= 4968,1s^4 + 4291s^3 - 5645,1s^2 - 4291s + 677,06 \\
p_{42}(s) &= 47s^5 - 6943,3s^4 - 9966,2s^3 + 4014,4s^2 + 9919,2s + 2928,9 \\
p_{13}(s) &= 50s^5 + 7686,4s^4 + 11185s^3 - 4087,5s^2 - 11235s - 3598,9 \\
p_{23}(s) &= -7592,8s^4 - 8371,9s^3 + 6813,8s^2 + 8371,9s + 779,06 \\
p_{33}(s) &= -14s^5 + 4985,6s^4 + 4234,6s^3 - 5764,7s^2 - 4220,6s + 779,06 \\
p_{43}(s) &= -50s^5 - 7686,4s^4 - 11185s^3 + 4087,5s^2 + 11235s + 3598,9 \\
p_{14}(s) &= 6437,7s^4 + 9478,4s^3 - 3397s^2 - 9478,4s - 3040,7 \\
p_{24}(s) &= 50s^5 - 6353,2s^4 - 7111,1s^3 + 5695,3s^2 + 7061,1s + 657,91 \\
p_{34}(s) &= -47s^5 + 4173,3s^4 + 3609,4s^3 - 4831,2s^2 - 3562,4s + 657,91 \\
p_{44}(s) &= -6437,7s^4 - 9478,4s^3 + 3397s^2 + 9478,4s + 3040,7
\end{aligned}$$

e

$$\underline{c}(s) = \begin{bmatrix} -224,46s^4 - 439,21s^3 + 9,7052s^2 + 439,21s + 214,75 \\ 165,16s^4 + 201,46s^3 - 128,85s^2 - 201,46s - 36,305 \\ -92,402s^4 - 56,096s^3 + 128,71s^2 + 56,096s - 36,305 \\ 224,46s^4 + 439,21s^3 - 9,7052s^2 - 439,21s - 214,75 \end{bmatrix}.$$

A partir de $P(s)$ e $\underline{c}(s)$ forma-se a matriz polinomial $T(s) = [P(s) \quad -\underline{c}(s)]$ e calcula-se uma base polinomial mínima ($H(s)$) para o espaço nulo à direita de $T(s)$. De acordo com o lema 4.3, a nulidade da matriz polinomial $P(s)$ é $\bar{\eta} = \sum_{i=1}^l \eta_i^2$, onde cada $\eta_i, i = 1, \dots, l$ denota a multiplicidade de cada uma das l funções de autovalores distintas de $G(s)K_p$. Logo, como neste exemplo $G(s)$ é uma matriz 2×2 e não é diagonal, então $G(s)$ tem duas funções de autovalores distintas e a nulidade de $P(s)$ é $\bar{\eta} = 2$. Portanto, como a nulidade de $T(s)$ é igual a $\bar{\eta} + 1$, então a nulidade de $T(s)$ é 3, o que significa que o algoritmo para obtenção de $H(s)$ deve parar quando forem obtidos três vetores polinomiais. Procedendo de acordo com o algoritmo 4.1, obtém-se:

$$H(s) = \begin{bmatrix} -0,4284 & 0,1552s + 0,4077 & 0,3992s - 0,1471 \\ 0,5100 & -0,1849s - 0,4824 & -0,4753s + 0,1758 \\ 0,4794 & -0,1738s - 0,4423 & -0,4467s + 0,1805 \\ -0,5712 & 0,2070s + 0,5234 & 0,5322s - 0,2160 \\ 0,0148 & 0,0007s - 0,0011 & -0,0107s + 0,0090 \end{bmatrix}.$$

De acordo com o teorema 4.6, a classe de todos os controladores comutativos estabilizantes pode ser parametrizada por uma matriz $Q(s)$, obtida a partir de $H(s)$, formando-se um polinômio $d_Q(s)$ de Hurwitz para garantir que $Q(s) \in RH_{\infty}^{m \times m}$. Desta forma, os graus de liberdade disponíveis para a obtenção de $Q(s)$, $\underline{\psi}(s)$, devem ser escolhidos de forma que $d_Q(s) = 0,0148\psi_1(s) + (0,0007s - 0,0011)\psi_2(s) + (-0,0107s + 0,0090)\psi_3(s)$ seja Hurwitz e que o grau de $d_Q(s)$ seja igual a $gr[d_Q(s)] = \max_i \{h_{b_i}(s)\psi_i(s)\}$.

Para ilustrar o procedimento para a obtenção de um controlador comutativo estabilizante para $G(s)K_p$, suponha que ψ_1, ψ_2 e ψ_3 devam ser escolhidos de forma a satisfazer $d_Q(s) = s + 15$. Uma solução para essa equação Diophantina generalizada é $\psi_1 = 1064,8, \psi_2 = -109,5$ e $\psi_3 = -100$. A partir desses valores obtém-se, de acordo com a expressão (4.49), a seguinte matriz $Q(s) \in RH_{\infty}^{m \times m}$:

$$Q(s) = \frac{1}{s + 15} \begin{bmatrix} -56,9184s - 486,1498 & 63,7144s + 540,8471 \\ 67,7812s + 578,2878 & -75,8972s - 643,9797 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

Substituindo $Q(s)$, dada por (4.83), na parametrização de Youla-Kucera (equação (4.19)), obtém-se o seguinte controlador comutativo estabilizante $K_c(s)$ para a planta pré-compensada $G(s)K_p$:

$$K_c(s) = N_K(s)M_K^{-1}(s) \quad (4.84)$$

onde

$$N_K(s) = \begin{bmatrix} -19,7252s^2 - 184,2235s - 505,1254 & 6,6894s^3 + 77,8471s^2 + 307,8451s + 368,4355 \\ 23,1504s^2 + 209,4514s + 577,7823 & -7,7488s^3 - 85,8247s^2 - 341,6025s - 414,2844 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

e

$$M_K(s) = \begin{bmatrix} 16,883s^2 + 287,3528s + 324,5373 & -10,7072s^3 - 194,4218s^2 - 411,7944s - 232,7026 \\ 14,7726s^2 + 251,9651s + 283,536 & -9,4602s^3 - 172,0369s^2 - 365,4252s - 206,8108 \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

É fácil verificar que o controlador acima é estável e, como a planta tem dois pólos instáveis, então para que o sistema em malha fechada seja internamente estável é necessário que os lugares característicos da matriz de transferência em malha aberta $T_o(s) = G(s)K_pK_c(s)$, tenham dois envoltimentos em sentido anti-horário do ponto crítico $-1 + j0$. Os lugares característicos de $T_o(s)$ são apresentados na figura 4.2, onde claramente se verifica que o ponto crítico $-1 + j0$ é, de fato, envolvido duas vezes em sentido anti-horário. Além disso, note que os lugares característicos da matriz de transferência do sistema em malha aberta possuem boas margens de ganho e de fase.

Considere agora a mesma medida de comutatividade utilizada em Basilio et al. (2002):

$$e_i(\omega) = \frac{|\lambda_{o_i}(j\omega) - \lambda_{g_i}(j\omega)\lambda_{k_i}(j\omega)|}{|\lambda_{o_i}(j\omega)|} 100\%, i = 1, 2,$$

que representa o erro percentual entre os lugares característicos de $T_o(s)$ ($\lambda_{o_i}(j\omega)$) e os produtos dos lugares característicos de $G(s)K_p$ ($\lambda_{g_i}(j\omega)$) e $K_c(s)$ ($\lambda_{k_i}(j\omega)$) a cada frequência ω . A partir da figura 4.3, verifica-se que o erro percentual para ambos os lugares característicos é extremamente pequeno (inferior a $1,5 \times 10^{-6}\%$ para todas as frequências), o que mostra que $G(j\omega)K_p$ e $K_c(j\omega)$ realmente comutam. \square

Exemplo 4.3 Considere novamente a matriz de transferência da planta, $G(s)$, e o

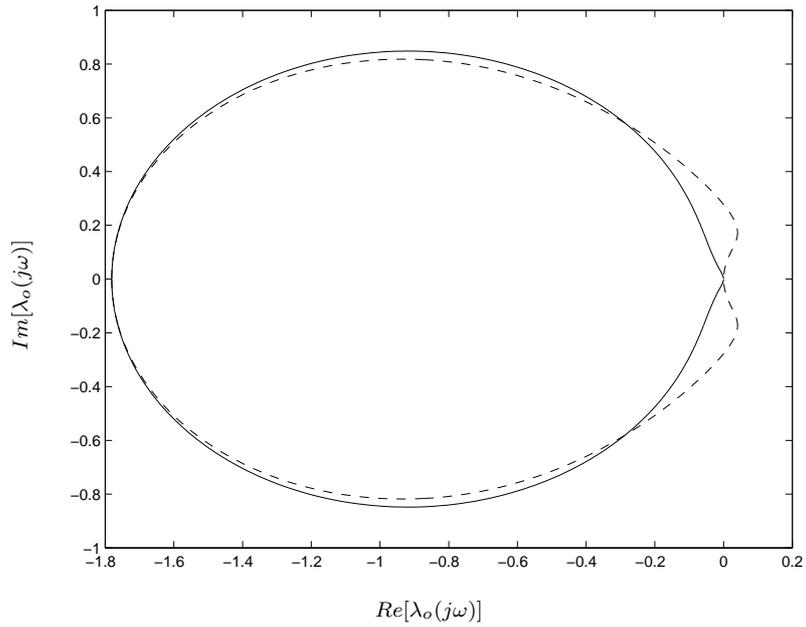


Figura 4.2: Lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s) = G(s)K_pK_c(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).

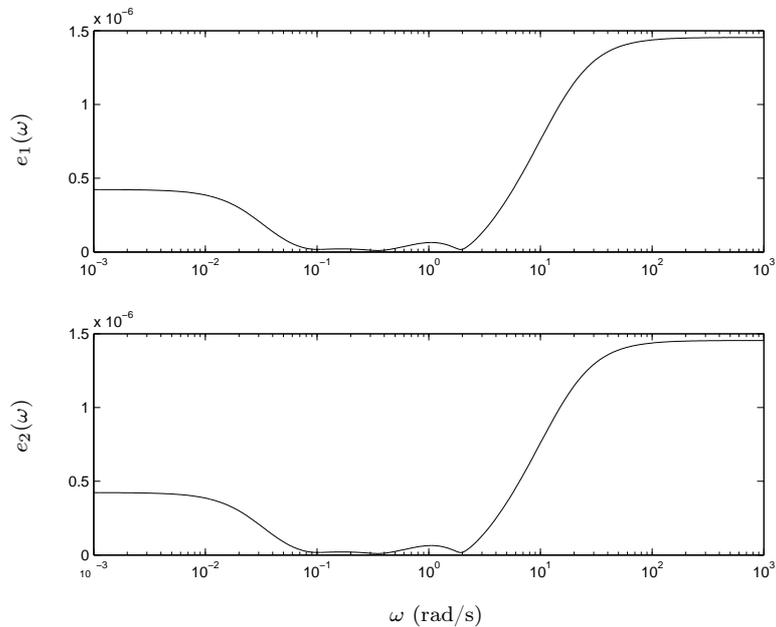


Figura 4.3: Erro percentual entre os lugares característicos de $T_o(s) = G(s)K_pK_c(s)$ e o produto dos lugares característicos de $G(s)K_p$ e $K_c(s)$ a cada frequência ω .

pré-compensador estático projetado no exemplo 3.4 (equação 3.121):

$$K_p = \begin{bmatrix} -0,4262 & -0,5642 \\ 0,5642 & -0,4262 \end{bmatrix}.$$

Com este pré-compensador a matriz de transferência da planta passa a ser dada por:

$$G(s)K_p = \frac{1}{d_G(s)} \begin{bmatrix} \tilde{n}_{11} & \tilde{n}_{12} \\ \tilde{n}_{21} & \tilde{n}_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

onde

$$\tilde{n}_{11} = -0,3435s^5 - 22,0757s^4 - 436,0301s^3 - 3469,8946s^2 - 9946,6229s - 1581,2751$$

$$\tilde{n}_{12} = -0,4547s^5 - 11,6274s^4 - 89,011s^3 - 134,4061s^2 + 425,0820s - 846,0852$$

$$\tilde{n}_{21} = -0,8311s^5 - 22,8883s^4 - 202,812s^3 - 537,338s^2 + 407,8101s + 263,9556$$

$$\tilde{n}_{22} = -1,1002s^5 - 38,6751s^4 - 463,3311s^3 - 2097,6357s^2 - 2496,4211s - 672,8259.$$

e $d_G(s) = s^6 + 40,45s^5 + 618,3115s^4 + 4337,3012s^3 + 13060,7233s^2 + 10781,8782s + 1784,6301$. Como esta planta é estável, então existem controladores comutativos estabilizantes e uma parametrização pode ser obtida considerando-se a fatoração duplamente coprima para $G(s)$ sobre $RH_\infty^{m \times m}$ dada pelas equações (4.29). Dessa forma, de acordo com o corolário 4.1, uma parametrização para todos os controladores comutativos estabilizantes pode ser obtida encontrando-se uma base polinomial para o espaço nulo de $P_e(s)$. Como as funções de autovalores de $G(s)$ são distintas então a nulidade de $P_e(s)$ é igual a dois, e uma base para o espaço nulo de $P_e(s)$ pode ser formada pela matriz identidade e pelo próprio $N_G(s)K_p$. Na verdade, pode-se verificar que estas duas matrizes formam uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $P_e(s)$ neste exemplo.

Na figura 4.4 são apresentados os lugares característicos de $G(s)K_p$, de onde se pode observar que um dos lugares característicos passa extremamente perto do ponto $-1 + j0$. Portanto, multiplicando-se $G(s)K_p$ por -1 , obtém-se o gráfico da figura 4.5, onde pode ser visto que agora os lugares característicos da planta estão suficientemente afastados do ponto $-1 + j0$. É importante ressaltar que, assim como no método do lugar característico tradicional, é interessante tornar o sistema compensado internamente estável, quando possível, em um primeiro estágio do projeto do controlador, ou seja, na escolha do pré-compensador normalizante estático K_p . Isto, em geral, facilita o projeto do controlador comutativo racional estabilizante nas etapas seguintes.

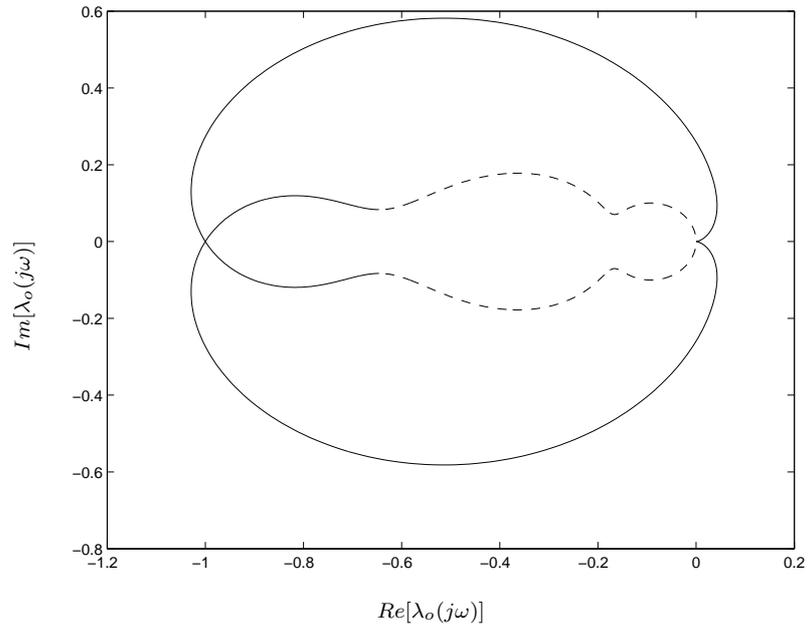


Figura 4.4: Lugares característicos de $T_o(s) = G(s)K_p$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).

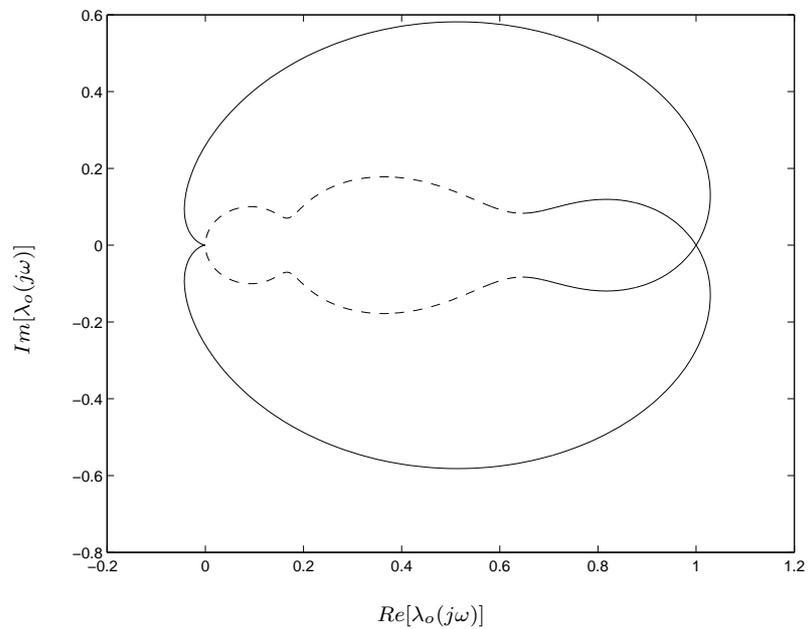


Figura 4.5: Lugares característicos de $T_o(s) = G(s)(-K_p)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).

4.4 Comentários finais

Neste capítulo, uma parametrização para todos os controladores comutativos que estabilizam internamente um sistema em malha fechada com realimentação unitária negativa é apresentada. Baseado nesta parametrização uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos estabilizantes é obtida. Esta condição pode ser verificada de forma simples analisando-se os modos instáveis da planta: se a planta não possuir modos fixos instáveis então existem controladores comutativos racionais estabilizantes.

Uma vez obtida a parametrização para todos os controladores comutativos estabilizantes, o próximo passo é incorporar os objetivos de projeto, como, por exemplo, rastreamento do sinal de referência, rejeição de ruídos, baixa interação entre entradas e saídas e robustez. Para tanto, os graus de liberdade disponíveis na parametrização devem ser utilizados para o projeto do controlador comutativo racional estabilizante. No capítulo seguinte são apresentados resultados preliminares visando obter uma maneira sistemática de posicionar os lugares característicos do sistema em malha aberta de forma a atender vários objetivos de projeto, incluindo o objetivo de estabilidade robusta.

É importante ressaltar, ainda, que os resultados com relação à parametrização apresentados neste capítulo também são válidos para sistemas discretos no tempo. Neste caso, é necessário a obtenção de uma solução para a identidade de Bezout polinomial generalizada. No apêndice A é apresentada uma maneira numericamente robusta para se obter essa solução (Basilio e Moreira, 2004).

Capítulo 5

Fundamentos para o projeto de controladores comutativos robustos

Em Basilio (1995) é proposto o projeto de controladores comutativos que atendam a objetivos de robustez, utilizando-se, para tanto, idéias associadas ao projeto de controladores robustos H_∞ . Através de alguns exemplos, é mostrado em Basilio (1995) que, ao restringir o projeto de controladores que maximizam a tolerância do sistema a incertezas na planta a controladores comutativos, ainda assim é possível obter sistemas em malha fechada com grau de robustez próximo do obtido através da teoria de controle robusto H_∞ . Contudo, outros objetivos de projeto como, por exemplo, rastreamento e rejeição de sinais externos de perturbação não foram considerados, o que torna os sistemas realimentados obtidos nos exemplos apresentados em Basilio (1995) questionáveis com relação a sua implementação. Assim sendo, em Basilio (1995) é sugerido como um trabalho futuro, formular uma estratégia de projeto de controladores comutativos estabilizantes robustos, relaxando-se os requisitos de robustez e, em seguida, utilizar os graus de liberdade gerados por este relaxamento para projetar controladores comutativos que atendam a mais de um objetivo de projeto.

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas formas para abordar o problema de se projetar um controlador comutativo estabilizante robusto, baseadas nas idéias apresentadas em Basilio (1995) e nos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Além disso, uma limitação à aplicação do método, que pode surgir devido ao mau-condicionamento da planta é apresentada. Os resultados deste capítulo são

ilustrados através de dois exemplos extraídos da literatura.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma. Na seção 5.1, os objetivos de projeto comumente formulados para um sistema multivariável realimentado são apresentados e formas para alcançar estes objetivos através de um posicionamento adequado dos lugares característicos do sistema em malha aberta são apresentadas. Na seção 5.2, dois exemplos são utilizados para ilustrar os resultados apresentados na seção 5.1. Conclusões são apresentadas na seção 5.3.

5.1 Resultados preliminares

Uma das principais vantagens com relação ao uso do método do lugar característico para o projeto de sistemas de controle realimentados é a possibilidade de se obter, para o caso multivariável, uma análise simples com relação ao desempenho nominal e a estabilidade robusta do sistema através do posicionamento dos lugares característicos do sistema em malha aberta. Isto significa que é possível traduzir especificações de desempenho do sistema no domínio do tempo em especificações no domínio da frequência. Nesta seção, serão considerados os principais objetivos formulados para um sistema realimentado multivariável: *(i)* estabilidade robusta; *(ii)* rastreamento de sinais de referência; *(iii)* rejeição de sinais externos de perturbação; *(iv)* baixa interação entre entradas e saídas; *(v)* e desempenho robusto. Além disso, será visto como estes objetivos podem ser atingidos através de um adequado posicionamento dos lugares característicos do sistema em malha aberta. Para tanto, será suposto que o controlador será dado por:

$$K(s) = K_p K_c(s),$$

onde K_p é um pré-compensador normalizante obtido por uma das técnicas apresentadas no capítulo 3, e $K_c(s)$ comuta exatamente com a planta pré-compensada $G(s)K_p$ e estabiliza o sistema realimentado.

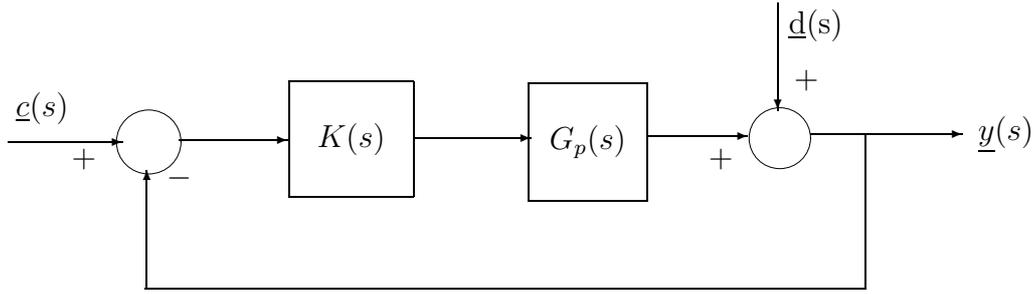


Figura 5.1: Sistema com realimentação unitária negativa.

5.1.1 Estabilidade Robusta

Considere o diagrama de blocos apresentado na figura 5.1 onde $\underline{y}(s)$, $\underline{d}(s)$ e $\underline{c}(s)$ são, respectivamente, as transformadas de Laplace dos sinais de saída, perturbação e de referência. Seja $G_p(s)$ a matriz de transferência da planta modelada com incerteza multiplicativa na entrada ou na saída de $G(s)$. De acordo com o teorema 3.9, supondo que o controlador $K(s)$ estabiliza a planta nominal $G(s)$ internamente em malha fechada, então uma condição suficiente para que o controlador $K(s)$ estabilize a planta com perturbação $G_p(s)$ é dada pela inequação (3.77), repetida a seguir por conveniência:

$$\max \left| \frac{\lambda\{G(j\omega)K(j\omega)\}}{1 + \lambda\{G(j\omega)K(j\omega)\}} \right| < \frac{1}{\mu_G(\omega)[1 + \nu(j\omega)]}, \quad (5.1)$$

para cada $\omega \in \mathbb{R}$, onde $\nu(j\omega) = \mathcal{C}[W(j\omega)] - 1$ com $W(j\omega)$ denotando a matriz de autovetores de $G(j\omega)K(j\omega)$ ($K(j\omega)G(j\omega)$), para a incerteza modelada na saída (entrada) da planta. A partir da condição expressa pela inequação (5.1), um projeto de pré-compensadores normalizantes estáticos K_p é proposto no capítulo 3, visando tornar a planta pré-compensada, $G(j\omega)K_p$, aproximadamente ν -normal na faixa de frequências próximas da frequência de corte. Dessa forma, suponha que $G(j\omega)K_p$ seja aproximadamente ν -normal. Então, a inequação (5.1) mostra que para alcançar um determinado grau de estabilidade robusta, deve-se posicionar todos os lugares característicos do sistema em malha aberta suficientemente afastados do ponto crítico $-1 + j0$. Portanto, supondo que $\mathcal{C}(W) \approx 1$, então uma região não conservadora de robustez no plano complexo pode ser obtida de forma gráfica para o posiciona-

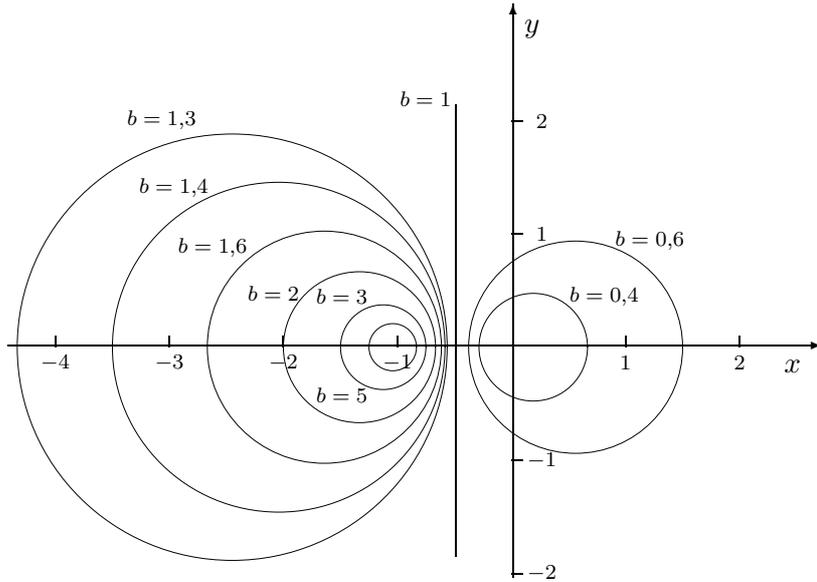


Figura 5.2: Família de círculos M.

mento dos lugares característicos do sistema em malha aberta. Para tanto, basta notar que, definindo-se $z = x + jy \in \mathbb{C}$ e considerando o contorno definido por

$$\left| \frac{z}{1+z} \right| = b, \quad (5.2)$$

onde $b \in \mathbb{R}$ é um valor fixo, é possível traçar uma família de círculos parametrizados por b . Estes círculos são usualmente chamados na literatura de círculos-M. Uma família de círculos-M é apresentada na figura 5.2, onde se pode verificar que à medida que se aproximam do ponto crítico $-1 + j0$, os círculos se tornam menores e o valor de b maior. Assim, como o que se deseja é maximizar $\mu_G(j\omega)$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$, pode-se definir um limitante superior para $\mu_G(j\omega)$, denotado por δ_G , para todo $\omega \in \mathbb{R}$, e traçar os lugares característicos desejados do sistema em malha aberta de forma a não interceptar o círculo obtido fazendo-se $b = \frac{1}{[\nu(j\omega)+1]\delta_G}$ na equação (5.2).

Como observado no capítulo 3, supondo que o controlador seja especificado com ganho elevado nas baixas frequências, normalmente sendo utilizado para tanto uma ação integral, então, para atingir o objetivo de estabilidade robusta, somente na faixa de frequências em torno da frequência de corte é necessário satisfazer a restrição de que os lugares característicos de $G(s)K(s)$ não interceptem o círculo obtido para $b = \frac{1}{[\nu(j\omega)+1]\delta_G}$.

5.1.2 Rastreamento de sinal de referência e rejeição de sinais externos de perturbação na saída da planta

Como o controlador $K_c(s)$ comuta exatamente com a planta pré-compensada $G(s)K_p$, então a matriz de transferência do sistema em malha fechada, $T_c(s)$, possui a mesma matriz de autovetores que $G(s)K_p$ e os seus lugares característicos são obtidos a partir dos lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s)$, ou seja,

$$\begin{aligned} T_c(j\omega) &= T_o(j\omega)[I + T_o(j\omega)]^{-1} \\ &= W(j\omega)\Lambda_o(j\omega)[I + \Lambda_o(j\omega)]^{-1}V(j\omega). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Portanto, os lugares característicos de $T_c(j\omega)$, denotados por $\lambda_{c_i}(j\omega)$, para $i = 1, \dots, m$, são definidos como:

$$\lambda_{c_i}(j\omega) = \frac{\lambda_{o_i}(j\omega)}{1 + \lambda_{o_i}(j\omega)}. \quad (5.4)$$

Note, de acordo com a equação (5.4), que se os módulos de todos os lugares característicos $\lambda_{o_i}(j\omega)$ possuírem valores elevados em uma determinada frequência, então a matriz de transferência do sistema em malha fechada será aproximadamente igual à matriz identidade, e entradas senoidais com esta mesma frequência serão devidamente rastreadas. Se o objetivo de projeto é o rastreamento de sinais do tipo degrau, então deve-se ter os lugares característicos do sistema em malha aberta com módulos elevados em $\omega = 0$. Isto é obtido incorporando-se um integrador em $T_o(s)$, isto é, fazendo-se $T_o(s) = \frac{\hat{T}_o(s)}{s}$, onde $\hat{T}_o(s)$ não deve possuir zeros em $s = 0$.

A rejeição de sinais externos de perturbação na saída da planta também requer que os módulos dos lugares característicos em malha aberta sejam elevados. Isto pode ser verificado observando-se, a partir da figura 5.1, que a matriz de transferência que relaciona a saída $\underline{y}(s)$ e o sinal de perturbação $\underline{d}(s)$, é a matriz de sensibilidade $S(s)$, dada por:

$$S(s) = [I + T_o(s)]^{-1} = W(s)[I + \Lambda_o(s)]^{-1}V(s). \quad (5.5)$$

Portanto, os lugares característicos de $S(s)$, $\lambda_{s_i}(j\omega)$, satisfazem à seguinte equação:

$$\lambda_{s_i}(j\omega) = \frac{1}{1 + \lambda_{o_i}(j\omega)}. \quad (5.6)$$

Logo, de acordo com a equação (5.6), é imediato ver que se $|\lambda_{o_i}(j\omega)| \rightarrow \infty$ para $i = 1, \dots, m$, então a matriz $S(j\omega)$ se aproxima de uma matriz com todos os elementos nulos, o que significa que posicionar os lugares característicos de $T_o(s)$ com módulos elevados implica tanto em um adequado rastreamento do sinal de referência, quanto na rejeição da perturbação de saída.

É importante ressaltar ainda que, usualmente, os valores singulares da matriz de sensibilidade $S(s)$ são utilizados para medir o desempenho nominal do sistema realimentado, sendo desejado que para frequências baixas o maior valor singular de $S(s)$ seja suficientemente pequeno. O objetivo de desempenho nominal é alcançado projetando-se os lugares característicos de $T_o(s)$ para terem todos módulos elevados nas baixas frequências, como pode ser observado a partir da equação (5.6).

5.1.3 Interação

Em geral, um sinal aplicado na i -ésima entrada do sistema, c_i , faz com que todas as saídas y_j , para $j = 1, \dots, m$, do sistema respondam àquela entrada. Este comportamento é chamado de interação. Em algumas aplicações é desejado suprimir a interação de forma que somente a i -ésima saída responda a i -ésima entrada do sistema, permanecendo as demais dentro de um limite aceitável.

A partir da equação (5.4) tem-se que quando o módulo de todos os lugares característicos do sistema em malha aberta é suficientemente grande, então a matriz de transferência do sistema em malha fechada se aproxima da identidade. Dessa forma, uma maneira de se reduzir a interação entre entradas e saídas do sistema em malha fechada é fazer com que o sistema em malha aberta tenha os lugares característicos com módulos elevados. Contudo, nas altas frequências isto não é possível, uma vez que a necessidade de satisfazer o critério de Nyquist generalizado usualmente força os lugares característicos de $T_o(s)$ a serem pequenos em módulo.

Para contornar o problema de alta interação nas altas frequências, em MacFarlane e Kouvaritakis (1977) é sugerido o uso do algoritmo ALIGN (capítulo 2) para projetar um pré-compensador estático K_h , que se aproxima de $G^{-1}(j\omega_h)$ para uma determinada alta frequência ω_h . A motivação para o projeto de K_h é baseada

no fato de que, como em altas frequências os lugares característicos de $G(s)K(s)$ possuem módulos arbitrariamente pequenos, então, a matriz de transferência do sistema em malha fechada $T_c(s)$ será aproximadamente igual a $G(s)K(s)$. Logo, se as direções características de $G(s)K(s)$ estiverem alinhadas com as colunas de uma matriz identidade de ordem m , então uma entrada em uma direção igual a $\underline{c}(j\omega_h)^t = [0 \ \dots \ 0 \ c_i \ 0 \ \dots \ 0]^t$, produzirá uma saída na mesma direção, ou seja, $\underline{y}(j\omega_h)^t = [0 \ \dots \ 0 \ y_i \ 0 \ \dots \ 0]^t$. Assim, em MacFarlane e Kouvaritakis (1977), é definida a seguinte medida do alinhamento das direções características de $G(s)K(s)$ com a base canônica:

$$\cos \theta_i = \frac{|\langle \underline{w}_k(j\omega), \underline{e}_i \rangle|}{\langle \underline{w}_k(j\omega), \underline{w}_k(j\omega) \rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.7)$$

onde $\langle \dots \rangle$ denota produto interno, \underline{e}_i é a i -ésima coluna da matriz identidade e k é escolhido tal que \underline{w}_k seja o autovetor que faz com que o ângulo θ_i seja o menor possível. Dessa forma, em MacFarlane e Kouvaritakis (1977), a interação é determinada nas baixas frequências por θ_i ou pelo módulo dos lugares característicos, e nas altas frequências pelo desalinhamento angular entre as direções características de $G(s)K(s)$ e a base canônica.

Uma outra forma de contornar o problema de reduzir a interação nas altas frequências é sugerida em Hung e MacFarlane (1982), onde é proposto ‘balancear’ os lugares característicos de $T_o(s)$ de forma a torná-los aproximadamente iguais nas altas frequências. Desta forma, como de acordo com a equação (5.4), $\lambda_{c_i}(j\omega) = \frac{\lambda_{o_i}(j\omega)}{1+\lambda_{o_i}(j\omega)}$, então ao fazer todos os lugares característicos de $T_o(s)$ aproximadamente iguais, obtêm-se todos os lugares característicos de $T_c(s)$ aproximadamente iguais e, portanto, $T_c(j\omega)$ se aproxima de uma matriz escalar, reduzindo assim a interação entre entradas e saídas de $T_c(s)$.

5.1.4 Desempenho robusto

Uma vez alcançados os objetivos de estabilidade robusta do sistema em malha fechada e desempenho nominal, o próximo objetivo a ser alcançado é o desempenho robusto, ou seja, garantir que o sistema em malha fechada tenha um comportamento próximo do desejado, mesmo considerando-se incertezas no modelo nominal

da planta. Como medida para o desempenho robusto é usualmente utilizado o maior valor singular da matriz de sensibilidade do sistema considerando-se a planta modelada com incerteza (Doyle et al., 1992). Neste capítulo o desempenho robusto do sistema realimentado será analisado para plantas com incertezas multiplicativas na entrada e na saída da planta.

Em Skogestad et al. (1988) e Skogestad e Havre (1996) é mostrado que no caso de sistemas multivariáveis, para plantas com número de condicionamento elevado, é possível que os objetivos de estabilidade robusta e desempenho nominal sejam satisfeitos e, no entanto, para uma pequena perturbação na entrada da planta, o sistema realimentado tenha um desempenho muito deteriorado. Para verificar este resultado, seja $S_i(s)$ a função de sensibilidade para o sistema realimentado apresentado na figura 5.2, supondo-se perturbação multiplicativa $\Delta_i(s)$ na entrada da planta. É imediato verificar que $S_i(s)$ será dada por:

$$S_i = [I + G(I + \Delta_i)K]^{-1}. \quad (5.8)$$

Após algumas manipulações algébricas em (5.8) obtém-se:

$$\begin{aligned} S_i &= [I + G(I + \Delta_i)K]^{-1} \\ &= [I + GK + G\Delta_i K]^{-1} \\ &= \{[I + G\Delta_i K(I + GK)^{-1}][I + GK]\}^{-1} \\ &= S[I + G\Delta_i K(I + GK)^{-1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Supondo que a matriz de transferência da planta seja invertível, então a equação (5.9) pode ser escrita como:

$$S_i = SG[I + \Delta_i K(I + GK)^{-1}G]^{-1}G^{-1}. \quad (5.10)$$

Definindo $T_i = KG(I + KG)^{-1}$ e observando que $K(I + GK)^{-1}G = KG(I + KG)^{-1}$, então a equação (5.10), pode ser reescrita como:

$$S_i = SG(I + \Delta_i T_i)^{-1}G^{-1}. \quad (5.11)$$

Aplicando, agora, propriedades dos valores singulares na equação acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}[S_i] &= \bar{\sigma}[SG(I + \Delta_i T_i)^{-1}G^{-1}] \\
&\leq \bar{\sigma}[S]\mathcal{C}[G]\underline{\sigma}[I + \Delta_i T_i]^{-1} \\
&\leq \mathcal{C}[G]\frac{\bar{\sigma}[S]}{1 - \bar{\sigma}[\Delta_i]\bar{\sigma}[T_i]}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Apesar da inequação (5.12) ser conservadora, ela mostra que, se o número de condicionamento da planta for elevado, então mesmo supondo que $\bar{\sigma}[T_i] = 1$ e que $\bar{\sigma}[\Delta_i]$ seja pequeno, o maior valor singular de S_i pode ser muito maior do que o maior valor singular de S , para freqüências em que $\bar{\sigma}[S]$ seja diferente de zero. Assim, mesmo que o sistema em malha fechada tenha um bom desempenho nominal, uma pequena perturbação na entrada da planta pode deteriorar significativamente a resposta transitória do sistema multivariável, levando a uma deterioração do desempenho do sistema realimentado.

É importante observar, ainda, que o desempenho robusto não é significativamente deteriorado quando a incerteza é modelada na saída da planta. Para verificar este fato, denote por $S_o(s)$ a matriz de sensibilidade considerando incerteza multiplicativa $\Delta_o(s)$ na saída da planta. É fácil mostrar que:

$$S_o = [I + (I + \Delta_o)GK]^{-1}. \tag{5.13}$$

Utilizando propriedades dos valores singulares e após algumas manipulações algébricas simples, obtém-se:

$$\bar{\sigma}[S_o] \leq \frac{\bar{\sigma}[S]}{1 - \bar{\sigma}[\Delta_o]\bar{\sigma}[T_c]}. \tag{5.14}$$

Portanto, a inequação (5.14) mostra que quando $\bar{\sigma}[\Delta_o]$ é pequeno o maior valor singular de $S_o(s)$ não é significativamente deteriorado, para freqüências onde $\bar{\sigma}[T_c] \approx 1$.

Embora neste trabalho não se tenha obtido um método sistemático para que os objetivos de projeto definidos nesta seção possam ser alcançados utilizando-se a parametrização proposta no capítulo 4, os exemplos 4.2 e 4.3 são novamente considerados na próxima seção para ilustrar os resultados aqui obtidos.

5.2 Exemplos

Nesta seção os exemplos 4.2 e 4.3 serão analisados levando-se em consideração cada um dos objetivos de projeto apresentados na seção 5.1.

Exemplo 5.1 Considere novamente a matriz de transferência da planta pré-compensada $G(s)K_p$ dada pela equação (4.81), e o controlador comutativo estabilizante $K_c(s)$ dado pelas equações (4.84) a (4.86). Suponha que o objetivo de estabilidade robusta seja incorporado ao projeto do controlador comutativo $K_c(s)$ e que um determinado grau de robustez, medido pela norma infinito da matriz de transferência do sistema em malha fechada $T_c(s)$, seja desejado para o sistema, *i.e.*, suponha que um dos objetivos de projeto seja projetar um controlador comutativo robusto tal que $\|T_c\|_\infty < \frac{1}{\delta_G}$, para um determinado valor δ_G . Além disso, considere que uma outra especificação de projeto seja a de se ter uma frequência de corte aproximadamente igual a 1 rad/s.

Para alcançar o objetivo de estabilidade robusta, é mostrado na subseção 5.1.1 que, uma vez que o sistema pré-compensado é aproximadamente ν -normal na faixa de frequências em torno da frequência de corte desejada, então é suficiente posicionar os lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s)$ de modo a não interceptar o círculo parametrizado por b onde $b = \frac{1}{[\nu(j\omega)+1]\delta_G}$. Como verificado no exemplo 3.1, a planta pré-compensada $G(s)K_p$ possui número de condicionamento da matriz de autovetores aproximadamente igual a 1 para todas as frequências, ou seja, $\nu(j\omega)$ é aproximadamente igual a zero para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Portanto, para alcançar o grau de robustez desejado $\frac{1}{\delta_G}$ basta posicionar os lugares característicos do sistema em malha aberta de forma a não interceptar o círculo parametrizado por b , para $b = \frac{1}{\delta_G}$. Na figura 5.3 os lugares característicos de $G(s)K_pK_c(s)$ e o círculo com maior valor de b ($b = 2,2807$) que tangencia os lugares característicos são apresentados. Suponha, agora, que o custo H_∞ desejado seja 1,4 ($\delta_G = 0,7143$). Neste exemplo, é possível verificar que ao multiplicar-se os lugares característicos de $G(s)K_pK_c(s)$ por qualquer valor superior a 1, o sistema em malha fechada permanece internamente estável e o custo H_∞ pode ser reduzido. Desta forma, multiplicando-se os lugares característicos

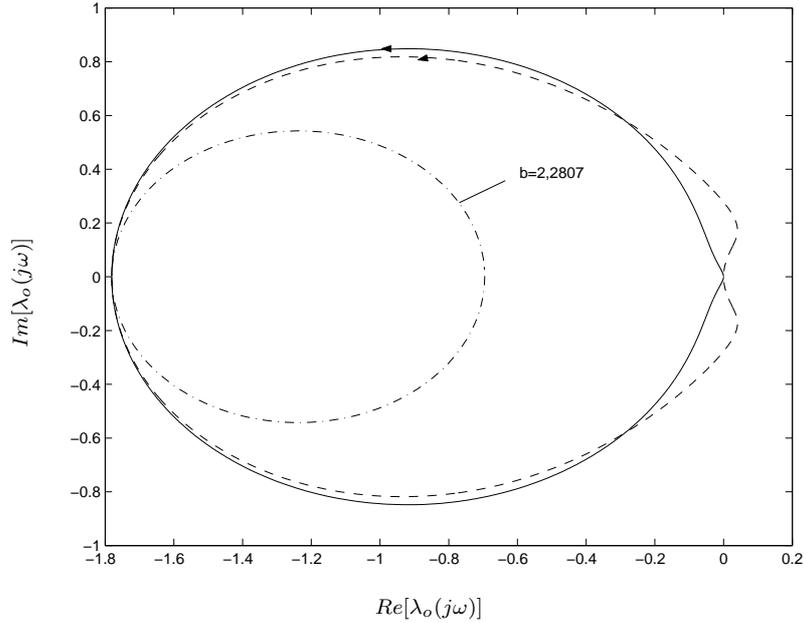


Figura 5.3: Lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s) = G(s)K_pK_c(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua). Círculo parametrizado por b , onde $b = 2,2807$ (linha traço-pontilhada).

de $T_o(s)$ por 2, obtém-se a figura 5.4, onde pode ser visto que o círculo para $b = 1,4$ ($\delta_G = 0,7143$) não é interceptado e, portanto, para este exemplo, o objetivo de estabilidade robusta pôde ser alcançado por um controlador racional comutativo estabilizante.

Suponha, agora, que, além do objetivo de estabilidade robusta, seja especificado que o sistema em malha fechada deve rastrear assintoticamente sinais iguais ao degrau aplicado na sua entrada $\underline{c}(s)$. Neste caso, de acordo com a subseção 5.1.2, é necessário adicionar ao controlador $K_c(s)$, projetado no exemplo 4.2, uma ação integral. Como é desejado que o controlador seja ainda comutativo, esta ação integral será introduzida pelo seguinte controlador escalar:

$$K_I(s) = \frac{\alpha s + 1}{\alpha s} I, \quad (5.15)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é um número positivo e escolhido de forma a tornar $K_I(s)$ aproximadamente igual à identidade para frequências elevadas. Incorporar a ação integral faz com que o sistema seja capaz de rastrear o degrau unitário, rejeite perturbações na saída do sistema e tenha pequena interação entre entradas e saídas como mostrado

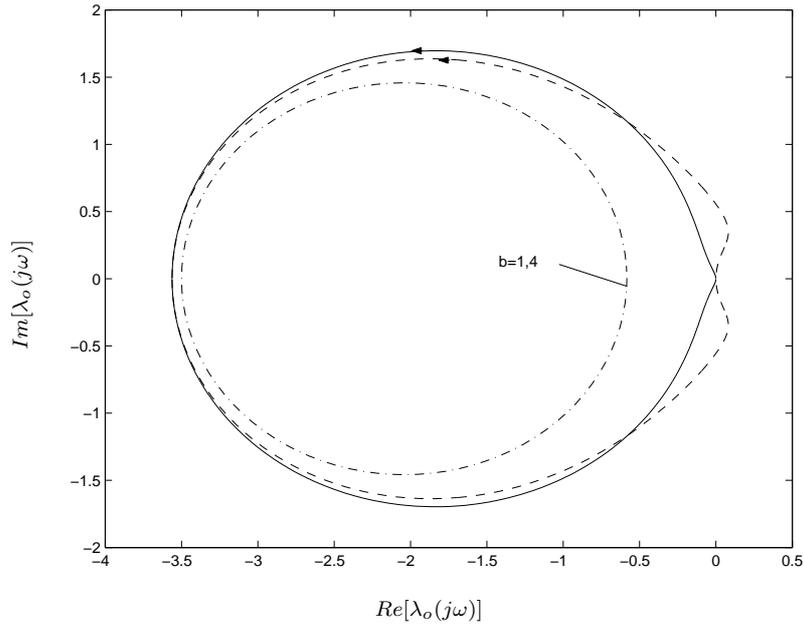


Figura 5.4: Lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s) = 2G(s)K_pK_c(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua). Círculo parametrizado por b , onde $b = 1,4$ (linha traço-pontilhada).

na subseção 5.1.3. Considerando que a frequência de corte desejada para esse sistema seja aproximadamente igual a 1 rad/s, então é desejável que a ação integral não afete os lugares característicos para frequências próximas de 1 rad/s. Portanto, α será escolhido igual a 5. Para esta escolha de $K_I(s)$ obtém-se os lugares característicos de $T_o(s) = G(s)2K_pK_c(s)K_I(s)$ mostrados na figura 5.5 (linha contínua e tracejada), onde pode ser também vista uma representação da imagem dos lugares de $T_o(s)$ à medida que s percorre o caminho formado por $\{s = \epsilon e^{j\phi} : \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{2}, 0 < \epsilon \ll 1\}$ (linha traço-pontilhada). Note que, com a ação integral, o sistema em malha aberta passa a ter quatro pólos instáveis e, portanto, o sistema realimentado será internamente estável se e somente se os lugares característicos de $T_o(s)$ envolverem o ponto $-1 + j0$ quatro vezes em sentido anti-horário. Isto é observado na figura 5.5, o que mostra que o sistema em malha fechada é ainda internamente estável. Além disso, pode-se verificar que o maior círculo parametrizado por b , tangenciado pelos lugares característicos, é obtido para $b = 1,4643$, o que não significa uma deterioração significativa do custo H_∞ desejado.

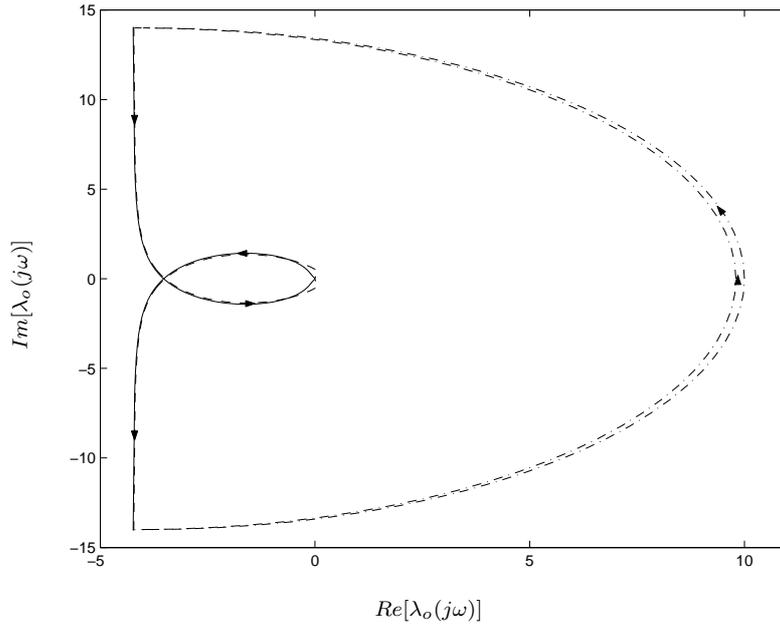


Figura 5.5: Lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s) = G(s)K(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).

Assim sendo, o controlador obtido ao final é de sexta ordem, sendo dado por:

$$K(s) = \frac{2(s + 0,2)}{s} K_p K_c(s), \quad (5.16)$$

onde K_p e $K_c(s)$ são dados pelas equações (4.80) e (4.84) a (4.86), respectivamente.

É importante ressaltar ainda que, como pode ser observado a partir da figura 5.6, o sistema em malha aberta possui um grau de desalinhamento elevado dos seus autovetores com a base canônica, medido pelo ângulo θ_i obtido de acordo com a equação (5.7), o que pode levar a uma alta interação de $T_c(s)$. Note, porém, a partir da figura 5.7, que os lugares característicos de $G(s)K(s)$ são aproximadamente iguais na faixa de frequências em torno da frequência de corte. Portanto, de acordo com o exposto na subseção 5.1.3 (Hung e MacFarlane, 1982), é esperado que o sistema em malha fechada tenha uma pequena interação entre entradas e saídas.

A figura 5.8 mostra os valores singulares de $T_c(s)$ (linha contínua), onde pode ser verificado que, de fato, os lugares característicos do sistema em malha aberta podem ser utilizados como indicadores confiáveis da estabilidade robusta do sistema em malha fechada. Na figura 5.9 são apresentadas as respostas ao degrau unitário,

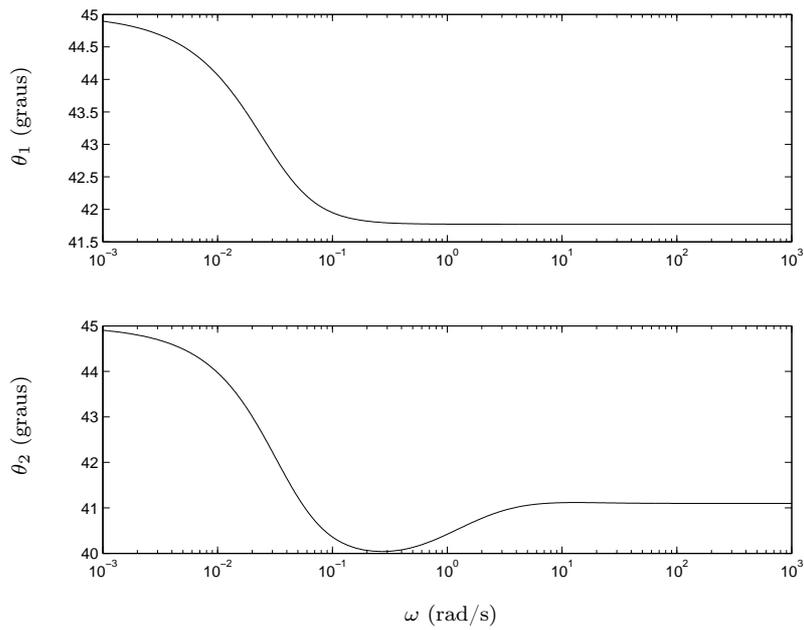


Figura 5.6: Ângulos de desalinhamento entre os autovetores de $G(s)K_p$ e a base canônica.

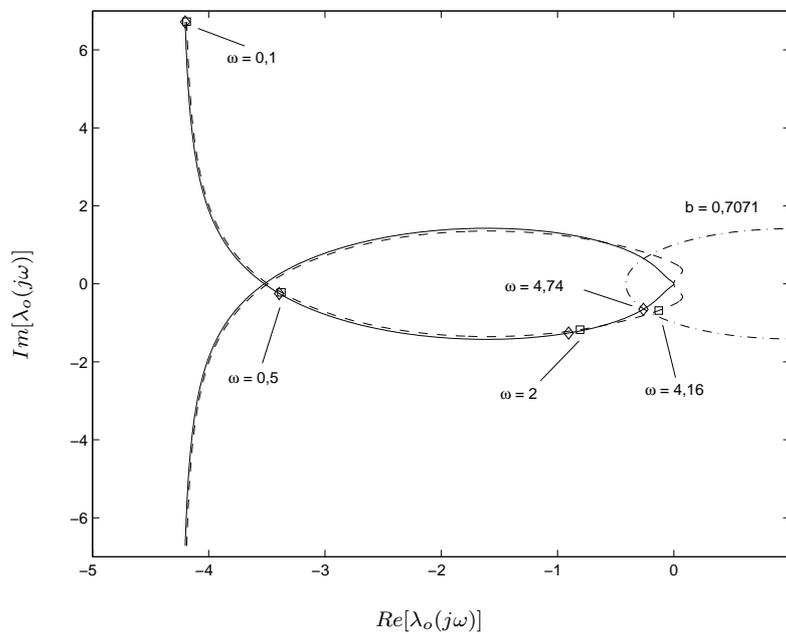


Figura 5.7: Lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s) = G(s)K(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua). Círculo obtido para $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (linha traço-pontilhada).

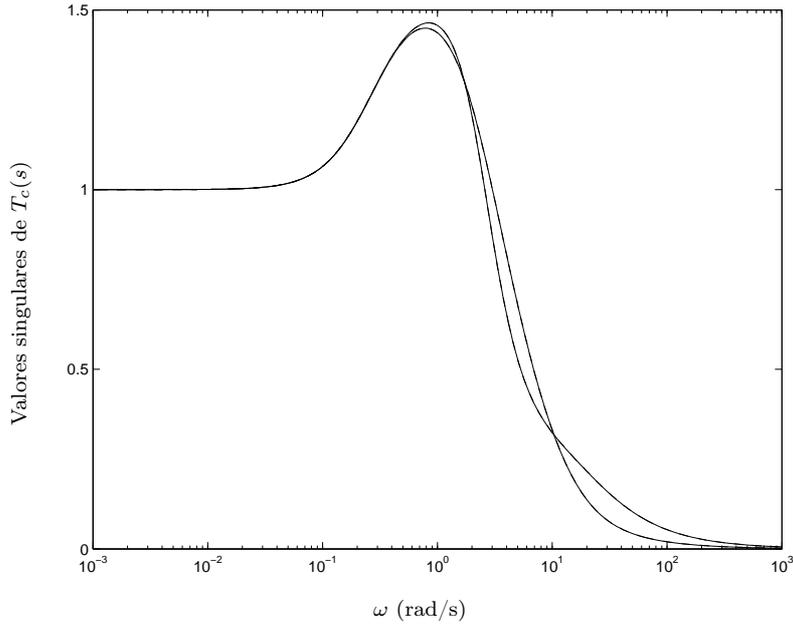


Figura 5.8: Valores singulares de $T_c(s)$ (linha contínua).

$u_0(t)$, aplicado nas entradas do sistema em malha fechada $c_1(t)$ e $c_2(t)$, onde pode ser observado a baixa interação entre entradas e saídas para o controlador final dado pela equação (5.16), além de um adequado rastreamento do sinal de referência.

A última característica a ser investigada é o desempenho robusto do sistema em malha fechada. Como pode ser observado na figura 5.10 o número de condicionamento da matriz de transferência da planta $G(s)$ é muito elevado próximo da frequência de corte obtida ($\mathcal{C}[G] \approx 4000$ para $\omega_b \approx 4$ rad/s). Portanto, é esperado que uma pequena perturbação na entrada da planta leve a uma deterioração significativa do desempenho robusto do sistema realimentado. Para ilustrar este fato considere a seguinte perturbação diagonal na entrada da planta:

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & -0,01 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Para esta pequena perturbação na entrada da planta obtém-se a figura 5.11 onde são apresentadas as respostas do sistema em malha fechada para um sinal igual ao degrau unitário aplicado em cada uma das suas entradas. Note, agora, que o regime transitório das respostas foi muito deteriorado. Este exemplo mostra que, quando a planta possui número de condicionamento elevado, o controlador projetado, mesmo

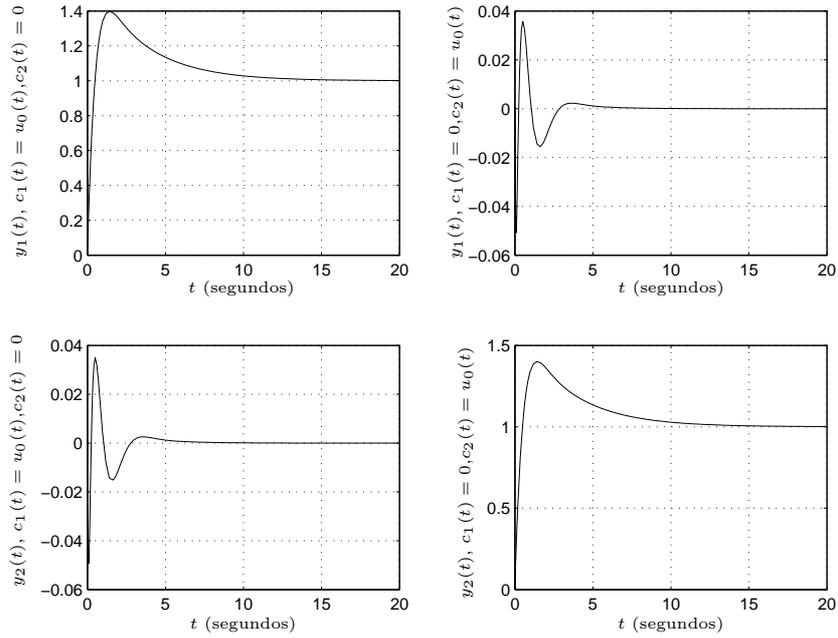


Figura 5.9: Respostas do sistema realimentado, $y_i(t)$, para uma sinal igual ao degrau unitário, $u_0(t)$, aplicado em cada uma das entradas do sistema $c_i(t)$ para $i = 1, 2$.

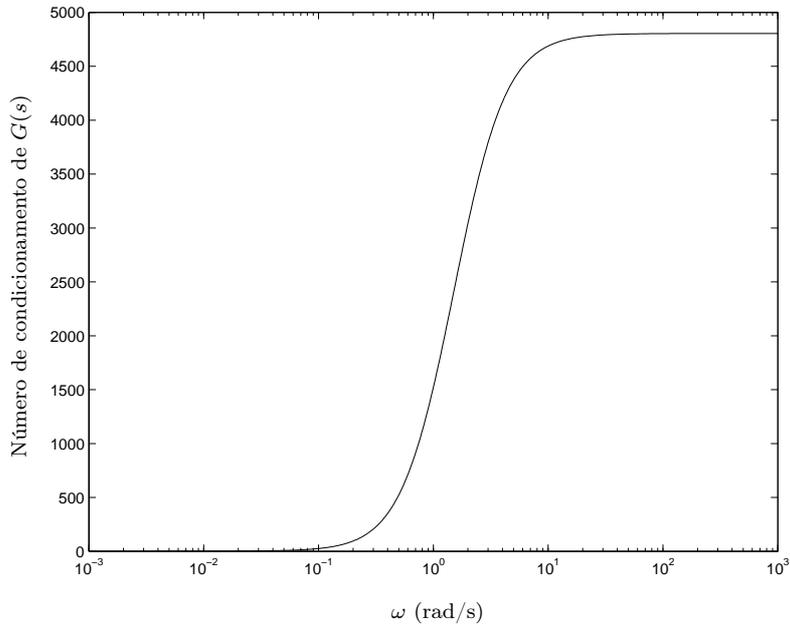


Figura 5.10: Número de condicionamento da planta $G(s)$, $\mathcal{C}[G]$.

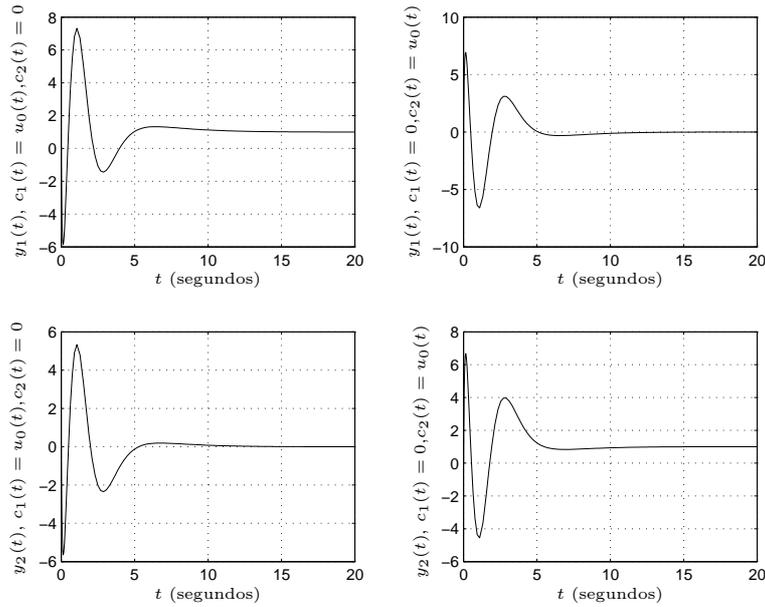


Figura 5.11: Respostas do sistema realimentado, $y_i(t)$, para uma sinal igual ao degrau unitário, $u_0(t)$, aplicado em cada uma das entradas do sistema $c_i(t)$ para $i = 1, 2$, considerando o sistema com perturbação na entrada da planta.

atendendo satisfatoriamente aos objetivos de estabilidade robusta e desempenho nominal, pode não ter um bom desempenho robusto. De fato, é sabido que plantas mal-condicionadas são naturalmente difíceis de serem controladas (Skogestad et al., 1988; Maciejowski, 1989) e, portanto, o método de projeto proposto nesta tese não leva necessariamente a resultados piores do que os que seriam obtidos por outros métodos como, por exemplo, os Métodos das Cadeias de Nyquist.

Exemplo 5.2 Considere agora a matriz de transferência da planta pré-compensada apresentada no exemplo 4.3, dado pela equação (4.87). Como foi observado no exemplo 4.3, multiplicando-se $G(s)K_p$ por -1 , obtém-se um sistema em malha aberta em que os lugares característicos estão todos no semi-plano da direita do plano complexo \mathbb{C} . Desta forma, a estabilidade robusta é alcançada para valores relativamente elevados de δ_G ($\delta_G = 1,9146$).

Suponha que, também neste exemplo, seja desejada uma frequência de corte aproximadamente igual a 1 rad/s e que o sistema deva rastrear sinais iguais ao degrau aplicados na entrada de referência do sistema realimentado. Para tanto, é necessário introduzir uma ação integral. Como é necessário manter a comutatividade

entre a planta pré-compensada e o controlador, então um controlador $K_I(s)$ dado pela equação (5.15) é utilizado. Para satisfazer aproximadamente a frequência de corte desejada o seguinte controlador PI é projetado:

$$K_I(s) = 2,5 \frac{(s+1)}{s} I. \quad (5.18)$$

Para este controlador o sistema em malha fechada é ainda internamente estável e na figura 5.12 são mostrados os lugares característicos para $T_o(s) = -G(s)K_p K_I(s)$. Na figura 5.13 são mostrados os módulos dos lugares característicos de $T_c(s)$ (linha tracejada) e os valores singulares de $T_c(s)$ (linha contínua), onde é possível ver que de fato, também neste exemplo, o módulo dos lugares característicos são indicadores confiáveis da robustez do sistema. Note ainda que com o controlador $K_I(s)$, dado pela equação (5.18), o custo H_∞ torna-se igual a 1,0541.

Assim, o controlador projetado obtido neste caso é de segunda ordem, sendo dado por:

$$K(s) = -K_p K_I(s), \quad (5.19)$$

onde K_p e $K_I(s)$ são dados pelas equações (3.121) e (5.18), respectivamente.

Na figura 5.14 são mostrados os ângulos de desalinhamento da matriz de autovetores de $G(s)K_p$ com a base canônica, onde se pode observar que, próximo da frequência de corte, $\omega_b \approx 3,3$ rad/s, esses ângulos são pequenos e, portanto, é esperado que o sistema em malha fechada tenha pequena interação entre entradas e saídas. Isto pode ser confirmado através da figura 5.15, onde são mostradas as respostas $y_1(t)$ e $y_2(t)$ do sistema realimentado para um sinal igual ao degrau unitário $u_0(t)$ aplicado nas entradas $c_1(t)$ e $c_2(t)$.

Neste exemplo, não ocorre o problema de deterioração do desempenho quando incertezas são introduzidas na entrada da planta nominal. Isto ocorre porque o número de condicionamento da planta, apresentado na figura 5.16, não é elevado na faixa de frequências em torno da frequência de corte, sendo aproximadamente igual a 2.

É importante ressaltar que embora os dois exemplos considerados nesta seção tenham sido utilizados apenas para ilustrar os resultados apresentados na seção

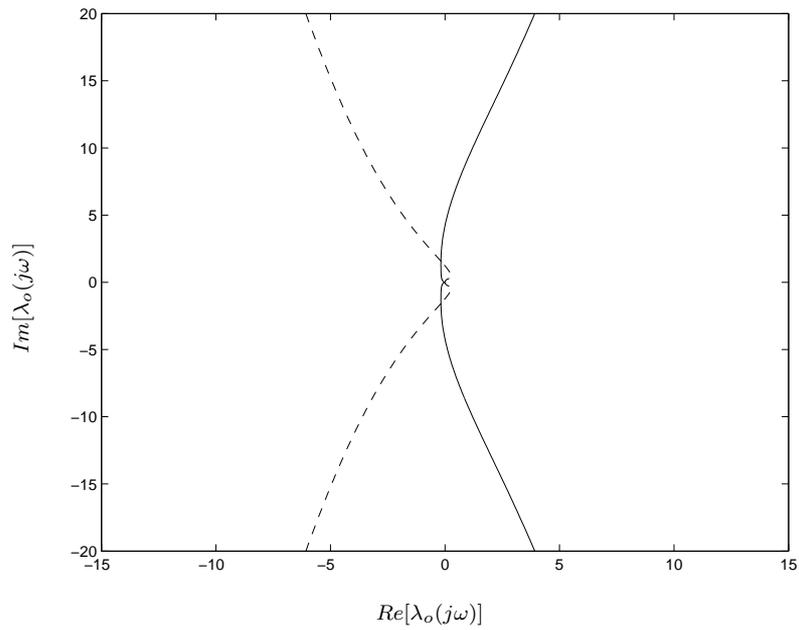


Figura 5.12: Lugares característicos do sistema em malha aberta $T_o(s) = G(s)K(s)$. Lugar característico número 1 (linha tracejada) e lugar característico número 2 (linha contínua).

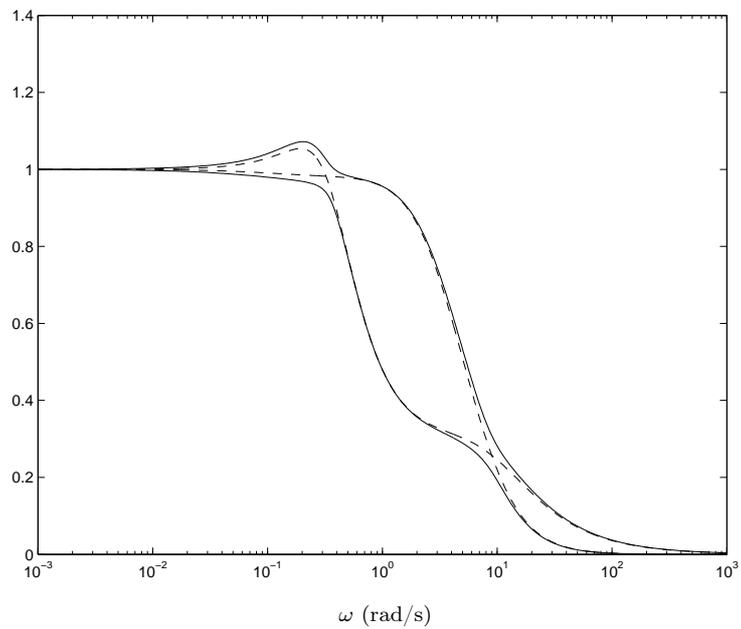


Figura 5.13: Módulos dos lugares característicos de $T_c(s)$ (linha tracejada) e valores singulares de $T_c(s)$ (linha contínua).

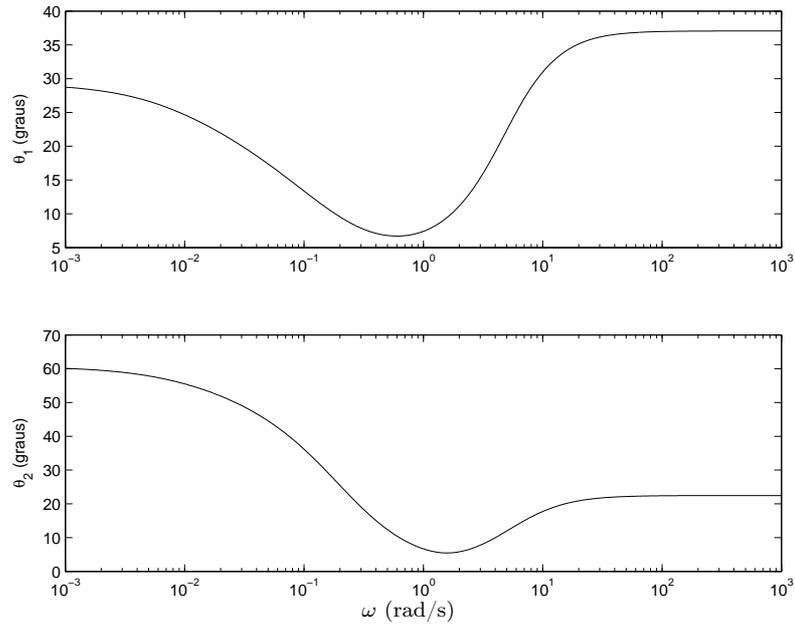


Figura 5.14: Ângulos de desalinhamento entre os autovetores de $G(s)K_p$ e a base canônica.

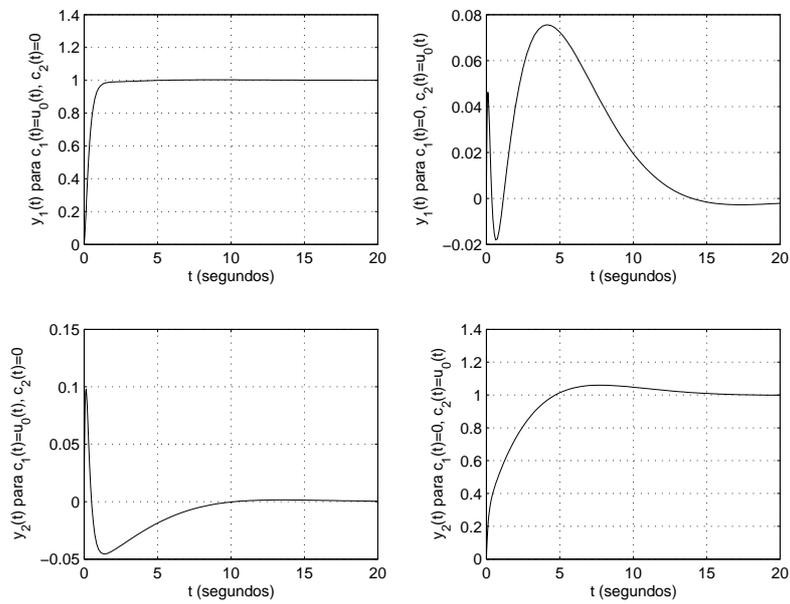


Figura 5.15: Respostas do sistema realimentado, $y_i(t)$, para uma sinal igual ao degrau unitário, $u_0(t)$, aplicado em cada uma das entradas do sistema $c_i(t)$ para $i = 1, 2$.

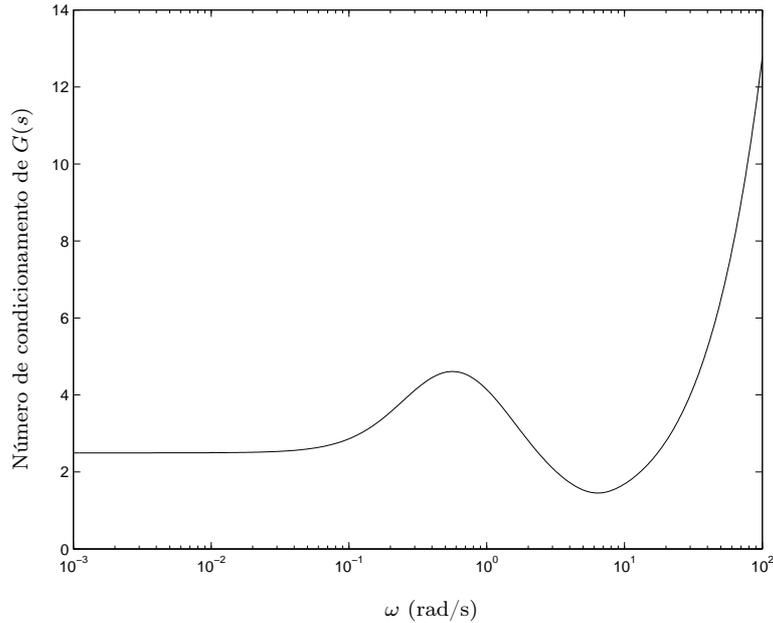


Figura 5.16: Número de condicionamento da planta $G(s)$, $\mathcal{C}[G]$.

5.1, eles sugerem que, na parametrização obtida no capítulo 4, existem graus de liberdade suficientes para que sejam projetados controladores comutativos de forma a satisfazer os objetivos de projeto comumente exigidos para um sistema de controle realimentado.

5.3 Comentários finais

Neste capítulo, foram apresentadas maneiras de se definir o posicionamento dos lugares característicos de um sistema em malha aberta de forma a atender objetivos de projeto usualmente formulados para sistemas de controle multivariáveis realimentados. Além disso, dois exemplos foram utilizados para ilustrar como esses objetivos podem ser satisfeitos. Embora os controladores projetados não tenham sido obtidos diretamente a partir da parametrização de todos os controladores comutativos estabilizantes, eles sugerem que na parametrização obtida no capítulo 4, existem graus de liberdade suficientes para que todos os objetivos de projeto considerados neste capítulo possam ser satisfeitos. Obter uma metodologia que utilize de forma sistemática os graus de liberdade da parametrização de todos os controladores racionais comutativos estabilizantes é um dos trabalhos futuros sugeridos no próximo

capítulo.

Capítulo 6

Conclusões e trabalhos futuros

O Método do Lugar Característico permite uma abordagem para o projeto de sistemas de controle multivariáveis quadrados, em que os objetivos de projeto podem ser considerados de forma similar aos de sistemas monovariáveis, substituindo-se a resposta em frequência da função de transferência em malha aberta (sistemas monovariáveis), pelos lugares característicos da matriz de transferência em malha aberta, desde que os lugares característicos do sistema em malha aberta sejam pouco sensíveis a variações nos parâmetros da matriz de transferência da planta. Neste trabalho, alguns avanços foram obtidos no sentido de tornar o Método do Lugar Característico uma ferramenta de projeto de controladores multivariáveis capaz de considerar incertezas na matriz de transferência da planta e, portanto, tornar o MLC capaz de projetar controladores comutativos robustos.

O primeiro resultado importante obtido foi a normalização, por pré-compensação, em que a matriz de transferência do sistema em malha aberta passa a ser pouco sensível a incertezas multiplicativas modeladas tanto na entrada quanto na saída da planta. É importante ressaltar que os pré-compensadores normalizantes apresentados no capítulo 3 são obtidos a partir de problemas de otimização cujas soluções são simples, tanto para a técnica que busca o alinhamento das direções principais de entrada e de saída da planta, quanto para o pré-compensador estático cuja solução é obtida a partir do cálculo do menor autovalor e do correspondente autovetor associado de uma matriz simétrica com coeficientes reais.

Uma vez feita a normalização da matriz de transferência da planta pré-com-

pensada, uma parametrização para todos os controladores comutativos racionais estabilizantes é obtida no capítulo 4. Uma caracterização de todos os graus de liberdade existentes nesta parametrização também é obtida, a partir do conhecimento da nulidade de uma determinada matriz polinomial, sendo dada em função das multiplicidades das funções de autovalores da planta pré-compensada. No capítulo 4 é também obtida uma condição necessária e suficiente para a existência de controladores comutativos racionais estabilizantes, baseada somente na matriz de transferência da planta pré-compensada, qual seja, existem controladores comutativos racionais estabilizantes se e somente se a matriz de transferência da planta pré-compensada não possui modos fixos instáveis. Esta condição mostra que somente para um conjunto muito restrito de matrizes de transferência não é possível obter controladores comutativos racionais estabilizantes.

A partir da parametrização obtida, e supondo-se que a pré-compensação seja capaz de tornar o sistema pré-compensado aproximadamente normal na faixa de frequências de interesse, então os objetivos usualmente considerados no projeto de sistemas de controle multivariáveis podem ser abordados a partir de um posicionamento adequado dos lugares característicos do sistema em malha aberta. No capítulo 5, é mostrado como os objetivos de estabilidade robusta, rastreamento do sinal de referência, rejeição de sinais externos de perturbação e baixa interação podem ser alcançados dessa forma. Exemplos são utilizados para ilustrar que os lugares característicos são, de fato, uma ferramenta capaz de lidar com os objetivos conflitantes de estabilidade robusta e desempenho nominal. Além disso, é mostrado que podem ocorrer dificuldades com relação ao método de projeto de controladores multivariáveis sugerido neste trabalho quando a matriz de transferência da planta é mal-condicionada. Neste caso, mesmo que o sistema em malha fechada seja robusto com relação a incertezas na entrada da planta, uma deterioração significativa do desempenho do sistema pode ocorrer quando existir alguma incerteza na entrada da planta. Contudo, é importante observar que plantas mal-condicionadas são difíceis de serem controladas e outros métodos de projeto, baseados nos lugares característicos do sistema em malha aberta, sofrem igualmente do mesmo problema.

Os objetivos alcançados neste trabalho são resumidos a seguir:

- Foram obtidas duas novas formas de pré-compensação normalizante mais simples que outra existente na literatura.
- Foi obtido uma parametrização de todos os controladores racionais que comutam perfeitamente com a planta e estabilizam internamente o sistema em malha fechada.
- Foi mostrado que o número de graus de liberdade disponíveis nesta parametrização pode ser conhecido a partir da matriz de transferência da planta.
- Um algoritmo numericamente robusto para o cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial foi obtido. Este algoritmo é importante uma vez que a parametrização para todos os controladores comutativos racionais estabilizantes é baseada na obtenção de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de uma determinada matriz polinomial.
- Uma condição necessária e suficiente para a existência dos controladores comutativos racionais estabilizantes foi obtida, que mostra que esses controladores existem se e somente se a matriz de transferência da planta não possui modos fixos instáveis.
- Por fim, foi mostrado como posicionar os lugares característicos do sistema em malha aberta de forma a satisfazer objetivos usualmente formulados para sistemas de controle realimentados, como, por exemplo, o objetivo de estabilidade robusta.

Neste trabalho também foi obtida uma maneira numericamente robusta de se calcular a identidade polinomial de Bezout generalizada, sendo esse resultado uma aplicação do método de cálculo de bases polinomiais mínimas desenvolvido neste trabalho. Deve-se ressaltar que o problema de resolver a identidade de Bezout polinomial generalizada tem um papel fundamental quando da aplicação da teoria aqui desenvolvida a sistemas discretos.

Apesar dos exemplos apresentados no capítulo 5 não terem sido obtidos a partir de um método sistemático de projeto de controladores comutativos racionais estabilizantes, eles sugerem que na parametrização obtida no capítulo 4 existem graus de liberdade suficientes para que isso seja possível. Dessa forma, como um trabalho futuro, sugere-se que um método sistemático de projeto, baseado na parametrização de todos os controladores comutativos racionais estabilizantes seja desenvolvido. Uma idéia inicial para alcançar este objetivo seria encontrar aproximações racionais para as funções de autovalores da matriz de transferência da planta pré-compensada, para, em seguida, projetar as funções de autovalores desejadas para o controlador. Nesta etapa, essas funções de autovalores do controlador poderiam ser obtidas utilizando técnicas como, por exemplo, a síntese de controladores H_∞ para sistemas monovariáveis, que é mais simples de ser utilizada do que para sistemas multivariáveis. O controlador comutativo seria obtido utilizando-se a parametrização do capítulo 4, utilizando-se ferramentas como o "Loop-Shaping".

Um outro possível tópico de pesquisa será uma nova abordagem para o projeto de pré-compensadores utilizando idéias de realimentação em espaço de estados. Para tanto, suponha que se tenha um sistema cuja representação em espaço de estados seja:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$$

onde $A = 0$ (todos os pólos na origem) e $B = G(j\omega_0) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ (ω_0 denota a frequência onde se deseja normalizar $G(s)$). O problema de projeto de um pré-compensador normalizante pode, então, ser enunciado da seguinte forma: encontre $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que os módulos dos autovalores de BK_p sejam iguais aos seus valores singulares.

Apêndice A

Uma solução numericamente robusta para a identidade de Bezout polinomial generalizada

Um importante problema envolvendo matrizes polinomiais, tanto do ponto de vista matemático (Gohberg et al., 1982; Gantmacher, 1959) quanto da teoria de sistemas (Kailath, 1980; Stefanidis et al., 1992; Wolovich, 1974), é a solução da identidade de Bezout generalizada, sendo uma de suas aplicações a obtenção de uma parametrização para todos os controladores estabilizantes para plantas discretas.

O problema de se resolver a identidade de Bezout polinomial generalizada pode ser formulado da seguinte forma: seja $G(s)$ uma matriz pertencente a $\mathbb{R}^{p \times q}(s)$, encontre matrizes $N(s)$, $M(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{M}(s)$, $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}[s]$, de dimensões apropriadas, onde m e n podem assumir os valores de p ou q quando apropriado, tais que

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}^{-1}(s), \quad (\text{A1})$$

e satisfazem a identidade de Bezout generalizada

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & O \\ O & I_p \end{bmatrix}, \quad (\text{A2})$$

onde I_n , $n = p, q$ denota a matriz identidade de ordem n . Note que a equação (A2) implica que as matrizes polinomiais $N(s)$ e $M(s)$ ($\tilde{N}(s)$ e $\tilde{M}(s)$) sejam coprimas à direita (esquerda) e, por este motivo, as matrizes polinomiais da equação (A2) são usualmente referidas na literatura como uma fatoração (DFM) duplamente coprima de $G(s)$.

A forma usual de calcular as matrizes $M(s)$, $N(s)$, $\tilde{M}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ que satisfaçam as equações (A1) e (A2) é a seguinte: (i) encontre descrições por frações de matrizes coprimas à direita e à esquerda para $G(s)$; (ii) encontre matrizes polinomiais $X_1(s)$, $Y_1(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ que satisfazem, independentemente, as equações de Bezout $\tilde{X}(s)M(s) - \tilde{Y}(s)N(s) = I_q$ e $\tilde{M}(s)X_1(s) - \tilde{N}(s)Y_1(s) = I_p$; (iii) defina $Q(s) = \tilde{X}(s)Y_1(s) - \tilde{Y}(s)X_1(s)$ e faça $X(s) = X_1(s) - N(s)Q(s)$, $Y(s) = Y_1(s) - M(s)Q(s)$. É fácil verificar que as matrizes $M(s)$, $N(s)$, $\tilde{M}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $X(s)$ e $Y(s)$ satisfazem a equação de Bezout generalizada (A2). O cálculo da DFM coprime à direita e à esquerda de uma dada matriz racional pode ser realizado de diversas formas, por exemplo, Basilio e Kouvaritakis (1997a), enquanto algoritmos para solucionar a identidade de Bezout são apresentados em Feinstein e Bar-ness (1984), Lai (1989), Fang e Chang (1990), Fang (1992b) e Yamada et al. (1995).

O problema de solucionar diretamente a identidade de Bezout em um único passo foi somente considerado por Fang (1992a), que apresentou formas fechadas para os elementos da equação (A2). O problema do algoritmo apresentado por Fang é que ele é baseado na alocação de múltiplos autovalores de uma matriz de estados na origem. É sabido, porém, que a alocação de pólos múltiplos leva, usualmente, a sérias dificuldades numéricas.

Neste apêndice, o problema de solucionar a identidade de Bezout polinomial generalizada é considerado, sendo propostos algoritmos para o cálculo de todos os elementos da equação (A2) (Basilio e Moreira, 2004). Os algoritmos são baseados no cálculo de uma base polinomial mínima para o espaço nulo de determinadas matrizes polinomiais e por este motivo o algoritmo 4.1 terá, neste apêndice, fundamental importância. Como o algoritmo 4.1 utiliza decomposições por valores singulares de matrizes reais (as matrizes de convolução formadas pelos coeficientes de uma determinada matriz polinomial), ele pode ser considerado numericamente robusto.

A.1 Cálculo das matrizes $M(s)$, $N(s)$, $\tilde{M}(s)$ e $\tilde{N}(s)$

Seja $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times q}(s)$ e suponha que $G(s)$ seja expressa da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} N_G(s), \quad (\text{A3})$$

onde $N_G(s) \in \mathbb{R}^{p \times q}[s]$ e $d(s)$ é um polinômio (o mínimo múltiplo comum de todos os polinômios dos denominadores dos elementos de $G(s)$). Além disso, suponha que $G(s)$ seja própria, *i.e.*, $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = G_\infty$ (finito). Uma descrição por frações de matrizes não-coprimas à esquerda, $\tilde{A}^{-1}(s)\tilde{B}(s)$, para $G(s)$ pode ser definida como $\tilde{A}(s) = d(s)I_p$ e $\tilde{B}(s) = N_G(s)$, onde I_p denota a matriz identidade de ordem p . Seja $G(s) = N(s)M^{-1}(s)$ uma DFM coprima à direita para $G(s)$. Então, as matrizes polinomiais $N(s)$ e $M(s)$ devem satisfazer:

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}(s) & -\tilde{A}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = O, \quad (\text{A4})$$

o que mostra que todas as DFM coprimas à direita de $G(s)$ são geradas a partir de bases polinomiais mínimas do espaço nulo de

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} \tilde{B}(s) & -\tilde{A}(s) \end{bmatrix}. \quad (\text{A5})$$

Isto leva ao seguinte resultado.

Teorema A1 Seja $F(s)$ uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $T_1(s)$, *i.e.*, $T_1(s)F(s) = O$ e suponha que as colunas de $F(s)$ têm graus por coluna organizados em ordem decrescente, isto é, $gr[\underline{f}_i(s)] \geq gr[\underline{f}_j(s)]$, $j > i$. Escrevendo

$$F(s) = \begin{bmatrix} M(s) \\ N(s) \end{bmatrix}, \quad (\text{A6})$$

então $M(s)$ e $N(s)$ são coprimas à direita. Além disso, $M(s)$ é reduzida por coluna.

Prova A primeira parte da prova é uma consequência do fato de que $F(s)$, sendo uma base polinomial mínima, é irredutível e, portanto, tem forma de Smith equivalente a $\begin{bmatrix} I_q & O \end{bmatrix}^T$.

Para provar que $M(s)$ é reduzida por coluna, note que uma vez que as colunas de $F(s)$ definem uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $T_1(s)$, então $F(s)$ é reduzida por coluna e, portanto, a matriz

$$F_{hc} = \begin{bmatrix} M_{hc} \\ N_{hc} \end{bmatrix}$$

formada pela matriz dos coeficientes de maior grau de $F(s)$ tem posto completo. Suponha agora que M_{hc} seja singular. Logo, existe uma matriz unimodular $U(s)$ (Basilio e Kouvaritakis, 1997a; Basilio, 2002) tal que o grau da primeira coluna de $M_1(s) = M(s)U(s)$ é menor do que o grau da coluna correspondente de $M(s)$. Como consequência, dois fatos podem ocorrer: (i) o grau da primeira coluna de $N_1(s) = N(s)U(s)$ decresce, o que implica que existe um outro vetor polinomial pertencente a uma base de grau menor do que a base dada pelas colunas de $F(s)$, contradizendo a hipótese de que $F(s)$ é uma base polinomial mínima; (ii) o grau da primeira coluna de $N_1(s)$ é maior ou igual ao grau da coluna correspondente de $M_1(s)$, o que implica que, ou a hipótese de que $F(s)$ é uma base polinomial mínima, ou a hipótese de que $G(s)$ é própria, é contradita. Assim sendo, M_{hc} tem que ser não-singular, o que completa a prova. \square

Considere, agora, o cálculo de uma DFM coprima à esquerda $\tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ para $G(s)$. Para tanto, note, a partir da equação (A2), que

$$\begin{bmatrix} -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = O \implies \begin{bmatrix} -N^T(s) & M^T(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{M}^T(s) \\ \tilde{N}^T(s) \end{bmatrix} = O, \quad (\text{A7})$$

o que mostra que $\tilde{M}(s)$ e $\tilde{N}(s)$ podem também ser calculadas aplicando-se diretamente o algoritmo 4.1 à matriz polinomial

$$T_2(s) = \begin{bmatrix} -N^T(s) & M^T(s) \end{bmatrix}. \quad (\text{A8})$$

A.2 Cálculo de $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$

Considere, inicialmente, o cálculo de $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$. A partir da equação (A2), pode-se escrever:

$$M^T(s)\tilde{X}^T(s) - N^T(s)\tilde{Y}^T(s) - I_q = O, \quad (\text{A9})$$

ou equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} M^T(s) & -N^T(s) & -I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}^T(s) \\ \tilde{Y}^T(s) \\ I_q \end{bmatrix} = O. \quad (\text{A10})$$

Como é mostrado em Lai (1989), a equação (A9) terá uma solução se e somente se é possível encontrar $\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & \tilde{Y}(s) & C \end{bmatrix}^T$, com C não-singular, que resolve a equação (A10). Como $N(s)$ e $M(s)$ são, por construção, coprimas à direita, então a equação (A10) sempre terá solução e, portanto, sempre haverá uma matriz não-singular C . Desta forma, o problema de encontrar $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$, solução para a equação (A9), é equivalente ao problema de se calcular uma matriz polinomial $(p + 2q) \times q$, $\hat{F}(s)$, cujas colunas pertencem ao espaço nulo à direita de

$$T_3(s) = \begin{bmatrix} M^T(s) & -N^T(s) & -I_q \end{bmatrix} \quad (\text{A11})$$

com a restrição de que todas as submatrizes formadas com as últimas q linhas das matrizes dos coeficientes de $\hat{F}(s)$ devam ser iguais a zero, exceto a matriz dos coeficientes que independem de s , cujas q últimas linhas devem formar uma matriz não-singular. Por exemplo, se $\hat{F}(s)$ tem grau ϕ , então

$$\hat{F}(s) = \hat{F}_0 s^\phi + \hat{F}_1 s^{\phi-1} + \dots + \hat{F}_{\phi-1} s + \hat{F}_\phi, \quad (\text{A12})$$

onde

$$\hat{F}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{F}_i^{(top)} \\ O_{q \times q} \end{bmatrix}, & i = 0, \dots, \phi - 1 \\ \begin{bmatrix} \hat{F}_i^{(top)} \\ C \end{bmatrix}, & i = \phi \end{cases}, \quad (\text{A13})$$

onde C deve ser uma matriz $q \times q$ não-singular. É importante ressaltar que o cálculo de $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ não requer que uma base polinomial mínima para o espaço nulo à direita de $T_3(s)$ seja encontrado. Além disso, a matriz de convolução formada a partir de $T_3(s)$ terá uma forma especial, uma vez que ela deve garantir que \hat{F}_i tenha a forma dada por (A13). Por essa razão, essa matriz de convolução será denotada por $\hat{C}_{\phi_i}(T_3)$ e será referida como a matriz de convolução modificada de $T_3(s)$. Para se obter $\hat{C}_{\phi_i}(T_3)$, defina

$$\hat{T}_3(s) = \begin{bmatrix} M^T(s) & -N^T(s) \end{bmatrix}. \quad (\text{A14})$$

Logo, a matriz de convolução modificada de $T_3(s)$ será formada da seguinte maneira:

$$\hat{C}_{\phi_i}(T_3) = \begin{bmatrix} C_{\phi_i}(\hat{T}_3) & O_{(\phi_i+\alpha)q \times q} \\ & -I_q \end{bmatrix}, \quad (\text{A15})$$

onde α é o grau de $\hat{T}_3(s)$ e $C_{\phi_i}(\hat{T}_3)$ é obtida de acordo com (4.2). Portanto, os q vetores polinomiais que satisfazem a equação (A10) podem também ser encontrados buscando-se no espaço nulo à direita de $\hat{C}_{\phi_i}(T_3)$, definido em (A15), vetores cujos q últimos elementos formam matrizes com posto cheio por coluna. Uma pequena modificação do algoritmo 4.1 leva a uma maneira sistemática de realizar essa busca, conforme será mostrado a seguir.

Algoritmo A1

PASSO 1: Faça $i = 1$ e $\deg[\underline{\hat{f}}_i(s)] = \phi_i = 0$.

PASSO 2: Forme a matriz $\hat{C}_{\phi_i}(T_3)$ de acordo com a equação (A15) e calcule sua decomposição por valores singulares, *i.e.*, $\hat{C}_{\phi_i}(T_3) = Y_{\phi_i} \Sigma_{\phi_i} U_{\phi_i}^t$.

PASSO 3: Suponha que n_{ϕ_i} denote a dimensão do espaço nulo de $\hat{C}_{\phi_i}(T_3)$, que é dado pelo número de valores singulares iguais a zero de $\hat{C}_{\phi_i}(T_3)$ mais o número de colunas de T_3 em excesso.

Se $n_{\phi_i} = 0$, faça $\phi_i = \phi_i + 1$ e volte para o passo 2.

Se $n_{\phi_i} > 0$, então existem até n_{ϕ_i} vetores polinomiais de grau ϕ_i que podem satisfazer a equação (A10). Esses vetores serão formados pelas n_{ϕ_i} últimas colunas de U_{ϕ_i} . Quando $i = 1$, $\underline{\hat{f}}^{(1)}$ será escolhido entre as últimas n_{ϕ_i} colunas de U_{ϕ_i} para as quais pelo menos um dos últimos q elementos seja diferente de zero. Quando $n_{\phi_i} > 1$, outros vetores polinomiais irão satisfazer também a equação (A10) desde que a matriz formada com os últimos q elementos dos vetores $\underline{\hat{f}}^{(i)}$, que já foram escolhidos, e os últimos q elementos do vetor em consideração, tenha posto cheio por coluna. Repita este passo até que todos os vetores possíveis de serem formados a partir de U_{ϕ_i} tenham sido verificados ou até que a base esteja completa. Faça $i = i + 1$, a cada vez que um novo vetor polinomial tenha sido adicionado à base.

PASSO 4: Se $i < q$, faça $i = i+1$ e $\phi_i = \phi_i + 1$ e volte para o passo 2. Caso contrário, suponha que $\max(\phi_i) = \phi$ e denote $\hat{F}(s) = \hat{F}_0 s^\phi + \hat{F}_1 s^{\phi-1} + \dots + \hat{F}_{\phi-1} s + \hat{F}_\phi$. Forme, de acordo com a equação (A13), a matriz C com as últimas q linhas de \hat{F}_ϕ e calcule $F(s) = \hat{F}(s)C^{-1}$. \square

Considere, agora, o cálculo de $X(s)$ e $Y(s)$. Uma vez que $\tilde{M}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ já foram calculadas então, de acordo com a equação (A2), $X(s)$ e $Y(s)$ devem satisfazer

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ I_p \end{bmatrix}, \quad (\text{A16})$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) & O \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) & -I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \\ I_p \end{bmatrix} = O. \quad (\text{A17})$$

Portanto, definindo

$$T_4(s) = \begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) & O \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) & -I_p \end{bmatrix}, \quad (\text{A18})$$

é fácil ver que o problema de calcular $X(s)$ e $Y(s)$ é equivalente ao problema de se encontrar p vetores polinomiais, pertencentes ao espaço nulo à direita de $T_4(s)$, tais que a matriz formada pelos p últimos elementos destes vetores tenha posto completo. Esse problema é similar ao problema de se calcular $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ e portanto, o mesmo procedimento para encontrar os vetores polinomiais do espaço nulo à direita de $T_3(s)$, que satisfazem a equação (A10), pode ser seguido para se obter $X(s)$ e $Y(s)$ que resolvem a equação (A17). De fato, definindo-se

$$\hat{T}_4(s) = \begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix}, \quad (\text{A19})$$

então a matriz de convolução modificada de $T_4(s)$ ($\hat{C}_{\phi_i}(T_4)$) será dada por:

$$\hat{C}_{\phi_i}(T_4) = \begin{bmatrix} C_{\phi_i}(\hat{T}_4) & O_{(\phi_i+\alpha)(p+q) \times p} \\ O_{q \times p} & -I_p \end{bmatrix}, \quad (\text{A20})$$

onde α é o grau de $\hat{T}_4(s)$ e $C_{\phi_i}(\hat{T}_4)$ é formada de acordo com (4.2). Portanto, se for possível encontrar matrizes polinomiais $X(s)$ e $Y(s)$ que satisfaçam a equação (A16), então o algoritmo A1 pode ser também usado para encontrar p vetores polinomiais pertencentes ao espaço nulo à direita de $T_4(s)$ com as restrições impostas

pela equação (A17). Como é sabido, tais matrizes existem (a abordagem usual para encontrá-las foi descrita na introdução deste apêndice). Além disso, elas são únicas como mostrado no teorema a seguir.

Teorema A2 Suponha que as matrizes polinomiais $N(s)$, $M(s)$, $\tilde{N}(s)$, $\tilde{M}(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ que satisfazem as equações (A7) e (A9) são dadas. Então, as matrizes polinomiais $X(s)$ e $Y(s)$ que solucionam a equação (A16) são únicas. Além disso, elas são dadas por:

$$X(s) = [I + N(s)\tilde{Y}(s)]\tilde{M}^{-1}(s) \text{ e } Y(s) = M(s)\tilde{Y}(s)\tilde{M}^{-1}(s). \quad (\text{A21})$$

Prova Uma vez que $\tilde{M}(s)$ e $\tilde{N}(s)$ são coprimas à esquerda, então existem duas matrizes polinomiais $X_1(s)$ e $Y_1(s)$ tais que $\tilde{M}(s)X_1(s) - \tilde{N}(s)Y_1(s) = I_p$. Usando-se as equações (A7) e (A10), então a equação (A2) deve ser modificada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & Y_1(s) \\ N(s) & X_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & \Delta(s) \\ O & I_p \end{bmatrix}. \quad (\text{A22})$$

A equação (A22) implica que $\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix}$ é unimodular. Logo, as matrizes polinomiais $X(s)$ e $Y(s)$ que solucionam a equação (A16) são unicamente determinadas como:

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O \\ I_p \end{bmatrix}. \quad (\text{A23})$$

Suponha, agora, que $X(s)$ e $Y(s)$ tenham sido calculadas de acordo com a equação (A23). Então, $X(s)$ e $Y(s)$ satisfazem também a identidade de Bezout generalizada (A2). Reescrevendo a equação (A2) em ordem inversa, *i.e.*,

$$\begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & O \\ O & I_p \end{bmatrix},$$

então as seguintes relações podem ser obtidas:

$$-M(s)\tilde{Y}(s) + Y(s)\tilde{M}(s) = O \text{ e } -N(s)\tilde{Y}(s) + X(s)\tilde{M}(s) = I_p,$$

que após algumas manipulações algébricas levam às equações (A21). \square

Observação A1 O teorema A2 não somente prova a existência e unicidade das matrizes polinomiais $X(s)$ e $Y(s)$ que satisfazem a equação (A16), mas também

apresenta uma outra forma de calcular $X(s)$ e $Y(s)$. Isto ocorre porque, uma vez que $\tilde{M}(s)$ é reduzida por coluna, então o algoritmo proposto em Basilio (2002) para o cálculo de inversas de matrizes polinomiais pode ser usado para calcular $\tilde{M}^{-1}(s)$. \square

A.3 Exemplos

O algoritmo proposto neste apêndice será ilustrado com dois exemplos. No primeiro exemplo, será utilizada uma matriz racional 2×2 , sendo enfatizado em detalhes todos os passos dos algoritmos propostos. No segundo exemplo, os algoritmos serão aplicados em uma matriz racional 5×3 .

Exemplo A1 Considere a seguinte matriz racional 2×2 (Basilio e Sahate, 2000)

$$G(s) = \frac{1}{d(s)}N_G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} -54,32s & -47s + 2 \\ -48,5s - 1,94 & -42s \end{bmatrix}, \quad (\text{A24})$$

onde $d(s) = s^2 + s - 2$. Suponha que se deseje obter uma descrição por frações de matrizes duplamente coprime de $G(s)$, *i.e.* $G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$, e as matrizes $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ que satisfaçam a identidade de Bezout generalizada.

Note que $G(s)$ já está expressa na forma requerida pela equação (A3). Logo, a matriz $T_1(s)$ definida na equação (A5) será dada por:

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} -54,32s & -47s + 2 & -(s^2 + s - 2) & 0 \\ -48,5s - 1,94 & -42s & 0 & -(s^2 + s - 2) \end{bmatrix}.$$

De acordo com a seção A.1 e o algoritmo 4.1, o cálculo de $M(s)$ e $N(s)$ é feito através do cálculo do espaço nulo à direita de $C_{\phi_i}(T_1)$, onde ϕ_i varia de 0 até que sejam obtidos dois vetores linearmente independentes pertencentes ao espaço nulo de $T_1(s)$. Para tanto, faça, inicialmente, $\phi_1 = 0$ e forme a matriz de convolução $C_0(T_1)$ (6×4). Essa matriz tem os seguintes valores singulares: 96,3368, 2,9041, 2,4494, e 0,6809, que são claramente diferentes de zero. Logo, seu espaço nulo tem dimensão zero, o que implica que a base polinomial mínima para o espaço nulo de $T_1(s)$ não tem um vetor polinomial com grau zero. Seguindo o algoritmo 4.1, o próximo

passo é incrementar ϕ_i . Procedendo desta maneira, seja agora $\phi_1 = 1$. Formando a matriz de convolução correspondente $C_1(T_1)$ (uma matriz 8×8) e calculando-se uma decomposição por valores singulares $Y_1 \Sigma_1 U_1^T$ para $C_1(T_1)$, então é possível ver que essa matriz tem os seguintes valores singulares: 96,3784, 96,3414, 2,8102, 2,6454, 2,2365, 0,9997, 0,0770 e 0,00000000000000. Uma vez que $C_1(T_1)$ tem somente um valor singular zero, então com a coluna de U_1 ,

$$\underline{f}^{(1)} = [0,3840 \quad -0,4345 \quad 0 \quad 0 \quad -0,3840 \quad 0,4345 \quad -0,4345 \quad -0,3724]^T,$$

correspondente ao valor singular zero, é possível formar somente um vetor pertencente à base polinomial mínima de $T_1(s)$, sendo dado por:

$$\underline{f}_1(s) = \begin{bmatrix} 0,3840s - 0,3840 \\ -0,4345s + 0,4345 \\ -0,4345 \\ -0,3724 \end{bmatrix}.$$

De acordo com os passos 4 e 5 do algoritmo 4.1, deve-se incrementar i e ϕ_i em 1, sendo agora $i = 2$ e $\phi_2 = 2$. Em seguida, forma-se a matriz de convolução (10×12) $C_2(T_1)$ e calcula-se uma decomposição por valores singulares $Y_2 \Sigma_2 U_2^T$ para $C_2(T_1)$. Pode-se verificar que $C_2(T_1)$ tem os seguintes valores singulares: 96,3858, 96,3785, 96,3384, 2,8311, 2,8076, 2,5947, 1,8086, 0,9997, 0,0887, 0,000000000000001, o que implica que, uma vez que $C_2(T_1)$ tem mais duas colunas do que linhas, seu espaço nulo tem dimensão três. Portanto, existem 3 vetores candidatos a formar a base, ou seja, as últimas três colunas de U_2 . Formando com a última coluna de U_2 ,

$$\underline{f}^{(2)} = [-0,1920 \quad 0,2345 \quad 0 \quad 0 \quad -0,0309 \quad 0,0523 \quad -0,5942 \\ -0,5389 \quad 0,2229 \quad -0,2868 \quad 0,2868 \quad 0,2162],$$

o vetor polinomial

$$\underline{f}_2(s) = \begin{bmatrix} -0,1920s^2 - 0,0309s + 0,2229 \\ 0,2345s^2 + 0,0523s - 0,2868 \\ -0,5942s + 0,2868 \\ -0,5389s + 0,2162 \end{bmatrix},$$

então $\underline{f}_2(s)$ será também um elemento da base polinomial mínima para o espaço nulo de $T_1(s)$ se e somente se a matriz

$$F(s) = [\underline{f}_1(s) \quad \underline{f}_2(s)]$$

for reduzida por coluna. De fato, formando a matriz dos coeficientes de maior grau de $F(s)$,

$$F_{hc} = \begin{bmatrix} 0,3840 & -0,1920 \\ -0,4345 & 0,2345 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pode ser verificado que F_{hc} não possui valores singulares nulos, sendo, portanto, uma matriz com posto cheio por coluna. Conseqüentemente, as colunas de $F(s)$ formam uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $T_1(s)$. Além disso, particionando $F(s)$ apropriadamente, então uma fatoração coprima à direita de $G(s)$ será dada por:

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0,3840s - 0,3840 & -0,192s^2 - 0,0309s + 0,2229 \\ -0,4345s + 0,4345 & 0,2345s^2 + 0,0523s - 0,2868 \end{bmatrix}$$

e

$$N(s) = \begin{bmatrix} -0,4345 & -0,5942s + 0,2868 \\ -0,3724 & -0,5389s + 0,2162 \end{bmatrix}.$$

O cálculo das matrizes coprimas à esquerda $\tilde{N}(s)$ e $\tilde{M}(s)$ é realizado da mesma forma que para $N(s)$ e $M(s)$; a diferença é que é necessário encontrar uma base polinomial mínima para o espaço nulo da matriz $T_2(s)$, definida na equação (A8). Portanto, utilizando-se o algoritmo 4.1, obtém-se:

$$\tilde{M}(s) = \begin{bmatrix} -0,3823s + 0,3823 & 0,4369s - 0,4369 \\ 0,1359s - 0,1359 & 0,0147s^2 - 0,1406s + 0,1258 \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{N}(s) = \begin{bmatrix} -0,4238 & -0,3823 \\ -0,7147s + 0,1221 & -0,6189s + 0,1359 \end{bmatrix}.$$

Considere, agora, o cálculo de $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$. Este problema é um pouco diferente do anterior, *i.e.*, não é necessário calcular uma base polinomial mínima para o espaço nulo de $T_3(s)$, definida na equação (A11), sendo suficiente encontrar dois vetores polinomiais no espaço nulo de $T_3(s)$ tais que: (i) $T_3(s)\hat{F}(s) = O$ e; (ii) a matriz formada com as duas últimas linhas de \hat{F}_ϕ (definida de acordo com a equação (A13)) seja não-singular. Essa busca é feita de acordo com o algoritmo A1, da seguinte forma. Faça $i = 1$ e $\phi_1 = 0$ e forme a matriz $\hat{C}_0(T_3)$ (uma matriz 6×6). Calculando uma decomposição por valores singulares $Y_0 \Sigma_0 U_0^t$ de $\hat{C}_0(T_3)$, pode ser visto que seus valores singulares são: 1,5007, 1,0004, 0,7102, 0,4927, 0,0101

e 0,0000000000000000, o que implica que a última coluna de U_0 formará a primeira coluna de $\hat{F}(s)$ desde que pelo menos um dos seus dois últimos elementos seja diferente de zero. Isto realmente ocorre e, portanto, a primeira coluna de $\hat{F}(s)$ terá grau zero, sendo dada por:

$$\underline{\hat{f}}_1(s) = [0 \quad 0 \quad -0,6714 \quad 0,7402 \quad 0,0160 \quad -0,0325]^T.$$

Seguindo o algoritmo A1, o próximo passo é incrementar i e ϕ_i , *i.e.* $i = 2$ e $\phi_2 = 1$. A matriz de convolução modificada $\hat{C}_1(T_3)$ tem os seguintes valores singulares: 1,5630, 1,1900, 1,0004, 0,7687, 0,6456, 0,3640, 0,0101 e 0. Uma vez que $\hat{C}_1(T_3)$ é uma matriz 8×10 , então existem três vetores candidatos para $\underline{\hat{f}}_2(s)$. Calculando uma decomposição por valores singulares $Y_1 \Sigma_1 U_1^t$ para $\hat{C}_1(T_3)$, e selecionando a última coluna de U_1 , então, junto com o vetor anteriormente escolhido, forma-se a seguinte matriz 2×2 :

$$C = \begin{bmatrix} 0,0160 & 0,0028 \\ -0,0325 & 0,0302 \end{bmatrix},$$

que é claramente não-singular. Conseqüentemente, a segunda coluna de $\hat{F}(s)$ será dada por:

$$\underline{\hat{f}}_2(s) = \begin{bmatrix} -0,5320 \\ -0,4583 \\ -0,0602s + 0,4630 \\ 0,0565s - 0,5338 \\ 0,0028 \\ 0,0302 \end{bmatrix}.$$

A base está agora completa e, então, de acordo com o passo 4 do algoritmo A1, $F(s) = \hat{F}(s)C^{-1}$. Finalmente, particionando $F(s)$ apropriadamente, obtém-se:

$$\tilde{X}(s) = \begin{bmatrix} -30,1232 & -25,9497 \\ -14,8571 & -12,7987 \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{Y}(s) = \begin{bmatrix} 3,4090s + 9,1368 & -3,1970s - 8,7549 \\ 1,6814s - 16,1615 & -1,5768s + 18,4703 \end{bmatrix}.$$

Para o cálculo de $X(s)$ e $Y(s)$ o mesmo procedimento acima pode ser seguido. A única diferença é que agora as matrizes $\hat{C}_{\phi_i}(T_4)$, $i = 1,2$, devem ser formadas de acordo com a equação (A20). Seguindo os passos do algoritmo A1, com T_4

substituindo T_3 , encontra-se as seguintes matrizes:

$$X(s) = \begin{bmatrix} 2,6132s - 24,8330 & -13,9018 \\ 2,3700s - 22,5223 & -12,6083 \end{bmatrix}$$

e

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 0,8443s^2 - 12,1547s - 10,7858 & -4,4913s + 21,9808 \\ -1,0313s^2 + 14,4766s + 13,6655 & 5,4866s - 24,8750 \end{bmatrix}.$$

Exemplo A2 Considere a seguinte matriz racional 5×3 (Kouvaritakis et al., 1979):

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4,4190 & 0 & -1,6650 \\ 1,5750 & 0 & -0,0732 \end{bmatrix} s^4 + \begin{bmatrix} -1,5750 & 0 & 0,0732 \\ -0,0739 & 1,5415 & -0,0052 \\ 4,4190 & 0 & -1,6650 \\ 1,6674 & 0,0485 & -1,1574 \\ 6,1213 & -0,2909 & -1,8201 \end{bmatrix} s^3 + \begin{bmatrix} -1,1190 & 0,2909 & -0,0646 \\ -0,5319 & 1,6537 & 0,1570 \\ 1,6674 & 0,0485 & -1,1574 \\ 0,1339 & 0,3279 & -0,0918 \\ 0,3466 & -0,1978 & -0,0977 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 1,5409 & 0,2527 & -1,2125 \\ -0,2458 & 0 & 0,1828 \\ 0,1339 & 0,3279 & -0,0918 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,2332 & 0 & -0,0835 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -0,0816 & 0,3712 & -0,0204 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

onde $d(s) = s^5 + 1,5953s^4 + 1,7572s^3 + 0,1112s^2 + 0,0561s$. O problema considerado agora é, como no exemplo 1, o cálculo de uma descrição por frações de matrizes duplamente coprima de $G(s)$, *i.e.* $G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$, e as matrizes $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ satisfazendo a identidade de Bezout generalizado (A2).

Os algoritmos propostos neste apêndice levam às seguintes matrizes:

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & -0,0140 & 0,1326 \\ 0 & -0,3375 & 0,2029 \\ 0 & -0,0679 & 0,0839 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 0 & -0,0776 & 0,1471 \\ 0,6452 & -0,5654 & -0,1503 \\ 0 & -0,2319 & 0,0433 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0,1369 & -0,0875 & 0,1999 \\ 0,0511 & -0,0348 & 0,0560 \\ 0,3822 & -0,2832 & 0,2184 \end{bmatrix},$$

$$N(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3358 & 0,1870 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0513 & 0,4462 \\ 0 & -0,0170 & 0,2027 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 & 0,0170 & -0,2027 \\ 0,6452 & -0,5392 & -0,1637 \\ 0 & 0,0513 & 0,4462 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0581 & 0,5051 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\tilde{M}(s) &= \begin{bmatrix} 0 & -0,2447 & -0,5788 & -0,2418 & 0,4617 \\ 0 & 0,6490 & -0,2527 & -0,0632 & 0,2323 \\ 0 & -0,0994 & -0,2922 & 0,0985 & 0,2463 \\ 0 & -0,0161 & 0,4458 & -0,0678 & 0,2895 \\ -0,5633 & -0,0644 & -0,0485 & -0,0046 & 0,0883 \end{bmatrix} s \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0,1329 & -0,0419 & -0,1143 & 0,0890 \\ 0 & 0,1056 & 0,1111 & -0,0460 & 0,0496 \\ 0 & 0,0615 & -0,0170 & 0,1172 & 0,2757 \\ 0 & 0,0866 & -0,0028 & -0,8087 & 0,1311 \\ 0 & 0,0224 & 0,6266 & -0,0485 & -0,5028 \end{bmatrix}, \\
\tilde{N}(s) &= \begin{bmatrix} -0,3119 & -0,2447 & 0,3688 \\ 0,0088 & 0,6490 & 0,0882 \\ 0,8352 & -0,0994 & -0,1821 \\ 0,1585 & -0,0161 & 0,0916 \\ 0,1264 & -0,0644 & 0,0012 \end{bmatrix}, \\
X(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,4658 & -1,4202 & 1,1373 & 5,7122 & -15,7290 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4644 & 0,2067 & 0,4094 & -1,2546 & 0 \\ 0,1364 & -0,0762 & 0,2950 & 0,1342 & -1,7754 \end{bmatrix}, \\
Y(s) &= \begin{bmatrix} 0,0840 & -0,0618 & 0,2006 & 0,1371 & -1,2858 \\ -0,4557 & -1,4276 & 1,1614 & 5,7286 & -15,8833 \\ -0,0560 & -0,2881 & 0,2865 & 1,1175 & -3,4127 \end{bmatrix} s \\
&+ \begin{bmatrix} -0,5924 & -0,7609 & -1,0040 & 1,1772 & -4,1629 \\ 0,3525 & -1,4804 & 0,2379 & 0,4954 & -1,2206 \\ -3,2578 & -2,2201 & -0,3374 & 3,8039 & -10,4265 \end{bmatrix}, \\
\tilde{X}(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\tilde{Y}(s) &= \begin{bmatrix} -19,9990 & -1,5499 & -25,1971 & -5,5880 & 13,7315 \\ -24,7947 & 0 & -11,2627 & 0 & 0 \\ 2,8522 & 0 & -0,9455 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por razões de espaço, somente quatro casas decimais foram utilizadas em todas as matrizes polinomiais $M(s)$, $N(s)$, $\tilde{M}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{X}(s)$ e $\tilde{Y}(s)$ obtidas acima. Porém, se 15 casas decimais são utilizadas, então as matrizes acima satisfazem a equação (A2) com um erro de $4,3521 \times 10^{-14}$ em magnitude (*i.e.* o máximo valor absoluto das diferenças entre todos os coeficientes da matriz polinomial obtida a partir da multiplicação do termo à esquerda da equação (A2) e a matriz identidade de ordem oito), mostrando a exatidão do algoritmo.

Observação A2 No exemplo 2, a matriz $\tilde{X}(s)$ é igual a zero. Não é difícil verificar que uma condição necessária para que isto ocorra é a matriz racional $G(s)$ não ter zeros finitos (*i.e.* não perde posto para nenhum valor finito de $s \in \mathbb{C}$), uma vez que, neste caso, $N(s)$ terá posto cheio por coluna para todo $s \in \mathbb{C}$. Uma vez que $N(s)M^{-1}(s)$ e $\tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ são, respectivamente, descrições por frações de matrizes coprimas à direita e à esquerda de $G(s)$, então os zeros de $G(s)$ serão também os valores de $s \in \mathbb{C}$ para os quais $\tilde{N}(s)$ perde posto. Note que, $\tilde{N}(s)$ aqui obtida tem somente coeficientes reais e tem posto cheio por coluna, mostrando a consistência do resultado. □

Referências Bibliográficas

- Bandeira, P. T. (2000). *Controladores comutativos estabilizantes*, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia.
- Barcelos, A. F. (2005). *Algoritmos para matrizes polinomiais*, Tese de Mestrado, COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Barmish, B. R. (1985). Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system, *Journal of Optimization Theory and Applications* **46**: 399–408.
- Basilio, J. C. (1995). *Multivariable generalised Nyquist design*, PhD thesis, University of Oxford.
- Basilio, J. C. (2002). Inversion of polynomial matrices via state-space, *Linear Algebra and Its Applications* **357**: 259–271.
- Basilio, J. C. e Kouvaritakis, B. (1995). The use of rational eigenvector approximations in commutative controllers, *International Journal of Control* **61**: 333–356.
- Basilio, J. C. e Kouvaritakis, B. (1997a). An algorithm for coprime matrix fraction description using sylvester matrices, *Linear Algebra and Its Applications* **266**: 107–125.
- Basilio, J. C. e Kouvaritakis, B. (1997b). Design of causal reversed-frame-normalizing controllers using bicausal expansions, *International Journal of Control* **66**: 1–14.

- Basilio, J. C., Kouvaritakis, B. e Bandeira, P. T. (2002). Stabilizing commutative controllers: parametrization and characterization of degrees of freedom, *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Automática, Natal RN*, pp. 2859–2864.
- Basilio, J. C. e Moreira, M. V. (2004). A robust solution of the generalized polynomial Bezout identity, *Linear Algebra and its Applications* **385**: 287–303.
- Basilio, J. C. e Sahate, J. A. (2000). A normalizing precompensator for the design of effective and reliable commutative controllers, *International Journal of Control* **73**: 1280–1297.
- Bauer, F. L. e Fike, E. T. (1960). Norms and exclusion theorems, *Numerische Mathematik* **2**: 137–141.
- Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H. e Keel, L. H. (1995). *Robust Control: the parametric approach*, Prentice Hall, Upper Saddle River.
- Bliss, G. (1966). *Algebraic Functions*, Dover - New York.
- Bode, H. W. (1945). *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, New York.
- Braatz, R. D. e Morari, M. (1994). Minimizing the Euclidian condition number, *SIAM J. Control and Optimization* **32**: 1763–1768.
- Chen, D. e Seborg, D. E. (2002). Robust Nyquist array analysis based on uncertainty descriptions from system identification, *Automatica* **38**: 467–475.
- Chen, D. e Seborg, D. E. (2003). Design of decentralized PI control systems based on Nyquist stability analysis, *Journal of Process Control* **13**: 27–39.
- Chughtai, S. S. e Munro, N. (2004). Diagonal dominance using LMIs, *IEE Proc.-Control Theory Appl.* **151**: 225–233.
- Cloud, D. J. e Kouvaritakis, B. (1987). Commutative controllers revisited: Parallel computation, a new lease of life, *International Journal of Control* **45**: 1335–1370.

- Daniel, R. W. e Kouvaritakis, B. (1983). The choice and use of normal approximations to transfer-function matrices of multivariable control systems, *International Journal of Control* **37**: 1121–1133.
- Daniel, R. W. e Kouvaritakis, B. (1984). Analysis and design of linear multivariable feedback systems in the presence of additive perturbations, *International Journal of Control* **39**: 551–580.
- Desoer, C. A. e Wang, Y. T. (1980). On the generalized Nyquist stability criterion, *IEEE Transactions on Automatic Control* **25**: 187–196.
- Doyle, J. (1982). Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proceedings* **129**: 242–250.
- Doyle, J. C., Francis, B. A. e Tannenbaum, A. R. (1992). *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company, New York.
- Doyle, J. C. e Stein, G. (1981). Multivariable feedback design: concepts for a classic/modern synthesis, *IEEE - Transactions on Automatic Control* **26**: 4–16.
- Edmunds, J. M. (1998). Input and output scaling and reordering for diagonal dominance and block diagonal dominance, *IEE Proc. - Control Theory Appl.* **145**: 523–530.
- Fang, C. H. (1992a). A new method for solving the polynomial generalized Bezout identity, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications* **39**: 63–65.
- Fang, C. H. (1992b). A simple approach to solving the diophantine equation, *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**: 152–155.
- Fang, C. H. e Chang, F. R. (1990). A novel approach for solving diophantine equations, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **37**: 1455–1457.

- Feinstein, J. e Bar-ness, Y. (1984). The solution of the matrix polynomial equation $A(s)X(s)+B(s)Y(s) = C(s)$, *IEEE Transactions on Automatic Control* **29**: 75–77.
- Fletcher, R. (1987). *Practical Methods of Optimization*, Wiley-Interscience, Chichester.
- Forney, D. G. (1975). Minimal bases of rational vector spaces, with applications to multivariable linear systems, *SIAM Journal of Control* **13**: 493–520.
- Francis, B. A. (1987). A Course in H_∞ Control Theory, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 88, Springer-Verlag, Berlin.
- Gantmacher, F. R. (1959). *The theory of matrices*, Vol. I and II, Chelsea Publishing Company, New York.
- Gohberg, I. C., Lancaster, P. e Rodman, L. (1982). *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York.
- Ho, W. K., Lee, T. H., Xu, W., Zhou, J. R. e Tay, E. B. (2000). The direct Nyquist array design of PID controllers, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **47**: 175–185.
- Horn, R. A. e Johnson, C. R. (1990). *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.
- Hung, Y. S. e MacFarlane, A. G. J. (1982). *Multivariable Feedback: A Quasi-Classical Approach*, Springer-Verlag.
- Ivezic, D. D. e Petrovic, T. B. (2003). New approach to milling circuit control - robust inverse Nyquist array design, *Int. J. Miner. Process* **70**: 171–182.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice-Hall.
- Kaszakurewicz, E., Bhaya, A. e Ramos, P. R. V. (1995). A control-theoretic view of diagonal preconditioners, *Int. J. Systems Sci.* **26**: 1659–1672.
- Kontakos, T. (1973). PhD thesis, University of Manchester.

- Kouvaritakis, B. e Basilio, J. C. (1994). Bi-causal eigenvector sequences and the design of causal commutative controllers, *International Journal of Control* **59**: 1173–1189.
- Kouvaritakis, B., Murray, W. e MacFarlane, A. G. J. (1979). Characteristic frequency-gain design study of an automatic flight control system, *International Journal of Control* **29**: 325–358.
- Kucera, V. (1979). *Discrete Linear Control: the Polynomial Equation Approach*, John Wiley & Sons, Chichester, U. K.
- Lai, Y. S. (1989). An algorithm for solving the matrix polynomial equation $B(s)D(s) + A(s)N(s) = H(s)$, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **36**: 1087–1089.
- MacFarlane, A. G. J. (1970). Return-difference and return-ratio matrices and their use in analysis and design of multivariable feedback control systems, *Proc. IEE* **117**: 2037–2049.
- MacFarlane, A. G. J. e Belletruti, J. J. (1973). The characteristic locus design method, *Automatica* **9**: 575–588.
- MacFarlane, A. G. J. e Kouvaritakis, B. (1977). A design technique for linear multivariable feedback systems, *International Journal of Control* **25**: 837–874.
- MacFarlane, A. G. J. e Postlethwaite, I. (1977). The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci, *International Journal of Control* **25**: 81–127.
- Maciejowski, J. M. (1989). *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley Publishing Company, Wokingham.
- Mayne, D. Q. (1973). The design of linear multivariable systems, *Automatica* **9**: 201–207.

- Moreira, M. V. e Basilio, J. C. (2004). Controladores comutativos estabilizantes para plantas instáveis, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS.
- Moreira, M. V. e Basilio, J. C. (2005). Design of normalizing precompensators via alignment of output-input principal directions, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference ECC'05*, Sevilha, Espanha, pp. 2170–2175.
- Moreira, M. V., Basilio, J. C. e Kouvaritakis, B. (2005). Rational stabilizing commutative controllers for unstable plant, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference ECC'05*, Sevilha, Espanha, pp. 7864–7869.
- Moreira, M. V., Basilio, J. C. e Kouvaritakis, B. (2006). Rational stabilizing commutative controllers: parametrisation and characterisation of degrees of freedom, *International Journal of Control* (submetido para publicação) .
- Nett, C. N., Jacobson, C. A. e Balas, M. J. (1984). A connection between state-space and doubly coprime fractional representations, *IEEE - Transactions on Automatic Control* **29**: 831–832.
- Nobakhti, A. e Munro, N. (2004). A new method for singular value loop shaping in design of multiple-channel controllers, *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**: 249–253.
- Nobakhti, A., Munro, N. e Porter, B. (2003). Evolutionary achievement of diagonal dominance in linear multivariable plants, *Electronic Letters* **39**: 165–166.
- Nyquist, H. (1932). Regeneration theory, *Bell. Syst. Tech. J.* **11**: 126–147.
- Oliveira, R. C. L. F. e Peres, P. L. D. (2006). LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent lyapunov functions, *Systems and Control Letters* **55**: 52–61.

- Postlethwaite, I. (1982). Sensitivity of the characteristic gain loci, *Automatica* **18**: 709–712.
- Rosenbrock, H. H. (1969). Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array, *Proceedings of the IEE*, pp. 1929–1936.
- Rosenbrock, H. H. (1970). *State-Space and Multivariable Theory*, Wiley, New York.
- Rosenbrock, H. H. (1974). *Computer-Aided Control System Design*, Academic Press, New York.
- Sahate, J. A. (1998). *O método do lugar característico aplicado a plantas com autovetores quase paralelos*, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia.
- Sezginer, R. S. e Overton, M. L. (1990). The largest singular value of $e^X A_0 e^{-X}$ is convex on convex sets of commuting matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**: 229–230.
- Skogestad, S. e Havre, K. (1996). The use of RGA and condition number as robustness measures, *Computers chem. Engng* **20**: S1005–S1010.
- Skogestad, S. e Morari, M. (1987). Effect of model uncertainty on dynamic resilience, *Chem. Eng. Sci.* **42**: 1765–1780.
- Skogestad, S., Morari, M. e Doyle, J. C. (1988). Robust control of ill-conditioned plants: High purity distillation, *IEEE Transactions on Automatic Control* **33**: 1092–1105.
- Smith, M. C. (1981). On the generalized Nyquist stability criterion, *International Journal of Control* **34**: 885–920.
- Stefanidis, P., Paplinski, A. P. e Gibbard, M. J. (1992). *Numerical Operations with Polynomial Matrices*, Vol. 171 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag, Berlin.
- Vidyasagar, M. (1985). *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press, London.

- Wolovich, W. A. (1974). Linear multivariable systems, Springer-Verlag, New-York.
- Yamada, M., Zun, P. C. e Funahashi, Y. (1995). On solving diophantine equations by real matrix manipulation, *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**: 118–122.
- Yedavalli, R. K. (1985). Improved measures of stability robustness for linear state space models, *IEEE Transactions on Automatic Control* **30**: 577–579.
- Youla, D. C., Jabr, H. A. e Bongiorno, J. J. (1976). Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers - Part II: the multivariable case, *IEEE Transactions on Automatic Control* **21**: 319–338.
- Zhou, K., Doyle, J. C. e Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River.