

UMA CONTRIBUIÇÃO AO FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO APLICADO A  
SISTEMAS DE POTÊNCIA TRIFÁSICOS USANDO O MÉTODO DOS PONTOS  
INTERIORES

Leandro Ramos de Araujo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Sandoval Carneiro Junior, Ph.D.

---

Prof. José Luiz Rezende Pereira, Ph.D.

---

Prof. Djalma Mosqueira Falcão, Ph.D.

---

Prof. Antônio Padilha Feltrin, Ph.D.

---

Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D.

---

Prof. Glauco Nery Taranto, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
ABRIL DE 2005

ARAUJO, LEANDRO RAMOS DE

Uma Contribuição ao Fluxo de Potência Ótimo Aplicado a Sistemas de Potência Trifásicos usando o Método dos Pontos Interiores [Rio de Janeiro] 2005

X, 285 p. 29,7 cm, (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Elétrica, 2005)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Fluxo de Potência Trifásico
2. Equações de Injeção de Corrente
3. Sistemas Elétricos Trifásicos
4. Otimização de Sistemas Elétricos
5. Método dos Pontos Interiores

I. COPPE/UFRJ    II. Título (Série)

Aos meus pais, Getúlio e Delimar,  
a meus avós, Mario e Delizeth,  
a minha esposa, Débora,  
aos padrinhos, Nelson e Martha,  
ao meu irmão, Guilherme.

## AGRADECIMENTOS

Aos orientadores Sandoval Carneiro Jr. e José Luiz Rezende Pereira pela orientação, dedicação, incentivo e colaboração na realização deste trabalho.

A minha esposa Débora Rosana Ribeiro Penido Araujo, pelo amor, pela constante e inestimável ajuda, por todos os conhecimentos que me foram transmitidos, pelo grande apoio, paciência e dedicação.

Aos professores Paulo Augusto Nepomuceno Garcia, Edimar José de Oliveira e Márcio de Pinho Vinagre dirijo meus agradecimentos por seus comentários, sugestões e discussões técnicas que permitiram um melhor aprimoramento do trabalho.

Ao LABSPOT – Laboratório de Sistemas de Potência da Universidade Federal de Juiz de Fora, pela disponibilidade de utilização de recursos computacionais.

Aos companheiros do CEPEL e da pós-graduação pela amizade e apoio ao desenvolvimento deste trabalho. Aos amigos do Counter Strike pelos momentos de diversão.

Ao corpo docente da COPPE/UFRJ e da Faculdade de Engenharia/UFJF, pela dedicação na transferência dos conhecimentos.

Aos meus amigos e familiares, pelo apoio e incentivo durante toda a realização do curso.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UMA CONTRIBUIÇÃO AO FLUXO DE POTENCIA OTIMO APLICADO A  
SISTEMAS DE POTENCIA TRIFASICOS USANDO O METODO DOS PONTOS  
INTERIORES

Leandro Ramos de Araujo

Abril / 2005

Orientadores: Sandoval Carneiro Júnior

José Luiz Rezende Pereira

Programa: Engenharia Elétrica

Este trabalho propõe o desenvolvimento de modelos e métodos numéricos para a solução do problema de fluxo de potência ótimo (FPO). A primeira etapa consiste no FPO monofásico, utilizando o método de injeção de correntes em coordenadas retangulares baseado na técnica de pontos interiores primal-dual. Para realizar comparações foi implementado também um FPO convencional.

Em seguida, foi desenvolvida e implementada uma formulação trifásica do problema do FPO também utilizando o método primal-dual dos pontos interiores e injeções de correntes trifásicas em coordenadas retangulares, com o objetivo de analisar sistemas desbalanceados. A matriz Hessiana possui estrutura blocada, consistindo de sub-matrizes de dimensão 6x6, onde a maior parte dos elementos é nula ou possui valores constantes durante o processo de solução. Esta característica traz ganho computacional quando aplicada em sistemas trifásicos.

São propostas novas funções objetivo e restrições para análise mais completa de sistemas trifásicos desequilibrados.

Para o modelo computacional foram utilizados os conceitos de modelagem orientada a objetos e as implementações foram realizadas em C++.

Abstract of Thesis submitted to COPPE/UFRJ as partial fulfillment for the award of a Doctor of Science – D.Sc. Degree

A CONTRIBUTION TO OPTIMAL POWER FLOW ANALYSIS OF THREE-PHASE ELECTRICAL POWER SYSTEMS USING THE INTERIOR POINTS METHOD

Leandro Ramos de Araujo

April / 2005

Supervisors: Sandoval Carneiro Júnior  
José Luiz Rezende Pereira

Department: Electrical Engineering

This work proposes the development of models and numerical methods for optimal power flow analysis - FPO of electrical power systems. A single-phase FPO based in the current injection equations written in rectangular coordinates and using the primal-dual interior point method, was initially implemented. A conventional FPO was also programmed, to allow comparisons with the proposed methodology.

In a second step, the proposed approach was extended for three-phase representation, to allow the study of unbalanced systems. In this step, the 6x6 block structure of the Hessian matrix was exploited, as well as the property that most elements of this matrix are either null or remain constant during the iterative process. It is demonstrated that the efficiency of the computational algorithm can be greatly improved if such characteristics are correctly exploited.

The FPO implementation includes new objective functions and restrictions to allow a more complete analysis of three-phase unbalanced power systems.

The proposed algorithms have been implemented using the concepts of object-oriented programming using C++.

# SUMÁRIO

<b>Capítulo 1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Considerações Iniciais .....</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>Revisão Bibliográfica .....</b>	<b>4</b>
1.2.1	Otimização de Sistemas Elétricos.....	4
1.2.2	Fluxo de Potência Trifásico .....	7
<b>1.3</b>	<b>Organização do Texto.....</b>	<b>11</b>
<b>1.4</b>	<b>Publicações Decorrentes Deste Trabalho.....</b>	<b>12</b>
<b>1.5</b>	<b>Convenções e Nomenclaturas Utilizadas .....</b>	<b>14</b>
<b>Capítulo 2</b>	<b>Fluxo de Potência Ótimo Monofásico .....</b>	<b>19</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Desenvolvimento Matemático Orientado a Objetos .....</b>	<b>19</b>
2.2.1	Modelagem Convencional .....	20
2.2.2	Modelagem Orientada a Objetos .....	21
<b>2.3</b>	<b>Algoritmo do FPO.....</b>	<b>22</b>
<b>2.4</b>	<b>Equacionamento de Componentes e Restrições de Rede .....</b>	<b>24</b>
2.4.1	Elementos RLC em Derivação .....	27
2.4.1.1	Contribuição dos elementos RLC em derivação para a função Lagrangeana .....	28
2.4.1.2	Contribuições dos elementos RLC em derivação para o vetor independente.....	29
2.4.1.3	Contribuições dos elementos RLC em derivação para a matriz Hessiana.....	29
2.4.2	Elementos RLC em Série .....	30
2.4.2.1	Contribuição dos elementos RLC em série para a função Lagrangeana .....	31
2.4.2.2	Contribuições dos elementos RLC em série para o vetor independente .....	31
2.4.2.3	Contribuições dos elementos RLC em série para a matriz Hessiana.....	33
2.4.3	Linhas de Transmissão .....	33
2.4.3.1	Contribuição das linhas de transmissão para a função Lagrangeana.....	35
2.4.3.2	Contribuições das linhas de transmissão para o vetor independente.....	35
2.4.3.3	Contribuições das linhas de transmissão para a matriz Hessiana.....	37
2.4.4	Transformadores de TAPE Variável.....	37
2.4.4.1	Contribuição dos transformadores de tape variável para a função Lagrangeana .....	39
2.4.4.2	Contribuições dos transformadores de tape variável para o vetor independente.....	40
2.4.4.3	Contribuições dos transformadores de tape variável para a matriz Hessiana.....	41
2.4.5	Cargas.....	42
2.4.5.1	Contribuição das cargas para a função Lagrangeana .....	44
2.4.5.2	Contribuições das cargas para o vetor independente.....	44
2.4.5.3	Contribuições das cargas para a matriz Hessiana.....	45
2.4.6	Máquinas .....	47
2.4.6.1	Contribuição das máquinas para a função Lagrangeana .....	48
2.4.6.2	Contribuições das máquinas para o vetor independente.....	49
2.4.6.3	Contribuições das máquinas para a matriz Hessiana.....	49
<b>2.5</b>	<b>Equacionamento das Restrições de Canalização .....</b>	<b>51</b>
2.5.1	Restrições de Potências Geradas .....	51
2.5.2	Restrições de Tapes de Transformadores .....	53
2.5.3	Forma Genérica para Representação das Restrições de Canalização .....	53
<b>2.6</b>	<b>Equacionamento de Restrições Funcionais .....</b>	<b>53</b>
2.6.1	Restrição de Tensão Nodal .....	54
2.6.2	Restrição de Fluxo de Potência Ativa em Circuitos .....	56
2.6.3	Forma Genérica para Representação de Restrições Funcionais.....	58
<b>2.7</b>	<b>Funções Objetivo.....</b>	<b>58</b>

2.7.1	Mínimo Custo de Geração de Potência Ativa.....	58
2.7.2	Mínimo Custo de Geração de Potência Reativa .....	59
2.7.3	Mínima Perda Ativa.....	60
<b>2.8</b>	<b>Passos Primais e Duais e Atualização de Variáveis .....</b>	<b>61</b>
<b>2.9</b>	<b>Resultados e Comparações.....</b>	<b>63</b>
2.9.1	Aspectos Computacionais.....	63
2.9.2	Sistema Teste IEEE 118 .....	64
2.9.2.1	Evolução do Parâmetro Barreira .....	65
2.9.2.2	Tempos Computacionais.....	66
2.9.3	Sistema Sul-Sudeste 730 Barras .....	66
<b>Capítulo 3</b>	<b><i>Injeções de Correntes Trifásicas .....</i></b>	<b>68</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>68</b>
<b>3.2</b>	<b>Metodologia para a Solução dos Sistemas de Equações Lineares por Newton-Rapshon .....</b>	<b>68</b>
<b>3.3</b>	<b>Modelagem do Fluxo de Potência e do Fluxo de Potência Ótimo Trifásico Baseado nas Equações do MICT .....</b>	<b>69</b>
3.3.1	Elementos RLC em Derivação .....	70
3.3.2	Equações dos Elementos RLC em Série .....	77
3.3.3	Linhas de Transmissão .....	81
3.3.4	Transformadores.....	93
3.3.4.1	Tipos de Conexões .....	95
3.3.5	Reguladores de Tensão .....	101
3.3.6	Compensações Série.....	111
3.3.6.1	Compensação Série Controlando Tensões Nodais.....	112
3.3.6.2	Compensação Série Controlando Correntes em Ramos.....	114
3.3.7	Cargas (Modelo ZIP).....	120
3.3.8	Máquinas .....	132
<b>3.4</b>	<b>Algoritmo Para Solução do Fluxo de Potência (MICT) .....</b>	<b>137</b>
<b>3.5</b>	<b>Fluxo de Potência Ótimo Trifásico – Restrições .....</b>	<b>137</b>
3.5.1	Restrições das Tensões e Ângulos em Barras.....	138
3.5.2	Restrição Angular na Barra de Referência Angular.....	139
3.5.3	Restrição de Mesmo Módulo de Tensão.....	141
3.5.4	Restrição de Mesma Geração de Potência.....	143
3.5.5	Restrição de Limite de Corrente em Circuitos.....	144
<b>3.6</b>	<b>Fluxo de Potência Ótimo Trifásico – Funções Objetivo .....</b>	<b>150</b>
3.6.1	Mínimo Custo de Geração Ativa .....	150
3.6.2	Mínimo Custo de Geração Reativa .....	152
3.6.3	Mínimo Custo de Alocação de Potência Reativa.....	153
3.6.4	Mínimas Perdas .....	154
3.6.5	Mínimo Corte de Carga .....	156
3.6.6	Mínimo Desvio do Ponto de Operação.....	158
<b>3.7</b>	<b>Passos Primais e Duais e Atualização de Variáveis .....</b>	<b>160</b>
<b>3.8</b>	<b>Algoritmo Para Solução do Fluxo de Potência Ótimo .....</b>	<b>161</b>
<b>Capítulo 4</b>	<b><i>Resultados .....</i></b>	<b>164</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>164</b>
<b>4.2</b>	<b>Sistema Teste IEEE4 .....</b>	<b>164</b>
4.2.1	Otimização das Perdas – Regulação da Subestação.....	166
4.2.2	Otimização das Perdas – Imposição de Limites de Tensão .....	167
4.2.3	Otimização das Perdas – Desconsiderando-se Custo dos Capacitores .....	168
4.2.4	Otimização das Perdas – Desconsiderando-se Custo dos Capacitores e com Alocação Equilibrada.....	169

4.2.5	Testes com Transformadores Trifásicos com Núcleo Único .....	170
4.2.6	Testes com Bancos Trifásicos Formados por Transformadores Distintos .....	170
4.2.7	Testes com Transformadores Não-Ideais .....	170
4.2.8	Importância da Correta Representação de Transformadores em Sistemas Desequilibrados 172	
<b>4.3</b>	<b>Sistema Teste IEEE13 .....</b>	<b>173</b>
<b>4.4</b>	<b>Sistema Teste IEEE14 .....</b>	<b>175</b>
4.4.1	Comparação da Formulação Trifásica Equilibrada com um Equivalente Monofásico .....	176
4.4.2	Comparação da Formulação Trifásica Desequilibrada com um Equivalente Monofásico .....	178
4.4.3	Análise de Contingências .....	180
<b>4.5</b>	<b>Sistema Teste IEEE14 - Modificado.....</b>	<b>182</b>
<b>4.6</b>	<b>Sistema Teste IEEE34 .....</b>	<b>183</b>
<b>4.7</b>	<b>Sistema Teste IEEE37 .....</b>	<b>185</b>
<b>4.8</b>	<b>Sistema Teste CMG – 15000 Barras.....</b>	<b>187</b>
<b>Capítulo 5</b>	<b>Modelagem Computacional .....</b>	<b>189</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>189</b>
<b>5.2</b>	<b>Classes Auxiliares .....</b>	<b>191</b>
5.2.1	Classe Complexo .....	191
5.2.2	Classe Matriz .....	193
5.2.3	Classe Transferencia.....	194
5.2.4	Classe SistemaLinear.....	196
<b>5.3</b>	<b>Modelagem dos Componentes do Sistema Elétrico .....</b>	<b>198</b>
5.3.1	Nível Programa.....	198
5.3.1.1	Classe CDadosGerais.....	198
5.3.1.2	Classe CDicionario .....	200
5.3.1.3	Classe CComponente .....	201
5.3.2	Nível Conexão .....	203
5.3.2.1	Classe CElemento .....	203
5.3.2.2	Classe CBarra.....	204
5.3.2.3	Classe CChave .....	206
5.3.3	Nível Dados .....	207
5.3.3.1	CLinha.....	207
5.3.3.2	CCarga .....	209
5.3.3.3	CRLC .....	210
5.3.3.4	CMaquina.....	211
5.3.3.5	CTrafo2 .....	211
5.3.3.6	CTrafo3 .....	213
5.3.3.7	CCER.....	214
5.3.3.8	CCSCT.....	215
5.3.3.9	CGenerico .....	215
5.3.3.10	CChaveSec.....	216
5.3.3.11	CDisjuntor.....	217
<b>5.4</b>	<b>Modelagem do Sistema Elétrico .....</b>	<b>218</b>
5.4.1	Funcionamento do Modelo Proposto .....	221
<b>5.5</b>	<b>Metodologias Implementadas .....</b>	<b>223</b>
5.5.1	Classe CMIC e CFP.....	224
5.5.2	Classe CMICO e CFPO .....	226
5.5.3	Classe CMICT e CFPT.....	228
5.5.4	Classe CMICTO e CFPTO .....	230
5.5.4.1	Fluxo de Dados dos Métodos de Otimização .....	232
5.5.5	Classe Harm.....	233
5.5.6	Classe CMICQ.....	233

5.6	Modelos de Componentes.....	233
<b>Capítulo 6</b>	<b>Conclusões .....</b>	<b>235</b>
6.1	Considerações Finais .....	235
6.2	Trabalhos Futuros .....	237
<b>Apêndice A</b>	<b>Modelagem Orientada a Objetos.....</b>	<b>238</b>
A.1	Introdução .....	238
A.2	Características da Tecnologia Baseada em Objetos .....	239
A.3	A Representação dos Modelos Utilizando UML .....	241
A.3.1	Diagramas de Classe.....	241
A.3.2	Diagramas de Interação entre Classes .....	242
<b>Apêndice B</b>	<b>Fluxo Ótimo e Método dos Pontos Interiores.....</b>	<b>246</b>
B.1	Introdução ao Fluxo Ótimo.....	246
B.2	Formulação do Problema.....	246
B.3	Formulação do Fluxo de Potência Ótimo .....	247
B.3.1	Variáveis do Fluxo de Potência Ótimo .....	247
B.3.2	Restrições de Igualdade .....	247
B.3.3	Restrições de Desigualdade .....	248
B.3.4	Função Objetivo .....	249
B.3.5	Função Lagrangeana.....	250
B.3.6	As Funções Penalidade.....	251
B.3.7	As Condições de Otimalidade .....	252
B.3.8	A Matriz Hessiana .....	253
B.4	Introdução ao Método dos Pontos Interiores .....	253
B.4.1	Solução das Equações Não-Lineares .....	255
B.4.2	Montagem do Sistema Linear Completo .....	255
B.4.3	Atualização das Variáveis.....	257
B.4.4	O Parâmetro de Perturbação $\mu$ .....	259
B.4.5	Algoritmo de Solução .....	260
<b>Apêndice C</b>	<b>FPOT – Potência em Coordenadas Polares .....</b>	<b>261</b>
C.1	Introdução .....	261
C.2	Linhas de Transmissão.....	261
C.3	Cargas .....	269
C.3.1	Consideração Sobre a Modelagem da Carga .....	269
C.4	Máquinas .....	273
C.5	Restrições de Tensões Nodais.....	275
C.6	Atualização das Variáveis Primais e Duais .....	276

## Capítulo 1 Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

O setor elétrico brasileiro e mundial vem passando por diversas transformações. A mudança do modelo de monopólio para o modelo competitivo impõe novas filosofias de operação e planejamento dos sistemas elétricos, envolvendo a geração, a transmissão e a distribuição. Além disto, em grande parte do sistema, o rápido aumento da demanda de energia tem obrigado os sistemas a operarem nos limites de suas capacidades, e por outro lado a tentativa de expansão enfrenta problemas de características ambientais, sociais e crises financeiras que reduzem os investimentos no setor.

Como alternativa à expansão pode-se atuar, por exemplo, na operação dos sistemas, redespachando geradores e/ou atuando na regulagem de equipamentos (controles), tendo como objetivos a diminuição das perdas, a minimização do custo de geração, o aumento da capacidade de transmissão do sistema, ou seja, a otimização de um ou mais índices de desempenho do sistema.

A principal ferramenta computacional utilizada para determinar o ponto de operação ótimo dos sistemas elétricos é denominada fluxo de potência ótimo (FPO). Atualmente existem diversas ferramentas computacionais para realizar a otimização das redes elétricas, mas a maioria delas apresenta duas características que podem ser problemáticas:

- Formulação monofásica equivalente
- Interface complexa

Em relação ao primeiro problema, apesar das ferramentas existentes utilizarem modelagem matemática adequada e geralmente convergirem para um ponto ótimo de operação do sistema, elas utilizam o modelo do sistema através de equivalente fase-terra ou fase-fase, acarretando vários erros ou falhas quando aplicadas a sistemas desequilibrados.

É sabido que as empresas de distribuição, cujos sistemas são os mais desequilibrados, procuram cada vez mais operar seus sistemas de forma otimizada, buscando a redução dos custos operacionais e perdas técnicas. Para tanto os sistemas de distribuição devem ser operados de forma interligada com os sistemas de

subtransmissão, propagando para estes, parte de seu desequilíbrio. Estes desequilíbrios e os acoplamentos devem ser corretamente representados para que os resultados das simulações correspondam mais aproximadamente à realidade. E os métodos de solução precisam viabilizar esta formulação trifásica desequilibrada.

O segundo problema consiste na interface com o usuário, especialmente com relação ao que deve ser otimizado e como se deve proceder no processo de otimização (variáveis a serem otimizadas), pois o resultado de um processo de otimização sinaliza, quase sempre, que o ponto de operação do sistema deve ser reajustado. Com isto, o ponto de operação do sistema pode ser, e geralmente é, diferente do ponto inicial, necessitando muitas vezes de vários ajustes. Então novos estudos devem ser realizados para cada novo ponto de operação. Estes estudos envolvem o dimensionamento de proteções, estabilidade eletromecânica, transitórios eletromagnéticos, desempenho harmônico etc. O processo de otimização normalmente não é simples, e se a interface com o usuário não for feita de forma clara os estudos podem ser dificultados.

Uma outra dificuldade relativa à interface surge do fato de que apesar de existirem diversas ferramentas computacionais para estudar os problemas acima citados, seus arquivos de entrada são muito específicos, por exemplo, um banco de dados de FPO não possui dados de relés de proteção. Desta forma um estudo completo da operação de sistemas é extremamente complicado e trabalhoso.

Para minimizar estes problemas, diversas estratégias podem ser empregadas, tais como, penalizar o desvio do ponto de operação, travar os controles de alguns equipamentos e outros artificios, de forma que somente alguns ajustes realmente necessários sejam efetuados durante o processo de otimização. Mas, para o usuário, realizar isto pode ser de grande complexidade quando as ferramentas atuais são utilizadas. O ideal seria que o usuário não precisasse ter conhecimento sobre a modelagem matemática de FPO para utilizar determinada ferramenta de otimização, ou seja, que não houvesse a necessidade do usuário ter conhecimento sobre: função Lagrangeana, parâmetro barreira, alfa primal e dual, etc., para realizar a otimização.

Para resolver todos os problemas citados, é de grande interesse uma aplicação computacional (*software*) capaz de representar sistemas trifásicos desequilibrados, com acoplamento entre fases, e ainda que utilize uma mesma base de dados para que os vários estudos possam ser feitos de forma mais adequada. Junto a isto é também desejável que o *software* tenha uma interface gráfica amigável com o usuário.

Na solução destes problemas os seguintes aspectos são considerados bastante relevantes:

- Tendo em vista que os sistemas elétricos são de grande porte, torna-se importante a utilização de técnicas de esparsidade para a solução de sistemas lineares.
- A modelagem deve contemplar os sistemas trifásicos desequilibrados.
- As matrizes Jacobiana (composta de derivadas de primeira ordem) e Hessiana (composta de derivadas de segunda ordem) devem possuir uma grande quantidade de termos nulos, uma vez que a ordem do sistema a ser resolvido é elevada.
- É necessário um algoritmo de otimização que apresente uma rápida e robusta convergência.
- Também é necessário um modelo computacional no qual a implementação de várias ferramentas em conjunto seja simples e de fácil manutenção.

Contribuindo para a realização da primeira característica descrita, em ARAUJO (2000) foi apresentada uma metodologia para solução de sistemas lineares esparsos de grande porte, que apresentou desempenhos adequados tanto para a etapa da ordenação, como para a solução de sistemas.

Com relação à segunda e a terceira características citadas, no método de injeção de correntes (COSTA et al., 1999), a matriz Jacobiana apresenta a maioria dos termos nulos ou constantes, sendo que apenas os termos da diagonal principal são atualizados, durante o processo iterativo. Com isto, a proposta para utilizar o método de injeção de corrente para a montagem da matriz Hessiana em metodologias de otimização merece ser investigado. O método de injeção de correntes para fluxo de potência está amplamente difundido na literatura, tanto em sua modelagem monofásica MIC (COSTA et al., 1999), quanto trifásica MICT (GARCIA et al., 2000 e GARCIA et al., 2001). Também o método convencional por equações polares (MONTICELLI, 1983) deve ser implementado para permitir comparação dos resultados.

KARMAKAR (1984) publicou um artigo no qual, o método de otimização apresentado raramente visita pontos extremos antes que seja encontrado o ponto ótimo, ou seja, o algoritmo acha soluções viáveis no interior do polígono, evitando desta forma a complexidade combinatória derivada dos vértices da solução. Devido ao procedimento

de solução proposto por Karmarkar, este método é chamado de “Método dos Pontos Interiores” (MPI), tem características esparsas, e vem sendo amplamente utilizado na literatura, atendendo à quarta característica.

Em NEYER E WU, (1990), ZHOU (1996), ESQUIVEL et. al. (1998), MANZONI et. al.(1998), AGOSTINI et. al. (2002), PENIDO et. al. (2004) e ARAUJO et. al. (2002) são apresentados modelos orientados a objetos com o objetivo de se obter códigos que possam ser reaproveitados e que sejam de simples manutenção, além de facilmente gerenciáveis. Mas estes modelos, quase que em sua totalidade, apresentam características visando apenas uma determinada aplicação, o que na maioria dos casos dificulta o desenvolvimento de novas aplicações. Uma modelagem simples porém robusta para várias ferramentas é desejada.

Observando os problemas atuais e as possíveis soluções descritas, nesta tese uma aplicação dos aspectos teóricos e práticos do Método de Pontos Interiores juntamente com o método de injeção de corrente serão propostos e avaliados como ferramentas de otimização de sistemas elétricos de potência. Será também desenvolvida uma ferramenta computacional com grande interatividade e uma base única de dados utilizando a modelagem orientada a objetos (MOO).

## **1.2 Revisão Bibliográfica**

Nesta subseção 1.2.1 será apresentada a revisão bibliográfica dos métodos de otimização de sistemas elétricos e na subseção 1.2.2 a revisão sobre fluxo de potência trifásico.

### **1.2.1 Otimização de Sistemas Elétricos**

A solução das equações do problema do fluxo de potência permite conhecer o estado atual do sistema e modelar situações futuras de forma relativamente simples. Entretanto, esta abordagem apresenta as seguintes limitações: a) necessidade da pré-especificação do valor de certas variáveis de controle, b) dificuldade na modelagem de restrições de desigualdade, c) dificuldade para modelar ações de controles simultâneos, e d) impossibilidade da associação de custo à operação dos sistemas elétricos de

potência (SEP). Para contemplar estas limitações utiliza-se uma ferramenta denominada Fluxo de Potência Ótimo (FPO).

A primeira formulação matemática de um FPO foi apresentada em 1962 em CARPENTIER (1962), onde o problema foi resolvido pela aplicação das condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (WRIGHT, 1997) e a utilização de um método do tipo relaxação. Esta formulação inicial era extremamente complexa, pouco eficiente e apresentava sérios problemas de convergência.

Nesta mesma década, em 1968 foi apresentado por DOMMEL e TINNEY (1968) um método de gradiente reduzido, onde as variáveis do problema são divididas em variáveis independentes que são as variáveis de controle (**u**) (gerações, tensões em barras de gerações, tapes, etc.) e as variáveis dependentes ou de estado (tensões em barras de carga e ângulos de tensões). As restrições funcionais e as restrições de canalização sobre as variáveis de estado são incluídas na função objetivo através de penalizações quadráticas externas. Este método apresentou problemas de oscilação em torno da solução ótima, além de uma sensibilidade excessiva do processo de convergência em relação ao passo do gradiente. Mas este método continua apresentando interesse do ponto de vista didático por sua formulação ser simples e o desenvolvimento intuitivo. Na década de 70, vários aperfeiçoamentos foram propostos para as formulações originais, mas nenhum avanço significativo foi alcançado quando se analisa os quesitos de robustez e velocidade computacional.

As maiores contribuições dos anos 70 consistiram em um aperfeiçoamento do método de DOMMEL e TINNEY (1968) utilizando o método de Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) (GILL et. al., 1981) ao invés do gradiente reduzido. A essência deste método está na transformação das desigualdades funcionais em restrições de igualdade, pela introdução de variáveis de folga e, quando uma variável dependente é violada, é automaticamente transformada em variável independente, e, ao mesmo tempo uma das variáveis independentes é transformada em variável dependente. As desvantagens deste método são: falta de critério para a troca entre variáveis dependentes e independentes e a necessidade de iniciar o processo iterativo com uma solução viável.

Métodos de otimização baseados em modelos lineares de SEP também foram publicados nos anos 70, destacam-se STOTT e HOBSON (1977) e STOTT e MARINO (1978), ambos utilizando técnicas de programação linear (PL) (WRIGHT, 1997).

Os métodos publicados nas décadas de 60 e 70 utilizavam modelos de primeira ordem. Uma contribuição desta época são os métodos baseados em programação linear

seqüencial que é utilizado até os dias atuais. Mas estas metodologias apresentavam muitas deficiências, estabelecendo a necessidade do desenvolvimento de métodos de segunda ordem que fossem capazes de resolver o problema de FPO de forma rápida e eficiente.

A década de 80 trouxe avanços consideráveis para problemas de FPO. Em BURCHETT (1982) foi apresentado um dos primeiros métodos de segunda ordem que obteve sucesso. Naquele trabalho foi utilizado o método do Lagrangeano Aumentado Projetado (LAP), onde a função objetivo é o Lagrangeano aumentado e as restrições são linearizadas. A principal desvantagem deste método foi que a matriz Hessiana se tornava extremamente densa.

Um aperfeiçoamento deste método foi proposto em BURCHETT (1984) onde se utilizou Programação Quadrática Seqüencial (PQS) (com aproximação quadrática da função objetivo e linearização das restrições). Nesta metodologia, o problema original era transformado em uma seqüência de problemas quadráticos.

Em SUN et. al., 1984, SUN et. al., 1987, TINNEY et al., 1987 foram propostos métodos de programação quadrática pelo método de Newton-Raphson com um cálculo exato da matriz Hessiana.

Em PEREIRA (1991) foi apresentada uma metodologia de PQS, na qual foram utilizadas técnicas de desacoplamento dos subproblemas de potência ativa e de potência reativa, além de técnicas eficientes para o tratamento de matrizes esparsas, com o objetivo de reduzir o custo computacional.

WU (1994), GRANVILLE (1994) e LATORRE (1995) modelaram o FPO utilizando o Método dos Pontos Interiores (MPI) publicado pela primeira vez em KARMARKAR (1984), alcançando bons resultados na otimização de Sistemas Elétricos de Potência (SEP).

CASTRONUOVO (2001) propôs uma metodologia para a vetorização de problemas de FPO. Esta metodologia apresentou bom desempenho em computadores com arquiteturas que utilizam processamento paralelo.

Um trabalho sobre o tratamento de variáveis discretas utilizando MPI foi publicado por LIU (2002), em que o método utilizado garante que o resultado final das variáveis sejam valores discretos, mas não garante o ótimo global.

Em SANTOS et. al (2003) foi proposto um método heurístico para resolver problemas não conexos; este método utiliza execuções sucessivas do MPI. Também é apresentado um tratamento para variáveis discretas.

## 1.2.2 Fluxo de Potência Trifásico

O fluxo de potência é a ferramenta mais utilizada em estudos dos sistemas elétricos de potência. Seus resultados e suas análises são aplicados no planejamento da expansão, na operação dos sistemas, na otimização dos sistemas elétricos, na análise de estabilidade, nos estudos de contingências, no controle e análise de sistemas em tempo real, em projetos de várias espécies. Constantemente são desenvolvidos e discutidos diversos algoritmos, utilizando as mais diversas metodologias.

Dentre os mais conhecidos, destacam-se os métodos de Newton-Raphson em coordenadas polares (TINNEY e HART, 1967; MONTICELLI, 1983) e o método Desacoplado Rápido (STOTT e ALSAC, 1974). A eficiência destes métodos na solução de sistemas de transmissão é indiscutível. Todavia, em sistemas de distribuição desequilibrados, as simplificações adotadas na modelagem dos sistemas (seqüência positiva) não permitem a obtenção de resultados realísticos. Além disso, para sistemas com relação R/X das linhas elevada, característica comum aos sistemas de distribuição, o método apresentado em STOTT e ALSAC (1974) apresenta dificuldade de convergência (ROYTELMAN, 1999).

Para solucionar o problema de representação de sistemas desequilibrados, adotou-se a formulação trifásica para o problema do fluxo de carga. Em WASLEY e SHLASH (1974) e BIRT, GRAFFY e MacDONALD (1976) foram apresentadas extensões trifásicas para os tradicionais métodos descritos em TINNEY e HART (1967) e STOTT e ALSAC (1967). Porém, os acoplamentos mútuos e a necessidade de constantes refatorações da matriz Jacobiana na forma trifásica, tornaram estes métodos extremamente complexos (ROYTELMAN, 1999).

Uma metodologia trifásica, específica para sistemas de distribuição, foi descrita em KERSTING e MENDIVE (1976). Nesta formulação, explora-se a característica radial dos sistemas de distribuição, sendo a solução do problema obtida adotando-se a teoria dos circuitos Ladder. Este método, o qual consiste em varreduras sucessivas do nó fonte em direção aos nós terminais e vice-versa, mostrou-se eficiente na solução de sistemas radiais sem a presença de derivações (ramos laterais). Contudo para sistemas com ramificações laterais, é necessária a realização de iterações auxiliares para cada um destes ramos.

Como os programas de fluxo de potência trifásico exigem grandes requisitos computacionais, diversos pesquisadores optaram por algoritmos que utilizam

modelagem de seqüência positiva. Assim sendo, em RAJICIC e BOSE (1988) apresentou-se um fluxo de carga desacoplado modificado, no qual se utilizam técnicas de compensação para solucionar os problemas causados por ramos onde a relação R/X é elevada.

Em SHIRMOHAMMADI (1988) foi proposto um método para solução de sistemas radiais e fracamente malhados. Neste método, o sistema é primeiramente convertido em um sistema estritamente radial, sendo em seguida aplicado um procedimento iterativo que consiste na aplicação direta das leis de Kirchhoff em dois passos. No primeiro passo, partindo dos nós terminais em direção ao nó fonte, calculam-se as correntes nos ramos (“Backward Sweep”). No segundo passo, partindo do nó fonte em direção aos nós terminais, calculam-se as tensões nodais (“Forward Sweep”).

Rotinas para solução do fluxo de potência em sistemas puramente radiais foram propostas em BARAN e WU (1989), CHIANG (1991) e CÉSPEDES (1990). Em BARAN e WU (1989), para cada ramo do sistema determina-se três equações fundamentais que representam a potência ativa, a potência reativa e o módulo da tensão, em seguida aplica-se o método de Newton-Raphson. Uma versão desacoplada para este método foi descrita em CHIANG (1991) e em CÉSPEDES (1990), onde fundamentado na pouca defasagem angular entre os nós adjacentes de um sistema de distribuição, os ângulos das tensões são praticamente desprezados, ou seja, considera-se somente o módulo da tensão.

Uma formulação semelhante ao método descrito em SHIRMOHAMMADI (1988) foi apresentada em LUO e SEMLYEN (1990). A maior contribuição desse método consiste na substituição da corrente complexa pelas potências ativa e reativa como variáveis. Também foi desenvolvida uma metodologia mais simples e adequada para a representação de barras do tipo PV.

Em CHEN et al. (1991) uma formulação Zbus, onde o método de Gauss é aplicado, foi descrita. Aplicando o princípio da superposição, considera-se neste caso que a tensão em cada barra é resultante de dois componentes: tensões especificadas para barras do tipo PV e injeções de correntes para barras do tipo PQ.

Em DAS et al. (1994, 1995), os módulos das tensões nodais são escritos em função do somatório das potências ativa e reativa das cargas e em função do somatório das perdas. Posteriormente, a partir do nó fonte em direção aos nós terminais (“Forward Sweep”), determina-se a solução do fluxo de carga.

Com o decorrer dos anos, devido ao grande desenvolvimento da informática, os engenheiros e pesquisadores voltaram a considerar as formulações trifásicas. Além disso, incorporaram novas funções, como análise em tempo real e estimação de estados, aos programas de fluxo de carga.

Uma análise multifásica dos métodos propostos em SHIRMOHAMMADI (1988) e LUO e SEMLYEN (1990), considerando análise em tempo real, foi apresentado em CHENG e SHIRMOHAMMADI (1995). Porém, como mostrado na discussão desse artigo, os algoritmos baseados na técnica de varredura tendem a divergir para sistemas que possuem malhas e barras do tipo PV.

Um algoritmo trifásico desacoplado, explorando a característica radial dos sistemas de distribuição, no qual um esquema de ordenação dos ramos laterais é aplicado visando a redução do número de equações é descrito em ZIMMERMAN (1995). Contudo, uma das deficiências deste trabalho consiste na representação de unidades de cogeração.

Em GARCIA e ZAGO (1996) apresentou-se uma nova formulação trifásica desacoplada baseada na teoria descrita em MONTICELLI et al. (1990). Nesse método, o cálculo das correções dos ângulos e das tensões (matrizes  $B'$  e  $B''$ ) se dá de forma diferenciada das demais formulações desacopladas, sendo a metodologia proposta mais eficiente.

Em ZHANG e CHENG (1995) a estrutura radial dos sistemas de distribuição é explorada e a matriz Jacobiana é expressa pelo produto  $UDU^t$ , onde U é uma matriz triangular superior constante e D uma matriz diagonal cujos elementos são atualizados a cada iteração.

Em MIU et al. (1997) as equações das perdas de potência, tensão e fluxo de corrente nos ramos são escritas de forma explícita. Posteriormente adota-se um procedimento tipo varredura para determinação da solução do fluxo de carga. Porém, como é comum em trabalhos que adotam esse tipo de procedimento, barras PV não são representadas.

Uma formulação trifásica onde a matriz Jacobiana é colocada na forma complexa é descrita em NGUYEN (1997). Contudo adota-se algumas simplificações, como por exemplo a variação da tensão, que é desconsiderada para o cálculo dos resíduos de potência complexos o que pode causar dificuldades na convergência.

Em EXPÓSITO e RAMOS (1999) as equações do fluxo de carga são escritas em função de novas variáveis que substituem os termos  $v_k^2$ ,  $v_k v_m \text{sen} \theta_{km}$  e  $v_k v_m \text{cos} \theta_{km}$  nas

expressões do fluxo de potência, onde  $v_k$ ,  $v_m$  e  $\theta_{km}$  são o módulo da tensão na barra  $k$ , o módulo da tensão na barra  $m$  e a defasagem angular entre as barras  $k$  e  $m$ , respectivamente. O sistema de equações resultante tem dimensão  $3n$  (formulação monofásica). Para sistemas equilibrados, boas características de convergência são obtidas.

Formulações que adotam o método de Newton-Raphson e são baseadas nas equações de injeção de corrente foram apresentadas em LIN et al. (1999) e MOON et al. (1999). Porém esses métodos não permitem a inclusão de barras do tipo PV e as simplificações adotadas não permitem a representação de equipamentos de controle.

Em GARCIA (2001) apresentou-se uma formulação baseada na metodologia proposta em COSTA et al. (1999), desenvolvida para sistemas em EAT e UAT. Na formulação proposta, as equações das correntes injetadas, em cada fase, são escritas em coordenadas retangulares o que resulta numa matriz Jacobiana formada por blocos ( $6 \times 6$ ) muito próxima da matriz admitância de barras, sendo a diferença determinada pelo modelo de carga adotado. A metodologia criada foi denominada fluxo de potência pelo método de injeção de correntes trifásico – MICT, que se mostrou 30% mais rápida que o método de Newton-Raphson convencional. Porém o referido método, em sua modelagem, utiliza uma consideração que é válida apenas para sistemas equilibrados ou solidamente aterrados em todas as barras: Considera as tensões de neutro sempre nulas em todas as barras do sistema. Sabe-se que esta consideração é incorreta para sistemas desequilibrados, uma vez que os mesmos possuem tensões de neutro diferentes de zero, exceto em neutros solidamente aterrados. Neste trabalho também foram encontradas deficiências na representação de transformadores e cargas em delta.

As características topológicas das redes de distribuição têm sido muito utilizadas para solução direta de fluxo de potência. Em TENG (2003) são desenvolvidas duas matrizes – “bus-injection to branch-current” e “branch-current to bus-voltage”, que são utilizadas para se obter soluções de fluxo de potência por meio de multiplicação simples de matrizes. Este método é utilizado apenas para sistemas com estrutura radial ou fracamente malhada, e assim, pode evitar o tempo consumido em fatoração LU ou na substituição forward/backward da matriz Jacobiana ou da matriz admitância de barras, requerida nos métodos tradicionais. Porém reduz a utilidade do algoritmo a apenas determinados sistemas, radiais ou fracamente malhados.

Existem diversas configurações para sistemas trifásicos. Em SHORT et al. (2002) é simulado e construído um sistema de distribuição a cinco condutores. Já em WARD et

al. (2003) é realizada uma análise de sistemas de distribuição a cinco condutores, comparando-se suas características com as dos sistemas a quatro condutores.

Em BIJWE e KELAPURE (2003) é apresentado um método de fluxo de potência não-divergente, onde se utiliza a matriz Jacobiana constante, nas versões acoplado e desacoplado rápido, utilizando multiplicadores ótimos aplicados ao ajuste dos passos de iteração. O método não trata sistemas trifásicos desequilibrados, e devido às suas características o processo converge em um número elevado de iterações.

Em CIRIC et al. (2003) é proposto um algoritmo de fluxo de potência para redes radiais de distribuição trifásicas, a quatro condutores, considerando aterramento de neutro, baseado na técnica forward-backward. Esta técnica pode ser classificada como um método de soma de correntes, método de soma de potência, e método de soma de admitâncias. Neste algoritmo, tanto o fio neutro, quanto a terra são explicitamente representados. Porém, este método não se comporta bem quando aplicado a sistemas reticulados: Apresenta dificuldade de convergência em alguns casos, especialmente para sistemas com relação R/X elevada, e não possibilita a correta representação de controles e de geração dispersa.

Em PENIDO (2004) foi apresentada uma formulação para o fluxo de potência para sistemas trifásicos a quatro condutores (três fases e o neutro), utilizando o método de Newton-Raphson para solucionar o conjunto de equações de injeção de corrente em coordenadas retangulares. O equacionamento proposto resulta em um sistema de equações não-lineares com dimensão  $8n$ , onde  $n$  é o número de barras do sistema. Também foram modelados os equipamentos com representação explícita de neutros e aterramentos. A metodologia proposta foi utilizada para análise de sistemas equilibrados ou desequilibrados, para sistemas radiais ou reticulados, com cargas ou ramais monofásicos, bifásicos e trifásicos, podendo ser utilizada em sistemas de transmissão, subtransmissão e distribuição, e para sistemas de grande porte.

### **1.3 Organização do Texto**

A tese está dividida em 6 capítulos, incluindo este capítulo de introdução, além de 3 apêndices, que serão resumidamente descritos a seguir.

No capítulo 2 será desenvolvida a modelagem de um fluxo de potência ótimo monofásico baseado no Método de Injeção de Correntes – MIC. Também será

apresentada uma comparação de resultados finais, trajetórias de convergência e tempo de processamento computacional frente a uma implementação do fluxo de potência ótimo monofásico com formulação polar. Os resultados são comparados com o FLUPOT.

O capítulo 3 apresenta a modelagem trifásica de equipamentos e a formulação do fluxo de potência ótimo utilizando o Método de Injeção de Correntes Trifásico (MICT) e o Método de Pontos Interiores (MPI). Também será apresentada uma nova formulação do fluxo de potência trifásico.

No capítulo 4 apresenta-se os resultados da metodologia proposta para a otimização de sistemas trifásicos radiais ou em anel.

As classes criadas para o desenvolvimento de uma plataforma de multiaplicativos serão descritas no capítulo 5. Estas classes foram projetadas para acomodar metodologias monofásicas, trifásicas e a quatro fios.

No capítulo 6 serão apresentadas as principais conclusões deste trabalho e sugestões de trabalhos futuros.

Visando uma apresentação mais didática deste trabalho, alguns conceitos importantes foram colocados nos apêndices.

No apêndice A serão apresentados conceitos de MOO e UML amplamente utilizados nesta tese. Este apêndice é fundamental para uma perfeita compreensão dos gráficos, fluxogramas e dos modelos utilizados.

O apêndice B apresenta conceitos básicos de otimização matemática, aplicada os sistemas elétricos de potência e o método primal-dual de pontos interiores.

No apêndice C será apresentado sucintamente uma metodologia para otimização de sistemas elétricos trifásicos baseado nas equações de injeção de potência em coordenadas polares.

## **1.4 Publicações Decorrentes Deste Trabalho**

ARAUJO, L. R., PEREIRA, J. L. R., GARCIA, P. A. N., VINAGRE, M. P., 2002, “Modelagem Orientada a Objetos Aplicada na Solução de Programas De Distribuição”, *XIV Congresso Brasileiro de Automática, Natal, RN*, Brasil, Setembro.

PENIDO, D. R. R., ARAUJO, L. R., PEREIRA, J. L. R., GARCIA, P. A. N., CARNEIRO JR., S., 2004, “Fluxo de Potência a Quatro Condutores Baseado no

Método de Injeção de Correntes”, *XV Congresso Brasileiro de Automática, Gramado, RS, Brasil, Setembro.*

PENIDO, D. R. R., ARAUJO, L. R., PEREIRA, J. L. R., GARCIA, P. A. N., CARNEIRO JR., S., 2004, “Four Wire Newton-Rapshon Power Flow Based on the Current Injection Method”, *Power Systems Conference & Exposition*, Nova York, Estados Unidos, Outubro.

GOMES, F. V. R., PEREIRA, J. L. R., CARNEIRO JR., S., GARCIA, P. A. N., ARAUJO, L. R., 2004, “Reconfiguração de Sistemas de Distribuição Visando Minimização de Perdas Utilizando-se uma Nova Metodologia Heurística”, *XVI SENDI - Seminário Nacional de Distribuição de Energia Elétrica*, Brasília, Brasil, Novembro.

GOMES, F. V., PEREIRA, J. L. R., CARNEIRO JR., S., GARCIA, P. A. N., ARAUJO, L. R., 2004, “Metodologia Heurística para Reconfiguração de Sistemas de Distribuição”, *XV Congresso Brasileiro de Automática, Gramado, RS, Brasil, Setembro.*

BORGES, T. T., PEREIRA, J. L. R., GARCIA, P. A. N., ARAUJO, L. R., VINAGRE, M. P., 2003, “Ambiente Gráfico para Análise de Fluxo de Potência Trifásico Utilizando OpenGL”, *I Semana de Potência, Automação e Controle*, Juiz de Fora, MG, Outubro.

ARAUJO, L. R., BORGES, T. T., PEREIRA, J. L. R., GARCIA, P. A. N., VINAGRE, M. P., “Análise de Sistemas de Distribuição Utilizando Modelagem Orientada a Objetos”, *I Semana de Potência, Automação e Controle*, Juiz de Fora, MG, Outubro.

GOMES, F. V., PEREIRA, J. L. R., CARNEIRO JR., S., GARCIA, P. A. N., ARAUJO, L. R., “A New Heuristic Reconfiguration Algorithm for Large Distribution Systems”, aprovado em Janeiro de 2005 para publicação no *IEEE Transaction on Power System*.

ARAUJO, L. R., VARRICCHIO, S. L., GOMES JR., S., “Análise Trifásica Harmônica em Sistemas Desequilibrados” aceito em 2005 para o *VI SBQEE*

## 1.5 Convenções e Nomenclaturas Utilizadas

Neste item são apresentadas algumas das convenções e nomenclaturas utilizadas nesta tese, com o objetivo de tornar mais fácil a leitura do trabalho e evitar possíveis interpretações errôneas do texto.

Na Tabela 1.1 é apresentada a convenção utilizada para distinção dos tipos de variáveis utilizadas:

**Tabela 1.1 – Convenções adotadas para escrita de variáveis**

Tipo da variável	Tipo de escrita	Exemplo
Escalar Real	Minúscula em itálico	$x$
Escalar Complexo	Maiúscula em itálico	$X$
Vetor	Minúscula em negrito	$\mathbf{x}$
Matriz	Maiúscula em negrito	$\mathbf{X}$

Todos os vetores são considerados como vetores colunas. Um vetor linha é representado pelo transposto de um vetor coluna (Exemplo  $\mathbf{c}'$ ).

Na tabela a seguir apresenta-se os símbolos utilizados para designar funções ou operações, com seus respectivos significados.

**Tabela 1.2 – Convenções adotadas para funções e operações**

Símbolo	Exemplo	Significado
<i>t</i> sobrescrito em itálico	$\mathbf{A}^t$	Matriz transposta de $\mathbf{A}$
* sobrescrito	$X^*$	Conjugado do complexo $X$
u.m.	10 u.m	Unidades Monetárias
abs()	abs( $X$ )	Valor absoluto (módulo) do complexo $X$
	$ X $	Valor absoluto (módulo) do complexo $X$
arg()	arg( $X$ )	Argumento (ângulo) em radianos do complexo $X$ .
“Re” subscrito	$X_{\text{Re}}$	Parte real do complexo $X$
$\Re( )$	$\Re(X)$	Parte real do complexo $X$
“Im” subscrito	$X_{\text{Im}}$	Parte imaginária do complexo $X$
$\Im( )$	$\Im(X)$	Parte imaginária do complexo $X$
“s” sobrescrito	$V^s$	Variável de fase, $s=\{a,b,c\}$
“t” sobrescrito	$V^t$	Variável de fase, $t=\{a,b,c\}$
“~” acima	$\tilde{X}_{\text{Re}}$	Derivada da função Lagrangeana em relação a variável $\tilde{X}_{\text{Re}} = \frac{\partial L}{\partial X_{\text{Re}}}$

A seguir são mostrados os símbolos mais freqüentes utilizados para designar variáveis, grandezas ou entidades matemáticas.

**Tabela 1.3 – Convenções adotadas para funções e operações**

Símbolo	Exemplo	Significado
<b>0</b>	<b>0</b>	Matriz ou vetor nulo
<i>a</i>	<i>a</i>	Complexo $e^{j\frac{2\pi}{3}}$
<i>j</i>	<i>j</i>	Complexo unitário, igual a uma das raízes quadradas de -1 (a raiz positiva), ou seja, $j = +\sqrt{-1}$
C	C	Capacitância
L	L	Indutância
R, <i>r</i>	R, <i>r</i>	Resistência
<i>x</i>	<i>x</i>	Reatância
<i>z</i>	<i>z</i>	Impedância ( $z=r+jx$ )
<i>g</i>	<i>g</i>	Condutância
<i>b</i>	<i>b</i>	Susceptância
<i>y</i>	<i>y</i>	Admitância ( $y=g+jb$ )
<i>v</i>	<i>v</i>	Módulo da tensão
<i>i</i>	<i>i</i>	Módulo da corrente
$\theta$	$\theta$	Ângulo em radianos
<i>V</i>	<i>V</i>	Tensão complexa $V = ve^{j\theta}$
<i>I</i>	<i>I</i>	Corrente complexa $I = ie^{j\theta}$
<i>P</i>	<i>P</i>	Potência Ativa
<i>Q</i>	<i>Q</i>	Potência Reativa
<i>S</i>	<i>S</i>	Potência Aparente ( $S=P+jQ$ )
$\Delta$	$\Delta x$	Pequeno desvio de uma variável em relação ao valor de regime permanente
<b>J</b>	<b>J</b>	Matriz Jacobiana
<b>H</b>	<b>H</b>	Matriz Hessiana
<i>L</i>	<i>L</i>	Função Lagrangeana

As derivadas de funções complexas em relação aos parâmetros reais  $\mathbf{x}$  podem ser calculadas diretamente utilizando-se as seguintes propriedades (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Re[f]}{\partial x_1} &= \Re \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] & \frac{\partial \Im[f]}{\partial x_1} &= \Im \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \right] \\ \frac{\partial^2 \Re[f]}{\partial x_1 \partial x_2} &= \Re \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right] & \frac{\partial^2 \Im[f]}{\partial x_1 \partial x_2} &= \Im \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

Seja  $\mathbf{A}$  uma matriz ou vetor de funções, como apresentado em (1.2):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & & f_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \\ f_{m,1} & f_{m,2} & & f_{m,n} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

As derivadas matriciais de primeira ordem em relação a uma variável  $x_1$  são dadas por (1.3):

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_1} = \mathbf{A}'_{x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1,2}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{1,n}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_{2,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{2,2}}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_{2,n}}{\partial x_1} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_{m,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{m,2}}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_{m,n}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

As derivadas matriciais de segunda ordem em relação ao par de variáveis  $(x_1, x_2)$  são dadas por (1.4):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x_1 \partial x_2} = \mathbf{A}''_{x_1, x_2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_{1,2}}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_{1,n}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_{2,2}}{\partial x_1 \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f_{2,n}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f_{m,1}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f_{m,2}}{\partial x_1 \partial x_2} & & \frac{\partial^2 f_{m,n}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

As funções  $\Re(\cdot)$  e  $\Im(\cdot)$  matriciais são definidas por (1.5)

$$\Re(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \Re(f_{1,1}) & \Re(f_{1,2}) & \cdots & \Re(f_{1,n}) \\ \Re(f_{2,1}) & \Re(f_{2,2}) & & \Re(f_{2,n}) \\ \vdots & & \ddots & \\ \Re(f_{m,1}) & \Re(f_{m,2}) & & \Re(f_{m,n}) \end{bmatrix}$$

$$\Im(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \Im(f_{1,1}) & \Im(f_{1,2}) & \cdots & \Im(f_{1,n}) \\ \Im(f_{2,1}) & \Im(f_{2,2}) & & \Im(f_{2,n}) \\ \vdots & & \ddots & \\ \Im(f_{m,1}) & \Im(f_{m,2}) & & \Im(f_{m,n}) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Também é definido que a diferenciação de uma função complexa conjugada em relação a uma variável real é igual ao valor conjugado da diferenciação da função complexa em relação a variável real, conforme apresentado em (1.6).

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)^*}{\partial x_1} = \left( \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right)^* \quad (1.6)$$

## Capítulo 2 Fluxo de Potência Ótimo Monofásico

### 2.1 Introdução

Existem diversos pontos factíveis para um correto funcionamento de um sistema elétrico de potência (SEP), mas alguns pontos de operação são mais vantajosos do que outros dependendo dos aspectos avaliados. Como exemplo, para se diminuir as perdas do sistema pode-se distribuir a geração uniformemente pelos geradores do sistema; por outro lado para minimizar o custo da geração, é vantagem que esta distribuição deixe de ser uniforme e passe a se concentrar nos geradores de menor custo.

Para resolver este problema é comumente utilizado o fluxo de potência ótimo (FPO) onde, por meio de uma função objetivo, procura-se encontrar um ponto ótimo de funcionamento para satisfazer um ou mais objetivos, estando o sistema sujeito às restrições físicas, funcionais, de confiabilidade, etc.

Em COSTA (1999), apresentou-se uma formulação para o cálculo do fluxo de potência baseado em equações de injeção de corrente (MIC). Esta formulação mostrou-se mais rápida que o método de Newton-Raphson convencional em coordenadas polares, o que pode ser atribuído à estrutura da matriz Jacobiana na metodologia de injeção de corrente ser muito próxima da matriz admitância de barras, onde a maioria dos elementos são nulos ou constantes durante o processo iterativo.

Analisando-se estas características e sabendo-se que o problema de FPO apresenta geralmente um número elevado de iterações, e que as dimensões das matrizes envolvidas são da ordem de 4 a 6 vezes o número de barras do sistema, vislumbrou-se a aplicação da metodologia do MIC ao problema de FPO. Portanto, neste capítulo apresenta-se a formulação do problema de FPO utilizando-se o método de injeção de correntes.

### 2.2 Desenvolvimento Matemático Orientado a Objetos

Foi desenvolvido um modelo matemático que será apresentado neste capítulo, o qual é modelado a objetos, produzindo entendimento mais simples e tornando as equações menos complexas quando implementadas através desta metodologia.

Para ilustrar o procedimento da modelagem desenvolvida neste trabalho, suponha que seja necessário montar a matriz de admitância nodal ( $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ ) do sistema apresentado na Figura 2. 1. Esta montagem será apresentada a seguir tanto pelo método convencional, quanto pela metodologia desenvolvida.

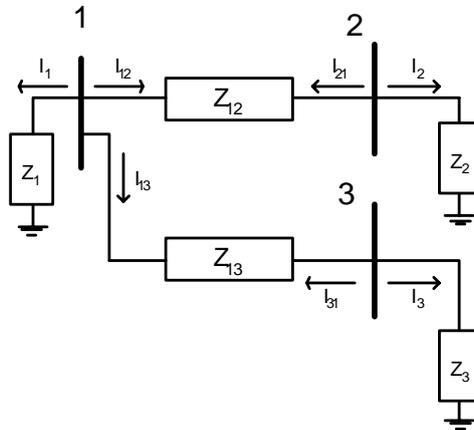


Figura 2. 1 – Sistema 3 barras genérico

## 2.2.1 Modelagem Convencional

Na modelagem convencional, as equações de injeção de corrente na barra  $k$  podem ser obtidas aplicando-se a Primeira Lei de Kirchoff à Figura 2. 1, logo:

$$\begin{aligned} I_{B1} &= I_1 + I_{12} + I_{13} \\ I_{B2} &= I_2 + I_{21} \\ I_{B3} &= I_3 + I_{31} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Generalizando:

$$I_{Bk} = I_k + \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} \quad (2.2)$$

Onde  $\Omega_k$  é o conjunto de todas as barras diretamente conectadas à barra  $k$ .

Sendo,  $\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v}$ , a equação (2. 2) pode ser escrita como:

$$I_{Bk} = Y_k V_k + \sum_{m \in \Omega_k} Y_{km} (V_k - V_m) \quad (2.3)$$

Escrevendo em forma matricial a equação (2. 3) para o circuito apresentado na Figura 2. 1, encontra-se (2. 4) como matriz admitância nodal do sistema:

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_{12} + Y_{13} & -Y_{12} & -Y_{13} \\ -Y_{21} & Y_2 + Y_{21} & 0 \\ -Y_{31} & 0 & Y_3 + Y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Este modo de apresentação é prático apenas para formulações simples. Nos casos em que os valores  $Y$  são difíceis de serem calculados, ou seja, quando é necessário o cálculo de derivadas de ordens superiores, esta notação torna-se confusa e de difícil entendimento, especialmente em formulações trifásicas.

### 2.2.2 Modelagem Orientada a Objetos

Para contornar estas dificuldades foi desenvolvido um método, orientado a objetos, onde cada componente (objeto) dá uma contribuição individual, de modo que quando todas as contribuições são somadas, os vetores ou matrizes representativas do problema em questão são obtidos de forma automática.

Para apresentação da metodologia desenvolvida e utilizada nesta tese, e sua comparação com a modelagem convencional, será utilizado o circuito da Figura 2. 1 para a montagem da matriz  $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ , onde cada elemento contribuirá de forma independente para a montagem da matriz.

As contribuições para a montagem da matriz  $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$  ( $\mathbf{i} = \mathbf{Y}\mathbf{v}$ ) são as seguintes:

**Elementos série:**

$$\mathbf{Y}_{km} = \begin{matrix} & & k & & m & & \\ & & & & & & \\ k & & & & & & \\ & & & & & & \\ m & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ & y & \cdots & -y & & & \\ & \vdots & & \vdots & & & \\ & -y & \cdots & y & & & \\ & & & & & & \ddots \\ \ddots & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Em uma forma compacta:

$$\begin{matrix} & k & m \\ k & \left[ \begin{array}{cc} y & -y \end{array} \right] \\ m & \left[ \begin{array}{cc} -y & y \end{array} \right] \end{matrix} \quad (2.6)$$

Onde  $y$  é o valor da admitância do elemento série conectado entre as barras  $k$  e  $m$  em questão e os pares  $(k, m)$  representam as posições onde devem ser inseridos os valores, no caso presente os valores assumidos para os pares são (1,2) e (1,3).

**Elementos em derivação:**

$$\mathbf{Y}_{km} = \begin{matrix} & k \\ k & \left[ \begin{array}{cc} \ddots & \ddots \\ & y \\ \ddots & \ddots \end{array} \right] \end{matrix} \quad (2.7)$$

Em uma forma compacta:

$$\begin{matrix} & k \\ k & [y] \end{matrix} \quad (2.8)$$

Onde  $y$  é o valor da admitância do elemento em derivação conectado na barra  $k$ , e neste caso  $k$  assume os valores 1, 2 e 3.

Fazendo-se o somatório das contribuições de todos os elementos (objetos) chega-se também à forma matricial apresentada na equação (2. 4).

Como se pode observar acima, a contribuição de cada elemento da rede elétrica pode ser representada na forma individualizada, o que facilita tanto a determinação da matriz  $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ , como a determinação das matrizes Jacobiana e Hessiana.

### 2.3 Algoritmo do FPO

No apêndice B são apresentados os conceitos básicos de otimização matemática e a utilização do método primal-dual de pontos interiores para o problema do fluxo de potência ótimo. Aqui o algoritmo será apresentado resumidamente.

O problema de otimização consiste na resolução das equações degeneradas de Karush Kuhn Tucker (KKT), onde o parâmetro barreira  $\mu$  deve ser atualizado a cada

iteração de modo que no ponto ótimo  $\mu \rightarrow 0$ . Este problema de otimização é representado pelo conjunto de equações (2. 9).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } f(\mathbf{z}) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0 \\
 & \mathbf{h}(\mathbf{z}) \leq 0 \\
 & \mathbf{z}_{\min} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_{\max}
 \end{aligned}
 \quad \text{Sendo:} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}
 \tag{2. 9}$$

Após a montagem da função Lagrangeana e aplicação dos conceitos matemáticos de otimização (Apêndice B), o sistema resultante é linearizado e solucionado utilizando-se o método de Newton-Raphson. Este sistema é mostrado na equação (2. 10), onde  $\mathbf{b}(\mathbf{z})$  representa as equações de otimalidade.

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) \cdot \Delta \mathbf{z} = -\mathbf{b}(\mathbf{z})
 \tag{2. 10}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(\mathbf{z}) &= \nabla^2 f(\mathbf{z}) - \nabla^2 \boldsymbol{\lambda}' \mathbf{g}(\mathbf{z}) + \mathbf{s}_{low}^{-1} \boldsymbol{\pi}_{low} - \mathbf{s}_{up}^{-1} \boldsymbol{\pi}_{up} \\
 \mathbf{b}(\mathbf{z}) &= \nabla f(\mathbf{z}) - \nabla \boldsymbol{\lambda}' \mathbf{g}(\mathbf{z}) - \mu (\mathbf{s}_{low}^{-1} - \mathbf{s}_{up}^{-1})
 \end{aligned}
 \tag{2. 11}$$

Para o tratamento das restrições de desigualdade funcionais utiliza-se neste trabalho uma metodologia que consiste na transformação das desigualdades do tipo  $h(\mathbf{z}) \leq h_{\max}$  em restrições do tipo  $h_{\min} \leq h(\mathbf{z}) \leq h_{\max}$ .

Para tanto é criada uma variável auxiliar  $y$  de modo que:

$$\begin{aligned}
 y - h(\mathbf{z}) &= 0 && \text{Restrição de Igualdade} \\
 h_{\min} &\leq y \leq h_{\max} && \text{Restrição de Canalização}
 \end{aligned}$$

Ou seja, cada restrição funcional é transformada em uma restrição de igualdade e uma restrição de canalização, pois estas são facilmente implementadas computacionalmente.

As variáveis  $\mathbf{s}_{low}$ ,  $\boldsymbol{\pi}_{low}$ ,  $\mathbf{s}_{up}$ ,  $\boldsymbol{\pi}_{up}$  dizem respeito ao método dos pontos interiores.

Maiores detalhes sobre o Método de Pontos Interiores podem ser encontrados no Apêndice B.

O algoritmo de solução é apresentado a seguir:

1. Inicialização das variáveis primais e duais.
2. Montagem da função Lagrangeana.
3. Cálculo dos termos da matriz Hessiana e do vetor independente.
4. Resolução do sistema de equações.
5. Escolha dos passos primal e dual.
6. Atualização das variáveis do problema.
7. Atualização do parâmetro barreira.
8. Teste de otimalidade:

Se  $(\mu < \varepsilon, |\mathbf{g}(\mathbf{z})| < \varepsilon, \mathbf{z} < \varepsilon)$  PARE.  
 Senão VOLTE ao passo 2.

Na seção 2.4 serão apresentadas as formulações matemáticas para as restrições de igualdade referentes aos modelos dos componentes da rede, para a montagem da matriz Hessiana e do vetor independente. A função Lagrangeana também será apresentada.

As equações referentes às restrições de canalização das variáveis serão tratadas na seção 2.5, as restrições funcionais dos componentes na seção 2.6, e como proceder com funções objetivo na seção 2.7. A escolha dos passos primal e dual e por conseguinte a atualização das variáveis do problema será apresentada na seção 2.8.

Tanto a atualização do parâmetro barreira quanto as condições de otimalidade encontram-se apresentados no Apêndice B.

## 2.4 Equacionamento de Componentes e Restrições de Rede

A injeção de corrente em uma barra  $k$  qualquer do sistema é dada pelo somatório de todas as correntes injetadas pelos elementos conectados a esta barra, como pode ser observado na equação (2. 12).

$$I_k = I_{ger_k} - I_{crg_m} - \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} \quad (2. 12)$$

Onde:

$I_{ger_k}$  – Contribuições das máquinas conectadas a barra  $k$ .

$I_{crg_m}$  – Contribuições das cargas conectadas a barra  $k$ .

$\sum_{m \in \Omega_k} I_{km}$  – Contribuições das linhas conectadas a barra  $k$ .

Por ser esta uma equação complexa, pode-se separá-la em partes real e imaginária, obtendo-se (2. 13):

$$\begin{aligned} I_{\text{Re}_k} &= \Re \left( I_{\text{ger}_k} - I_{\text{crg}_k} - \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} \right) \\ I_{\text{Im}_k} &= \Im \left( I_{\text{ger}_k} - I_{\text{crg}_k} - \sum_{m \in \Omega_k} I_{km} \right) \end{aligned} \quad (2. 13)$$

Para inserir as equações (2. 13) na função Lagrangeana, é necessário pré-multiplicar as equações das correntes reais e imaginárias por multiplicadores de Lagrange, conforme apresentado no Apêndice B. Assim, a função Lagrangeana, aumentada das restrições dadas em (2. 13), é apresentada em (2. 14):

$$L(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}) - \sum_{n=1}^{n\text{Bar}} \lambda_{\text{Im}_n} I_{\text{Re}_n} - \sum_{n=1}^{n\text{Bar}} \lambda_{\text{Re}_n} I_{\text{Im}_n} \quad (2. 14)$$

Expandindo-se a equação (2. 14) encontra-se (2. 15).

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}) &= f(\mathbf{z}) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{n\text{Bar}} \left( \lambda_{\text{Im}_n} I_{\text{Re,ger}_n} - \lambda_{\text{Im}_n} I_{\text{Re,crg}_n} - \sum_{m \in \Omega_k} \lambda_{\text{Im}_n} I_{\text{Re}_{nm}} \right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{n\text{Bar}} \left( \lambda_{\text{Re}_n} I_{\text{Im,ger}_n} - \lambda_{\text{Re}_n} I_{\text{Im,crg}_n} - \sum_{m \in \Omega_k} \lambda_{\text{Re}_n} I_{\text{Im}_{nm}} \right) \end{aligned} \quad (2. 15)$$

Uma cuidadosa observação na equação (2. 15) mostra que as contribuições de cada elemento dependem apenas dos dados dele próprio e dos valores dos multiplicadores duais  $\lambda$  referentes às barras em que eles estão conectados. Este é o ponto de partida para a dedução dos elementos da matriz Hessiana e do vetor independente (condições de otimalidade).

O vetor  $\mathbf{z}$  de incógnitas é dado pela equação (2. 16), a forma geral da matriz Hessiana é apresentada na equação (2. 17), e do vetor independente é mostrada na equação (2. 18).

$$\mathbf{z} = \left[ \mathbf{V}_{\text{Re}}^t \quad \boldsymbol{\lambda}_{\text{Re}}^t \quad \mathbf{V}_{\text{Im}}^t \quad \boldsymbol{\lambda}_{\text{Im}}^t \quad \mathbf{u}^t \quad \mathbf{s}_{\text{low}}^t \quad \mathbf{s}_{\text{up}}^t \quad \boldsymbol{\pi}_{\text{low}}^t \quad \boldsymbol{\pi}_{\text{up}}^t \right]^t \quad (2.16)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \begin{matrix} & \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\text{Re}}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\text{Im}}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \mathbf{s}_{\text{low}}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \mathbf{s}_{\text{up}}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_{\text{low}}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_{\text{up}}}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}}{\partial \mathbf{z}} & & & & & & & & & \\ \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\text{Re}}}{\partial \mathbf{z}} & & & & & & & & & \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}}{\partial \mathbf{z}} & & & & & & & & & \\ \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\text{Im}}}{\partial \mathbf{z}} & & & & & & & & & \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} & & & & & & & & & \\ \frac{\partial \mathbf{s}_{\text{low}}}{\partial \mathbf{z}} & & & & & & & & & \\ \frac{\partial \mathbf{s}_{\text{up}}}{\partial \mathbf{z}} & & & & & & & & & \\ \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_{\text{low}}}{\partial \mathbf{z}} & & & & & & & & & \\ \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_{\text{up}}}{\partial \mathbf{z}} & & & & & & & & & \end{matrix} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\text{Re}}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{\text{Im}}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{s}_{\text{low}}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{s}_{\text{up}}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \boldsymbol{\pi}_{\text{low}}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \boldsymbol{\pi}_{\text{up}}} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

O vetor  $\mathbf{u}$  contém as variáveis de controle, como por exemplo as potências ativa e reativa nos geradores, os tapes dos transformadores, intercâmbios entre áreas e outros.

As formas reduzidas da matriz Hessiana e do vetor independente, obtidas manipulando-se as incógnitas  $\mathbf{s}_{\text{low}}, \boldsymbol{\pi}_{\text{low}}, \mathbf{s}_{\text{up}}, \boldsymbol{\pi}_{\text{up}}$  conforme B.4.2, são apresentadas nas equações (2. 19) e (2. 20).

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \begin{matrix} \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}} & \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}}{\partial \lambda_{\text{Re}}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}}}{\partial \lambda_{\text{Re}}} & \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}}{\partial \lambda_{\text{Re}}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}}}{\partial \lambda_{\text{Re}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Re}}} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}}{\partial \lambda_{\text{Im}}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}}}{\partial \lambda_{\text{Im}}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}}}{\partial \lambda_{\text{Im}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Im}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Im}}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Re}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Im}}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} \end{matrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}}} \\ \frac{\partial \lambda_{\text{Re}}}{\partial L(\mathbf{z})} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}}}{\partial L(\mathbf{z})} \\ \frac{\partial \lambda_{\text{Im}}}{\partial L(\mathbf{z})} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial L(\mathbf{z})} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Nas próximas seções serão apresentados modelos e as contribuições de diversos elementos da rede elétrica para a matriz Hessiana e para o vetor independente (condições de otimalidade).

### 2.4.1 Elementos RLC em Derivação

O uso de capacitores ou indutores em sistemas de transmissão está relacionado à manutenção dos níveis de tensões nodais ou com a energização de circuitos. Estes são modelados como reatância capacitiva ou indutiva conectadas nas barras do SEP, conforme modelo apresentado na Figura 2.1. Os elementos RLC também podem ser utilizados para a modelagem de filtros harmônicos (VARRICCHIO et al., 2003).

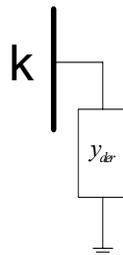


Figura 2.1 – Representação monofásica de elementos RLC em derivação

As correntes injetadas pelos elementos em derivação do sistema são apresentadas em (2. 21):

$$I_k = YV_k \quad (2. 21)$$

Considerando-se as condutâncias dos elementos RLC nulas e separando-se em partes real e imaginária, tem-se:

$$\begin{cases} I_{\text{Im}_k} = gV_{\text{Im}_k} + bV_{\text{Re}_k} \\ I_{\text{Re}_k} = -bV_{\text{Im}_k} + gV_{\text{Re}_k} \end{cases} \quad (2. 22)$$

Ou em forma matricial:

$$\mathbf{i}_k = \begin{bmatrix} I_{\text{Im}_k} \\ I_{\text{Re}_k} \end{bmatrix} \quad (2. 23)$$

#### 2.4.1.1 Contribuição dos elementos RLC em derivação para a função Lagrangeana

As equações de injeção de corrente destes elementos são inseridas na função lagrangeana multiplicando-se as mesmas pelas variáveis duais  $\lambda$  correspondentes, ou seja,  $L(\mathbf{z}) = \lambda^t \mathbf{i}_k$ , onde:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \end{bmatrix} \quad (2. 24)$$

O conjunto de variáveis  $\mathbf{z}$  relativas aos elementos RLC no vetor independente e na matriz Hessiana é dado por:

$$\mathbf{z}^t = [V_{\text{Re}_k} \quad \lambda_{\text{Re}_k} \quad V_{\text{Im}_k} \quad \lambda_{\text{Im}_k}] \quad (2. 25)$$

Explicitando a função Lagrangeana tem-se:

$$L(\mathbf{z}) = \lambda_{\text{Re}_k} I_{\text{Im}_k} + \lambda_{\text{Im}_k} I_{\text{Re}_k} \quad (2. 26)$$

### 2.4.1.2 Contribuições dos elementos RLC em derivação para o vetor independente

$$\mathbf{b}_{\text{der}} = \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Onde as derivadas parciais de  $\mathbf{b}_{\text{der}}$  são:

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} = b\lambda_{\text{Re}_k} + g\lambda_{\text{Im}_k} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} = I_{\text{Im}_k} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} = -b\lambda_{\text{Im}_k} + g\lambda_{\text{Re}_k} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} = I_{\text{Re}_k} \quad (2.31)$$

### 2.4.1.3 Contribuições dos elementos RLC em derivação para a matriz Hessiana

As contribuições dos elementos RLC em derivação para a matriz Hessiana são dadas por:

$$\mathbf{H}_{\text{der}} = \begin{matrix} & V_{\text{Re}_k} & \lambda_{\text{Re}_k} & V_{\text{Im}_k} & \lambda_{\text{Im}_k} \\ \begin{matrix} V_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Re}_k} \\ V_{\text{Im}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & \\ & b & & g \\ & b & & g \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & g & & -b \end{bmatrix} & & \end{matrix} \quad (2.32)$$

### 2.4.2 Elementos RLC em Série

A instalação de bancos de capacitores (indutores) nos sistemas de transmissão tem como objetivo aumentar a capacidade de transmissão de potência ativa e reduzir as oscilações provocadas por cargas muito variáveis. Este modelo pode ser adotado para linhas de transmissão curtas.

O modelo adotado neste trabalho é semelhante ao da linha de transmissão, mas a capacitância em derivação e a resistência série são desconsideradas. A Figura 2.2 ilustra o modelo deste dispositivo.

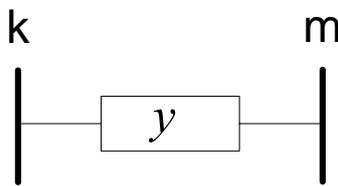


Figura 2.2 – Representação monofásica de elementos RLC em série

As contribuições de correntes injetadas por elementos conectados em série são dadas por:

$$\begin{aligned} I_k &= Y(V_k - V_m) \\ I_m &= Y(V_m - V_k) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Separando as equações anteriores nas partes real e imaginária, tem-se as equações (2.34) para a injeção de corrente na barra  $k$  e em (2.35) as equações de injeção de corrente na barra  $m$ . A forma matricial deste equacionamento é apresentada em (2.36).

$$\begin{cases} I_{\text{Im}_k} = b(V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m}) + g(V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m}) \\ I_{\text{Re}_k} = -b(V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m}) + g(V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m}) \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} I_{\text{Im}_m} = b(V_{\text{Re}_m} - V_{\text{Re}_k}) + g(V_{\text{Im}_m} - V_{\text{Im}_k}) \\ I_{\text{Re}_m} = -b(V_{\text{Im}_m} - V_{\text{Im}_k}) + g(V_{\text{Re}_m} - V_{\text{Re}_k}) \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{i}_{k,m} = \begin{bmatrix} I_{Im_k} \\ I_{Re_k} \\ I_{Im_m} \\ I_{Re_m} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

### 2.4.2.1 Contribuição dos elementos RLC em série para a função Lagrangeana

As equações dos equipamentos série são inseridas na função lagrangeana multiplicando-se as equações de injeção de corrente pelas variáveis duais  $\lambda$ , ou seja,  $L(\mathbf{z}) = \lambda' \mathbf{i}_{k,m}$ , onde:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{Re_k} \\ \lambda_{Im_k} \\ \lambda_{Re_m} \\ \lambda_{Im_m} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Explicitando encontra-se:

$$L(\mathbf{z}) = \lambda_{Re_k} I_{Im_k} + \lambda_{Im_k} I_{Re_k} + \lambda_{Re_m} I_{Im_m} + \lambda_{Im_m} I_{Re_m} \quad (2.38)$$

### 2.4.2.2 Contribuições dos elementos RLC em série para o vetor independente

Para os equipamentos em série, o vetor  $\mathbf{z}$  de variáveis é dado por:

$$\mathbf{z}' = \left[ V_{Re_k} \quad \lambda_{Re_k} \quad V_{Im_k} \quad \lambda_{Im_k} \mid V_{Re_m} \quad \lambda_{Re_m} \quad V_{Im_m} \quad \lambda_{Im_m} \right] \quad (2.39)$$

E as contribuições para o vetor independente ( $\mathbf{b}$ ) são apresentadas em (2.40):

$$\mathbf{b}_{\text{ser}} = \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_m}} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Neste caso, as derivadas parciais de  $\mathbf{b}_{\text{ser}}$  são:

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} = b(\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) + g(\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} = I_{\text{Im}_k} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} = -b(\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) + g(\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} = I_{\text{Re}_k} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_m}} = -b(\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) + g(\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_m}} = I_{\text{Im}_m} \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_m}} = b(\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) + g(\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_m}} = I_{\text{Re}_m} \quad (2.48)$$

### 2.4.2.3 Contribuições dos elementos RLC em série para a matriz Hessiana

As contribuições dos elementos RLC em série para a matriz Hessiana são dadas por:

$$\mathbf{H}_{\text{ser}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_{\text{Re}_k} & \lambda_{\text{Re}_k} & V_{\text{Im}_k} & \lambda_{\text{Im}_k} & V_{\text{Re}_m} & \lambda_{\text{Re}_m} & V_{\text{Im}_m} & \lambda_{\text{Im}_m} \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Re}_k} \\ V_{\text{Im}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \\ V_{\text{Re}_m} \\ \lambda_{\text{Re}_m} \\ V_{\text{Im}_m} \\ \lambda_{\text{Im}_m} \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & & & \\ & b & & g & & -b & & -g \\ & b & & g & & -b & & -g \\ & & g & & -b & & -g & & b \\ & g & & -b & & -g & & b & \\ & & -b & & -g & & b & & g \\ & -b & & -g & & b & & g & \\ & & -g & & b & & g & & -b \\ & -g & & b & & g & & -b & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.49)$$

### 2.4.3 Linhas de Transmissão

Neste trabalho as linhas de transmissão em CA serão modeladas como circuitos  $\pi$ -equivalentes conforme mostrado na Figura 2.3.

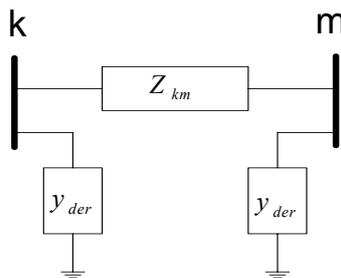


Figura 2.3 – Modelo  $\pi$ -equivalente de uma linha CA monofásica

Onde:

$Z_{km} = r_{km} + jx_{km}$  é a impedância série da linha ( $\Omega$ );

$Y_{km} = (Z_{km})^{-1} = g_{km} + jb_{km}$  é a admitância série da linha ( $\Omega^{-1}$ );

$y_{der} = jb_{der}$  é a admitância em derivação ( $\Omega^{-1}$ );

$r_{km}$ ,  $x_{km}$ ,  $g_{km}$  e  $b_{km}$  são, respectivamente, a resistência, a reatância, a condutância e a susceptância série da linha ( $\Omega$ ).

As contribuições, referentes ao modelo  $\pi$  equivalente da linha de transmissão, das injeções de correntes ( $I_k$  e  $I_m$ ) aplicadas nas barras  $k$  e  $m$  são dadas pelas equações (2.50).

$$\begin{aligned} I_k &= Y_{km}(V_k - V_m) + jb_{der}V_k \\ I_m &= Y_{km}(V_m - V_k) + jb_{der}V_m \end{aligned} \quad (2.50)$$

Explicitando as variáveis em componentes real e imaginária, tem-se:

$$\begin{aligned} I_k &= (g_{km} + jb_{km})(V_{Re_k} + jV_{Im_k} - V_{Re_m} - jV_{Im_m}) + jb_{der}(V_{Re_k} + jV_{Im_k}) \\ I_m &= (g_{km} + jb_{km})(V_{Re_m} + jV_{Im_m} - V_{Re_k} - jV_{Im_k}) + jb_{der}(V_{Re_m} + jV_{Im_m}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Separando-se as equações de injeção de corrente em componentes real e imaginária, tem-se:

Equações de injeção de corrente na barra  $k$

$$\begin{cases} I_{Im_k} = b_{km}(V_{Re_k} - V_{Re_m}) + g_{km}(V_{Im_k} - V_{Im_m}) + b_{der}(V_{Re_k}) \\ I_{Re_k} = g_{km}(V_{Re_k} - V_{Re_m}) - b_{km}(V_{Im_k} - V_{Im_m}) - b_{der}(V_{Im_k}) \end{cases} \quad (2.52)$$

Equações de injeção de corrente na barra  $m$

$$\begin{cases} I_{Im_m} = b_{km}(V_{Re_m} - V_{Re_k}) + g_{km}(V_{Im_m} - V_{Im_k}) + b_{der}(V_{Re_m}) \\ I_{Re_m} = g_{km}(V_{Re_m} - V_{Re_k}) - b_{km}(V_{Im_m} - V_{Im_k}) - b_{der}(V_{Im_m}) \end{cases} \quad (2.53)$$

Em forma matricial:

$$\mathbf{i}_{k,m} = \begin{bmatrix} I_{Im_k} \\ I_{Re_k} \\ I_{Im_m} \\ I_{Re_m} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

### 2.4.3.1 Contribuição das linhas de transmissão para a função Lagrangeana

As equações de injeção de corrente das linhas (parte das restrições de igualdade) são inseridas na função lagrangeana multiplicando-se as mesmas pelas respectivas variáveis duais  $\lambda$ , onde:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{Re_k} \\ \lambda_{Im_k} \\ \lambda_{Re_m} \\ \lambda_{Im_m} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Assim tem-se:

$$L(\mathbf{z}) = \lambda_{Re_k} I_{Im_k} + \lambda_{Im_k} I_{Re_k} + \lambda_{Re_m} I_{Im_m} + \lambda_{Im_m} I_{Re_m} \quad (2.56)$$

### 2.4.3.2 Contribuições das linhas de transmissão para o vetor independente

O vetor independente é constituído pelas derivadas parciais da função Lagrangeana em relação as variáveis  $\mathbf{z}$ , onde, no caso das linhas de transmissão:

$$\mathbf{z}^t = \left[ V_{Re_k} \quad \lambda_{Re_k} \quad V_{Im_k} \quad \lambda_{Im_k} \mid V_{Re_m} \quad \lambda_{Re_m} \quad V_{Im_m} \quad \lambda_{Im_m} \right] \quad (2.57)$$

Observe que foi feito um rearranjo das variáveis  $\lambda$ , com o objetivo de obter uma forma blocada e evitar possíveis problemas de fatoração da matriz Hessiana.

Assim, as contribuições das linhas para a montagem do vetor independente (**b**) são dadas por:

$$\mathbf{b}_{\text{lin}} = \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_m}} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Onde as derivadas parciais em relação a  $k$  constituintes de  $\mathbf{b}_{\text{lin}}$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} &= b_{km} (\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) + g_{km} (\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) + b_{\text{der}} \lambda_{\text{Re}_k} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} &= I_{\text{Im}_k} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} &= g (\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) - b (\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) - b_{\text{der}} \lambda_{\text{Im}_k} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} &= I_{\text{Re}_k} \end{aligned} \quad (2.59)$$

E em relação à  $m$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_m}} &= -b_{km} (\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) - g_{km} (\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) + b_{\text{der}} \lambda_{\text{Re}_k} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_m}} &= I_{\text{Im}_m} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_m}} &= -g_{km} (\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) + b_{km} (\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) - b_{\text{der}} \lambda_{\text{Im}_m} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_m}} &= I_{\text{Re}_m} \end{aligned} \quad (2.60)$$

### 2.4.3.3 Contribuições das linhas de transmissão para a matriz Hessiana

A matriz Hessiana é constituída das derivadas parciais de segunda ordem da função Lagrangeana em relação às variáveis  $\mathbf{z}$ . Para simplicidade de notação, o símbolo  $(\partial)$  que representa as derivadas parciais não será grafado.

As contribuições das linhas para a matriz Hessiana são dadas por:

$$\mathbf{H}_{lin} = \begin{matrix} & V_{Re_k} & \lambda_{Re_k} & V_{Im_k} & \lambda_{Im_k} & | & V_{Re_m} & \lambda_{Re_m} & V_{Im_m} & \lambda_{Im_m} \\ \begin{matrix} V_{Re_k} \\ \lambda_{Re_k} \\ V_{Im_k} \\ \lambda_{Im_k} \\ \hline V_{Re_m} \\ \lambda_{Re_m} \\ V_{Im_m} \\ \lambda_{Im_m} \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{array} \right] \end{matrix} \quad (2.61)$$

Como se pode observar na equação (2.61), 50% dos elementos da matriz são nulos e o restante dos elementos têm valor constante, ou seja, as contribuições das linhas de transmissão CA para a matriz Hessiana são constantes durante todo o processo iterativo.

### 2.4.4 Transformadores de TAPE Variável

Para sistemas monofásicos a modelagem matemática dos transformadores e dos reguladores é idêntica.

Cabe lembrar que a modelagem de transformadores para o fluxo de potência monofásico não contempla a defasagem angular causada pelas configurações das ligações trifásicas, como exemplo, o defasamento de 30° entre o primário e secundário em uma ligação Y-Δ.

Na Figura 2.4 é apresentado o circuito equivalente de um transformador de tape variável e na Figura 2.5 o modelo π-equivalente.

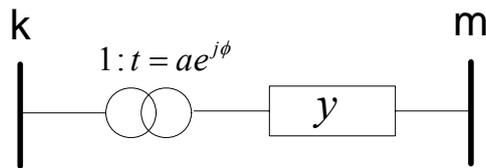


Figura 2.4 – Circuito equivalente de um transformador de tape variável

Onde:

$a$  é a variável relacionada ao controle de tensão ou à variação do tape sob carga;

$\phi$  é a variável relativa ao defasamento angular usada para controle do fluxo de potência ativa em uma linha;

$y$  é a reatância série do regulador ou transformador.

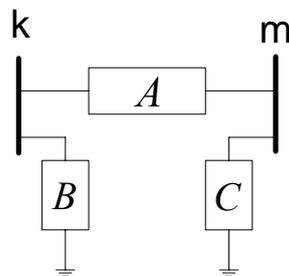


Figura 2.5 – Modelo  $\pi$ -equivalente de um transformador de tape variável

Onde:

$$A = ay$$

$$B = a(a - 1)y$$

$$C = (1 - a)y$$

(2. 62)

As equações das correntes injetadas por um transformador ou regulador de tensão estão apresentadas em (2. 63).

$$I_k = ay_{km}(V_k - V_m) + a(a - 1)y_{km}V_k$$

(2. 63)

$$I_m = ay_{km}(V_m - V_k) + (1 - a)y_{km}V_m$$

Escrevendo-se estas equações em componentes real e imaginária, encontra-se:

Equação de injeção de corrente na barra  $k$

$$\begin{cases} I_{Im_k} = ab_{km}(V_{Re_k} - V_{Re_m}) + ag_{km}(V_{Im_k} - V_{Im_m}) + a(a-1)b_{km}V_{Re_k} + a(a-1)g_{km}V_{Im_k} \\ I_{Re_k} = ag_{km}(V_{Re_k} - V_{Re_m}) - ab_{km}(V_{Im_k} - V_{Im_m}) + a(a-1)g_{km}V_{Re_k} - a(a-1)b_{km}V_{Im_k} \end{cases} \quad (2.64)$$

Equação de injeção de corrente na barra  $m$

$$\begin{cases} I_{Im_m} = ab_{km}(V_{Re_m} - V_{Re_k}) + ag_{km}(V_{Im_m} - V_{Im_k}) + (1-a)b_{km}V_{Re_m} + (1-a)g_{km}V_{Im_m} \\ I_{Re_m} = ag_{km}(V_{Re_m} - V_{Re_k}) - ab_{km}(V_{Im_m} - V_{Im_k}) + (1-a)g_{km}V_{Re_m} - (1-a)b_{km}V_{Im_m} \end{cases} \quad (2.65)$$

Em forma matricial:

$$\mathbf{i}_{k,m} = \begin{bmatrix} I_{Im_k} \\ I_{Re_k} \\ I_{Im_m} \\ I_{Re_m} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

#### 2.4.4.1 Contribuição dos transformadores de tape variável para a função Lagrangeana

As equações de injeção de corrente dos transformadores de tape variável são inseridas na função Lagrangeana multiplicando-se as mesmas pelas respectivas variáveis duais  $\lambda$ , ou seja, ( $L(\mathbf{z}) = \lambda^t \mathbf{i}_{k,m}$ ), onde:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{Re_k} \\ \lambda_{Im_k} \\ \lambda_{Re_m} \\ \lambda_{Im_m} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Explicitando encontra-se:

$$L(\mathbf{z}) = \lambda_{Re_k} I_{Im_k} + \lambda_{Im_k} I_{Re_k} + \lambda_{Re_m} I_{Im_m} + \lambda_{Im_m} I_{Re_m} \quad (2.68)$$

### 2.4.4.2 Contribuições dos transformadores de tape variável para o vetor independente

Para os transformadores de tape variável, o vetor das variáveis  $\mathbf{z}$  é dado por:

$$\mathbf{z}^t = \left[ V_{\text{Re}_k} \quad \lambda_{\text{Re}_k} \quad V_{\text{Im}_k} \quad \lambda_{\text{Im}_k} \quad \bigg| \quad V_{\text{Re}_m} \quad \lambda_{\text{Re}_m} \quad V_{\text{Im}_m} \quad \lambda_{\text{Im}_m} \quad \bigg| \quad a \right] \quad (2.69)$$

Então, as contribuições para o vetor independente ( $\mathbf{b}_{\text{tap}}$ ) são:

$$\mathbf{b}_{\text{tap}} = \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_m}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial a} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

As derivadas parciais que constituem o vetor  $\mathbf{b}_{\text{tap}}$  são:

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} = ab_{km} (\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) + ag_{km} (\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) + a(a-1)(b_{km} \lambda_{\text{Re}_k} + g_{km} \lambda_{\text{Im}_k}) \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} = I_{\text{Im}_k} \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} = ag_{km} (\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) - ab_{km} (\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) + a(a-1)(g_{km} \lambda_{\text{Re}_k} - b_{km} \lambda_{\text{Im}_k}) \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} = I_{\text{Re}_k} \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_m}} = -ab_{km} (\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) - ag_{km} (\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) + (1-a)(b_{km} \lambda_{\text{Re}_m} + g_{km} \lambda_{\text{Im}_m}) \quad (2.75)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_m}} = I_{\text{Im}_m} \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_m}} = -ag_{km} (\lambda_{\text{Re}_k} - \lambda_{\text{Re}_m}) + ab_{km} (\lambda_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_m}) + (1-a)(g_{km} \lambda_{\text{Re}_m} - b_{km} \lambda_{\text{Im}_m}) \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_m}} = I_{\text{Re}_m} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial a} = & + \left[ b_{km} (V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m}) + g_{km} (V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m}) + 2ab_{km} V_{\text{Re}_k} - b_{km} V_{\text{Re}_k} + 2ag_{km} V_{\text{Im}_k} - g_{km} V_{\text{Im}_k} \right] \lambda_{\text{Re}_k} \\ & + \left[ g_{km} (V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m}) - b_{km} (V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m}) + 2ag_{km} V_{\text{Re}_k} - g_{km} V_{\text{Re}_k} - 2ab_{km} V_{\text{Im}_k} + b_{km} V_{\text{Im}_k} \right] \lambda_{\text{Im}_k} \\ & - \left[ b_{km} (V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m}) + g_{km} (V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m}) + b_{km} V_{\text{Re}_m} + g_{km} V_{\text{Im}_m} \right] \lambda_{\text{Re}_m} \\ & - \left[ g_{km} (V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m}) - b_{km} (V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m}) + g_{km} V_{\text{Re}_m} - b_{km} V_{\text{Im}_m} \right] \lambda_{\text{Im}_m} \end{aligned} \quad (2.79)$$

### 2.4.4.3 Contribuições dos transformadores de tape variável para a matriz Hessiana

As contribuições dos transformadores de tape variável para a matriz Hessiana são dadas por:

$$\mathbf{H}_{\text{tap}} = \begin{array}{c} V_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Re}_k} \\ V_{\text{Im}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \\ V_{\text{Re}_m} \\ \lambda_{\text{Re}_m} \\ V_{\text{Im}_m} \\ \lambda_{\text{Im}_m} \\ a \end{array} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} V_{\text{Re}_k} & \lambda_{\text{Re}_k} & V_{\text{Im}_k} & \lambda_{\text{Im}_k} & V_{\text{Re}_m} & \lambda_{\text{Re}_m} & V_{\text{Im}_m} & \lambda_{\text{Im}_m} & a \\ \hline & a^2 b & & a^2 g & & -ab & & -ag & x_1 \\ \hline & a^2 b & & a^2 g & & -ab & & -ag & x_2 \\ \hline & a^2 g & & -a^2 b & & -ag & & ab & x_3 \\ \hline & a^2 g & & -a^2 b & & -ag & & ab & x_4 \\ \hline & -ab & & -ag & & b & & g & x_5 \\ \hline & -ab & & -ag & & b & & g & x_6 \\ \hline & -ag & & ab & & g & & -b & x_7 \\ \hline & -ag & & ab & & g & & -b & x_8 \\ \hline & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array} \quad (2.80)$$

Onde:

$$x_1) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{Re_k} \partial a} = b(\lambda_{Re_k} - \lambda_{Re_m}) + g(\lambda_{Im_k} - \lambda_{Im_m}) + (2a-1)(b\lambda_{Re_k} + g\lambda_{Im_k}) \quad (2.81)$$

$$x_2) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{Re_k} \partial a} = b(V_{Re_k} - V_{Re_m}) + g(V_{Im_k} - V_{Im_m}) + (2a-1)(bV_{Re_k} + gV_{Im_k}) \quad (2.82)$$

$$x_3) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{Re_k} \partial a} = g(\lambda_{Re_k} - \lambda_{Re_m}) - b(\lambda_{Im_k} - \lambda_{Im_m}) + (2a-1)(g\lambda_{Re_k} - b\lambda_{Im_k}) \quad (2.83)$$

$$x_4) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{Im_k} \partial a} = g(V_{Re_k} - V_{Re_m}) - b(V_{Im_k} - V_{Im_m}) + (2a-1)(gV_{Re_k} - bV_{Im_k}) \quad (2.84)$$

$$x_5) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{Re_m} \partial a} = -b(\lambda_{Re_k} - \lambda_{Re_m}) - g(\lambda_{Im_k} - \lambda_{Im_m}) - (b\lambda_{Re_m} + g\lambda_{Im_m}) \quad (2.85)$$

$$x_6) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{Re_m} \partial a} = -b(V_{Re_k} - V_{Re_m}) - g(V_{Im_k} - V_{Im_m}) - (bV_{Re_m} + gV_{Im_m}) \quad (2.86)$$

$$x_7) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{Im_m} \partial a} = -g(\lambda_{Re_k} - \lambda_{Re_m}) + b(\lambda_{Im_k} - \lambda_{Im_m}) - (g\lambda_{Re_m} - b\lambda_{Im_m}) \quad (2.87)$$

$$x_8) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{Im_m} \partial a} = -g(V_{Re_k} - V_{Re_m}) + b(V_{Im_k} - V_{Im_m}) - (gV_{Re_m} - bV_{Im_m}) \quad (2.88)$$

$$x_9) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial a \partial a} = 2bV_{Re_k} \lambda_{Re_k} + 2gV_{Im_k} \lambda_{Re_k} + 2gV_{Re_k} \lambda_{Im_k} + 2bV_{Im_k} \lambda_{Im_k} \quad (2.89)$$

### 2.4.5 Cargas

As cargas conectadas a um sistema de potência apresentam-se nas mais diversas formas como por exemplo, motores, iluminação, resistências, etc. Estas são normalmente modeladas como cargas equivalentes conectadas a barras do sistema elétrico, sendo que a potência consumida pode variar conforme o seu tipo. Vários modelos de carga são tratados na literatura, onde se vê que o modelo ZIP é o mais utilizado e portanto será o único apresentado nesta seção.

### Modelo Composto - ZIP

Este modelo divide a carga em 3 parcelas distintas, sendo chamadas parcelas de impedância constante (Z), corrente constante (I) e potência constante (P), sendo que o peso de cada parcela pode variar de 0 a 1 e a soma das três parcelas deve ser igual a 1.

Este modelo é ilustrado na Figura 2.6.

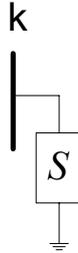


Figura 2.6 – Representação monofásica de carga

Sendo:

$$S = P + jQ$$

$$P = P_0 \left( p_2 + p_1 \frac{V}{V_0} + p_0 \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right) \quad (2.90)$$

$$Q = Q_0 \left( q_2 + q_1 \frac{V}{V_0} + q_0 \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \right)$$

Onde:

$V_0$  é a tensão em que foi especificada a potência de carga;

$p_2, q_2, p_1, q_1, p_0, q_0$  são as ponderações que definem as proporções de cada componente do modelo.

As equações da potência e da corrente injetada pelas cargas do sistema em potência constante são dadas por:

$$S_k = V_k I_k^* \quad (2.91)$$

$$I_k = \frac{P_k - jQ_k}{V_{\text{Re}_k} - jV_{\text{Im}_k}} \quad (2.92)$$

Separando-se em parte real e imaginária:

$$\begin{cases} I_{\text{Im}_k} = \frac{PV_{\text{Im}_k} - QV_{\text{Re}_k}}{(V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2} \\ I_{\text{Re}_k} = \frac{PV_{\text{Re}_k} + QV_{\text{Im}_k}}{(V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2} \end{cases} \quad (2.93)$$

Em forma matricial:

$$\mathbf{i}_k = \begin{bmatrix} I_{\text{Im}_k} \\ I_{\text{Re}_k} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

### 2.4.5.1 Contribuição das cargas para a função Lagrangeana

As equações de injeção de corrente relativas à carga são inseridas na função Lagrangeana multiplicando-se as mesmas pelas variáveis duais  $\lambda$ , ou seja,  $L(\mathbf{z}) = \lambda' \mathbf{i}_k$ , onde:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

O conjunto de variáveis  $\mathbf{z}$  que corresponderá aos termos não nulos no vetor independente e na matriz Hessiana na contribuição de carga é dado por:

$$\mathbf{z}' = [V_{\text{Re}_k} \quad \lambda_{\text{Re}_k} \quad V_{\text{Im}_k} \quad \lambda_{\text{Im}_k}] \quad (2.96)$$

Explicitando a função Lagrangeana tem-se:

$$L(\mathbf{z}) = \lambda_{\text{Re}_k} I_{\text{Im}_k} + \lambda_{\text{Im}_k} I_{\text{Re}_k} \quad (2.97)$$

### 2.4.5.2 Contribuições das cargas para o vetor independente

Utilizando-se as mesmas considerações que foram feitas para as linhas de transmissão para uma dada barra  $k$ , tem-se:

$$\mathbf{b}_{\text{crg}} = \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Onde as derivadas parciais representadas em  $\mathbf{b}_{\text{crg}}$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} = & \frac{Q[(V_{\text{Re}_k})^2 - (V_{\text{Im}_k})^2] - 2P(V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k})}{[(V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2]^2} \lambda_{\text{Re}_k} + \\ & - \frac{P[(V_{\text{Re}_k})^2 - (V_{\text{Im}_k})^2] + 2Q(V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k})}{[(V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2]^2} \lambda_{\text{Im}_k} \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} = I_{\text{Im}_k} \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} = & \frac{P[(V_{\text{Re}_k})^2 - (V_{\text{Im}_k})^2] + 2Q(V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k})}{[(V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2]^2} \lambda_{\text{Re}_k} + \\ & + \frac{Q[(V_{\text{Re}_k})^2 - (V_{\text{Im}_k})^2] - 2P(V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k})}{[(V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2]^2} \lambda_{\text{Im}_k} \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} = I_{\text{Re}_k} \quad (2.102)$$

### 2.4.5.3 Contribuições das cargas para a matriz Hessiana

Novamente, para simplificar a notação, o símbolo ( $\partial$ ) que representa as derivadas parciais não será grafado. As contribuições da carga, conectada a uma barra  $k$ , para a matriz Hessiana são dadas por:

$$\mathbf{H}_{\text{crg}} = \begin{matrix} V_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Re}_k} \\ V_{\text{Im}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_{\text{Re}_k} & \lambda_{\text{Re}_k} & & V_{\text{Im}_k} & \lambda_{\text{Im}_k} \\ x_1 & x_2 & & x_5 & x_6 \\ & & & & \\ \dots & & & & \\ x_5 & x_7 & & x_3 & x_4 \\ & & & & \\ x_6 & & & x_4 & \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

Onde:

$$x_1) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k} \partial V_{\text{Re}_k}} = 2 \frac{(Q_k V_{\text{Re}_k}^3 - 3Q_k V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}^2 - 3P_k V_{\text{Re}_k}^2 V_{\text{Im}_k} + P_k V_{\text{Im}_k}^3)}{\text{den}^3} \lambda_{\text{Im}_k} - 2 \frac{(P_k V_{\text{Re}_k}^3 - 3P_k V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}^2 + 3Q_k V_{\text{Re}_k}^2 V_{\text{Im}_k} - Q_k V_{\text{Im}_k}^3)}{\text{den}^3} \lambda_{\text{Re}_k} \quad (2.104)$$

$$x_2) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k} \partial \lambda_{\text{Re}_k}} = \frac{Q_k}{\text{den}} + 2 \frac{(P_k V_{\text{Re}_k} - Q_k V_{\text{Im}_k}) V_{\text{Re}_k}}{\text{den}^2} \quad (2.105)$$

$$x_3) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k} \partial V_{\text{Im}_k}} = -2 \frac{(Q_k V_{\text{Re}_k}^3 - 3Q_k V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}^2 - 3P_k V_{\text{Re}_k}^2 V_{\text{Im}_k} + P_k V_{\text{Im}_k}^3)}{\text{den}^3} \lambda_{\text{Im}_k} + 2 \frac{(P_k V_{\text{Re}_k}^3 - 3P_k V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}^2 + 3Q_k V_{\text{Re}_k}^2 V_{\text{Im}_k} - Q_k V_{\text{Im}_k}^3)}{\text{den}^3} \lambda_{\text{Re}_k} \quad (2.106)$$

$$x_4) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k} \partial \lambda_{\text{Re}_k}} = -\frac{Q_k}{\text{den}} + 2 \frac{(P_k V_{\text{Re}_k} + Q_k V_{\text{Im}_k}) V_{\text{Im}_k}}{\text{den}^2} \quad (2.107)$$

$$x_5) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k} \partial V_{\text{Im}_k}} = 2 \frac{(P_k V_{\text{Re}_k}^3 - 3P_k V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}^2 + 3Q_k V_{\text{Re}_k}^2 V_{\text{Im}_k} - Q_k V_{\text{Im}_k}^3)}{\text{den}^3} \lambda_{\text{Im}_k} + 2 \frac{(Q_k V_{\text{Re}_k}^3 - 3Q_k V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}^2 - 3P_k V_{\text{Re}_k}^2 V_{\text{Im}_k} + P_k V_{\text{Im}_k}^3)}{\text{den}^3} \lambda_{\text{Re}_k} \quad (2.108)$$

$$x_6) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k} \partial \lambda_{\text{Im}_k}} = -\frac{P_k}{\text{den}} + 2 \frac{(P_k V_{\text{Re}_k} + Q_k V_{\text{Im}_k}) V_{\text{Re}_k}}{\text{den}^2} \quad (2.109)$$

$$x_7) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k} \partial \lambda_{\text{Re}_k}} = -\frac{P_k}{\text{den}} + 2 \frac{(P_k V_{\text{Im}_k} - Q_k V_{\text{Re}_k}) V_{\text{Im}_k}}{\text{den}^2} \quad (2.110)$$

$$\text{den} = (V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2$$

## 2.4.6 Máquinas

As máquinas podem ser modeladas desde por modelos simples, como exemplo uma fonte de tensão constante atrás de uma reatância (Figura 2.7), como por modelos mais complexos. Em estudos estáticos, FP e FPO, estas máquinas podem ser modeladas como fontes de potência ativa e reativa constante, com fator de potência constante ou como uma fonte de potência ativa constante e um controlador de tensão ideal, conforme apresentado na Figura 2.8. Estas simplificações são possíveis, pois as dinâmicas envolvidas nestes estudos são extremamente lentas.

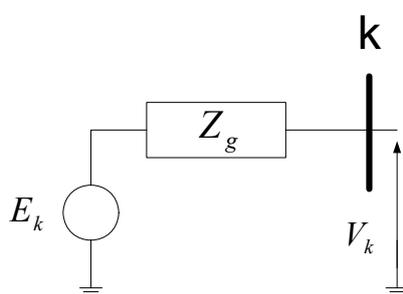


Figura 2.7 – Modelo simples de um gerador/máquina monofásico



Figura 2.8 – Modelo de injeção de potência de uma máquina

Onde:

$$S_k = V_k I_k^* = P_k + jQ_k \quad (2.111)$$

As equações de rede relativas às máquinas são semelhantes às equações de carga. A única diferença é que as potências ativas (P) e reativas (Q) das máquinas podem ser incógnitas ou variáveis fixas, dependendo do procedimento a ser adotado, portanto suas derivadas devem ser calculadas.

As equações de injeção de corrente dos geradores do sistema são quase idênticas às das cargas, as únicas diferenças são os sinais das equações e o limite de potência gerada.

$$S_k = V_k I_k^* \quad (2.112)$$

$$I_k = \frac{P_k - jQ_k}{V_{\text{Re}_k} - jV_{\text{Im}_k}} \quad (2.113)$$

Separando-se em parte real e imaginária:

$$\begin{cases} I_{k,im} = \frac{PV_{\text{Im}_k} - QV_{\text{Re}_k}}{(V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2} \\ I_{\text{Re}_k} = \frac{PV_{\text{Re}_k} + QV_{\text{Im}_k}}{(V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2} \end{cases} \quad (2.114)$$

Em forma matricial:

$$\mathbf{i}_k = \begin{bmatrix} I_{\text{Im}_k} \\ I_{\text{Re}_k} \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

### 2.4.6.1 Contribuição das máquinas para a função Lagrangeana

As equações de injeção de corrente das máquinas são inseridas na função Lagrangeana multiplicando-se as mesmas pelas respectivas variáveis duais  $\lambda$ , ou seja,  $L(\mathbf{z}) = -\lambda^t \mathbf{i}_k$ , onde:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

O conjunto de variáveis  $\mathbf{z}$  que corresponderá aos termos não nulos no vetor independente e na matriz Hessiana na contribuição das máquinas é dado por:

$$\mathbf{z}^t = [V_{\text{Re}_k} \quad \lambda_{\text{Re}_k} \quad V_{\text{Im}_k} \quad \lambda_{\text{Im}_k} \quad P_k \quad Q_k] \quad (2.117)$$

Explicitando a função Lagrangeana tem-se:

$$L(\mathbf{z}) = -\lambda_{\text{Re}_k} I_{\text{Im}_k} - \lambda_{\text{Im}_k} I_{\text{Re}_k} \quad (2.118)$$

### 2.4.6.2 Contribuições das máquinas para o vetor independente

As contribuições das máquinas para o vetor independente são calculadas da mesma maneira que as das cargas, porém, incluindo-se as derivadas em relação às incógnitas  $P_k$  e  $Q_k$  (potências geradas), obtendo-se:

$$\mathbf{b}_{\text{maq}} = \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial P_k}{\partial L(\mathbf{z})} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial L(\mathbf{z})} \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

Nas duas últimas posições no vetor apresentado acima, apresenta-se os valores das derivadas da função Lagrangeana em relação às variáveis  $P_k$  e  $Q_k$ .

As expressões para cálculo das quatro primeiras posições do vetor  $\mathbf{b}_{\text{maq}}$  são iguais às apresentadas de (2. 99) a (2. 102), e as duas restantes são dadas por:

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial P_k} = \frac{V_{\text{Im}_k} \lambda_{\text{Re}_k} + V_{\text{Re}_k} \lambda_{\text{Im}_k}}{\left[ (V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2 \right]^2} \quad (2.120)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial Q_k} = \frac{-V_{\text{Re}_k} \lambda_{\text{Re}_k} + V_{\text{Im}_k} \lambda_{\text{Im}_k}}{\left[ (V_{\text{Re}_k})^2 + (V_{\text{Im}_k})^2 \right]^2} \quad (2.121)$$

### 2.4.6.3 Contribuições das máquinas para a matriz Hessiana

As contribuições das máquinas para a matriz Hessiana são semelhantes às contribuições das cargas, a diferença consiste nas derivadas de segunda ordem da

função Lagrangeana em relação às incógnitas  $P_k$  e  $Q_k$ , que apenas existem para as máquinas e podem ser observadas em (2. 122).

$$\mathbf{H}_{\text{maq}} = \begin{matrix} V_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Re}_k} \\ V_{\text{Im}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \\ P_k \\ Q_k \end{matrix} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} V_{\text{Re}_k} & \lambda_{\text{Re}_k} & V_{\text{Im}_k} & \lambda_{\text{Im}_k} & P_k & Q_k \\ x_1 & x_2 & x_5 & x_6 & x_{11} & x_{15} \\ x_2 & & x_7 & & x_{12} & x_{16} \\ \hline x_5 & x_7 & x_3 & x_4 & x_{13} & x_{17} \\ x_6 & & x_4 & & x_{14} & x_{18} \\ \hline x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & & \\ x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & & \end{array} \right] \quad (2. 122)$$

As contribuições de  $x_1$  a  $x_7$  são idênticas às contribuições das cargas, e as contribuições de  $x_{11}$  a  $x_{18}$  são dadas por:

$$x_{11}) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial P_k \partial V_{\text{Re}_k}} = \frac{-2V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}}{\text{den}^2} \lambda_{\text{Re}_k} + \frac{\lambda_{\text{Re}_k}}{\text{den}} - \frac{2V_{\text{Re}_k}^2}{\text{den}^2} \lambda_{\text{Im}_k} \quad (2. 123)$$

$$x_{12}) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial P_k \partial \lambda_{\text{Re}_k}} = \frac{V_{\text{Im}_k}}{\text{den}} \quad (2. 124)$$

$$x_{13}) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial P_k \partial V_{\text{Im}_k}} = \frac{-2V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}}{\text{den}^2} \lambda_{\text{Im}_k} + \frac{\lambda_{\text{Im}_k}}{\text{den}} - \frac{2V_{\text{Im}_k}^2}{\text{den}^2} \lambda_{\text{Re}_k} \quad (2. 125)$$

$$x_{14}) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial P_k \partial \lambda_{\text{Im}_k}} = -\frac{V_{\text{Re}_k}}{\text{den}} \quad (2. 126)$$

$$x_{15}) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial Q_k \partial V_{\text{Re}_k}} = \frac{-2V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}}{\text{den}^2} \lambda_{\text{Im}_k} + \frac{\lambda_{\text{Im}_k}}{\text{den}} - \frac{2V_{\text{Im}_k}^2}{\text{den}^2} \lambda_{\text{Re}_k} \quad (2. 127)$$

$$x_{16}) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial Q_k \partial \lambda_{\text{Re}_k}} = \frac{V_{\text{Re}_k}}{\text{den}} \quad (2. 128)$$

$$x_{17}) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial Q_k \partial V_{\text{Im}_k}} = \frac{2V_{\text{Re}_k} V_{\text{Im}_k}}{\text{den}^2} \lambda_{\text{Re}_k} + \frac{\lambda_{\text{Re}_k}}{\text{den}} - \frac{2V_{\text{Im}_k}^2}{\text{den}^2} \lambda_{\text{Im}_k} \quad (2. 129)$$

$$x_{18}) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial Q_k \partial \lambda_{\text{Im}_k}} = \frac{V_{\text{Im}_k}}{\text{den}} \quad (2. 130)$$

## 2.5 Equacionamento das Restrições de Canalização

As restrições de canalização garantem que os valores das variáveis não ultrapassarão seus limites inferior ou superior, ou seja, estarão sempre confinadas em um intervalo  $\mathbf{z}_{\min} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_{\max}$ .

Conforme apresentado no Apêndice B (B.4.2), uma restrição de canalização pode ser transformada em duas restrições de igualdade e duas de desigualdade, na forma descrita pelo conjunto de equações (2. 131).

$$\begin{cases} z_{\min} - z + s_{low} = 0 \\ z - z_{\max} + s_{up} = 0 \\ s_{low} \geq 0 \\ s_{up} \geq 0 \end{cases} \quad (2. 131)$$

Com este conjunto de equações pode-se montar a função Lagrangeana apresentada pela equação (2. 132).

$$L(z, s_{low}, s_{up}, \pi_{low}, \pi_{up}) = -\pi_{low}(z_{\min} - z + s_{low}) - \pi_{up}(z - z_{\max} + s_{up}) - \mu \log(s_{low}) - \mu \log(s_{up}) \quad (2. 132)$$

Conforme mostrado no Apêndice B, a inclusão de uma restrição de canalização no problema resulta na inserção do fator  $\mu(s_{low}^{-1} - s_{up}^{-1})$  na posição  $\frac{\partial L}{\partial z}$  do vetor independente  $\mathbf{b}$ , e na inserção do fator  $(s_{low}^{-1} \cdot \pi_{low} - s_{up}^{-1} \cdot \pi_{up})$  na posição correspondente de  $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}$  da matriz Hessiana.

### 2.5.1 Restrições de Potências Geradas

As máquinas síncronas de um SEP possuem limites operacionais de potência ativa e reativa dados por (2. 133).

$$\begin{cases} P_{\min} \leq P_{ger} \leq P_{\max} \\ Q_{\min} \leq Q_{ger} \leq Q_{\max} \end{cases} \quad (2.133)$$

### Contribuições das restrições de canalização dos geradores para o vetor independente

As contribuições dos geradores para o vetor independente são as apresentadas na equação (2.119) acrescentando-se o bloco apresentado na equação (2.134) relativo às restrições de canalização.

$$\mathbf{b}_{maq} = k \begin{bmatrix} \dots \\ \mu(S_{low,P}^{-1} - S_{up,P}^{-1}) \\ \dots \\ i \\ \mu(S_{low,Q}^{-1} - S_{up,Q}^{-1}) \\ \dots \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

### Contribuições das restrições de canalização dos geradores para a matriz Hessiana

As contribuições dos geradores para a matriz Hessiana relativas às canalizações podem ser observadas em (2.135).

$$\mathbf{H}_{ger} = \begin{matrix} & V_{Re_k} & \lambda_{Re_k} & V_{Im_k} & \lambda_{Im_k} & P_k & Q_k \\ \begin{matrix} V_{Re_k} \\ \lambda_{Re_k} \\ V_{Im_k} \\ \lambda_{Im_k} \\ P_k \\ Q_k \end{matrix} & & & & & & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \pi_{low,P} & \pi_{up,P} \\ S_{low,P} & S_{up,P} \end{pmatrix} & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \pi_{low,Q} & \pi_{up,Q} \\ S_{low,Q} & S_{up,Q} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.135)$$

## 2.5.2 Restrições de Tapes de Transformadores

As restrições de canalização são aplicadas aos tapes de forma análoga ao aplicado nas máquinas. Estas restrições são apresentadas de forma genérica na seção 2.5.3.

## 2.5.3 Forma Genérica para Representação das Restrições de Canalização

Para qualquer restrição de canalização da forma  $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$ , sua representação no vetor independente  $\mathbf{b}$  resume-se à inclusão do fator  $\mu(s_{low}^{-1} - s_{up}^{-1})$  na posição  $\frac{\partial L}{\partial z}$  correspondente e na inclusão do termo  $(s_{low}^{-1} \cdot \pi_{low} - s_{up}^{-1} \cdot \pi_{up})$  na posição  $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}$  da matriz Hessiana correspondente.

## 2.6 Equacionamento de Restrições Funcionais

Alguns objetivos das restrições funcionais são garantir que o ponto ótimo de funcionamento de um SEP não coloque em risco a vida útil de equipamentos ou proibir pontos de operação não desejados.

Como apresentada na seção 2.5.3, cada restrição funcional é transformada em uma restrição de igualdade (fazendo-se uso de uma variável auxiliar) e uma restrição de canalização. Para cada variável auxiliar criada, duas novas linhas devem ser criadas no vetor independente, e duas novas linhas/colunas devem ser criadas na matriz Hessiana.

A criação destas novas linhas/colunas não reduz o desempenho computacional, pois as mesmas possuem poucos elementos não nulos e suas fatorações geralmente não provocam enchiamentos. Utilizando-se rotinas computacionais de alto desempenho (ARAUJO, 2000) o acréscimo de tempo devido a este fato é muito pequeno.

As formas gerais da matriz Hessiana, do vetor independente e do conjunto  $\mathbf{z}$ , considerando as variáveis auxiliares primais  $\mathbf{y}$ , as variáveis auxiliares duais  $\lambda_y$  e desconsiderando-se as incógnitas  $s_{low}, \pi_{low}, s_{up}, \pi_{up}$  são apresentadas nas equações (2. 136), (2. 137) e (2. 138) respectivamente.

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \begin{matrix} \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_y} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \lambda_y} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \lambda_y} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Re}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \lambda_y} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} & \frac{\partial \lambda_{\text{Im}_k}}{\partial \lambda_y} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \lambda_y}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \end{matrix} \quad (2.136)$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{V}_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{V}_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial L(\mathbf{z})}{\partial \lambda_y} \end{bmatrix} \quad (2.137)$$

$$\mathbf{z} = \left[ \mathbf{V}_{\text{Re}_k}^t \quad \lambda_{\text{Re}_k}^t \quad \mathbf{V}_{\text{Im}_k}^t \quad \lambda_{\text{Im}_k}^t \quad \mathbf{u}^t \quad \mathbf{y}^t \quad \lambda_{y^t}^t \right] \quad (2.138)$$

### 2.6.1 Restrição de Tensão Nodal

As restrições de tensão garantem que os níveis de tensão nas barras do SEP estarão confinados entre limites.

Para a formulação polar, onde a tensão complexa  $V$  é representada pelas variáveis reais  $v$  e  $\theta$ , esta é uma restrição de canalização, pois se deve manter a tensão de uma barra entre dois limites previamente estipulados  $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$ . Mas no método de injeção de correntes, na formulação retangular, a tensão complexa  $V$  é representada pelas variáveis reais  $V_{\text{Re}}$  e  $V_{\text{Im}}$ , sendo  $v^2 = V_{\text{Re}}^2 + V_{\text{Im}}^2$ . Portanto é necessário criar uma variável auxiliar  $y$  de tal modo que:

$$y - V_{Re}^2 - V_{Im}^2 = 0 \quad (2.139)$$

A função Lagrangeana referente às restrições de tensão é dada pela equação (2.140).

$$L(\mathbf{z}) = -\lambda_y (y - V_{Re}^2 - V_{Im}^2) + \\ - \pi_{low} (v_{min}^2 - y + s_{low}) - \pi_{up} (y - v_{max}^2 + s_{up}) - \mu \log(s_{low}) - \mu \log(s_{up}) \quad (2.140)$$

O primeiro termo da função Lagrangeana indica que duas novas linhas e colunas devem ser criadas, sendo estas relativas às variáveis  $y$  e  $\lambda_y$ . Os termos restantes indicam que as contribuições da restrição de canalização devem ser tratadas conforme apresentado na seção 2.5.

A equação (2.141) mostra as contribuições destas restrições funcionais para o vetor independente e a equação (2.142) as contribuições para a matriz Hessiana.

$$\mathbf{b}_{bar} = \begin{bmatrix} 2V_{Re_k} \lambda_y \\ 2V_{Im_k} \lambda_y \\ \mu(s_{low,V}^{-1} - s_{up,V}^{-1}) - \lambda_y \\ y - V_{Re}^2 - V_{Im}^2 \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

$$\mathbf{H}_{bar} = \begin{array}{c} V_{Re_k} \\ \lambda_{Re_k} \\ V_{Im_k} \\ \lambda_{Im_k} \\ y \\ \lambda_y \end{array} \begin{array}{c|c|c} V_{Re_k} & \lambda_{Re_k} & V_{Im_k} & \lambda_{Im_k} & y & \lambda_y \\ \hline 2\lambda_y & & & & & 2V_{Re_k} \\ \hline & & 2\lambda_y & & & 2V_{Im_k} \\ \hline & & & & \begin{pmatrix} \pi_{low,V} & \pi_{up,V} \\ s_{low,V} & s_{up,V} \end{pmatrix} & -1 \\ \hline 2V_{Re_k} & & 2V_{Im_k} & & & -1 \end{array} \quad (2.142)$$

O tratamento das restrições de tensão em barras é uma desvantagem do método de otimização utilizando-se injeções de correntes retangulares, pois para cada barra do sistema é necessária a criação de duas variáveis. Por outro lado, na formulação polar nenhuma variável precisa ser criada. Mas se a ordem de fatoração for efetuada de tal

forma que as linhas e colunas relativas às variáveis  $\mathbf{y}$  e  $\lambda_{\mathbf{y}}$  sejam eliminadas em primeiro lugar, o efeito deste aumento da matriz Hessiana no método de injeção de corrente retangular pode ser irrelevante em termos computacionais.

### 2.6.2 Restrição de Fluxo de Potência Ativa em Circuitos

As restrições de fluxo de potência ativa em linhas garantem que no ponto de operação calculado pelo FPO, nenhum circuito terá o seu limite térmico violado. Esta é uma restrição funcional, pois o cálculo do fluxo no ramo  $k$ - $m$  depende das variáveis  $V_{\text{Re}_k}$ ,  $V_{\text{Im}_k}$ ,  $V_{\text{Re}_m}$  e  $V_{\text{Im}_m}$ .

A potência ativa injetada no terminal  $k$  de um ramo  $k$ - $m$  é dada por (2. 143) e o limite é apresentado na equação (2. 144):

$$P_{km} = \Re(V_k I_{km}^*) \quad (2. 143)$$

$$-P_{\max} \leq P_{km} \leq P_{\max} \quad (2. 144)$$

Fazendo-se uso de uma variável auxiliar  $y$  nas equações (2. 143) e (2. 144), encontra-se:

$$\begin{aligned} y - P_{km} &= 0 \\ -P_{\max} &\leq y \leq P_{\max} \end{aligned} \quad (2. 145)$$

Onde:

$$\begin{aligned} P_{km} &= V_{\text{Re}_k} (V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m})g - V_{\text{Re}_k} (V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m})b + \\ &V_{\text{Im}_k} (V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m})b + V_{\text{Im}_k} (V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m})g \end{aligned} \quad (2. 146)$$

A contribuição desta restrição no vetor independente é apresentada na equação (2. 147) e na matriz Hessiana na equação (2. 148).

$$\mathbf{b}_{\text{lin}} = \begin{bmatrix} [(2V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m})\mathbf{g} + V_{\text{Im}_m} \mathbf{b}] \lambda_y \\ [(2V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m})\mathbf{g} - V_{\text{Re}_m} \mathbf{b}] \lambda_y \\ \hline (-V_{\text{Re}_k} \mathbf{g} - V_{\text{Im}_k} \mathbf{b}) \lambda_y \\ (V_{\text{Re}_k} \mathbf{b} - V_{\text{Im}_k} \mathbf{g}) \lambda_y \\ \hline \mu(s_{\text{low},V}^{-1} - s_{\text{up},V}^{-1}) - \lambda_y \\ y - P_{km} \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

$$\mathbf{H}_{\text{lin}} = \frac{1}{V_{\text{Re}_m}} \begin{array}{c} V_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Re}_k} \\ V_{\text{Im}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \\ \lambda_{\text{Re}_m} \\ V_{\text{Im}_m} \\ \lambda_{\text{Im}_m} \\ y \\ \lambda_y \end{array} \begin{array}{c|c|c|c|c} V_{\text{Re}_k} & \lambda_{\text{Re}_k} & V_{\text{Im}_k} & \lambda_{\text{Im}_k} & V_{\text{Re}_m} & \lambda_{\text{Re}_m} & V_{\text{Im}_m} & \lambda_{\text{Im}_m} & y & \lambda_y \\ \hline -2g\lambda_y & & & & g\lambda_y & & -b\lambda_y & & & x_1 \\ \hline & & -2g\lambda_y & & b\lambda_y & & g\lambda_y & & & x_2 \\ \hline g\lambda_y & & b\lambda_y & & & & & & & x_3 \\ \hline -b\lambda_y & & g\lambda_y & & & & & & & x_4 \\ \hline & & & & & & & & \left( \frac{\pi_{\text{low},P_{km}} - \pi_{\text{up},P_{km}}}{S_{\text{low},P_{km}} - S_{\text{up},P_{km}}} \right) & -1 \\ \hline x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & -1 & \end{array} \quad (2.148)$$

Onde:

$$x_1) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_k} \partial \lambda_y} = [(2V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m})\mathbf{g} + V_{\text{Im}_m} \mathbf{b}] \lambda_y \quad (2.149)$$

$$x_2) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_k} \partial \lambda_y} = [(2V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m})\mathbf{g} - V_{\text{Re}_m} \mathbf{b}] \lambda_y \quad (2.150)$$

$$x_3) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Re}_m} \partial \lambda_y} = (-V_{\text{Re}_k} \mathbf{g} - V_{\text{Im}_k} \mathbf{b}) \lambda_y \quad (2.151)$$

$$x_4) \frac{\partial^2 L(\mathbf{z})}{\partial V_{\text{Im}_m} \partial \lambda_y} = (V_{\text{Re}_k} \mathbf{b} - V_{\text{Im}_m} \mathbf{g}) \lambda_y \quad (2.152)$$

As restrições de fluxo de potência ativa em um dado ramo só são inseridas no processo iterativo se o limite do ramo for violado.

### 2.6.3 Forma Genérica para Representação de Restrições Funcionais

Para a inserção de qualquer restrição funcional da forma  $h_{\min} \leq h(\mathbf{z}) \leq h_{\max}$ , deve-se separá-la em duas restrições fazendo-se uso de uma variável auxiliar  $y$ , conforme mostrado na equação (2. 153).

$$y - h(\mathbf{z}) = 0 \tag{2. 153}$$

$$h_{\min} \leq y \leq h_{\max} \tag{2. 154}$$

As contribuições da equação (2. 154) (canalização) para o vetor independente e para a matriz Hessiana são apresentadas de forma genérica na seção 2.5.3.

## 2.7 Funções Objetivo

As funções objetivo representam um índice de desempenho do sistema que se deseja otimizar. Este índice é formado por uma variável ou uma combinação de variáveis do sistema. Neste trabalho foram implementadas as três funções objetivo mais comuns.

- Mínimo Custo de Geração de Potência Ativa
- Mínimo Custo de Geração de Potência Reativa
- Mínima Perda de Potência Ativa

### 2.7.1 Mínimo Custo de Geração de Potência Ativa

Visa refletir a operação econômica da rede. O custo de produção de energia é expresso em função da potência ativa gerada pelas unidades, sendo geralmente representado por uma função linear (2. 155) ou quadrática (2. 156) das potências ativas de geração.

$$F.O. = \sum_{i \in \Omega_g} b_k P_k \quad (2.155)$$

$$F.O. = \sum_{i \in \Omega_g} a_k P_k^2 + b_k P_k + c_k \quad (2.156)$$

Onde:

$\Omega_g$  – Conjunto de geradores controláveis de potência ativa.

$a_k, b_k, c_k$  – Parâmetros para o custo da geração de potência ativa no gerador  $k$ .

$P_k$  – Potência ativa gerada no gerador  $k$ .

As contribuições da equação (2.156) para o vetor independente e para a matriz Hessiana são dadas por (2.157) e (2.158) respectivamente.

$$\mathbf{b}_{\text{maq}} = \begin{bmatrix} \dots \\ 2aP_k + b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

$$\mathbf{H}_{\text{maq}} = \begin{matrix} & V_{\text{Re}_k} & \lambda_{\text{Re}_k} & V_{\text{Im}_k} & \lambda_{\text{Im}_k} & P_k & Q_k \\ \begin{matrix} V_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Re}_k} \\ V_{\text{Im}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \\ P_k \\ Q_k \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & 2a \\ & & & & & & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.158)$$

### 2.7.2 Mínimo Custo de Geração de Potência Reativa

Tem como objetivo alocar custos para os serviços auxiliares de suporte de reativo.

$$F.O. = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_g} d_k \cdot Q_k^2 \quad (2.159)$$

Onde:

- $\Omega_g$  – Conjunto de geradores controláveis de potência reativa.
- $d_k$  – Custo da geração de potência reativa no gerador  $k$ .
- $Q_k$  – Potência reativa gerada no gerador  $k$ .

Esta função também depende apenas dos geradores do sistema. As contribuições da equação (2. 159) para o vetor independente e para a matriz Hessiana são dadas por (2. 160) e (2. 161) respectivamente.

$$\mathbf{b}_{\text{maq}} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ dQ_k \end{bmatrix} \quad (2. 160)$$

$$\mathbf{H}_{\text{maq}} = \begin{matrix} & V_{\text{Re}_k} & \lambda_{\text{Re}_k} & V_{\text{Im}_k} & \lambda_{\text{Im}_k} & P_k & Q_k \\ \begin{matrix} V_{\text{Re}_k} \\ \lambda_{\text{Re}_k} \\ V_{\text{Im}_k} \\ \lambda_{\text{Im}_k} \\ P_k \\ Q_k \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & d \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2. 161)$$

### 2.7.3 Mínima Perda Ativa

Esta função tem como objetivo minimizar as perdas de potência ativa no sistema. A expressão das perdas nos ramos é dada por (2. 162).

$$\begin{aligned} F.O. &= \sum_{k,m \in \Omega_c} (P_{km} + P_{mk}) \\ &= \sum_{k,m \in \Omega_c} \left( g(V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m})^2 - g(V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m})^2 - 2b(V_{\text{Re}_k} - V_{\text{Re}_m})(V_{\text{Im}_k} - V_{\text{Im}_m}) \right) \end{aligned} \quad (2. 162)$$

Onde:

- $\Omega_c$  – Conjunto de ramos do sistema.
- $P_{km}, P_{mk}$  – Fluxo de potência ativa nos ramos  $k-m$  e  $m-k$ .

As contribuições para o vetor independente são apresentadas em (2. 163) e para a matriz Hessiana em (2. 164).

$$\mathbf{b}_{lin} = \begin{bmatrix} 2(V_{Re_k} - V_{Re_m}) g - 2b(V_{Im_k} - V_{Im_m}) \\ -2(V_{Im_k} - V_{Im_m}) g - 2b(V_{Re_k} - V_{Re_m}) \\ -2(V_{Re_k} - V_{Re_m}) g + 2b(V_{Im_k} - V_{Im_m}) \\ 2(V_{Im_k} - V_{Im_m}) g + 2b(V_{Re_k} - V_{Re_m}) \end{bmatrix} \quad (2. 163)$$

$$\mathbf{H}_{lin} = \begin{array}{c} V_{Re_k} \\ \lambda_{Re_k} \\ V_{Im_k} \\ \lambda_{Im_k} \\ V_{Re_m} \\ \lambda_{Re_m} \\ V_{Im_m} \\ \lambda_{Im_m} \end{array} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} V_{Re_k} & \lambda_{Re_k} \\ \hline -2b & -2g \end{array} & \begin{array}{cc} V_{Im_k} & \lambda_{Im_k} \\ \hline 2b & 2g \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} V_{Re_m} & \lambda_{Re_m} \\ \hline 2g & -2b \end{array} & \begin{array}{cc} V_{Im_m} & \lambda_{Im_m} \\ \hline -2b & -2g \end{array} \end{array} \quad (2. 164)$$

## 2.8 Passos Primais e Duais e Atualização de Variáveis

A atualização das variáveis não é um processo trivial em um algoritmo de FPO. Na seção B.4.3 do Apêndice B, encontra-se uma discussão detalhada sobre o mecanismo de atualização das variáveis.

No FPO primal-dual devem ser calculados dois valores para a atualização das variáveis, denominados passo primal, equação (2. 165), para as variáveis primais (variáveis do problema e auxiliares), e passo dual, equação (2. 166), para as variáveis duais (multiplicadores de Lagrange).

$$\alpha_p = \min \left[ \min_{\Delta s < 0} \frac{\mathbf{s}_{low}}{|\Delta \mathbf{s}_{low}|}, \min_{\Delta s < 0} \frac{\mathbf{s}_{up}}{|\Delta \mathbf{s}_{up}|}, 1 \right] \quad (2. 165)$$

$$\alpha_d = \min \left[ \min_{\Delta\pi < 0} \frac{\boldsymbol{\pi}_{low}}{|\Delta\boldsymbol{\pi}_{low}|}, \min_{\Delta\pi < 0} \frac{\boldsymbol{\pi}_{up}}{|\Delta\boldsymbol{\pi}_{up}|}, 1 \right] \quad (2.166)$$

No sistema linear reduzido não se calcula explicitamente os valores de  $\Delta\mathbf{s}_{low}$ ,  $\Delta\mathbf{s}_{up}$ ,  $\Delta\boldsymbol{\pi}_{low}$  e  $\Delta\boldsymbol{\pi}_{up}$ . Para calcular estes valores utiliza-se as equações (2.167).

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\pi}_{low} &= \frac{([1]\boldsymbol{\mu} - \mathbf{s}_{low}\boldsymbol{\pi}_{low} - \boldsymbol{\pi}_{low}\Delta\mathbf{s}_{low})}{\mathbf{s}_{low}} \\ \Delta\boldsymbol{\pi}_{up} &= \frac{(-[1]\boldsymbol{\mu} - \mathbf{s}_{up}\boldsymbol{\pi}_{up} - \boldsymbol{\pi}_{up}\Delta\mathbf{s}_{up})}{\mathbf{s}_{up}} \end{aligned} \quad (2.167)$$

Onde [1] é uma matriz diagonal unitária.

Depois de calculados os incrementos e os passos primais e duais, atualiza-se as variáveis segundo o conjunto de equações (2.168), onde  $\sigma$  é um redutor de passo utilizado para evitar problemas de singularidade e possui um valor empírico de 0.99995.

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{z} + \sigma \cdot \alpha_p \cdot \Delta\mathbf{z} \\ \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{\lambda} + \sigma \cdot \alpha_d \cdot \Delta\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\pi} + \sigma \cdot \alpha_d \cdot \Delta\boldsymbol{\pi} \end{aligned} \quad (2.168)$$

As variáveis de folga, nesta formulação, são sempre atualizadas de acordo com a equação (2.169) com base nos limites inferiores, superiores e o ponto dado pelo passo  $k$  do processo iterativo.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{low} &= \mathbf{z} - \mathbf{z}_{\min} \\ \mathbf{s}_{up} &= \mathbf{z}_{\max} - \mathbf{z} \end{aligned} \quad (2.169)$$

O cálculo do parâmetro barreira  $\mu$  é discutido no Apêndice B, seção B.4.4.

## 2.9 Resultados e Comparações

Nesta seção serão apresentados resultados de testes comparando-se a metodologia proposta de injeção de corrente para o FPO frente à formulação em potência polar implementada no FLUPOT (programa de fluxo ótimo comercializado pelo CEPEL). Esta comparação tem como objetivo descobrir se o elevado número de elementos constantes na matriz Hessiana no método de injeção de correntes permite um ganho de velocidade computacional em relação à formulação em potência polar, visto que esta apresenta uma menor dimensão da matriz Hessiana.

Serão utilizados dois sistemas para a comparação, cujas características são apresentadas na Tabela 2.1. Todos os sistemas teste apresentam soluções na região viável.

**Tabela 2.1 – Sistemas testes**

Sistema	Barras	Circuitos	Máquinas
IEEE 118	118	186	49
Sul-Sudeste 720	720	1524	321

As comparações foram feitas utilizando-se a função objetivo de mínimo custo de geração de potência ativa. Foram ativas as restrições de tensão em barras, fluxos em circuitos e limites de geração. São comparados os números de iterações, o tempo computacional, a evolução do algoritmo com relação à função objetivo e o parâmetro barreira.

### 2.9.1 Aspectos Computacionais

Os casos testes foram executados utilizando-se um computador dotado de processador Pentium IV, 1.6GHz, 256 MB de memória e sistema operacional Windows XP. O FLUPOT é programado em FORTRAN 77 e a metodologia proposta em Visual C++ 7.0 utilizando-se modelagem orientada a objetos (MOO).

Para uma correta comparação com o FLUPOT, foram utilizados procedimentos disponíveis no manual do FLUPOT, os quais serão transcritos abaixo.

#### **Inicialização:**

Nos testes comparativos o ponto inicial tomado foi o “Flat Start”.

**Parâmetro Barreira ( $\mu$ ):**

O valor inicial do parâmetro  $\mu$  é igual a 5 e a cada iteração ele é corrigido por:

$$\mu = \beta \cdot \frac{\mathbf{s}_{low}^t \cdot \boldsymbol{\pi}_{low} - \mathbf{s}_{up}^t \cdot \boldsymbol{\pi}_{up}}{2n}$$

Onde:

$$\beta = 0.1 \quad \text{se} \quad \alpha_{\min} > 0.5$$

$$\beta = 0.5 \quad \text{se} \quad \alpha_{\min} \leq 0.5$$

$$\alpha_{\min} = \min(\alpha_p, \alpha_d)$$

$n$  é o número de restrições de canalização

Este critério é adotado para evitar um decréscimo muito acelerado do parâmetro barreira, principalmente nas primeiras iterações quando o algoritmo está ainda longe de atingir a otimalidade. Por razões numéricas, o valor do parâmetro  $\mu$  é sempre mantido entre um limite inferior e superior ( $5e^{-4} \leq \mu \leq 10$ ).

**Tolerâncias:**

A proximidade à barreira logarítmica é diminuída gradualmente durante o processo iterativo. Inicialmente  $\varepsilon=1e^{-2}$  e a cada iteração é diminuída até atingir o valor mínimo de  $\varepsilon=1e^{-5}$ . O motivo deste critério é evitar a proximidade da barreira logarítmica.

**Critério de Convergência:**

O ponto ótimo será encontrado quando as condições abaixo forem verificadas:

- Os resíduos de potências para o FLUPOT e correntes para a metodologia proposta estiverem dentro de uma tolerância de  $\varepsilon=1e^{-2}$ .
- O parâmetro barreira atinja a limite mínimo.

## 2.9.2 Sistema Teste IEEE 118

O sistema teste IEEE 118, tem como objetivo validar a metodologia para sistemas de médio porte. Serão feitas comparações da evolução do parâmetro barreira e o valor da função objetivo a cada iteração, entre o programa FLUPOT com a formulação polar e a metodologia proposta com a formulação de injeção de corrente (MIC). Também

serão apresentados e comentados os tempos computacionais e o número de iterações para alcançar a convergência.

### 2.9.2.1 Evolução do Parâmetro Barreira

A evolução da função objetivo e o parâmetro barreira apresentaram características distintas, conforme pode ser observado na Figura 2. 3 e na Figura 2. 3, respectivamente.

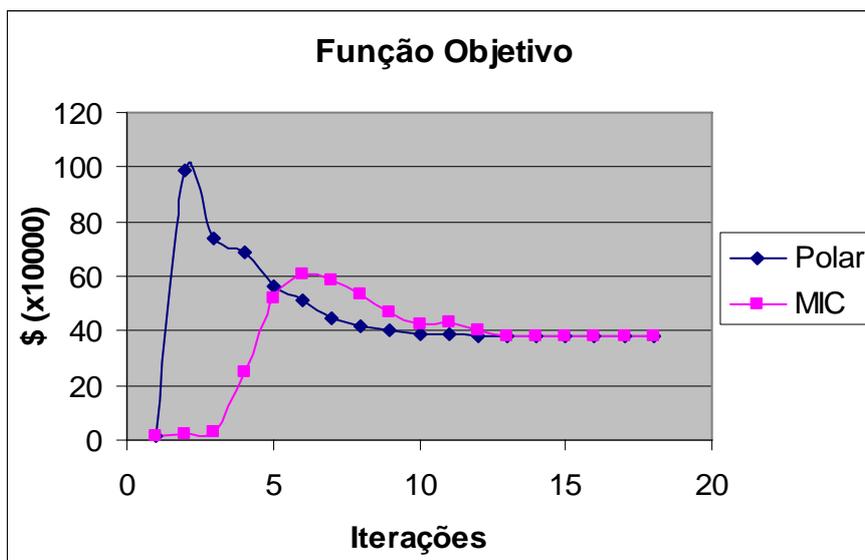


Figura 2. 2 – Gráfico comparativo da evolução da função objetivo – Sistema IEEE 118

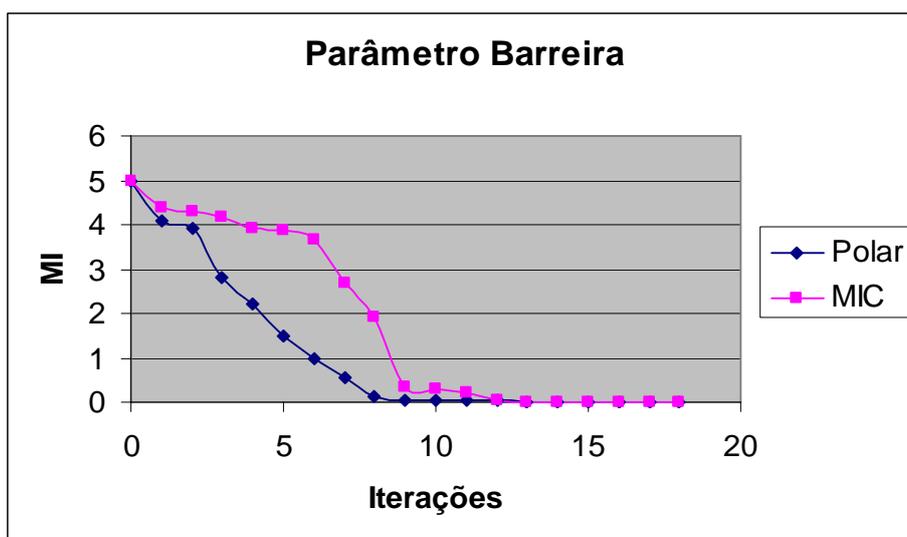


Figura 2. 3 – Gráfico comparativo da evolução do parâmetro barreira – Sistema IEEE 118

### 2.9.2.2 Tempos Computacionais

Para uma perfeita medição do tempo computacional, desprezaram-se os critérios de convergência dos métodos, sendo as metodologias obrigadas a iterar 100 vezes. Na Tabela 2.2 os tempos medidos são apresentados.

**Tabela 2.2 – Resultados – IEEE118**

Metodologia	Iterações	Tempo Total (s)	Tempo iteração (s)	Dimensão de <b>H</b>
MIC	100	1,284	0,013	806
Polar	100	1,132	0,011	570

Como pode ser observado na Tabela 2.2, a formulação por injeção de corrente apresentou um tempo aproximadamente 10% maior que a formulação polar. O principal motivo deste fato consiste em que na formulação de injeção de corrente (MIC) a dimensão do sistema de equações é aumentada de 2 vezes o número de barras do sistema em relação à formulação polar. Este aumento na dimensão é necessário porque na formulação por MIC não existe a variável  $V$ , mas sim  $V_{Re}$  e  $V_{Im}$ . Com isto, a variável tensão nodal não pode ser limitada diretamente, sendo necessária a criação de duas linhas e colunas extras na matriz Hessiana, conforme apresentado na seção 2.6.1, contribuindo para aumentar a dimensão da matriz Hessiana. Portanto, apesar da maioria dos elementos que compõem a parte relativa a rede na matriz Hessiana serem nulos ou constantes no MIC esta vantagem não resultou em ganho no tempo computacional.

### 2.9.3 Sistema Sul-Sudeste 730 Barras

O sistema Sul-Sudeste foi utilizado com o objetivo de validar a metodologia para sistemas de grande porte. Serão apresentados na Tabela 2.3 os tempos computacionais e o número de iterações para alcançar a convergência.

**Tabela 2.3 – Resultados – Sul-Sudeste 730 barras**

Metodologia	Iterações	Tempo Total (s)	Tempo iteração (s)	Dimensão de <b>H</b>
MIC	24	11	0,42	4962
Polar	25	9	0,36	3522

Como pode ser observado na Tabela 2.3 o tempo de cada iteração utilizando-se o método de injeção de correntes é maior que o tempo de uma iteração na formulação polar. Observando a Tabela 2.2 e a Tabela 2.3, percebe-se que o tempo computacional cresce quase com a dimensão da matriz Hessiana. Outro detalhe consiste em que o número de iterações pelo método de injeção de corrente foi praticamente o mesmo que número de iterações pelo método polar. O processo de fatoração da matriz Hessiana é responsável por aproximadamente 60% do tempo computacional de cada iteração e em cada iteração existem elementos não constantes em ambas as formulações, portanto a matriz sempre deve ser fatorada. Logo, o número de elementos constantes da formulação MIC não compensa o aumento da dimensão nesta mesma formulação para o caso monofásico e assim, neste caso, a formulação polar apresentou menor tempo computacional.

Já em sistemas trifásicos, o cálculo dos modelos das linhas de transmissão quando consideradas as mútuas na formulação de injeção de potência polar torna-se um processo complexo e bastante lento, e com isto, o método de injeções de correntes torna-se vantajoso computacionalmente. A metodologia trifásica será apresentada no Capítulo 3.

## Capítulo 3 Injeções de Correntes Trifásicas

### 3.1 Introdução

Os sistemas de distribuição de energia são de natureza desequilibrada, os sistemas de subtransmissão já apresentam níveis consideráveis de desequilíbrio e linhas de potência natural elevada LPNE (GOMES, 1995) contribuem para o desequilíbrio entre as fases na transmissão em EAT. Estes são alguns dos motivos pelos quais algoritmos baseados em coordenadas de fase merecem ser investigados.

Na seção 3.2 o formato dos sistemas lineares para o cálculo do fluxo de potência e do fluxo de potência ótimo é apresentado. Na seção 3.3 encontram-se os modelos e o equacionamento dos componentes para os fluxos trifásicos. Na seção 3.4 está ilustrado o algoritmo de solução do fluxo de potência, as seções 3.5 e 3.6 tratam das restrições e funções objetivo do problema de FPO, na seção 3.7 está a metodologia para atualização das variáveis primais e duais e finalmente em 3.8 o algoritmo de solução do FPO.

### 3.2 Metodologia para a Solução dos Sistemas de Equações Lineares por Newton-Rapshon

Para a solução de sistemas de equações não-lineares é comumente utilizado o Método de Newton-Rapshon. Este é um método iterativo para resolver um conjunto de equações  $\mathbf{f}(\mathbf{z})=0$ , onde  $\mathbf{f}$  possui derivadas de primeira ordem contínuas. Este algoritmo é bastante utilizado pela sua simplicidade e ótimo desempenho computacional.

A expressão matemática do sistema linearizado das equações de injeções de correntes trifásicas a serem resolvidas no fluxo de potência é dada por (3.1), onde  $\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana,  $\mathbf{z}$  são as variáveis de estado e  $\mathbf{f}$  as injeções de correntes ou funções de controle.

$$\mathbf{J}(\mathbf{z})\Delta\mathbf{z} = -\mathbf{f}(\mathbf{z}) \tag{3.1}$$

Para a solução do fluxo de potência ótimo deve-se montar primeiramente a função Lagrangeana ( $L$ ) e posteriormente resolver o sistema de equações linearizadas dadas por

(3.2), onde  $\mathbf{H}$  é a matriz Hessiana,  $\mathbf{z}$  são as variáveis a serem otimizadas e  $\mathbf{b}$  é o vetor das condições de otimalidade. Pode-se utilizar o método primal-dual dos pontos interiores (MPI) para solução do fluxo de potência ótimo, sendo que este é apresentado em detalhes no Apêndice B. O algoritmo do MPI consiste basicamente de sucessivas soluções da equação (3.2).

$$\mathbf{H}(\mathbf{z})\Delta\mathbf{z} = -\mathbf{b}(\mathbf{z})$$

ou

$$\nabla^2 L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s})\Delta\mathbf{z} = -\nabla L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s})$$

(3.2)

### **3.3 Modelagem do Fluxo de Potência e do Fluxo de Potência Ótimo Trifásico Baseado nas Equações do MICT**

Nesta seção apresenta-se o fluxo de potência trifásico utilizando o MICT, que foi publicado originalmente em GARCIA (2000). A formulação apresentada será significativamente diferente do original, sendo que vários problemas detectados foram corrigidos, abaixo são listadas as principais modificações e correções no método apresentado em GARCIA (2000):

- Tratamento das equações de injeção de correntes em forma complexa obtendo maior simplicidade e desempenho computacional;
- A convergência é verificada por resíduos de correntes sem nenhuma perda de precisão;
- Melhorias na representação das linhas de transmissão através das equações do plano complexo e funções de Bessel;
- Eliminação do artifício de colocar números grandes para representar ramais bifásicos e monofásicos;
- Representação de vários tipos de conexões de transformadores;
- Correta representação das cargas conectadas em delta;
- Representação de elementos passivos constituídos de resistores, indutores e capacitores;
- Possibilidade de representação de impedâncias de aterramentos.

Para cada elemento será apresentada a contribuição para o vetor independente (**f**) e para a matriz Jacobiana (**J**) para o fluxo de potência.

Posteriormente, serão apresentadas as contribuições do elemento em questão para o fluxo de potência ótimo, onde serão apresentadas: A função Lagrangeana (**L**), a contribuição para as condições de otimalidade (**b**) e para a matriz Hessiana (**H**) referente ao equipamento.

Nas seções 3.3.1 a 3.3.8 serão mostradas as contribuições dos equipamentos RLC, das linhas de transmissão, dos transformadores, dos reguladores de tensão, dos compensadores série, das cargas e das máquinas.

### 3.3.1 Elementos RLC em Derivação

São os elementos modelados por resistores, indutores e capacitores (RLC).

O uso de capacitores em sistemas de distribuição de energia elétrica é tradicionalmente ligado à correção de fator de potência e melhoria dos níveis de tensão. Porém, com as novas filosofias de operação e planejamento que recentemente vêm sendo adotadas, os capacitores também estão sendo usados para reduzir as perdas de energia através da liberação do transporte de potência reativa. Em relação aos indutores, estes são usados para compensar os efeitos da capacitância em derivação das linhas de transmissão, limitando as sobre-tensões durante a operação em carga leve. Estes componentes são modelados de forma semelhante aos capacitores em derivação. Os resistores, em conjunto com capacitâncias e indutâncias, podem fazer parte de filtros harmônicos.

Estes elementos podem ser conectados em diversas configurações: Estrela aterrada (Figura 3.1), delta (Figura 3.2) ou estrela (Figura 3.3). A relação entre impedância e admitância dos elementos é definida por  $y^{st} = \frac{1}{z^{st}}$ .

Onde  $s, t = \{a, b, c\}$

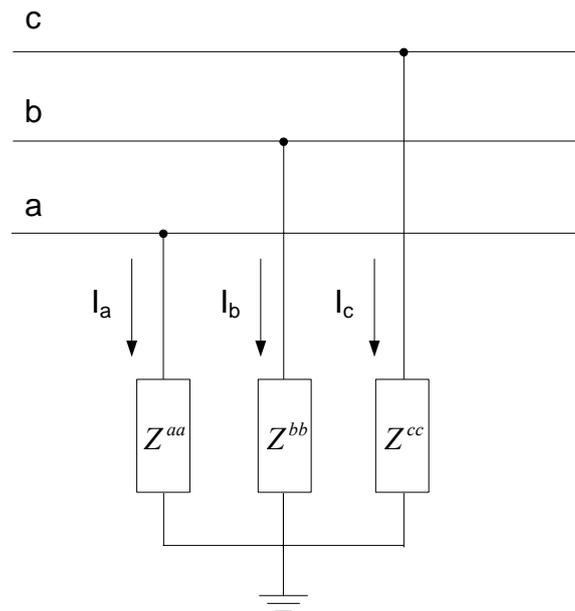


Figura 3.1 – Elementos RLC derivação em estrela aterrada

As correntes injetadas nas fases da barra  $k$  referentes aos elementos RLCs conectados em estrela aterrada são descritas pelas equações (3.3) e quando conectados em delta as correntes são calculadas por (3.4).

$$\begin{aligned}
 I_{y,k}^a &= y^{aa} V_k^a \\
 I_{y,k}^b &= y^{bb} V_k^b \\
 I_{y,k}^c &= y^{cc} V_k^c
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

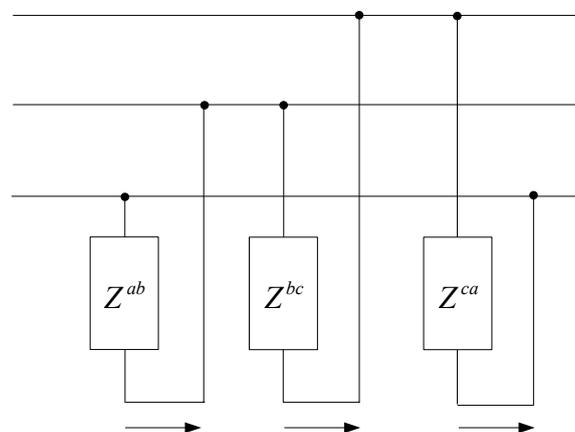


Figura 3.2 – Elementos RLC derivação em delta

$$\begin{aligned}
 I_{\Delta,k}^a &= y^{ab}(V_k^a - V_k^b) - y^{ca}(V_k^c - V_k^a) \\
 I_{\Delta,k}^b &= y^{bc}(V_k^b - V_k^c) - y^{ab}(V_k^a - V_k^b) \\
 I_{\Delta,k}^c &= y^{ca}(V_k^c - V_k^a) - y^{bc}(V_k^b - V_k^c)
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

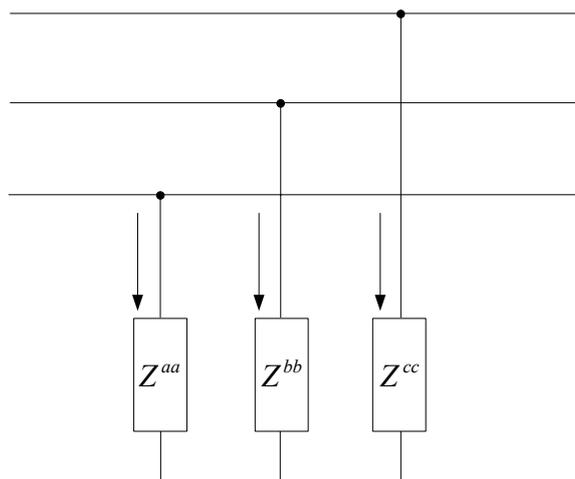


Figura 3.3 – Elementos RLC derivação em estrela

As injeções de correntes dos elementos RLC conectados em estrela nas fases da barra  $k$  são apresentadas em (3.5). A equação para a tensão no neutro isolado  $n$  é obtida a partir da condição em que o somatório das correntes injetadas no ponto  $n$  deve ser zero, equação (3.6). Duas estratégias podem ser adotadas para modelar esta configuração: a primeira consiste na inclusão de uma equação extra no método de Newton-Rapshon, necessitando a criação de novas variáveis e o aumento da ordem do sistema a ser solucionado; a segunda consiste na determinação da tensão  $V^n$  em função de  $V^a$ ,  $V^b$  e  $V^c$ , conforme apresentado em (3.7). Neste trabalho decidiu-se utilizar a segunda opção.

$$\begin{aligned}
 I_k^a &= y^{aa}(V_k^a - V_k^n) \\
 I_k^b &= y^{bb}(V_k^b - V_k^n) \\
 I_k^c &= y^{cc}(V_k^c - V_k^n)
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

$$y^{aa}(V_k^n - V_k^a) + y^{bb}(V_k^n - V_k^b) + y^{cc}(V_k^n - V_k^c) = 0 \quad (3.6)$$

$$V_k^n = \frac{y^{aa}V_k^a + y^{bb}V_k^b + y^{cc}V_k^c}{y^{aa} + y^{bb} + y^{cc}} \quad (3.7)$$

Substituindo a equação (3.7) em (3.5), obtém-se (3.8).

$$\begin{aligned} I_k^a &= \frac{y^{aa}y^{bb}(V_k^a - V_k^b) - y^{cc}y^{aa}(V_k^c - V_k^a)}{y^{aa} + y^{bb} + y^{cc}} \\ I_k^b &= \frac{y^{bb}y^{cc}(V_k^b - V_k^c) - y^{aa}y^{bb}(V_k^a - V_k^b)}{y^{aa} + y^{bb} + y^{cc}} \\ I_k^c &= \frac{y^{cc}y^{aa}(V_k^c - V_k^a) - y^{bb}y^{cc}(V_k^b - V_k^c)}{y^{aa} + y^{bb} + y^{cc}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Comparando as equações (3.4) e (3.8), observa-se que ambas as equações são equivalentes e podem ser obtidas através da transformação estrela-triângulo (CLOSE, 1975). Por serem equivalentes, os elementos RLC conectados em estrela serão tratados como o equivalente delta nesta seção.

### Contribuições para o Fluxo de Potência

Na equação (3.9) são apresentadas de forma geral as contribuições dos elementos RLC para o vetor independente  $\mathbf{f}$ . No caso, para um elemento RLC que se encontra conectado a uma barra  $k$ .

$$\mathbf{f}_{rlc}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \Im(I_k^a) \\ \Im(I_k^b) \\ \Im(I_k^c) \\ \Re(I_k^a) \\ \Re(I_k^b) \\ \Re(I_k^c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Im(I_{y,k}^a + I_{\Delta,k}^a) \\ \Im(I_{y,k}^b + I_{\Delta,k}^b) \\ \Im(I_{y,k}^c + I_{\Delta,k}^c) \\ \Re(I_{y,k}^a + I_{\Delta,k}^a) \\ \Re(I_{y,k}^b + I_{\Delta,k}^b) \\ \Re(I_{y,k}^c + I_{\Delta,k}^c) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

As contribuições dos elementos RLC para a posição  $(k,k)$  da matriz Jacobina são dadas pela equação (3.10), onde os valores que se encontram grafados acima da matriz

Jacobiana representam a variável em relação a qual deverão ser diferenciados os elementos da coluna. As contribuições para os elementos conectados em estrela aterrada são explicitadas em (3.11) e para as conexões em delta em (3.12).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 V_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & V_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c \\
 \Im \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Re_k}^a} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Re_k}^b} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Re_k}^c} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Im_k}^a} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Im_k}^b} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Im_k}^c} \right) \\
 \Im \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Re_k}^a} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Re_k}^b} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Re_k}^c} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Im_k}^a} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Im_k}^b} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Im_k}^c} \right) \\
 \Im \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Re_k}^a} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Re_k}^b} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Re_k}^c} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Im_k}^a} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Im_k}^b} \right) & \Im \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Im_k}^c} \right) \\
 \Re \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Re_k}^a} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Re_k}^b} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Re_k}^c} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Im_k}^a} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Im_k}^b} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^a}{\partial V_{Im_k}^c} \right) \\
 \Re \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Re_k}^a} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Re_k}^b} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Re_k}^c} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Im_k}^a} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Im_k}^b} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^b}{\partial V_{Im_k}^c} \right) \\
 \Re \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Re_k}^a} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Re_k}^b} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Re_k}^c} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Im_k}^a} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Im_k}^b} \right) & \Re \left( \frac{\partial I_k^c}{\partial V_{Im_k}^c} \right)
 \end{array} \\
 \end{array} \quad (3.10)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 V_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & V_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c \\
 b^{aa} & & & g^{aa} & & \\
 & b^{bb} & & & g^{bb} & \\
 & & b^{cc} & & & g^{cc} \\
 g^{aa} & & & -b^{aa} & & \\
 & g^{bb} & & & -b^{bb} & \\
 & & g^{cc} & & & -b^{cc}
 \end{array} \\
 \end{array} \quad (3.11)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc|ccc}
 V_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & V_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c \\
 b^{ab} + b^{ca} & -b^{ab} & -b^{ca} & g^{ab} + g^{ca} & -g^{ab} & -g^{ca} \\
 -b^{ab} & b^{ab} + b^{bc} & -b^{bc} & -g^{ab} & g^{ab} + g^{bc} & -g^{bc} \\
 -b^{ca} & -b^{bc} & b^{ca} + b^{bc} & -g^{ca} & -g^{bc} & g^{ca} + g^{bc} \\
 g^{ab} + g^{ca} & -g^{ab} & -g^{ca} & -b^{ab} - b^{ca} & b^{ab} & b^{ca} \\
 -g^{ab} & g^{ab} + g^{bc} & -g^{bc} & b^{ab} & -b^{ab} - b^{bc} & b^{bc} \\
 -g^{ca} & -g^{bc} & g^{ca} + g^{bc} & b^{ca} & b^{bc} & -b^{ca} - b^{bc}
 \end{array} \\
 \end{array} \quad (3.12)$$

### Contribuições para o Fluxo de Potência Ótimo

Utilizando (3.3) e (3.4) monta-se a função Lagrangeana como apresentado em (3.13).

$$L_{rlc}(\mathbf{z}) = \Im(I_{y,k}^a + I_{\Delta,k}^a) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^a + \Im(I_{y,k}^b + I_{\Delta,k}^b) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^b + \Im(I_{y,k}^c + I_{\Delta,k}^c) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^c + \Re(I_{y,k}^a + I_{\Delta,k}^a) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^a + \Re(I_{y,k}^b + I_{\Delta,k}^b) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^b + \Re(I_{y,k}^c + I_{\Delta,k}^c) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^c \quad (3.13)$$

Portanto, as contribuições para a matriz Hessiana dos equipamentos RLC conectados em estrela aterrada são apresentadas em (3.14). As contribuições dos equipamentos conectados em delta são mais complexas e estão apresentadas em (3.15).

$$\mathbf{H}_{rlc,y} = \frac{\lambda_{\text{Re}_k}^c}{V_{\text{Im}_k}^a} \begin{matrix} V_{\text{Re}_k}^a & \lambda_{\text{Re}_k}^a & V_{\text{Re}_k}^b & \lambda_{\text{Re}_k}^b & V_{\text{Re}_k}^c & \lambda_{\text{Re}_k}^c & V_{\text{Im}_k}^a & \lambda_{\text{Im}_k}^a & V_{\text{Im}_k}^b & \lambda_{\text{Im}_k}^b & V_{\text{Im}_k}^c & \lambda_{\text{Im}_k}^c \\ \left[ \begin{array}{cccccc|cccc} b^{aa} & & & & & & g^{aa} & & & & & \\ b^{aa} & & & & & & g^{aa} & & & & & \\ & & b^{bb} & & & & & & g^{bb} & & & \\ & & b^{bb} & & & & & & g^{bb} & & & \\ & & & & b^{cc} & & & & & & g^{cc} & \\ & & & & b^{cc} & & & & & & g^{cc} & \\ \hline g^{aa} & & & & & & -b^{aa} & & & & & \\ g^{aa} & & & & & & -b^{aa} & & & & & \\ & & g^{bb} & & & & & & -b^{bb} & & & \\ & & g^{bb} & & & & & & -b^{bb} & & & \\ & & & & g^{cc} & & & & & & -b^{cc} & \\ & & & & g^{cc} & & & & & & -b^{cc} & \end{array} \right] \end{matrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{H}_{rlc,\Delta} = \begin{matrix}
 \begin{matrix}
 V_{Re_k}^a & \lambda_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & \lambda_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & \lambda_{Re_k}^c & V_{Im_k}^a & \lambda_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & \lambda_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c & \lambda_{Im_k}^c
 \end{matrix} \\
 \begin{matrix}
 V_{Re_k}^a \\
 \lambda_{Re_k}^a \\
 V_{Re_k}^b \\
 \lambda_{Re_k}^b \\
 V_{Re_k}^c \\
 \lambda_{Re_k}^c \\
 \hline
 V_{Im_k}^a \\
 \lambda_{Im_k}^a \\
 V_{Im_k}^b \\
 \lambda_{Im_k}^b \\
 V_{Im_k}^c \\
 \lambda_{Im_k}^c
 \end{matrix}
 \end{matrix} \begin{bmatrix}
 x_1^{abc} & -b^{ab} & -b^{ca} & & & & x_2^{abc} & -g^{ab} & -g^{bc} & -g^{ca} & & \\
 x_1^{abc} & -b^{ab} & -b^{ca} & & & & x_2^{abc} & -g^{ab} & -g^{bc} & -g^{ca} & & \\
 -b^{ab} & x_1^{bca} & -b^{bc} & & & & -g^{ab} & x_2^{bca} & -g^{bc} & -g^{ca} & & \\
 -b^{ab} & x_1^{bca} & -b^{bc} & & & & -g^{ab} & x_2^{bca} & -g^{bc} & -g^{ca} & & \\
 -b^{ca} & b^{bc} & x_1^{cab} & & & & -g^{ca} & -g^{bc} & x_2^{cab} & & & \\
 -b^{ca} & b^{bc} & x_1^{cab} & & & & -g^{ca} & -g^{bc} & x_2^{cab} & & & \\
 \hline
 x_2^{abc} & -g^{ab} & -g^{ca} & & & & -x_1^{abc} & b^{ab} & b^{ca} & b^{bc} & & \\
 x_2^{abc} & -g^{ab} & -g^{ca} & & & & -x_1^{abc} & b^{ab} & b^{ca} & b^{bc} & & \\
 -g^{ab} & x_2^{bca} & -g^{bc} & & & & b^{ab} & -x_1^{bca} & b^{bc} & -x_1^{cab} & & \\
 -g^{ab} & x_2^{bca} & -g^{bc} & & & & b^{ab} & -x_1^{bca} & b^{bc} & -x_1^{cab} & & \\
 -g^{ca} & -g^{bc} & x_2^{cab} & & & & b^{ca} & b^{bc} & -x_1^{cab} & & & \\
 -g^{ca} & -g^{bc} & x_2^{cab} & & & & b^{ca} & b^{bc} & -x_1^{cab} & & & 
 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Onde:

$$x_1^{stu} = b^{st} + b^{su} \quad (3.16)$$

$$x_2^{stu} = g^{st} + g^{su} \quad (3.17)$$

A equação (3.18) apresenta as contribuições dos equipamentos RLC conectados em estrela aterrada ou delta para o vetor independente.

$$\mathbf{b}_{rlc}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix}
 \tilde{V}_{Re_k}^a \\
 \tilde{\lambda}_{Re_k}^a \\
 \tilde{V}_{Re_k}^b \\
 \tilde{\lambda}_{Re_k}^b \\
 \tilde{V}_{Re_k}^c \\
 \tilde{\lambda}_{Re_k}^c \\
 \hline
 \tilde{V}_{Im_k}^a \\
 \tilde{\lambda}_{Im_k}^a \\
 \tilde{V}_{Im_k}^b \\
 \tilde{\lambda}_{Im_k}^b \\
 \tilde{V}_{Im_k}^c \\
 \tilde{\lambda}_{Im_k}^c
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 z_{1,y}^a + z_{1,\Delta}^{abc} \\
 \Im(I_k^a) \\
 z_{1,y}^b + z_{1,\Delta}^{bca} \\
 \Im(I_k^b) \\
 z_{1,y}^c + z_{1,\Delta}^{cab} \\
 \Im(I_k^c) \\
 \hline
 z_{2,y}^a + z_{2,\Delta}^{abc} \\
 \Re(I_k^a) \\
 z_{2,y}^b + z_{2,\Delta}^{bca} \\
 \Re(I_k^b) \\
 z_{2,y}^c + z_{2,\Delta}^{cab} \\
 \Re(I_k^c)
 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Sendo:

$$z_{1,y}^s = \Im(y^{ss}) \lambda_{Re_k}^s + \Re(y^{ss}) \lambda_{Im_k}^s \quad (3.19)$$

$$z_{2,y}^s = \Im(jy^{ss})\lambda_{Re_k}^s + \Re(jy^{ss})\lambda_{Im_k}^s \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} z_{1,\Delta}^{stu} = & \Im(y^{st} + y^{us})\lambda_{Re_k}^s + \Re(y^{st} + y^{us})\lambda_{Im_k}^s + \\ & - \Im(y^{st})\lambda_{Re_k}^t - \Re(y^{st})\lambda_{Im_k}^t + \\ & - \Im(y^{su})\lambda_{Re_k}^u - \Re(y^{su})\lambda_{Im_k}^u \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} z_{2,\Delta}^{stu} = & \Im(jy^{st} + jy^{us})\lambda_{Re_k}^s + \Re(jy^{st} + jy^{us})\lambda_{Im_k}^s + \\ & - \Im(jy^{st})\lambda_{Re_k}^t - \Re(jy^{st})\lambda_{Im_k}^t + \\ & - \Im(jy^{su})\lambda_{Re_k}^u - \Re(jy^{su})\lambda_{Im_k}^u \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.3.2 Equações dos Elementos RLC em Série

Os capacitores série podem ser representados como uma reatância capacitiva introduzida em série com a impedância de uma linha. A instalação de bancos de capacitores em série nos sistemas de distribuição e subtransmissão tem como objetivo aumentar a capacidade de transmissão de potencia ativa, reduzir as perdas e melhorar o perfil de tensão.

O modelo adotado neste trabalho é semelhante ao da linha de transmissão, sendo a diferença que os valores das impedâncias mútuas são nulas e não existem elementos em derivação. A Figura 3.4 ilustra o modelo adotado para capacitores e indutores séries.

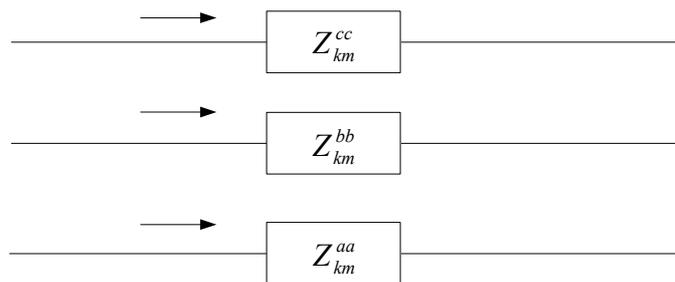


Figura 3.4 – Elementos RLC série

A equação (3.23) apresenta os valores das correntes injetadas nas barras terminais  $k$  e  $m$ .



$$\begin{array}{c}
 \Im(I_{km}^a) \\
 \Im(I_{km}^b) \\
 \Im(I_{km}^c) \\
 \Re(I_{km}^a) \\
 \Re(I_{km}^b) \\
 \Re(I_{km}^c) \\
 \hline
 \Im(I_{mk}^a) \\
 \Im(I_{mk}^b) \\
 \Im(I_{mk}^c) \\
 \Re(I_{km}^a) \\
 \Re(I_{km}^b) \\
 \Re(I_{km}^c)
 \end{array}
 \left[
 \begin{array}{cccc|cccc}
 V_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & \vdots & V_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c & & V_{Re_m}^a & V_{Re_m}^b & V_{Re_m}^c & \vdots & V_{Im_m}^a & V_{Im_m}^b & V_{Im_m}^c \\
 b^{aa} & & & & g^{aa} & & & & -b^{aa} & & & & -g^{aa} & & & \\
 & b^{bb} & & & & g^{bb} & & & & -b^{bb} & & & & -g^{bb} & & \\
 & & b^{cc} & & & & g^{cc} & & & & -b^{cc} & & & & -g^{cc} & \\
 g^{aa} & & & & -b^{aa} & & & & -g^{aa} & & & & b^{aa} & & & \\
 & g^{bb} & & & & -b^{bb} & & & & -g^{bb} & & & & b^{bb} & & \\
 & & g^{cc} & & & & -b^{cc} & & & & -g^{cc} & & & & b^{cc} & \\
 \hline
 -b^{aa} & & & & -g^{aa} & & & & b^{aa} & & & & g^{aa} & & & \\
 & -b^{bb} & & & & -g^{bb} & & & & b^{bb} & & & & g^{bb} & & \\
 & & -b^{cc} & & & & -g^{cc} & & & & b^{cc} & & & & g^{cc} & \\
 -g^{aa} & & & & b^{aa} & & & & g^{aa} & & & & -b^{aa} & & & \\
 & -g^{bb} & & & & b^{bb} & & & & g^{bb} & & & & -b^{bb} & & \\
 & & -g^{cc} & & & & b^{cc} & & & & g^{cc} & & & & -b^{cc} & 
 \end{array}
 \right]
 \quad (3.25)$$

### Contribuições para o Fluxo de Potência Ótimo

Com base na equação (3.23) monta-se a função Lagrangeana relativa aos equipamentos RLC em série, apresentada na equação (3.26).

$$\begin{aligned}
 L_{rlc}(\mathbf{z}) = & \Im(I_{km}^a) \cdot \lambda_{Re_k}^a + \Im(I_{km}^b) \cdot \lambda_{Re_k}^b + \Im(I_{km}^c) \cdot \lambda_{Re_k}^c + \\
 & \Re(I_{km}^a) \cdot \lambda_{Im_k}^a + \Re(I_{km}^b) \cdot \lambda_{Im_k}^b + \Re(I_{km}^c) \cdot \lambda_{Im_k}^c + \\
 & \Im(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{Re_m}^a + \Im(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{Re_m}^b + \Im(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{Re_m}^c + \\
 & \Re(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{Im_m}^a + \Re(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{Im_m}^b + \Re(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{Im_m}^c
 \end{aligned}
 \quad (3.26)$$

A equação (3.27) representa a contribuição para a matriz Hessiana relativa aos equipamentos RLC em série. O termo  $\mathbf{Y}_1$  é uma sub-matriz real de dimensão 12x12 dada por (3.28), cujos elementos são obtidos pela derivada de segunda ordem da equação Lagrangeana. Os vetores  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$ , equações (3.29) e (3.30), indicam quais derivadas de segunda ordem da função Lagrangeana foram efetuadas para uma dada coordenada  $(i,j)$  da sub-matriz  $\mathbf{H}_{rlc}$ .

$$\mathbf{H}_{rlc} = \begin{matrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_1^t & \\ \mathbf{z}_2^t & \end{matrix} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Y}_1 & -\mathbf{Y}_1 \\ \hline -\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1 \end{array} \right] \quad (3.27)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} b^{aa} & & & g^{aa} & & \\ & b^{bb} & & & g^{bb} & \\ & & b^{cc} & & & g^{cc} \\ \hline & & & -b^{aa} & & \\ & g^{aa} & & & -b^{bb} & \\ & & g^{bb} & & & -b^{cc} \\ & & & g^{cc} & & \\ \hline & & & & & -b^{cc} \end{array} \right] \quad (3.28)$$

$$\mathbf{z}_1 = \left[ V_{Re_k}^a \quad \lambda_{Re_k}^a \quad V_{Re_k}^b \quad \lambda_{Re_k}^b \quad V_{Re_k}^c \quad \lambda_{Re_k}^c \mid V_{Im_k}^a \quad \lambda_{Im_k}^a \quad V_{Im_k}^b \quad \lambda_{Im_k}^b \quad V_{Im_k}^c \quad \lambda_{Im_k}^c \right] \quad (3.29)$$

$$\mathbf{z}_2 = \left[ V_{Re_m}^a \quad \lambda_{Re_m}^a \quad V_{Re_m}^b \quad \lambda_{Re_m}^b \quad V_{Re_m}^c \quad \lambda_{Re_m}^c \mid V_{Im_m}^a \quad \lambda_{Im_m}^a \quad V_{Im_m}^b \quad \lambda_{Im_m}^b \quad V_{Im_m}^c \quad \lambda_{Im_m}^c \right] \quad (3.30)$$

As contribuições para as condições de otimalidade (vetor independente) são dadas em (3.31).

$$\mathbf{b}_{rlc}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{Re_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^a \\ \tilde{V}_{Re_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^b \\ \tilde{V}_{Re_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^c \\ \tilde{V}_{Im_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^a \\ \tilde{V}_{Im_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^b \\ \tilde{V}_{Im_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^c \\ \vdots \\ \tilde{V}_{Re_m}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^a \\ \tilde{V}_{Re_m}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^b \\ \tilde{V}_{Im}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^c \\ \tilde{V}_{Im_m}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^a \\ \tilde{V}_{Im_m}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^b \\ \tilde{V}_{Im_m}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{aa}(\lambda_{Re_k}^a - \lambda_{Re_m}^a) + g^{aa}(\lambda_{Im_k}^a - \lambda_{Im_m}^a) \\ \Im(I_{km}^a) \\ b^{bb}(\lambda_{Re_k}^b - \lambda_{Re_m}^b) + g^{bb}(\lambda_{Im_k}^b - \lambda_{Im_m}^b) \\ \Im(I_{km}^b) \\ b^{cc}(\lambda_{Re_k}^c - \lambda_{Re_m}^c) + g^{cc}(\lambda_{Im_k}^c - \lambda_{Im_m}^c) \\ \Im(I_{km}^c) \\ g^{aa}(\lambda_{Re_k}^a - \lambda_{Re_m}^a) + b^{aa}(-\lambda_{Im_k}^a + \lambda_{Im_m}^a) \\ \Re(I_{km}^a) \\ g^{bb}(\lambda_{Re_k}^b - \lambda_{Re_m}^b) + b^{bb}(-\lambda_{Im_k}^b + \lambda_{Im_m}^b) \\ \Re(I_{km}^b) \\ g^{cc}(\lambda_{Re_k}^c - \lambda_{Re_m}^c) + b^{cc}(-\lambda_{Im_k}^c + \lambda_{Im_m}^c) \\ \Re(I_{km}^c) \\ \vdots \\ -b^{aa}(\lambda_{Re_k}^a - \lambda_{Re_m}^a) + g^{aa}(\lambda_{Im_k}^a - \lambda_{Im_m}^a) \\ \Im(I_{mk}^a) \\ -b^{bb}(\lambda_{Re_k}^b - \lambda_{Re_m}^b) + g^{bb}(\lambda_{Im_k}^b - \lambda_{Im_m}^b) \\ \Im(I_{mk}^b) \\ -b^{cc}(\lambda_{Re_k}^c - \lambda_{Re_m}^c) + g^{cc}(\lambda_{Im_k}^c - \lambda_{Im_m}^c) \\ \Im(I_{mk}^c) \\ -g^{aa}(\lambda_{Re_k}^a - \lambda_{Re_m}^a) + b^{aa}(-\lambda_{Im_k}^a + \lambda_{Im_m}^a) \\ \Re(I_{mk}^a) \\ -g^{bb}(\lambda_{Re_k}^b - \lambda_{Re_m}^b) + b^{bb}(-\lambda_{Im_k}^b + \lambda_{Im_m}^b) \\ \Re(I_{mk}^b) \\ -g^{cc}(\lambda_{Re_k}^c - \lambda_{Re_m}^c) + b^{cc}(-\lambda_{Im_k}^c + \lambda_{Im_m}^c) \\ \Re(I_{mk}^c) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

### 3.3.3 Linhas de Transmissão

O modelo de linhas de transmissão (LT) a ser utilizado para as formulações trifásicas neste trabalho, será um circuito  $\pi$ -equivalente como apresentado na Figura 3.5. Como pode ser observado este modelo permite a representação de linhas com parâmetros assimétricos, muito comuns em sistemas de distribuição (KERSTING, 2000) e em LPNE (GOMES, 1995).

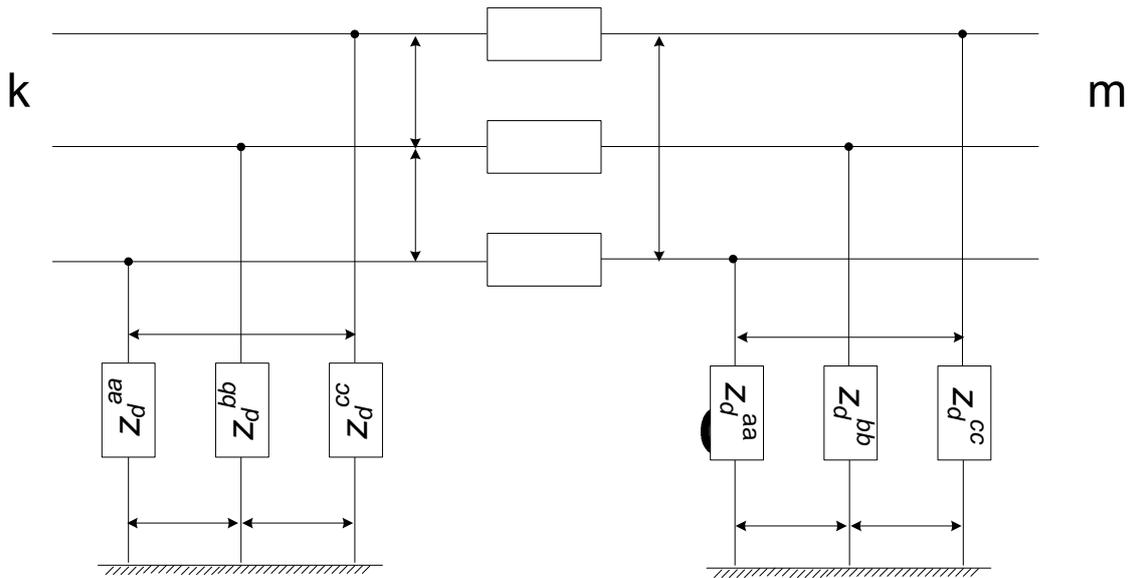


Figura 3.5 – Modelo de linhas de transmissão

A Figura 3.6 representa o circuito de forma matricial, onde os valores dos elementos nos blocos  $Z^{abc}$  e  $Y_{der}^{abc}$  são matrizes (3x3).

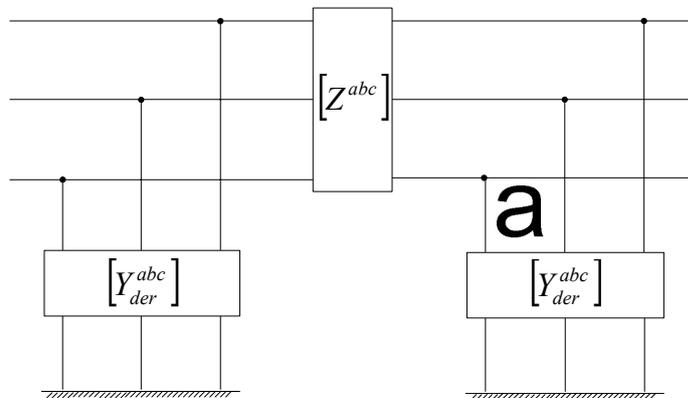


Figura 3.6 – Forma matricial de uma linha CA

$Z_d^{ac}$

Onde:

$$[Z_{km}^{abc}] = \begin{bmatrix} Z_{km}^{aa} & Z_{km}^{ab} & Z_{km}^{ac} \\ Z_{km}^{ba} & Z_{km}^{bb} & Z_{km}^{bc} \\ Z_{km}^{ca} & Z_{km}^{cb} & Z_{km}^{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{km}^{aa} & r_{km}^{ab} & r_{km}^{ac} \\ r_{km}^{ba} & r_{km}^{bb} & r_{km}^{bc} \\ r_{km}^{ca} & r_{km}^{cb} & r_{km}^{cc} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} x_{km}^{aa} & x_{km}^{ab} & x_{km}^{ac} \\ x_{km}^{ba} & x_{km}^{bb} & x_{km}^{bc} \\ x_{km}^{ca} & x_{km}^{cb} & x_{km}^{cc} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$Z_d^{ab}$

$Z_d^{bc}$

$$\begin{bmatrix} Y_{der,k}^{abc} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} b_{der,k}^{aa} & b_{der,k}^{ab} & b_{der,k}^{ac} \\ b_{der,k}^{ba} & b_{der,k}^{bb} & b_{der,k}^{bc} \\ b_{der,k}^{ca} & b_{der,k}^{cb} & b_{der,k}^{cc} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{der,m}^{abc} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} b_{der,m}^{aa} & b_{der,m}^{ab} & b_{der,m}^{ac} \\ b_{der,m}^{ba} & b_{der,m}^{bb} & b_{der,m}^{bc} \\ b_{der,m}^{ca} & b_{der,m}^{cb} & b_{der,m}^{cc} \end{bmatrix}$$

Os parâmetros das equações (3.32) podem ser calculados de acordo com o tipo da torres ou estrutura em questão. Para o cálculo da matriz dos parâmetros elétricos longitudinais por unidade de comprimento de uma LT, para uma frequência complexa  $s = \sigma + j\omega$ , é dada pela equação (3.33) (GOMES, 2002).

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{Z}^{(e)}(s) + \mathbf{Z}^{(i)}(s) \quad (3.33)$$

A matriz de impedâncias  $\mathbf{Z}^{(e)}(s)$  considera a configuração geométrica da torre e o retorno pelo solo. Seus elementos são dados por (3.34) e (3.35).

$$z_{ii}^{(e)}(s) = \frac{s\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{2y_i + 2p}{R_e} \right), \text{ para } i = j \quad (3.34)$$

$$z_{ij}^{(e)}(s) = \frac{s\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{\bar{H}_{ij}}{D_{ij}} \right), \text{ para } i \neq j \quad (3.35)$$

Onde:

$$\bar{H}_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i + y_j + 2p)^2}, \text{ } i \neq j \quad (3.36)$$

$$D_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \text{ } i \neq j \quad (3.37)$$

$$p = \sqrt{\frac{\rho_{solo}}{s\mu_0}} \quad (3.38)$$

Nestas equações  $\mu_0$ ,  $R_e$  e  $\rho_{solo}$  denotam, respectivamente, a permeabilidade magnética do ar, o raio externo do condutor e a resistividade do solo. A influência do solo foi considerada utilizando o método de distância de penetração complexa (DERI *et al.*, 1981),  $p$ , dada por (3.38). Alternativamente as equações de Carson (CARSON,

1926) poderiam ser utilizadas para uma maior precisão em detrimento do tempo computacional. O significado geométrico de algumas coordenadas  $(x_i, y_i)$  é mostrado na Figura 3.7.

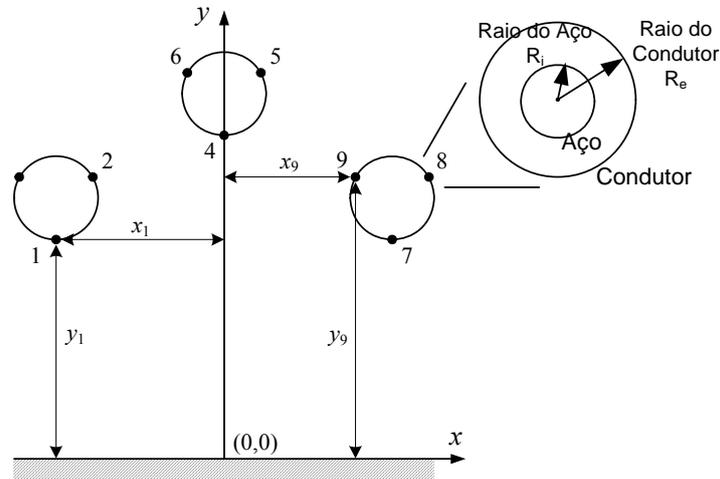


Figura 3.7 – Linha de transmissão e cabo

A matriz de impedâncias internas dos condutores  $\mathbf{Z}^{(i)}(s)$  é diagonal, sendo os elementos dados por (3.39).

$$z_{ii}^{(i)}(s) = k \frac{I_0(a_e)K_1(a_i) + I_1(a_i)K_0(a_e)}{I_1(a_e)K_1(a_i) - I_1(a_i)K_1(a_e)} \quad (3.39)$$

Sendo:

$$k = \sqrt{\frac{s\mu_0}{\sigma}} \frac{1}{2\pi R_e} \quad (3.40)$$

$$\sigma = \frac{1}{R_{cc} \pi (R_e^2 - R_i^2)} \quad (3.41)$$

$$a_i = R_i \sqrt{\sigma \mu_0 s} \quad (3.42)$$

$$a_e = R_e \sqrt{\sigma \mu_0 s} \quad (3.43)$$

Os símbolos  $\sigma$ ,  $R_i$  e  $R_{cc}$  denotam, respectivamente, a condutância, o raio da alma de aço (Figura 3.7) e a resistência a corrente contínua dos cabos condutores da LT.  $I_0$  e  $I_1$  representam as funções de Bessel modificadas de primeira classe e ordem 0 e 1,

respectivamente.  $K_0$  e  $K_1$  são as funções de Bessel modificadas de segunda classe de ordem 0 e 1, respectivamente.

Caso o cabo não possua alma de aço deve-se utilizar (3.44) ao invés de (3.39).

$$z_i(s) = k \frac{I_0(a_e)}{I_1(a_e)} \quad (3.44)$$

A matriz de admitâncias transversais por unidade de comprimento da LT  $\mathbf{Y}_t(s)$  é dada pela equação (3.45).

$$\mathbf{Y}_t(s) = s\mathbf{P}(s)^{-1} \quad (3.45)$$

Os elementos da matriz de coeficientes de potências  $\mathbf{P}(s)$  são dados por (3.46) e (3.47).

$$p_{ii}(s) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2y_i}{R_e}\right), \text{ para } i = j \quad (3.46)$$

$$p_{ij}(s) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{H_{ij}}{D_{ij}}\right), \text{ para } i \neq j \quad (3.47)$$

Onde  $H_{ij}$  é dado por (3.36) considerando  $p = 0$  e  $D_{ij}$  é dado por (3.37). O símbolo  $\epsilon_0$  denota a permitividade do ar.

Para corrigir hiperbolicamente a matriz de admitâncias nodais da LT para linhas longas, recorre-se ao processo de transformação modal para diagonalizar as matrizes  $\mathbf{Z}_t(s)$  e  $\mathbf{Y}_t(s)$  (GOMES, 2002). Primeiramente deve-se calcular as matrizes de autovetores a direita ( $\mathbf{T}_u$ ) e a esquerda ( $\mathbf{T}_i$ ) do produto matricial  $\mathbf{Z}_t(s)\mathbf{Y}_t(s)$ . Aplica-se então a transformação modal dada por (3.48):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_m &= \mathbf{T}_u^{-1}\mathbf{Z}_t(s)\mathbf{T}_i \\ \mathbf{Y}_m &= \mathbf{T}_i^{-1}\mathbf{Y}_t(s)\mathbf{T}_u \end{aligned} \quad (3.48)$$

Onde as matrizes  $\mathbf{Z}_m$  e  $\mathbf{Y}_m$  são diagonais.

As correntes e tensões terminais da linha, após a transformação modal, se relacionam pela matriz modal de admitâncias de barras mostrada em (3.49):

$$\mathbf{Y}_{\text{bm}} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Y}_{\text{bm}}^{(p)} & \mathbf{Y}_{\text{bm}}^{(m)} \\ \hline \mathbf{Y}_{\text{bm}}^{(m)} & \mathbf{Y}_{\text{bm}}^{(p)} \end{array} \right] \quad (3.49)$$

Os elementos das submatrizes diagonais  $\mathbf{Y}_{\text{bm}}^{(p)}$  e  $\mathbf{Y}_{\text{bm}}^{(m)}$  são dados por (3.50).

$$\begin{aligned} y_{\text{bm}_{kk}}^{(p)} &= y c_k \coth(\gamma_k l) \\ y_{\text{bm}_{kk}}^{(m)} &= y c_k \operatorname{csch}(\gamma_k l) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} y c_k &= \sqrt{y_{m_{kk}} / z_{m_{kk}}} \\ \gamma_k &= \sqrt{z_{m_{kk}} y_{m_{kk}}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Note que  $z_{m_{kk}}$  e  $y_{m_{kk}}$  são os elementos da posição  $(k,k)$  das matrizes  $\mathbf{Z}_m$  e  $\mathbf{Y}_m$ .

Realiza-se, então, a transformação inversa (3.52) para determinar as submatrizes de fase.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_b^{(p)}(s) &= \mathbf{T}_i \mathbf{Y}_{\text{bm}}^{(p)}(s) \mathbf{T}_i^t \\ \mathbf{Y}_b^{(m)}(s) &= \mathbf{T}_i \mathbf{Y}_{\text{bm}}^{(m)}(s) \mathbf{T}_i^t \end{aligned} \quad (3.52)$$

As correntes e tensões terminais da LT em coordenadas de fase se relacionam por (3.53).

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{I}_k^{abc} \\ \mathbf{I}_m^{abc} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Y}_b^{(p)} & \mathbf{Y}_b^{(m)} \\ \hline \mathbf{Y}_b^{(m)} & \mathbf{Y}_b^{(p)} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{V}_k^{abc} \\ \mathbf{V}_m^{abc} \end{array} \right] = \mathbf{Y}_b^{abc} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{V}_k^{abc} \\ \mathbf{V}_m^{abc} \end{array} \right] \quad (3.53)$$

Sendo  $\mathbf{Y}_b^{abc}$  a matriz de admitâncias nodais de fase.

Cabos pára-raios e múltiplos condutores por fase podem ser incluídos na modelagem, construindo a matriz de impedâncias para todos os cabos e depois a reduzindo conforme em ANDERSON (1995).

Em sistemas de distribuição é muito comum a presença de derivações monofásicas e bifásicas. Para representar esses elementos exclui-se a fase inexistente da montagem das matrizes de impedâncias e admitâncias de fase do elemento. Dessa forma, para um ramo bifásico constituído pelas fases  $a$  e  $b$ , tem-se:

$$[Z^{ab}] = \begin{bmatrix} z^{aa} & z^{ab} \\ z^{ba} & z^{bb} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Neste caso os elementos  $y^{cc}$ ,  $y^{ac}$ ,  $y^{ca}$ ,  $y^{bc}$  e  $y^{cb}$  relativos à inversão da matriz de impedâncias de fase serão nulos.

As correntes injetadas nas barras  $k$  e  $m$  pelas linhas de transmissão (Figura 3.5) são dadas por (3.55) e (3.56):

$$\begin{aligned} I_{km}^a &= (V_k^a - V_m^a)y_{km}^{aa} + (V_k^b - V_m^b)y_{km}^{ab} + (V_k^c - V_m^c)y_{km}^{ac} + y_{der,k}^{aa}V_k^a \\ I_{km}^b &= (V_k^a - V_m^a)y_{km}^{ba} + (V_k^b - V_m^b)y_{km}^{bb} + (V_k^c - V_m^c)y_{km}^{bc} + y_{der,k}^{bb}V_k^b \\ I_{km}^c &= (V_k^a - V_m^a)y_{km}^{ca} + (V_k^b - V_m^b)y_{km}^{cb} + (V_k^c - V_m^c)y_{km}^{cc} + y_{der,k}^{cc}V_k^c \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} I_{mk}^a &= -(V_k^a - V_m^a)y_{km}^{aa} - (V_k^b - V_m^b)y_{km}^{ab} - (V_k^c - V_m^c)y_{km}^{ac} + y_{der,m}^{aa}V_m^a \\ I_{mk}^b &= -(V_k^a - V_m^a)y_{km}^{ba} - (V_k^b - V_m^b)y_{km}^{bb} - (V_k^c - V_m^c)y_{km}^{bc} + y_{der,m}^{bb}V_m^b \\ I_{mk}^c &= -(V_k^a - V_m^a)y_{km}^{ca} - (V_k^b - V_m^b)y_{km}^{cb} - (V_k^c - V_m^c)y_{km}^{cc} + y_{der,m}^{cc}V_m^c \end{aligned} \quad (3.56)$$

Reescrevendo-se as equações (3.55) e (3.56) em forma matricial chega-se a equação (3.57).

$$\begin{bmatrix} I_{km}^a \\ I_{km}^b \\ I_{km}^c \\ I_{mk}^a \\ I_{mk}^b \\ I_{mk}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{km}^{aa} + y_{der,k}^{aa} & y_{km}^{ab} & y_{km}^{ac} & -y_{km}^{aa} & -y_{km}^{ab} & -y_{km}^{ac} \\ y_{km}^{ba} & y_{km}^{bb} + y_{der,k}^{bb} & y_{km}^{bc} & -y_{km}^{ba} & -y_{km}^{bb} & -y_{km}^{bc} \\ y_{km}^{ca} & y_{km}^{cb} & y_{km}^{cc} + y_{der,k}^{cc} & -y_{km}^{ca} & -y_{km}^{cb} & -y_{km}^{cc} \\ -y_{km}^{aa} & -y_{km}^{ab} & -y_{km}^{ac} & y_{km}^{aa} + y_{der,m}^{aa} & y_{km}^{ab} & y_{km}^{ac} \\ -y_{km}^{ba} & -y_{km}^{bb} & -y_{km}^{bc} & y_{km}^{ba} & y_{km}^{bb} + y_{der,m}^{bb} & y_{km}^{bc} \\ -y_{km}^{ca} & -y_{km}^{cb} & -y_{km}^{cc} & y_{km}^{ca} & y_{km}^{cb} & y_{km}^{cc} + y_{der,m}^{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^a \\ V_k^b \\ V_k^c \\ V_m^a \\ V_m^b \\ V_m^c \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Explicitando-se a parte real e imaginária de (3.57) chega-se a (3.58).

$$\begin{bmatrix}
 \Im(I_{km}^a) \\
 \Im(I_{km}^b) \\
 \Im(I_{km}^c) \\
 \Re(I_{km}^a) \\
 \Re(I_{km}^b) \\
 \Re(I_{km}^c) \\
 \vdots \\
 \Im(I_{mk}^a) \\
 \Im(I_{mk}^b) \\
 \Im(I_{mk}^c) \\
 \Re(I_{mk}^a) \\
 \Re(I_{mk}^b) \\
 \Re(I_{mk}^c)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_x^{aa} & b^{ab} & b^{ac} & g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & \dots & -b^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} & -g^{aa} & -g^{ab} & -g^{ac} \\
 b^{ba} & b_x^{bb} & b^{bc} & g^{ba} & g^{bb} & g^{bc} & \dots & -b^{ba} & -b^{bb} & -b^{bc} & -g^{ba} & -g^{bb} & -g^{bc} \\
 b^{ca} & b^{cb} & b_x^{cc} & g^{ca} & g^{cb} & g^{cc} & \dots & -b^{ca} & -b^{cb} & -b^{cc} & -g^{ca} & -g^{cb} & -g^{cc} \\
 g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & -b_x^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} & \dots & -g^{aa} & -g^{ab} & -g^{ac} & b^{aa} & b^{ab} & b^{ac} \\
 g^{ba} & g^{bb} & g^{bc} & -b^{ba} & -b_x^{bb} & -b^{bc} & \dots & -g^{ba} & -g^{bb} & -g^{bc} & b^{ba} & b^{bb} & b^{bc} \\
 g^{ca} & g^{cb} & g^{cc} & -b^{ca} & -b^{cb} & -b_x^{cc} & \dots & -g^{ca} & -g^{cb} & -g^{cc} & b^{ca} & b^{cb} & b^{cc} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 -b^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} & -g^{aa} & -g^{ab} & -g^{ac} & \dots & b_x^{aa} & b^{ab} & b^{ac} & g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} \\
 -b^{ba} & -b^{bb} & -b^{bc} & -g^{ba} & -g^{bb} & -g^{bc} & \dots & b^{ba} & b_x^{bb} & b^{bc} & g^{ba} & g^{bb} & g^{bc} \\
 -b^{ca} & -b^{cb} & -b^{cc} & -g^{ca} & -g^{cb} & -g^{cc} & \dots & b^{ca} & b^{cb} & b_x^{cc} & g^{ca} & g^{cb} & g^{cc} \\
 -g^{aa} & -g^{ab} & -g^{ac} & b^{aa} & b^{ab} & b^{ac} & \dots & g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & -b_x^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} \\
 -g^{ba} & -g^{bb} & -g^{bc} & b^{ba} & b^{bb} & b^{bc} & \dots & g^{ba} & g^{bb} & g^{bc} & -b^{ba} & -b_x^{bb} & -b^{bc} \\
 -g^{ca} & -g^{cb} & -g^{cc} & b^{ca} & b^{cb} & b^{cc} & \dots & g^{ca} & g^{cb} & g^{cc} & -b^{ca} & -b^{cb} & -b_x^{cc}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 V_{Re_k}^a \\
 V_{Re_k}^b \\
 V_{Re_k}^c \\
 V_{Im_k}^a \\
 V_{Im_k}^b \\
 V_{Im_k}^c \\
 \vdots \\
 V_{Re_m}^a \\
 V_{Re_m}^b \\
 V_{Re_m}^c \\
 V_{Im_m}^a \\
 V_{Im_m}^b \\
 V_{Im_m}^c
 \end{bmatrix}
 \quad (3.58)$$

O subscrito  $x$  nos termos da equação (3.58) indica que foram computadas as contribuições dos elementos em derivação das linhas de transmissão.

### Contribuições para o Fluxo de Potência

As contribuições das linhas de transmissão para o vetor independente são apresentadas em (3.59). As contribuições para a montagem da matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_{lin}(\mathbf{z})$  são apresentadas em (3.60).

$$\mathbf{f}_{lin}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix}
 \Im(I_{km}^a) \\
 \Im(I_{km}^b) \\
 \Im(I_{km}^c) \\
 \dots \\
 \Re(I_{km}^a) \\
 \Re(I_{km}^b) \\
 \Re(I_{km}^c) \\
 \Im(I_{mk}^a) \\
 \Im(I_{mk}^b) \\
 \Im(I_{mk}^c) \\
 \dots \\
 \Re(I_{mk}^a) \\
 \Re(I_{mk}^b) \\
 \Re(I_{mk}^c)
 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\begin{array}{c}
 \mathfrak{I}(I_{km}^a) \\
 \mathfrak{I}(I_{km}^b) \\
 \mathfrak{I}(I_{km}^c) \\
 \mathfrak{R}(I_{km}^a) \\
 \mathfrak{R}(I_{km}^b) \\
 \mathfrak{R}(I_{km}^c) \\
 \mathfrak{I}(I_{mk}^b) \\
 \mathfrak{I}(I_{mk}^b) \\
 \mathfrak{I}(I_{mk}^b) \\
 \mathfrak{R}(I_{km}^a) \\
 \mathfrak{R}(I_{km}^b) \\
 \mathfrak{R}(I_{km}^c)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 V_{\text{Re}_k}^a \quad V_{\text{Re}_k}^b \quad V_{\text{Re}_k}^c \quad \vdots \quad V_{\text{Im}_k}^a \quad V_{\text{Im}_k}^b \quad V_{\text{Im}_k}^c \\
 \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 b_x^{aa} & b^{ab} & b^{ac} & g_x^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & -b^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} & -g^{aa} & -g^{ab} & -g^{ac} \\
 b^{ba} & b_x^{bb} & b^{bc} & g^{ba} & g_x^{bb} & g^{bc} & -b^{ba} & -b^{bb} & -b^{bc} & -g^{ba} & -g^{bb} & -g^{bc} \\
 b^{ca} & b^{cb} & b_x^{cc} & g^{ca} & g^{cb} & g_x^{cc} & -b^{ca} & -b^{cb} & -b^{cc} & -g^{ca} & -g^{cb} & -g^{cc} \\
 g_x^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & -b_x^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} & -g^{aa} & -g^{ab} & -g^{ac} & b^{aa} & b^{ab} & b^{ac} \\
 g^{ba} & g_x^{bb} & g^{bc} & -b^{ba} & -b_x^{bb} & -b^{bc} & -g^{ba} & -g^{bb} & -g^{bc} & b^{ba} & b^{bb} & b^{bc} \\
 g^{ca} & g^{cb} & g_x^{cc} & -b^{ca} & -b^{cb} & -b_x^{cc} & -g^{ca} & -g^{cb} & -g^{cc} & b^{ca} & b^{cb} & b^{cc} \\
 -b^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} & -g^{aa} & -g^{ab} & -g^{ac} & b_x^{aa} & b^{ab} & b^{ac} & g_x^{aa} & g^{ab} & g^{ac} \\
 -b^{ba} & -b^{bb} & -b^{bc} & -g^{ba} & -g^{bb} & -g^{bc} & b^{ba} & b_x^{bb} & b^{bc} & g^{ba} & g_x^{bb} & g^{bc} \\
 -b^{ca} & -b^{cb} & -b^{cc} & -g^{ca} & -g^{cb} & -g^{cc} & b^{ca} & b^{cb} & b_x^{cc} & g^{ca} & g^{cb} & g_x^{cc} \\
 -g^{aa} & -g^{ab} & -g^{ac} & b^{aa} & b^{ab} & b^{ac} & g_x^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & -b_x^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} \\
 -g^{ba} & -g^{bb} & -g^{bc} & b^{ba} & b^{bb} & b^{bc} & g^{ba} & g_x^{bb} & g^{bc} & -b^{ba} & -b_x^{bb} & -b^{bc} \\
 -g^{ca} & -g^{cb} & -g^{cc} & b^{ca} & b^{cb} & b^{cc} & g^{ca} & g^{cb} & g_x^{cc} & -b^{ca} & -b^{cb} & -b_x^{cc}
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \quad (3.60)$$

O subscrito  $x$  nos termos da equação (3.60) indica que foram computadas as contribuições dos elementos em derivação das linhas de transmissão.

Reescrevendo os termos da equação (3.60) de forma compacta chega-se a equação (3.61).

$$\mathbf{J}_{lin} = \begin{array}{c} \mathbf{i}_k \\ \mathbf{i}_m \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{z}_k \quad \mathbf{z}_m \\ \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \hline \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_1 \end{array} \right] \end{array} \quad (3.61)$$

Onde:

$$\mathbf{i}_k = [\mathfrak{I}(I_{km}^a) \quad \mathfrak{I}(I_{km}^b) \quad \mathfrak{I}(I_{km}^c) \quad \vdots \quad \mathfrak{R}(I_{km}^a) \quad \mathfrak{R}(I_{km}^b) \quad \mathfrak{R}(I_{km}^c)] \quad (3.62)$$

$$\mathbf{i}_m = [\mathfrak{I}(I_{mk}^a) \quad \mathfrak{I}(I_{mk}^b) \quad \mathfrak{I}(I_{mk}^c) \quad \vdots \quad \mathfrak{R}(I_{mk}^a) \quad \mathfrak{R}(I_{mk}^b) \quad \mathfrak{R}(I_{mk}^c)] \quad (3.63)$$

$$\mathbf{z}_k = [V_{\text{Re}_k}^a \quad V_{\text{Re}_k}^b \quad V_{\text{Re}_k}^c \quad \vdots \quad V_{\text{Im}_k}^a \quad V_{\text{Im}_k}^b \quad V_{\text{Im}_k}^c] \quad (3.64)$$

$$\mathbf{z}_m = [V_{\text{Re}_m}^a \quad V_{\text{Re}_m}^b \quad V_{\text{Re}_m}^c \quad \vdots \quad V_{\text{Im}_m}^a \quad V_{\text{Im}_m}^b \quad V_{\text{Im}_m}^c] \quad (3.65)$$

**Contribuições para o Fluxo de Potência Ótimo**

Com base na equação (3.58) monta-se a função lagrangeana relativa às linhas de transmissão, equação (3.66).

$$\begin{aligned}
 L_{lin}(\mathbf{z}) = & \Im(I_{km}^a) \cdot \lambda_{Re_k}^a + \Im(I_{km}^b) \cdot \lambda_{Re_k}^b + \Im(I_{km}^c) \cdot \lambda_{Re_k}^c + \\
 & \Re(I_{km}^a) \cdot \lambda_{Im_k}^a + \Re(I_{km}^b) \cdot \lambda_{Im_k}^b + \Re(I_{km}^c) \cdot \lambda_{Im_k}^c + \\
 & \Im(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{Re_m}^a + \Im(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{Re_m}^b + \Im(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{Re_m}^c + \\
 & \Re(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{Im_m}^a + \Re(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{Im_m}^b + \Re(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{Im_m}^c
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

A equação (3.67) representa a contribuição para a matriz Hessiana relativa às linhas de transmissão. Os termos  $\mathbf{Y}_1$  e  $\mathbf{Y}_2$  são sub-matrizes reais de dimensão 12x12 dadas pelas equações (3.68) e (3.69) e são obtidos pela derivada de segunda ordem da equação Lagrangeana. Os vetores  $\mathbf{z}_1$  e  $\mathbf{z}_2$ , Equações (3.70) e (3.71), indicam quais derivadas de segunda ordem da função Lagrangeana foram efetuadas para uma dada coordenada  $(i,j)$  da sub-matriz  $\mathbf{H}_{lin}$ .

$$\mathbf{H}_{lin} = \begin{matrix} & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \\ \begin{matrix} \mathbf{z}_1^t \\ \mathbf{z}_2^t \end{matrix} & \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 \\ \hline \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_1 \end{array} \right] & \end{matrix} \tag{3.67}$$

$$\mathbf{Y}_1 = \left[ \begin{array}{cccc|cccc}
 b_x^{aa} & b^{ab} & b^{ac} & & g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & \\
 b_x^{aa} & b^{ab} & b^{ac} & & g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & \\
 b^{ab} & b_x^{bb} & b^{bc} & & g^{ab} & g^{bb} & g^{bc} & g^{bc} \\
 b^{ab} & b^{bc} & b^{bc} & b_x^{cc} & g^{ab} & g^{bb} & g^{bc} & g^{bc} \\
 b^{ac} & b^{bc} & b^{bc} & b_x^{cc} & g^{ac} & g^{ac} & g^{bc} & g^{cc} \\
 b^{ac} & b^{bc} & b^{bc} & b_x^{cc} & g^{ac} & g^{bc} & g^{cc} & \\
 \hline
 g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & & -b_x^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} & \\
 g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & & -b_x^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} & \\
 g^{ab} & g^{bb} & g^{bc} & & -b^{ab} & -b_x^{bb} & -b^{bc} & \\
 g^{ab} & g^{bb} & g^{bc} & & -b^{ab} & -b_x^{bb} & -b^{bc} & \\
 g^{ac} & g^{bc} & g^{cc} & & -b^{ac} & -b^{bc} & -b^{cc} & \\
 g^{ac} & g^{bc} & g^{cc} & & -b^{ac} & -b^{bc} & -b^{cc} & 
 \end{array} \right] \tag{3.68}$$

$$\mathbf{Y}_2 = \left[ \begin{array}{cccc|cccc}
 & b^{aa} & b^{ab} & b^{ac} & & g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} \\
 b^{aa} & & & & & g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} \\
 & b^{ab} & b^{bb} & b^{bc} & & g^{ab} & g^{bb} & g^{bc} \\
 b^{ab} & & & & & g^{ab} & g^{bb} & g^{bc} \\
 & b^{ac} & b^{bc} & b^{cc} & & g^{ac} & g^{bc} & g^{cc} \\
 b^{ac} & & & & & g^{ac} & g^{bc} & g^{cc} \\
 \hline
 & g^{aa} & g^{ab} & g^{ac} & & -b^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} \\
 g^{aa} & & & & & -b^{aa} & -b^{ab} & -b^{ac} \\
 & g^{ab} & g^{bb} & g^{bc} & & -b^{ab} & -b^{bb} & -b^{bc} \\
 g^{ab} & & & & & -b^{ab} & -b^{bb} & -b^{bc} \\
 & g^{ac} & g^{bc} & g^{cc} & & -b^{ac} & -b^{bc} & -b^{cc} \\
 g^{ac} & & & & & -b^{ac} & -b^{bc} & -b^{cc}
 \end{array} \right] \quad (3.69)$$

$$\mathbf{z}_1 = \left[ V_{\text{Re}_k}^a \quad \lambda_{\text{Re}_k}^a \quad V_{\text{Re}_k}^b \quad \lambda_{\text{Re}_k}^b \quad V_{\text{Re}_k}^c \quad \lambda_{\text{Re}_k}^c \mid V_{\text{Im}_k}^a \quad \lambda_{\text{Im}_k}^a \quad V_{\text{Im}_k}^b \quad \lambda_{\text{Im}_k}^b \quad V_{\text{Im}_k}^c \quad \lambda_{\text{Im}_k}^c \right] \quad (3.70)$$

$$\mathbf{z}_2 = \left[ V_{\text{Re}_m}^a \quad \lambda_{\text{Re}_m}^a \quad V_{\text{Re}_m}^b \quad \lambda_{\text{Re}_m}^b \quad V_{\text{Re}_m}^c \quad \lambda_{\text{Re}_m}^c \mid V_{\text{Im}_m}^a \quad \lambda_{\text{Im}_m}^a \quad V_{\text{Im}_m}^b \quad \lambda_{\text{Im}_m}^b \quad V_{\text{Im}_m}^c \quad \lambda_{\text{Im}_m}^c \right] \quad (3.71)$$

As contribuições para o vetor independente são dadas em (3.72).

$$\mathbf{b}_{lin}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{Re_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^a \\ \tilde{V}_{Re_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^b \\ \tilde{V}_{Re_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^c \\ \tilde{V}_{Im_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^a \\ \tilde{V}_{Im_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^b \\ \tilde{V}_{Im_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^c \\ \vdots \\ \tilde{V}_{Re_m}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^a \\ \tilde{V}_{Re_m}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^b \\ \tilde{V}_{Re_m}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^c \\ \tilde{V}_{Im_m}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^a \\ \tilde{V}_{Im_m}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^b \\ \tilde{V}_{Im_m}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=a,b,c} [b^{as}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + g^{as}(\lambda_{Im_k}^s - \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{km}^a) \\ \sum_{s=a,b,c} [b^{bs}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + g^{bs}(\lambda_{Im_k}^s - \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{km}^b) \\ \sum_{s=a,b,c} [b^{cs}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + g^{cs}(\lambda_{Im_k}^s - \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{km}^c) \\ \sum_{s=a,b,c} [g^{as}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + b^{as}(-\lambda_{Im_k}^s + \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{km}^a) \\ \sum_{s=a,b,c} [g^{bs}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + b^{bs}(-\lambda_{Im_k}^s + \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{km}^b) \\ \sum_{s=a,b,c} [g^{cs}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + b^{cs}(-\lambda_{Im_k}^s + \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{km}^c) \\ \vdots \\ - \sum_{s=a,b,c} [b^{as}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + g^{as}(\lambda_{Im_k}^s - \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{mk}^a) \\ - \sum_{s=a,b,c} [b^{bs}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + g^{bs}(\lambda_{Im_k}^s - \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{mk}^b) \\ - \sum_{s=a,b,c} [b^{cs}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + g^{cs}(\lambda_{Im_k}^s - \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{mk}^c) \\ - \sum_{s=a,b,c} [g^{as}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + b^{as}(-\lambda_{Im_k}^s + \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{mk}^a) \\ - \sum_{s=a,b,c} [g^{bs}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + b^{bs}(-\lambda_{Im_k}^s + \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{mk}^b) \\ - \sum_{s=a,b,c} [g^{cs}(\lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s) + b^{cs}(-\lambda_{Im_k}^s + \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{mk}^c) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Como pode ser observado pelas equações (3.67) e (3.72), as contribuições das linhas de transmissão são facilmente deduzidas, pois as equações originais são lineares (3.58). Com isto as derivadas de primeira ordem destas equações são constantes e as derivadas de segunda ordem são nulas. Os termos não nulos que aparecem na matriz Hessiana (derivadas de segunda ordem) são aqueles em que uma das derivadas é o multiplicador de Lagrange para equações de igualdade.

### 3.3.4 Transformadores

Os transformadores são elementos fundamentais dos sistemas elétricos em corrente alternada. Possibilitam a conexão de vários equipamentos elétricos com tensões distintas. São instalados em subestações de distribuição para transformar as tensões de níveis de transmissão e subtransmissão para níveis dos alimentadores de distribuição, ou são instalados nos alimentadores para transformar as tensões para os níveis das cargas dos consumidores. Os transformadores também são utilizados para conectar sistemas com configurações distintas, Y- $\Delta$  por exemplo.

O modelo convencional de transformador é feito em termos de componentes simétricas (Kindermann, 1949; Stevenson, 1986), porém, o mesmo não pode ser utilizado corretamente para sistemas desequilibrados, uma vez que na sua concepção supõe-se que o sistema de potência é suficientemente balanceado. Especialmente para sistemas de distribuição é necessário considerar uma modelagem que leve em consideração os possíveis desequilíbrios.

Com a modelagem apresentada neste trabalho pode-se representar qualquer combinação de ligações de transformadores de dois enrolamentos, conexões em estrela (Y) ou delta ( $\Delta$ ). A modelagem pode ser usada para uma unidade trifásica onde existem mútuas entre as fases, Figura 3.8 ou blocos de unidades monofásicas sem mútuas entre as fases, Figura 3.9. Em SILVA, (2004) é apresentada uma abordagem detalhada sobre a modelagem de transformadores.

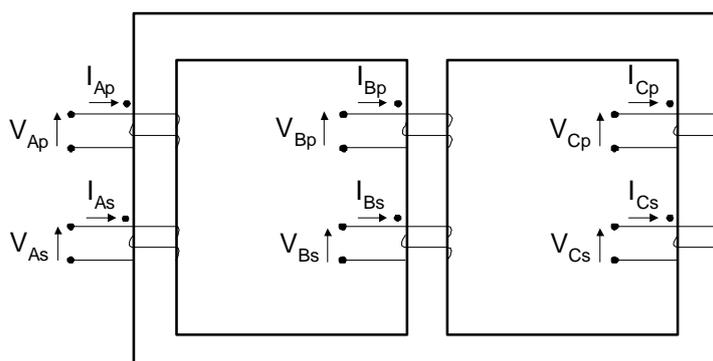


Figura 3.8 – Transformador trifásico

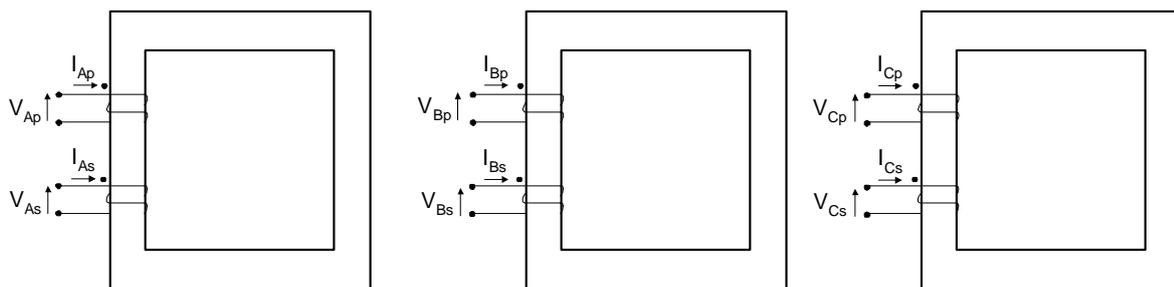


Figura 3.9 – Transformador trifásico constituído de bancos monofásicos

Para o correto cálculo da matriz admitância de barras ( $\mathbf{Y}_{barra}$ ) relativa aos transformadores deve-se seguir o seguinte algoritmo:

1. Montar a matriz  $\mathbf{Z}_{primitiva}$  do elemento, levando-se em conta todas as conexões. (1)
2. Montar a matriz incidência  $\mathbf{A}$ . (2)
3. Calcular  $\mathbf{Y}_{barra} = \mathbf{A}^t \mathbf{Z}_{primitiva}^{-1} \mathbf{A}$ .

Onde  $\mathbf{Y}_{barra} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{pp} & \mathbf{Y}_{ps} \\ \mathbf{Y}_{sp} & \mathbf{Y}_{ss} \end{bmatrix}$ , e  $\mathbf{Y}_{pp}$ ,  $\mathbf{Y}_{ss}$ ,  $\mathbf{Y}_{ps}$  e  $\mathbf{Y}_{sp}$  são matrizes complexas 3x3.

### Cálculo da Matriz $\mathbf{Z}_{primitiva}$ (1)

A matriz  $\mathbf{Z}_{primitiva}$  será sempre uma matriz formada por 4 submatrizes complexas 3x3 conforme apresentado em (3.73).

$$\mathbf{Z}_{primitiva} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{primitiva,pp} & \mathbf{Z}_{primitiva,ps} \\ \mathbf{Z}_{primitiva,sp} & \mathbf{Z}_{primitiva,ss} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Onde:

$$\mathbf{Z}_{primitiva,ps} = \mathbf{Z}_{primitiva,sp} = \begin{bmatrix} jx_M & jx_m & jx_m \\ jx_m & jx_M & jx_m \\ jx_m & jx_m & jx_M \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Sendo  $x_M$  o acoplamento magnético entre as bobinas correspondentes do primário e do secundário do transformador, (Aa, Bb e Cc), e  $x_m$  o acoplamento entre as bobinas

não correspondentes ( $A_b$ ,  $A_c$ ,  $B_c$ ). Caso o transformador seja constituído de unidades monofásicas  $x_m$  será igual a zero. Estes valores serão sempre considerados em pu.

Os valores de  $\mathbf{Z}_{prim,pp}$  e  $\mathbf{Z}_{prim,ss}$  dependem do tipo de conexão.

### Cálculo da Matriz Incidência A (2)

A matriz incidência é uma matriz real de dimensão 6x6, onde as linhas representam os elementos (enrolamentos e impedâncias) e as colunas representam os nós (A, B, C, a, b, c). Esta matriz é composta por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{ps} \\ \mathbf{A}_{sp} & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Onde:

$\mathbf{A}_{pp}$  e  $\mathbf{A}_{ss}$  são matrizes 3x3 e seus valores serão especificados nas próximas seções.

$\mathbf{A}_{ps}$  e  $\mathbf{A}_{sp}$  são matrizes 3x3 nulas.

#### 3.3.4.1 Tipos de Conexões

Os modelos serão apresentados com as conexões efetuadas no primário. As análises e montagem das matrizes para o secundário são análogas.

##### Modelo $\mathbf{Y}_{aterrado}$

A Figura 3.10 ilustra o primário de um transformador conectado em  $\mathbf{Y}_{aterrado}$ .

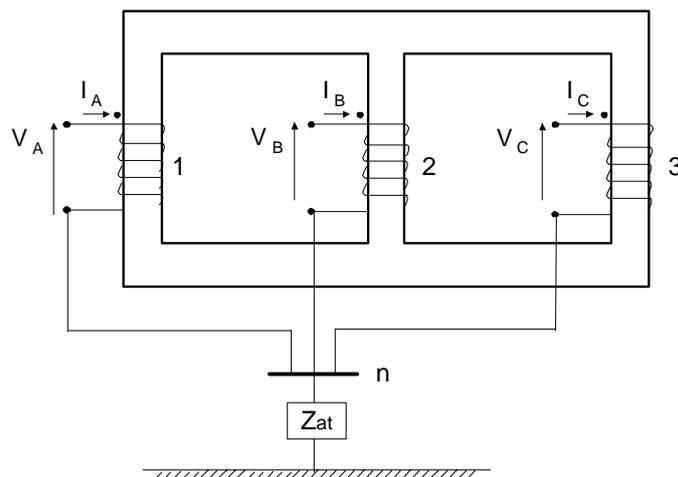


Figura 3.10 – Primário de um transformador conectado em  $Y_{\text{aterrado}}$

Para esta conexão tem-se (ANDERSON, 1995):

$$\mathbf{Z}_{\text{prim},pp} = \begin{bmatrix} Z_{\text{disp}} + jx_M + j4x_m & jx_m & jx_m \\ jx_m & Z_{\text{disp}} + jx_M + j4x_m & jx_m \\ jx_m & jx_m & Z_{\text{disp}} + jx_M + j4x_m \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Sendo  $Z_{\text{disp}}$  o valor da dispersão em pu referente ao lado modelado,  $x_M$  o acoplamento magnético entre as bobinas correspondentes do primário e do secundário do transformador, (Aa, Bb e Cc) e  $x_m$  o acoplamento entre as bobinas não correspondentes (Ab, Ac, Ba, Bc, Ca, Cb). Estes valores serão sempre considerados em pu.

A matriz de incidência nodal é dada por (3.77) e seu processo de montagem encontra-se detalhadamente em STEVENSON (1994).

$$\mathbf{A}_{pp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

### Modelo $\Delta$

A Figura 3.11 ilustra o primário de um transformador conectado em  $\Delta$ .

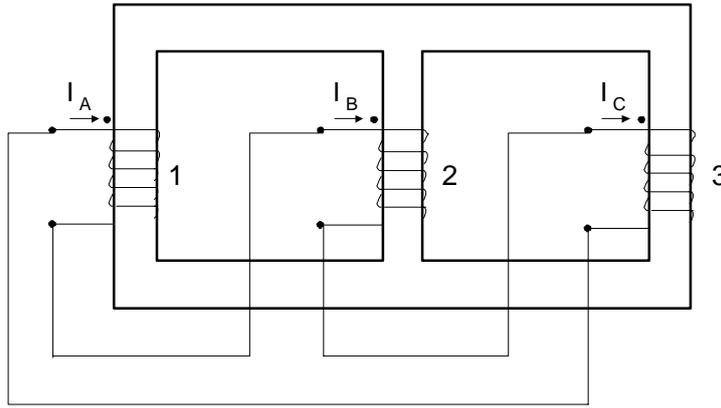


Figura 3.11 – Primário de um Transformador Conectado em  $\Delta$

Para esta conexão tem-se (ANDERSON, 1995):

$$\mathbf{Z}_{prim,pp} = \begin{bmatrix} Z_{disp} + jx_M + j4x_m & jx_m & jx_m \\ jx_m & Z_{disp} + jx_M + j4x_m & jx_m \\ jx_m & jx_m & Z_{disp} + jx_M + j4x_m \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Sendo  $Z_{disp}$  o valor da dispersão em pu referente ao lado modelado,  $x_M$  o acoplamento magnético entre as bobinas correspondentes do primário e do secundário do transformador, (Aa, Bb e Cc) e  $x_m$  o acoplamento entre as bobinas não correspondentes (Ab, Ac, Ba, Bc, Ca, Cb). Estes valores serão sempre considerados em pu.

A matriz de incidência nodal para conexões em delta é apresentada na equação (3.79).

$$\mathbf{A}_{pp} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

O valor  $\sqrt{3}$  refere-se as relações entre tensões fase-fase e tensões fase-neutro.

Para todos os modelos apresentados, caso o transformador seja constituído de unidades monofásicas  $x_m$  será igual a zero.

As injeções de correntes nas barras  $k$  e  $m$  relativas aos transformadores trifásicos de dois enrolamentos são dadas, de forma matricial, por (3.80).

$$\begin{bmatrix} I_{km}^a \\ I_{km}^b \\ I_{km}^c \\ I_{mk}^a \\ I_{mk}^b \\ I_{mk}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{pp}^{aa} & y_{pp}^{ab} & y_{pp}^{ac} & y_{ps}^{aa} & y_{ps}^{ab} & y_{ps}^{ac} \\ y_{pp}^{ba} & y_{pp}^{bb} & y_{pp}^{bc} & y_{ps}^{ba} & y_{ps}^{bb} & y_{ps}^{bc} \\ y_{pp}^{ca} & y_{pp}^{cb} & y_{pp}^{cc} & y_{ps}^{ca} & y_{ps}^{cb} & y_{ps}^{cc} \\ \hline y_{sp}^{aa} & y_{sp}^{ab} & y_{sp}^{ac} & y_{ss}^{aa} & y_{ss}^{ab} & y_{ss}^{ac} \\ y_{sp}^{ba} & y_{sp}^{bb} & y_{sp}^{bc} & y_{ss}^{ba} & y_{ss}^{bb} & y_{ss}^{bc} \\ y_{sp}^{ca} & y_{sp}^{cb} & y_{sp}^{cc} & y_{ss}^{ca} & y_{ss}^{cb} & y_{ss}^{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^a \\ V_k^b \\ V_k^c \\ \hline V_m^a \\ V_m^b \\ V_m^c \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Os valores dos termos  $y_{ss}$ ,  $y_{pp}$ ,  $y_{ps}$  e  $y_{sp}$ , são dependentes do tipo do transformador.

### Contribuições para o Fluxo de Potência

As contribuições dos transformadores para o vetor independente são dadas pela equação (3.81). A equação (3.82) apresenta as contribuições, de forma compacta, dos transformadores para a matriz Jacobiana.

$$\mathbf{f}_{trf}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \Im(I_{km}^a) \\ \Im(I_{km}^b) \\ \Im(I_{km}^c) \\ \Re(I_{km}^a) \\ \Re(I_{km}^b) \\ \Re(I_{km}^c) \\ \Im(I_{mk}^a) \\ \Im(I_{mk}^b) \\ \Im(I_{mk}^c) \\ \Re(I_{mk}^a) \\ \Re(I_{mk}^b) \\ \Re(I_{mk}^c) \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{J}_{trf} = \begin{matrix} \mathbf{z}_k & \mathbf{z}_m \\ \mathbf{i}_k^t & \\ \mathbf{i}_m^t & \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{pp} & \mathbf{Y}_{ps} \\ \mathbf{Y}_{sp} & \mathbf{Y}_{ss} \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Os termos  $\mathbf{Y}$  são matrizes 6x6 reais. Os valores de  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{z}$  são dados pelas equações (3.62) a (3.65).

### Contribuições para o Fluxo de Potência Ótimo

A função Lagrangeana é apresentada na equação (3.83).

$$\begin{aligned}
 L_{trf}(\mathbf{z}) = & \Im(I_{km}^a) \cdot \lambda_{Re_k}^a + \Im(I_{km}^b) \cdot \lambda_{Re_k}^b + \Im(I_{km}^c) \cdot \lambda_{Re_k}^c + \\
 & \Re(I_{km}^a) \cdot \lambda_{Im_k}^a + \Re(I_{km}^b) \cdot \lambda_{Im_k}^b + \Re(I_{km}^c) \cdot \lambda_{Im_k}^c + \\
 & \Im(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{Re_m}^a + \Im(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{Re_m}^b + \Im(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{Re_m}^c + \\
 & \Re(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{Im_m}^a + \Re(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{Im_m}^b + \Re(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{Im_m}^c
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

A equação (3.84) representa a matriz Hessiana relativa aos transformadores. Os termos  $\mathbf{Y}_{pp}$ ,  $\mathbf{Y}_{ps}$ ,  $\mathbf{Y}_{sp}$  e  $\mathbf{Y}_{ss}$  são sub-matrizes reais de dimensão 12x12 cujos elementos são obtidos através da derivada de segunda ordem da equação Lagrangeana.

$$\mathbf{H}_{trf} = \begin{matrix} & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \\ \begin{matrix} \mathbf{z}_1^t \\ \mathbf{z}_2^t \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{pp} & \mathbf{Y}_{ps} \\ \mathbf{Y}_{sp} & \mathbf{Y}_{ss} \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{3.84}$$

Onde:

$$\mathbf{z}_1 = \left[ V_{Re_k}^a \quad \lambda_{Re_k}^a \quad V_{Re_k}^b \quad \lambda_{Re_k}^b \quad V_{Re_k}^c \quad \lambda_{Re_k}^c \mid V_{Im_k}^a \quad \lambda_{Im_k}^a \quad V_{Im_k}^b \quad \lambda_{Im_k}^b \quad V_{Im_k}^c \quad \lambda_{Im_k}^c \right] \tag{3.85}$$

$$\mathbf{z}_2 = \left[ V_{Re_m}^a \quad \lambda_{Re_m}^a \quad V_{Re_m}^b \quad \lambda_{Re_m}^b \quad V_{Re_m}^c \quad \lambda_{Re_m}^c \mid V_{Im_m}^a \quad \lambda_{Im_m}^a \quad V_{Im_m}^b \quad \lambda_{Im_m}^b \quad V_{Im_m}^c \quad \lambda_{Im_m}^c \right] \tag{3.86}$$

A formação da matriz  $\mathbf{Y}_{pp}$  é mostrada por (3.87).

As matrizes  $\mathbf{Y}_{ps}$ ,  $\mathbf{Y}_{sp}$ ,  $\mathbf{Y}_{ss}$  seguem o mesmo padrão de formação da matriz  $\mathbf{Y}_{pp}$  porém os termos  $pp$  devem ser substituídos pelos os correspondentes para cada tipo de matriz.

$$\mathbf{Y}_{pp} = \left[ \begin{array}{cccc|cccc}
 b_{pp}^{aa} & b_{pp}^{ab} & b_{pp}^{ac} & & g_{pp}^{aa} & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{ab} \\
 b_{pp}^{aa} & b_{pp}^{ab} & b_{pp}^{ac} & & g_{pp}^{aa} & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{ab} \\
 b_{pp}^{ab} & b_{pp}^{bb} & b_{pp}^{bc} & & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{bb} & g_{pp}^{bb} & g_{pp}^{bc} \\
 b_{pp}^{ab} & b_{pp}^{bb} & b_{pp}^{bc} & & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{bb} & g_{pp}^{bb} & g_{pp}^{bc} \\
 b_{pp}^{ac} & b_{pp}^{bc} & b_{pp}^{cc} & & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{bc} & g_{pp}^{bc} & g_{pp}^{cc} \\
 b_{pp}^{ac} & b_{pp}^{bc} & b_{pp}^{cc} & & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{bc} & g_{pp}^{bc} & g_{pp}^{cc} \\
 g_{pp}^{aa} & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{ab} & & -b_{pp}^{aa} & -b_{pp}^{ab} & -b_{pp}^{ab} & -b_{pp}^{ac} \\
 g_{pp}^{aa} & g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{ab} & & -b_{pp}^{aa} & -b_{pp}^{ab} & -b_{pp}^{ab} & -b_{pp}^{ac} \\
 g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{bb} & g_{pp}^{bc} & & -b_{pp}^{ab} & -b_{pp}^{bb} & -b_{pp}^{bb} & -b_{pp}^{bc} \\
 g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{bb} & g_{pp}^{bc} & & -b_{pp}^{ab} & -b_{pp}^{bb} & -b_{pp}^{bb} & -b_{pp}^{bc} \\
 g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{bc} & g_{pp}^{cc} & & -b_{pp}^{ac} & -b_{pp}^{bc} & -b_{pp}^{bc} & -b_{pp}^{cc} \\
 g_{pp}^{ab} & g_{pp}^{bc} & g_{pp}^{cc} & & -b_{pp}^{ac} & -b_{pp}^{bc} & -b_{pp}^{bc} & -b_{pp}^{cc}
 \end{array} \right]$$

(3.87)

As condições de otimalidade referentes aos transformadores são dadas em (3.88).

$$\mathbf{b}_{uf}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{Re_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^a \\ \tilde{V}_{Re_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^b \\ \tilde{V}_{Re_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^c \\ \tilde{V}_{Im_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^a \\ \tilde{V}_{Im_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^b \\ \tilde{V}_{Im_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^c \\ \vdots \\ \tilde{V}_{Re_m}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^a \\ \tilde{V}_{Re_m}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^b \\ \tilde{V}_{Re_m}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^c \\ \tilde{V}_{Im_m}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^a \\ \tilde{V}_{Im_m}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^b \\ \tilde{V}_{Im_m}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=a,b,c} [(b_{pp}^{as} \lambda_{Re_k}^s + b_{ps}^{as} \lambda_{Re_m}^s) + (g_{pp}^{as} \lambda_{Im_k}^s + g_{ps}^{as} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{km}^a) \\ \sum_{s=a,b,c} [(b_{pp}^{bs} \lambda_{Re_k}^s + b_{ps}^{bs} \lambda_{Re_m}^s) + (g_{pp}^{bs} \lambda_{Im_k}^s + g_{ps}^{bs} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{km}^b) \\ \sum_{s=a,b,c} [(b_{pp}^{cs} \lambda_{Re_k}^s + b_{ps}^{cs} \lambda_{Re_m}^s) + (g_{pp}^{cs} \lambda_{Im_k}^s + g_{ps}^{cs} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{km}^c) \\ \sum_{s=a,b,c} [(g_{pp}^{as} \lambda_{Re_k}^s + g_{pp}^{as} \lambda_{Re_m}^s) + (b_{pp}^{as} \lambda_{Im_k}^s + b_{ps}^{as} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{km}^a) \\ \sum_{s=a,b,c} [(g_{pp}^{bs} \lambda_{Re_k}^s + g_{pp}^{bs} \lambda_{Re_m}^s) + (b_{pp}^{bs} \lambda_{Im_k}^s + b_{ps}^{bs} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{km}^b) \\ \sum_{s=a,b,c} [(g_{pp}^{cs} \lambda_{Re_k}^s + g_{pp}^{cs} \lambda_{Re_m}^s) + (b_{pp}^{cs} \lambda_{Im_k}^s + b_{ps}^{cs} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{km}^c) \\ \vdots \\ \sum_{s=a,b,c} [(b_{ss}^{as} \lambda_{Re_k}^s + b_{sp}^{as} \lambda_{Re_m}^s) + (g_{ss}^{as} \lambda_{Im_k}^s + g_{sp}^{as} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{mk}^a) \\ \sum_{s=a,b,c} [(b_{ss}^{bs} \lambda_{Re_k}^s + b_{sp}^{bs} \lambda_{Re_m}^s) + (g_{ss}^{bs} \lambda_{Im_k}^s + g_{sp}^{bs} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{mk}^b) \\ \sum_{s=a,b,c} [(b_{ss}^{cs} \lambda_{Re_k}^s + b_{sp}^{cs} \lambda_{Re_m}^s) + (g_{ss}^{cs} \lambda_{Im_k}^s + g_{sp}^{cs} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Im(I_{mk}^c) \\ \sum_{s=a,b,c} [(g_{ss}^{as} \lambda_{Re_k}^s + g_{sp}^{as} \lambda_{Re_m}^s) + (b_{ss}^{as} \lambda_{Im_k}^s + b_{sp}^{as} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{mk}^a) \\ \sum_{s=a,b,c} [(g_{ss}^{bs} \lambda_{Re_k}^s + g_{sp}^{bs} \lambda_{Re_m}^s) + (b_{ss}^{bs} \lambda_{Im_k}^s + b_{sp}^{bs} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{mk}^b) \\ \sum_{s=a,b,c} [(g_{ss}^{cs} \lambda_{Re_k}^s + g_{sp}^{cs} \lambda_{Re_m}^s) + (b_{ss}^{cs} \lambda_{Im_k}^s + b_{sp}^{cs} \lambda_{Im_m}^s)] \\ \Re(I_{mk}^c) \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

### 3.3.5 Reguladores de Tensão

Um dos problemas mais comuns em sistemas de distribuição é a manutenção dos níveis de tensão dentro de limites aceitáveis, principalmente em alimentadores longos, os quais são muito comuns principalmente em trechos rurais. A instalação de bancos de reguladores de tensão é uma das opções mais utilizadas para corrigir esse problema.

No presente trabalho, os reguladores são representados por unidades monofásicas conectadas em estrela aterradas por ser esta a configuração mais utilizada. A Figura 3.12 ilustra o modelo adotado e o modelo  $\pi$ -equivalente poder ser observado na Figura 3.13.

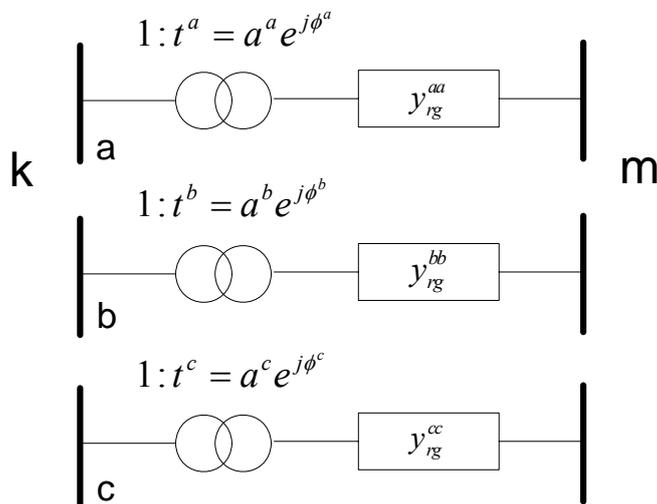


Figura 3.12 – Circuito equivalente trifásico de um regulador de tensão

$a^s$  é variável relativa ao controle de tensão, variação do tape sob carga  
 $y^{ss}$  é a admitância série do regulador.

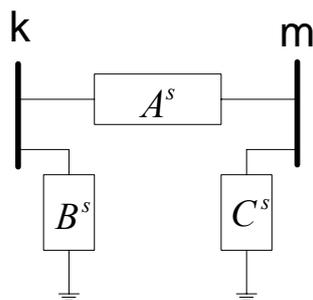


Figura 3.13 – Modelo  $\pi$ -equivalente de um regulador de tensão trifásico

Onde:

$$\begin{aligned}
 A^s &= a^s y_{rg}^{ss} \\
 B^s &= a^s (a^s - 1) y_{rg}^{ss} \\
 C^s &= (1 - a^s) y_{rg}^{ss}
 \end{aligned}
 \tag{3.89}$$

### Contribuições para o Fluxo de Potência

Utilizando o modelo  $\pi$ , calcula-se as injeções de correntes nas barras terminais  $k$  e  $m$ , conforme (3.90).

$$\begin{bmatrix} I_{km}^a \\ I_{km}^b \\ I_{km}^c \\ I_{mk}^a \\ I_{mk}^b \\ I_{mk}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a^a)^2 y_{rg}^{aa} & & & -a^a y_{rg}^{aa} & & \\ & (a^b)^2 y_{rg}^{bb} & & & -a^b y_{rg}^{bb} & \\ & & (a^c)^2 y_{rg}^{cc} & & & -a^c y_{rg}^{cc} \\ -a^a y_{rg}^{aa} & & & y_{rg}^{aa} & & \\ & -a^b y_{rg}^{bb} & & & y_{rg}^{bb} & \\ & & -a^c y_{rg}^{cc} & & & y_{rg}^{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^a \\ V_k^b \\ V_k^c \\ V_m^a \\ V_m^b \\ V_m^c \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

O regulador de tensão permite regular a tensão em uma barra qualquer do sistema. Para que isso seja realizado no fluxo de potência é necessário acrescentar um conjunto de equações a serem resolvidas (3.91).

Na equação (3.91) o equipamento está regulando a tensão na barra  $m$  em um valor especificado  $v_{esp}$ . Os termos quadráticos têm como objetivo tornar mais simples as derivadas. As contribuições para o vetor independente são apresentadas em (3.92).

$$\begin{aligned} (v_{esp}^a)^2 - (V_{Re_m}^a)^2 - (V_{Im_m}^a)^2 &= 0 \\ (v_{esp}^b)^2 - (V_{Re_m}^b)^2 - (V_{Im_m}^b)^2 &= 0 \\ (v_{esp}^c)^2 - (V_{Re_m}^c)^2 - (V_{Im_m}^c)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\mathbf{f}_{reg}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \Im(I_{km}^a) \\ \Im(I_{km}^b) \\ \Im(I_{km}^c) \\ \hline \Re(I_{km}^a) \\ \Re(I_{km}^b) \\ \Re(I_{km}^c) \\ \hline \Im(I_{mk}^a) \\ \Im(I_{mk}^b) \\ \Im(I_{mk}^c) \\ \hline \Re(I_{mk}^a) \\ \Re(I_{mk}^b) \\ \Re(I_{mk}^c) \\ \hline (v_{esp}^a)^2 - (V_{Re_m}^a)^2 - (V_{Im_m}^a)^2 \\ (v_{esp}^b)^2 - (V_{Re_m}^b)^2 - (V_{Im_m}^b)^2 \\ (v_{esp}^c)^2 - (V_{Re_m}^c)^2 - (V_{Im_m}^c)^2 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

A parcela da matriz Jacobiana referente aos reguladores de tensão é dada em (3.93).

$$\mathbf{J}_{reg} = \begin{matrix} & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{i}_k^t & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \\ \mathbf{i}_k^t & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_5 \\ \mathbf{v}_{esp}^t & \mathbf{Y}_6 & \mathbf{Y}_7 & \mathbf{Y}_8 \end{matrix} \quad (3.93)$$

Onde:

$\mathbf{v}_{esp}$  é o conjunto de equações especificados em (3.91)

$$\mathbf{z}_3 = [a^a \quad a^b \quad a^c] \quad (3.94)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} a^{a^2} b_{rg}^{aa} & & & a^{a^2} g_{rg}^{aa} & & \\ & a^{b^2} b_{rg}^{bb} & & & a^{b^2} g_{rg}^{bb} & \\ & & a^{c^2} b_{rg}^{cc} & & & a^{c^2} g_{rg}^{cc} \\ a^{a^2} g_{rg}^{aa} & & & -a^{a^2} b_{rg}^{aa} & & \\ & a^{b^2} g_{rg}^{bb} & & & -a^{b^2} b_{rg}^{bb} & \\ & & a^{c^2} g_{rg}^{cc} & & & -a^{c^2} b_{rg}^{cc} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{bmatrix} b_{rg}^{aa} & & g_{rg}^{aa} & & & \\ & b_{rg}^{bb} & & g_{rg}^{bb} & & \\ & & b_{rg}^{cc} & & g_{rg}^{cc} & \\ g_{rg}^{aa} & & & -b_{rg}^{aa} & & \\ & g_{rg}^{bb} & & & -b_{rg}^{bb} & \\ & & g_{rg}^{cc} & & & -b_{rg}^{cc} \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{Y}_3 = - \begin{bmatrix} a^a b_{rg}^{aa} & & a^a g_{rg}^{aa} & & & \\ & a^b b_{rg}^{bb} & & a^b g_{rg}^{bb} & & \\ & & a^c b_{rg}^{cc} & & a^c g_{rg}^{cc} & \\ a^a g_{rg}^{aa} & & & -a^a b_{rg}^{aa} & & \\ & a^b g_{rg}^{bb} & & & -a^b b_{rg}^{bb} & \\ & & a^c g_{rg}^{cc} & & & -a^c b_{rg}^{cc} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

$$\mathbf{Y}_4 = \begin{bmatrix} \Im(2a^a y_{rg}^{aa} V_k^a - y_{rg}^{aa} V_m^a) & & & & & \\ & \Im(2a^b y_{rg}^{bb} V_k^b - y_{rg}^{bb} V_m^b) & & & & \\ & & \Im(2a^c y_{rg}^{cc} V_k^c - y_{rg}^{cc} V_m^c) & & & \\ \Re(2a^a y_{rg}^{aa} V_k^a - y_{rg}^{aa} V_m^a) & & & & & \\ & \Re(2a^b y_{rg}^{bb} V_k^b - y_{rg}^{bb} V_m^b) & & & & \\ & & \Re(2a^c y_{rg}^{cc} V_k^c - y_{rg}^{cc} V_m^c) & & & \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{Y}_5 = \begin{bmatrix} \Im(-y_{rg}^{aa} V_k^a) & & & & & \\ & \Im(-y_{rg}^{bb} V_k^b) & & & & \\ & & \Im(-y_{rg}^{cc} V_k^c) & & & \\ \Re(-y_{rg}^{aa} V_k^a) & & & & & \\ & \Re(-y_{rg}^{bb} V_k^b) & & & & \\ & & \Re(-y_{rg}^{cc} V_k^c) & & & \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

$$\mathbf{Y}_6 = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

$$\mathbf{Y}_7 = \begin{bmatrix} -2V_{Re_m}^a & & & & & \\ & -2V_{Re_m}^b & & & & \\ & & -2V_{Re_m}^c & & & \\ & & & -2V_{Im_m}^a & & \\ & & & & -2V_{Im_m}^b & \\ & & & & & -2V_{Im_m}^c \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$\mathbf{Y}_8 = \begin{bmatrix} 0 \\ & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

O tape é uma variável discreta e possui uma faixa de variação conforme (3.103). Neste caso, durante o processo iterativo trata-se o tape como uma variável contínua.

$$a_{\min}^s \leq a^s \leq a_{\max}^s \quad (3.103)$$

### Contribuições para o Fluxo de Potência Ótimo

Na equação (3.104) apresenta-se a função Lagrangeana relativa as equações de injeções de corrente e a equação (3.105) refere-se a parcela da função Lagrangeana que representa os limites (restrições de canalização – B.3) dos tapes.

$$L_{reg}(\mathbf{z}) = \begin{aligned} & \Im(I_{km}^a) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^a + \Im(I_{km}^b) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^b + \Im(I_{km}^c) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^c + \\ & \Re(I_{km}^a) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^a + \Re(I_{km}^b) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^b + \Re(I_{km}^c) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^c + \\ & \Im(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{\text{Re}_m}^a + \Im(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{\text{Re}_m}^b + \Im(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{\text{Re}_m}^c + \\ & \Re(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{\text{Im}_m}^a + \Re(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{\text{Im}_m}^b + \Re(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{\text{Im}_m}^c \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$L_{reg}(\mathbf{z}) = \pi_{low}(a - s_{low} - a_{\min}) + \pi_{up}(a + s_{up} - a_{\max}) + \mu \log(s_{low}) + \mu \log(s_{up}) \quad (3.105)$$

A contribuições para a matriz Hessiana referente aos reguladores de tensão é dada em (3.106).

$$\mathbf{H}_{reg} = \begin{matrix} & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_1^t & \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_5 \\ \mathbf{Y}_4 & \mathbf{Y}_5 & \mathbf{Y}_6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{z}_2^t & \\ \mathbf{z}_3^t & \end{matrix} \quad (3.106)$$

Onde:

$$\mathbf{z}_1 = \left[ V_{\text{Re}_k}^a \quad \lambda_{\text{Re}_k}^a \quad V_{\text{Re}_k}^b \quad \lambda_{\text{Re}_k}^b \quad V_{\text{Re}_k}^c \quad \lambda_{\text{Re}_k}^c \quad \Big| \quad V_{\text{Im}_k}^a \quad \lambda_{\text{Im}_k}^a \quad V_{\text{Im}_k}^b \quad \lambda_{\text{Im}_k}^b \quad V_{\text{Im}_k}^c \quad \lambda_{\text{Im}_k}^c \right] \quad (3.107)$$

$$\mathbf{z}_2 = \left[ V_{\text{Re}_m}^a \quad \lambda_{\text{Re}_m}^a \quad V_{\text{Re}_m}^b \quad \lambda_{\text{Re}_m}^b \quad V_{\text{Re}_m}^c \quad \lambda_{\text{Re}_m}^c \quad \Big| \quad V_{\text{Im}_m}^a \quad \lambda_{\text{Im}_m}^a \quad V_{\text{Im}_m}^b \quad \lambda_{\text{Im}_m}^b \quad V_{\text{Im}_m}^c \quad \lambda_{\text{Im}_m}^c \right] \quad (3.108)$$

$$\mathbf{z}_3 = \left[ a^a \quad a^b \quad a^c \right] \quad (3.109)$$



$$\mathbf{Y}_4 = \begin{bmatrix} y_1^s \\ y_2^s \\ & y_1^s \\ & y_2^s \\ & & y_1^s \\ & & y_2^s \\ \hline y_3^s \\ y_4^s \\ & y_3^s \\ & y_4^s \\ & & y_3^s \\ & & y_4^s \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$\mathbf{Y}_5 = \begin{bmatrix} y_5^s \\ y_6^s \\ & y_5^s \\ & y_6^s \\ & & y_5^s \\ & & y_6^s \\ \hline y_7^s \\ y_8^s \\ & y_7^s \\ & y_8^s \\ & & y_7^s \\ & & y_8^s \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Sendo:

$$y_1^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^s \partial a^s} = \Im(2a^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(2a^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Im}_k}^s + \Im(-y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Re}_m}^s + \Re(-y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Im}_m}^s \quad (3.115)$$

$$y_2^s = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{\text{Re}_k}^s \partial a^s} = \Im(2a^s y_{rg}^{ss} V_k^s - y_{rg}^{ss} V_m^s) \quad (3.116)$$

$$y_3^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^s \partial a^s} = \Im(2ja^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(2ja^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Im}_k}^s + \Im(-jy_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Re}_m}^s + \Re(-jy_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Im}_m}^s \quad (3.117)$$

$$y_4^s = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}^s \partial a^s} = \Re(2a^s y_{rg}^{ss} V_k^s - y_{rg}^{ss} V_m^s) \quad (3.118)$$

$$y_5^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_m}^s \partial a^s} = \Im(-y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(-y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Im}_k}^s \quad (3.119)$$

$$y_6^s = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{\text{Re}_m}^s \partial a^s} = \Im(-y_{rg}^{ss} V_k^s) \quad (3.120)$$

$$y_7^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_m}^s \partial a^s} = \Im(-j y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(-j y_{rg}^{ss}) \lambda_{\text{Im}_k}^s \quad (3.121)$$

$$y_8^s = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{\text{Im}_m}^s \partial a^s} = \Re(-y_{rg}^{ss} V_k^s) \quad (3.122)$$

$$\mathbf{Y}_6 = \begin{bmatrix} y_9^s + pi_{reg} & & \\ & y_9^s + pi_{reg} & \\ & & y_9^s + pi_{reg} \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

$$y_9^s = \frac{\partial^2 L}{\partial a^s \partial a^s} = \Im(2y_{rg}^{ss} V_k^s) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(2y_{rg}^{ss} V_k^s) \lambda_{\text{Im}_k}^s \quad (3.124)$$

$pi_{reg}$  são as contribuições do método de pontos interiores para a matriz Hessiana conforme apresentado no Apêndice B.

As parcelas relativas as condições de otimalidade referentes aos reguladores são apresentadas em (3.125).

$$\mathbf{b}_{reg}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \dot{V}_{Re_k}^a \\ \dot{\lambda}_{Re_k}^a \\ \dot{V}_{Re_k}^b \\ \dot{\lambda}_{Re_k}^b \\ \dot{V}_{Re_k}^c \\ \dot{\lambda}_{Re_k}^c \\ \dots \\ \dot{V}_{Im_k}^a \\ \dot{\lambda}_{Im_k}^a \\ \dot{V}_{Im_k}^b \\ \dot{\lambda}_{Im_k}^b \\ \dot{V}_{Im_k}^c \\ \dot{\lambda}_{Im_k}^c \\ \dots \\ \dot{V}_{Re_m}^a \\ \dot{\lambda}_{Re_m}^a \\ \dot{V}_{Re_m}^b \\ \dot{\lambda}_{Re_m}^b \\ \dot{V}_{Re_m}^c \\ \dot{\lambda}_{Re_m}^c \\ \dots \\ \dot{V}_{Im_m}^a \\ \dot{\lambda}_{Im_m}^a \\ \dot{V}_{Im_m}^b \\ \dot{\lambda}_{Im_m}^b \\ \dot{V}_{Im_m}^c \\ \dot{\lambda}_{Im_m}^c \\ \dot{a}^a \\ \dot{a}^b \\ \dot{a}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^a \\ \Im(I_{km}^a) \\ z_1^b \\ \Im(I_{km}^b) \\ z_1^c \\ \Im(I_{km}^c) \\ \dots \\ z_2^a \\ \Re(I_{km}^a) \\ z_2^b \\ \Re(I_{km}^b) \\ z_2^c \\ \Re(I_{km}^c) \\ \dots \\ z_3^a \\ \Im(I_{mk}^a) \\ z_3^b \\ \Im(I_{mk}^b) \\ z_3^c \\ \Im(I_{mk}^c) \\ \dots \\ z_4^a \\ \Re(I_{mk}^a) \\ z_4^b \\ \Re(I_{mk}^b) \\ z_4^c \\ \Re(I_{mk}^c) \\ \dots \\ z_5^a + pi_{reg} \\ z_5^b + pi_{reg} \\ z_5^c + pi_{reg} \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

Onde:

$$z_1^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s} = \Im(a^{s^2} y_{rg}^{ss}) \lambda_{Re_k}^s + \Re(a^{s^2} y_{rg}^{ss}) \lambda_{Im_k}^s \\ + \Im(-a^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{Re_m}^s + \Re(-a^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{Im_m}^s \quad (3.126)$$

$$z_2^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s} = \Im(ja^{s^2} y_{rg}^{ss}) \lambda_{Re_k}^s + \Re(ja^{s^2} y_{rg}^{ss}) \lambda_{Im_k}^s \\ + \Im(-ja^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{Re_m}^s + \Re(-ja^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{Im_m}^s \quad (3.127)$$

$$z_3^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_m}^s} = \Im(-a^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{Re_k}^s + \Re(-a^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{Im_k}^s + \Im(y_{rg}^{ss}) \lambda_{Re_m}^s + \Re(y_{rg}^{ss}) \lambda_{Im_m}^s \quad (3.128)$$

$$z_4^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_m}^s} = \Im(-ja^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{Re_k}^s + \Re(-ja^s y_{rg}^{ss}) \lambda_{Im_k}^s + \Im(jy_{rg}^{ss}) \lambda_{Re_m}^s + \Re(jy_{rg}^{ss}) \lambda_{Im_m}^s \quad (3.129)$$

$$z_5^s = \frac{\partial^2 L}{\partial a^s} = \Im(2a^s y_{rg}^{ss} V_k^s - y_{rg}^{ss} V_m^s) \lambda_{Re_k}^s + \Re(2a^s y_{rg}^{ss} V_k^s - y_{rg}^{ss} V_m^s) \lambda_{Im_k}^s + \Im(-y_{rg}^{ss} V_k^s) \lambda_{Re_m}^s + \Re(-y_{rg}^{ss} V_k^s) \lambda_{Im_m}^s \quad (3.130)$$

$pi_{reg}$  são as contribuições do método de pontos interiores para a o vetor de otimalidade conforme apresentado no Apêndice B.

### 3.3.6 Compensações Série

As compensações série foram modeladas como susceptâncias variáveis conectadas entre duas barras. Os controles de tensões nodais ou correntes em ramos podem ser alcançados através da variação da susceptância. Estes equipamentos não possuem acoplamento entre fases e são representados pela Figura 3.14.

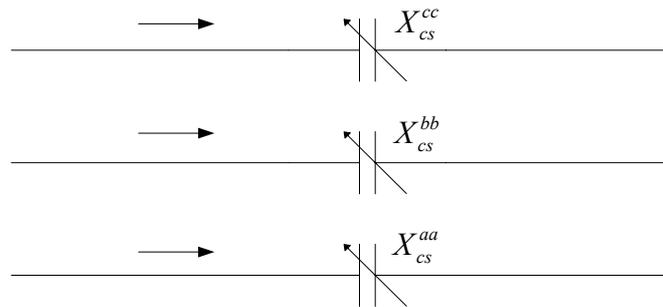


Figura 3.14 – Modelo utilizado de compensadores série

As correntes injetadas nas barras  $k$  e  $m$  são calculadas conforme (3.131). Os valores  $b_{cs}$  são variáveis de estados e podem ser utilizadas para controlar tensões nodais ou correntes em ramos. A variação da susceptância é limitada segundo a equação (3.132).

$$\begin{bmatrix} I_{km}^a \\ I_{km}^b \\ I_{km}^c \\ I_{mk}^a \\ I_{mk}^b \\ I_{mk}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jb_{cs}^{aa} & & & & & \\ & jb_{cs}^{bb} & & & & \\ & & jb_{cs}^{cc} & & & \\ -jb_{cs}^{aa} & & & & & \\ & -jb_{cs}^{bb} & & & & \\ & & -jb_{cs}^{cc} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^a \\ V_k^b \\ V_k^c \\ V_m^a \\ V_m^b \\ V_m^c \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

$$b_{\min}^{ss} \leq b_{cs}^{ss} \leq b_{\max}^{ss} \quad (3.132)$$

### 3.3.6.1 Compensação Série Controlando Tensões Nodais

Pode-se utilizar o conjunto de equações (3.133) para controlar o módulo em tensões nodais da barra  $m$ . Os termos quadráticos da equação de controle têm como objetivo diminuir a complexidade das derivadas no processo de montagem das matrizes Jacobiana e da Hessiana.

$$\begin{aligned}
 (v_{esp}^a)^2 - (V_{Re_m}^a)^2 - (V_{Im_m}^a)^2 &= 0 \\
 (v_{esp}^b)^2 - (V_{Re_m}^b)^2 - (V_{Im_m}^b)^2 &= 0 \\
 (v_{esp}^c)^2 - (V_{Re_m}^c)^2 - (V_{Im_m}^c)^2 &= 0
 \end{aligned} \quad (3.133)$$

As contribuições para o vetor independente da compensação série para o controle de tensões nodais são dadas por (3.134) e para a matriz Jacobiana pela equação (3.135).

$$\mathbf{f}_{cs,v}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \Im(I_{km}^a) \\ \Im(I_{km}^b) \\ \Im(I_{km}^c) \\ \hline \Re(I_{km}^a) \\ \Re(I_{km}^b) \\ \Re(I_{km}^c) \\ \hline \Im(I_{mk}^a) \\ \Im(I_{mk}^b) \\ \Im(I_{mk}^c) \\ \hline \Re(I_{mk}^a) \\ \Re(I_{mk}^b) \\ \Re(I_{mk}^c) \\ \hline (V_{esp}^a)^2 - (V_{Re_m}^a)^2 - (V_{Im_m}^a)^2 \\ (V_{esp}^b)^2 - (V_{Re_m}^b)^2 - (V_{Im_m}^b)^2 \\ (V_{esp}^c)^2 - (V_{Re_m}^c)^2 - (V_{Im_m}^c)^2 \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

$V_{Re_k}^a$	$V_{Re_k}^b$	$V_{Re_k}^c$	$V_{Im_k}^a$	$V_{Im_k}^b$	$V_{Im_k}^c$	$V_{Re_m}^a$	$V_{Re_m}^b$	$V_{Re_m}^c$	$V_{Im_m}^a$	$V_{Im_m}^b$	$V_{Im_m}^c$	$b^{aa}$	$b^{bb}$	$b^{cc}$
$b_{cs}^{aa}$	$b_{cs}^{bb}$	$b_{cs}^{cc}$	$-b_{cs}^{aa}$	$-b_{cs}^{bb}$	$-b_{cs}^{cc}$	$b_{cs}^{aa}$	$b_{cs}^{bb}$	$b_{cs}^{cc}$	$-b_{cs}^{aa}$	$-b_{cs}^{bb}$	$-b_{cs}^{cc}$	$x_1^s$	$x_1^s$	$x_1^s$
$-b_{cs}^{aa}$	$-b_{cs}^{bb}$	$-b_{cs}^{cc}$	$b_{cs}^{aa}$	$b_{cs}^{bb}$	$b_{cs}^{cc}$	$-b_{cs}^{aa}$	$-b_{cs}^{bb}$	$-b_{cs}^{cc}$	$x_3^s$	$x_3^s$	$x_3^s$	$x_3^s$	$x_3^s$	$x_3^s$
$x_5^s$	$x_5^s$	$x_5^s$	$x_6^s$	$x_6^s$	$x_6^s$	$x_6^s$	$x_6^s$	$x_6^s$	$x_5^s$	$x_5^s$	$x_5^s$	$x_6^s$	$x_6^s$	$x_6^s$

(3.135)

Onde:

$$x_1^s = \Im(j(V_k^a - V_m^a)) \quad (3.136)$$

$$x_2^s = \Re(j(V_k^a - V_m^a)) \quad (3.137)$$

$$x_3^s = -\Im(j(V_k^a - V_m^a)) \quad (3.138)$$

$$x_4^s = -\Re(j(V_k^a - V_m^a)) \quad (3.139)$$

$$x_5^s = -2V_{\text{Re}_m}^s \quad (3.140)$$

$$x_6^s = -2V_{\text{Im}_m}^s \quad (3.141)$$

### 3.3.6.2 Compensação Série Controlando Correntes em Ramos

Para controlar a corrente em um ramo  $k$ - $m$  utiliza-se o conjunto de equações (3.142), os termos quadráticos da equação de controle têm como objetivo facilitar o processo de montagem da matriz Jacobiana e da matriz Hessiana.

$$\begin{aligned} (i_{esp}^a)^2 - (I_{\text{Re}_{km}}^a)^2 - (I_{\text{Im}_{km}}^a)^2 &= 0 \\ (i_{esp}^b)^2 - (I_{\text{Re}_{km}}^b)^2 - (I_{\text{Im}_{km}}^b)^2 &= 0 \\ (i_{esp}^c)^2 - (I_{\text{Re}_{km}}^c)^2 - (I_{\text{Im}_{km}}^c)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.142)$$

As contribuições dos compensadores série de controle de corrente para a montagem do vetor independente são dadas por (3.143) e as contribuições para a matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_{cs,i}(\mathbf{z})$  são apresentadas em (3.144).

$$\mathbf{f}_{cs,i}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \Im(I_{km}^a) \\ \Re(I_{km}^a) \\ \Im(I_{km}^b) \\ \Re(I_{km}^b) \\ \Im(I_{km}^c) \\ \Re(I_{km}^c) \\ \Im(I_{mk}^a) \\ \Re(I_{mk}^a) \\ \Im(I_{mk}^b) \\ \Re(I_{mk}^b) \\ \Im(I_{mk}^c) \\ \Re(I_{mk}^c) \\ (\hat{i}_{esp}^a)^2 - \Re(I_{km}^a)^2 - \Im(I_{km}^a)^2 \\ (\hat{i}_{esp}^b)^2 - \Re(I_{km}^b)^2 - \Im(I_{km}^b)^2 \\ (\hat{i}_{esp}^c)^2 - \Re(I_{km}^c)^2 - \Im(I_{km}^c)^2 \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

$V_{Re_k}^a$	$V_{Re_k}^b$	$V_{Re_k}^c$	$V_{Im_k}^a$	$V_{Im_k}^b$	$V_{Im_k}^c$	$V_{Re_m}^a$	$V_{Re_m}^b$	$V_{Re_m}^c$	$V_{Im_m}^a$	$V_{Im_m}^b$	$V_{Im_m}^c$	$b^{aa}$	$b^{bb}$	$b^{cc}$
$b_{cs}^{aa}$	$b_{cs}^{bb}$	$b_{cs}^{cc}$	$-b_{cs}^{aa}$	$-b_{cs}^{bb}$	$-b_{cs}^{cc}$	$b_{cs}^{aa}$	$b_{cs}^{bb}$	$b_{cs}^{cc}$	$-b_{cs}^{aa}$	$-b_{cs}^{bb}$	$-b_{cs}^{cc}$	$x_1^s$	$x_1^s$	$x_1^s$
$-b_{cs}^{aa}$	$-b_{cs}^{bb}$	$-b_{cs}^{cc}$	$b_{cs}^{aa}$	$b_{cs}^{bb}$	$b_{cs}^{cc}$	$-b_{cs}^{aa}$	$-b_{cs}^{bb}$	$-b_{cs}^{cc}$	$x_3^s$	$x_3^s$	$x_3^s$	$x_3^s$	$x_3^s$	$x_3^s$
$x_5^s$	$x_5^s$	$x_5^s$	$x_6^s$	$x_6^s$	$x_6^s$	$x_7^s$	$x_7^s$	$x_7^s$	$x_8^s$	$x_8^s$	$x_8^s$	$x_4^s$	$x_4^s$	$x_4^s$

(3.144)

Onde:

$$x_1^s = \Im(j(V_k^a - V_m^a)) \quad (3.145)$$

$$x_2^s = \Re(j(V_k^a - V_m^a)) \quad (3.146)$$

$$x_3^s = -\Im(j(V_k^a - V_m^a)) \quad (3.147)$$

$$x_4^s = -\Re(j(V_k^a - V_m^a)) \quad (3.148)$$

$$x_5^s = -2\Re(jb_{cs}^{ss} I_{km}^s) - 2\Im(jb_{cs}^{ss} I_{km}^s) \quad (3.149)$$

$$x_6^s = 2\Re(b_{cs}^{ss} I_{km}^s) + 2\Im(b_{cs}^{ss} I_{km}^s) \quad (3.150)$$

$$x_7^s = 2\Re(jb_{cs}^{ss} I_{km}^s) + 2\Im(jb_{cs}^{ss} I_{km}^s) \quad (3.151)$$

$$x_8^s = -2\Re(b_{cs}^{ss} I_{km}^s) - 2\Im(b_{cs}^{ss} I_{km}^s) \quad (3.152)$$

### Contribuições para o Fluxo de Potência Ótimo

Utilizando-se as equações de correntes injetadas nas barras  $k$  e  $m$  monta-se parte da equação Lagrangeana referente aos compensadores série, (3.153).

$$\begin{aligned} L_{cs}(\mathbf{z}) = & \Im(I_{km}^a) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^a + \Im(I_{km}^b) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^b + \Im(I_{km}^c) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^c + \\ & \Re(I_{km}^a) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^a + \Re(I_{km}^b) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^b + \Re(I_{km}^c) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^c + \\ & \Im(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{\text{Re}_m}^a + \Im(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{\text{Re}_m}^b + \Im(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{\text{Re}_m}^c + \\ & \Re(I_{mk}^a) \cdot \lambda_{\text{Im}_m}^a + \Re(I_{mk}^b) \cdot \lambda_{\text{Im}_m}^b + \Re(I_{mk}^c) \cdot \lambda_{\text{Im}_m}^c \end{aligned} \quad (3.153)$$

A equação (3.154) representa a parcela da função Lagrangeana que corresponde as restrições de canalização (B.3).

$$L_{cs}(\mathbf{z}) = \pi_{low}(b - s_{low} - b_{min}) + \pi_{up}(b + s_{up} - b_{max}) + \mu \log(s_{low}) + \mu \log(s_{up}) \quad (3.154)$$

Na equação (3.155) é mostrada a contribuição dos compensadores série para a matriz Hessiana. Sendo a susceptância uma variável de estado ela deve ser otimizada, com isto deve-se calcular a variação da função Lagrangeana (derivadas) em relação a ela.



$$\mathbf{Y}_3 = \begin{bmatrix} pi_{cs} & & \\ & pi_{cs} & \\ & & pi_{cs} \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Sendo:

$$y_1^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial b_{cs}^s} = \lambda_{Re_k}^s - \lambda_{Re_m}^s \quad (3.162)$$

$$y_2^s = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{Re_k}^s \partial b_{cs}^{ss}} = \Im(jV_k^s - jV_m^s) \quad (3.163)$$

$$y_3^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s \partial b_{cs}^{ss}} = -\lambda_{Im_k}^s + \lambda_{Im_m}^s \quad (3.164)$$

$$y_4^s = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{Im_k}^s \partial b_{cs}^{ss}} = \Re(jV_k^s - jV_m^s) \quad (3.165)$$

Os  $pi_{cs}$  são as contribuições das restrições de canalização do valor de  $b_{cs}$ , relativa a equação (3.154). A contribuição dos compensadores série para o vetor independente é apresentada em (3.166).

$$\mathbf{b}_{cs}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \dot{V}_{\text{Re}_k}^a \\ \dot{\lambda}_{\text{Re}_k}^a \\ \dot{V}_{\text{Re}_k}^b \\ \dot{\lambda}_{\text{Re}_k}^b \\ \dot{V}_{\text{Re}_k}^c \\ \dot{\lambda}_{\text{Re}_k}^c \\ \dots \\ \dot{V}_{\text{Im}_k}^a \\ \dot{\lambda}_{\text{Im}_k}^a \\ \dot{V}_{\text{Im}_k}^b \\ \dot{\lambda}_{\text{Im}_k}^b \\ \dot{V}_{\text{Im}_k}^c \\ \dot{\lambda}_{\text{Im}_k}^c \\ \hline \dot{V}_{\text{Re}_m}^a \\ \dot{\lambda}_{\text{Re}_m}^a \\ \dot{V}_{\text{Re}_m}^b \\ \dot{\lambda}_{\text{Re}_m}^b \\ \dot{V}_{\text{Im}_m}^c \\ \dot{\lambda}_{\text{Re}_m}^c \\ \dots \\ \dot{V}_{\text{Im}_m}^a \\ \dot{\lambda}_{\text{Im}_m}^a \\ \dot{V}_{\text{Im}_m}^b \\ \dot{\lambda}_{\text{Im}_m}^b \\ \dot{V}_{\text{Im}_m}^c \\ \dot{\lambda}_{\text{Im}_m}^c \\ \hline \dot{b}_{cs}^a \\ \dot{b}_{cs}^b \\ \dot{b}_{cs}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^s \\ \Im(I_{km}^a) \\ z_1^s \\ \Im(I_{km}^b) \\ z_1^s \\ \Im(I_{km}^c) \\ \dots \\ z_2^s \\ \Re(I_{km}^a) \\ z_2^s \\ \Re(I_{km}^b) \\ z_2^s \\ \Re(I_{km}^c) \\ \hline -z_1^s \\ \Im(I_{mk}^a) \\ -z_1^s \\ \Im(I_{mk}^b) \\ -z_1^s \\ \Im(I_{mk}^c) \\ \dots \\ -z_2^s \\ \Re(I_{mk}^a) \\ -z_2^s \\ \Re(I_{mk}^b) \\ -z_2^s \\ \Re(I_{mk}^c) \\ \hline z_3^s + pi_{cs} \\ z_3^s + pi_{cs} \\ z_3^s + pi_{cs} \end{bmatrix} \quad (3.166)$$

Onde:

$$z_1^s = \Im(jb_{cs}^{ss})(\lambda_{\text{Re}_k}^s - \lambda_{\text{Re}_m}^s) + \Re(jb_{cs}^{ss})(\lambda_{\text{Im}_k}^s - \lambda_{\text{Im}_m}^s) \quad (3.167)$$

$$z_2^s = \Im(-b_{cs}^{ss})(\lambda_{\text{Re}_k}^s - \lambda_{\text{Re}_m}^s) + \Re(-b_{cs}^{ss})(\lambda_{\text{Im}_k}^s - \lambda_{\text{Im}_m}^s) \quad (3.168)$$

$$\begin{aligned} z_3^s &= \Im(jV_k^s - jV_m^s)\lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(jV_k^s - jV_m^s)\lambda_{\text{Im}_k}^s \\ &\quad - \Im(jV_k^s - jV_m^s)\lambda_{\text{Re}_m}^s - \Re(jV_k^s - jV_m^s)\lambda_{\text{Im}_m}^s \end{aligned} \quad (3.169)$$

$pi_{cs}$  são as contribuições do método de pontos interiores para a vetor de otimalidade conforme apresentado no Apêndice B.

### 3.3.7 Cargas (Modelo ZIP)

Em sistemas trifásicos, deve-se considerar dois tipos básicos de conexão de cargas: conexão em estrela aterrada e conexão em delta, estas conexões estão ilustradas nas Figura 3.15 e Figura 3.16 respectivamente.

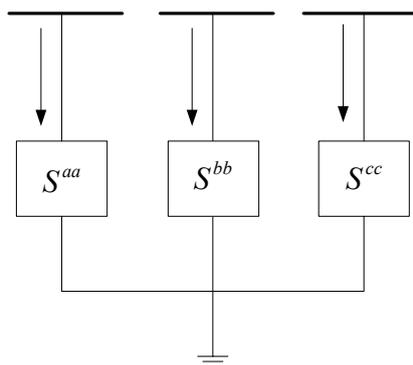


Figura 3.15 – Representação de uma carga em estrela aterrada

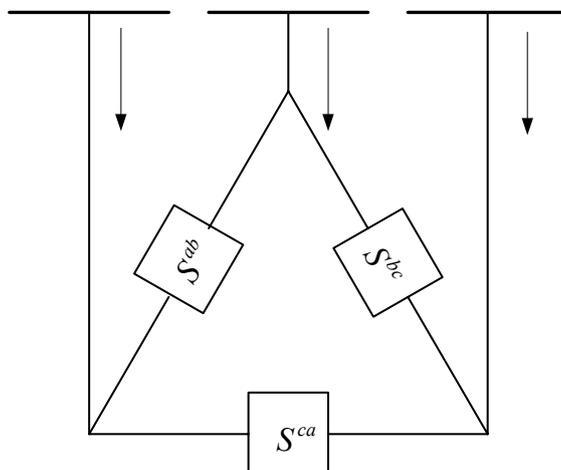


Figura 3.16 – Representação de uma carga em delta

Como no modelo monofásico, a modelagem trifásica deve levar em conta os efeitos da tensão sobre as cargas do sistema, bem como a existência de cargas monofásicas e bifásicas. A modelagem destas cargas é dada pelas equações (3.170) para cargas em estrela e (3.171) para cargas em delta:

$$S^{ss} = P^{ss} + jQ^{ss}$$

$$P_k^{ss} = P_0^{ss} \left( p_2^{ss} + p_1^{ss} \frac{|V_k^s|}{|V_0|} + p_0^{ss} \left( \frac{|V_k^s|}{|V_0|} \right)^2 \right) \quad (3.170)$$

$$Q_k^{ss} = Q_0^{ss} \left( q_2^{ss} + q_1^{ss} \frac{|V_k^s|}{|V_0|} + q_0^{ss} \left( \frac{|V_k^s|}{|V_0|} \right)^2 \right)$$

$$S^{st} = P^{st} + jQ^{st}$$

$$P_k^{st} = P_0^{st} \left( p_2^{st} + p_1^{st} \frac{|V_k^{st}|}{|V_0|} + p_0^{st} \left( \frac{|V_k^{st}|}{|V_0|} \right)^2 \right) \quad (3.171)$$

$$Q_k^{st} = Q_0^{st} \left( q_2^{st} + q_1^{st} \frac{|V_k^{st}|}{|V_0|} + q_0^{st} \left( \frac{|V_k^{st}|}{|V_0|} \right)^2 \right)$$

Onde:

$V_0$  é a tensão em que foi especificada a potência da carga.

$p_i^{ss}, q_i^{ss}$  são as ponderações que definem as proporções de cada componente do modelo (onde  $i = 0, 1, 2$ ).

As injeções de correntes referentes às cargas conectadas em estrela aterrada são apresentadas em (3.172) e das cargas conectadas em delta são mostradas em (3.173). Os termos das equações se referem às contribuições de potência constante, corrente constante e impedância constante, respectivamente.

$$\begin{aligned} I_{y,k}^a &= \frac{S_{aa,sc}^*}{V_k^{a*}} + \frac{V_k^a S_{aa,ic}^*}{|V_k^a|} + V_k^a S_{aa,zc}^* \\ I_{y,k}^b &= \frac{S_{bb,sc}^*}{V_k^{b*}} + \frac{V_k^b S_{bb,ic}^*}{|V_k^b|} + V_k^b S_{bb,zc}^* \\ I_{y,k}^c &= \frac{S_{cc,sc}^*}{V_k^{c*}} + \frac{V_k^c S_{cc,ic}^*}{|V_k^c|} + V_k^c S_{cc,zc}^* \end{aligned} \quad (3.172)$$

Onde:

$$S_{ss,sc}^* = p_{sc} P_{ss} - jq_{sc} Q_{ss}, \text{ sendo } p_{sc} \text{ e } q_{sc} \text{ as ponderações de potência constante.}$$

$$S_{ss,ic}^* = p_{ic} P_{ss} - jq_{ic} Q_{ss}, \text{ sendo } p_{ic} \text{ e } q_{ic} \text{ as ponderações de corrente constante.}$$

$$S_{ss,zc}^* = p_{zc} P_{ss} - jq_{zc} Q_{ss}, \text{ sendo } p_{zc} \text{ e } q_{zc} \text{ as ponderações de impedância constante.}$$

$$\begin{aligned} I_{\Delta,k}^a &= I_{\Delta,k}^{ab} - I_{\Delta,k}^{ca} \\ I_{\Delta,k}^b &= I_{\Delta,k}^{bc} - I_{\Delta,k}^{ab} \\ I_{\Delta,k}^c &= I_{\Delta,k}^{ca} - I_{\Delta,k}^{bc} \\ I_{\Delta,k}^{ab} &= \frac{S_{ab,sc}^*}{V_k^{a^*} - V_k^{b^*}} + \frac{(V_k^a - V_k^b) S_{ab,ic}^*}{|V_k^a - V_k^b|} + (V_k^a - V_k^b) S_{ab,zc}^* \\ I_{\Delta,k}^{bc} &= \frac{S_{bc,sc}^*}{V_k^{b^*} - V_k^{c^*}} + \frac{(V_k^b - V_k^c) S_{bc,ic}^*}{|V_k^b - V_k^c|} + (V_k^b - V_k^c) S_{bc,zc}^* \\ I_{\Delta,k}^{ca} &= \frac{S_{ca,sc}^*}{V_k^{c^*} - V_k^{a^*}} + \frac{(V_k^c - V_k^a) S_{ca,ic}^*}{|V_k^c - V_k^a|} + (V_k^c - V_k^a) S_{ca,zc}^* \end{aligned} \quad (3.173)$$

### Contribuições para o Fluxo de Potência

De forma geral, o vetor independente é formado pela combinação dos dois tipos de conexões de cargas quando existentes, e sua forma matricial é apresentada na equação (3.174).

$$\mathbf{f}_{crg}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \Im(I_{y,k}^a + I_{\Delta,k}^a) \\ \Im(I_{y,k}^b + I_{\Delta,k}^b) \\ \Im(I_{y,k}^c + I_{\Delta,k}^c) \\ \Re(I_{y,k}^a + I_{\Delta,k}^a) \\ \Re(I_{y,k}^b + I_{\Delta,k}^b) \\ \Re(I_{y,k}^c + I_{\Delta,k}^c) \end{bmatrix} \quad (3.174)$$

As contribuições das cargas conectadas em estrela aterrada para a matriz Jacobiana são apresentadas na equação (3.175), sendo seus termos calculados pelas equações (3.176) e (3.177).

$$\begin{matrix} \Im(I_{y,k}^a) \\ \Im(I_{y,k}^b) \\ \Im(I_{y,k}^c) \\ \Re(I_{y,k}^a) \\ \Re(I_{y,k}^b) \\ \Re(I_{y,k}^c) \end{matrix} \begin{bmatrix} V_{\text{Re}_k}^a & V_{\text{Re}_k}^b & V_{\text{Re}_k}^c & V_{\text{Im}_k}^a & V_{\text{Im}_k}^b & V_{\text{Im}_k}^c \\ x_1^a & & & x_2^a & & \\ & x_1^b & & & x_2^b & \\ & & x_1^c & & & x_2^c \\ \hline x_3^a & & & x_4^a & & \\ & x_3^b & & & x_4^b & \\ & & x_3^c & & & x_4^c \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

$$\begin{aligned} x_1^s &= \Im\left(\frac{\partial I_{y,k}^s}{\partial V_{\text{Re}_k}^s}\right) \\ x_2^s &= \Im\left(\frac{\partial I_{y,k}^s}{\partial V_{\text{Im}_k}^s}\right) \\ x_3^s &= \Re\left(\frac{\partial I_{y,k}^s}{\partial V_{\text{Re}_k}^s}\right) \\ x_4^s &= \Re\left(\frac{\partial I_{y,k}^s}{\partial V_{\text{Im}_k}^s}\right) \end{aligned} \quad (3.176)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{y,k}^s}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} &= -\frac{S_{ss,sc}^*}{(V_k^s)^2} - j \frac{S_{ss,ic}^* V_{\text{Im}_k}^s}{(|V_k^s|)^3} + S_{ss,zc}^* \\ \frac{\partial I_{y,k}^s}{\partial V_{\text{Im}_k}^s} &= j \frac{S_{ss,sc}^*}{(V_k^s)^2} + j \frac{S_{ss,ic}^* V_{\text{Re}_k}^s}{(|V_k^s|)^3} + j S_{ss,zc}^* \end{aligned} \quad (3.177)$$

As contribuições das cargas conectadas em delta para a matriz Jacobiana são apresentadas na equação (3.178), e seus termos calculados por (3.179) e (3.180).

$$\begin{matrix} \Im(I_{km}^a) \\ \Im(I_{km}^b) \\ \Im(I_{km}^c) \\ \Re(I_{km}^a) \\ \Re(I_{km}^b) \\ \Re(I_{km}^c) \end{matrix} \begin{bmatrix} V_{\text{Re}_k}^a & V_{\text{Re}_k}^b & V_{\text{Re}_k}^c & V_{\text{Im}_k}^a & V_{\text{Im}_k}^b & V_{\text{Im}_k}^c \\ x_1^{ab} + x_1^{ca} & -x_1^{ab} & -x_1^{ca} & x_2^{ab} + x_2^{ca} & -x_2^{ab} & -x_2^{ca} \\ -x_1^{ab} & x_1^{ab} + x_1^{bc} & -x_1^{bc} & -x_2^{ab} & x_2^{ab} + x_2^{bc} & -x_2^{bc} \\ -x_1^{ca} & -x_1^{bc} & x_1^{bc} + x_1^{ca} & -x_2^{ca} & -x_2^{bc} & x_2^{bc} + x_2^{ca} \\ \hline x_3^{ab} + x_3^{ca} & -x_3^{ab} & -x_3^{ca} & x_4^{ab} + x_4^{ca} & -x_4^{ab} & -x_4^{ca} \\ -x_3^{ab} & x_3^{ab} + x_3^{bc} & -x_3^{bc} & -x_4^{ab} & x_4^{ab} + x_4^{bc} & -x_4^{bc} \\ -x_3^{ca} & -x_3^{bc} & x_3^{bc} + x_3^{ca} & -x_4^{ca} & -x_4^{bc} & x_4^{bc} + x_4^{ca} \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

$$\begin{aligned}
 x_1^{st} &= \Im \left( \frac{\partial I_{\Delta,k}^{st}}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} \right) \\
 x_2^{st} &= \Im \left( \frac{\partial I_{\Delta,k}^{st}}{\partial V_{\text{Im}_k}^s} \right) \\
 x_3^{st} &= \Re \left( \frac{\partial I_{\Delta,k}^{st}}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} \right) \\
 x_4^{st} &= \Re \left( \frac{\partial I_{\Delta,k}^{st}}{\partial V_{\text{Im}_k}^s} \right)
 \end{aligned} \tag{3.179}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_{\Delta,k}^{st}}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} &= -\frac{S_{st,sc}^*}{\left(V_k^{st,*}\right)^2} - j \frac{S_{st,ic}^* V_{\text{Im}_k}^{st}}{\left(V_k^{st}\right)^3} + S_{st,zc}^* \\
 \frac{\partial I_{\Delta,k}^{st}}{\partial V_{\text{Im}_k}^s} &= j \frac{S_{st,sc}^*}{\left(V_k^{st,*}\right)^2} + j \frac{S_{st,ic}^* V_{\text{Re}_k}^{st}}{\left(V_k^{st}\right)^3} + j S_{st,zc}^*
 \end{aligned} \tag{3.180}$$

### Contribuições para o Fluxo de Potência Ótimo

Montando-se a função Lagrangeana para as partes potência constante, corrente constante e impedância constante das cargas conectadas em estrela aterrada, obtém-se as equações (3.181), (3.182) e (3.183) respectivamente.

$$\begin{aligned}
 L_{crg,P_{cte}}(\mathbf{z}) &= \\
 &\Im \left( \frac{S_{aa}^*}{V_k^{a*}} \right) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^a + \Im \left( \frac{S_{bb}^*}{V_k^{b*}} \right) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^b + \Im \left( \frac{S_{cc}^*}{V_k^{c*}} \right) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^c + \\
 &\Re \left( \frac{S_{aa}^*}{V_k^{a*}} \right) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^a + \Re \left( \frac{S_{bb}^*}{V_k^{b*}} \right) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^b + \Re \left( \frac{S_{cc}^*}{V_k^{c*}} \right) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^c
 \end{aligned} \tag{3.181}$$

$$\begin{aligned}
 L_{crg,I_{cte}}(\mathbf{z}) &= \\
 &\Im \left( \frac{V_k^a S_{aa}^*}{|V_k^a|} \right) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^a + \Im \left( \frac{V_k^b S_{bb}^*}{|V_k^b|} \right) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^b + \Im \left( \frac{V_k^c S_{cc}^*}{|V_k^c|} \right) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^c + \\
 &\Re \left( \frac{V_k^a S_{aa}^*}{|V_k^a|} \right) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^a + \Re \left( \frac{V_k^b S_{bb}^*}{|V_k^b|} \right) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^b + \Re \left( \frac{V_k^c S_{cc}^*}{|V_k^c|} \right) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^c
 \end{aligned} \tag{3.182}$$

$$\begin{aligned}
 L_{crg,Z_{cte}}(\mathbf{z}) &= \\
 &\Im(V_k^a S_{aa}^*) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^a + \Im(V_k^b S_{bb}^*) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^b + \Im(V_k^c S_{cc}^*) \cdot \lambda_{\text{Re}_k}^c + \\
 &\Re(V_k^a S_{aa}^*) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^a + \Re(V_k^b S_{bb}^*) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^b + \Re(V_k^c S_{cc}^*) \cdot \lambda_{\text{Im}_k}^c
 \end{aligned} \tag{3.183}$$

Sendo assim, as contribuições para a matriz Hessiana das cargas conectadas em estrela aterrada são apresentadas na equação (3.184).

$$\mathbf{H}_{crg,y} = \frac{\lambda_{Re_k}^c}{V_{Im_k}^a} \begin{matrix} V_{Re_k}^a & \lambda_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & \lambda_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & \lambda_{Re_k}^c & V_{Im_k}^a & \lambda_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & \lambda_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c & \lambda_{Im_k}^c \\ \left[ \begin{array}{cccc|cccc} x_1^a & x_2^a & & & x_5^a & x_6^a & & & & & & \\ x_2^a & & & & x_7^a & & & & & & & \\ & & x_1^b & x_2^b & & & & & x_5^b & x_6^b & & \\ & & x_2^b & & & & & & x_7^b & & & \\ & & & & x_1^c & x_2^c & & & & & x_5^c & x_6^c \\ & & & & x_2^c & & & & & & x_7^c & \\ \hline x_5^a & x_7^a & & & x_3^a & x_4^a & & & & & & \\ x_6^a & & & & x_4^a & & & & & & & \\ & & x_5^b & x_7^b & & & & & x_3^b & x_4^b & & \\ & & x_6^b & & & & & & x_4^b & & & \\ & & & & x_5^c & x_7^c & & & & & x_3^c & x_4^c \\ & & & & x_6^c & & & & & & x_4^c & \\ \hline \end{array} \right] \end{matrix} \quad (3.184)$$

Onde os termos  $x_i$ ,  $\{i=1,7\}$  são dados pelas equações (3.185) a (3.191) e representam as contribuições das cargas em estrela aterrada.

$$x_1^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial V_{Re_k}^s} = \Im(dI_p^s drr + dI_i^s drr + dI_z^s drr) \lambda_{Re_k}^s + \Re(dI_p^s drr + dI_i^s drr + dI_z^s drr) \lambda_{Im_k}^s \quad (3.185)$$

$$x_2^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial \lambda_{Re_k}^s} = \Im(dI_p^s dr + dI_i^s dr + dI_z^s dr) \quad (3.186)$$

$$x_3^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s \partial V_{Im_k}^s} = \Im(dI_p^s dmm + dI_i^s dmm + dI_z^s dmm) \lambda_{Re_k}^s + \Re(dI_p^s dmm + dI_i^s dmm + dI_z^s dmm) \lambda_{Im_k}^s \quad (3.187)$$

$$x_4^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s \partial \lambda_{Im_k}^s} = \Re(dI_p^s dm + dI_i^s dm + dI_z^s dm) \quad (3.188)$$

$$x_5^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s \partial V_{Re_k}^s} = \Im(dI_p^s drm + dI_i^s drm + dI_z^s drm) \lambda_{Re_k}^s + \Re(dI_p^s drm + dI_i^s drm + dI_z^s drm) \lambda_{Im_k}^s \quad (3.189)$$

$$x_6^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^s \partial \lambda_{\text{Im}_k}^s} = \Re(dI_p^s dr + dI_i^s dr + dI_z^s dr) \quad (3.190)$$

$$x_7^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^s \partial \lambda_{\text{Re}_k}^s} = \Im(dI_p^s dm + dI_i^s dm + dI_z^s dm) \quad (3.191)$$

Onde:

$$I_p^s = \frac{S_{ss}^*}{V_k^{s*}}$$

$$I_i^s = \frac{V_k^s S_{ss}^*}{|V_k^s|}$$

$$I_z^s = V_k^s S_{ss}^*$$

$$\begin{aligned} dI_p^s dr &= -\frac{S_{ss}^*}{(V_k^{s*})^2} \\ dI_i^s dr &= -j \frac{S_{ss}^* V_{\text{Im}_k}^s}{|V_k^s|^3} \\ dI_z^s dr &= S_{ss}^* \end{aligned} \quad (3.192)$$

$$\begin{aligned} dI_p^s dm &= j \frac{S_{ss}^*}{(V_k^{s*})^2} \\ dI_i^s dm &= j \frac{S_{ss}^* V_{\text{Re}_k}^s}{|V_k^s|^3} \\ dI_z^s dm &= j S_{ss}^* \end{aligned} \quad (3.193)$$

$$\begin{aligned} dI_p^s drr &= \frac{2S_{ss}^*}{(V_k^{s*})^3} \\ dI_i^s drr &= j \frac{2S_{ss}^* V_{\text{Im}_k}^s}{|V_k^s|^3} \left( -1 + \frac{3V_k^s V_{\text{Re}_k}^s}{|V_k^s|^2} \right) \\ dI_z^s drr &= 0 \end{aligned} \quad (3.194)$$

$$\begin{aligned} dI_p^s dmm &= -\frac{2S_{ss}^*}{(V_k^{s*})^3} \\ dI_i^s dmm &= \frac{2S_{ss}^* V_{\text{Re}_k}^s}{|V_k^s|^3} \left( -1 - \frac{3V_k^s V_{\text{Im}_k}^s}{|V_k^s|^2} \right) \\ dI_z^s dmm &= 0 \end{aligned} \quad (3.195)$$

$$\begin{aligned}
 dI_p^s drm &= -j \frac{2S_{ss}^*}{\left(V_k^{s*}\right)^3} \\
 dI_i^s drm &= -\frac{2S_{ss}^*}{|V_k^s|^5} \left( -2V_{\text{Im}_k}^s V_{\text{Re}_k}^{s2} + V_{\text{Im}_k}^{s3} + jV_{\text{Re}_k}^{s3} - j2V_{\text{Re}_k}^s V_{\text{Im}_k}^{s2} \right) \\
 dI_z^s drm &= 0
 \end{aligned} \tag{3.196}$$

A equação (3.197) apresenta as contribuições de potência, corrente e impedância constante das cargas conectadas em estrela aterrada para o vetor independente.

$$\mathbf{b}_{crg,y}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{\text{Re}_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{\text{Re}_k}^a \\ \tilde{V}_{\text{Re}_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{\text{Re}_k}^b \\ \tilde{V}_{\text{Re}_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{\text{Re}_k}^c \\ \tilde{V}_{\text{Im}_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{\text{Im}_k}^a \\ \tilde{V}_{\text{Im}_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{\text{Im}_k}^b \\ \tilde{V}_{\text{Im}_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{\text{Im}_k}^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z_1^a \\ \Im(I^a) \\ z_1^b \\ \Im(I^b) \\ z_1^c \\ \Im(I^c) \\ z_2^a \\ \Re(I^a) \\ z_2^b \\ \Re(I^b) \\ z_2^c \\ \Re(I^c) \end{bmatrix} \tag{3.197}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 I^s &= I_p^s + I_i^s + I_z^s \\
 z_1^s &= \Im(dI_p^s dr + dI_i^s dr + dI_z^s dr) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(dI_p^s dr + dI_i^s dr + dI_z^s dr) \lambda_{\text{Im}_k}^s \\
 z_2^s &= \Im(dI_p^s dm + dI_i^s dm + dI_z^s dm) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(dI_p^s dm + dI_i^s dm + dI_z^s dm) \lambda_{\text{Im}_k}^s
 \end{aligned} \tag{3.198}$$

A função Lagrangeana para as partes potência constante, corrente constante e impedância constante das cargas conectadas em delta, são obtidas pelas equações (3.199), (3.200) e (3.201) respectivamente.

$$\begin{aligned}
 L_{crg, P_{cte}}(\mathbf{z}) = & \Im \left( \frac{S_{ab}^*}{V_k^{ab*}} \right) \cdot \lambda_{Re_k}^a + \Im \left( \frac{S_{bc}^*}{V_k^{bc*}} \right) \cdot \lambda_{Re_k}^b + \Im \left( \frac{S_{ca}^*}{V_k^{ca*}} \right) \cdot \lambda_{Re_k}^c + \\
 & \Re \left( \frac{S_{ab}^*}{V_k^{ab*}} \right) \cdot \lambda_{Im_k}^a + \Re \left( \frac{S_{bc}^*}{V_k^{bc*}} \right) \cdot \lambda_{Im_k}^b + \Re \left( \frac{S_{ca}^*}{V_k^{ca*}} \right) \cdot \lambda_{Im_k}^c
 \end{aligned} \tag{3.199}$$

$$\begin{aligned}
 L_{crg, I_{cte}}(\mathbf{z}) = & \Im \left( \frac{V_k^{ab} S_{ab}^*}{|V_k^{ab}|} \right) \cdot \lambda_{Re_k}^a + \Im \left( \frac{V_k^{bc} S_{bc}^*}{|V_k^{bc}|} \right) \cdot \lambda_{Re_k}^b + \Im \left( \frac{V_k^{ca} S_{ca}^*}{|V_k^{ca}|} \right) \cdot \lambda_{Re_k}^c + \\
 & \Re \left( \frac{V_k^{ab} S_{ab}^*}{|V_k^{ab}|} \right) \cdot \lambda_{Im_k}^a + \Re \left( \frac{V_k^{bc} S_{bc}^*}{|V_k^{bc}|} \right) \cdot \lambda_{Im_k}^b + \Re \left( \frac{V_k^{ca} S_{ca}^*}{|V_k^{ca}|} \right) \cdot \lambda_{Im_k}^c
 \end{aligned} \tag{3.200}$$

$$\begin{aligned}
 L_{crg, Z_{cte}}(\mathbf{z}) = & \Im(V_k^{ab} S_{ab}^*) \cdot \lambda_{Re_k}^a + \Im(V_k^{bc} S_{bc}^*) \cdot \lambda_{Re_k}^b + \Im(V_k^{ca} S_{ca}^*) \cdot \lambda_{Re_k}^c + \\
 & \Re(V_k^{ab} S_{ab}^*) \cdot \lambda_{Im_k}^a + \Re(V_k^{bc} S_{bc}^*) \cdot \lambda_{Im_k}^b + \Re(V_k^{ca} S_{ca}^*) \cdot \lambda_{Im_k}^c
 \end{aligned} \tag{3.201}$$

As contribuições para a matriz Hessiana das cargas conectadas em delta são apresentadas na equação (3.202).

$$\mathbf{H}_{crg, \Delta} = \frac{\lambda_{Re_k}^c}{V_{Im_k}^a} \begin{bmatrix}
 V_{Re_k}^a & \lambda_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & \lambda_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & \lambda_{Re_k}^c & V_{Im_k}^a & \lambda_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & \lambda_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c & \lambda_{Im_k}^c \\
 \left[ \begin{array}{c}
 V_{Re_k}^a \\
 \lambda_{Re_k}^a \\
 V_{Re_k}^b \\
 \lambda_{Re_k}^b \\
 V_{Re_k}^c \\
 \lambda_{Re_k}^c \\
 V_{Im_k}^a \\
 \lambda_{Im_k}^a \\
 V_{Im_k}^b \\
 \lambda_{Im_k}^b \\
 V_{Im_k}^c \\
 \lambda_{Im_k}^c
 \end{array} \right. & \left[ \begin{array}{c}
 x_1^{abc} \quad x_2^{ab} \quad y_1^{ab} \quad y_2^{ab} \quad y_1^{ca} \quad y_2^{ca} \\
 x_2^{ab} \quad y_2^{ab} \quad y_1^{bc} \quad x_2^{bc} \quad y_1^{bc} \quad y_2^{bc} \\
 y_1^{ab} \quad y_2^{ab} \quad x_1^{bca} \quad x_2^{bc} \quad y_1^{bc} \quad y_2^{bc} \\
 y_2^{ab} \quad x_2^{bc} \quad y_2^{bc} \\
 y_1^{ca} \quad y_2^{ca} \quad y_1^{bc} \quad y_2^{bc} \quad x_1^{cab} \quad x_2^{ca} \\
 y_2^{ca} \quad y_2^{bc} \quad x_2^{ca} \\
 x_5^{abc} \quad x_7^{ab} \quad y_5^{ab} \quad y_6^{ab} \quad y_5^{ca} \quad y_6^{ca} \\
 x_6^{ab} \quad y_7^{ab} \quad y_7^{ca} \\
 y_5^{ab} \quad y_7^{ab} \quad x_5^{bca} \quad x_7^{bc} \quad y_5^{bc} \quad y_6^{bc} \\
 y_6^{ab} \quad x_6^{bc} \quad y_6^{bc} \\
 y_5^{ca} \quad y_7^{ca} \quad y_5^{bc} \quad y_7^{bc} \quad x_5^{cab} \quad x_7^{ca} \\
 y_6^{ca} \quad y_6^{bc} \quad x_6^{ca} \\
 x_3^{abc} \quad x_4^{ab} \quad y_3^{ab} \quad y_4^{ab} \quad y_3^{bc} \quad y_4^{bc} \\
 x_4^{ab} \quad y_4^{ab} \quad y_4^{bc} \\
 y_3^{ab} \quad y_4^{ab} \quad x_3^{bca} \quad x_4^{bc} \quad y_3^{ca} \quad y_4^{ca} \\
 y_4^{ab} \quad x_4^{bc} \quad y_4^{ca} \\
 y_3^{ca} \quad y_7^{ca} \quad y_3^{bc} \quad y_4^{bc} \quad y_3^{ca} \quad y_4^{ca} \\
 y_4^{bc} \quad y_4^{ca} \quad x_3^{cab} \quad x_4^{ca}
 \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c}
 x_5^{abc} \quad x_6^{ab} \quad y_5^{ab} \quad y_6^{ab} \quad y_5^{ca} \quad y_6^{ca} \\
 x_7^{ab} \quad y_7^{ab} \quad y_7^{ca} \\
 y_5^{ab} \quad y_7^{ab} \quad x_5^{bca} \quad x_6^{bc} \quad y_5^{bc} \quad y_6^{bc} \\
 y_6^{ab} \quad x_7^{bc} \quad y_7^{bc} \\
 y_5^{ca} \quad y_7^{ca} \quad y_5^{bc} \quad y_6^{bc} \quad x_5^{cab} \quad x_6^{ca} \\
 y_6^{ca} \quad y_6^{bc} \quad x_7^{ca} \\
 x_3^{abc} \quad x_4^{ab} \quad y_3^{ab} \quad y_4^{ab} \quad y_3^{bc} \quad y_4^{bc} \\
 x_4^{ab} \quad y_4^{ab} \quad y_4^{bc} \\
 y_3^{ab} \quad y_4^{ab} \quad x_3^{bca} \quad x_4^{bc} \quad y_3^{ca} \quad y_4^{ca} \\
 y_4^{ab} \quad x_4^{bc} \quad y_4^{ca} \\
 y_3^{ca} \quad y_4^{bc} \quad y_3^{ca} \quad y_4^{ca} \quad x_3^{cab} \quad x_4^{ca} \\
 y_4^{bc} \quad y_4^{ca} \quad x_4^{ca}
 \end{array} \right]
 \end{bmatrix} \tag{3.202}$$

Onde os termos  $x_i$  e  $y_i$ ,  $\{i=1,7\}$  são dados pelas equações (3.203) a (3.222) e representam as contribuições das cargas em delta.

$$\begin{aligned}
 x_1^{stu} = & \Im\left(dI_p^{st} drr + dI_i^{st} drr + dI_z^{st} drr\right) \lambda_{Re_k}^s + \\
 & + \Re\left(dI_p^{st} drr + dI_i^{st} drr + dI_z^{st} drr\right) \lambda_{Im_k}^s + \\
 & - \Im\left(dI_p^{us} drr + dI_i^{us} drr + dI_z^{us} drr\right) \lambda_{Re_k}^s + \\
 & - \Re\left(dI_p^{us} drr + dI_i^{us} drr + dI_z^{us} drr\right) \lambda_{Im_k}^s + \\
 & - \Im\left(dI_p^{st} drr + dI_i^{st} drr + dI_z^{st} drr\right) \lambda_{Re_k}^t + \\
 & - \Re\left(dI_p^{st} drr + dI_i^{st} drr + dI_z^{st} drr\right) \lambda_{Im_k}^t + \\
 & + \Im\left(dI_p^{us} drr + dI_i^{us} drr + dI_z^{us} drr\right) \lambda_{Re_k}^u + \\
 & + \Re\left(dI_p^{us} drr + dI_i^{us} drr + dI_z^{us} drr\right) \lambda_{Im_k}^u
 \end{aligned} \tag{3.203}$$

$$x_2^{st} = \Im\left(dI_p^{st} dr + dI_i^{st} dr + dI_z^{st} dr\right) \tag{3.204}$$

$$\begin{aligned}
 x_3^{stu} = & \Im\left(dI_p^{st} dmm + dI_i^{st} dmm + dI_z^{st} dmm\right) \lambda_{Re_k}^s + \\
 & + \Re\left(dI_p^{st} dmm + dI_i^{st} dmm + dI_z^{st} dmm\right) \lambda_{Im_k}^s + \\
 & - \Im\left(dI_p^{us} dmm + dI_i^{us} dmm + dI_z^{us} dmm\right) \lambda_{Re_k}^s + \\
 & - \Re\left(dI_p^{us} dmm + dI_i^{us} dmm + dI_z^{us} dmm\right) \lambda_{Im_k}^s + \\
 & - \Im\left(dI_p^{st} dmm + dI_i^{st} dmm + dI_z^{st} dmm\right) \lambda_{Re_k}^t + \\
 & - \Re\left(dI_p^{st} dmm + dI_i^{st} dmm + dI_z^{st} dmm\right) \lambda_{Im_k}^t + \\
 & + \Im\left(dI_p^{us} dmm + dI_i^{us} dmm + dI_z^{us} dmm\right) \lambda_{Re_k}^u + \\
 & + \Re\left(dI_p^{us} dmm + dI_i^{us} dmm + dI_z^{us} dmm\right) \lambda_{Im_k}^u
 \end{aligned} \tag{3.205}$$

$$x_4^{st} = \Re\left(dI_p^{st} dm + dI_i^{st} dm + dI_z^{st} dm\right) \tag{3.206}$$

$$\begin{aligned}
 x_5^{stu} = & \Im\left(dI_p^{st} drm + dI_i^{st} drm + dI_z^{st} drm\right) \lambda_{Re_k}^s + \\
 & + \Re\left(dI_p^{st} drm + dI_i^{st} drm + dI_z^{st} drm\right) \lambda_{Im_k}^s + \\
 & - \Im\left(dI_p^{us} drm + dI_i^{us} drm + dI_z^{us} drm\right) \lambda_{Re_k}^s + \\
 & - \Re\left(dI_p^{us} drm + dI_i^{us} drm + dI_z^{us} drm\right) \lambda_{Im_k}^s + \\
 & - \Im\left(dI_p^{st} drm + dI_i^{st} drm + dI_z^{st} drm\right) \lambda_{Re_k}^t + \\
 & - \Re\left(dI_p^{st} drm + dI_i^{st} drm + dI_z^{st} drm\right) \lambda_{Im_k}^t + \\
 & + \Im\left(dI_p^{us} drm + dI_i^{us} drm + dI_z^{us} drm\right) \lambda_{Re_k}^u + \\
 & + \Re\left(dI_p^{us} drm + dI_i^{us} drm + dI_z^{us} drm\right) \lambda_{Im_k}^u
 \end{aligned} \tag{3.207}$$

$$x_6^{st} = \Re\left(dI_p^{st} dr + dI_i^{st} dr + dI_z^{st} dr\right) \tag{3.208}$$

$$x_7^{st} = \Im\left(dI_p^{st} dm + dI_i^{st} dm + dI_z^{st} dm\right) \tag{3.209}$$

$$\begin{aligned}
 y_1^{st} = & -\Im\left(dI_p^{st} drr + dI_i^{st} drr + dI_z^{st} drr\right) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \\
 & -\Re\left(dI_p^{st} drr + dI_i^{st} drr + dI_z^{st} drr\right) \lambda_{\text{Im}_k}^s + \\
 & + \Im\left(dI_p^{st} drr + dI_i^{st} drr + dI_z^{st} drr\right) \lambda_{\text{Re}_k}^t + \\
 & + \Re\left(dI_p^{st} drr + dI_i^{st} drr + dI_z^{st} drr\right) \lambda_{\text{Im}_k}^t
 \end{aligned} \tag{3.210}$$

$$y_2^{st} = -\Im\left(dI_p^{st} dr + dI_i^{st} dr + dI_z^{st} dr\right) \tag{3.211}$$

$$\begin{aligned}
 y_3^{st} = & -\Im\left(dI_p^{st} dmm + dI_i^{st} dmm + dI_z^{st} dmm\right) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \\
 & -\Re\left(dI_p^{st} dmm + dI_i^{st} dmm + dI_z^{st} dmm\right) \lambda_{\text{Im}_k}^s + \\
 & + \Im\left(dI_p^{st} dmm + dI_i^{st} dmm + dI_z^{st} dmm\right) \lambda_{\text{Re}_k}^t + \\
 & + \Re\left(dI_p^{st} dmm + dI_i^{st} dmm + dI_z^{st} dmm\right) \lambda_{\text{Im}_k}^t
 \end{aligned} \tag{3.212}$$

$$y_4^{st} = -\Re\left(dI_p^{st} dm + dI_i^{st} dm + dI_z^{st} dm\right) \tag{3.213}$$

$$\begin{aligned}
 y_5^{st} = & -\Im\left(dI_p^{st} drm + dI_i^{st} drm + dI_z^{st} drm\right) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \\
 & -\Re\left(dI_p^{st} drm + dI_i^{st} drm + dI_z^{st} drm\right) \lambda_{\text{Im}_k}^s + \\
 & + \Im\left(dI_p^{st} drm + dI_i^{st} drm + dI_z^{st} drm\right) \lambda_{\text{Re}_k}^t + \\
 & + \Re\left(dI_p^{st} drm + dI_i^{st} drm + dI_z^{st} drm\right) \lambda_{\text{Im}_k}^t
 \end{aligned} \tag{3.214}$$

$$y_6^{st} = -\Re\left(dI_p^{st} dr + dI_i^{st} dr + dI_z^{st} dr\right) \tag{3.215}$$

$$y_7^{st} = -\Im\left(dI_p^{st} dm + dI_i^{st} dm + dI_z^{st} dm\right) \tag{3.216}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 I_p^{st} &= \frac{S_{st}^*}{V_k^{st*}} \\
 I_i^{st} &= \frac{V_k^{st} S_{st}^*}{|V_k^{st}|} \\
 I_z^{st} &= V_k^{st} S_{st}^*
 \end{aligned} \tag{3.217}$$

$$\begin{aligned}
 dI_p^{st} dr &= -\frac{S_{st}^*}{\left(V_k^{st*}\right)^2} \\
 dI_i^{st} dr &= -j \frac{S_{st}^* V_{\text{Im}_k}^{st}}{|V_k^{st}|^3} \\
 dI_z^{st} dr &= S_{st}^*
 \end{aligned} \tag{3.218}$$

$$\begin{aligned}
 dI_p^{st} dm &= j \frac{S_{st}^*}{\left(V_k^{st*}\right)^2} \\
 dI_i^{st} dm &= j \frac{S_{st}^* V_{Re_k}^{st}}{\left|V_k^{st}\right|^3}
 \end{aligned} \tag{3.219}$$

$$dI_z^{st} dm = j S_{st}^*$$

$$\begin{aligned}
 dI_p^{st} drr &= \frac{2S_{st}^*}{\left(V_k^{st*}\right)^3} \\
 dI_i^{st} drr &= j \frac{2S_{st}^* V_{Im_k}^{st}}{\left|V_k^{st}\right|^3} \left( -1 + \frac{3V_k^{st} V_{Re_k}^{st}}{\left|V_k^{st}\right|^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.220}$$

$$dI_z^{st} drr = 0$$

$$\begin{aligned}
 dI_p^{st} dmm &= -\frac{2S_{st}^*}{\left(V_k^{st*}\right)^3} \\
 dI_i^{st} dmm &= \frac{2S_{st}^* V_{Re_k}^{st}}{\left|V_k^{st}\right|^3} \left( -1 - \frac{3V_k^{st} V_{Im_k}^{st}}{\left|V_k^{st}\right|^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.221}$$

$$dI_z^{st} dmm = 0$$

$$\begin{aligned}
 dI_p^{st} drm &= -j \frac{2S_{st}^*}{\left(V_k^{st*}\right)^3} \\
 dI_i^{st} drm &= -\frac{2S_{st}^*}{\left|V_k^{st}\right|^5} \left( -2V_{Im_k}^{st} V_{Re_k}^{st 2} + V_{Im_k}^{st 3} + jV_{Re_k}^{st 3} - j2V_{Re_k}^{st} V_{Im_k}^{st 2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.222}$$

$$dI_z^{st} drm = 0$$

A equação (3.223) apresenta as contribuições de potência, corrente e impedância constante das cargas conectadas em delta para o vetor independente.

$$\mathbf{b}_{crg,\Delta}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{Re_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^a \\ \tilde{V}_{Re_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^b \\ \tilde{V}_{Re_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^c \\ \tilde{V}_{Im_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^a \\ \tilde{V}_{Im_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^b \\ \tilde{V}_{Im_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} z_1^{abc} \\ \Im(I^{abc}) \\ z_1^{bca} \\ \Im(I^{bca}) \\ z_1^{cab} \\ \Im(I^{cab}) \\ z_2^{abc} \\ \Re(I^{abc}) \\ z_2^{bca} \\ \Re(I^{bca}) \\ z_2^{cab} \\ \Re(I^{cab}) \end{bmatrix} \tag{3.223}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 I^{stu} &= I_p^{st} + I_i^{st} + I_z^{st} - (I_p^{us} + I_i^{us} + I_z^{us}) \\
 z_1^{stu} &= \Im(dI_p^{st} dr + dI_i^{st} dr + dI_z^{st} dr) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \\
 &+ \Re(dI_p^{st} dr + dI_i^{st} dr + dI_z^{st} dr) \lambda_{\text{Im}_k}^s + \\
 &- \Im(dI_p^{us} dr + dI_i^{us} dr + dI_z^{us} dr) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \\
 &- \Re(dI_p^{us} dr + dI_i^{us} dr + dI_z^{us} dr) \lambda_{\text{Im}_k}^s + \\
 &- \Im(dI_p^{st} dr + dI_i^{st} dr + dI_z^{st} dr) \lambda_{\text{Re}_k}^t + \\
 &- \Re(dI_p^{st} dr + dI_i^{st} dr + dI_z^{st} dr) \lambda_{\text{Im}_k}^t + \\
 &+ \Im(dI_p^{us} dr + dI_i^{us} dr + dI_z^{us} dr) \lambda_{\text{Re}_k}^u + \\
 &+ \Re(dI_p^{us} dr + dI_i^{us} dr + dI_z^{us} dr) \lambda_{\text{Im}_k}^u \tag{3.224} \\
 z_2^{stu} &= \Im(dI_p^{st} dm + dI_i^{st} dm + dI_z^{st} dm) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \\
 &+ \Re(dI_p^{st} dm + dI_i^{st} dm + dI_z^{st} dm) \lambda_{\text{Im}_k}^s + \\
 &- \Im(dI_p^{us} dm + dI_i^{us} dm + dI_z^{us} dm) \lambda_{\text{Re}_k}^s + \\
 &- \Re(dI_p^{us} dm + dI_i^{us} dm + dI_z^{us} dm) \lambda_{\text{Im}_k}^s + \\
 &- \Im(dI_p^{st} dm + dI_i^{st} dm + dI_z^{st} dm) \lambda_{\text{Re}_k}^t + \\
 &- \Re(dI_p^{st} dm + dI_i^{st} dm + dI_z^{st} dm) \lambda_{\text{Im}_k}^t + \\
 &+ \Im(dI_p^{us} dm + dI_i^{us} dm + dI_z^{us} dm) \lambda_{\text{Re}_k}^u + \\
 &+ \Re(dI_p^{us} dm + dI_i^{us} dm + dI_z^{us} dm) \lambda_{\text{Im}_k}^u
 \end{aligned}$$

### 3.3.8 Máquinas

Diversos modelos podem ser encontrados na literatura para a representação das máquinas, mas para a análise estática, uma fonte de potência ativa e reativa constante é geralmente utilizada, como representa a Figura 3.17.

Este modelo de máquina também pode ser utilizado para representar as gerações distribuídas que vêm sendo conectadas aos sistemas de distribuição. Para modelar uma geração monofásica basta desconsiderar as equações referentes as fases inexistentes

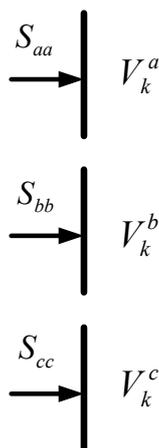


Figura 3.17 – Modelo de máquina trifásica

### Contribuições para o Fluxo de Potência

As contribuições das máquinas para o vetor independente e para a matriz Jacobiana são iguais às contribuições das cargas com potência constante, porém com o sinal trocado.

Caso a máquina conectada à barra  $k$  seja a referência do sistema (barra de folga), deve-se eliminar as equações de corrente injetadas nesta barra, para isto, basta zerar todos os valores das linhas e colunas responsáveis pela equação da barra  $k$  e colocar o valor 1 na diagonal principal. O valor da posição referente a  $k$  no vetor independente também deve ser nulo.

### Contribuições para o Fluxo de Potência Ótimo

As máquinas possuem um equacionamento semelhante às cargas. A principal diferença é que as máquinas possuem equações extras para limitar a potência gerada (3.225). Assim, a matriz Hessiana relativa ao modelo de máquinas é semelhante à equação (3.184), excetuando-se a inclusão dos limites de potência gerada, como pode ser observado na equação (3.226).

$$\begin{aligned}
 P_{\min} &\leq P_{ss} \leq P_{\max} \\
 Q_{\min} &\leq Q_{ss} \leq Q_{\max}
 \end{aligned}
 \tag{3.225}$$

$$\mathbf{H}_{maq} = \begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 V_{Re_k}^a \\
 \lambda_{Re_k}^a \\
 V_{Re_k}^b \\
 \lambda_{Re_k}^b \\
 V_{Re_k}^c \\
 \lambda_{Re_k}^c \\
 V_{Im_k}^a \\
 \lambda_{Im_k}^a \\
 V_{Im_k}^b \\
 \lambda_{Im_k}^b \\
 V_{Im_k}^c \\
 \lambda_{Im_k}^c \\
 P_k^a \\
 Q_k^a \\
 P_k^b \\
 Q_k^b \\
 P_k^c \\
 Q_k^c
 \end{array} \\
 \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
 V_{Re_k}^a & \lambda_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & \lambda_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & \lambda_{Re_k}^c & V_{Im_k}^a & \lambda_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & \lambda_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c & \lambda_{Im_k}^c & P_k^a & Q_k^a & P_k^b & Q_k^b & P_k^c & Q_k^c \\
 x_1^a & x_2^a & & & & & x_5^a & x_6^a & & & & & y_1^a & y_3^a & & & & \\
 x_2^a & & & & & & x_7^a & & & & & & y_2^a & y_4^a & & & & \\
 & & x_1^b & x_2^b & & & & & x_5^b & x_6^b & & & & & y_1^b & y_3^b & & \\
 & & x_2^b & & & & & & x_7^b & & & & & & y_2^b & y_4^b & & \\
 & & & & x_1^c & x_2^c & & & & & x_5^c & x_6^c & & & & & y_1^c & y_3^c \\
 & & & & x_2^c & & & & & & x_7^c & & & & & & y_2^c & y_4^c \\
 x_5^a & x_7^a & & & & & x_3^a & x_4^a & & & & & y_5^a & y_7^a & & & & \\
 x_6^a & & & & & & x_4^a & & & & & & y_6^a & y_8^a & & & & \\
 & & x_5^b & x_7^b & & & & & x_3^b & x_4^b & & & & & y_5^b & y_7^b & & \\
 & & x_6^b & & & & & & x_4^b & & & & & & y_6^b & y_8^b & & \\
 & & & & x_5^c & x_7^c & & & & & x_3^c & x_4^c & & & & & y_5^c & y_7^c \\
 & & & & x_6^c & & & & & & x_4^c & & & & & & y_6^c & y_8^c \\
 y_1^a & y_2^a & & & & & y_5^a & y_6^a & & & & & p i_h & & & & & \\
 y_3^a & y_4^a & & & & & y_7^a & y_8^a & & & & & & p i_h & & & & \\
 & & y_1^b & y_2^b & & & & & y_5^b & y_6^b & & & & & p i_h & & & \\
 & & y_3^b & y_4^b & & & & & y_7^b & y_8^b & & & & & & p i_h & & \\
 & & & & y_1^c & y_2^c & & & & & y_5^c & y_6^c & & & & & p i_h & \\
 & & & & y_3^c & y_4^c & & & & & y_7^c & y_8^c & & & & & & p i_h
 \end{array} \right]
 \end{array} \quad (3.226)$$

O cálculo dos elementos neste caso  $x_i$ ,  $\{i=1,7\}$  são iguais aos apresentados nas equações (3.185) a (3.189), porém estes valores são multiplicados por -1. Os valores  $y_i$ ,  $\{i=1,8\}$ , relativos às derivadas de segunda ordem das variáveis do problema em relação aos limites, são dados pelas as equações (3.227) e (3.228).

$$\begin{aligned}
 y_1^s &= \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial P_k^{ss}} = \Im \left( \frac{-1}{(V_k^{s*})^2} \right) \lambda_{Re_k} + \Re \left( \frac{-1}{(V_k^{s*})^2} \right) \lambda_{Im_k} \\
 y_2^s &= \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{Re_k}^s \partial P_k^{ss}} = \Im \left( \frac{1}{V_k^{s*}} \right) \\
 y_3^s &= \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial Q_k^{ss}} = \Im \left( \frac{j}{(V_k^{s*})^2} \right) \lambda_{Re_k} + \Re \left( \frac{j}{(V_k^{s*})^2} \right) \lambda_{Im_k} \\
 y_4^s &= \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{Re_k}^s \partial Q_k^{ss}} = \Im \left( \frac{-j}{V_k^{s*}} \right)
 \end{aligned} \quad (3.227)$$

$$\begin{aligned}
 y_5^s &= \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^s \partial P_k^{ss}} = \Im \left( \frac{j}{(V_k^{s*})^2} \right) \lambda_{\text{Re}_k} + \Re \left( \frac{j}{(V_k^{s*})^2} \right) \lambda_{\text{Im}_k} \\
 y_6^s &= \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}^s \partial P_k^{ss}} = \Re \left( \frac{1}{V_k^{s*}} \right) \\
 y_7^s &= \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^s \partial Q_k^{ss}} = \Im \left( \frac{1}{(V_k^{s*})^2} \right) \lambda_{\text{Re}_k} + \Re \left( \frac{1}{(V_k^{s*})^2} \right) \lambda_{\text{Im}_k} \\
 y_8^s &= \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{\text{Im}_k}^s \partial Q_k^{ss}} = \Re \left( \frac{-j}{V_k^{s*}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.228}$$

Os valores  $pi_h$  são dados por  $\frac{\boldsymbol{\pi}_{low}}{\mathbf{s}_{low}} - \frac{\boldsymbol{\pi}_{up}}{\mathbf{s}_{up}}$ , onde  $\mathbf{s}$  são as variáveis de folga

associadas aos limites de geração e os  $\boldsymbol{\pi}$  são as variáveis duais das restrições de geração.

Maiores detalhes são apresentados no Apêndice B, seção B.3.

A parcela referente as condições de otimalidade é dada pela equação (3.229), e como pode ser visto, para máquinas, cria-se um bloco 6x1. Este bloco representa os limites de potência ativa e reativa das máquinas do sistema.

$$\mathbf{b}_{maq}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{\text{Re}_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{\text{Re}_k}^a \\ \tilde{V}_{\text{Re}_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{\text{Re}_k}^b \\ \tilde{V}_{\text{Re}_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{\text{Re}_k}^c \\ \tilde{V}_{\text{Im}_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{\text{Im}_k}^a \\ \tilde{V}_{\text{Im}_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{\text{Im}_k}^b \\ \tilde{V}_{\text{Im}_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{\text{Im}_k}^c \\ \tilde{P}_{aa} \\ \tilde{Q}_{aa} \\ \tilde{P}_{bb} \\ \tilde{Q}_{bb} \\ \tilde{P}_{cc} \\ \tilde{Q}_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[ \Im \left( \frac{-S_{aa}^*}{(V_k^{a*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^a + \left[ \Re \left( \frac{-S_{aa}^*}{(V_k^{a*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^a \\ \Im \left( \frac{S_{aa}^*}{V_k^{a*}} \right) \\ \left[ \Im \left( \frac{-S_{bb}^*}{(V_k^{b*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^b + \left[ \Re \left( \frac{-S_{bb}^*}{(V_k^{b*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^b \\ \Im \left( \frac{S_{bb}^*}{V_k^{b*}} \right) \\ \left[ \Im \left( \frac{-S_{cc}^*}{(V_k^{c*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^c + \left[ \Re \left( \frac{-S_{cc}^*}{(V_k^{c*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^c \\ \Im \left( \frac{S_{cc}^*}{V_k^{c*}} \right) \\ \left[ \Im \left( \frac{jS_{aa}^*}{(V_k^{a*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^a + \left[ \Re \left( \frac{jS_{aa}^*}{(V_k^{a*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^a \\ \Re \left( \frac{S_{aa}^*}{V_k^{a*}} \right) \\ \left[ \Im \left( \frac{jS_{bb}^*}{(V_k^{b*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^b + \left[ \Re \left( \frac{jS_{bb}^*}{(V_k^{b*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^b \\ \Re \left( \frac{S_{bb}^*}{V_k^{b*}} \right) \\ \left[ \Im \left( \frac{jS_{cc}^*}{(V_k^{c*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^c + \left[ \Re \left( \frac{jS_{cc}^*}{(V_k^{c*})^2} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^c \\ \Re \left( \frac{S_{cc}^*}{V_k^{c*}} \right) \\ \text{---} \\ pi_b + \left[ \Im \left( \frac{1}{V_k^{a*}} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^a + \left[ \Re \left( \frac{1}{V_k^{a*}} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^a \\ pi_b + \left[ \Im \left( \frac{-j}{V_k^{a*}} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^a + \left[ \Re \left( \frac{-j}{V_k^{a*}} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^a \\ pi_b + \left[ \Im \left( \frac{1}{V_k^{b*}} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^b + \left[ \Re \left( \frac{1}{V_k^{b*}} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^b \\ pi_b + \left[ \Im \left( \frac{-j}{V_k^{b*}} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^b + \left[ \Re \left( \frac{-j}{V_k^{b*}} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^b \\ pi_b + \left[ \Im \left( \frac{1}{V_k^{c*}} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^c + \left[ \Re \left( \frac{1}{V_k^{c*}} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^c \\ pi_b + \left[ \Im \left( \frac{-j}{V_k^{c*}} \right) \right] \lambda_{\text{Re}_k}^c + \left[ \Re \left( \frac{-j}{V_k^{c*}} \right) \right] \lambda_{\text{Im}_k}^c \end{bmatrix} \quad (3.229)$$

Onde os valores  $pi_b$  são dados por  $\mu \left( \frac{1}{s_{low}} - \frac{1}{s_{up}} \right)$ , sendo  $s$  as variáveis de folga associadas aos limites de geração e  $\mu$  o parâmetro barreira conforme apresentado no Apêndice B.

### 3.4 Algoritmo Para Solução do Fluxo de Potência (MCT)

Na Figura 3.18 apresenta-se o fluxograma para a solução do fluxo de potência trifásico.

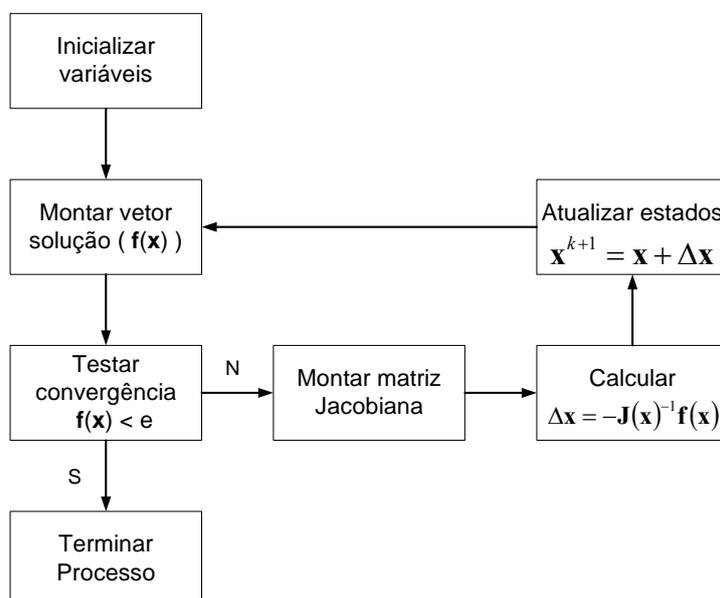


Figura 3.18 – Fluxograma para o fluxo de potência

### 3.5 Fluxo de Potência Ótimo Trifásico – Restrições

No fluxo de potência ótimo é possível restringir os valores que uma variável contínua ou função podem assumir. As restrições dos valores possíveis de uma variável são denominadas de restrições de canalização e as das funções de restrições funcionais.

As restrições de canalização geralmente se referem aos controles e limites internos dos equipamentos e já foram tratadas anteriormente. Nesta seção serão tratadas as restrições funcionais.

### 3.5.1 Restrições das Tensões e Ângulos em Barras

As restrições de tensão têm como objetivo garantir que os níveis de tensão do SEP estejam confinados entre limites.

No método de injeção de correntes utilizando a formulação retangular, a tensão complexa  $V$  é representada pelas variáveis reais  $V_{Re}$  e  $V_{Im}$ , sendo  $v^2 = V_{Re}^2 + V_{Im}^2$ . Como o valor de  $v$  é uma função de  $V_{Re}$  e  $V_{Im}$ , esta é uma restrição funcional, e como pode ser visto em (3.230), é necessário criar uma variável auxiliar  $y$ .

$$\begin{aligned} y^s - V_{Re}^{s^2} - V_{Im}^{s^2} &= 0 \\ v_{\min}^2 \leq y^s \leq v_{\max}^2 \end{aligned} \quad (3.230)$$

A função Lagrangeana referente às restrições de tensão é dada pela equação (3.231).

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}) = & -\lambda_y^s \left( y^s - V_{Re}^{s^2} - V_{Im}^{s^2} \right) + \\ & -\pi_{low}^s \left( v_{\min}^2 - y^s + s_{low}^s \right) - \pi_{up}^s \left( y^s - v_{\max}^2 + s_{up}^s \right) - \mu \log(s_{low}^s) - \mu \log(s_{up}^s) \end{aligned} \quad (3.231)$$

O primeiro termo da função Lagrangeana indica que seis novas linhas/colunas devem ser criadas relativas às variáveis  $y$  e  $\lambda_y$ , sendo duas para cada fase. Os termos restantes indicam que as contribuições da restrição de canalização devem ser tratadas conforme apresentado no Apêndice B. As contribuições da função Lagrangeana (3.231) para a matriz Hessiana é apresentada em (3.234).

O aumento da dimensão do sistema linear a ser resolvido é uma das poucas desvantagens deste método, senão a única, mas se forem utilizadas rotinas especiais de ordenação e fatoração como por exemplo, as apresentadas em ARAUJO (2000), este incremento da dimensão do sistema não significará um aumento considerável do tempo computacional, pois estas novas linhas e colunas são extremamente esparsas.

### 3.5.2 Restrição Angular na Barra de Referência Angular

A barra de referência angular do sistema deve possuir uma defasagem entre as fases de 120 graus. No método de injeção de correntes em coordenadas retangulares, não se tem acesso direto aos ângulos das tensões nodais, com isto é necessário a inclusão de equações adicionais para garantir uma diferença angular fixa de 120 graus, estas equações são apresentadas no conjunto de equações (3.232).

$$\begin{aligned}V_{\text{Im}}^a - V_{\text{Re}}^a \tan\left(\frac{0\pi}{180}\right) &= 0 \\V_{\text{Im}}^b - V_{\text{Re}}^b \tan\left(\frac{-120\pi}{180}\right) &= 0 \\V_{\text{Im}}^c - V_{\text{Re}}^c \tan\left(\frac{120\pi}{180}\right) &= 0\end{aligned}\tag{3.232}$$

Utilizando (3.232) e montando-se a função Lagrangeana de forma compacta tem-se (3.233). Sendo as contribuições para a matriz Hessiana apresentadas em (3.234).

$$L(\mathbf{z}) = -\lambda_r^s \left( V_{\text{Im}}^s - V_{\text{Re}}^s \tan\left(\frac{\theta^s \pi}{180}\right) \right)\tag{3.233}$$

$$H = \begin{matrix}
 V_{Re_k}^a & \lambda_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & \lambda_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & \lambda_{Re_k}^c & V_{Im_k}^a & \lambda_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & \lambda_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c & \lambda_{Im_k}^c & y_k^a & \lambda_{y_k}^a & y_k^b & \lambda_{y_k}^b & y_k^c & \lambda_{y_k}^c & \lambda_{r_k}^a & \lambda_{r_k}^b & \lambda_{r_k}^c \\
 \left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 x_1^a & & & & & & & & & & & & y_1^a & & & & & & z_1^a & & & \\
 & x_1^b & & & & & & & & & & & & & y_1^b & & & & & & z_1^b & & \\
 & & x_1^c & & & & & & & & & & & & & y_1^c & & & & & z_1^c & \\
 & & & x_2^a & & & & & & & & & y_2^a & & & & & & & & z_2^a & \\
 & & & & x_2^b & & & & & & & & & y_2^b & & & & & & & z_2^b & \\
 & & & & & x_2^c & & & & & & & & & y_2^c & & & & & & z_2^c & \\
 & & & & & & & & & & & & p i_h & -1 & & & & & & & & \\
 y_1^a & & & & & & y_2^a & & & & & & -1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & p i_h & -1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & p i_h & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & -1 & & & & \\
 z_1^a & & & & & & z_2^a & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & z_1^b & & & & & & z_2^b & & & & & & & & & & & & & & \\
 & z_1^c & \\
 & z_2^c
 \end{array} \right]
 \end{matrix} \quad (3.234)$$

Onde:

$$x_1^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial V_{Re_k}^s} = 2\lambda_{y_k} \quad (3.235)$$

$$x_2^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s \partial V_{Im_k}^s} = 2\lambda_{y_k} \quad (3.236)$$

$$y_1^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial \lambda_{y_k}^s} = 2V_{Re_k}^s \quad (3.237)$$

$$y_2^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s \partial \lambda_{y_k}^s} = 2V_{Im_k}^s \quad (3.238)$$

$$z_1^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial \lambda_{r_k}^s} = \tan\left(\frac{\theta^s \pi}{180}\right) \quad (3.239)$$

$$z_2^s = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s \partial \lambda_{r_k}^s} = -1 \quad (3.240)$$

### 3.5.3 Restrição de Mesmo Módulo de Tensão

Para representar alguns equipamentos, como por exemplo uma subestação, é de grande interesse que seja possível obrigar que as tensões das fases  $a$ ,  $b$  e  $c$  possuam o mesmo módulo de tensão, conforme (3.241).

$$\begin{aligned} |V^a| &= |V^b| \\ |V^a| &= |V^c| \end{aligned} \quad (3.241)$$

Para facilitar a implementação computacional ambos os termos da equação (3.241) foram elevados ao quadrado e a expressão resultante foi ordenada conforme apresentado na equação (3.242).

$$\begin{aligned} V_{\text{Re}}^{a^2} + V_{\text{Im}}^{a^2} - V_{\text{Re}}^{b^2} - V_{\text{Im}}^{b^2} &= 0 \\ V_{\text{Re}}^{a^2} + V_{\text{Im}}^{a^2} - V_{\text{Re}}^{c^2} - V_{\text{Im}}^{c^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.242)$$

A função Lagrangeana referente a estas restrições de tensão é dada pela equação (3.243). As contribuições para a matriz Hessiana são apresentadas em (3.244).

$$L(\mathbf{z}) = -\lambda_{v1} \left( V_{\text{Re}}^{a^2} + V_{\text{Im}}^{a^2} - V_{\text{Re}}^{b^2} - V_{\text{Im}}^{b^2} \right) - \lambda_{v2} \left( V_{\text{Re}}^{a^2} + V_{\text{Im}}^{a^2} - V_{\text{Re}}^{c^2} - V_{\text{Im}}^{c^2} \right) \quad (3.243)$$

$$H = \begin{matrix} & V_{\text{Re}_k}^a & \lambda_{\text{Re}_k}^a & V_{\text{Re}_k}^b & \lambda_{\text{Re}_k}^b & V_{\text{Re}_k}^c & \lambda_{\text{Re}_k}^c & V_{\text{Im}_k}^a & \lambda_{\text{Im}_k}^a & V_{\text{Im}_k}^b & \lambda_{\text{Im}_k}^b & V_{\text{Im}_k}^c & \lambda_{\text{Im}_k}^c & \lambda_{v1} & \lambda_{v2} \\ \begin{matrix} V_{\text{Re}_k}^a \\ \lambda_{\text{Re}_k}^a \\ V_{\text{Re}_k}^b \\ \lambda_{\text{Re}_k}^b \\ V_{\text{Re}_k}^c \\ \lambda_{\text{Re}_k}^c \\ V_{\text{Im}_k}^a \\ \lambda_{\text{Im}_k}^a \\ V_{\text{Im}_k}^b \\ \lambda_{\text{Im}_k}^b \\ V_{\text{Im}_k}^c \\ \lambda_{\text{Im}_k}^c \\ \lambda_{v1} \\ \lambda_{v2} \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccc|cc} x_1 & & & & & & & & & & & & & y_1^a & y_2^a \\ & x_2 & & & & & & & & & & & & & y_3^b & \\ & & x_3 & & & & & & & & & & & & y_4^c & \\ \hline & & & & x_4^a & & & & & & & & & & y_5^a & y_6^a \\ & & & & & x_5^b & & & & & & & & & y_7^b & \\ & & & & & & x_6^c & & & & & & & & y_8^c & \\ \hline y_1^a & & y_3^b & & & & & & & & & & & & & \\ y_2^a & & & & y_4^c & & & & & & & & & & & y_8^c \end{array} \right] & \end{matrix} \quad (3.244)$$

Sendo:

$$x_1^a = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^a \partial V_{\text{Re}_k}^a} = -2\lambda_{v1} - 2\lambda_{v2} \quad (3.245)$$

$$x_2^b = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^b \partial V_{\text{Re}_k}^b} = 2\lambda_{v1} \quad (3.246)$$

$$x_3^c = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^c \partial V_{\text{Re}_k}^c} = 2\lambda_{v2} \quad (3.247)$$

$$x_4^a = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^a \partial V_{\text{Im}_k}^a} = -2\lambda_{v1} - 2\lambda_{v2} \quad (3.248)$$

$$x_5^b = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^b \partial V_{\text{Im}_k}^b} = 2\lambda_{v1} \quad (3.249)$$

$$x_6^c = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^c \partial V_{\text{Im}_k}^c} = 2\lambda_{v2} \quad (3.250)$$

$$y_1^a = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^a \partial \lambda_{v1}} = -2V_{\text{Re}_k}^a \quad (3.251)$$

$$y_2^a = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^a \partial \lambda_{v2}} = -2V_{\text{Re}_k}^a \quad (3.252)$$

$$y_3^b = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^b \partial \lambda_{v2}} = 2V_{\text{Re}_k}^b \quad (3.253)$$

$$y_4^c = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^c \partial \lambda_{v2}} = 2V_{\text{Re}_k}^c \quad (3.254)$$

$$y_5^a = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^a \partial \lambda_{v1}} = -2V_{\text{Im}_k}^a \quad (3.255)$$

$$y_6^a = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^a \partial \lambda_{v2}} = -2V_{\text{Im}_k}^a \quad (3.256)$$

$$y_7^b = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^b \partial \lambda_{v1}} = 2V_{\text{Im}_k}^b \quad (3.257)$$

$$y_8^c = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^c \partial \lambda_{v2}} = 2V_{\text{Im}_k}^c \quad (3.258)$$



$$\mathbf{b}_q(z) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{\text{Re}_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{\text{Re}_k}^a \\ \tilde{V}_{\text{Re}_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{\text{Re}_k}^b \\ \tilde{V}_{\text{Re}_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{\text{Re}_k}^c \\ \tilde{V}_{\text{Im}_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{\text{Im}_k}^a \\ \tilde{V}_{\text{Im}_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{\text{Im}_k}^b \\ \tilde{V}_{\text{Im}_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{\text{Im}_k}^c \\ \tilde{P}_a \\ \tilde{Q}_a \\ \tilde{P}_b \\ \tilde{Q}_b \\ \tilde{P}_c \\ \tilde{Q}_c \\ \tilde{\lambda}_{q1} \\ \tilde{\lambda}_{q2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ -\lambda_{q1} - \lambda_{q2} \\ \\ -\lambda_{q1} \\ \\ -\lambda_{q2} \\ -Q_k^a + Q_k^b \\ -Q_k^a + Q_k^c \end{bmatrix} \quad (3.262)$$

Uma modelagem semelhante pode ser utilizada para alocar potências ativas equilibradas.

### 3.5.5 Restrição de Limite de Corrente em Circuitos

As restrições de correntes em circuitos têm como objetivo garantir que as correntes por fase nos equipamentos de um SEP estejam confinadas entre limites de segurança.

No método de injeção de correntes utilizando a formulação retangular, o módulo da corrente complexa  $I^s$  é representado por  $|I^s|^2 = i^2 = I_{\text{Re}}^s{}^2 + I_{\text{Im}}^s{}^2$ . O valor quadrático tem como objetivo facilitar o processo derivativo.

Utilizando de uma variável  $y^s$  monta-se as equações de restrições de corrente conforme apresentado na equação (3.263).

$$\begin{aligned} y^s - I_{\text{Re}}^s{}^2 - I_{\text{Im}}^s{}^2 &= 0 \\ i_{\text{min}}^2 \leq y^s \leq i_{\text{max}}^2 \end{aligned} \quad (3.263)$$

A função Lagrangeana referente às restrições de correntes é dada pela equação (3.264).

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}) = & -\lambda_y^s \left( y^s - I_{\text{Re}}^s{}^2 - I_{\text{Im}}^s{}^2 \right) + \\ & -\pi_{\text{low}}^s \left( i_{\text{min}}^2 - y^s + s_{\text{low}}^s \right) - \pi_{\text{up}}^s \left( y^s - i_{\text{max}}^2 + s_{\text{up}}^s \right) - \mu \log(s_{\text{low}}^s) - \mu \log(s_{\text{up}}^s) \end{aligned} \quad (3.264)$$

O primeiro termo da função Lagrangeana indica que seis novas linhas/colunas devem ser criadas relativas as variáveis  $\mathbf{y}$  e  $\lambda_y$ , sendo duas para cada fase. Os termos restantes indicam que as contribuições da restrição de canalização devem ser tratadas conforme apresentado no Apêndice B. As contribuições da função Lagrangeana (3.264) para a matriz Hessiana é apresentada em (3.265). Para evitar o aumento da matriz Hessiana, as equações de restrição de correntes só devem ser utilizadas (inseridas no processo iterativo) a partir do momento em que ocorrer a violação.

$$\mathbf{H}_{i \text{ max}} = \begin{matrix} & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_1^t & \left[ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 \right] \\ \mathbf{z}_2^t & \left[ \mathbf{Y}_2^t & \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_4 \right] \\ \mathbf{z}_3^t & \left[ \mathbf{Y}_3^t & \mathbf{Y}_4^t & \mathbf{Y}_5 \right] \end{matrix} \quad (3.265)$$

Onde:

$$\mathbf{z}_1 = \left[ V_{\text{Re}_k}^a \quad \lambda_{\text{Re}_k}^a \quad V_{\text{Re}_k}^b \quad \lambda_{\text{Re}_k}^b \quad V_{\text{Re}_k}^c \quad \lambda_{\text{Re}_k}^c \quad \left| \quad V_{\text{Im}_k}^a \quad \lambda_{\text{Im}_k}^a \quad V_{\text{Im}_k}^b \quad \lambda_{\text{Im}_k}^b \quad V_{\text{Im}_k}^c \quad \lambda_{\text{Im}_k}^c \right. \right] \quad (3.266)$$

$$\mathbf{z}_2 = \left[ V_{\text{Re}_m}^a \quad \lambda_{\text{Re}_m}^a \quad V_{\text{Re}_m}^b \quad \lambda_{\text{Re}_m}^b \quad V_{\text{Re}_m}^c \quad \lambda_{\text{Re}_m}^c \quad \left| \quad V_{\text{Im}_m}^a \quad \lambda_{\text{Im}_m}^a \quad V_{\text{Im}_m}^b \quad \lambda_{\text{Im}_m}^b \quad V_{\text{Im}_m}^c \quad \lambda_{\text{Im}_m}^c \right. \right] \quad (3.267)$$

$$\mathbf{z}_3 = \left[ y^a \quad \lambda_y^a \quad y^b \quad \lambda_y^b \quad y^c \quad \lambda_y^c \right] \quad (3.268)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} y_1^{aa} & y_1^{ab} & y_1^{ac} & y_3^{aa} & y_3^{ab} & y_3^{ac} \\ y_1^{ab} & y_1^{bb} & y_1^{bc} & y_3^{ba} & y_3^{bb} & y_3^{bc} \\ y_1^{ac} & y_1^{bc} & y_1^{cc} & y_3^{ca} & y_3^{cb} & y_3^{cc} \\ \hline y_3^{aa} & y_3^{ba} & y_3^{ca} & y_2^{aa} & y_2^{ab} & y_2^{ac} \\ y_3^{ab} & y_3^{bb} & y_3^{cb} & y_2^{ab} & y_2^{bb} & y_2^{bc} \\ y_3^{ac} & y_3^{bc} & y_3^{cc} & y_2^{ac} & y_2^{bc} & y_2^{cc} \end{array} \right] \quad (3.269)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} y_4^{aa} & y_4^{ab} & y_4^{ac} & y_6^{aa} & y_6^{ab} & y_6^{ac} \\ y_4^{ab} & y_4^{bb} & y_4^{bc} & y_6^{ba} & y_6^{bb} & y_6^{bc} \\ y_4^{ac} & y_4^{bc} & y_4^{cc} & y_6^{ca} & y_6^{cb} & y_6^{cc} \\ \hline y_7^{aa} & y_7^{ba} & y_7^{ca} & y_5^{aa} & y_5^{ab} & y_5^{ac} \\ y_7^{ab} & y_7^{bb} & y_7^{cb} & y_5^{ab} & y_5^{bb} & y_5^{bc} \\ y_7^{ac} & y_7^{bc} & y_7^{cc} & y_5^{ac} & y_5^{bc} & y_5^{cc} \end{array} \right] \quad (3.270)$$

$$\mathbf{Y}_3 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} y_8^{aa} & y_8^{ab} & y_8^{ac} & & & \\ y_8^{ba} & y_8^{bb} & y_8^{bc} & & & \\ y_8^{ca} & y_8^{cb} & y_8^{cc} & & & \\ \hline y_9^{aa} & y_9^{ab} & y_9^{ac} & & & \\ y_9^{ba} & y_9^{bb} & y_9^{bc} & & & \\ y_9^{ca} & y_9^{cb} & y_9^{cc} & & & \end{array} \right] \quad (3.271)$$

$$\mathbf{Y}_4 = \begin{bmatrix} y_{10}^{aa} & y_{10}^{ab} & y_{10}^{ac} \\ y_{10}^{ba} & y_{10}^{bb} & y_{10}^{bc} \\ y_{10}^{ca} & y_{10}^{cb} & y_{10}^{cc} \\ \hline y_{11}^{aa} & y_{11}^{ab} & y_{11}^{ac} \\ y_{11}^{ba} & y_{11}^{bb} & y_{11}^{bc} \\ y_{11}^{ca} & y_{11}^{cb} & y_{11}^{cc} \end{bmatrix} \quad (3.272)$$

$$\mathbf{Y}_5 = \begin{bmatrix} p_{i \max}^a & -1 & & & \\ -1 & & & & \\ & & p_{i \max}^b & -1 & \\ & & -1 & & \\ & & & & p_{i \max}^c & -1 \\ & & & & -1 & \end{bmatrix} \quad (3.273)$$

Onde:

$$y_1^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^s \partial V_{\text{Re}_k}^t} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( \frac{\partial I_{\text{Re}_k}^u}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Re}_k}^u}{\partial V_{\text{Re}_k}^t} + \frac{\partial I_{\text{Im}_k}^u}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Im}_k}^u}{\partial V_{\text{Re}_k}^t} \right) \quad (3.274)$$

$$y_2^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^s \partial V_{\text{Im}_k}^t} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( \frac{\partial I_{\text{Re}_k}^u}{\partial V_{\text{Im}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Re}_k}^u}{\partial V_{\text{Im}_k}^t} + \frac{\partial I_{\text{Im}_k}^u}{\partial V_{\text{Im}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Im}_k}^u}{\partial V_{\text{Im}_k}^t} \right) \quad (3.275)$$

$$y_3^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^s \partial V_{\text{Im}_k}^t} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( \frac{\partial I_{\text{Re}_k}^u}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Re}_k}^u}{\partial V_{\text{Im}_k}^t} + \frac{\partial I_{\text{Im}_k}^u}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Im}_k}^u}{\partial V_{\text{Im}_k}^t} \right) \quad (3.276)$$

$$y_4^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Re}_k}^s \partial V_{\text{Re}_m}^t} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( \frac{\partial I_{\text{Re}_k}^u}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Re}_m}^u}{\partial V_{\text{Re}_m}^t} + \frac{\partial I_{\text{Im}_k}^u}{\partial V_{\text{Re}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Im}_m}^u}{\partial V_{\text{Re}_m}^t} \right) \quad (3.277)$$

$$y_5^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{\text{Im}_k}^s \partial V_{\text{Im}_m}^t} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( \frac{\partial I_{\text{Re}_k}^u}{\partial V_{\text{Im}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Re}_m}^u}{\partial V_{\text{Im}_m}^t} + \frac{\partial I_{\text{Im}_k}^u}{\partial V_{\text{Im}_k}^s} \frac{\partial I_{\text{Im}_m}^u}{\partial V_{\text{Im}_m}^t} \right) \quad (3.278)$$

$$y_6^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial V_{Im_m}^t} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( \frac{\partial I_{Re}^u}{\partial V_{Re_k}^s} \frac{\partial I_{Re}^u}{\partial V_{Im_m}^t} + \frac{\partial I_{Im}^u}{\partial V_{Re_k}^s} \frac{\partial I_{Im}^u}{\partial V_{Im_m}^t} \right) \quad (3.279)$$

$$y_7^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s \partial V_{Re_m}^t} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( \frac{\partial I_{Re}^u}{\partial V_{Im_k}^s} \frac{\partial I_{Re}^u}{\partial V_{Re_m}^t} + \frac{\partial I_{Im}^u}{\partial V_{Im_k}^s} \frac{\partial I_{Im}^u}{\partial V_{Re_m}^t} \right) \quad (3.280)$$

$$y_8^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_k}^s \partial \lambda_y^t} = 2I_{Re}^t \frac{\partial I_{Re}^t}{\partial V_{Re_k}^s} + 2I_{Im}^t \frac{\partial I_{Im}^t}{\partial V_{Re_k}^s} \quad (3.281)$$

$$y_9^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_k}^s \partial \lambda_y^t} = 2I_{Re}^t \frac{\partial I_{Re}^t}{\partial V_{Im_k}^s} + 2I_{Im}^t \frac{\partial I_{Im}^t}{\partial V_{Im_k}^s} \quad (3.282)$$

$$y_{10}^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Re_m}^s \partial \lambda_y^t} = 2I_{Re}^t \frac{\partial I_{Re}^t}{\partial V_{Re_m}^s} + 2I_{Im}^t \frac{\partial I_{Im}^t}{\partial V_{Re_m}^s} \quad (3.283)$$

$$y_{11}^{st} = \frac{\partial^2 L}{\partial V_{Im_m}^s \partial \lambda_y^t} = 2I_{Re}^t \frac{\partial I_{Re}^t}{\partial V_{Im_m}^s} + 2I_{Im}^t \frac{\partial I_{Im}^t}{\partial V_{Im_m}^s} \quad (3.284)$$

$pi_{max}$  são as contribuições do método de pontos interiores para a matriz Hessiana conforme apresentado no Apêndice B.

O vetor das condições de otimalidade é apresentado na equação (3.285).

$$\mathbf{b}_{reg}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \dot{V}_{Re_k}^a \\ \dot{\lambda}_{Re_k}^a \\ \dot{V}_{Re_k}^b \\ \dot{\lambda}_{Re_k}^b \\ \dot{V}_{Re_k}^c \\ \dot{\lambda}_{Re_k}^c \\ \dots \\ \dot{V}_{Im_k}^a \\ \dot{\lambda}_{Im_k}^a \\ \dot{V}_{Im_k}^b \\ \dot{\lambda}_{Im_k}^b \\ \dot{V}_{Im_k}^c \\ \dot{\lambda}_{Im_k}^c \\ \dots \\ \dot{V}_{Re_m}^a \\ \dot{\lambda}_{Re_m}^a \\ \dot{V}_{Re_m}^b \\ \dot{\lambda}_{Re_m}^b \\ \dot{V}_{Re_m}^c \\ \dot{\lambda}_{Re_m}^c \\ \dots \\ \dot{V}_{Im_m}^a \\ \dot{\lambda}_{Im_m}^a \\ \dot{V}_{Im_m}^b \\ \dot{\lambda}_{Im_m}^b \\ \dot{V}_{Im_m}^c \\ \dot{\lambda}_{Im_m}^c \\ \dots \\ y^a \\ \lambda_y^a \\ y^b \\ \lambda_y^b \\ y^c \\ \lambda_y^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1^a \\ 0 \\ z_1^b \\ 0 \\ z_1^c \\ 0 \\ \dots \\ z_2^a \\ 0 \\ z_2^b \\ 0 \\ z_2^c \\ 0 \\ \dots \\ z_3^a \\ 0 \\ z_3^b \\ 0 \\ z_3^c \\ 0 \\ \dots \\ z_4^a \\ 0 \\ z_4^b \\ 0 \\ z_4^c \\ 0 \\ \dots \\ -\lambda_y^a + pi_{i\max}^a \\ z_5^a \\ -\lambda_y^b + pi_{i\max}^b \\ z_5^b \\ -\lambda_y^c + pi_{i\max}^c \\ z_5^c \end{bmatrix} \quad (3.285)$$

Onde:

$$z_1^s = \frac{\partial L}{\partial V_{Re_k}^s} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( I_{Re}^u \frac{\partial I_{Re}^u}{\partial V_{Re_k}^s} + I_{Im}^u \frac{\partial I_{Im}^u}{\partial V_{Re_k}^s} \right) \quad (3.286)$$

$$z_2^s = \frac{\partial L}{\partial V_{Im_k}^s} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( I_{Re}^u \frac{\partial I_{Re}^u}{\partial V_{Im_k}^s} + I_{Im}^u \frac{\partial I_{Im}^u}{\partial V_{Im_k}^s} \right) \quad (3.287)$$

$$z_3^s = \frac{\partial L}{\partial V_{Re_m}^s} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( I_{Re}^u \frac{\partial I_{Re}^u}{\partial V_{Re_m}^s} + I_{Im}^u \frac{\partial I_{Im}^u}{\partial V_{Re_m}^s} \right) \quad (3.288)$$

$$z_4^s = \frac{\partial L}{\partial V_{Im_m}^s} = \sum_{u=a,b,c} 2\lambda_y^u \left( I_{Re}^u \frac{\partial I_{Re}^u}{\partial V_{Im_m}^s} + I_{Im}^u \frac{\partial I_{Im}^u}{\partial V_{Im_m}^s} \right) \quad (3.289)$$

$$z_5^s = \frac{\partial L}{\partial \lambda_y^s} = y^s - I_{Re}^s{}^2 - I_{Im}^s{}^2 \quad (3.290)$$

### 3.6 Fluxo de Potência Ótimo Trifásico – Funções Objetivo

As funções objetivo representam um índice de desempenho que se deseja otimizar, podem ser representadas por uma variável ou uma função de várias variáveis. Duas ou mais funções objetivo podem ser otimizadas simultaneamente.

Neste trabalho foram implementadas as seguintes funções:

- Mínimo custo de geração ativa
- Mínimo custo de geração reativa
- Mínimo custo de alocação de potência reativa
- Mínimas perdas
- Mínimo corte de carga
- Mínimo desvio do ponto de operação

#### 3.6.1 Mínimo Custo de Geração Ativa

Esta função minimiza o custo da geração ativa total do sistema, sendo este expresso em função da potência ativa gerada pelas unidades. A função custo de geração geralmente é representada por uma função linear (3.291) ou quadrática (3.292). Como se pode observar a função linear é uma simplificação da quadrática.

$$F.O. = \sum_{i \in \Omega_g} \left( \sum_{s=\{a,b,c\}} b_k P_k^s \right) \quad (3.291)$$

$$F.O. = \sum_{i \in \Omega_g} \left( \sum_{s=\{a,b,c\}} a_k P_k^s{}^2 + b_k P_k^s + c_k \right) \quad (3.292)$$

Onde:

$\Omega_g$  – Conjunto das máquinas cuja potência ativa é controlável.

$a_k, b_k, c_k$  – Parâmetros para o custo da geração de potência ativa na máquina  $k$ .

$P_k^s$  – Potência ativa gerada na fase  $s$  da máquina  $k$ .

As contribuições da equação (3.292) para o vetor independente e matriz Hessiana são dadas por (3.293) e (3.296) respectivamente.

$$\mathbf{H}_{maq} = \begin{matrix}
 \begin{matrix}
 V_{Re_k}^a \\
 \lambda_{Re_k}^a \\
 V_{Re_k}^b \\
 \lambda_{Re_k}^b \\
 V_{Re_k}^c \\
 \lambda_{Re_k}^c \\
 \hline
 V_{Im_k}^a \\
 \lambda_{Im_k}^a \\
 V_{Im_k}^b \\
 \lambda_{Im_k}^b \\
 V_{Im_k}^c \\
 \lambda_{Im_k}^c \\
 \hline
 P_k^a \\
 Q_k^a \\
 P_k^b \\
 Q_k^b \\
 P_k^c \\
 Q_k^c
 \end{matrix}
 &
 \begin{matrix}
 V_{Re_k}^a & \lambda_{Re_k}^a & V_{Re_k}^b & \lambda_{Re_k}^b & V_{Re_k}^c & \lambda_{Re_k}^c & V_{Im_k}^a & \lambda_{Im_k}^a & V_{Im_k}^b & \lambda_{Im_k}^b & V_{Im_k}^c & \lambda_{Im_k}^c & P_k^a & Q_k^a & P_k^b & Q_k^b & P_k^c & Q_k^c \\
 \vdots & y_1^a & & & & & \\
 \vdots & & y_2^a & & & & \\
 \vdots & & & y_1^b & & & \\
 \vdots & & & & y_2^b & & \\
 \vdots & & & & & y_1^c & \\
 \vdots & & & & & & y_2^c
 \end{matrix}
 &
 \end{matrix} \quad (3.293)$$

Onde:

$$y_1^a = y_1^b = y_1^c = 2a_k \quad (3.294)$$

$$y_2^a = y_2^b = y_2^c = 0 \quad (3.295)$$

$$\mathbf{b}_{maq}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{Re_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^a \\ \tilde{V}_{Re_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^b \\ \tilde{V}_{Re_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^c \\ \tilde{V}_{Im_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^a \\ \tilde{V}_{Im_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^b \\ \tilde{V}_{Im_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^c \\ \tilde{P}_a \\ \tilde{Q}_a \\ \tilde{P}_b \\ \tilde{Q}_b \\ \tilde{P}_c \\ \tilde{Q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ z_1^a \\ z_2^a \\ z_1^b \\ z_2^b \\ z_1^c \\ z_2^c \end{bmatrix} \quad (3.296)$$

Onde:

$$z_1^a = z_1^b = z_1^c = 2a_k P_k^s + b_k \quad (3.297)$$

$$z_2^a = z_2^b = z_2^c = 0 \quad (3.298)$$

### 3.6.2 Mínimo Custo de Geração Reativa

Tem como objetivo alocar custos para os serviços auxiliares de suporte de reativo das máquinas do sistema.

$$F.O. = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_g} \left( \sum_{s=\{a,b,c\}} d_k \cdot Q_k^s \right) \quad (3.299)$$

Onde:

$\Omega_g$  – Conjunto das máquinas cuja potência reativa é controlável.

$d_k$  – Custo da geração de potência reativa na máquina  $k$ .

$Q_k^s$  – Potência reativa gerada na fase  $s$  máquina  $k$ .

As contribuições da equação (3.299) para o vetor independente e para a matriz Hessiana são dadas por (3.293) e (3.296) respectivamente. Onde os termos apresentados são dados por:

$$y_1^a = y_1^b = y_1^c = 0 \quad (3.300)$$

$$y_2^a = y_2^b = y_2^c = d_k \quad (3.301)$$

$$z_1^a = z_1^b = z_1^c = 0 \quad (3.302)$$

$$z_2^a = z_2^b = z_2^c = d_k Q_k^s \quad (3.303)$$

### 3.6.3 Mínimo Custo de Alocação de Potência Reativa

Tem como objetivo alocar custos para a instalação de capacitores ou indutores para o suporte de reativos.

$$F.O. = \sum_{i \in \Omega_g} \left( \sum_{s=\{a,b,c\}} e_k \cdot Q_k^s \right) \quad (3.304)$$

Onde:

$\Omega_g$  – Conjunto de barras candidatas à instalação de potência reativa.

$e_k$  – Custo linear da compensação reativa na barra  $k$ .

$Q_k^s$  – Potência reativa alocada na barra  $k$ .

As contribuições da equação (3.304) para o vetor independente e matriz Hessiana são dadas por (3.293) e (3.296) respectivamente. Onde os termos apresentados são dados por:

$$y_1^a = y_1^b = y_1^c = 0 \quad (3.305)$$

$$y_2^a = y_2^b = y_2^c = 0 \quad (3.306)$$

$$z_1^a = z_1^b = z_1^c = 0 \quad (3.307)$$

$$z_2^a = z_2^b = z_2^c = e_k \quad (3.308)$$

### 3.6.4 Mínimas Perdas

Esta função tem como objetivo minimizar as perdas totais de potência ativa no sistema, onde a expressão das perdas nos ramos é dada por (3.309).

$$F.O. = \sum_{k,m \in \Omega_c} (P_{km}^a + P_{mk}^a + P_{km}^b + P_{mk}^b + P_{km}^c + P_{mk}^c) \quad (3.309)$$

Onde:

$\Omega_c$  – Conjunto de ramos do sistema.

$P_{km}, P_{mk}$  – Fluxo de potência ativa nos ramos  $k-m$  e  $m-k$ .

A matriz Hessiana é apresentada na equação (3.310) e o vetor das condições de otimalidade na equação (3.312).

$$\mathbf{H}_{perdas} = \begin{matrix} & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \\ \begin{matrix} \mathbf{z}'_1 \\ \mathbf{z}'_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & -\mathbf{Y}_1 \\ -\mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.310)$$

$$\mathbf{Y}_1 = 2 \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{kn}^{aa} & \mathcal{G}_{kn}^{ab} & \mathcal{G}_{kn}^{ac} & | & & & \\ \mathcal{G}_{kn}^{ba} & \mathcal{G}_{kn}^{bb} & \mathcal{G}_{kn}^{bc} & | & & & \\ \mathcal{G}_{kn}^{ca} & \mathcal{G}_{kn}^{cb} & \mathcal{G}_{kn}^{cc} & | & & & \\ \hline & & & | & \mathcal{G}_{kn}^{aa} & \mathcal{G}_{kn}^{ab} & \mathcal{G}_{kn}^{ac} \\ & & & | & \mathcal{G}_{kn}^{ba} & \mathcal{G}_{kn}^{bb} & \mathcal{G}_{kn}^{bc} \\ & & & | & \mathcal{G}_{kn}^{ca} & \mathcal{G}_{kn}^{cb} & \mathcal{G}_{kn}^{cc} \end{bmatrix} \quad (3.311)$$

$$\mathbf{b}_{perdas}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{Re_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^a \\ \tilde{V}_{Re_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^b \\ \tilde{V}_{Re_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^c \\ \tilde{V}_{Im_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^a \\ \tilde{V}_{Im_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^b \\ \tilde{V}_{Im_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^c \\ \vdots \\ \tilde{V}_{Re_m}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^a \\ \tilde{V}_{Re_m}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^b \\ \tilde{V}_{Re_m}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_m}^c \\ \tilde{V}_{Im_m}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^a \\ \tilde{V}_{Im_m}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^b \\ \tilde{V}_{Im_m}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_m}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^a \\ 0 \\ x_1^b \\ 0 \\ x_1^c \\ 0 \\ x_2^a \\ 0 \\ x_2^b \\ 0 \\ x_2^c \\ 0 \\ \vdots \\ x_3^a \\ 0 \\ x_3^b \\ 0 \\ x_3^c \\ 0 \\ x_4^a \\ 0 \\ x_4^b \\ 0 \\ x_4^c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.312)$$

Donde:

$$\begin{aligned} x_1^t &= \sum_{s=a,b,c} \Re \left( \frac{\partial V_{Re_k}^s}{\partial V_{Re_k}^t} I^{s*} + (V_k^s + V_k^s) y^{st*} \right) \\ x_2^t &= \sum_{s=a,b,c} \Re \left( j \frac{\partial V_{Im_k}^s}{\partial V_{Im_k}^t} I^{s*} + j(V_k^s + V_k^s) y^{st*} \right) \\ x_3^t &= \sum_{s=a,b,c} \Re \left( \frac{\partial V_{Re_m}^s}{\partial V_{Re_m}^t} I^{s*} + (V_k^s + V_k^s) y^{st*} \right) \\ x_4^t &= \sum_{s=a,b,c} \Re \left( j \frac{\partial V_{Im_k}^s}{\partial V_{Im_k}^t} I^{s*} + j(V_k^s + V_k^s) y^{st*} \right) \end{aligned} \quad (3.313)$$

### 3.6.5 Mínimo Corte de Carga

Caso o sistema não apresente convergência por causa de contingências é possível utilizar a função objetivo mínimo corte de carga para reduzir a carga do sistema e determinar uma solução viável. Esta função também permite priorizar a ordem do corte de carga e admitir que algumas cargas não sejam cortadas. A equação do corte para as cargas conectadas em estrela aterrada é apresentada em (3.314) e a equação para as cargas em delta é apresentadas em (3.315).

Com isto todas as cargas do conjunto onde é permitido o corte de carga devem ser multiplicada por  $\tau_i^s$ .

$$F.O. = \sum_{i \in \Omega_c} c_i (1 - \tau_i^s) P_i^s \quad (3.314)$$

$$0 \leq \tau_i^s \leq 1$$

$$F.O. = \sum_{i \in \Omega_c} c_i (1 - \tau_i^s) P_i^{st} \quad (3.315)$$

$$0 \leq \tau_i^s \leq 1$$

Onde:

$\Omega_c$  – Conjunto de cargas do sistema onde é permitido o corte, pode-se utilizar o corte de potência ativa (P) com reativa (Q).

$c_i$  – Custo associado ao corte de carga.

$\tau_i^s$  – Fator multiplicativo da carga que pode variar entre 0 (corte total) a 1 (sem corte).

$P_i^s$  ou  $Q_i^s$  – Carga  $i$  em estrela conectada na fase  $s$ .

$P_i^{st}$  ou  $Q_i^{st}$  – Carga  $i$  em delta conectada entre as fases  $st$ .

Exemplificando, as contribuições das cargas conectadas em estrela aterrada para a matriz Hessiana é apresentada na (3.316) e para o vetor independente na equação (3.317).



Onde:

$$\begin{aligned}
 x_1^s &= \Im(dI_p^s dr + dI_i^s dr + dI_z^s dr)\lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(dI_p^s dr + dI_i^s dr + dI_z^s dr)\lambda_{\text{Im}_k}^s \\
 x_2^s &= \Im(I^s) \\
 x_3^s &= \Im(dI_p^s dm + dI_i^s dm + dI_z^s dm)\lambda_{\text{Re}_k}^s + \Re(dI_p^s dm + dI_i^s dm + dI_z^s dm)\lambda_{\text{Im}_k}^s \\
 x_4^s &= \Re(I^s)
 \end{aligned} \tag{3.318}$$

Os valores acima indicados são apresentados na seção 3.3.7.

### 3.6.6 Mínimo Desvio do Ponto de Operação

A função objetivo mínimo desvio do ponto de operação (3.319) busca que o sistema não desvie muito do ponto de operação inicial ou desejada.

$$F.O. = \frac{1}{2} \sum_{i \in \Omega_c} \rho_i (z_i - \bar{z}_i)^2 \tag{3.319}$$

Onde:

$\Omega_c$  – Conjunto dos componentes que possuem estados que não devem se distanciar do ponto de operação.

$\rho_i$  – Peso associado ao desvio da variável de estado.

$z_i$  – Estado da variável de interesse.

$\bar{z}_i$  – Estado inicial da variável de interesse.

Uma boa estimativa para os valores de  $\rho_i$  pode ser dada por (3.320), permitindo que equipamentos com maiores limites operacionais possuam maior liberdade de desvio do ponto inicial.

$$\rho_i = \frac{1}{|h_{\max} - h_{\min}|} \tag{3.320}$$

Esta função pode ser utilizada para geração de potência ativa, reativa, tapes de transformadores, tensões nodais, etc.



$$\mathbf{b}_{des}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{Re_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^a \\ \tilde{V}_{Re_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^b \\ \tilde{V}_{Re_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Re_k}^c \\ \tilde{V}_{Im_k}^a \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^a \\ \tilde{V}_{Im_k}^b \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^b \\ \tilde{V}_{Im_k}^c \\ \tilde{\lambda}_{Im_k}^c \\ \tilde{P}_a \\ \tilde{Q}_a \\ \tilde{P}_b \\ \tilde{Q}_b \\ \tilde{P}_c \\ \tilde{Q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{i,V_k} \left( V_{Re_k}^a - \bar{V}_{Re_k}^a \right) \\ \rho_{i,V_k} \left( V_{Re_k}^b - \bar{V}_{Re_k}^b \right) \\ \rho_{i,V_k} \left( V_{Re_k}^c - \bar{V}_{Re_k}^c \right) \\ \rho_{i,V_k} \left( V_{Im_k}^a - \bar{V}_{Im_k}^a \right) \\ \rho_{i,V_k} \left( V_{Im_k}^b - \bar{V}_{Im_k}^b \right) \\ \rho_{i,V_k} \left( V_{Im_k}^c - \bar{V}_{Im_k}^c \right) \\ \rho_{i,S_k} \left( P_a - \bar{P}_a \right) \\ \rho_{i,S_k} \left( Q_a - \bar{Q}_a \right) \\ \rho_{i,S_k} \left( P_b - \bar{P}_b \right) \\ \rho_{i,S_k} \left( Q_b - \bar{Q}_b \right) \\ \rho_{i,S_k} \left( P_c - \bar{P}_c \right) \\ \rho_{i,S_k} \left( Q_c - \bar{Q}_c \right) \end{bmatrix} \quad (3.324)$$

### 3.7 Passos Primais e Duais e Atualização de Variáveis

A atualização das variáveis não é um processo trivial em um algoritmo de FPO. Na seção B.4.3 do Apêndice B, encontra-se uma discussão detalhada sobre o mecanismo de atualização das variáveis.

No FPO primal-dual devem ser calculados dois valores para a atualização das variáveis, denominados passo primal, equação (3.325) para as variáveis primais (variáveis do problema e auxiliares) e passo dual, equação (3.326) para as variáveis duais (multiplicadores de Lagrange).

$$\alpha_p = \min \left[ \min_{\Delta s < 0} \frac{\mathbf{s}_{low}}{|\Delta \mathbf{s}_{low}|}, \min_{\Delta s < 0} \frac{\mathbf{s}_{up}}{|\Delta \mathbf{s}_{up}|}, 1 \right] \quad (3.325)$$

$$\alpha_d = \min \left[ \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\boldsymbol{\pi}_{low}}{|\Delta \boldsymbol{\pi}_{low}|}, \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\boldsymbol{\pi}_{up}}{|\Delta \boldsymbol{\pi}_{up}|}, 1 \right] \quad (3.326)$$

Ao solucionar sistema linear reduzido não se calcula explicitamente os valores de  $\Delta \mathbf{s}_{low}$ ,  $\Delta \mathbf{s}_{up}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\pi}_{low}$  e  $\Delta \boldsymbol{\pi}_{up}$ . Para calcular estes valores utiliza-se as equações (3.327).

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\pi}_{low} &= \frac{([1]\boldsymbol{\mu} - \mathbf{s}_{low}\boldsymbol{\pi}_{low} - \boldsymbol{\pi}_{low}\Delta\mathbf{s}_{low})}{\mathbf{s}_{low}} \\ \Delta\boldsymbol{\pi}_{up} &= \frac{-[1]\boldsymbol{\mu} - \mathbf{s}_{up}\boldsymbol{\pi}_{up} - \boldsymbol{\pi}_{up}\Delta\mathbf{s}_{up})}{\mathbf{s}_{up}}\end{aligned}\quad (3.327)$$

Onde [1] é uma matriz de diagonal unitária.

Depois de calculados os incrementos e os passos primais e duais, atualiza-se as variáveis segundo o conjunto de equações (3.328), onde  $\sigma$  é um redutor de passo utilizado para evitar problemas de singularidade e possui um valor empírico de 0.99995.

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \mathbf{z} + \sigma \cdot \alpha_p \cdot \Delta\mathbf{z} \\ \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{\lambda} + \sigma \cdot \alpha_d \cdot \Delta\boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\pi} + \sigma \cdot \alpha_d \cdot \Delta\boldsymbol{\pi}\end{aligned}\quad (3.328)$$

As variáveis de folga, nesta formulação, são sempre atualizadas de acordo com a equação (3.329) com base nos limites inferiores, superiores e o ponto dado pelo passo  $k$  do processo iterativo.

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_{low} &= \mathbf{z} - \mathbf{z}_{\min} \\ \mathbf{s}_{up} &= \mathbf{z}_{\max} - \mathbf{z}\end{aligned}\quad (3.329)$$

O cálculo do parâmetro barreira  $\mu$  é discutido no Apêndice B, seção B.4.4.

### 3.8 Algoritmo Para Solução do Fluxo de Potência Ótimo

Na Figura 3.19 apresenta-se o fluxograma para a solução do fluxo de potência ótimo trifásico.

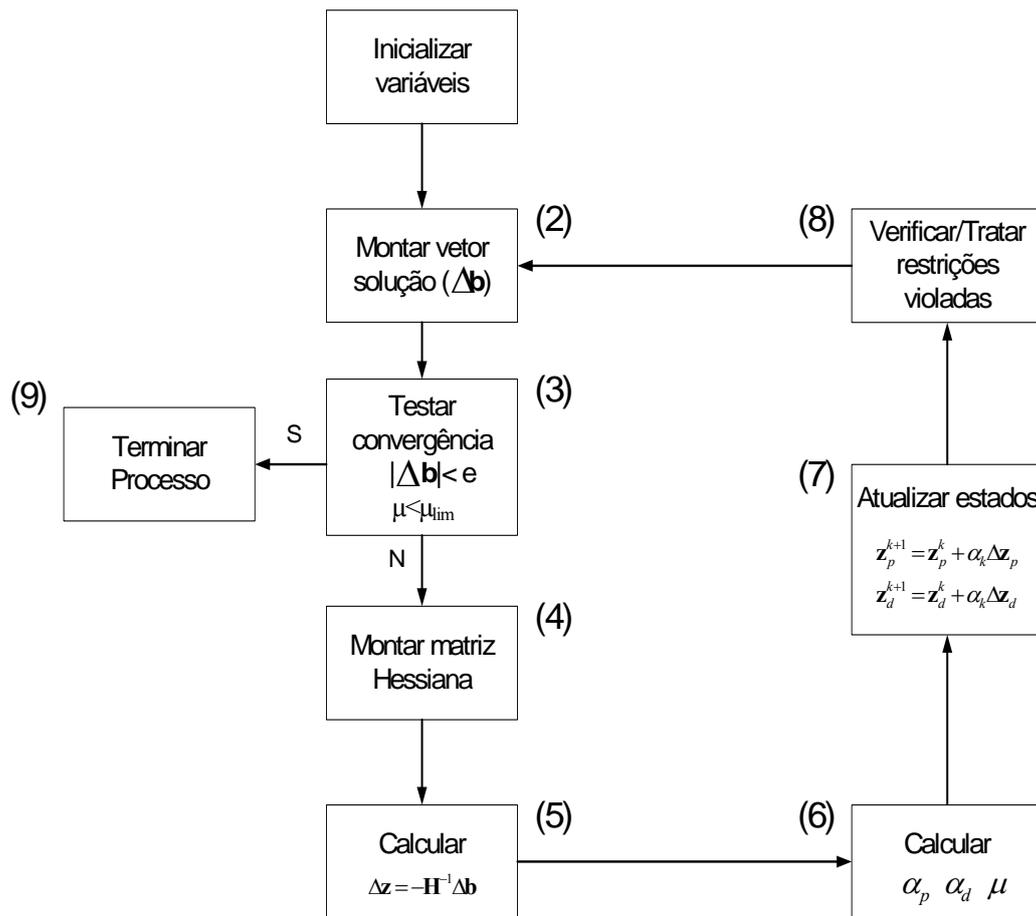


Figura 3.19 – Fluxograma para o fluxo de potência ótimo

Onde:

- (1) As variáveis primais, duais, indicativas de violações e o parâmetro barreira devem ser inicializadas.
- (2) Monta-se o vetor das condições de otimalidade segundo as equações (3.18), (3.31), (3.72), (3.88), (3.125), (3.166), (3.197), (3.223) e (3.229) referentes aos equipamentos da rede. Também podem ser adicionadas outras equações dependendo do tipo de restrições e funções objetivo desejadas.
- (3) Testa-se o vetor das condições de otimalidade e o parâmetro barreira para verificar a convergência.
- (4) Monta-se a matriz Hessiana segundo as equações (3.15), (3.27), (3.67), (3.84), (3.106), (3.155), (3.184), (3.202) e (3.217) referentes aos equipamentos da rede. Também podem ser adicionadas outras equações dependendo do tipo de restrições e funções objetivo desejadas.

- (5) Calcular os incrementos das variáveis primais e duais através da fatoração LDU.
- (6) Calcular os novos valores do passo primal, dual e do parâmetro barreira conforme a seção 3.7.
- (7) Atualizar os estados do sistema conforme (3.327).
- (8) Atualizar os valores das variáveis dos equipamentos que possuem limites funcionais.
- (9) Finalizar o processo e apresentar o resultado.

## Capítulo 4 Resultados

### 4.1 Introdução

Apresenta-se neste capítulo simulações relativas à implementação do método de otimização trifásica por injeções de correntes proposto neste trabalho.

Os testes realizados têm como objetivo comparar todas as características da metodologia proposta para diversos sistemas apresentados na literatura. A metodologia permite representar e estudar diversos aspectos dos sistemas trifásicos que seriam impossíveis de se analisar utilizando apenas ferramentas monofásicas.

Os sistemas testados e suas particularidades estão apresentados na Tabela 4.1. As explicações sobre a escolha destes sistemas são apresentadas em suas subseções juntamente com os resultados dos testes.

Para testar os sistemas foi utilizado um Pentium 4 – 3.2GHz HT com 512Mb de memória.

Tabela 4.1 – Sistemas Testes

Sistema	Barras	Radial	Dimensão da Hessiana	Referência
IEEE4	4	Sim	78	KERSTING (2000)
IEEE13	13	Sim	240	KERSTING (2000)
IEEE14	14	Não	282	UWEE (2005)
IEEE14M	16	Não	318	UWEE (2005)
IEEE34	34	Sim	618	KERSTING (2000)
IEEE37	37	Sim	672	KERSTING (2000)
CMG15K	15000	Sim/Não	270000	UWEE (2005)

Os limites de tensão utilizados como padrões neste trabalho serão de 0,94 p.u. (inferior) e 1,05 p.u. (superior), a não ser quando forem especificados outros valores.

### 4.2 Sistema Teste IEEE4

O diagrama unifilar do sistema IEEE4 encontra-se ilustrado na Figura 4.1. O principal propósito deste sistema é simular otimizações testando algumas possíveis conexões de transformadores trifásicos. Verifica-se que o transformador entre as barras 2 e 3 pode operar como um transformador elevador ou abaixador de tensão. As cargas e

as linhas de transmissão são desbalanceadas. A tensão na barra de geração encontra-se inicialmente em 1,0 pu ou 7,2 kV (Fase-Neutro). As cargas são: 1275+j790 kVA na fase *a*, 1800+j872 kVA na fase *b* e 2375+j780 kVA na fase *c*.

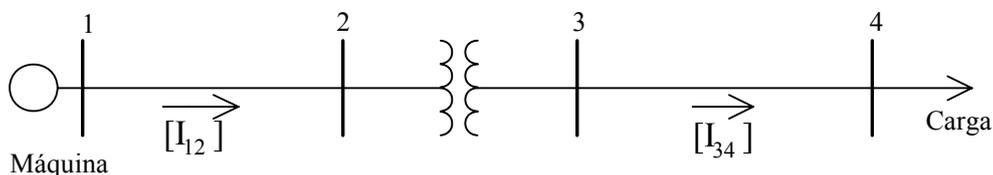


Figura 4.1 – Sistema IEEE4

Na Tabela 4.2 são apresentadas as perdas totais e o perfil de tensão trifásico na barra de carga (barra 4) para algumas configurações do transformador. Verifica-se que quando o transformador está elevando a tensão para 14,376 kV (Fase-Neutro) o sistema opera com as tensões terminais entre os limites determinados e possui poucas perdas. Estes resultados foram obtidos utilizando-se o MICT.

Tabela 4.2 – Sistema IEEE4 - Resultados com transformador elevador

Trafo	Carga	Perdas(kW)	$V_{a4}$ (pu)	$V_{b4}$ (pu)	$V_{c4}$ (pu)
Y-Δ	Δ	95,0966	0,9469	0,9668	0,9642
Δ-Δ	Δ	95,0926	0,9469	0,9679	0,9635
Δ-Y	Δ	95,0622	0,9479	0,9682	0,9627
Δ-Y	Y	97,7772	0,9649	0,9594	0,9537
Y-Y	Y	99,7329	0,9680	0,9545	0,9549

Os resultados do sistema com o transformador abaixando a tensão para 2,4 kV (Fase-Neutro) podem ser conferidos na Tabela 4.3. Neste caso, as perdas sobem consideravelmente e o sistema apresenta afundamento de tensão na barra de carga (barra 4).

Tabela 4.3 – Sistema IEEE4 - Resultados com transformador abaixador

Trafo	Carga	Perdas(kW)	$V_{a4}$ (pu)	$V_{b4}$ (pu)	$V_{c4}$ (pu)
Y-Δ	Δ	523,3304	0,7889	0,8767	0,8485
Δ-Δ	Δ	523,3611	0,7890	0,8780	0,8476
Δ-Y	Δ	523,0158	0,7874	0,8801	0,8477
Δ-Y	Y	581,4677	0,9007	0,8143	0,7829
Y-Y	Y	585,57	0,9051	0,8101	0,7819

Nota-se que o tipo de ligação do transformador tem efeito relevante para o cálculo das perdas em sistemas equilibrados e desequilibrados.

Verificou-se que a quarta configuração descrita na Tabela 4.3 (transformador abaixador com ligação  $\Delta$ -Y) apresentou péssimos resultados e por isso foi a configuração escolhida para os estudos de otimização desta seção.

Escolheu-se, por propósitos didáticos, como função objetivo a minimização das perdas instantâneas do sistema, com a possibilidade de alocação de bancos de capacitores, porém para um correto estudo sabe-se que se deve otimizar a energia perdida durante o tempo de utilização do banco de capacitores.

Nestes estudos serão considerados:

- O custo das perdas será de 10 u.m./kW.
- O custo dos capacitores será de 50 u.m./kvar.

#### 4.2.1 Otimização das Perdas – Regulação da Subestação

Na Figura 4.2 são apresentados os resultados do estudo de redução de perdas através da regulação do nível de tensão da subestação (barra 1). As curvas A, B e C representam o perfil de tensão na condição inicial, não otimizada, apenas com a subestação regulando a tensão em 1,0 pu. As curvas com o sufixo “-sub” representam a solução otimizada, buscando mínimas perdas pela regulação de tensão da subestação. Na Tabela 4.4 são apresentadas as perdas do sistema nesta última configuração, onde se vê que as perdas diminuiram 15%. Em ambas as configurações não foram alocados bancos de capacitores.

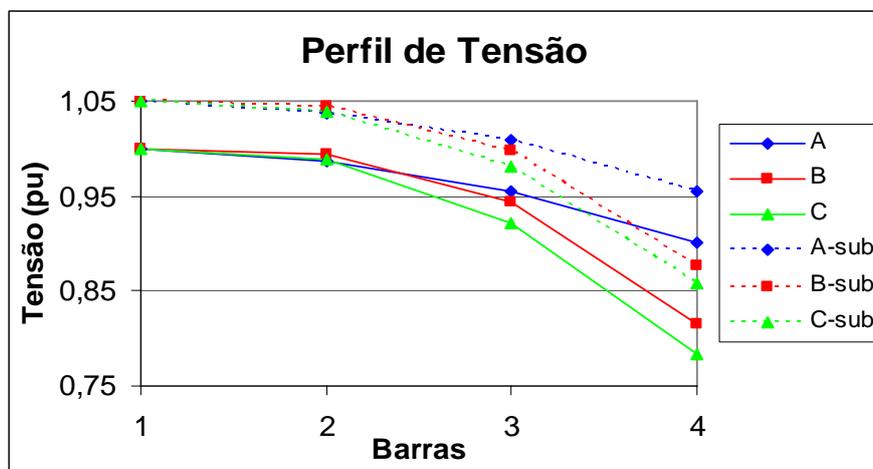


Figura 4.2 – Perfil de tensão do caso otimizado apenas com a regulação da subestação

Tabela 4.4 – Sistema IEEE4 - Resultados da otimização com regulação da subestação

Trafo	Carga	Perdas(kW)	$V_{a4}$ (pu)	$V_{b4}$ (pu)	$V_{c4}$ (pu)
$\Delta$ -Y	Y	493,4286	0,9546	0,8771	0,8590

Como não foram impostos os limites de tensão, e o custo do kvar dos capacitores é superior ao custo das perdas, a metodologia não alocou capacitores. Observando-se a Figura 4.2 e a Tabela 4.4 percebe-se que o nível da tensão ficou abaixo do desejável (0,94 pu).

#### 4.2.2 Otimização das Perdas – Imposição de Limites de Tensão

Neste caso foi imposto que todas as tensões estivessem entre os valores limites especificados, necessitando a alocação de bancos de capacitores na otimização. Na Figura 4.3 apresenta-se os resultados da otimização. O sufixo “-cap” representa as tensões reguladas pela subestação, com alocação de bancos de capacitores e com a tensão entre os limites especificados. Os valores das perdas totais e dos bancos de capacitores alocados são apresentados na Tabela 4.5.

Neste caso houve redução de perdas da ordem de 34% em relação ao caso base, em compensação seria necessário um investimento de 59000 u.m. para a compra e instalação dos bancos de capacitores.

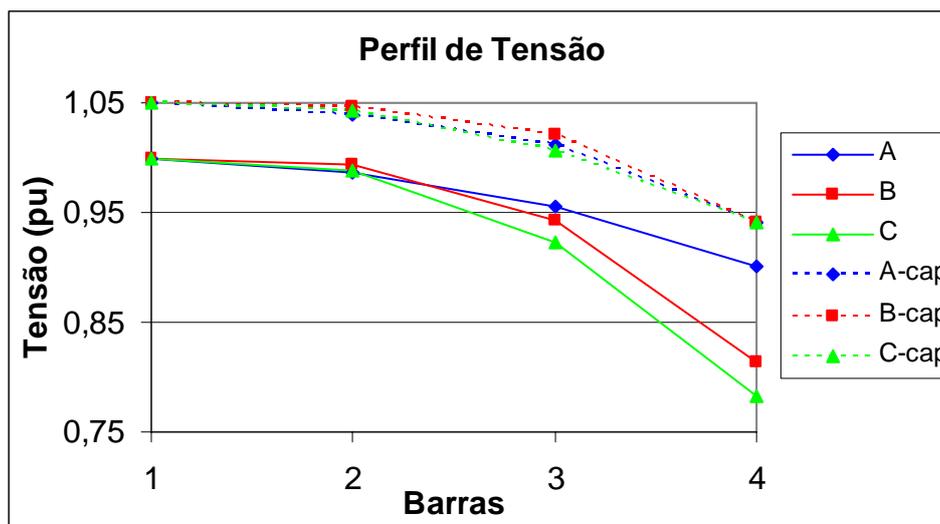


Figura 4.3 – Perfil de tensão do caso otimizado com regulação da subestação e alocação de bancos capacitores

Tabela 4.5 – Sistema IEEE4 – Imposição de limites de tensão e capacitores alocados

Trafo	Carga	Perdas(kW)	$Q_{a4}$ (kVar)	$Q_{b4}$ (kVar)	$Q_{c4}$ (kVar)
$\Delta$ -Y	Y	382,01	74	555	551

### 4.2.3 Otimização das Perdas – Desconsiderando-se Custo dos Capacitores

Na Figura 4.4 é apresentado o resultado do processo de otimização quando os custos dos bancos de capacitores são desconsiderados. Isto pode ser realizado em sistemas de distribuição quando o horizonte de estudo é longo, ou seja, quando o custo da energia perdida ao longo dos meses é muito maior que o custo do investimento em bancos de capacitores. O sufixo “-tot” representa o resultado da otimização com as tensões reguladas pela subestação e alocação de bancos de capacitores onde o custo dos mesmos é desprezado.

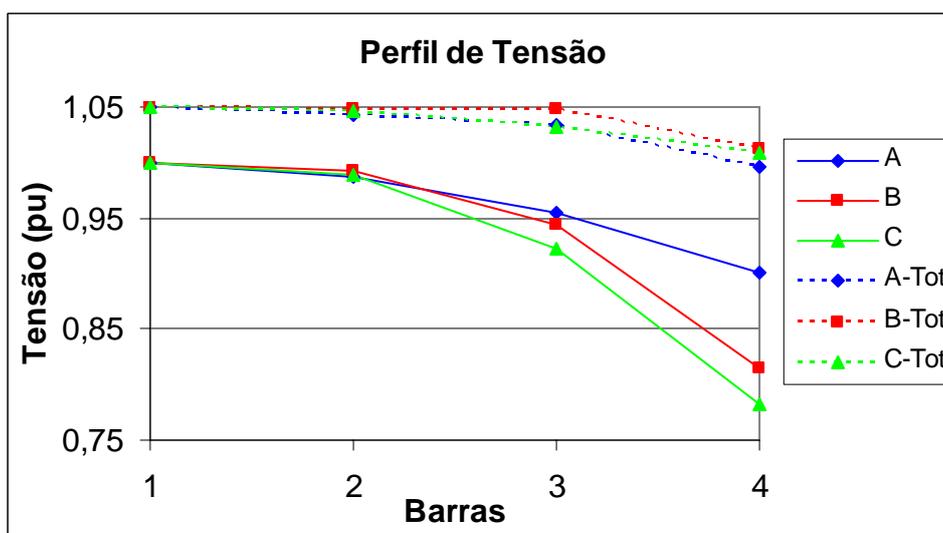


Figura 4.4 – Perfil de tensão do caso otimizado com regulação da subestação e alocação de bancos de capacitores sem considerar seus custos

Na Tabela 4.6 são mostrados os valores dos bancos de capacitores e das perdas. Esta é a configuração ótima do sistema, uma vez que qualquer modificação dos valores dos capacitores (aumento/diminuição) conduzirá a um aumento das perdas. As perdas foram reduzidas em 44% com relação ao caso base, porém a quantidade de bancos de capacitores alocados aumentou consideravelmente.

Tabela 4.6 – Sistema IEEE4 – Resultados com configuração ótima

Trafo	Carga	Perdas(kW)	$Q_{a4}$ (kVar)	$Q_{b4}$ (kVar)	$Q_{c4}$ (kVar)
$\Delta$ -Y	Y	326,490	725	1361	1252

#### 4.2.4 Otimização das Perdas – Desconsiderando-se Custo dos Capacitores e com Alocação Equilibrada

Em alguns estudos são utilizadas soluções equilibradas em sistemas com grande desequilibrados, como a alocação de bancos de capacitores de tal modo que  $Q_a = Q_b = Q_c$  (Como valores calculados para a tensão nominal).

Como pode ser conferida pela Figura 4.5, uma solução equilibrada no sistema IEEE4 apresentou um perfil de tensão pior do que uma solução desequilibrada. Também, a corrente de neutro (ou corrente de desequilíbrio) na carga da barra 4 foi de 443 amperes quando com a alocação equilibrada foi de 271 amperes.

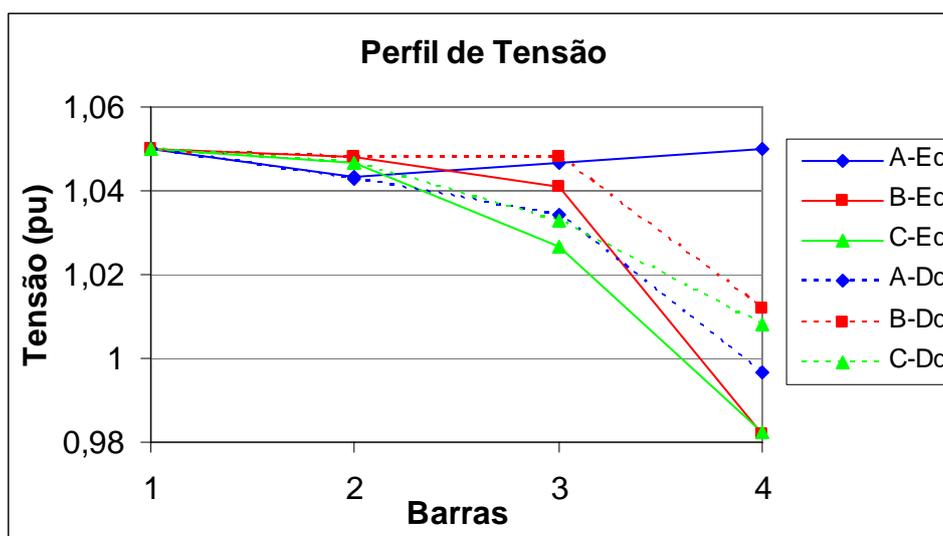


Figura 4.5 – Perfil de tensão do caso otimizado com regulação da subestação e alocação de bancos de capacitores sem considerar seus custos

Na Tabela 4.7 mostra que as perdas aumentaram em 3,5% quando utilizada a restrição de mesma alocação de potência reativa.

Tabela 4.7 – Sistema IEEE4 – Resultados com configuração equilibrada

Trafo	Carga	Perdas(kW)	$Q_{a4}$ (kVar)	$Q_{b4}$ (kVar)	$Q_{c4}$ (kVar)
$\Delta$ -Y	Y	336,96	1109	1109	1109

#### 4.2.5 Testes com Transformadores Trifásicos com Núcleo Único

Neste exemplo, o transformador entre as barras 2 e 3 é composto por um núcleo conjunto para as três fases (núcleo envolvido), com isto, o acoplamento entre as fases no interior do transformador deve ser considerado. A aproximação realizada foi que o valor do acoplamento entre fases distintas fosse a metade do valor da magnetização entre enrolamentos de mesma fase (ANDERSON, 1994).

Comparando-se a Tabela 4.5 com a Tabela 4.8 observa-se que os resultados foram equivalentes em termos totais (custo constante), mas houve uma mudança do valor da compensação reativa alocada em cada fase.

**Tabela 4.8 – Sistema IEEE4 – Transformador com núcleo único**

Trafo	Carga	Perdas(kW)	Q <sub>a4</sub> (kVar)	Q <sub>b4</sub> (kVar)	Q <sub>c4</sub> (kVar)
Δ-Y	Y	382	87	527	565

#### 4.2.6 Testes com Bancos Trifásicos Formados por Transformadores Distintos

O transformador entre as barras 2 e 3 é composto por três transformadores monofásicos com o mesmo valor de reatância de dispersão em pu, mas as potências bases são distintas, sendo entre as fases (a-b) 1500 kVA, fases (b-c) 2000 kVA e fases (c-a) 2500 kVA. Neste caso o transformador contribui para o desequilíbrio do sistema e os resultados da simulação desta configuração são apresentados na Tabela 4.9. O principal motivo deste teste é mostrar a robustez do método proposto para configurações não usuais de transformadores.

**Tabela 4.9 – Sistema IEEE4 – Transformadores distintos**

Trafo	Carga	Perdas(kW)	Q <sub>a4</sub> (kVar)	Q <sub>b4</sub> (kVar)	Q <sub>c4</sub> (kVar)
Δ-Y	Y	311	220	700	617

#### 4.2.7 Testes com Transformadores Não-Ideais

Os transformadores de sistemas de transmissão possuem um alto acoplamento entre os enrolamentos do primário e secundário. Isto não pode ser considerando sempre

verdade para os transformadores de distribuição. Este acoplamento não ideal nos transformadores de distribuição contribui para o aumento das perdas e redução do nível de tensão. Na Figura 4.6 é apresentada a variação dos valores de bancos de capacitores alocados em relação a variação do valor da magnetização, para manter as tensões entre os limites especificados. Encontra-se na Figura 4.7 a variação das perdas com a magnetização e na Figura 4.8 a variação dos custos da função objetivo com a magnetização.

Os gráficos possuem o eixo das abscissas em escala logarítmica.

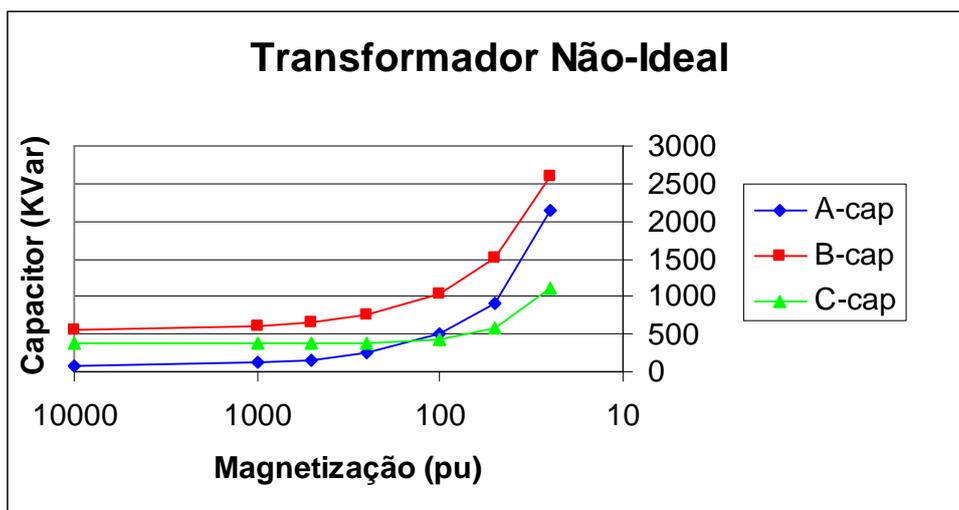


Figura 4.6 – Alocação de reativos x Magnetização

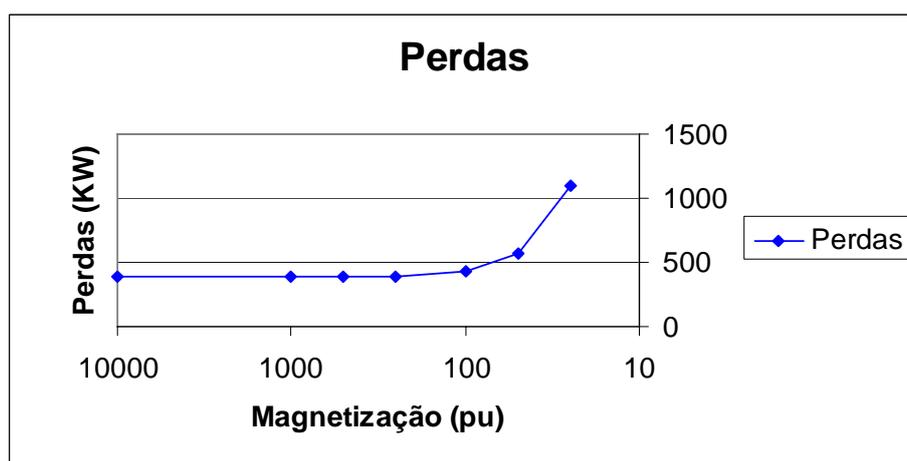


Figura 4.7 – Perdas x Magnetização

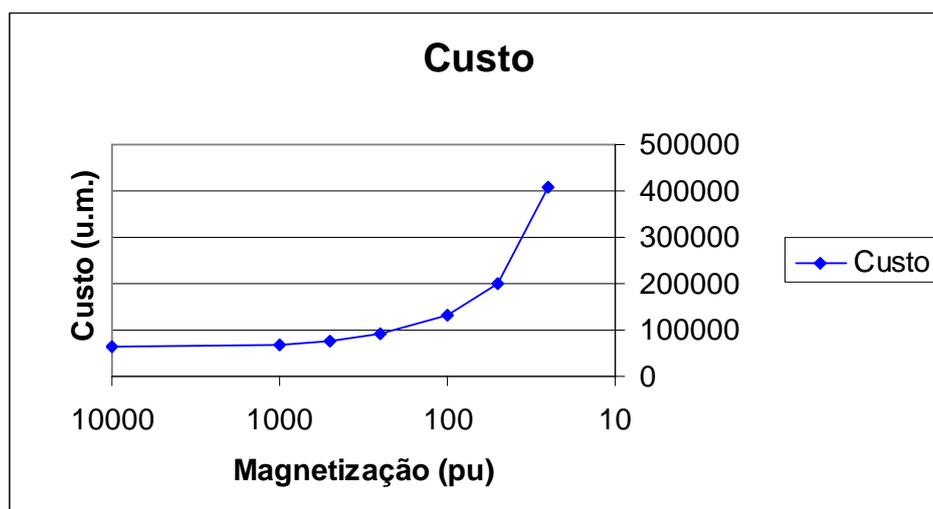


Figura 4.8 – Custo x Magnetização

#### 4.2.8 Importância da Correta Representação de Transformadores em Sistemas Desequilibrados

Em muitos estudos de redes trifásicas, as conexões dos transformadores trifásicos são substituídas por equivalentes monofásicos em p.u.. Em outros tipos de estudos, os transformadores são desconsiderados e a carga concentrada é conectada diretamente na barra primária. Estas simplificações só são corretas para sistemas equilibrados. Mesmo em modelagem trifásica as diversas configurações de conexão dos transformadores nem sempre são representadas. Se a representação correta da conexão dos transformadores não for feita em sistemas elétricos desequilibrados os erros poderão ser substanciais.

Na Tabela 4.10 é apresentada uma comparação entre configurações, utilizando-se o transformador do sistema IEEE4 (Figura 4.1) conectado em  $\Delta$ -Y sendo comparado com a configuração em Y-Y, ambos para uma carga conectada em estrela aterrada (Y). Neste exemplo, o valor da resistência de dispersão é nulo, e a reatância teve seu valor dividido por 10, estas modificações tiveram o objetivo de reduzir as perdas do transformador e, por conseguinte simplificar a comparação de resultados. Ambos os sistemas apresentam o mesmo carregamento.

Como pode observado na Tabela 4.10, os resultados utilizando cada configuração são bastante distintos quando se analisa as grandezas dos primários, que possuem conexões diferentes.

Tabela 4.10 – Comparação entre conexões distintas de transformadores

	Y-Y		$\Delta$ -Y	
	$S_{prim}$ (kVA)	$S_{sec}$ (kVA)	$S_{prim}$ (kVA)	$S_{sec}$ (kVA)
$P_a$	1333	1333	1782	1333
$P_b$	1990	1989	1737	1989
$P_c$	2508	2509	2312	2509
$Q_a$	868	868	1439	868
$Q_b$	1120	1119	808	1116
$Q_c$	1324	1321	1065	1323
	$I_{prim}$ (A)	$I_{sec}$ (A)	$I_{prim}$ (A)	$I_{sec}$ (A)
$ I_a $	222	665	322	668
$ I_b $	320	961	268	957
$ I_c $	398	1195	357	1196

### 4.3 Sistema Teste IEEE13

O diagrama unifilar do sistema IEEE13 encontra-se ilustrado na Figura 4.9. Este é um sistema pequeno e altamente carregado para o nível de tensão da subestação, possui cabos aéreos e subterrâneos, bancos de capacitores e diversos tipos de cargas, um regulador de tensão e ramais monofásicos e bifásicos. As cargas distribuídas serão alocadas com metade do valor em cada uma das barras terminais. O regulador possui faixa de regulação de +5%. A função objetivo utilizada foi a mínimas perdas.

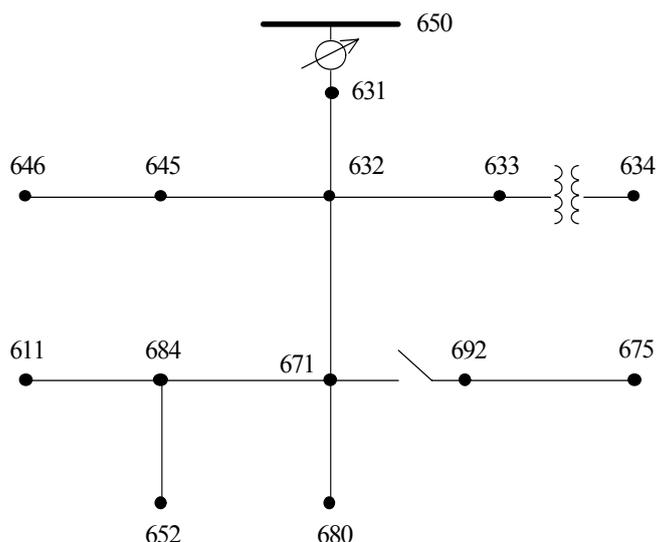


Figura 4.9 – Sistema IEEE13

Na Figura 4.10 é mostrada a comparação do perfil de tensão quando o regulador da barra 631 está configurado para operar de forma individual entre as fases “-ind” (a tensão pode assumir valores distintos em cada fase) e em modo conjunto “-cnj” (todas as fases devem apresentar mesmo nível de tensão). A Figura 4.12 mostra a potência gerada em cada configuração. Como pode ser observado, o modo de operação do regulador provocou mudanças nos níveis de tensão, mas praticamente não alterou as potências geradas na subestação.

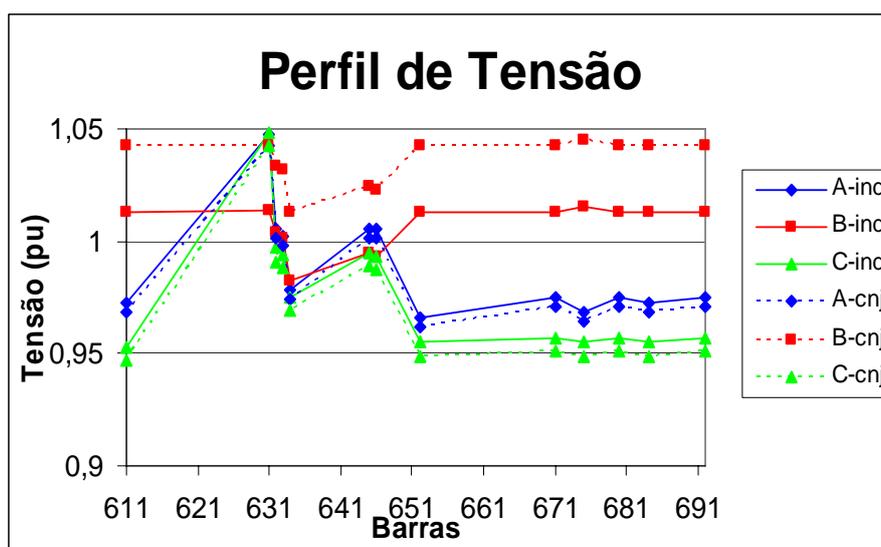


Figura 4.10 – Controle do regulador de tensão

Na Figura 4.11 é mostrado em detalhes o nível de tensão da barra 631 para ambos os modos de operação.

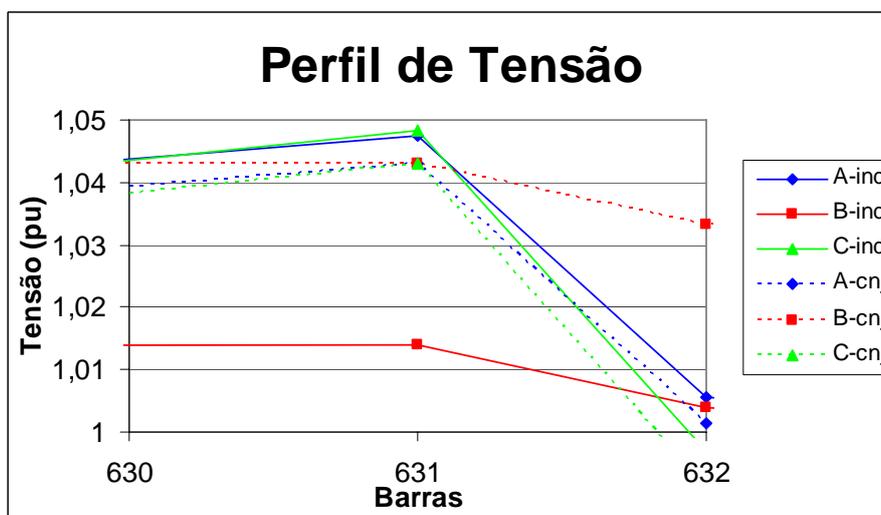


Figura 4.11 – Detalhes do ponto de regulação

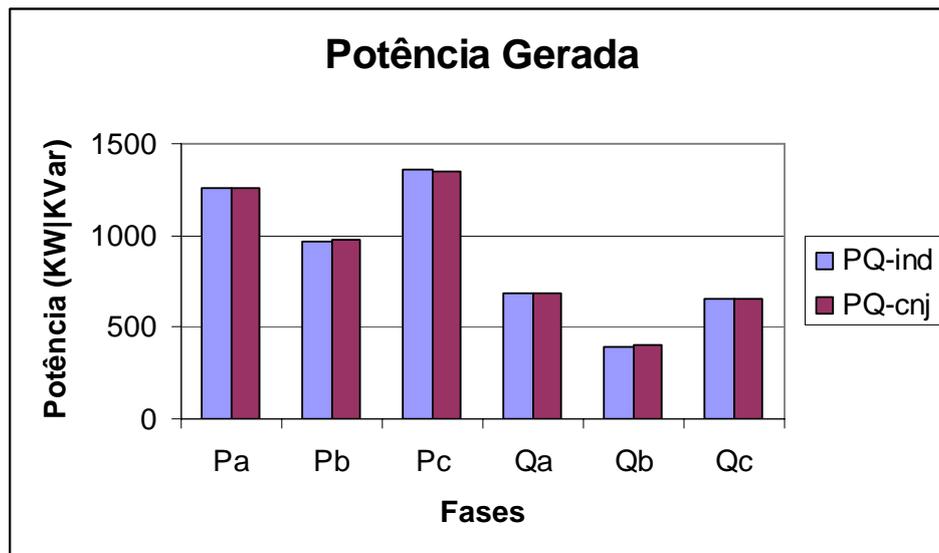


Figura 4.12 – Variação da potência gerada

#### 4.4 Sistema Teste IEEE14

O diagrama unifilar do sistema IEEE14 encontra-se ilustrado na Figura 4.13. Este é um sistema pequeno, altamente carregado, malhado, equilibrado e possui dois geradores e três síncronos. O transformador de três enrolamentos foi representado por três transformadores de dois enrolamentos. Nos gráficos de resultados apenas a fase *a* será apresentada, tendo em vista que o sistema está equilibrado.

Os custos de geração ativa/reactiva das máquinas do sistema são definidos abaixo:

Barra 1 : 1 u.m / 5 u.m.

Barra 2 : 3 u.m / 5 u.m.

Barra 3 : ND / 3 u.m.

Barra 6 : ND / 1 u.m.

Barra 8 : ND / 1 u.m.

Onde ND (não disponível) representa que a máquina não pode gerar potência ativa.

#### 4.4.1 Comparação da Formulação Trifásica Equilibrada com um Equivalente Monofásico

O sistema teste IEEE14 é de pequeno porte e bastante difundido na literatura, por isto tornou-se um ótimo candidato para comparar os resultados da metodologia proposta (trifásica) com o FLUPOT (2002) que utiliza formulação monofásica equivalente. Realizou-se a comparação dos dois métodos otimizando o sistema com a função objetivo mínimo custo de geração ativa, para esta comparação os limites de tensões foram fixados entre 0.95 e 1.05 p.u. para todas as barras e para a conversão das linhas de transmissão para valores de fase utilizou-se a aproximação  $Z_0 = 3Z_+$ . O FLUPOT convergiu com 10 iterações e o método proposto convergiu com 11 iterações. Esta diferença no número de iterações não é relevante e condiz com o modo de atualização da variável  $\mu$  pelos dois métodos.

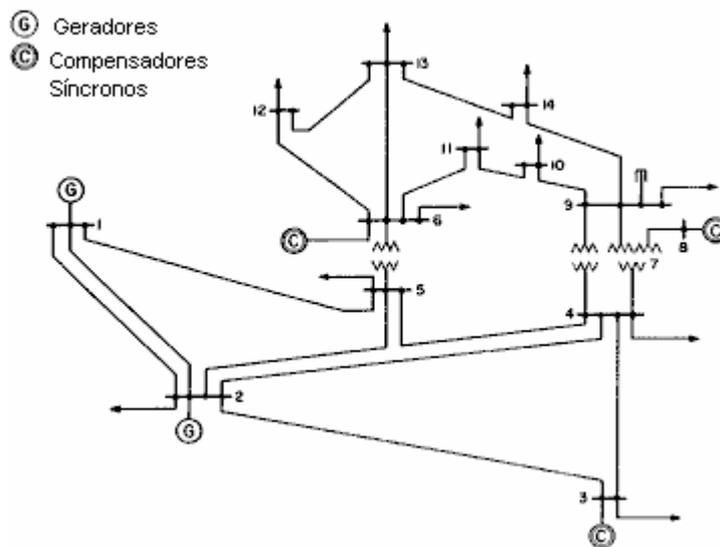


Figura 4.13 – Sistema IEEE14

As tensões nodais e o valor da função objetivo apresentaram praticamente os mesmos resultados. Os valores de geração ativa e as perdas ativas são apresentados na Tabela 4.11 e de geração reativa é apresentada na Tabela 4.12. Como pode ser observada, a soma das gerações nas fases *a*, *b* e *c* deve ser igual ao valor monofásico equivalente. O valor função objetivo foi de 275.4 u.m.

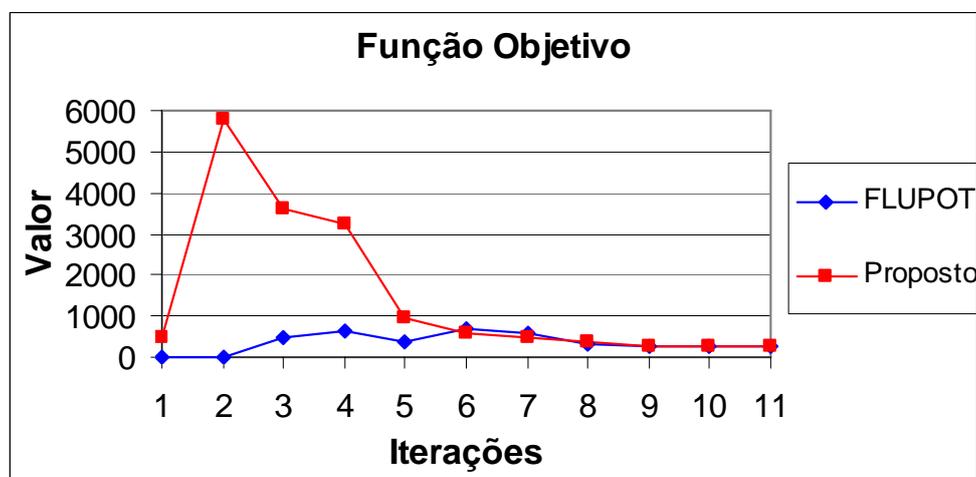
**Tabela 4.11 – Comparação de MW entre a modelagem proposta e o FLUPOT**

Barra	$P_{FLUPOT}$	$P_a$	$P_b$	$P_c$	$P_a+P_b+P_c$
1	275,46	91,82	91,82	91,82	275,46
2	0	0	0	0	0
Perdas	16,47	5,49	5,49	5,49	16,47

**Tabela 4.12 – Comparação de MVar entre a modelagem proposta e o FLUPOT**

Barra	$Q_{FLUPOT}$	$Q_a$	$Q_b$	$Q_c$	$Q_a+Q_b+Q_c$
1	5,28	1,76	1,76	1,76	5,28
2	48,63	16,21	16,21	16,21	48,63
3	38,88	12,96	12,96	12,96	38,88
6	23,64	7,88	7,88	7,88	23,64
8	23,58	7,86	7,86	7,86	23,58
Perdas	66,3	22,1	22,1	22,1	66,3

Na Figura 4.14 é apresentado o gráfico comparativo da evolução da função objetivo e na Figura 4.15 um gráfico comparativo da evolução do parâmetro barreira.



**Figura 4.14 – Comparação do valor da função objetivo**

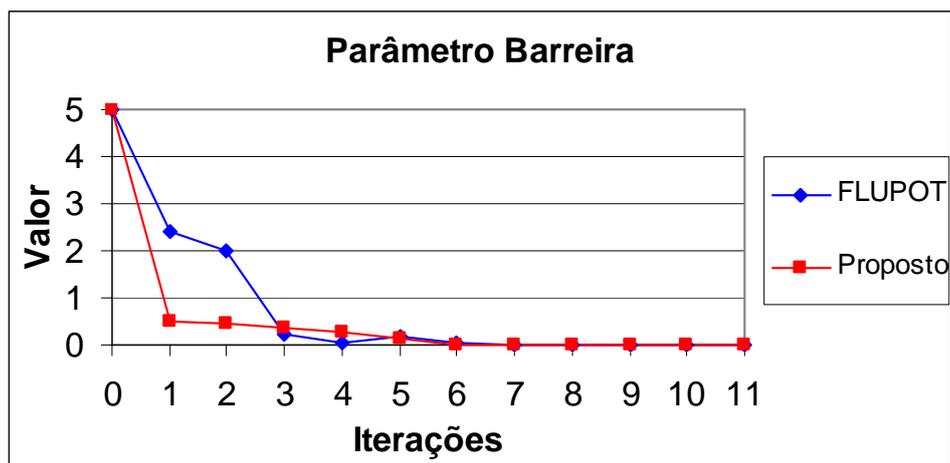


Figura 4.15 – Comparação do valor do parâmetro barreira

#### 4.4.2 Comparação da Formulação Trifásica Desequilibrada com um Equivalente Monofásico

Na seção 4.4.1 mostrou-se que a otimização trifásica e a otimização monofásica apresentam a mesma resposta para sistemas equilibrados. Neste exemplo, será realizada a mesma otimização da seção anterior, porém a carga será levemente desequilibrada; a carga da fase *c* sofre uma redução de 5% e as fases *a* e *b* sofrem um aumento de 2,5%, ou seja, a carga do sistema fica constante e o equivalente monofásico (utilizado no FLUPOT) é o mesmo da seção anterior. Serão efetuadas duas comparações, na primeira o limite inferior de tensão ficará aberto para evitar que os limites de geração ativa sejam ativados e na segunda os limites de tensão serão ativados.

Para a primeira comparação, os resultados da geração de potência ativa são mostrados na Tabela 4.13 e de potência reativa na Tabela 4.14.

Como pode ser observado, as perdas ativas e reativas sofrem uma variação de 1% entre os resultados dos dois métodos e o valor a função objetivo obtido foi o mesmo. Mas, quatro barras ficaram com o perfil de tensão abaixo do desejado (0,95pu), sendo que a barra 14 na fase *a* convergiu para um valor de 0,92pu.

**Tabela 4.13 – Comparação de MW entre a modelagem proposta e o FLUPOT**

Barra	$P_{FLUPOT}$	$P_a$	$P_b$	$P_c$	$P_a+P_b+P_c$
1	275,46	95,57	93,43	86,60	275,60
2	0	0	0	0	0
Perdas	16,47	7,09	4,94	4,58	16,61

**Tabela 4.14 – Comparação de MVar entre a modelagem proposta e o FLUPOT**

Barra	$Q_{FLUPOT}$	$Q_a$	$Q_b$	$Q_c$	$Q_a+Q_b+Q_c$
1	5,3	4,47	6,35	3,14	13,96
2	48,4	16,28	15,74	14,62	46,64
3	38,9	13,07	11,77	10,44	35,28
6	23,6	7,83	7,54	6,67	22,04
8	23,5	7,85	7,57	7,13	22,55
Perdas	66,3	24,38	23,87	18,72	66,97

Para a segunda comparação o sistema foi novamente otimizado, só que desta vez foi imposta a restrição de que todas as tensões deveriam estar entre os valores de 0,95 a 1,05 p.u. Os resultados da nova geração ativa são mostrados na Tabela 4.15 e da reativa na Tabela 4.16. O novo valor da função objetivo com as restrições de tensão ativa foi de 312 u.m.

**Tabela 4.15 – Comparação de MW entre a modelagem proposta e o FLUPOT**

Barra	$P_{FLUPOT}$	$P_a$	$P_b$	$P_c$	$P_a+P_b+P_c$
1	275,4	78,41	90,16	87,08	255,65
2	0	15,07	3,68	0	18,75
Perdas	16,5	5,00	5,35	5,07	15,42

**Tabela 4.16 – Comparação de MVar entre a modelagem proposta e o FLUPOT**

Barra	$Q_{FLUPOT}$	$Q_a$	$Q_b$	$Q_c$	$Q_a+Q_b+Q_c$
1	5,3	-0,71	1,54	15,70	16,53
2	48,4	16,67	16,66	-1,28	32,05
3	38,9	13,33	13,33	13,33	40,00
6	23,6	8,00	8,00	8,00	24,00
8	23,5	8,00	8,00	8,00	24,00
Perdas	66,3	20,17	22,42	20,42	63,01

Analisando-se os resultados acima observa-se que as perdas ativas sofrem uma variação de 7% e as perdas reativas sofrem uma variação de 5% entre os dois métodos. O valor a função objetivo aumentou 13%. Com os testes verifica-se que a utilização de equivalente monofásico para estudar sistemas desequilibrados, em qualquer grau, conduz a resultados incorretos.

#### 4.4.3 Análise de Contingências

Nesta seção será apresentado um estudo de contingências, onde o sistema IEEE14 estará operando de forma equilibrada. O objetivo deste teste é mostrar que o método proposto é robusto para situações de difícil convergência.

A Figura 4.16 mostra o perfil de tensão para a condição inicial. Após o sistema ser otimizado pelo mínimo custo de geração ativa e reativa, a Tabela 4.17 mostra os níveis de geração. O custo de geração ativa foi de 275.6 u.m. e de geração reativa foi de 49.22 u.m.

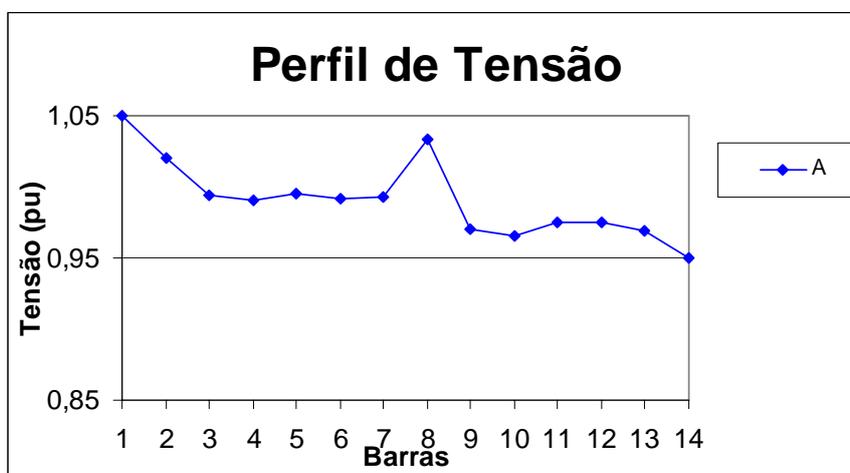


Figura 4.16 – Perfil de tensão da condição inicial IEEE14

Tabela 4.17 – Sistema IEEE - 14 – Gerações otimizadas

Barra	$P_a$ (MW)	$Q_a$ (MW)	$P_b$ (MW)	$Q_b$ (MW)	$P_c$ (MW)	$Q_c$ (MW)
1	91,79	3,92	91,79	3,92	91,79	3,92
2	0	13,47	0	13,47	0	13,47
3	0	13,29	0	13,29	0	13,29
6	0	7,99	0	7,99	0	7,99
8	0	7,99	0	7,99	0	7,99

Na Figura 4.17 é mostrado o nível de tensão para o sistema quando acontece a perda da linha 1-5 (A-1). Como se pode observar na

Tabela 4.18, todos os compensadores síncronos geram o máximo permitido e o gerador dois (mais caro) começa a ser despachado. O custo da geração ativa foi de 949,98 u.m. e o da geração reativa foi de 383,33 u.m.

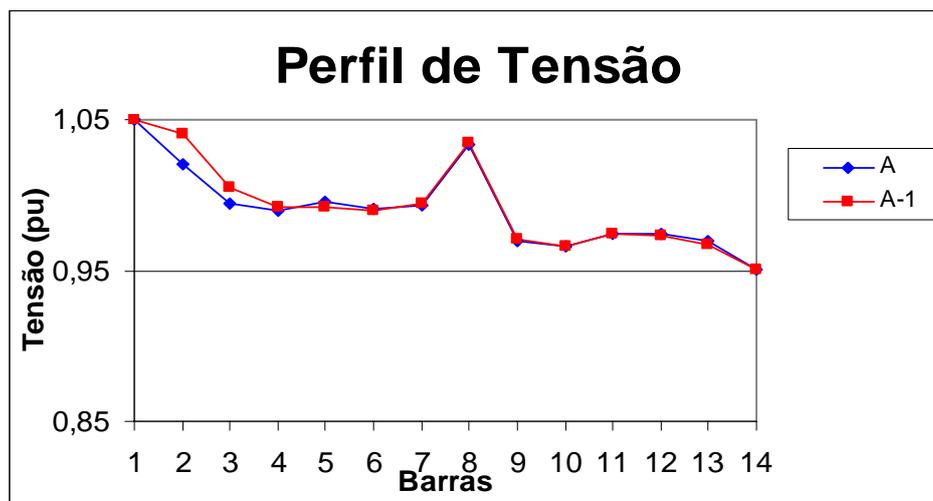


Figura 4.17 – Perfil de tensão com a contingência perda da linha 1-5

Tabela 4.18 – Sistema IEEE - 14 – Gerações com a contingência perda da linha 1-5

Barra	$P_a$ (MW)	$Q_a$ (MW)	$P_b$ (MW)	$Q_b$ (MW)	$P_c$ (MW)	$Q_c$ (MW)
1	31,17	-3,98	31,17	-3,98	31,17	-3,98
2	59,4	16,65	59,4	16,65	59,4	16,65
3	0	13,33	0	13,33	0	13,33
6	0	8	0	8	0	8
8	0	8	0	8	0	8

A Figura 4.18 apresenta um histograma relacionando o custo da operação ótima do sistema para a contingência descrita acima. Este exemplo foi ilustrativo, pois foi calculado um novo ponto ótimo para satisfazer as restrições de operação. O método convergiu sem problemas.

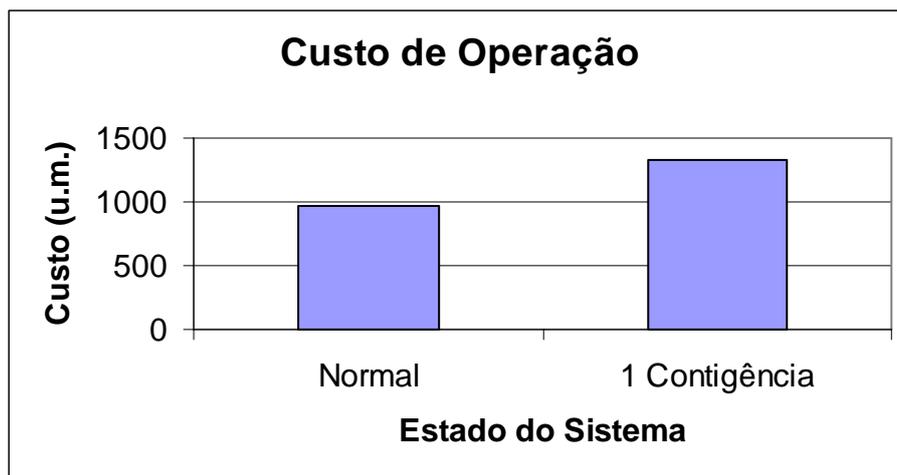


Figura 4.18 – Custo de Operação do Sistema IEEE14

#### 4.5 Sistema Teste IEEE14 - Modificado

Este sistema tem como base o sistema IEEE14 barras, porém neste sistema teste, as máquinas das barras 1 e 2 terão a reatância de regime permanente ( $x_d$ ) representada com o valor 0,02 pu, sendo que as barras 15 e 16 foram introduzidas para representar as barras internas da máquina, onde as tensões devem ter o mesmo módulo e estar defasadas de 120 graus. A faixa de tensão neste tipo de barra pode variar entre 0,95 a 1,07 p.u. Esta é uma representação muito simples de máquinas. Este teste tem como objetivo demonstrar de forma simples as novas restrições funcionais no processo de otimização.

Neste teste considerou-se a transferência de 10% da potência ativa da fase  $c$  para a fase  $a$ , e 20% da carga reativa foi retirada da fase  $a$  e distribuída igualmente entre as fases  $b$  e  $c$ .

Na Tabela 4.19 é apresentada uma comparação entre dois casos, no primeiro caso não existe nenhuma restrição operativa nas máquinas 1 e 2 e no segundo caso existem restrições operativas, no caso, as tensões internas devem possuir o mesmo módulo e ângulos defasados de 120 graus. O valor da função objetivo para o caso 1 foi de 276 u.m. e para o caso 2 foi de 318 u.m. A função objetivo utilizada foi o mínimo custo de geração de potência ativa.

**Tabela 4.19 – Perfil de tensão – Barras internas e externas**

Caso 1 - Sem Restrições						
	$v_a$	$\theta_a$	$v_b$	$\theta_b$	$v_c$	$\theta_c$
15 (int)	1,0511	0	1,0525	-120	1,0520	120
1 (ext)	1,0498	-2,954	1,0495	-123,0	1,04980	117,360
16 (int)	1,0197	-9,387	1,0291	-129,71	1,0293	112,09
2 (ext)	1,0166	-9,387	1,024	-129,71	1,0257	112,08

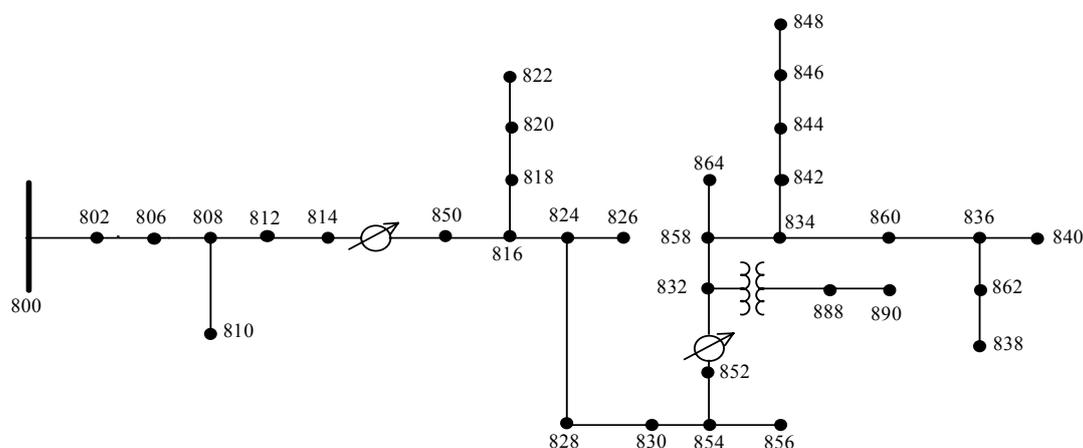
  

Caso 2 – Com Restrições						
15 (int)	1,0514	0	1,0514	-120	1,0514	120
1 (ext)	1,0499	-2,739	1,0489	-122,75	1,0493	117,34
16 (int)	1,0268	-8,326	1,0268	-128,32	1,0268	111,67
2 (ext)	1,0243	-8,524	1,0225	-128,56	1,0234	111,67

Pelos resultados apresentados na tabela percebe-se que no caso 2 as restrições foram respeitadas.

#### 4.6 Sistema Teste IEEE34

O diagrama unifilar do sistema IEEE34 é mostrado na Figura 4.19. Este é um sistema com poucas barras e pouco carregado, mas as distâncias entre as barras de cargas são bastante longas. Por isto foram necessários capacitores e dois reguladores de tensão para manter um bom perfil de tensão nas barras do sistema. Também existe um transformador abaixador de tensão para alimentar o trecho (888-890), sendo este um trecho longo e responsável por 25% do carregamento do sistema. A barra terminal 890 apresenta um péssimo perfil de tensão, como pode ser visto na Figura 4.20. Neste caso os reguladores não estão atuando e a tensão da subestação está ajustada em 1.05 pu.



**Figura 4.19 – Sistema IEEE34**

Neste caso, sem otimização, a geração total de potência ativa é de 1828kW e a geração de potência reativa é de 213kVar.

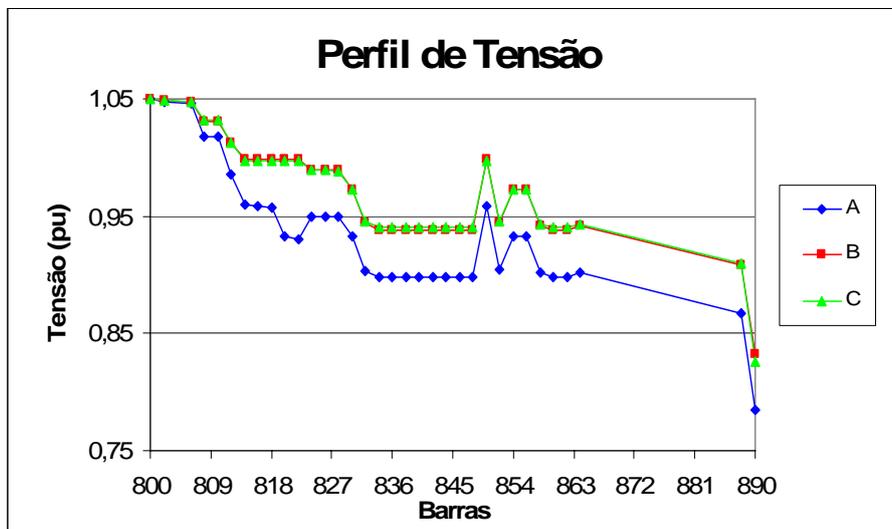


Figura 4.20 – Perfil de tensão do caso sem otimização

Na Figura 4.21 é apresentada a comparação do caso sem otimização com o caso otimizado, onde se deseja reduzir o custo de geração ativa. As tensões nodais estão limitadas entre 0,94 e 1,05 p.u., os tapes dos reguladores têm faixa de regulação de  $\pm 10\%$  e as tensões terminais da subestação devem possuir os mesmos módulos nas fases *a*, *b* e *c*.

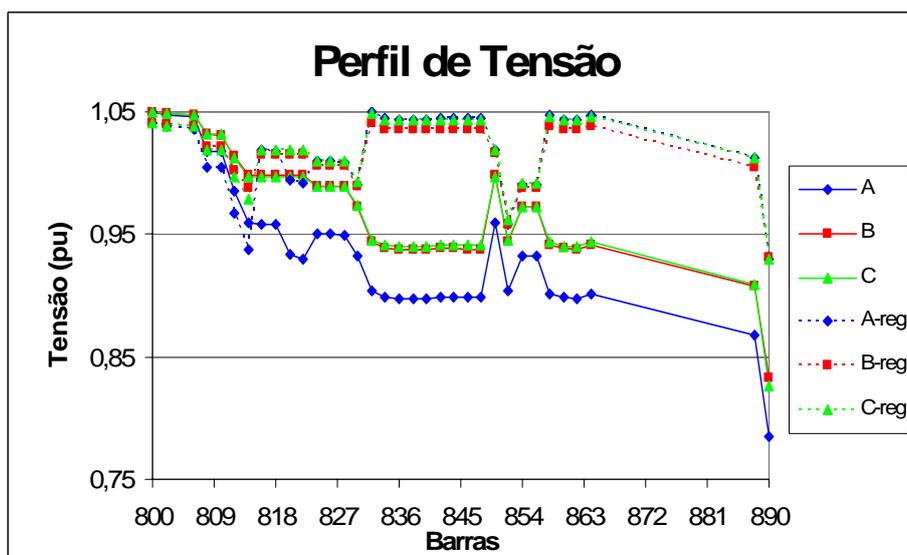


Figura 4.21 – Perfil de tensão com a atuação dos reguladores – Caso otimizado e sem otimização

Neste caso otimizado a geração total de potência ativa foi de 2075kW e a geração de potência reativa foi de 90kVar. A Tabela 4.20 apresenta os valores ótimos dos tapes dos reguladores.

Como pode ser observado, a geração de potência ativa aumentou após a otimização, isto acontece devido ao aumento das tensões nodais para que estas não violem os limites especificados. Como 70% do carregamento deste sistema das cargas deste sistema são representados por corrente e impedância constante, o aumento da tensão resultou em um aumentado da potência requerida por estas cargas.

**Tabela 4.20 – Tapes dos reguladores**

Regulador	Tape <i>a</i>	Tape <i>b</i>	Tape <i>c</i>
814	1,0881	1,0289	1,0414
852	1,0947	1,0865	1,0901

Em KERSTING (2000) alerta-se sobre possíveis problemas de convergência deste caso, mas a metodologia proposta mostrou-se robusta o suficiente para convergir/otimizar o caso mesmo que os reguladores fossem desconsiderados.

#### **4.7 Sistema Teste IEEE37**

O sistema IEEE37, apresentado na Figura 4.22, é um sistema atípico, pois é totalmente conectado em delta, sendo todos os cabos subterrâneos. O sistema é bastante desequilibrado e não apresenta problemas de tensão. Segundo KERSTING (2000) algumas metodologias podem encontrar problemas para tratar sistemas deste tipo. A metodologia proposta mostrou-se robusta e eficiente, não apresentando nenhum problema de convergência. Na Figura 4.23 apresenta-se o perfil de tensão para uma otimização de mínimas perdas, onde a tensão da subestação pode assumir valores desequilibrados.

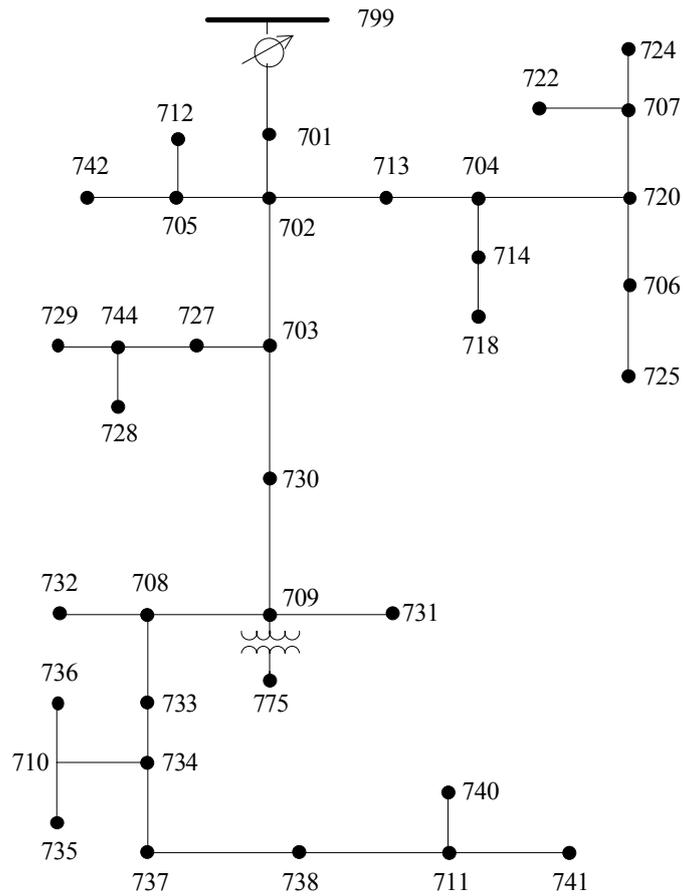


Figura 4.22 – Sistema IEEE37

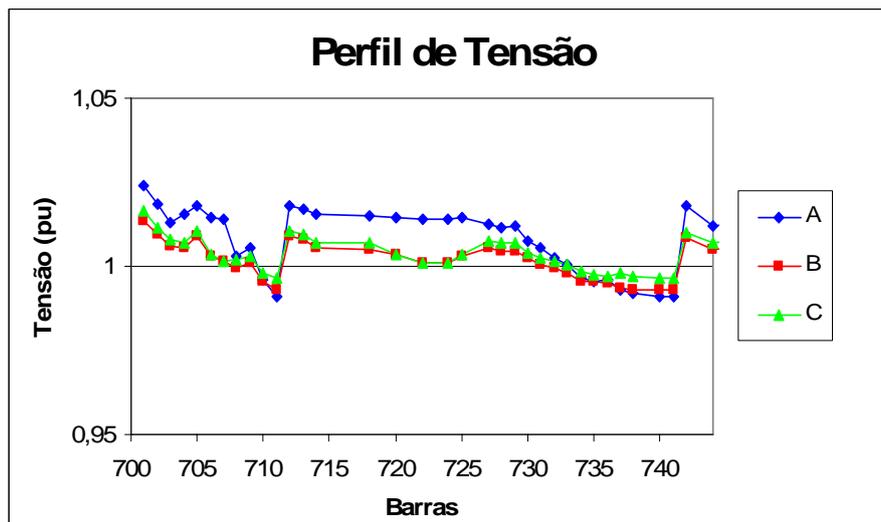


Figura 4.23 – Perfil de tensão no sistema IEEE37

#### **4.8 Sistema Teste CMG – 15000 Barras**

Montou-se este sistema interligando vários sistemas de distribuição a um sistema de subtransmissão. O objetivo foi testar a metodologia proposta e a implementação computacional desenvolvida em sistemas de grande porte. Foram executados testes com o sistema nas configurações radial e em anel. Para solucionar este sistema, a dimensão do sistema linear montado e resolvido em cada iteração é da ordem de 250000. A convergência até a solução final levou aproximadamente 4 minutos e 31 iterações, ou seja, 6 segundos por iteração, na metodologia proposta (MICTO).

Também foi utilizado o método de otimização baseado nas equações trifásicas de potência em coordenadas polares. O tempo de solução encontrado foi aproximadamente 20% maior (4,84 minutos) do que o alcançado utilizando-se o MICTO. Este aumento no tempo está associado à complexidade para cálculos das contribuições dos elementos conectados em série (por exemplo linhas de transmissão) para a matriz Hessiana.

A metodologia proposta apresentou-se bastante robusta para sistemas de grandes dimensões como, por exemplo, este aqui apresentado.

Na Figura 4.24 é apresentado o tempo computacional realtivo a cada um dos módulos do processo de otimização do sistema CMG15000, o tempo de fatoração da matriz Hessiana é equivalente em ambas as metodologias,  $4 * 0,69 = 2,79$  minutos para o MICTO e  $4,84 * 0,55 = 2,66$  minutos para o método utilizando potência em coordenadas polares.

A montagem da matriz Hessiana e do vetor de otimilidade é muito mais eficiente quando se utiliza o proposto, pois neste o tempo de montagem é de  $4 * (0,02 + 0,29) = 1,24$  minutos. No método de potência em coordenadas polares o tempo necessário para a montagem das mesmas estruturas é de 2,13 minutos.

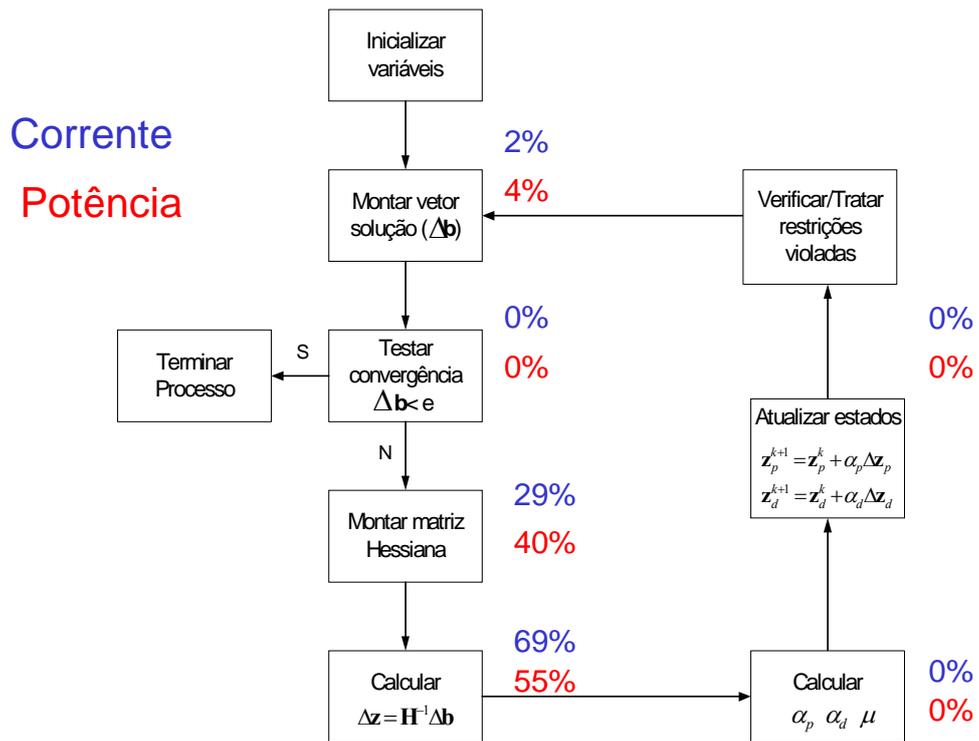


Figura 4.24 – Diagrama de tempos de solução

## Capítulo 5 Modelagem Computacional

### 5.1 Introdução

A utilização de programas computacionais em estudos de planejamento e operação dos sistemas elétricos de potência é atualmente indispensável. Um perfeito aproveitamento das informações obtidas assim como uma correta exploração das ferramentas está diretamente ligado à implementação computacional.

As diversas ferramentas computacionais usadas para análise e operação dos sistemas elétricos foram, historicamente, desenvolvidas por diferentes grupos de tal forma que a integração entre estes programas é complexa. Assim, uma análise completa de um sistema elétrico é muito custosa, demandando a utilização de diferentes programas, geralmente com bases de dados incompatíveis.

Os conceitos de Modelagem Orientada a Objetos (MOO) vêm cada vez mais sendo aplicados no desenvolvimento de ferramentas computacionais para sistemas de potência (NEYER E WU, 1990; ZHOU, 1996; ESQUIVEL et. Al., 1998; MANZONI et. Al.,1998; AGOSTINI et. Al., 2002; ARAUJO et. Al., 2002). A MOO permite combinar a estrutura de dados com os diversos modelos dos componentes de uma rede elétrica. Assim, o programa é organizado em vários objetos separados que incorporam tanto a estrutura de dados quanto o comportamento destes.

Neste trabalho é descrito um modelo orientado a objetos no qual é possível modelar o sistema de modo genérico. Foram implementadas modelagens monofásicas, trifásicas e trifásicas com o neutro. Outros tipos de modelos, sistemas hexafásicos como exemplo, podem ser facilmente implementados. Esta plataforma também permite a representação dos diversos componentes (barras, seccionadores, geradores, linhas, transformadores, equipamentos de controle, etc.) de tal forma que diversas ferramentas implementadas possam interagir entre si e o banco de dados.

Esta plataforma está sendo desenvolvida há três anos e possui:

#### **Seis metodologias monofásicas incorporadas:**

- i. Fluxo de potência utilizando o método de injeção de correntes (COSTA, 1999);

- ii. Fluxo de potência ótimo utilizando o método de injeção de correntes (Capítulo 2);
- iii. Fluxo de potência utilizando equações de potência na forma polar (MONTICELLI, 1983);
- iv. Fluxo de potência ótimo utilizando equações de potência na forma polar e o método de pontos interiores primal-dual (GRANVILLE, 1994);
- v. Fluxo de potência horário com base em curvas de cargas;
- vi. Análise harmônica utilizando o modelo de  $Y(s)$  (GOMES et. al., 2000) e o modelo de sistemas descritores (VARRICCHIO et. al., 2002);

O item vi foi implementado em conjunto com o CEPEL.

**Quatro metodologias trifásicas incorporadas:**

- i. Fluxo de potência utilizando o método de injeções de correntes trifásicas. (GARCIA et. al., 2000);
- ii. Fluxo de potência utilizando as equações de potência na forma polar;
- iii. Fluxo de potência trifásico horário com base em curvas de cargas (GARCIA et. al., 2000b);
- iv. Cálculo de defeitos em sistemas trifásicos. (MENEZES, 2003)

**Uma metodologia trifásica com neutro incorporada:**

- i. Fluxo de potência a quatro fios (fase + neutro) utilizando o método de injeções de correntes (PENIDO, 2004);

**Dois metodologias trifásicas foram implementas neste trabalho:**

- i. Fluxo de potência ótimo utilizando o método de injeções de correntes trifásicas;
- ii. Fluxo de potência ótimo utilizando as equações de potência na forma polar.

A plataforma proposta apresentou como grande vantagem a criação de um ambiente integrado para análise de sistemas elétricos onde novos métodos e modelos de componentes podem ser facilmente incorporados ou modificados. Adicionalmente, a possibilidade de interação entre diversos aplicativos e a base de dados também pode ser citado como uma grande vantagem do modelo proposto.

A base computacional e de objetos é a mesma para qualquer metodologia. Para utilizar uma ou outra basta atribuir valor a uma variável que é utilizada para dimensionar os vetores, escolher as funções de ler/escrever dados, etc. Logicamente o programador deverá escrever os modelos necessários, mas a escolha destes também será automática.

Neste trabalho é proposto uma base computacional de simples entendimento, fácil de programar e alto desempenho computacional, para que diversas ferramentas possam ser implementadas por equipes distintas com a mínima dependência entre elas.

## **5.2 Classes Auxiliares**

São as classes que não pertencem à rede elétrica em si. Tem como objetivo a transferência ou armazenamento de dados de forma genérica, a realização de operações matemáticas, solução de sistemas lineares e a compatibilidade de transferência de informações entre os diversos aplicativos.

### **5.2.1 Classe Complexo**

O tratamento de números complexos utilizando a STL (*Standart Template Library*) do C++ possui um baixo desempenho computacional, por isto, foi programada uma nova classe denominada Complexo que apresentou um desempenho computacional muito superior. Este ganho computacional provém que a classe proposta não utiliza *templates*. A Figura 5.1 mostra o diagrama da classe Complexo.

Na Tabela 5.1 são apresentados os dados membros da classe Complexo e na Tabela 5.2 as funções membros.

<b>Complexo</b>
m_dReal : double m_dImag: double
Real() : double Imag() : double Abs() : double Arg(): double Polar( double, double ): void Sobrecarga dos operadores { +, -, *, /, =, +=, -=, *=, /=, ==, !=, ( ), >, < } Funções Hiperbolicas e trancedentais

**Figura 5.1 – Classe Complexo**

**Tabela 5.1 – Dados membros de Complexo**

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
double m_dReal	Parte real do número complexo.
double m_dImag	Parte imaginária do número complexo.

**Tabela 5.2 – Funções membros de Complexo**

<b>Funções Membros</b>	<b>Descrição</b>
Complexo( )	O construtor da classe que utiliza as variáveis com zero
Complexo ( int real, int imag )	Construtor da classe que possibilita a inicialização com um valor complexo.
~Complexo ( )	O destrutor da classe
void Polar ( int real, int imag )	Inicializa a classe com um valor complexo na forma polar.
double Real( )	Retorna a componente real do número complexo.
double Imag( )	Retorna a componente imaginária do número complexo.
double Abs( )	Retorna o módulo do número complexo.
double Arg( )	Retorna o ângulo do número complexo.
Sobrecarga dos operadores {+, -, /, *, =, +=, -=, *=, /=, ==, !=}	Executa as operações matriciais básicas, definidas matematicamente pelos os operadores.
Funções hiperbólicas	Funções do tipo sinh(), cosh(), etc.
Funções transcendentais	Funções do tipo exp(), cós(), tg(), etc.

### 5.2.2 Classe Matriz

As formulações implementadas no programa computacional desenvolvido utilizam sub-matrizes e estes blocos são matrizes  $m \times n$ , por isto tornou-se necessário o desenvolvimento de uma classe que possibilita o tratamento dessas matrizes. Por conseguinte foi criada uma classe chamada Matriz, que permite a criação e manipulação de matrizes  $m \times n$ .

Esta classe não será apresentada em detalhes, pois as operações matriciais são básicas. O único detalhe relevante é que os elementos da matriz são armazenados dinamicamente usando `m_ptrMatriz`, que é um ponteiro de ponteiros do tipo *template*. A Figura 5.2 mostra o diagrama da classe Matriz.

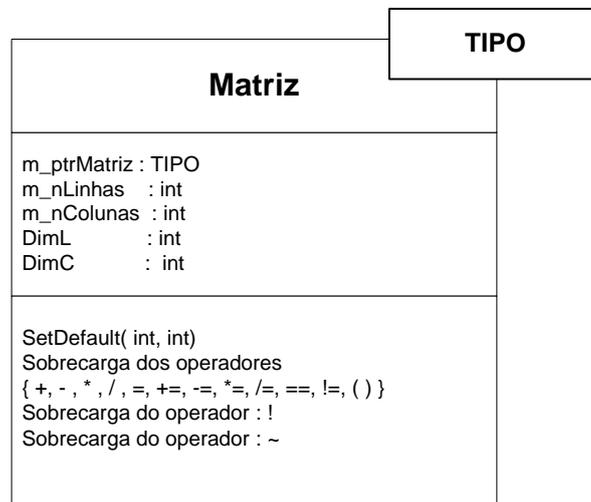


Figura 5.2 – Classe Matriz

Tabela 5.3 – Dados membros de Matriz

Dados Membros	Descrição
TIPO** m_ptrMatriz	Armazena os valores numéricos da matriz da matriz.
int m_nLinhas	Indica o numero de linhas da matriz.
int m_nColunas	Indica o numero de colunas da matriz.
static int DimL, DimC	Variáveis utilizadas para definir as dimensões da matriz quando não forem explicitadas no construtor.

Tabela 5.4 – Funções membros de Matriz

Funções Membros	Descrição
Matriz( )	O construtor da classe que utiliza as variáveis DimL e DimC para dimensionar a matriz.
Matriz( int linha, int coluna )	Construtor da classe que possibilita o usuário dimensionar a matriz.
~ Matriz( )	O destrutor da classe
static void SetDefault( int linha, int coluna )	Utilizada para modificar os valores de DimL e DimC.
Sobrecarga dos operadores {+, -, /, *, =, +=, -=, *=, /=, ==, !=}	Executa as operações matriciais básicas, definidas matematicamente pelos os operadores.
Sobrecarga do operador !	Inverte a matriz.
Sobrecarga do operador ~	Transpõe a matriz.

Duas ressalvas devem ser feitas:

1 – A utilização de alocações dinâmicas não é aconselhável para a solução de sistemas lineares (várias alocações e desalocações), e como os blocos de dados possuem dimensões fixas dependendo da metodologia utilizada, esta classe permite que `m_ptrMatriz` seja uma matriz fixa  $[m][n]$ , aumentando a eficiência computacional.

2 – Esta classe possui um tratamento para operações com matrizes com grande número de zeros.

### 5.2.3 Classe Transferencia

Esta classe é responsável pela transferência de dados entre aplicações de forma genérica. Por exemplo, durante o processo de solução do FPO, é necessária a transferência de elementos entre classes. Estes elementos na verdade são blocos do tipo Matriz (estruturas blocadas) com dimensão variável. Na montagem da matriz Hessiana os blocos são de dimensões 4x4, já no vetor independente estes blocos possuem dimensão 4x1, em um fluxo de potência a matriz Jacobiana é constituída de blocos de dimensão 2x2.

Um outro problema ocorre quando é necessário montar alguma estrutura (Jacobiana, Hessiana, etc.) onde um componente deve fornecer mais de um bloco, como as contribuições das linhas para a montagem da matriz um  $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ .

Apenas um bloco ou um conjunto de blocos não significa nada, por isto cada bloco deve possuir uma identificação de como o dado deve ser tratado. Na Figura 5.3 é apresentada o diagrama em UML.

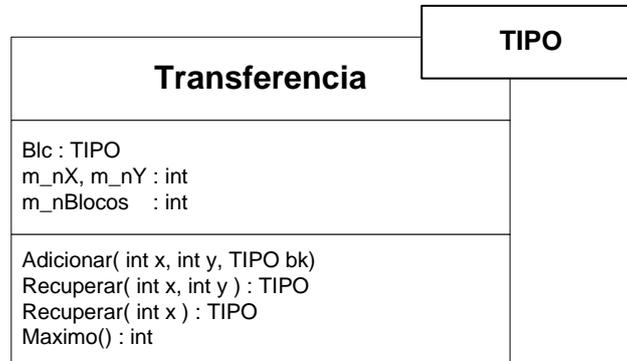


Figura 5.3 – Classe Transferencia

Tabela 5.5 – Dados membros de Transferencia

Dados Membros	Descrição
TIPO* Blc	Vetor para armazenamento de dados <i>templates</i> .
int* m_nX, m_nY	Identifica o conteúdo dos dados armazenados em *Blc.
int m_nMaximo	Quantidade de dados armazenados em CTransferencia.

Tabela 5.6 – Funções membros de Transferencia

Funções Membros	Descrição
Transferencia()	O construtor da classe.
~Transferencia ()	O destrutor da classe
void Adicionar( int x, int y, TIPO bk )	Adicionar um dado no objeto da classe Transferencia.
TIPO Recuperar( int x, int y )	Recuperar os dados com os identificadores x e y, pou seja, retorna o valor <i>template</i> armazenado na posição (x, y)
TIPO Recuperar( int n )	Recuperar um dado na enésima posição de Blc.
int Maximo()	Retorna o valor da variável m_nMaximo.

### 5.2.4 Classe SistemaLinear

Considerando que os sistemas lineares representativos de sistemas elétricos de grande porte possuem a maioria dos elementos nulos, formas alternativas de armazenamento vêm sendo apresentadas na literatura (TINNEY, 1972), buscando a otimização do uso da memória, a redução do tempo computacional e a melhoria da robustez do processo numérico.

Em ARAUJO (2000) foi desenvolvida uma ferramenta matemática orientada a objetos para solução de sistemas lineares esparsos de grande porte, onde os elementos podem ser reais, complexos, matrizes blocadas ou qualquer outro tipo. Esta ferramenta manipula sistemas simétricos e assimétricos de formas distintas visando um melhor desempenho computacional, ela também possui rotinas internas na qual o usuário não precisa se preocupar com a ordenação e nem com problemas de pivoteamento.

Na Figura 5.4 está apresentado esta ferramenta matemática encapsulada como uma classe denominada SistemaLinear. A classe Esparsa gerencia os processos de esparsidade, detalhes podem ser encontrados em ARAUJO (2000).

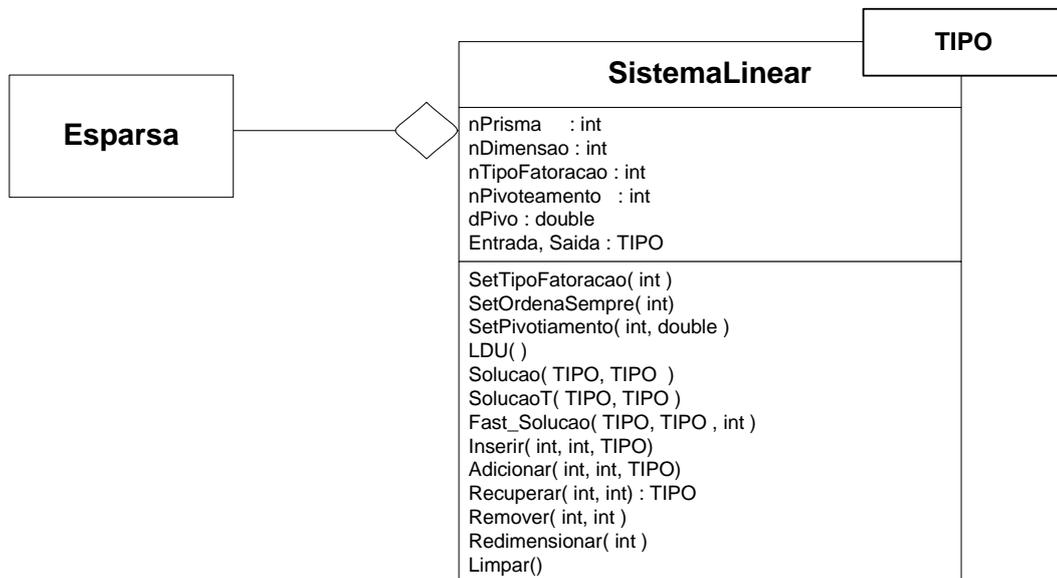


Figura 5.4 – Classe CSistema Linear

A Tabela 5.7 mostra os dados membros da classe SistemaLinear e na Tabela 5.8 uma descrição detalhada do que realiza cada função. A classe agregada Esparsa permite o tratamento de matrizes esparsas, esta classe encontra-se detalhada em ARAUJO (2000).

Tabela 5.7 – Dados membros de SistemaLinear

Dados Membros	Descrição
int* nPrisma	Armazena a ordem de eliminação tornando o processo de ordenação invisível para o usuário.
int nDimensao	Armazena a dimensão do sistema linear.
int nTipoFatoracao	Indica o tipo de ordenação.
int nPivoteamento	Indica se será necessário o pivoteamento para evitar problemas numéricos.
double dPivo	Se for necessário o pivoteamento, dPivo será o menor valor admitido para pivotar.
TIPO* Entrada	Armazena o vetor independente.
TIPO* Saída	Armazena o vetor solução.

Tabela 5.8 – Funções membros de SistemaLinear

Funções Membros	Descrição
SistemaLinear( )	O construtor da classe, responsável pela inicialização de todas as variáveis.
~SistemaLinear( )	O destrutor da classe
void SetTipoFatoracao( int tipo )	Ativa o tipo de fatoração a ser utilizada. Tipo = 0 => Apenas fatoração. Tipo = 1 => Ordenação e fatoração. Tipo = 2 => Ordenação e fatoração simultânea. Tipo = 3 => Ordenação e fatoração simultâneas com escolha do melhor pivô.
void SetOrdenaSempre( int ordena )	Força a reordenação a cada fatoração.
void SetPivoteamento(int tipo, double pivô)	Ordena e fatora o sistema linear simultaneamente para evitar problemas numéricos realizando testes nos pivôs para garantir estabilidade numérica.
void LDU( )	Fatora a sistema linear utilizando a fatoração LDU
void Solucao( TIPO* X, TIPO* B )	Faz a solução do sistema usando as rotinas de substituição direta e inversa. O vetor independente e solução são passados pelo argumento da função.
void SolucaoT( TIPO* X, TIPO* B )	Faz a solução do sistema linear transposto.
void Fast_Solucao(TIPO* X, TIPO* B, int pos)	Similar a função acima, sendo empregada a técnica do vetor esparsa (TINNEY, 1985).
void Inserir( int x, int y, TIPO valor)	Insere um valor na posição (x,y) na matriz de coeficientes, desconsiderando o anterior.
void Adicionar( int x, int y, TIPO valor)	Adiciona um valor na posição (x,y) na matriz de coeficientes, somando com o anterior.
TIPO Recuperar( int x, int y )	Retorna o valor (x,y) da matriz de coeficientes.
void Remover( int x, int y )	Remove a posição (x,y) da matriz de coeficientes.
void Redimensionar( int n )	Redimensiona o sistema de equações lineares.
void Limpar()	Desaloca toda a memória alocada pela classe.

### 5.3 Modelagem dos Componentes do Sistema Elétrico

Para uma correta modelagem dos componentes dos sistemas elétricos, deve-se observar o comportamento físico e a conectividade. A Figura 5.5 mostra o modelo de objetos (estrutura de classes) proposta neste trabalho. Esta estrutura apresenta três níveis hierárquicos com funções e objetivos bem definidos.

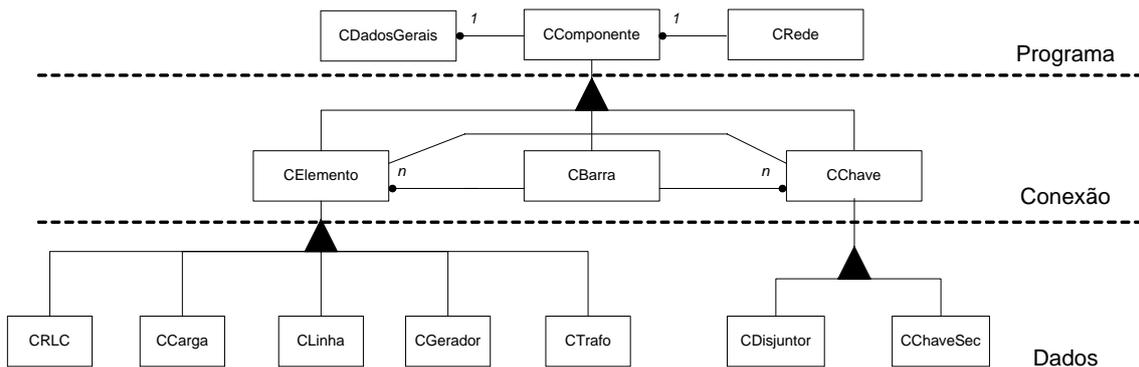


Figura 5.5 – Estrutura de classes

#### 5.3.1 Nível Programa

No primeiro nível da Figura 5.5 encontra-se somente a classe CComponente. Ela é uma classe abstrata definida ao nível de programa e tem como único objetivo facilitar a implementação computacional através dos mecanismos de herança e funções virtuais. Esta classe possui uma ligação com a classe CDadosGerais que é responsável pelo armazenamento de dados vitais necessários para uma correta modelagem matemática de ferramentas de análise de SEP.

##### 5.3.1.1 Classe CDadosGerais

A classe CDadosGerais serve para armazenar dados e funções que devem estar disponíveis a todos equipamentos da rede, mas não pertencem ao equipamento ou a rede, na Figura 5.6 é apresentado o diagrama de classe, e nas Tabela 5.9 e Tabela 5.10 a descrição dos dados membros e métodos respectivamente.

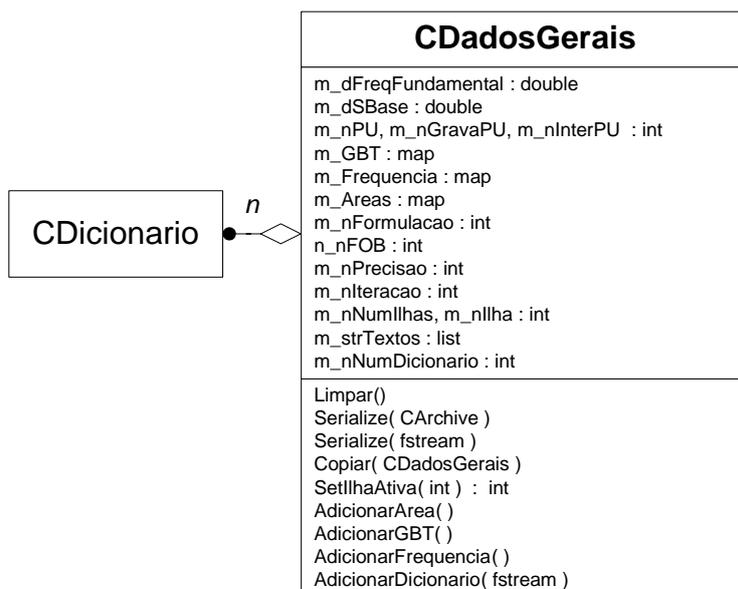


Figura 5.6 – Classe CDadosGerais

Tabela 5.9 – Dados membros de CDadosGerais

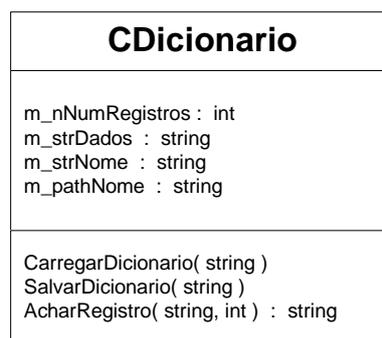
Dados Membros	Descrição
double m_dFreqFundamental	Armazena a frequência do sistema.
double m_dSBase	Armazena a potência base.
int m_nPU	Indica se os dados estão em PU ou em unidades elétricas.
int m_nGravaPU	Indica se os dados serão salvos em PU ou em unidades elétricas.
int m_nInterPU	Indica se os dados apresentados na interface estarão em PU ou em unidades elétricas.
int m_nPrecisao	Indica a precisão que os números serão apresentados.
int m_nFormulacao	Indica se os dados são referentes a sistemas monofásicos, trifásicos ou quatro condutores.
int m_nFOB	Indica a função objetivo a ser utilizada.
int m_nIteracao	Armazena o número da iteração atual.
int m_nNumIlhas	Número de ilhas do sistema, ou seja, partes desconexas do sistema.
int m_nIlha	Indica a sub-rede ou ilha ativa.
map<double, double> m_GBT	Armazena os grupos base de tensão.
map<int, string> m_Area	Armazena as áreas do sistema.
map<double, complex> m_Frequencias	Armazena frequências para análise harmônica.
map<string, Cdicionario> m_Dic	Armazena dicionários de componentes.
int m_nNumDicionario	Número de dicionários armazenados.
list<string> m_strTextos	Armazena textos.

Tabela 5.10 – Funções membros de CDadosGerais

Funções Membros	Descrição
CDadosGerais( )	O construtor da classe, responsável pela inicialização de todas as variáveis.
~CDadosGerais( )	O destrutor da classe.
void Limpar( )	Desaloca memória das listas e inicializa as variáveis.
void Serialize( Carchive& ar )	São as funções de salvar e ler arquivos.
void Serialize( fstream& fio )	Sobrecarga das funções de arquivo
void Copiar( CDadosGerais &pDG )	Duplica os dados da classe.
void AdicionarGBT( double id, double valor )	Adiciona valor de um grupo base de tensão.
void AdicionarAreas( int id, string nome )	Adiciona uma área.
void AdicionarFrequencia(double freq, complex fq )	Adiciona uma frequência.
void AdicionarDicionario(string id, string path )	Armazena um dicionário.
void AdicionarFrequencia(int id, double fq)	Adiciona uma frequência.
int SetIlhaAtiva(int ilha)	Seleciona uma ilha para se tornar ativa, retorna a antiga.

### 5.3.1.2 Classe CDicionario

Esta classe tem como objetivo carregar os arquivos de dicionários de equipamentos, e retornar determinado registro do equipamento. O diagrama da classe é apresentado na Figura 5.7.



**Figura 5.7 – Classe CDicionario**

Os dados membros são apresentados na Tabela 5.11 e os métodos na Tabela 5.12.

**Tabela 5.11 – Dados membros de CDicionario**

Dados Membros	Descrição
int m_nNumRegistros	Número de registros do dicionário.
string** m_strDados	Tabela para armazenar os registros na memória. Tem como objetivo aumentar o desempenho computacional diminuindo o número de acesso a disco.
string m_strNome	Armazena o nome (identificador) do dicionário.
string m_strPath	Armazena a localização do arquivo no disco.

Tabela 5.12 – Funções membros de CDicionario

Funções Membros	Descrição
CDicionario( )	O construtor da classe, responsável pela inicialização de todas as variáveis.
~ CDicionario( )	O destrutor da classe.
void CarregarDicionario(string str )	Carrega o dicionário para m_strDados, quando dado um caminho str.
void SalvarDicionario(string str )	Salva na localização str, os valores encontrados em strDados.
string AcharRegistro( string id, int campo )	Retorna um determinado valor quando dados o <i>id</i> e o <i>campo</i> .

### 5.3.1.3 Classe CComponente

Tem como objetivo compatibilizar a passagem de dados entre funções. O modelo gráfico de acordo com a UML para a representação da classe CComponente é mostrado na Figura 5.8, seus dados membros na Tabela 5.13 e métodos na Tabela 5.14.

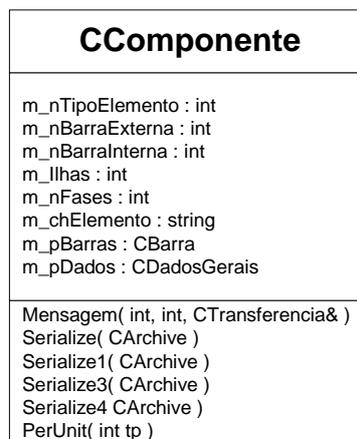


Figura 5.8 – Classe CComponente

Tabela 5.13 – Dados membros de CComponente

Dados Membros	Descrição
int m_nTipoElemento	Identifica o tipo do componente armazenando genericamente.
int m_nBarraExterna[n]	Número das barras externas conectadas ao componente, cada elemento pode conectar-se genericamente a $n$ barras do sistema. Onde $n$ é um valor definido em tempo de compilação.
int m_nBarraInterna[n]	Número interno das barras conectadas ao componente.
int m_nIlhas[5]	Indica a que ilha pertence cada componente.
int m_nFases[5]	Indica se a fase esta ativa ou não para uma determinada ilha.
int m_nCircuito	Indica o número do circuito.
char m_chElemento[n][20]	Identifica se o elemento está ligado a uma chave e qual é a chave.
CBarra* m_pBarra[n]	Apontador para barra em que cada terminal do elemento está conectado, mesmo através de chaves.
CDadosGerai*s pDados	Ponteiro para CDadosGerai, todos os elementos possuem um ponteiro que aponta para ela.

Tabela 5.14 – Funções membros de CComponente

Funções Membros	Descrição
CComponente( )	O construtor da classe, responsável pela inicialização de todas as variáveis.
~ CComponente( )	O destrutor da classe.
void Mensagem( int param1, int param2, CTransferencia& tb )	Esta é uma função genérica com objetivo de comunicação entre os objetos, os dois primeiros parâmetros são responsáveis pela identificação da mensagem e o terceiro o seu conteúdo.
void Serialize( fstream& fio )	São as funções de salvar e ler arquivos utilizando mecanismo do C++. Chama as funções Serialize1, Serialize3 e Serialize4.
void Serialize1(fstream& fio)	Função para manipular arquivos referentes a sistemas monofásicos.
void Serialize3(fstream& fio)	Função para manipular arquivos referentes a sistemas trifásicos.
void Serialize4(fstream& fio)	Função para manipular arquivos referentes a sistemas trifásicos com o neutro.
void Serialize( fstream& fio )	São as funções de salvar e ler arquivos utilizando mecanismo do C++
void Serialize( Carchie& ar )	Sobrecarga da função de ler arquivos utilizando mecanismo do Visual C++ (MFC).

### 5.3.2 Nível Conexão

No segundo nível encontram-se as classes CElemento, CChave e CBarra. Este nível é utilizado para definir as associações entre os componentes de uma rede elétrica, ou seja, determina como os objetos poderão se relacionar.

#### 5.3.2.1 Classe CElemento

A classe CElemento representa de forma genérica as conexões dos diversos equipamentos de um sistema elétrico, independentemente do número de conexões e da natureza do equipamento. O modelo é apresentado na Figura 5.9.

<b>CElemento</b>
m_pChaves: string
PerUnit() PegarApontadorBarra( int ) AtualizeIilhas( int , int* ) AtualizeFases( ) Mensagem( int, int, CTransferencia& ) Serialize( CArchive ) Serialize1( CArchive ) Serialize3( CArchive ) Serialize4( CArchive ) PerUnit( int tp )

**Figura 5.9 – Classe CElemento**

A Tabela 5.15 apresenta uma descrição dos dados membros e a Tabela 5.16 as funções membros.

**Tabela 5.15 – Dados membros de CElemento**

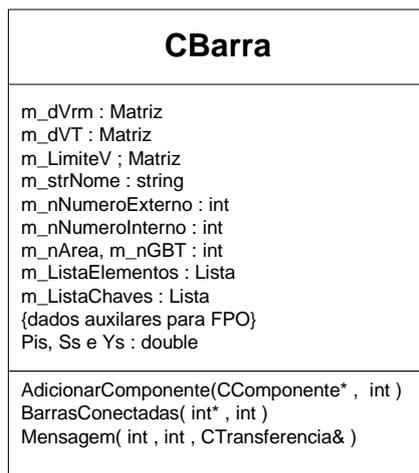
<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
CChave* m_pChaves[]	Apontador para a chave em que cada terminal do elemento está conectado, se estiver conectado diretamente em uma barra aponta para NULL.

Tabela 5.16 – Funções membros de CElemento

Funções Membros	Descrição
CElemento( )	O construtor da classe, responsável pela inicialização de todas as variáveis.
~ CElemento( )	O destrutor da classe.
void PerUnit(int tipo)	Transforma os dados para PU ou para unidades elétricas dependendo do parâmetro da função. Tipo=0 => Unidades Elétricas => p.u. tipo=1 => p.u. => Unidades Elétricas
CBarra* PegarApontadorBarra( int bar )	Retorna o endereço de memória de um objeto barra.
void AtualizeIlhas( int fase, int* Ilhas )	Aloca o equipamento em uma ilha dependendo da topologia do sistema.
void AtualizeFases()	Atualiza a topologia do sistema elétrico.
void Mensagem( int metodologia, int estrutura, CTransferencia& tb )	Mensagem entre objetos
void Serialize( fstream& fio )	São as funções de salvar e ler arquivos utilizando mecanismo do C++. Chama as funções Serialize1, Serialize3 e Serialize4.
void Serialize( CArchieve& ar )	Sobrecarga da função de ler arquivos utilizando mecanismo do Visual C++ (MFC).
void Serialize1(fstream& fio)	Função para manipular arquivos referentes a sistemas monofásicos.
void Serialize3(fstream& fio)	Função para manipular arquivos referentes a sistemas trifásicos.
void Serialize4(fstream& fio)	Função para manipular arquivos referentes a sistemas trifásicos com o neutro.
void Serialize( fstream& fio )	São as funções de salvar e ler arquivos utilizando mecanismo do C++
void Limite()	Testa se algum limite foi violado e atualiza as variáveis necessárias.

### 5.3.2.2 Classe CBarra

A classe CBarra armazena todas as informações relativas às barras e todas as posições de memória dos componentes conectados a ela. O armazenamento das posições de memória é realizado através de listas encadeadas de ponteiros. Uma característica importante é que uma barra pode estar associada a vários elementos ou chaves. Na Figura 5.10 é mostrado o diagrama da classe Cbarra, na Tabela 5.17 os dados membros e as funções membros na Tabela 5.18.



**Figura 5.10 – Classe CBarra**

**Tabela 5.17 – Dados membros de CBarra**

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz m_dVrm	Armazena os valores da tensão em coordenadas retangulares.
Matriz m_dVT	Armazena os valores da tensão em coordenadas polares.
Matriz m_dLimiteV	Armazena os limites de tensão.
char m_strNome[]	Armazena o nome da barra.
int m_nNumeroExterno	Armazena a designação externa da barra.
int m_nNumeroInterno	Armazena a designação interna da barra.
int m_nArea, m_nGBT	Indica a que área e GBT a barra pertence.
lista m_ListaElementos	Lista dos elementos conectados a barra.
lista m_ListaChaves	Lista das chaves conectadas a barra.
Matriz Pis	Variáveis duais para o FPO.
Matriz Ss	Variáveis de folga para o FPO.
Matriz Ys	Variáveis auxiliares para o FPO.

**Tabela 5.18 – Dados membros de CBarra**

<b>Funções Membros</b>	<b>Descrição</b>
CBarra( )	O construtor da classe, responsável pela inicialização de todas as variáveis.
~CBarra( )	O destrutor da classe.
void AdicionarComponente( Ccomponente* pCmp, int tipo )	Adiciona um componente ou chave nas listas do objeto.
void BarrasConectadas(int* Barras, int fase)	Retorna todas a barras eletricamente conectadas em determinada fase.
void Mensagem( int metodologia, int estrutura, Ctransferencia& tb )	Mensagem entre objetos
void Serialize( fstream& fio )	São as funções de salvar e ler arquivos utilizando mecanismo do C++. Chamas as

	funções Serialize1, Serialize3 e Serialize4.
void Serialize1(fstream& fio)	Função para manipular arquivos referentes a sistemas monofásicos.
void Serialize3(fstream& fio)	Função para manipular arquivos referentes a sistemas trifásicos.
void Serialize4(fstream& fio)	Função para manipular arquivos referentes a sistemas trifásicos com o neutro.
void Limite()	Testa se algum limite foi violado e atualiza as variáveis necessárias.

### 5.3.2.3 Classe CChave

A classe CChave, Figura 5.11, tem como objetivo representar os dispositivos usados para manobras e proteção de circuitos elétricos. A implementação desta classe não é trivial, porém é de fundamental importância para uma correta modelagem dos sistemas de distribuição. Os dados membros estão descritos na Tabela 5.19 e os métodos na Tabela 5.20.

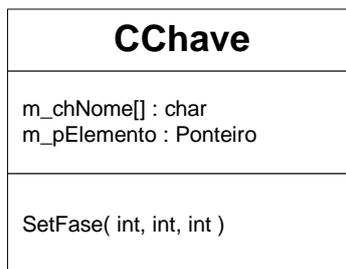


Figura 5.11 – Classe CChave

Tabela 5.19 – Dados membros de CChave

Dados Membros	Descrição
char m_chNome[]	Armazena o nome da chave.
CElemento* m_pElemento[]	Armazena endereços dos equipamentos conectados à chave.

Tabela 5.20 – Funções membros de CChave

Funções Membros	Descrição
CChave( )	O construtor da classe, responsável pela inicialização de todas as variáveis.
~CChave( )	O destrutor da classe.
void SetChave(int a, int b, int c)	Ajusta a posição Aberto/Fechado de cada fase.

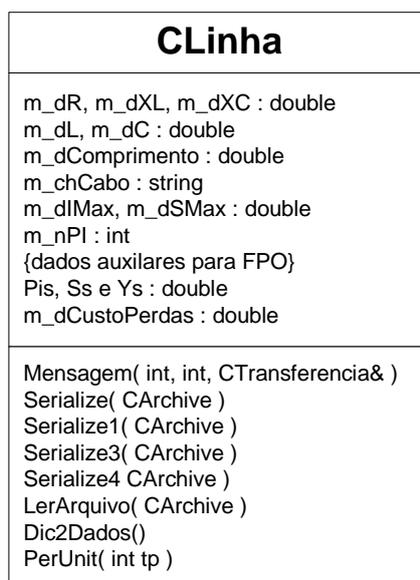
### 5.3.3 Nível Dados

As classes relativas aos elementos propriamente ditos (CLinha, CCarga, CTransformadores, CDisjuntor, etc.) encontram-se no terceiro nível. O objetivo destas classes é ler, escrever e armazenar os dados, nenhuma metodologia é manipulada por estas classes.

Nas classes desta subseção, as funções Serialize(), Serialize1(), Serialize3(), Serialize4(), PerUnit(), Limite() e Mensagem() são reescritas para manipular corretamente os dados. Como as especificações destas funções são descritas, de forma genérica, na Tabela 5.16 referente a classe base Celemento, elas não serão reespecificadas em tabelas, mas serão apresentadas nos diagramas. Os métodos não definidos na classe base serão apresentados.

#### 5.3.3.1 CLinha

Esta classe armazena todos os dados relevantes de uma linha de transmissão CA para as diversas metodologias implementadas na aplicação. O diagrama é apresentado na Figura 5.12.



**Figura 5.12 – Classe CLinha**

Uma descrição detalhada dos dados membros é apresentada na Tabela 5.21 e na Tabela 5.22 os novos métodos.

**Tabela 5.21 – Dados membros de CLinha**

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz m_dR	Armazena os valores de resistência das fases e as mútuas.
Matriz m_dXL	Armazena os valores de reatância das fases e as mútuas.
Matriz m_dXC	Armazena os valores de susceptância em derivação das fases e as mútuas.
Matriz m_dL	Armazena os valores de indutância fases e as mútuas.
Matriz m_dC	Armazena os valores das capacitâncias em derivação das fases e as mútuas.
double m_dComprimento	Comprimento do cabo em Km.
string m_chCabo[]	Armazena informações do cabo dos condutores.
double m_dIMax	Valor máximo de corrente permitida na fase.
double m_dSMax	Valor máximo de potência permitida na fase.
int m_nPI	Modela a linha por blocos Pis, não utiliza correção hiperbólica. Se PI for maior que zero, utiliza-se a metodologia (VARRICCHIO, 2003) para a análise do desempenho harmônico.
double m_dCustoPerdas	Custo das perdas na linha.
Matriz Pis	Variáveis duais para o FPO.
Matriz Ss	Variáveis de folga para o FPO.
Matriz Ys	Variáveis auxiliares para o FPO.

**Tabela 5.22 – Funções membros de CLinha**

<b>Funções Membros</b>	<b>Descrição</b>
void LerDados(Carchive )	Utilizado quando está definido no arquivo o tipo do cabo invés dos dados de impedância, para utilizar está função o dicionário de elementos deve ser carregado.
void Dic2Dados()	Transforma com o auxílio do dicionário, dados do cabo em dados elétricos.

### 5.3.3.2 CCarga

Representa as cargas do sistema, pode armazenar os dados em forma de potência para um fluxo de potência ou fluxo de potência ótimo, como também em valores de resistência e impedância corrigidos pela tensão para a análise harmônica. O diagrama padrão é apresentado na Figura 5.13, os dados membros podem ser observados em detalhes na Tabela 5.23.

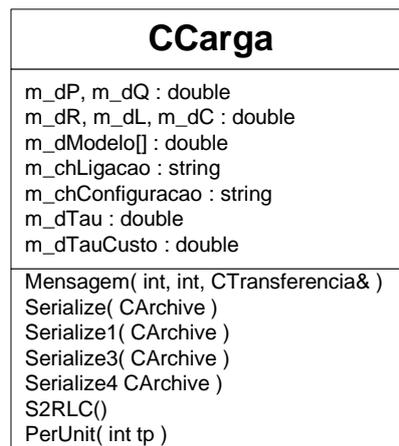


Figura 5.13 – Classe CCarga

Tabela 5.23 – Dados membros de CCarga

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz m_dP	Armazena os valores de potência ativa das fases.
Matriz m_dQ	Armazena os valores de potência reativa das fases.
double m_dModelo[]	Modelo ZIP da carga.
char m_chligacao[2]	Tipo de carga: [0] => Indica se a carga está conectada em estrela (y) ou delta (d). [1] => Indica se a carga está conectada no solo (t), no cabo neutro (n) ou flutuando (f). Está opção só pode ser utilizada em sistemas com 4 fios.
Matriz m_dR, m_dL, m_dC	Transforma os valores da carga PQ em valores de RLC para um determinado nível de tensão.
char m_chConfiguracao	Identifica se os componentes RLC da carga estão conectados em série ou paralelo.
double m_dTau	Variável que representa o percentual do corte de carga.
double m_dTauCusto	Valor do corte de carga.

A função membro S2RLC() tem como objetivo transformar a carga S em dados de RLC, utilizando a tensão atual da barra onde está conectada e de acordo com o modelo referido em m\_chConfiguracao.

### 5.3.3.3 CRLC

Esta classe tem como objetivo representar os equipamentos em série ou em derivação, sendo que estes elementos são compostos por resistências, indutâncias e capacitâncias. O modelo UML é apresentado na Figura 5.14 e os dados membros na Tabela 5.24.

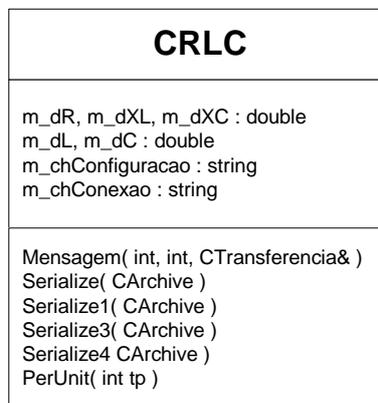


Figura 5.14 – Classe CRLC

Tabela 5.24 – Dados membros de CRLC

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz m_dR	Armazena os valores de resistência do equipamento.
Matriz m_dXL	Armazena os valores de reatância indutiva do equipamento.
Matriz m_dXC	Armazena os valores de reatância capacitiva do equipamento.
Matriz m_dL	Armazena os valores de indutância do equipamento.
Matriz m_dC	Armazena os valores de capacitância do equipamento.
char m_chConfiguracao	Identifica se os componentes do equipamento estão em série ou paralelo.
char m_chConexao	Identifica se o equipamento encontra-se entre duas barras ou entre barra-terra.

### 5.3.3.4 CMaquina

Representa as máquinas do sistema. Subestações, barras V $\theta$ , barras PV e co-geração são modeladas nesta classe. O diagrama da máquina é ilustrado na Figura 5.15 e os dados membros na Tabela 5.25.

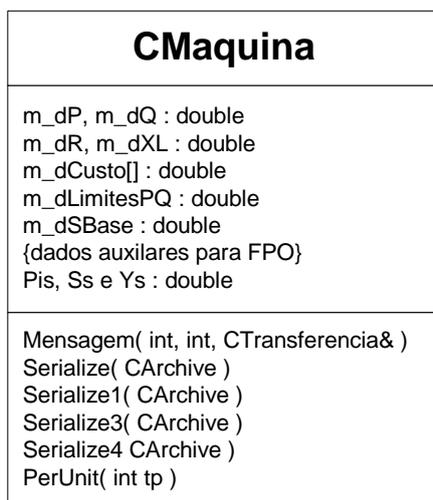


Figura 5.15 – Classe CMaquina

Tabela 5.25 – Dados membros de CMaquina

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz m_dP	Armazena os valores de potência ativa gerada da máquina.
Matriz m_dQ	Armazena os valores de potência reativa gerada da máquina.
Matriz m_dR	Armazena os valores de resistência da máquina.
Matriz m_dXL	Armazena os valores de reatância da máquina.
double m_dCusto[]	Custo da geração ativa e reativa.
Matriz m_dLimitesPQ	Limites de geração da máquina.
double m_dSBase	Potência base da máquina.
Matriz Pis	Variáveis duais para o FPO.
Matriz Ss	Variáveis de folga para o FPO.
Matriz Ys	Variáveis auxiliares para o FPO.

### 5.3.3.5 CTrafo2

A classe CTrafo2 (Figura 5.16) representa os transformadores de 2 enrolamentos, na qual possui dados referentes à regulação de tensão através de mudança

de TAPE e a regulação do fluxo de potência através de defasagens angulares. Também pode representar as diversas conexões entre primário e secundário, estrela-delta, por exemplo. Os dados membros são apresentados Tabela 5.26.

<b>CTrafo2</b>
m_dR, m_dXL, m_dXM : double m_dA , m_dFi : double m_dAMin, m_dAMax : double m_dFiMin, m_dFiMax : double m_cLig : string m_cEstrutura : char {dados auxiliares para FPO} Pis, Ss e Ys : double
Mensagem( int, int, CTransferencia& ) Serialize( CArchive ) Serialize1( CArchive ) Serialize3( CArchive ) Serialize4( CArchive ) LerArquivo( CArchive ) Dic2Dados() PerUnit( int tp )

Figura 5.16 – Classe CTrafo2

Tabela 5.26 – Dados membros de CTrafo2

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz m_dR	Armazena os valores de resistência do enrolamento.
Matriz m_dXL	Armazena os valores de reatância do enrolamento.
Matriz m_dXM	Armazena os valores de reatância de magnetização.
Matriz m_dA	Tap do transformador.
Matriz m_dFi	Ângulo do transformador.
double m_dAMin, m_dAMax	Intervalo de variação do TAP.
double m_dFiMin, m_dFiMax	Intervalo de variação do defasador.
char m_cLig[4]	[0] e [1] tipo da conexão do primário. [2] e [3] tipo da conexão do secundário. O primeiro valor informa se a conexão é estrela ou delta, o segundo se aterrada ou não.
char m_cEstrutura	Informa se é um transformador trifásico ou bancos de transformadores monofásicos.
Matriz Pis	Variáveis duais para o FPO.
Matriz Ss	Variáveis de folga para o FPO.
Matriz Ys	Variáveis auxiliares para o FPO.

As funções membros possuem a mesma definição que os métodos da classe Clinha (Tabela 5.22).

### 5.3.3.6 CTrafo3

A classe CTrafo3 representa os transformadores de 3 enrolamentos. O diagrama da classe é apresentado na Figura 5.17 e os dados membros na Tabela 5.27.

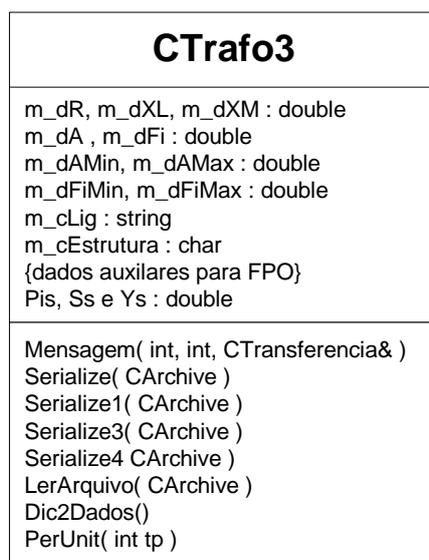


Figura 5.17 – Classe CTrafo3

Tabela 5.27 – Dados membros de CTrafo3

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz m_dR	Armazena os valores de resistência do enrolamento.
Matriz m_dXL	Armazena os valores de reatância do enrolamento.
Matriz m_dXM	Armazena os valores de reatância de magnetização.
Matriz m_dA	Tap do transformador.
Matriz m_dFi	Ângulo do transformador.
double m_dAMin, m_dAMax	Intervalo de variação do TAP.
double m_dFiMin, m_dFiMax	Intervalo de variação do defasador.
char m_cLig[6]	[0] e [1] tipo da conexão do primário. [2] e [3] tipo da conexão do secundário. [4] e [5] tipo da conexão do terciário. O primeiro valor informa se a conexão é estrela ou delta, o segundo se aterrada ou não.

char m_cEstrutura	Informa se é um transformador trifásico ou bancos de transformadores monofásicos.
Matriz Pis	Variáveis duais para o FPO.
Matriz Ss	Variáveis de folga para o FPO.
Matriz Ys	Variáveis auxiliares para o FPO.

As funções membros possuem a mesma definição que os métodos da classe CLinha (Tabela 5.22).

### 5.3.3.7 CCER

Os compensadores estáticos de reativos em derivação (SVC) são representados por esta classe. O diagrama pode ser observado na Figura 5.18 e os dados membros na Tabela 5.28.

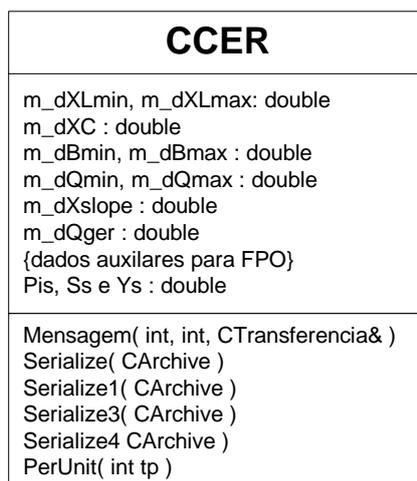


Figura 5.18 – Classe CCER

Tabela 5.28 – Dados membros de CCER

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz m_dXLmin, m_dXLmax	Dependendo do ângulo de disparo o valor de indutância pode variar entre o valor 0 e o valor nominal.
Matriz m_dXC	Valor da reatância capacitiva..
Matriz m_dBmin, m_dBmax	Susceptância mínima e máxima do CER.
Matriz m_dQmin, m_dQmax	Potência reativa mínima e máxima gerada pelo CER.
Matriz m_dXslope	Inclinação da reta relativa à região controlável do CER.
Matriz m_dQger	Geração atual.
Matriz Pis	Variáveis duais para o FPO.

Matriz Ss	Variáveis de folga para o FPO.
Matriz Ys	Variáveis auxiliares para o FPO.

### 5.3.3.8 CCSCT

Armazena os dados de compensadores série controlado a tiristor, o modelo pode ser conferido na Tabela 5.29 e os dados membros na Figura 5.19.

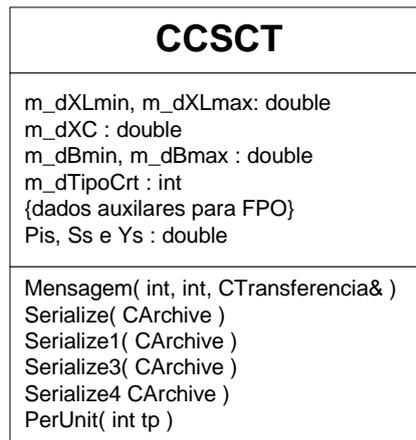


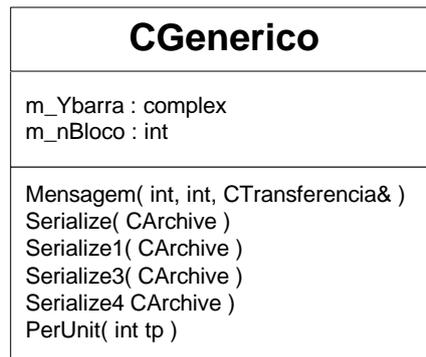
Figura 5.19 – Classe CCSCT

Tabela 5.29 – Dados membros de CCSCT

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz m_dXLmin, m_dXLmax	Dependendo do ângulo de disparo o valor de indutância pode variar entre o valor 0 e o valor nominal.
Matriz m_dXC	Valor da reatância capacitiva.
Matriz m_dBmin, m_dBmax	Susceptância mínima e máxima do CSCT.
int m_dTipoCrt	Indica o tipo de controle, controle de tensão ou de fluxo de potência ativa.
Matriz Pis	Variáveis duais para o FPO.
Matriz Ss	Variáveis de folga para o FPO.
Matriz Ys	Variáveis auxiliares para o FPO.

### 5.3.3.9 CGenerico

A função desta classe e modelar equipamentos estáticos definidos pelo o usuário, os dados necessários são valores que representam a matriz  $Y_{barra}$  do elemento que se deseja modelar, na Figura 5.20 está o diagrama de objetos e os dados na Tabela 5.30.



**Figura 5.20 – Classe CGenerico**

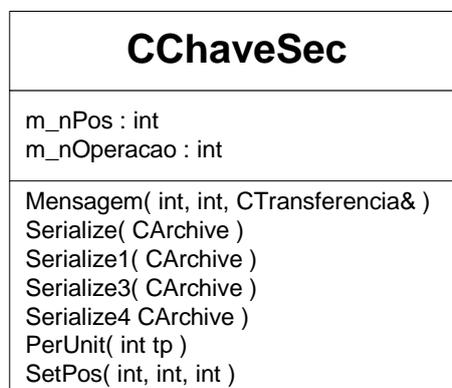
**Tabela 5.30 – Dados membros de CGenerico**

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz* m_Ybarra	Matrizes contendo os elementos que devem ser inseridos na matriz representativa da metodologia em questão.
int m_nBloco	Número de blocos a serem inseridos.

### 5.3.3.10 CChaveSec

Esta classe permite a interferência do usuário para abrir circuitos, ou seja, para tirar uma parte da rede não é necessário apagar dados e sim abrir chaves. Caso uma parte do sistema fique ilhada isto não pode causar problemas de singularidade para a classe relativa à solução do sistema linear. E ainda, se o usuário desejar, as ilhas poderão ser estudadas junto ou em separado.

Na Figura 5.21 é apresentada o diagrama, na Tabela 5.31 os dados membros e na Tabela 5.32 as funções membros.



**Figura 5.21 – Classe CChaveSec**

Tabela 5.31 – Dados membros de CChaveSec

Dados Membros	Descrição
int m_nPos[3]	Posições das chaves, aberta ou fechada.
int m_nOperacao	Tipo de operação, monopolar ou tripolar.

Tabela 5.32 – Funções membros de CChaveSec

Dados Membros	Descrição
void SetPos(int a, int b, int c)	Ajusta manualmente a posição das chaves.

### 5.3.3.11 CDisjuntor

Esta classe é semelhante à CChaveSec, a diferença fundamental que durante o processo iterativo ou ao final dele ela detecta níveis de corrente ou potência para interromper circuitos. Um novo fluxo de potência pode ser executado.

O diagrama é apresentado na Figura 5.22, na Tabela 5.33 os dados membros e na Tabela 5.34 as funções membros.

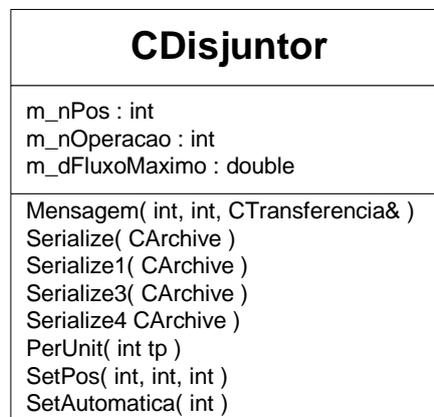


Figura 5.22 – Classe CDisjuntor

Tabela 5.33 – Dados membros de CDisjuntor

Dados Membros	Descrição
int m_nPos[3]	Posições das chaves, aberta ou fechada.
int m_nOperacao	Tipo de operação, monopolar ou tripolar.
double m_dFluxoMaximo	Fluxo máximo permitido.

Tabela 5.34 – Funções membros de CDisjuntor

Funções Membros	Descrição
void SetPos(int a, int b, int c)	Ajusta manualmente a posição das chaves.
void SetAutomatica(int)	Ajusta automaticamente a posição das chaves.

## 5.4 Modelagem do Sistema Elétrico

Na seção anterior apresentou-se a estrutura de classes em nível de dados dos componentes de um sistema de potência. Contudo, para realizar qualquer tipo de cálculo deve-se ainda instanciar e conectar os objetos de tal forma que uma rede seja totalmente caracterizada. Depois se deve definir os modelos de componentes para cada aplicação.

Para isso, criou-se uma nova classe, denominada CRede. Esta classe possui como objetivo a montagem topológica da rede assim como a manutenção desta (abertura de chaves, retirada de equipamentos, etc.). É importante ressaltar que nenhuma tarefa relacionada às aplicações é realizada por esta classe, ou seja, os modelos e aplicações serão tratados nas seções 5.5 e 5.6.

O diagrama de CRede é apresentado na Figura 5.23 e os dados nas Tabela 5.35 e Tabela 5.36.

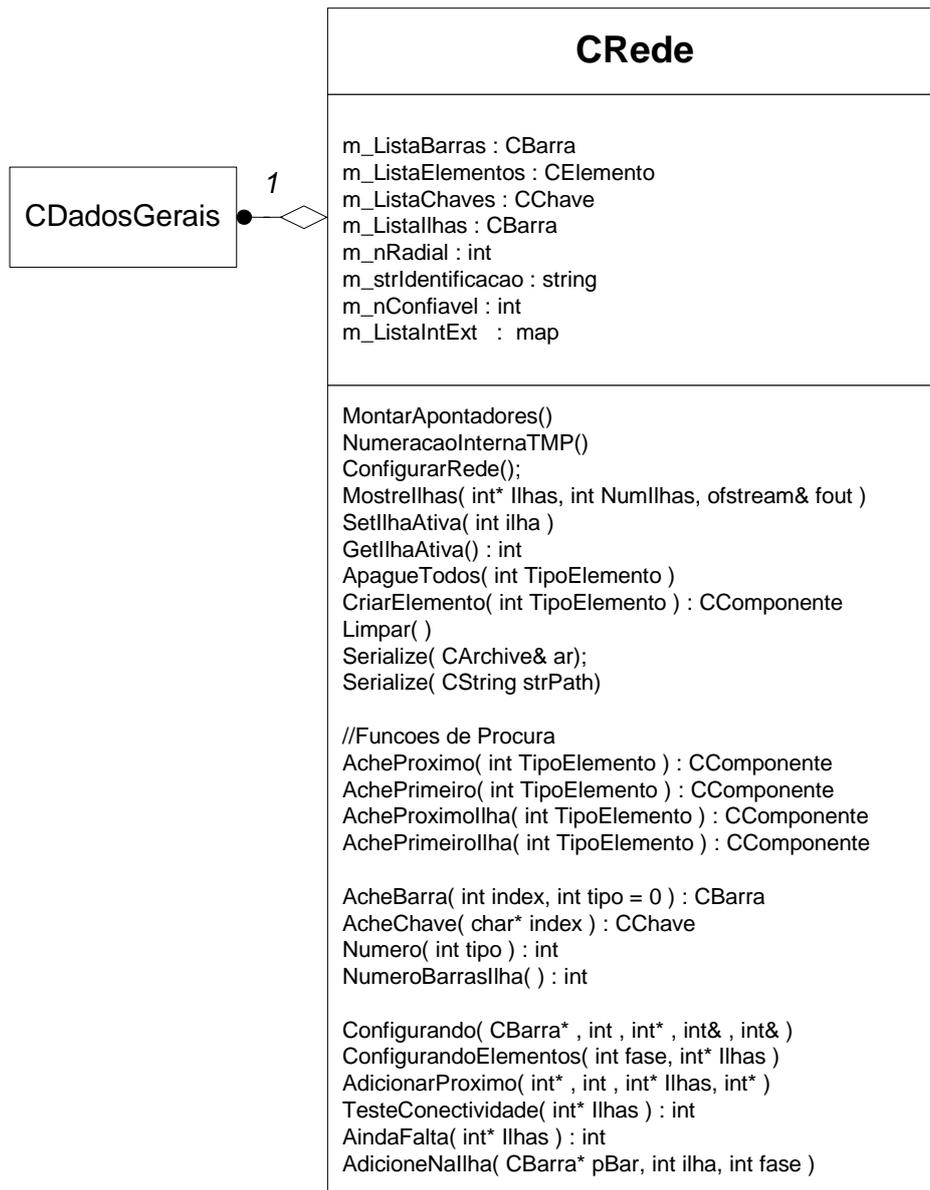


Figura 5.23 – Classe CRede

Tabela 5.35 – Dados membros de CRede

Dados Membros	Descrição
CDadosGeraiis m_Dados	Classe agregada para armazenar dados gerais.
list<Cbarra> m_ListaBarras	Armazena todas os objetos barras em listas encadeadas.
list<Celemento> m_ListaElementos	Armazena todas os objetos elementos e derivados em listas encadeadas.
list<Cchave> m_ListaChaves	Armazena todas os objetos chaves em listas encadeadas.
list<Cbarra> m_ListaIlhas[]	É um vetor de listas encadeadas, onde em cada posição estão os objetos barras pertencentes a cada ilha.
int m_nRadial[]	Indica se a rede é radial ou não.

char m_strIdentificacao[]	Pode armazenar diversos dados relevantes para a rede, nome, estado, etc.
map<string, int> m_ListIntExt	Mapeia identificadores de barras externo em interno.
int m_nConfiavel	Indica se a rede está configurada e pronta para manipulações.

Tabela 5.36 – Funções membros de CRede

Funções Membros	Descrição
CRede( )	O construtor da classe, responsável pela inicialização de todas as variáveis.
~CRede( )	O destrutor da classe.
void MontarApontadores()	Inicializa os apontadores das classes, os equipamentos apontam para as barras e chaves a que estão conectados. As barras para os equipamentos. O esquemático pode ser observado na Figura 5.26 e Figura 5.27.
void NumeracaoInternaTMP()	Cria uma numeração interna para as barras em números seqüenciais [1..n <sup>o</sup> Barras].
void MostreIlhas(int* Ilhas, int NumIlhas, ofstream& fout)	Imprime as barras pertencentes a cada ilha.
void SetIlhaAtiva( int ilha )	Marca qual ilha estará ativa para execução do aplicativo.
int GetIlhaAtiva( )	Retorna a ilha ativa.
void ApagueTodos( int tipo )	Apaga todos os objetos do tipo passado pelo parâmetro da função.
CComponente* CriarElemento( int tipo )	Cria um determinado tipo de elemento.
void Limpar( )	Apaga todos os objetos da rede e a inicializa.
void Serialize( CArchive& ar )	Lê e salva em disco utilizando o mecanismo Carchive da MFC (KRUGLINSKI, 1997)
void Serialize( char strPath[] )	Lê e salva quando é especificado o caminho do arquivo.
void CopiarRede( Crede* pRd)	Cria uma cópia da rede.
<b>Funções de Procura</b>	
CComponente* AchePrimeiro( int tipo )	Retorna o primeiro componente da lista de um determinado tipo.
CComponente* AcheProximo( int tipo )	Retorna o próximo componente da lista.
CComponente* AchePrimeiroIlha(int tipo)	Retorna o primeiro componente pertencente à ilha ativa.
CComponente* AcheProximoIlha(int tipo)	Retorna o próximo componente da ilha ativa.
CBarra* AcheBarra( int bar, int tipo )	Retorna o endereço de um objeto barra segundo a numeração interna (tipo = 0) ou a numeração externa (tipo = 1).
CChave* AcheChave( char index[] )	Retorna o endereço de um objeto chave de

	acordo com o nome.
int Numero ( int tipo )	Retorna o número de componentes de um determinado tipo.
int NumeroBarrasIlha( int ilha )	Retorna o número de barras de uma determinada ilha.
<b>Configuração</b>	
void ConFigurarRede()	Inicia processo de configuração de rede, monta apontadores, detecta ilhamentos, cargas não atendidas, etc...
void Configurando(Cbarra* pBar, int fase, int* Ilhas, int& NumIlhas, int& removidas)	Função recursiva para detectar ilhamentos.
void ConfigurandoElementos(int fase, int* Ilhas)	Atualiza o estado dos elementos, se estão ativos em determinada ilha, se estão energizados.
int TesteConectividade( int* Ilhas )	Testa se o sistema está todo conexo.
int AindaFalta( int* Ilhas )	Testa se algum elemento ainda não foi designado a uma ilha.
void AdicioneNaIlha( Cbarra* pBar, int ilha, int fase )	Inclui um elemento para uma ilha.

A Figura 5.24 ilustra a associação entre as classes CRede e CComponente. Como pode ser visto, são classes agregadas e a condição mínima para criação de uma rede é a existência de pelo menos três objetos.

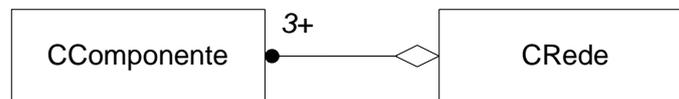


Figura 5.24 – Associação das classes CComponente e CRede

### 5.4.1 Funcionamento do Modelo Proposto

Considere o sistema mostrado na Figura 5.25. Este sistema é composto por três barras, um gerador, uma linha, um transformador com “tape” variável, um disjuntor, duas chaves seccionadoras e duas cargas.

Primeiramente objetos são armazenados em listas encadeadas segundo suas propriedades, ou seja, segundo as classes CBarra, CChave e CElemento. A Figura 5.26 ilustra o armazenamento dos objetos.

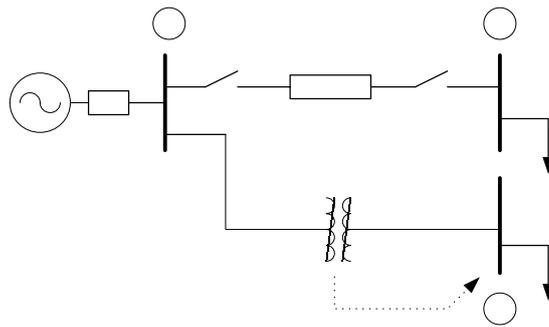


Figura 5.25 – Sistema exemplo três barras

Posteriormente a classe CRede conecta os objetos conforme a topologia do sistema e obedecendo as associações definidas na Figura 5.25. A Figura 5.27 ilustra este procedimento. É importante ressaltar que as ligações mostradas nas Figura 5.26 e Figura 5.27 existem simultaneamente. As ligações da Figura 5.27 determinam a conectividade do sistema, incluindo a conectividade por fases. Por exemplo, caso a carga da barra três seja monofásica conectada na fase a e o transformador entre as barras 1 e 3 monofásico na fase c, a classe CRede detectará esta desconectividade, emitindo uma mensagem ao usuário pedindo confirmação dos dados.

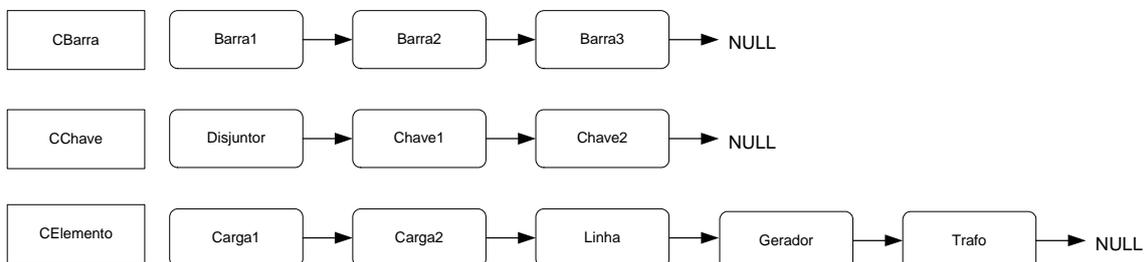
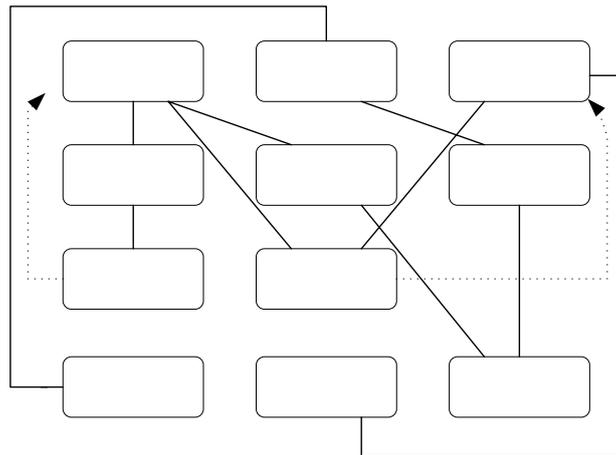


Figura 5.26 – Listas de objetos

As indicações com linhas tracejadas na Figura 5.27 referem-se aos controles. Ou seja, o transformador de tape variável controla a tensão da barras 3 e o gerador controla a tensão da barra 1.



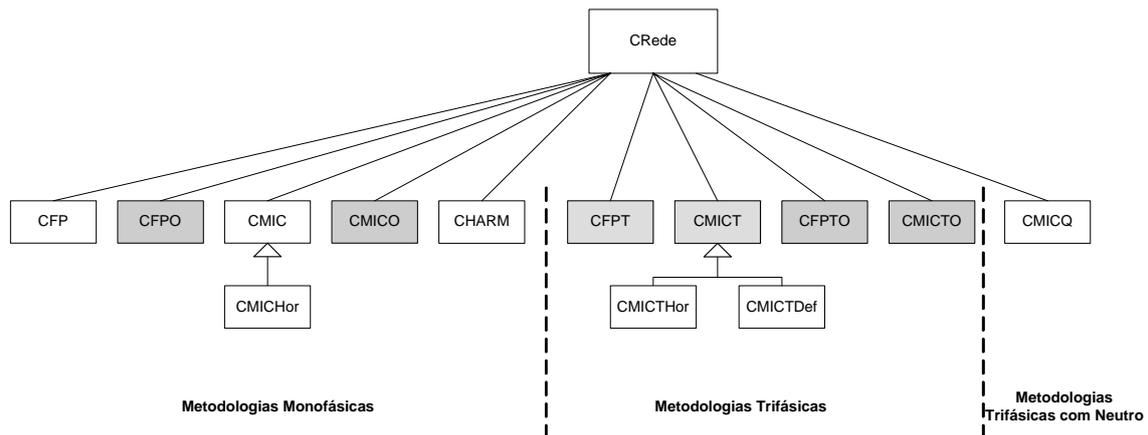
**Figura 5.27 – Estrutura topológica**

Percebe-se que na classe CRede e nas classes agregadas não existem referências aos aplicativos. Os métodos matemáticos relativos a cada aplicação são acessados através de ponteiros. Assim sendo, um componente é instanciado uma única vez sendo a modelagem acessada pelos aplicativos através de parâmetros de funções.

## **5.5 Metodologias Implementadas**

Até a presente seção foi apresentada a estrutura de classes relativa à montagem e ao armazenamento de uma rede elétrica. Esta estrutura deve atender a qualquer aplicativo sem que nenhuma mudança estrutural no código seja realizada.

No presente trabalho várias aplicações, tanto monofásicas, como trifásica foram incorporadas aos modelos de componentes já existentes. A Figura 5.28 mostra a estrutura de classe após a incorporação destes aplicativos. As classes em cinza representam as aplicações desenvolvidas neste trabalho e as classes hachuradas foram atualizadas por motivos de correções de erros ou modelagem de novos equipamentos.



**Figura 5.28 – Metodologias implementadas**

Como pode ser visto, as classes relativas aos métodos são agregadas à classe CRede. Dessa forma, qualquer aplicativo pode acessar uma rede obtendo a modelagem matemática pertinente ao mesmo.

É importante ressaltar que qualquer aplicativo poderá interagir com a classe CRede através de abertura/fechamento de chaves, inclusão/retirada de equipamentos, mudança de estado dos equipamentos de controle, etc. Com isso, cada modificação realizada por um aplicativo é novamente validada e disponibilizada imediatamente para os demais métodos.

### 5.5.1 Classe CMIC e CFP

Na classe CMIC (Figura 5.29) é resolvido o fluxo de potência monofásico pelo método de injeção de correntes – MIC e na classe CFP (Figura 5.30) o fluxo de potência é resolvido utilizando a formulação polar. A partir de uma rede armazenada e montada por CRede, estas classes montam o sistema de equações lineares e as envia para CSistemaLinear que resolve o conjunto de equações retornando o vetor solução. A partir deste ponto, realizam-se as atualizações e verifica-se a convergência. É importante ressaltar que todas as transferências de valores, dados, matrizes, etc são padronizadas e realizadas por intermédio de uma classe template denominada CTransferencia.

Como pode ser visto na Figura 5.28 deriva-se de CMIC a classe CMICHorario. Esta classe possibilita a análise das perdas por períodos através do armazenamento dos

resultados de diversos fluxos de potência. Posteriormente, retorna-se o resultado através de relatórios.

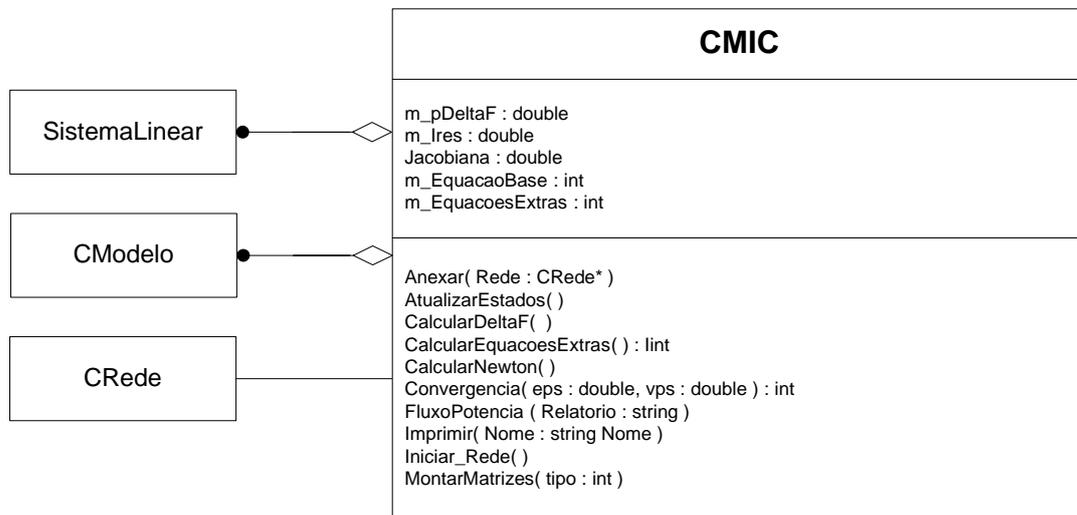


Figura 5.29 – Classe CMIC

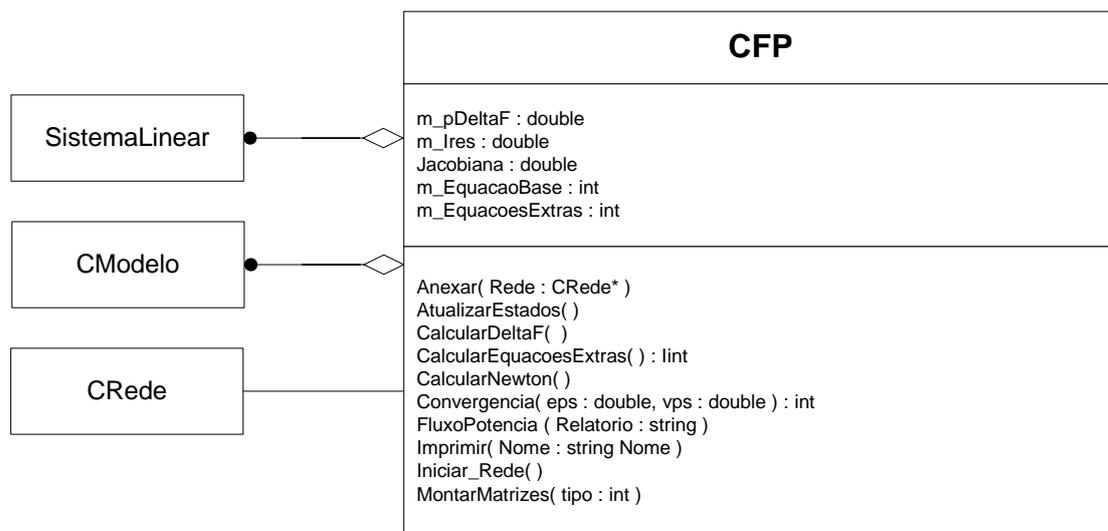


Figura 5.30 – Classe CFP

Como pode ser observado pelos diagramas apresentados na Figura 5.29 e Figura 5.30, ambas as classes possuem dados e funções membros semelhantes. Mas a classe CMIC utiliza modelos de injeção de corrente e a classe CFP utiliza modelos de potência polar, mas detalhes serão apresentados na seção 5.7. Os dados membros são apresentados na Tabela 5.37 e as funções membros na Tabela 5.38.

Tabela 5.37 – Dados membros de CMIC e CFP

Dados Membros	Descrição
Matriz<double>* m_pDeltaF	Armazena o vetor indepedente, em forma blocada.
Matriz<double>* m_pIres	Auxiliar no cálculo da geração de potência das máquinas.
CSistemaLinear Jacobiana	Armazena a matriz Jacobiana.
int* m_EquacaoBase	Apontador para as barras de folga.
int m_nEquacaoExtras	Equações extras devido a controles.

Tabela 5.38 – Funções membros de CMIC e CFP

Funções Membros	Descrição
void AnexarRede( Crede* rede )	Determina para qual rede será calculado o fluxo de potência.
void AtualizarEstados()	Atualiza, se necessário, o estado das variáveis.
void CalcularDeltaF()	Monta o vetor independente.
int CalcularEquacoesExtras()	Calcula o número de equações de controles, para dimensionar o sistema linear.
void CalcularNewton()	Calcula a solução do sistema linear utilizando fatoração LDU.
int Convergência(double eps, double vps)	Testa se os valores do vetor indepedente estão dentro da tolerância especificada.
int FluxoPotência( string Relatorio )	Executa o fluxo de potência e escreve os resultados em um arquivo em disco.
int Imprimir(string Relatorio )	Imprime o relatório do fluxo de potência convergido.
void IniciarRede()	Transforma, se necessário, os dados para pu e testa a rede.
void MontarMatrizes( int tipo)	Para o estudo de fluxo de potência, monta a matriz Jacobiana.

### 5.5.2 Classe CMICO e CFPO

Estas classes foram desenvolvidas neste trabalho e nelas é solucionado o problema do fluxo de potência ótimo monofásico, onde na classe CMICO (Figura 5.31) o problema é resolvido utilizando o método de injeções de correntes, conforme apresentado no Capítulo 2. Na classe CFPO (Figura 5.32) utiliza-se as equações de potência polar para alcançar a solução do problema.

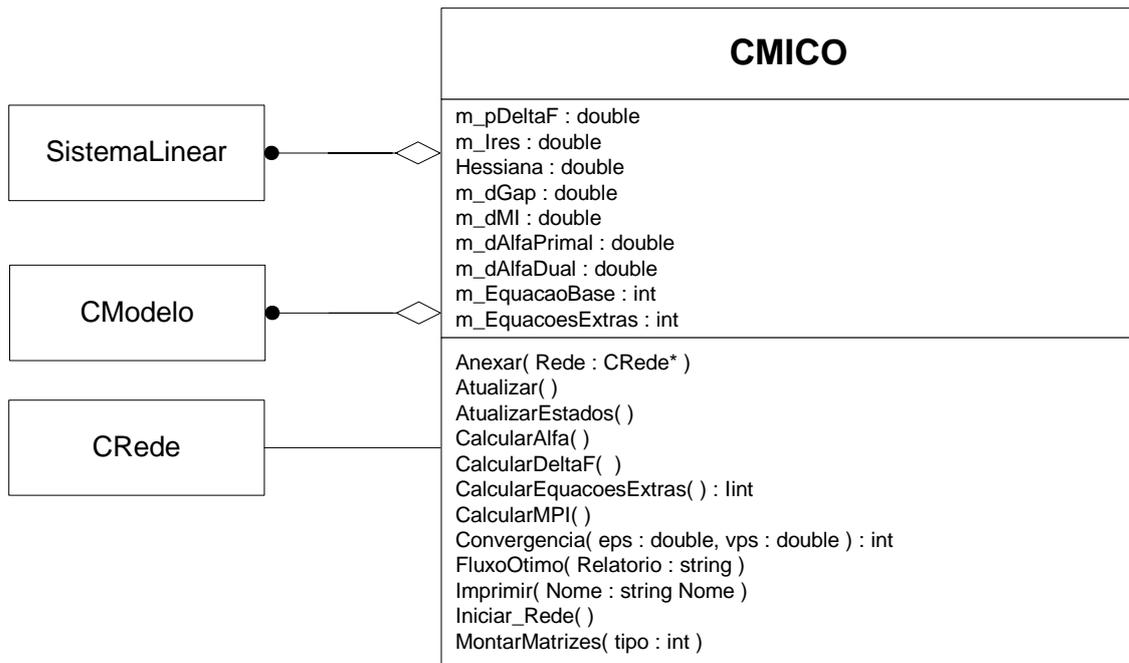


Figura 5.31 – Classe CMICO

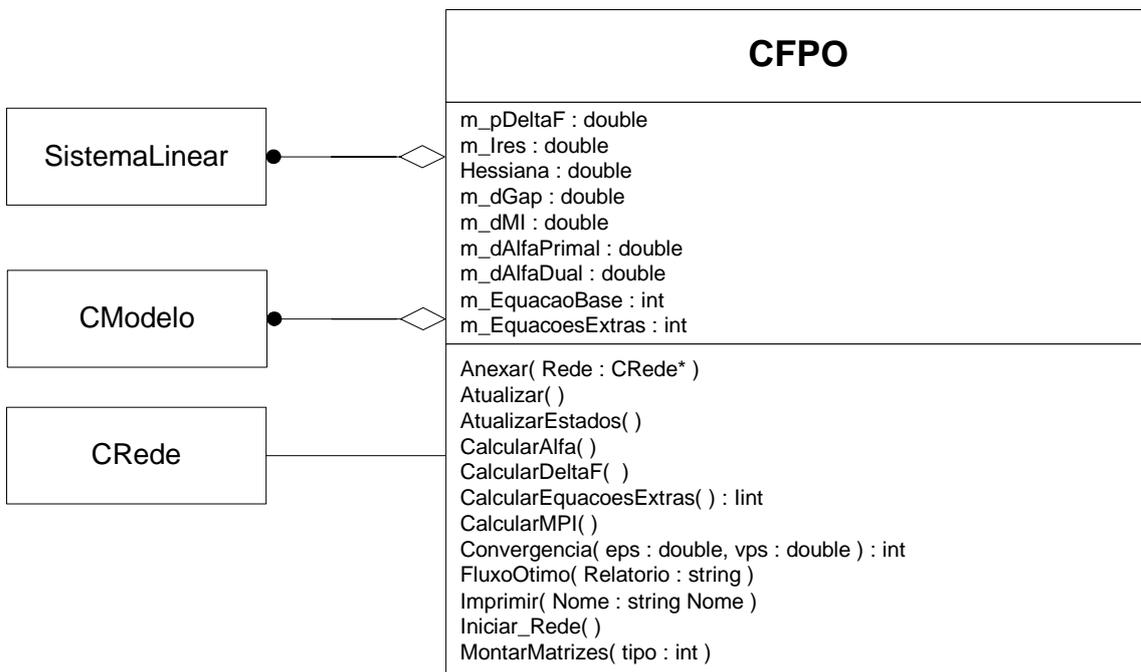


Figura 5.32 – Classe CFPO

Novamente, ambas as classes possuem dados e funções membros semelhantes. Os dados membros são apresentados na Tabela 5.39 e as funções membros na Tabela 5.40.

Tabela 5.39 – Dados membros de CMICO e CFPO

Dados Membros	Descrição
Matriz<double>* m_pDeltaF	Armazena o vetor indepedente, em forma blocada.
Matriz<double>* m_pIres	Auxiliar no cálculo da geração de potência das máquinas.
SistemaLinear Hessiana	Armazena a matriz Hessiana.
int m_EquacaoBase	Apontador para a barra de referência angular.
int m_nEquacaoExtras	Equações extras devido a controles.
double m_dAlfaPrimal	Armazena o valor do alfa primal.
double m_dAlfaDual	Armazena o valor do alfa dual.
double m_dGap	Armazena o valor do GAP.
double m_dMI	Armazena o valor do MI.

Tabela 5.40 – Funções membros de CMICO e CFPO

Funções Membros	Descrição
void AnexarRede( Crede* rede )	Determina para qual rede será calculado o fluxo de potência.
void Atualizar()	Atualiza as variáveis duais.
void AtualizarEstados()	Atualiza, se necessário, o estado das variáveis.
void CalcularAlfa()	Calcula os alfas primais e duais de cada iteração.
void CalcularDeltaF()	Monta o vetor independente.
int CalcularEquacoesExtras()	Calcula o número de equações de controles, para dimensionar o sistema linear.
void CalcularMPI()	Calcula a solução do sistema linear utilizando fatoração LDU.
int Convergência(double eps, double vps)	Testa se os valores do vetor indepedente estão dentro da tolerância especificada.
int FluxoOtimo( string Relatorio )	Executa o fluxo de potência ótimo e escreve os resultados em um arquivo em disco.
Int Imprimir(string Relatorio )	Imprime o relatório do fluxo de potência convergido.
void IniciarRede()	Transforma, se necessário, os dados para pu e testa a rede.
void MontarMatrizes( int tipo)	Para o estudo de fluxo de potência ótimo, monta a matriz Hessiana.

### 5.5.3 Classe CMICT e CFPT

Na classe CMICT (Figura 5.33) é resolvido o fluxo de potência trifásico pelo método de injeção de correntes trifásico – MICT conforme apresentado no capítulo 3 e

na classe CFPT (Figura 5.34) o fluxo de potência trifásico é resolvido utilizando a formulação polar trifásica.

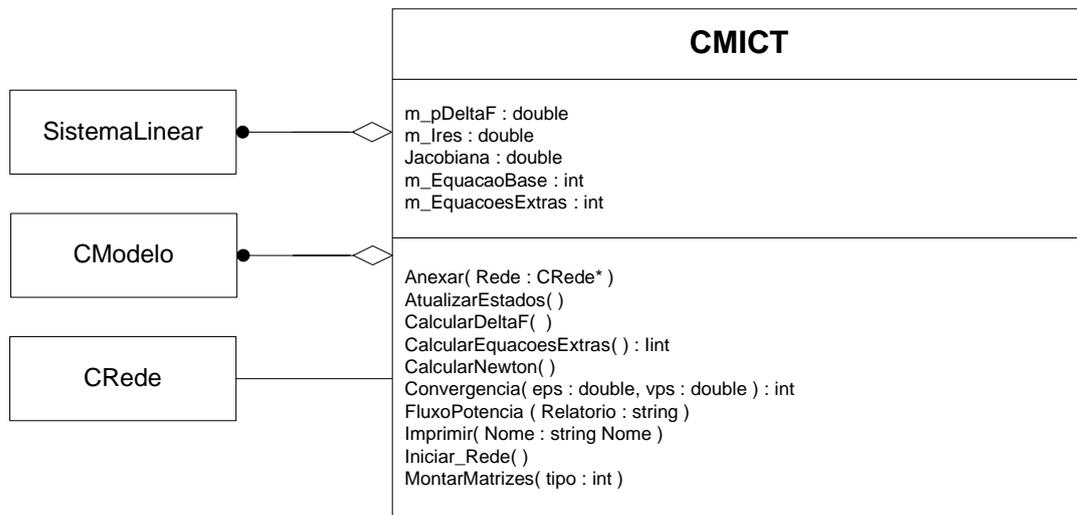


Figura 5.33 – Classe CMICT

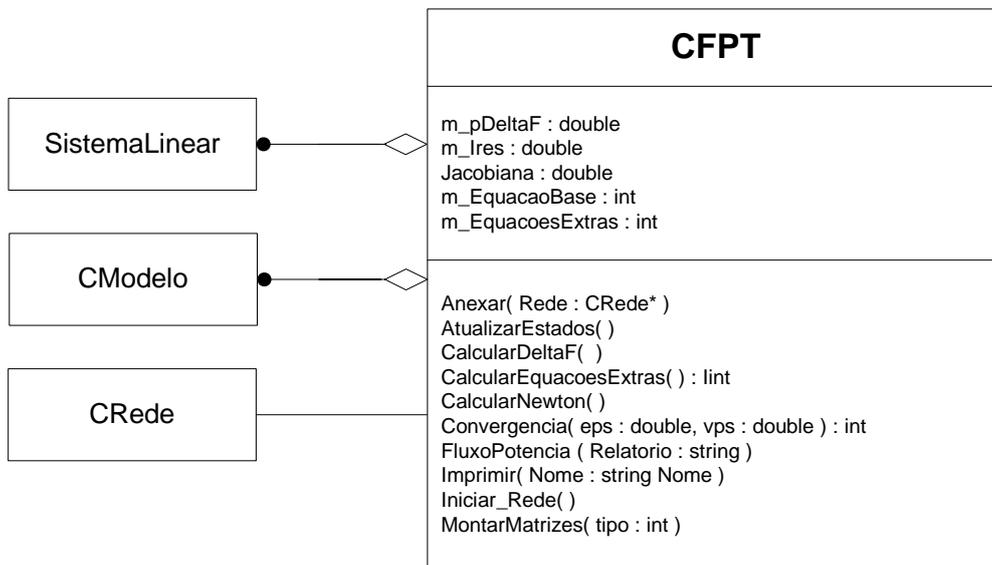


Figura 5.34 – Classe CFPT

Como pode ser observado pelos diagramas das classes CMICT e CFPT, os nomes dos dados e funções membros são iguais as das classes, CMIC e CFP, por isto as tabelas de descrição das variáveis não serão apresentadas.

### 5.5.4 Classe CMICTO e CFPTO

Na classe CMICTO (Figura 5.35) é resolvido o fluxo de potência ótimo trifásico pelo método de injeção de correntes trifásico – MICT conforme apresentado no capítulo 3 e na classe CFPTO (Figura 5.36) o fluxo de potência ótimo trifásico é resolvido utilizando a formulação polar trifásica.

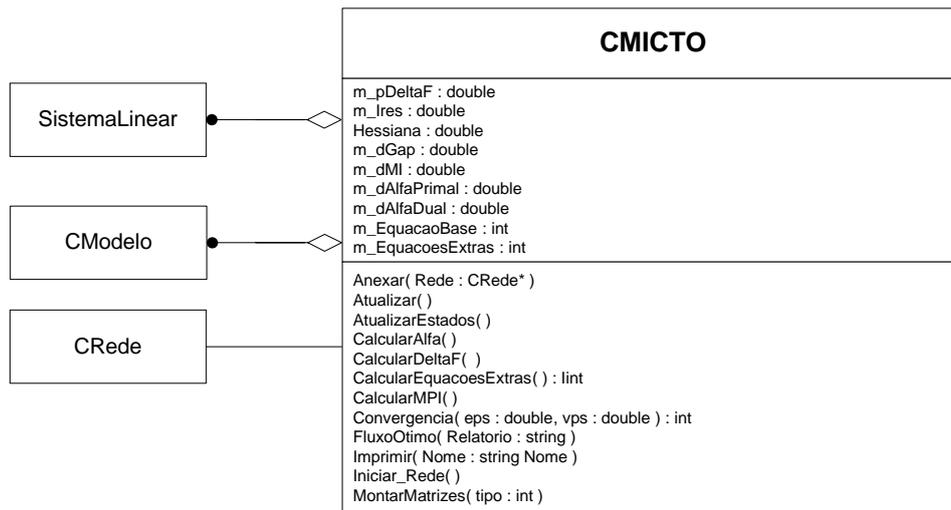


Figura 5.35 – Classe CMICTO

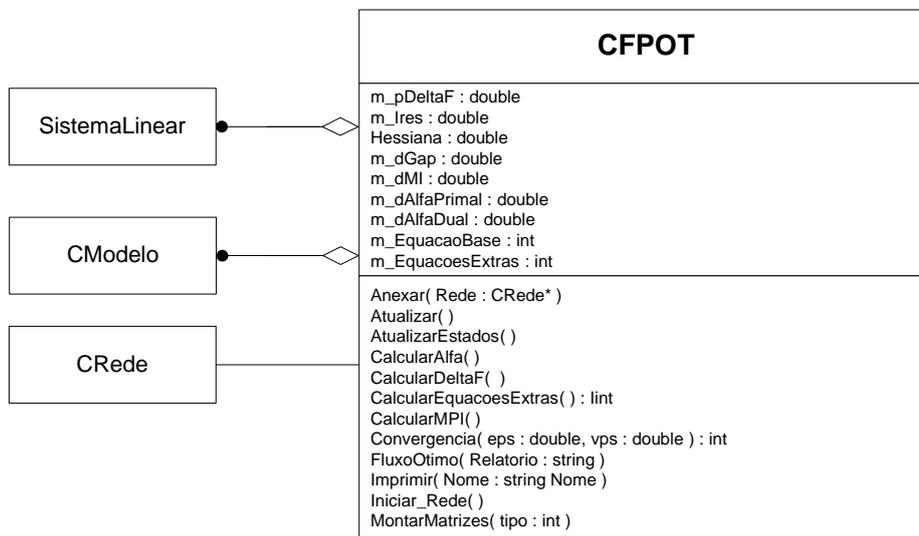


Figura 5.36 – Classe CFPTO

Sendo estas classes referentes a uma das maiores contribuições deste trabalho, as funções membros serão detalhadas e também será apresentado o diagrama funcional.

Ambas as classes possuem as mesmas características funcionais, por isto serão tratadas em conjunto.

Os dados membros são apresentados na Tabela 5.41 e as funções membros na Tabela 5.42.

**Tabela 5.41 – Dados membros de CMICTO e CFPOT**

<b>Dados Membros</b>	<b>Descrição</b>
Matriz<double>* m_pDeltaF	Armazena o vetor independente, em forma blocada.
Matriz<double>* m_pRes	Auxiliar no cálculo da geração de potência das máquinas.
SistemaLinear Hessiana	Armazena a matriz Hessiana em blocos 6x6.
int m_EquacaoBase	Apontador para a barra de referência angular.
int m_nEquacaoExtras	Equações extras devido a controles e restrições.
double m_dAlfaPrimal	Armazena o valor do alfa primal.
double m_dAlfaDual	Armazena o valor do alfa dual.
double m_dGap	Armazena o valor do GAP.
double m_dMI	Armazena o valor do MI.

**Tabela 5.42 – Funções membros de CMICTO e CFPOT**

<b>Função Membros</b>	<b>Descrição</b>
void AnexarRede( Crede* rede )	Determina para qual rede será calculado o fluxo de potência ótimo.
void Atualizar()	Atualiza as variáveis primais e duais, precisa do passo primal e dual calculado.
void AtualizarEstados()	Atualiza, se necessário, o estado das variáveis. Chamada ao final do processo iterativo. Calcula as perdas, correste de ramos e outras grandezas para serem apresenta ao usuário.
void CalcularAlfa()	Calcula os alfas primais e duais de cada iteração, esta função deve ser chamada antes da função Atualizar().
void CalcularDeltaF()	Monta o vetor independente ou vetor das condições de otimalidade ( <b>b</b> ).
int CalcularEquacoesExtras()	Calcula o número de equações de controles e restrições para dimensionar o sistema linear.
void CalcularMPI()	Calcula a solução do sistema linear utilizando fatoração LDU.
int Convergência(double eps, double vps)	Testa se os valores do vetor independente estão dentro da tolerância especificada.
int FluxoOtimo( string Relatorio )	Executa o fluxo de potência ótimo e escreve os resultados em um arquivo em disco.

Int Imprimir(string Relatorio )	Imprime o relatório do fluxo de potência convergido.
void IniciarRede()	Transforma, se necessário, os dados para pu e testa a rede.
void MontarMatrizes( int tipo)	Para o estudo de fluxo de potência ótimo, monta a matriz Hessiana.

#### 5.5.4.1 Fluxo de Dados dos Métodos de Otimização

O diagrama de fluxo de dados para as diversas metodologias, mostrando o relacionamento completo entre as classes, é dado pela Figura 5.37.

Exemplificando:

1. Os dados do “Arquivo de Entrada” são armazenados em CComponente (CBarra, CLinha,...) através da função Serialize() da Classe CRede. Neste arquivo encontram-se quais restrições e função objetivo serão consideradas. A tipo da função objetivo a ser utilizada é armazenada em CDadosGerais.
2. Em “Montar Rede” a rede é configurada conforme a seção 5.4.1 através da chamada da função ConfigurarRede().
3. Todos os dados e possíveis configurações são gerenciados e armazenadas em CRede.
4. Em “Metodologia” é instaciado um objeto da classe CMICTO, na qual é associada um objeto da classe CRede, então o objeto CMICTO utiliza as informações da CRede e a classe SistemaLinear para resolver o problema do fluxo de potência ótimo. A metodologia para a solução do FPO é apresentada na seção 3.8.
5. Após o processo terminado, o novo estado do sistema é atualizado no objeto da classe CRede e gravada em “Arquivo de Saída”.

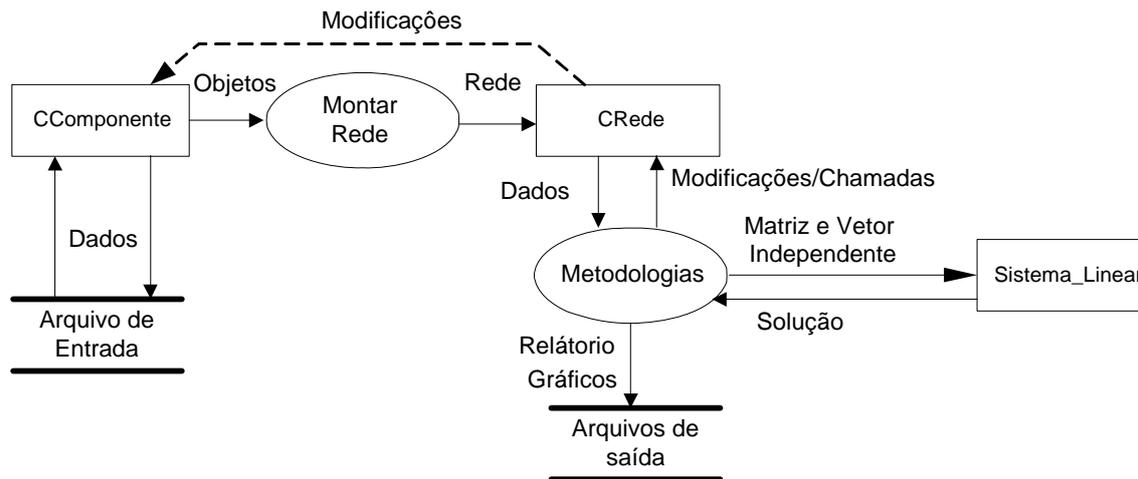


Figura 5.37 – Diagrama funcional

### 5.5.5 Classe Harm

A classe Harm tem como objetivo o estudo de harmônicos em sistemas elétricos de potência, ela vem sendo desenvolvida junto ao CEPEL para o programa HarmZs (VARRICCHIO, 2003). Ela possibilita o cálculo de resposta em frequência, distorções harmônicas, correntes de penetração autovalores, autovetores, modelos reduzidos e sensibilidade. Apesar desta classe utilizar a plataforma desenvolvida neste trabalho, os modelos matemáticos estão fora do escopo deste trabalho e maiores detalhes não serão apresentados.

### 5.5.6 Classe CMICQ

Nesta classe é solucionado o fluxo de potência a quatro condutores (PENIDO, 2004). Como os modelos e métodos estão fora do escopo deste trabalho os detalhes de implementação não serão apresentados.

## 5.6 Modelos de Componentes

Os modelos matemáticos dos componentes para cada metodologia de análise dos sistemas elétricos são armazenados a parte. Sendo que todos derivam de apenas uma

única classe base como por ser observado na Figura 5.38, o motivo de todos derivarem de uma classe base é a padronização de chamadas.

Para acessar um modelo, deve-se utilizar a função PegarModelo(Ccomponente \*pCmp, int estrutura, Ctransferencia<Matriz>& Bloco) da classe de modelos requerida.

O primeiro parâmetro refere-se ao elemento que será modelado, o segundo ao tipo do modelo (Hessiana, Jacobiana, etc.) e terceiro aos dados serão armazenados. A classe Aplicações refere ao conjunto das metodologias desenvolvidas conforme apresentado na Figura 5.28.

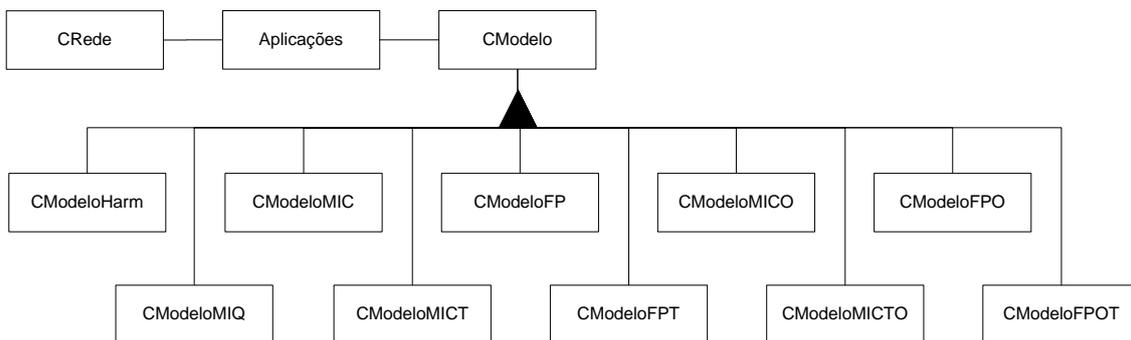


Figura 5.38 – Diagramas de modelos

As classes de modelos são muito parecidas, o que muda são as formulações matemáticas. Na Figura 5.39 é apresentado o diagrama genérico da classe CModelo

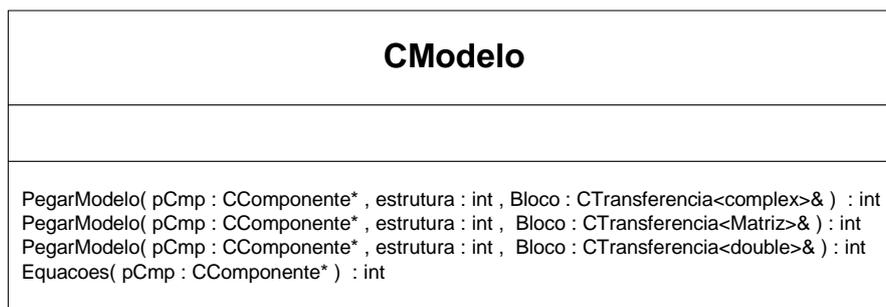


Figura 5.39 – Classe de CModelo

## Capítulo 6 Conclusões

### 6.1 Considerações Finais

Neste trabalho apresentou-se um FPO para sistemas monofásicos e um FPO para sistemas trifásicos, utilizando como ferramenta de otimização o método primal-dual de Pontos Interiores e o método de Newton-Raphson para solucionar o conjunto de equações de injeção de corrente em coordenadas retangulares. O número de equações a serem resolvidas para a formulação monofásica, a cada iteração, é de 6 vezes o número de barras do sistema e para a formulação trifásica é de 18 vezes o número de barras. Ambas as metodologias foram implementadas em duas plataformas, em Matlab e em C++.

A ferramenta de FPO monofásica proposta que utiliza equações de injeção de corrente em coordenadas retangulares apresentou um desempenho computacional inferior ao obtido com a ferramenta que utiliza equações de potência em coordenadas polares. Por outro lado, a ferramenta trifásica de FPO proposta utilizando equações de injeção de correntes trifásicas em coordenadas retangulares (MICTO), apresentou um desempenho computacional superior quando comparada com a ferramenta que utiliza equações de potência em coordenadas polares trifásicas. Isto se deve ao fato da grande facilidade de representação das linhas de transmissão e outros elementos série no MICTO.

A grande vantagem da metodologia trifásica proposta é possibilitar uma modelagem mais completa do sistema, por exemplo inclusão de mútuas, modelagens mais completas de transformadores, representação de diversas configurações de cargas e outras, e ainda permitir a verificação de todas as grandezas elétricas das fases de forma direta. Isto evita simplificações que podem levar a erros nas análises, que se tornam maiores quanto mais severos forem os desequilíbrios do sistema, conforme apresentado nos exemplos do Capítulo 4.

A metodologia trifásica desenvolvida (MICTO) apresenta ainda como vantagem, em relação a outros métodos, a facilidade de formação e atualização da matriz Jacobiana, a qual grande parte de seus elementos são iguais aos seus correspondentes da matriz admitância nodal. Em consequência, a matriz Hessiana é ainda mais esparsa que a Jacobiana.

Outras vantagens deste método em relação a outros algoritmos é que não existem restrições quanto à topologia da rede, como por exemplo, limitações de representação de anéis nos sistemas.

Em todos os casos analisados utilizou-se as metodologias MICTO e FPOT, obtendo-se sempre os mesmos resultados.

O fluxo de potência ótimo desenvolvido pode ser utilizado para análise de sistemas equilibrados ou desequilibrados, seja em redes radiais ou reticuladas, com cargas ou ramais monofásicos, bifásicos e trifásicos. Também pode ser utilizado em sistemas de transmissão, subtransmissão e possui especial potencial para análise de sistemas de distribuição, além de ser robusto e eficiente computacionalmente, inclusive para sistemas de grande porte.

A metodologia proposta foi incorporada em uma plataforma na forma apresentada no Capítulo 5. A implementação foi realizada adotando-se a Modelagem Orientada a Objetos (MOO), obtendo-se flexibilidade, desempenho computacional, modularidade e interface gráfica amigável, utilizando a linguagem de programação Visual C++. A ferramenta criada é bastante flexível, podendo-se incorporar facilmente novos modelos e características dos sistemas elétricos. Ao permitir-se, com a MOO, a reutilização de códigos, tem-se diretamente vantagens em termos da redução dos custos e do tempo necessário para a incorporação de novas metodologias e novos modelos de componentes nos aplicativos, além da vantagem de se aproveitar códigos já bem definidos e testados. Ao se as características da MOO gera-se um programa computacional de melhor qualidade.

O MICTO é a principal contribuição deste trabalho e consiste da junção do método de injeções de correntes trifásicas com o método dos pontos interiores primal-dual utilizando modelagem orientada a objetos para a otimização de sistemas elétricos trifásicos. Com isto, o MICTO apresenta-se como uma ferramenta eficiente para a solução de fluxo de potência ótimo em sistemas elétricos, e pode servir como base para o desenvolvimento de outras aplicações que necessitem a representação de sistemas trifásicos e análise ótima de sistemas desequilibrados.

## 6.2 Trabalhos Futuros

O trabalho apresentado representa um início da investigação da otimização de sistemas elétricos trifásicos. O MICTO ainda permite melhoramentos e pode também ser utilizado como base para desenvolvimentos futuros de outras aplicações em que seja necessária a otimização de sistemas. Algumas sugestões de trabalhos são descritas a seguir:

- Testar efetivamente outros tipos de atualizações do parâmetro barreira, do passo primal e dual;
- Desenvolver um processo de otimização mista para tratar variáveis discretas, como abertura de chaves;
- Modelar e implementar os elos de corrente contínua, bem como os retificadores e inversores;
- Modelar e implementar os novos equipamentos FACTS que estão sendo incorporados aos sistemas de distribuição, como UPFC, IPFC, HVDC-Light, etc;
- Modelar e implementar os transformadores de três enrolamentos e autotransformadores;
- Modelar e implementar funções objetivo especiais para sistemas trifásicos dependendo da necessidade do usuário;
- Modelar outros tipos de cargas como por exemplo os motores de indução;
- Representar neutros e aterramentos para uma análise mais fiel de sistemas de distribuição.

## **Apêndice A Modelagem Orientada a Objetos**

### **A.1 Introdução**

Com o aperfeiçoamento contínuo dos dispositivos computacionais, os modelos matemáticos implementados apresentam mais conceitos e nuances do mundo real, tornando assim os programas maiores e mais complexos. Com isso, as técnicas de modelagem estruturada começaram a apresentar falta de recursos tanto para o desenvolvimento do projeto quanto para a implementação e a manutenção. Desta forma surgiu um novo conceito de modelagem; “A Modelagem Baseada em Objetos”.

Este novo conceito apresenta um modo de estudar os problemas reais, no qual, combina-se a estrutura (dados) do projeto com o comportamento dos dados (funções) em uma única entidade, o objeto. Isto quer dizer que o software é organizado como vários objetos separados que incorporam tanto a estrutura quanto o comportamento de dados, diferenciando da modelagem estruturada onde existe pouca vinculação entre estrutura e o comportamento dos dados. Essa abordagem possui várias características, que serão detalhadas neste capítulo.

**Identidade:** São os objetos em si. No mundo real o objeto pode ser uma mesa, uma sala, um prédio ou um planeta, dependendo do que estamos estudando e como se encaixa esta entidade no conceito estudado. Por exemplo, considere que um decorador utilizará a mesa como um objeto dentro de um universo (sistema) sala, porém um engenheiro poderá utilizar o objeto sala dentro do universo prédio, que por sua vez será como um objeto dentro do universo cidade, ou seja, os objetos são relativos ao sistema estudado.

No mundo real um objeto limita-se apenas em existir, mas, em linguagem de programação este objeto deve ser identificado por um identificador ou um endereço de memória ou um atributo exclusivo, sendo estas referências uniformes e independentes do conteúdo dos mesmos. Estes objetos em linguagem de programação podem ser tanto a representação de um objeto real, como um transformador que possui dados como material, dimensão, cor e outros dados que forem julgados pertinentes ao projeto em estudo, como também podem ser uma entidade puramente computacional, listas encadeadas, árvores binárias, etc.

**Classificação:** É o conceito de classe, significa que todos os objetos que possuem mesma estrutura e mesmo comportamento são agrupados em uma classe, então podemos ter vários objetos transformadores distintos entre si, mas todos eles pertencem a uma mesma classe. A classe é uma abstração que descreve as implicações relevantes ao estudo de um caso.

Uma determinada classe possui vários objetos individuais, por isto dizemos que cada objeto é uma instância de sua classe, mas cada um deles possui seu próprio valor para cada atributo e um identificador único, compartilhando apenas o mesmo nome de atributos e operações.

**Polimorfismo:** São métodos (funções) que possuem o mesmo nome, mas tem implementações completamente diferentes, dependendo do objeto que sofre a ação. Assim classes podem ser melhoradas ou criadas sem que seja necessário reescrever todo o código já existente, mas apenas criando novas funções.

**Herança:** É o refinamento de uma determinada classe em um relacionamento hierárquico. Uma classe *CElemento* é criada, possuindo atributos e métodos próprios. Desta classe é derivada uma outra classe que possui todos os atributos e métodos da superclasse (Classe Pai), com as características exclusivas adicionais. Pode-se, por exemplo, derivar a classe *CElementos* para uma classe *CLinha*, que possui todas as características da classe *CElementos*, mais outros dados, métodos ou polimorfismo de funções julgadas relevantes.

## ***A.2 Características da Tecnologia Baseada em Objetos***

Um sistema baseado em objetos deve possuir características que possam ser utilizadas de modo eficiente e abrangente visando uma melhor reutilização do código e facilidade de projetos. Abaixo são descritas as características mais importantes.

**Abstração:** Consiste em focalizar os aspectos de interesse de um objeto e ignorar as propriedades irrelevantes ao problema estudado, ou seja, tratar um objeto pelas características essenciais ao problema estudado. A abstração é utilizada no projeto, não na implementação. Desta forma evita-se o comprometimento prematuro com detalhes

que dificultaria a análise do projeto como um todo, e não dando assim, importância a fatos ainda não compreendidos. O projeto deve ser independente da linguagem de programação.

**Encapsulamento:** Chamado de ocultamento de informação, onde cada objeto deve separar seus dados e funções de forma que as informações relativas ao funcionamento interno estejam ocultas e as externas sejam acessíveis por outros objetos. Isto impede que um programa se torne dependente de pequenas alterações de modo que cause grandes efeitos de propagação. Como exemplo tem-se objeto Caixa Eletrônico, onde várias características estão encapsuladas como o cofre interno e circuitos, e apresentam interfaces externas como o teclado e monitor para se relacionar com o objeto Pessoa.

**Combinação de Dados e Comportamento:** Esta característica, também conhecida como polimorfismo, permite a adoção de nomes iguais para funções de mesma natureza, porém de classes distintas. Por exemplo, ao se desenvolver um software para desenhos geométricos não utilizando MOO, precisa-se de funções com nomes distintos para cada figura que for desenhada na tela (`Desenhe_Circulo`, `Desenhe_Quadrado`, etc.). Utilizando o polimorfismo, todo objeto possui a seu próprio método de desenho, onde este nome é comum a todos (`Desenhe`) e basta convocar este método para que o próprio compilador, com base nas classes, tome implicitamente a decisão que qual método irá chamar. O uso de polimorfismo propicia que manutenção, reaproveitamento e implementação de novos recursos tornam-se mais simples.

**Compartilhamento:** Consiste na reutilização do código por herança. Evita a redundância de informações, a redução de trabalho de codificação e apresenta uma maior clareza no desenvolvimento, pois mostra que diferentes operações são na realidade a mesma. O desenvolvimento baseado em objetos não somente permite que as informações sejam compartilhadas em uma aplicação, como também oferece a possibilidade da reutilização de modelos e códigos em projetos futuros.

**Estrutura de Objetos:** Especifica o que um objeto é, e não como ele é utilizado, pois sua estrutura permanece mais estável durante o desenvolver de um projeto, enquanto, seu uso é altamente dependente dos detalhes de implementação.

### **A.3 A Representação dos Modelos Utilizando UML**

A construção de um determinado processo sem que antes seja realizado um estudo detalhado pode trazer grandes prejuízos econômicos e financeiros. Desta forma deve-se estudar e modelar o projeto para que os riscos sejam avaliados. No caso de modelos computacionais, o projeto consiste em uma abstração do que se deseja construir, ou seja, a partir daí pode-se compreender melhor o fenômeno, ressaltando seus pontos relevantes e abstraindo as irrelevâncias.

Para descrever uma aplicação computacional, existem metodologias que padronizam processos de modo simples, diagramas. Sendo a *Unified Modeling Language* (UML) a metodologia mais aceita.

Na UML cada diagrama representa uma perspectiva do modelo (aplicação), mostrando aspectos particulares do sistema e dando enfoque a ângulos e níveis de abstrações diferentes para que uma figura completa do sistema seja construída. Os principais diagramas da UML são:

- Diagramas de Classe:
- Diagramas de Interação entre Classes
- Diagramas de Estado
- Diagramas de Interface e Arquitetura

#### **A.3.1 Diagramas de Classe**

O diagrama de classe oferece modelos sobre o aspecto chave em orientação a objetos, a representação da classe/Objeto.

##### **Representação de Classe (Objeto)**

A representação de uma classe na UML é um retângulo dividido em três partes: O nome da classe, os atributos (dados membros) e operações ou métodos (funções membros), como pode ser observado na Figura A.1. A sintaxe utilizada nestes compartimentos é independente da linguagem a ser utilizada para a programação. A

UML aceita uma forma simplificada de representação de classes, onde apenas o retângulo com o nome da classe é representado (Figura A.2).

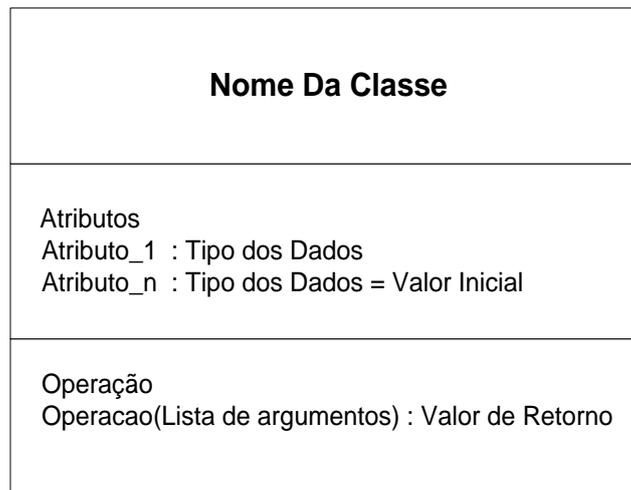


Figura A.1 – Diagrama completo de uma classe

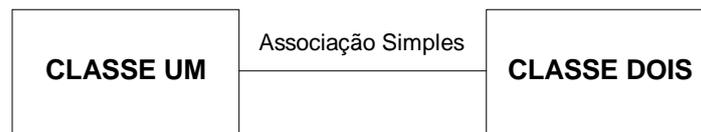


Figura A.2 – Diagrama simplificado de uma classe

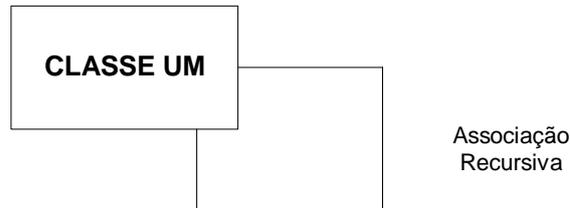
### A.3.2 Diagramas de Interação entre Classes

São os relacionamentos que ligam classes/objetos entre si criando relações lógicas entre estas entidades. A seguir serão apresentados os relacionamentos e suas representações gráficas.

*Associação:* São as ligações físicas ou conceituais entre os objetos, uma associação normalmente determina interações entre objetos. Numa implementação computacional, uma associação é referida como um ponteiro de um objeto para o outro. A Figura A.3 ilustra os diagramas das associações simples e recursiva.



(a)



(b)

Figura A.3 – Diagrama de Associações entre Classes: (a) Simples; (b) Recursiva

*Dependência:* Indica um relacionamento, onde uma classe cliente é dependente de outra, mas não existem ligações físicas ou estruturais entre os objetos. O diagrama desta associação é apresentado na Figura A.4.

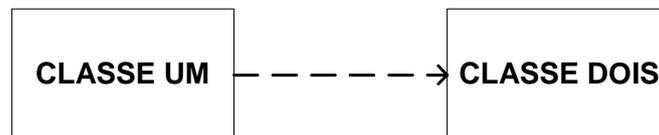


Figura A.4 – Diagrama de dependências

*Herança:* São abstrações para o compartilhamento de semelhanças entre as classes, ao mesmo tempo em que suas diferenças são preservadas. O relacionamento de uma classe (denominada Superclasse) com uma ou mais refinações dela (denominadas Subclasses) é denominado generalização ou herança. A herança/generalização pode ser transmitida a um número arbitrário de níveis. A instância de uma subclasse é simultaneamente uma instância de todas as superclasses a ela, ou seja, herda todas as características e operações de suas superclasses além de acrescentar atributos e operações próprias. Um diagrama de herança é apresentado na Figura A.5.

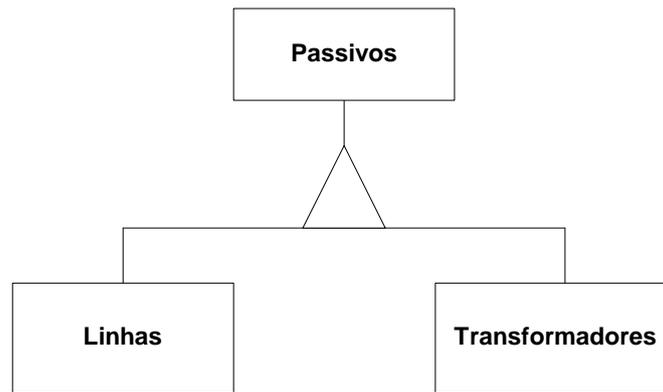


Figura A.5 – Diagramas de herança

*Agregação:* É uma relação na qual um objeto (componente) faz parte de um outro objeto (agregado), ou seja, utiliza-se um objeto para criar um novo objeto, onde seus dados membros são outros objetos. Um relacionamento de agregação é definido como o relacionamento de uma classe com uma outra classe (componente), logo uma estrutura com vários tipos de componentes equivale a muitos relacionamentos de agregação. Uma agregação pode ser observada na Figura A.6.

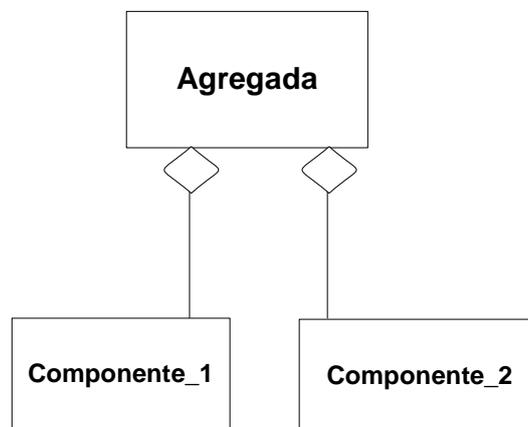


Figura A.6 – Diagrama de agregação

### **Pacotes**

São macro entidades que agrupam vários objetos e seus relacionamentos definindo um conceito mais amplo e geral. A Figura A.7 mostra um diagrama de pacotes.

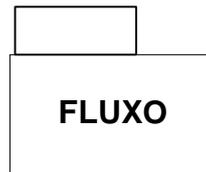


Figura A.7 – Diagrama de pacotes

### ***Templates***

São definidas como um conjunto de operações que podem ser aplicadas para vários tipos de dados. Um objeto *template* (classe, função ou estrutura) tem seu tipo de dados definido através de parâmetros. Quando feito isto, o compilador gera automaticamente o código correto para o tipo de dados utilizado, ou seja, quando criada uma “*template*” esta pode automaticamente sobrecarregar a si mesma. Uma *template* é definida conforme a Figura A.8.

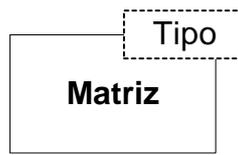


Figura A.8 – Diagrama de template

## Apêndice B Fluxo Ótimo e Método dos Pontos Interiores

### B.1 Introdução ao Fluxo Ótimo

O fluxo de potência ótimo (FPO) tem como objetivo a otimização da condição estática da operação de um sistema elétrico de potência (SEP). O FPO visa otimizar (maximizar ou minimizar) um determinado critério (função objetivo) sujeito a restrições (equações e inequações). Em comparação com o fluxo de potência convencional (FP), pode-se pensar no FPO como uma ferramenta de síntese enquanto o FP é utilizado para análise. Com o FP obtém-se a solução da rede elétrica (tensões nodais e valores de controles) para uma determinada condição de operação (cargas e gerações) ao contrário do FPO em que existem infinitas condições de operações para atender uma demanda de tal modo que otimize a função objetivo escolhida.

### B.2 Formulação do Problema

A formulação geral de um problema de otimização consiste na minimização/maximização de um índice desempenho, representado analiticamente por uma função e sujeito a um conjunto de equações e inequações, que representam o comportamento e as limitações físicas do sistema (denominadas restrições). Em termos matemáticos este problema pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } f(\mathbf{z}) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \mathbf{h}(\mathbf{z}) = 0 \\
 & \mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq 0 \\
 & \mathbf{z}_{\min} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_{\max}
 \end{aligned}
 \quad \text{Sendo:} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

Onde:

$\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^{m+n}$  é o vetor de variáveis do problema, sendo o vetor  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  representando as variáveis de estado e o vetor  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$  representando as variáveis de controle.

$f : \mathfrak{R}^{m+n} \rightarrow \mathfrak{R}$  é o índice de desempenho ou função objetivo;

$\mathbf{h} : \mathfrak{R}^{m+n} \rightarrow \mathfrak{R}^p$  são as restrições de igualdade;

$\mathbf{g} : \mathfrak{R}^{m+n} \rightarrow \mathfrak{R}^q$  são as restrições de desigualdade e

$[\mathbf{z}_{\min} \quad \mathbf{z}_{\max}]$  são os limites das variáveis a serem otimizadas.

### **B.3 Formulação do Fluxo de Potência Ótimo**

O problema de FPO pode ser definido como sendo a determinação do estado de uma rede elétrica que otimiza uma determinada função objetivo e satisfaz um conjunto de restrições físicas e operacionais, podendo ser estas, restrições de igualdade ou desigualdade.

As restrições de igualdade correspondem basicamente às equações de balanço de potência ativa e reativa em cada barra da rede e, dependendo da aplicação, há outras restrições auxiliares. As desigualdades são restrições funcionais, como o monitoramento de fluxo em linhas, e as restrições de canalização que representam limites físicos e operacionais do sistema. Nas próximas seções deste apêndice, será aprofundada a descrição de cada elemento que compõe o FPO.

#### **B.3.1 Variáveis do Fluxo de Potência Ótimo**

Se a tensão complexa em cada barra for conhecida, é possível calcular qualquer outra quantidade da rede. Por esta razão, a tensão é considerada uma variável de otimização. Comutadores de transformadores LTC e defasadores, gerações de potência ativa e reativa, entre outros, também são considerados variáveis de otimização do sistema.

Além das variáveis, funções também podem ser otimizadas, como exemplo, tem-se os limites máximos de transmissão em uma linha, custo operação mínimo do sistema com a inclusão de reatância séries ou em derivação, alocação de perdas entres outros.

#### **B.3.2 Restrições de Igualdade**

O número de restrições de igualdade do FPO é inicialmente igual ao número de equações da rede (Equações de Kirchoff). Adicionalmente, podem ser incluídas no

problema do FPO restrições de igualdade que modelam características particulares de operação de rede, como fixação da tensão em determinado valor (valores fixos) ou a curva de capacidade de um gerador (combinação de variáveis do sistema).

### **B.3.3 Restrições de Desigualdade**

As restrições de desigualdade são as limitações impostas a uma variável, ou a um conjunto de variáveis do sistema. Em relação à sua função, elas podem ser classificadas em três grandes grupos:

#### **Restrições Físicas**

São incluídas neste grupo as restrições impostas pelas limitações de capacidade dos componentes do sistema. Exemplos destas limitações podem ser: limites máximo e mínimo de geração de potência ativa e reativa das unidades geradoras, limites nos valores dos “tapes”, limites de fluxo nas linhas, etc.

#### **Restrições Operacionais**

A operação do sistema impõe limites que devem ser considerados na modelagem. Alguns exemplos destas restrições são: limites mínimos e máximos da magnitude da tensão nas barras, limites originados pela taxa de tomada de carga das unidades geradoras, defasamento angular máximo entre barras, etc.

#### **Restrições de Segurança**

As restrições de segurança representam um grupo de restrições relacionadas a um conjunto de contingências determinadas pela análise de segurança.

Em relação à sua representação matemática no problema de otimização, as restrições podem ser divididas em duas classes:

#### **Restrições Simples ou de Canalizações**

Este tipo de restrições consiste de limites nas variáveis de otimização, representados por  $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$ .

### Restrições Funcionais

Este tipo de restrição é modelado como uma função das variáveis de otimização, representados por  $g(\mathbf{z}) \leq g_{\max}$ . Em geral, este tipo de restrição impõe condições mais severas à convergência dos métodos de otimização do que as restrições simples.

Neste trabalho, todas as restrições funcionais serão transformadas em uma restrição de igualdade e uma restrição de canalização com o objetivo de facilitar a implementação computacional.

Como exemplo, a restrição  $g(\mathbf{z}) \leq g_{\max}$ , pode ser transformada em uma restrição do tipo  $g_{\min} \leq g(\mathbf{z}) \leq g_{\max}$ .

Então se cria uma variável auxiliar  $y$  de modo que  $y = g(\mathbf{z})$ , e as novas equações são:

$$y - g(\mathbf{z}) = 0 \quad \text{Restrição de Igualdade}$$

$$g_{\min} \leq y \leq g_{\max} \quad \text{Restrição de Canalização}$$

### B.3.4 Função Objetivo

A função objetivo representa a variável ou conjunto de variáveis que se deseja otimizar. As classes de funções objetivos que serão apresentadas incluem funções lineares ou não-lineares. Dependendo do tipo de aplicação, o problema pode ser formulado combinando uma ou mais funções objetivo ao mesmo tempo.

- Mínimo Custo de Geração Ativa
- Mínimo Custo de Geração Reativa
- Mínima Alocação de Potência Ativa
- Mínima Alocação de Potência Reativa
- Mínima Perda Ativa
- Mínimo Corte de Carga
- Mínimo Desvio do Ponto de Operação

São as funções objetivos mais utilizadas.

### B.3.5 Função Lagrangeana

A função lagrangeana é um artifício matemático utilizado para transformar um problema de otimização sujeito a apenas restrições de igualdade em um problema de otimização irrestrita. Este artifício consiste em adicionar as restrições de igualdade à função objetivo multiplicada por um valor  $\lambda$  (multiplicador de Lagrange), formando uma nova função objetivo, a qual é denominada de função Lagrangeana.

Seja um problema de otimização com apenas restrições de igualdade:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } f(\mathbf{z}) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \mathbf{h}(\mathbf{z}) = 0 \\
 & \mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq 0 \\
 & \mathbf{z}_{\min} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_{\max}
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Transformando as restrições de desigualdade em restrições de igualdade fazendo uso do vetor de variáveis auxiliares  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } f(\mathbf{z}) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \mathbf{h}(\mathbf{z}) = 0 \\
 & \mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0 \\
 & \mathbf{y}_{\min} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y}_{\max} \\
 & \mathbf{z}_{\min} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_{\max}
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Fazendo  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$  e acrescentado  $\mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0$  no conjunto das restrições  $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = 0$

tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } f(\mathbf{z}) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \mathbf{h}(\mathbf{z}) = 0 \\
 & \mathbf{z}_{\min} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_{\max}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Transformando as restrições de canalização em restrições de igualdade por uso dos vetores de variáveis de folga  $\mathbf{s}_{low}$  e  $\mathbf{s}_{up}$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } f(\mathbf{z}) \\
 & \text{s.a.} \\
 & \mathbf{h}(\mathbf{z}) = 0 \\
 & \mathbf{z} - \mathbf{s}_{low} - \mathbf{z}_{min} = 0 \\
 & \mathbf{z} + \mathbf{s}_{up} - \mathbf{z}_{max} = 0 \\
 & \mathbf{s}_{low} \geq 0 \\
 & \mathbf{s}_{up} \geq 0
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

A função lagrangeana deste problema é definida pela equação (B.6).

$$L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) = \frac{f(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\lambda}^t \mathbf{h}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\pi}_{low}(\mathbf{z} - \mathbf{s}_{low} - \mathbf{z}_{min}) + \boldsymbol{\pi}_{up}(\mathbf{z} + \mathbf{s}_{up} - \mathbf{z}_{max})}{\mu \log(\mathbf{s}_{low}) + \mu \log(\mathbf{s}_{up})} \tag{B.6}$$

Onde:

$\mu$  e a função logarítmica serão apresentados na seção B.3.6.

### B.3.6 As Funções Penalidade

Também conhecido como método das funções de penalidade externa, este é um procedimento que visa aproximar problemas de otimização com restrições, por problemas de otimização sem restrições. Essa aproximação é obtida, adicionando-se à função objetivo uma parcela que estabelece uma grande penalidade pela violação das restrições. Esta parcela está associada a um parâmetro  $\mu$  que determina quão severa é a penalidade, se as restrições forem violadas.

#### A Idéia do Método de Barreira

Também conhecido como métodos de pontos interiores ou penalidade interna, onde o conjunto  $S$  (ou região factível) deve ter interior não vazio. Neste caso, ao contrário do método de penalização, as aproximações sucessivas das soluções são sempre estritamente factíveis, visto que os pontos são interiores ao conjunto viável. Nesse método a função objetivo é modificada acrescentando um termo funcional que tende ao infinito quando o ponto se aproxima da fronteira do conjunto factível.

Resumindo, seja:

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(\mathbf{z}) \\ & \text{s.a.} \\ & \mathbf{h}(\mathbf{z}) = 0 \\ & \mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq 0 \end{aligned} \tag{B.7}$$

A função lagrangeana deste problema é definida por (B.8):

$$L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\lambda}^t \cdot \mathbf{h}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\pi}^t \cdot [\mathbf{g}(\mathbf{z}) - \mathbf{s}] + \mu \log(\mathbf{s}) \tag{B.8}$$

### **B.3.7 As Condições de Otimalidade**

As equações de otimalidade de primeira ordem são também conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) (Wright, 1997). Estas condições devem ser satisfeitas em qualquer ponto ótimo restrito, local ou global, dos problemas de programação linear e da maioria dos problemas de programação não-linear. As condições de KKT formam a base para o desenvolvimento de muitos algoritmos computacionais e são utilizados como critérios de convergência de vários métodos. Estas equações dão as condições necessárias para que o ponto seja considerado candidato a ótimo ou mínimo local (CASTRONOUVO, 2001).

Para o problema de otimização não-linear representado pela função Lagrangeana (B.6) a qual apresenta restrições de igualdade e desigualdade, as condições de KKT degeneradas ( $\mu \neq 0$  e  $\mu \rightarrow 0$  no processo iterativo) tem como objetivo evitar problemas numéricos no método de Newton para a resolução do sistema linear (CASTRONOUVO, 2001 e podem ser expressas conforme (B.9).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_{low}}{\partial L} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\pi}_{up}}{\partial L} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_{low}}{\partial L} \\ \frac{\partial \mathbf{s}_{up}}{\partial L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(\mathbf{z}) + \nabla \boldsymbol{\lambda}' \mathbf{h}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\pi}_{low} + \boldsymbol{\pi}_{up} \\ \mathbf{h}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{z} - \mathbf{s}_{low} - \mathbf{z}_{min} \\ \mathbf{z} + \mathbf{s}_{up} - \mathbf{z}_{max} \\ [1]\boldsymbol{\mu} - \mathbf{s}_{low} \boldsymbol{\pi}_{low} \\ [1]\boldsymbol{\mu} + \mathbf{s}_{up} \boldsymbol{\pi}_{up} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.9})$$

### B.3.8 A Matriz Hessiana

A matriz Hessiana consiste nas derivadas de segunda ordem de determinada função  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A equação (B.10) mostra como se deve proceder para obter a matriz Hessiana.

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

## B.4 Introdução ao Método dos Pontos Interiores

Desde dos anos 40 quando Dantzig publicou o “Método SIMPLEX” para a resolução de problemas de programação linear, inúmeros aperfeiçoamentos e novas técnicas foram desenvolvidas para a resolução destes problemas. Apesar do Método SIMPLEX ser muito eficiente na prática, ele apresenta complexidade exponencial, ou seja, o número de iterações cresce exponencialmente com o número de variáveis do problema LATOREE (1995).

Durante muitos anos foi questionada a existência de um algoritmo polinomial para resolver os problemas de programação linear. A resposta veio com a apresentação de Khachiyam de um algoritmo que utiliza o método do elipsóide, com complexidade  $(n^4L)$  operações, onde  $L$  é uma medida do tamanho do problema. Este resultado, apesar de teoricamente significativo, não teve implicações práticas. O método de Khachiyam não era competitivo com o SIMPLEX em problemas reais.

Mais recentemente, KARMARKAR (1984) publicou um algoritmo de “Métodos Projetados” o qual requer  $(n^{3.5}L)$  operações aritméticas e  $(nL)$  iterações no pior caso. O algoritmo de Karmarkar é significativamente diferente do método SIMPLEX de George Dantzig que resolve um programa de programação linear começando com um ponto extremo ao longo do limite da possível região e salta para um outro ponto extremo vizinho melhor ao longo do limite e para, finalmente, em um ponto extremo ótimo. O método projetado de Karmarkar raramente visita pontos extremos antes que um ponto ótimo seja alcançado, ou seja, o algoritmo acha soluções viáveis no interior do polígono, evitando desta forma a complexidade combinatória derivada dos vértices da solução. Devido ao procedimento de solução proposto por Karmarkar, este método é chamado de “Método dos Pontos Interiores” (MPI).

O MPI tenta encontrar uma solução no centro do polígono, achando uma direção melhor para o próximo movimento no sentido de obter a solução ótima para o problema. Escolhendo os passos corretamente, uma solução ótima é alcançada depois de algumas iterações. Embora para encontrar uma direção de movimento a abordagem de MPI requiera um tempo computacional maior do que o método SIMPLEX tradicional, menos iterações serão requeridas pelo MPI para alcançar a solução ótima. Desta forma, a abordagem de MPI tornou-se uma ferramenta competitiva com o método SIMPLEX e portanto tem atraído a atenção da comunidade de otimização.

A Figura B.1 ilustra como os dois métodos se aproximam da solução ótima. Neste exemplo, o algoritmo de MPI requer aproximadamente a mesma quantidade de iterações como o método SIMPLEX. Porém, para um problema de grande porte, este método requereria somente uma fração do número de repetições exigido pelo método SIMPLEX, sem contar que o método MPI trabalha perfeitamente com não-linearidades.

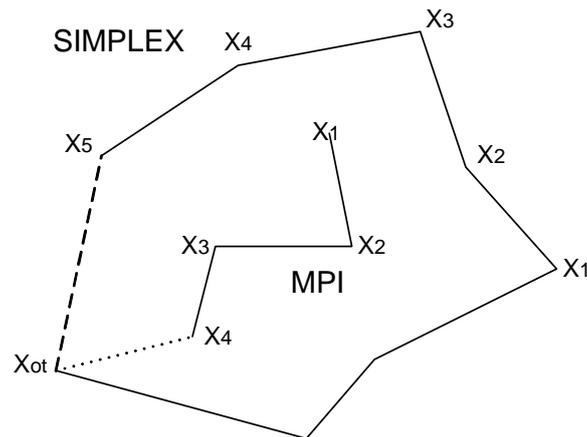


Figura B.1 – MPI x Simplex

### B.4.1 Solução das Equações Não-Lineares

O método de Newton é largamente utilizado por causa de sua simplicidade e grande velocidade. Este é um método iterativo para a resolução de sistemas de equações do tipo  $\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$ . A idéia principal consiste em determinar aproximações sucessivas do conjunto de funções  $\mathbf{f}$  através tangentes (derivadas) que apontam para a direção de decrescimento. Na equação (B.11) é apresentado o método de Newton.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)} \quad (\text{B.11})$$

Para solucionar o sistema linear resultante (B.12) utiliza-se a fatoração LDU (ARAUJO, 2000) por ser um processo eficiente computacionalmente.

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}_k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad (\text{B.12})$$

### B.4.2 Montagem do Sistema Linear Completo

Substituindo as equações degeneradas de KKT (B.6) no método de Newton (B.12) para a solução de equações não lineares, encontra-se um sistema linear da forma expressa em (B.13).

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{z} \\
 \lambda \\
 \boldsymbol{\pi}_{low} \\
 \boldsymbol{\pi}_{up} \\
 \mathbf{s}_{low} \\
 \mathbf{s}_{up}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathbf{z} \quad \lambda \quad \boldsymbol{\pi}_{low} \quad \boldsymbol{\pi}_{up} \quad \mathbf{s}_{low} \quad \mathbf{s}_{up} \\
 \left[ \begin{array}{cc|cc|cc}
 \nabla^2 L(\mathbf{z}, \lambda, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) & \nabla \mathbf{h}(\mathbf{z})^t & 1 & 1 & & \\
 \nabla \mathbf{h}(\mathbf{z}) & & & & & \\
 \hline
 1 & & & & -1 & \\
 1 & & & & & 1 \\
 \hline
 & & -\mathbf{s}_{low} & & -\boldsymbol{\pi}_{low} & \\
 & & & \mathbf{s}_{up} & & \boldsymbol{\pi}_{up}
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \Delta \mathbf{z} \\
 \Delta \lambda \\
 \Delta \boldsymbol{\pi}_{low} \\
 \Delta \boldsymbol{\pi}_{up} \\
 \Delta \mathbf{s}_{low} \\
 \Delta \mathbf{s}_{up}
 \end{array}
 = -
 \begin{array}{c}
 \nabla L(\mathbf{z}, \lambda, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) \\
 \mathbf{h}(\mathbf{z}) \\
 \mathbf{z} - \mathbf{s}_{low} - \mathbf{z}_{min} \\
 \mathbf{z} + \mathbf{s}_{up} - \mathbf{z}_{max} \\
 [1]\mu - \mathbf{s}_{low} \boldsymbol{\pi}_{low} \\
 [1]\mu + \mathbf{s}_{up} \boldsymbol{\pi}_{up}
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{B.13}$$

Onde:

$$\nabla^2 L(\mathbf{z}, \lambda, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) = \nabla^2 f(\mathbf{z}) + \nabla^2 \lambda^t \mathbf{h}(\mathbf{z})$$

$$\nabla L(\mathbf{z}, \lambda, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) = \nabla f(\mathbf{z}) + \nabla \lambda^t \mathbf{h}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\pi}_{low} + \boldsymbol{\pi}_{up}$$

Supondo que as restrições de canalização serão sempre satisfeitas durante o processo iterativo (B.14), então:

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{z} - \mathbf{s}_{low} - \mathbf{z}_{min} = 0 \\
 \mathbf{z} + \mathbf{s}_{up} - \mathbf{z}_{max} = 0
 \end{array}
 \tag{B.14}$$

Reescrevendo as 4 últimas equações de (B.13) (B.15) e considerando (B.14), chega-se a (B.15)

$$\begin{array}{l}
 \Delta \mathbf{z} - \Delta \mathbf{s}_{low} = 0 \\
 \Delta \mathbf{z} + \Delta \mathbf{s}_{up} = 0 \\
 -\boldsymbol{\pi}_{low} \Delta \mathbf{s}_{low} - \mathbf{s}_{low} \Delta \boldsymbol{\pi}_{low} = -[1]\mu + \mathbf{s}_{low} \boldsymbol{\pi}_{low} \\
 \boldsymbol{\pi}_{up} \Delta \mathbf{s}_{up} + \mathbf{s}_{up} \Delta \boldsymbol{\pi}_{up} = -[1]\mu - \mathbf{s}_{up} \boldsymbol{\pi}_{up}
 \end{array}
 \tag{B.15}$$

Explicitando os  $\Delta \boldsymbol{\pi}s$  de (B.15), obtém-se (B.16):

$$\begin{array}{l}
 \Delta \boldsymbol{\pi}_{low} = \frac{([1]\mu - \mathbf{s}_{low} \boldsymbol{\pi}_{low} - \boldsymbol{\pi}_{low} \Delta \mathbf{s}_{low})}{\mathbf{s}_{low}} \\
 \Delta \boldsymbol{\pi}_{up} = \frac{(-[1]\mu - \mathbf{s}_{up} \boldsymbol{\pi}_{up} - \boldsymbol{\pi}_{up} \Delta \mathbf{s}_{up})}{\mathbf{s}_{up}}
 \end{array}
 \tag{B.16}$$

De (B.9) pode-se explicitar os valores  $\boldsymbol{\pi}$ .

$$\boldsymbol{\pi}_{low} = \frac{\mu}{\mathbf{s}_{low}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\pi}_{up} = -\frac{\mu}{\mathbf{s}_{up}}$$

Substituindo os valores encontrados em (B.14), (B.15) e (B.16), remonta o sistema linear de forma reduzida.

$$\begin{matrix} \mathbf{z} & & \lambda \\ \mathbf{z} & \left[ \nabla^2 L(\mathbf{z}, \lambda, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_{low} & \boldsymbol{\pi}_{up} \\ \mathbf{s}_{low} & \mathbf{s}_{up} \end{pmatrix} \right] & \nabla \mathbf{h}(\mathbf{z})^t \\ \lambda & \left[ \nabla \mathbf{h}(\mathbf{z}) \right] & \end{matrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{z} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla L(\mathbf{z}, \lambda, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}) + \mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{s}_{low} & \mathbf{s}_{up} \end{pmatrix} \\ \mathbf{h}(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Depois de calculado os valores  $\Delta \mathbf{x}$  e  $\Delta \lambda$  por (B.17) torna-se trivial calcular os incrementos  $\Delta \boldsymbol{\pi}$  e  $\Delta \mathbf{s}$  utilizando as equações (B.15) e (B.16).

### B.4.3 Atualização das Variáveis

O procedimento para atualização das variáveis de um FPO não é um processo trivial, pois em problemas de otimização as variáveis possuem limites, logo, o incremento calculado pelo sistema linear pode fazer com que determinada variável ultrapasse seu limite em uma iteração  $k$  do processo iterativo e isto não pode ocorrer, então, rotinas especiais para a atualização dos valores devem ser utilizadas.

Para resolver o problema de atualização de variáveis, os valores calculados não são incrementados diretamente em suas respectivas variáveis. Antes são calculados fatores para a otimização do passo (alfa) de modo que  $\mathbf{z} = \mathbf{z} + \alpha \Delta \mathbf{z}$ . Um fator  $\alpha_p$  limita as variáveis primais e um fator  $\alpha_d$  as duais e são calculados pelas expressões (B.18) e (B.19).

$$\alpha_p = \min \left[ \min_{\Delta s < 0} \frac{\mathbf{s}_{low}}{|\Delta \mathbf{s}_{low}|}, \min_{\Delta s < 0} \frac{\mathbf{s}_{up}}{|\Delta \mathbf{s}_{up}|}, 1 \right] \quad (\text{B.18})$$

$$\alpha_d = \min \left[ \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\boldsymbol{\pi}_{low}}{|\Delta \boldsymbol{\pi}_{low}|}, \min_{\Delta \pi < 0} \frac{\boldsymbol{\pi}_{up}}{|\Delta \boldsymbol{\pi}_{up}|}, 1 \right] \quad (\text{B.19})$$

#### Determinando o Passo

Uma determinada variável  $x$  está sempre a uma distância  $s_{low}$  de seu limite inferior  $x_{min}$  e a  $s_{up}$  de seu limite superior  $x_{max}$ , como pode ser visto na Figura B.2. Logo, se o

incremento for grande de tal forma que viole um dos limites, um de passo não unitário deve ser utilizado.

Por exemplo, quando o limite superior estiver para ser violado  $\Delta s_{up}$  será maior que  $s_{up}$ , com isto  $\frac{s_{up}}{\Delta s_{up}}$  será menor que 1 e o valor corresponderá ao passo máximo da variável  $x$  para que não ultrapasse o seu limite. Por conseguinte este valor é escolhido para ser o passo  $\alpha$ . Substituindo o passo e incrementando o valor de  $x$ , tem que  $x = x + \frac{s_{up}}{|\Delta s_{up}|} \Delta x$ , como  $\Delta s_{up} = -\Delta x$ , obtém  $x = x + s_{up}$ , ou seja, a variável é colocada diretamente em seu limite máximo (ela é multiplicada por um valor  $\sigma=0.99995$  a fim de evitar problemas numéricos).

As outras variáveis não ultrapassarão seus limites, pois o menor valor de  $\alpha$  é escolhido. Caso nenhum atinja a barreira o incremento poderá ser unitário. O mesmo raciocínio deve ser feito para as variáveis duais

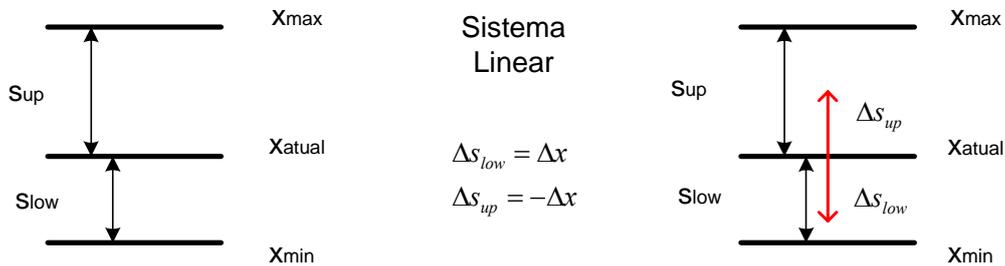


Figura B.2 – Atualização das variáveis

### Redutor de Passo

Para evitar problemas de divisões por zero ou singularidade da matriz Hessiana, um redutor de passo  $\sigma$  é utilizado, e possui um valor empírico de 0.99995. Com isto o próximo ponto da trajetória de convergência é calculado utilizando o conjunto de equações (B.20).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{z} &= \mathbf{z} + \sigma \cdot \alpha_p \cdot \Delta \mathbf{z} \\
 \boldsymbol{\lambda} &= \boldsymbol{\lambda} + \sigma \cdot \alpha_d \cdot \Delta \boldsymbol{\lambda} \\
 \boldsymbol{\pi} &= \boldsymbol{\pi} + \sigma \cdot \alpha_d \cdot \Delta \boldsymbol{\pi}
 \end{aligned}
 \tag{B.20}$$

As variáveis  $s$  não são atualizadas por este processo, pois na metodologia utilizada o  $s$  é sempre igual à distância do ponto atual para os seus limites. Ela é, portanto atualizada segundo a equação (B.14).

#### B.4.4 O Parâmetro de Perturbação $\mu$

Como expresso anteriormente, o parâmetro de perturbação  $\mu$  deve tender a zero na solução do processo iterativo. Assim, pode ser utilizada qualquer seqüência tal como mostrada em (B.21).

$$\beta = \{(\mu^1, \dots, \mu^k, \dots, \mu^0) : \mu^0 < \mu^k, \mu^0 < \delta\} \quad (\text{B.21})$$

Onde  $\delta$  é um número suficientemente pequeno.

Nos métodos Primais-Duais, a equação (B.9) fornece uma forma de cálculo do parâmetro  $\mu$ . Na solução, o produto de cada variável de folga  $s_i$  pelo o multiplicador de Lagrange correspondente a  $\pi_i$  deve ser nulo, como expressa a equação de KKT original (B.1). No processo iterativo, o produto  $\mu_i = s_i \pi_i$  fornece uma medida da distância do ponto corrente ao ponto candidato a ótimo (B.9). Esta medida é distinta para cada desigualdade. Na prática um único parâmetro  $\mu$  é utilizado e na maioria dos trabalhos na área (GRANVILLE, 1994, WRIGHT, 1997) seu valor é calculado como sendo a média dos produtos  $s_i \pi_i$  em todas as restrições de desigualdade (B.22).

$$\mu = \beta \cdot \frac{\mathbf{s}_{low}^t \cdot \boldsymbol{\pi}_{low} - \mathbf{s}_{up}^t \cdot \boldsymbol{\pi}_{up}}{2n} \quad (\text{B.22})$$

Onde:

$n$  é o numero de restrições de canalizações.

$\beta$  é o parâmetro de combinação das direções, seu valor pode variar entre  $[0,1]$ , sendo que um valor muito utilizando na pratica é  $\beta=1$ .

O parâmetro  $\beta$  modifica a direção de busca utilizada em cada iteração e o seu valor pode reduzir a quantidade de iterações do FPO; em CASTRONOUVO (2001) são apresentados vários métodos para o cálculo do parâmetro  $\beta$ .

### **B.4.5 Algoritmo de Solução**

O algoritmo de solução resultante dos passos descritos anteriormente pode ser resumido como segue:

1. Inicialização das variáveis primais e duais.
2. Montagem da função Lagrangeana.
3. Cálculo dos termos da matriz Hessiana e vetor independente.
4. Resolução do sistema de equações.
5. Escolha dos passos primais e duais.
6. Atualização das variáveis do problema.
7. Atualização do parâmetro barreira.
8. Teste de otimalidade:

Se  $(\mu < \varepsilon, |\mathbf{h}(\mathbf{z})| < \varepsilon)$  PARE  
Senão VOLTE ao passo 2.

## Apêndice C FPOT – Potência em Coordenadas Polares

### C.1 Introdução

Neste apêndice será apresentado uma nova metodologia para o cálculo do fluxo de potência ótimo trifásico utilizando equações de potência em coordenadas polares, e por conseguinte as variáveis de estado serão o módulo da tensão  $v$  e o ângulo de tensão  $\theta$ , possibilitando o acesso direto a estas variáveis. Em contra partida a utilização de injeções de potência em coordenadas polares tornam as equações mais complexas que na formulação trifásica por injeções de correntes em coordenadas retangulares devido às impedâncias mútuas entre as fases.

Neste apêndice serão apresentadas de modo sucinto as contribuições dos:

- Linhas
- Cargas em estrela aterrada
- Máquinas

### C.2 Linhas de Transmissão

A expressão da potência injetada nos terminais  $k$  e  $m$  das linhas de transmissão são dados por (C.1).

$$\begin{aligned} S_k^s &= V_k^s I_{km}^{s*} \\ S_m^s &= -V_m^s I_{km}^{s*} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Onde as correntes injetadas  $I_{km}$  nas fases  $a$ ,  $b$  e  $c$  são dadas por (C.21).

$$\begin{aligned} I_{km}^a &= y^{aa}(V_k^a - V_m^a) + y^{ab}(V_k^b - V_m^b) + y^{ac}(V_k^c - V_m^c) + y_{der,k}^a V_k^a \\ I_{km}^b &= y^{ba}(V_k^b - V_m^b) + y^{bb}(V_k^b - V_m^b) + y^{bc}(V_k^c - V_m^c) + y_{der,k}^b V_k^b \\ I_{km}^c &= y^{ca}(V_k^a - V_m^a) + y^{cb}(V_k^b - V_m^b) + y^{cc}(V_k^c - V_m^c) + y_{der,k}^c V_k^c \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Escrevendo a potência injetada na fase  $a$  de forma completa, tem-se (C.3):

$$S_k^a = v_k^a e^{j\theta_k^a} \left[ y^{aa} (v_k^a e^{j\theta_k^a} - v_m^a e^{j\theta_m^a}) + y^{ab} (v_k^b e^{j\theta_k^b} - v_m^b e^{j\theta_m^b}) + y^{ac} (v_k^c e^{j\theta_k^c} - v_m^c e^{j\theta_m^c}) \right]^* + v_k^a e^{j\theta_k^a} y_{der,k}^a v_k^a e^{-j\theta_k^a} \quad (C.3)$$

Expandindo a equação (C.3), fazendo  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\text{sen}(\theta)$  e assumindo que  $\theta_{12}^{ab} = \theta_1^a - \theta_2^b$ , encontra-se (C.4).

$$\begin{aligned} (S_k^a)^* &= y^{aa} (v_k^a v_k^a \cos(\theta_{kk}^{aa}) + jv_k^a v_k^b \text{sen}(\theta_{kk}^{aa}) - v_k^a v_m^b \cos(\theta_{mk}^{aa}) - jv_k^a v_m^b \text{sen}(\theta_{mk}^{aa})) \\ &+ y^{ab} (v_k^a v_k^b \cos(\theta_{kk}^{ba}) + jv_k^a v_k^b \text{sen}(\theta_{kk}^{ba}) - v_k^a v_m^b \cos(\theta_{mk}^{ba}) - jv_k^a v_m^b \text{sen}(\theta_{mk}^{ba})) \\ &+ y^{ac} (v_k^a v_k^c \cos(\theta_{kk}^{ca}) + jv_k^a v_k^c \text{sen}(\theta_{kk}^{ca}) - v_k^a v_m^c \cos(\theta_{mk}^{ca}) - jv_k^a v_m^c \text{sen}(\theta_{mk}^{ca})) \\ &+ y_{der}^a (v_k^a)^2 \end{aligned} \quad (C.4)$$

Utilizando as igualdades trigonométricas  $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$  e  $\text{sen}(\theta) = -\text{sen}(-\theta)$  para calcular as potências injetadas P e Q da fase  $a$ , tem-se então as equações (C.5) e (C.6).

$$\begin{aligned} P_k^a &= g^{aa} v_k^a v_k^a \cos(\theta_{kk}^{aa}) + b^{aa} v_k^a v_k^a \text{sen}(\theta_{kk}^{aa}) - g^{aa} v_k^a v_m^b \cos(\theta_{km}^{aa}) - b^{aa} v_k^a v_m^a \text{sen}(\theta_{km}^{aa}) \\ &+ g^{ab} v_k^a v_k^b \cos(\theta_{kk}^{ab}) + b^{ab} v_k^a v_k^b \text{sen}(\theta_{kk}^{ab}) - g^{ab} v_k^a v_m^b \cos(\theta_{km}^{ab}) - b^{ab} v_k^a v_m^b \text{sen}(\theta_{km}^{ab}) \\ &+ g^{ac} v_k^a v_k^c \cos(\theta_{kk}^{ac}) + b^{ac} v_k^a v_k^c \text{sen}(\theta_{kk}^{ac}) - g^{ac} v_k^a v_m^c \cos(\theta_{km}^{ac}) - b^{ac} v_k^a v_m^c \text{sen}(\theta_{km}^{ac}) \\ &+ g_{der}^a (v_k^a)^2 \end{aligned} \quad (C.5)$$

$$\begin{aligned} Q_k^a &= -b^{aa} v_k^a v_k^a \cos(\theta_{kk}^{aa}) + g^{aa} v_k^a v_k^a \text{sen}(\theta_{kk}^{aa}) + b^{aa} v_k^a v_m^b \cos(\theta_{km}^{aa}) - g^{aa} v_k^a v_m^a \text{sen}(\theta_{km}^{aa}) \\ &- b^{ab} v_k^a v_k^b \cos(\theta_{kk}^{ab}) + g^{ab} v_k^a v_k^b \text{sen}(\theta_{kk}^{ab}) + b^{ab} v_k^a v_m^b \cos(\theta_{km}^{ab}) - g^{ab} v_k^a v_m^b \text{sen}(\theta_{km}^{ab}) \\ &- b^{ac} v_k^a v_k^c \cos(\theta_{kk}^{ac}) + g^{ac} v_k^a v_k^c \text{sen}(\theta_{kk}^{ac}) + b^{ac} v_k^a v_m^c \cos(\theta_{km}^{ac}) - g^{ac} v_k^a v_m^c \text{sen}(\theta_{km}^{ac}) \\ &- b_{der}^a (v_k^a)^2 \end{aligned} \quad (C.6)$$

Também devem ser calculadas as expressões das potências  $P_k^b, P_k^c, P_m^a, P_m^b, P_m^c$  e  $Q_k^b, Q_k^c, Q_m^a, Q_m^b, Q_m^c$ . Como pode ser observado pelas equações (C.5) e (C.6), a determinação de todas as derivadas de primeira e segunda ordem torna-se um processo cansativo e sujeito a vários erros. Assim, adotou-se um tratamento matricial para o cálculo das potências P<sup>s</sup> e Q<sup>s</sup> e suas derivadas. O tratamento matricial é simples de ser implementado e será apresentado a seguir.

Expandido a equação apresentada em (C.3) para os terminal  $k$  e  $m$ , tem-se (C.7).

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k^s &= \mathbf{V}_k^s (\mathbf{y}_{km}^s)^* (\mathbf{v}_{km}^s)^* + \mathbf{V}_k^s (\mathbf{y}_{der,k}^s)^* \mathbf{v}_k^s \\ \mathbf{S}_m^s &= -\mathbf{V}_m^s (\mathbf{y}_{km}^s)^* (\mathbf{v}_{km}^s)^* + \mathbf{V}_m^s (\mathbf{y}_{der,m}^s)^* \mathbf{v}_m^s \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Reescrevendo (C.7) em forma matricial encontra-se (C.8).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_k^a \\ S_k^b \\ S_k^c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v_k^a e^{j\theta_k^a} & & \\ & v_k^b e^{j\theta_k^b} & \\ & & v_k^c e^{j\theta_k^c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{aa} & y^{ab} & y^{ac} \\ y^{ba} & y^{bb} & y^{bc} \\ y^{ca} & y^{cb} & y^c \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} v_k^a e^{-j\theta_k^a} & -v_m^a e^{-j\theta_m^a} \\ v_k^b e^{-j\theta_k^b} & -v_m^b e^{-j\theta_m^b} \\ v_k^c e^{-j\theta_k^c} & -v_m^c e^{-j\theta_m^c} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} v_k^a e^{j\theta_k^a} & & \\ & v_k^b e^{j\theta_k^b} & \\ & & v_k^c e^{j\theta_k^c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{der,k}^a & & \\ & y_{der,k}^b & \\ & & y_{der,k}^c \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} v_k^a e^{-j\theta_k^a} \\ v_k^b e^{-j\theta_k^b} \\ v_k^c e^{-j\theta_k^c} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_m^a \\ S_m^b \\ S_m^c \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} v_m^a e^{j\theta_m^a} & & \\ & v_m^b e^{j\theta_m^b} & \\ & & v_m^c e^{j\theta_m^c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{aa} & y^{ab} & y^{ac} \\ y^{ba} & y^{bb} & y^{bc} \\ y^{ca} & y^{cb} & y^c \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} v_k^a e^{-j\theta_k^a} & -v_m^a e^{-j\theta_m^a} \\ v_k^b e^{-j\theta_k^b} & -v_m^b e^{-j\theta_m^b} \\ v_k^c e^{-j\theta_k^c} & -v_m^c e^{-j\theta_m^c} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} v_m^a e^{j\theta_m^a} & & \\ & v_m^b e^{j\theta_m^b} & \\ & & v_m^c e^{j\theta_m^c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{der,m}^a & & \\ & y_{der,m}^b & \\ & & y_{der,m}^c \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} v_m^a e^{-j\theta_m^a} \\ v_m^b e^{-j\theta_m^b} \\ v_m^c e^{-j\theta_m^c} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando (C.8), monta-se a função Lagrangeana referente as linhas de transmissão conforme apresentado na equação (C.9).

$$\begin{aligned} L_{lin}(\mathbf{z}) &= \\ &\Re(S_k^a) \cdot \lambda_{p,k}^a + \Re(S_k^b) \cdot \lambda_{p,k}^b + \Re(S_k^c) \cdot \lambda_{p,k}^c + \\ &\Im(S_k^a) \cdot \lambda_{q,k}^a + \Im(S_k^b) \cdot \lambda_{q,k}^b + \Im(S_k^c) \cdot \lambda_{q,k}^c + \\ &\Re(S_m^a) \cdot \lambda_{p,m}^a + \Re(S_m^b) \cdot \lambda_{p,m}^b + \Re(S_m^c) \cdot \lambda_{p,m}^c + \\ &\Im(S_m^a) \cdot \lambda_{q,m}^a + \Im(S_m^b) \cdot \lambda_{q,m}^b + \Im(S_m^c) \cdot \lambda_{q,m}^c \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Reescrevendo (C.9) de forma compacta encontra-se (C.10).

$$L = \lambda_{p,k} \Re(\mathbf{S}_k) + \lambda_{q,k} \Im(\mathbf{S}_k) + \lambda_{p,m} \Re(\mathbf{S}_m) + \lambda_{q,m} \Im(\mathbf{S}_m) \quad (\text{C.10})$$

Onde os valores de  $\lambda$  são dados por (C.11) e de  $\mathbf{S}$  por (C.8).

$$\begin{aligned} \lambda_{p,k} &= [\lambda_{p,k}^a \quad \lambda_{p,k}^b \quad \lambda_{p,k}^c] \\ \lambda_{q,k} &= [\lambda_{q,k}^a \quad \lambda_{q,k}^b \quad \lambda_{q,k}^c] \\ \lambda_{p,m} &= [\lambda_{p,m}^a \quad \lambda_{p,m}^b \quad \lambda_{p,m}^c] \\ \lambda_{q,m} &= [\lambda_{q,m}^a \quad \lambda_{q,m}^b \quad \lambda_{q,m}^c] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Na equação (C.12) apresenta-se as contribuições das linhas de transmissão para a matriz Hessiana.

	$\theta_k^a$	$\lambda_{p,k}^a$	$\theta_k^b$	$\lambda_{p,k}^b$	$\theta_k^c$	$\lambda_{p,k}^c$	$v_k^a$	$\lambda_{q,k}^a$	$v_k^b$	$\lambda_{q,k}^b$	$v_k^c$	$\lambda_{q,k}^c$	$\theta_m^a$	$\lambda_{p,m}^a$	$\theta_m^b$	$\lambda_{p,m}^b$	$\theta_m^c$	$\lambda_{p,m}^c$	$v_m^a$	$\lambda_{q,m}^a$	$v_m^b$	$\lambda_{q,m}^b$	$v_m^c$	$\lambda_{q,m}^c$
$\theta_k^a$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{p,k}^a$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$\theta_k^b$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{p,k}^b$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$\theta_k^c$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{p,k}^c$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$v_k^a$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{q,k}^a$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$v_k^b$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{q,k}^b$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$v_k^c$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{q,k}^c$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$\theta_m^a$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{p,m}^a$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$\theta_m^b$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{p,m}^b$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$\theta_m^c$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{p,m}^c$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$v_m^a$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{q,m}^a$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$v_m^b$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{q,m}^b$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	
$v_m^c$	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
$\lambda_{q,m}^c$	y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y		y	

(C.12)

Os termos  $x$  representam que ambas as derivadas (primeira e segunda) são referentes as variáveis primais do problema e os termos  $y$  representam que uma derivada é feita sobre uma variável primal e a outra é feita sobre a variável dual. Sendo a função Lagrangeana composta de funções transcendentais e quadráticas é complicado o cálculo de forma genérica, por isto será utilizado as derivadas matriciais como mostrado a seguir.

• **Cálculo dos Termos  $x$**

Existem 144 termos tipo  $x$  sendo 12 na diagonal principal e 132 fora da diagonal, que são simétricos, portanto, apenas 66 devem ser calculados.

Estes termos representam a diferenciação da função Lagrangeana em relação as variáveis grafadas acima e a esquerda da matriz apresentada na equação (C.12).

Como pode ser observado apenas os termos representativos da potência aparente ( $S$ ) na equação (C.10) possuem variáveis primais, por conseguinte apenas estes serão diferenciados, equação (C.13) apresenta uma fórmula genérica para o cálculo dos termos  $x$ . Onde  $x_1$  e  $x_2$  representam as variáveis primais do problema e são dados por  $x_1, x_2 = \{v_k^s \quad \theta_k^s \quad v_m^s \quad \theta_m^s\}$ .

$$x = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \lambda_{p,k} \Re \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}_k}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \lambda_{q,k} \Im \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}_k}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \lambda_{p,m} \Re \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}_m}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \lambda_{q,m} \Im \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}_m}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (\text{C.13})$$

Onde  $x_1$  representa a derivada em relação a variável primal que se encontra grafada a esquerda da matriz Hessiana apresentada na equação (C.12) e  $x_2$  representa a variável primal grafada acima da mesma matriz Hessiana.

A derivadas de segunda ordem das matrizes  $\mathbf{S}_k$  e  $\mathbf{S}_m$  são das pelas as expressões mostradas em (C.14) e (C.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{S}_k}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial^2 \mathbf{V}_k}{\partial x_1 \partial x_2} (y_{km})^* (\mathbf{v}_{km})^* + \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial x_1} (y_{km})^* \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{km}}{\partial x_2} \right)^* + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial x_2} (y_{km})^* \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{km}}{\partial x_1} \right)^* + \mathbf{V}_k (y_{km})^* \left( \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{km}}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^* \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{S}_m}{\partial x_1 \partial x_2} &= - \frac{\partial^2 \mathbf{V}_m}{\partial x_1 \partial x_2} (y_{km})^* (\mathbf{v}_{km})^* - \frac{\partial \mathbf{V}_m}{\partial x_1} (y_{km})^* \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{km}}{\partial x_2} \right)^* + \\ &- \frac{\partial \mathbf{V}_m}{\partial x_2} (y_{km})^* \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{km}}{\partial x_1} \right)^* - \mathbf{V}_m (y_{km})^* \left( \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{km}}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^* \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

• **Cálculo dos Termos y**

Existem 288 termos do tipo  $y$ , como estes são simétricos 144 devem ser calculados. Como as variáveis duais são lineares, estes termos são simples de calcular, pois as derivadas em relação as variáveis duais são unitárias.

Estes termos representam a diferenciação da função Lagrangeana em relação a uma variável primal e a uma variável dual da matriz Hessiana. Como pode ser observado, só existirá derivada para os termos em que  $\lambda_1$  é igual a variável primal que multiplica a função. A expressão dos termos  $y$  é dada por (C.16).

$$y = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial \lambda_1} = \frac{\partial \lambda_{p,k}}{\partial \lambda_1} \Re \left( \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \lambda_{q,k}}{\partial \lambda_1} \Im \left( \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \lambda_{p,m}}{\partial \lambda_1} \Re \left( \frac{\partial \mathbf{S}_m}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \lambda_{q,m}}{\partial \lambda_1} \Im \left( \frac{\partial \mathbf{S}_m}{\partial x_1} \right) \quad (\text{C.16})$$

Onde  $\lambda_1 = \{ \lambda_{p,k} \quad \lambda_{q,k} \quad \lambda_{p,m} \quad \lambda_{q,m} \}$  e  $x_1 = \{ v_k^s \quad \theta_k^s \quad v_m^s \quad \theta_m^s \}$ .

Os valores das derivadas de primeira ordem de  $\mathbf{S}$  são dadas pela equação (C.17). Os termos nulos representam as derivadas de segunda ordem das variáveis duais, que, como são lineares suas derivadas são nulas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial x} (y_{km})^* (\mathbf{v}_{km})^* + \mathbf{V}_k (y_{km})^* \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{km}}{\partial x} \right)^* \\ &+ \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial x} (y_{der,k})^* (\mathbf{v}_k)^* + \mathbf{V}_k (y_{der,k})^* \left( \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial x} \right)^* \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial x} (y_{km})^* (\mathbf{v}_{km})^* + \mathbf{V}_k (y_{km})^* \left( \frac{\partial \mathbf{v}_{km}}{\partial x} \right)^* + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial x} (y_{der,k})^* (\mathbf{v}_k)^* + \mathbf{V}_k (y_{der,k})^* \left( \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial x} \right)^* \end{aligned}$$

As contribuições das linhas de transmissão para o vetor independente são apresentadas na equação (C.18).

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_k^a \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^a \\ \tilde{\theta}_k^b \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^b \\ \tilde{\theta}_k^c \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^c \\ \tilde{v}_k^a \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^a \\ \tilde{v}_k^b \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^b \\ \tilde{v}_k^c \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^c \\ \vdots \\ \tilde{\theta}_m^a \\ \tilde{\lambda}_{p,m}^a \\ \tilde{\theta}_m^b \\ \tilde{\lambda}_{p,m}^b \\ \tilde{\theta}_m^c \\ \tilde{\lambda}_{p,m}^c \\ \tilde{v}_m^a \\ \tilde{\lambda}_{q,m}^a \\ \tilde{v}_m^b \\ \tilde{\lambda}_{q,m}^b \\ \tilde{v}_m^c \\ \tilde{\lambda}_{q,m}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ \Re(S_k^a) \\ z \\ \Re(S_k^b) \\ z \\ \Re(S_k^c) \\ z \\ \Im(S_k^a) \\ z \\ \Im(S_k^b) \\ z \\ \Im(S_k^c) \\ \vdots \\ z \\ \Re(S_m^a) \\ z \\ \Re(S_m^b) \\ z \\ \Re(S_m^c) \\ z \\ \Im(S_m^a) \\ z \\ \Im(S_m^b) \\ z \\ \Im(S_m^c) \end{bmatrix} \tag{C.18}$$

• **Cálculo dos Termos z**

Os termos z apresentados no cálculo do vetor independente são calculados utilizando a equação apresentada em (C.19). Onde  $x_1 = \{v_k^s \ \theta_k^s \ v_m^s \ \theta_m^s\}$ .

$$z = \frac{\partial L}{\partial x_1} = \lambda_{p,k} \Re \left( \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial x_1} \right) + \lambda_{q,k} \Im \left( \frac{\partial \mathbf{S}_k}{\partial x_1} \right) + \lambda_{p,m} \Re \left( \frac{\partial \mathbf{S}_m}{\partial x_1} \right) + \lambda_{q,m} \Im \left( \frac{\partial \mathbf{S}_m}{\partial x_1} \right) \quad (\text{C.19})$$

### C.3 Cargas

Existem vários modelos de cargas publicados na literatura (IEEE Task Force Load Representation, 1995), sendo o modelo exponencial suficientemente completo para estudos estáticos. Outro modelo bastante utilizado é o modelo ZIP, que em linhas gerais é uma particularidade do modelo exponencial. Na Figura C.1 apresenta-se um diagrama genérico de um modelo de carga variante com a tensão. Por ser este um tópico complexo, algumas considerações serão feitas antes de apresentar os modelos trifásicos de carga.

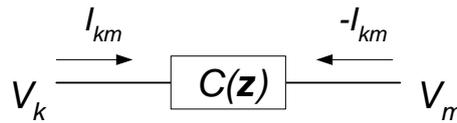


Figura C.1 – Carga variante com a tensão entre dois pontos

#### C.3.1 Consideração Sobre a Modelagem da Carga

A notação  $C(\mathbf{z})$  representa uma carga que pode ser modelada em função das variáveis de estado do sistema elétrico. Por exemplo, para o modelo de carga em potência tem-se  $C(\mathbf{z}) = S = P + jQ$ . Para representar uma carga utilizando-se o modelo exponencial tem-se a equação (C.20)

$$C(\mathbf{z}) = |V|^\alpha P + j|V|^\beta Q \quad (\text{C.20})$$

A potência complexa  $S$  da carga injetada em uma fase  $s$  de uma barra  $k$  é dada pela equação (C.21).

$$S_k^s = V_k^s I_k^{s*} \quad (\text{C.21})$$

Caso ambas as tensões terminais sejam diferentes de zero, a corrente injetada na fase  $s$  da barra  $k$  é calculada pela equação (C.22).

$$I^{s*} = \frac{C(\mathbf{z})}{V_k^s - V_k^t} \quad (\text{C.22})$$

Logo, a potência líquida injetada nos terminais  $s$  e  $t$  de uma carga barra  $k$  (conexão em delta) são obtidas substituindo-se conforme a equação (C.23).

$$\begin{aligned} S_k^s &= V_k^s \frac{C(\mathbf{z})}{V_k^s - V_k^t} \\ S_k^t &= -V_k^t \frac{C(\mathbf{z})}{V_k^s - V_k^t} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Como pode ser observado em(C.23), a representação da potência injetada é mais complexa que as formulações usuais (MONTICELLI, 1984). Isto se deve porque os modelos de cargas sempre consideram uma das tensões terminal nula. Mas isto não pode ser utilizado em sistemas trifásicos, pois existe a possibilidade de cargas conectadas em delta.

Cabe ressaltar que a modelagem apresentada pode representar qualquer conexão. Por exemplo, considerando uma carga modelada em potência constante, tem-se  $C(\mathbf{z})=S$ . Sendo um dos pontos for solidamente aterrado, ou seja, possuir tensão nula, o modelo simplifica-se para uma injeção de potência no ponto em que a tensão não é nula. Esta simplificação pode ser observada na equação (C.24).

$$\begin{aligned} S_k &= S \\ S_m &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Para simplificar a notação, cria-se três funções auxiliares que são apresentadas em (C.25).

$$\begin{aligned}
 f_1 &= V_k^s \\
 f_2 &= C(\mathbf{z}) \\
 f_3 &= (V_k^s - V_k^t)
 \end{aligned}
 \tag{C.25}$$

Logo, a equação (C.24) pode ser reescrita como em (C.26).

$$S_k = \frac{f_1 f_2}{f_3}
 \tag{C.26}$$

A fórmula genérica para derivar (C.26) em relação a uma variável  $x$  é dada por (C.27), aplicação da regra da cadeia.

$$\frac{\partial S_k}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 f_3 + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} f_3 + f_1 f_2 \frac{\partial f_3}{\partial x}}{f_3^2}
 \tag{C.27}$$

Neste apêndice serão apresentadas somente as contribuições das cargas conectadas em estrela aterrada. Este esquema é composto pela conexão de três cargas monofásica (Figura C.2) na qual possuem um terminal conectado em uma fase do sistema e o outro terminal conectado ao neutro. Logo, as potências injetadas nas fases  $a$ ,  $b$  e  $c$  da barra  $k$  do sistema são dadas pelas as equações (C.28).

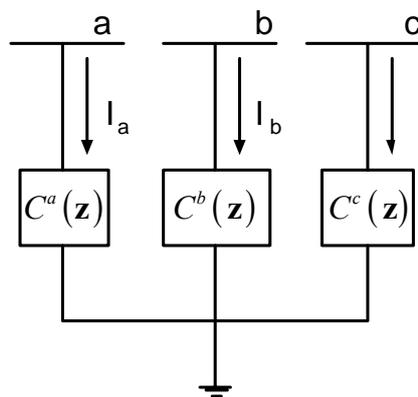


Figura C.2 – Carga conectada em estrela aterrada

$$\begin{aligned}
 S_{y,k}^a &= C_k^a(\mathbf{z}) \\
 S_{y,k}^b &= C_k^b(\mathbf{z}) \\
 S_{y,k}^c &= C_k^c(\mathbf{z})
 \end{aligned} \tag{C.28}$$

Na equação (C.29) é apresentada as contribuições das cargas para a função Lagrangeana. Como a potência aparente  $\mathbf{S}$  é constante, ela não depende das variáveis primais e duais do MPI, logo as cargas modeladas como potência constante e solidamente aterradas não apresenta contribuição para a matriz Hessiana.

$$\begin{aligned}
 L_{crg}(\mathbf{z}) = & \\
 & \Re(S_k^a) \cdot \lambda_{p,k}^a + \Re(S_k^b) \cdot \lambda_{p,k}^b + \Re(S_k^c) \cdot \lambda_{p,k}^c + \\
 & \Im(S_k^a) \cdot \lambda_{q,k}^a + \Im(S_k^b) \cdot \lambda_{q,k}^b + \Im(S_k^c) \cdot \lambda_{q,k}^c
 \end{aligned} \tag{C.29}$$

A contribuição das cargas para o vetor de otimalidade é dadas pela equação (C.30).

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_k^a \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^a \\ \tilde{\theta}_k^b \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^b \\ \tilde{\theta}_k^c \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^c \\ \dots \\ \tilde{v}_k^a \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^a \\ \tilde{v}_k^b \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^b \\ \tilde{v}_k^c \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_k^a \\ 0 \\ P_k^b \\ 0 \\ P_k^c \\ \dots \\ 0 \\ Q_k^a \\ 0 \\ Q_k^b \\ 0 \\ Q_k^c \end{bmatrix} \tag{C.30}$$

### C.4 Máquinas

Semelhante às cargas, as gerações de potência não dependem de tensões e ângulos nodais, mas o nível de geração de potência pode ser ajustado, logo as potências ativas e reativas geradas são consideradas variáveis de estado. Na equação(C.31) é apresentada a contribuição das máquinas para a função Lagrangeana. O sinal menos representa que a potência injetada no gerador tem sentido contrário a da carga.

$$L_{ger}(\mathbf{z}) = -\Re(S_k^a) \cdot \lambda_{p,k}^a - \Re(S_k^b) \cdot \lambda_{p,k}^b - \Re(S_k^c) \cdot \lambda_{p,k}^c + \\ -\Im(S_k^a) \cdot \lambda_{q,k}^a - \Im(S_k^b) \cdot \lambda_{q,k}^b - \Im(S_k^c) \cdot \lambda_{q,k}^c \quad (C.31)$$

As contribuições das máquinas para a matriz Hessiana são dadas em (C.32).

	$P_k^a$	$P_k^b$	$P_k^c$	$Q_k^a$	$Q_k^b$	$Q_k^c$	$\theta_k^a$	$\lambda_{p,k}^a$	$\theta_k^b$	$\lambda_{p,k}^b$	$\theta_k^c$	$\lambda_{p,k}^c$	$v_k^a$	$\lambda_{q,k}^a$	$v_k^b$	$\lambda_{q,k}^b$	$v_k^c$	$\lambda_{q,k}^c$	
$P_k^a$	$pi$							-1											
$P_k^b$		$pi$								-1									
$P_k^c$			$pi$									-1							
$Q_k^a$				$pi$										-1					
$Q_k^b$					$pi$											-1			
$Q_k^c$						$pi$												-1	
$\theta_k^a$																			
$\lambda_{p,k}^a$	-1																		
$\theta_k^b$																			
$\lambda_{p,k}^b$		-1																	
$\theta_k^c$																			
$\lambda_{p,k}^c$			-1																
$v_k^a$																			
$\lambda_{q,k}^a$				-1															
$v_k^b$																			
$\lambda_{q,k}^b$					-1														
$v_k^c$																			
$\lambda_{q,k}^c$						-1													

(C.32)

Sendo:

$$pi = \frac{\boldsymbol{\pi}_{low}}{\mathbf{s}_{low}} - \frac{\boldsymbol{\pi}_{up}}{\mathbf{s}_{up}} \quad (\text{C.33})$$

Onde  $\mathbf{s}$  são as variáveis de folga associadas aos limites de geração e os  $\boldsymbol{\pi}$  são as variáveis duais das restrições de geração. Maiores detalhes são apresentados no Apêndice B.

A contribuição de uma máquina para o vetor de otimalidade é apresentada na equação (C.34).

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_k^a \\ \tilde{P}_k^b \\ \tilde{P}_k^c \\ \tilde{Q}_k^a \\ \tilde{Q}_k^b \\ \tilde{Q}_k^c \\ \hline \tilde{\theta}_k^a \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^a \\ \tilde{\theta}_k^b \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^b \\ \tilde{\theta}_k^c \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^c \\ \tilde{v}_k^a \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^a \\ \tilde{v}_k^b \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^b \\ \tilde{v}_k^c \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{p,k}^a + pi_b \\ -\lambda_{p,k}^b + pi_b \\ -\lambda_{p,k}^c + pi_b \\ -\lambda_{q,k}^a + pi_b \\ -\lambda_{q,k}^b + pi_b \\ -\lambda_{q,k}^c + pi_b \\ \hline 0 \\ -P_k^a \\ 0 \\ -P_k^b \\ 0 \\ -P_k^c \\ 0 \\ -Q_k^a \\ 0 \\ -Q_k^b \\ 0 \\ -Q_k^c \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

Onde:

$$pi_b = \mu \left( \frac{1}{\mathbf{s}_{low}} - \frac{1}{\mathbf{s}_{up}} \right) \quad (\text{C.35})$$



$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_k^a \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^a \\ \tilde{\theta}_k^b \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^b \\ \tilde{\theta}_k^c \\ \tilde{\lambda}_{p,k}^c \\ \tilde{v}_k^a \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^a \\ \tilde{v}_k^b \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^b \\ \tilde{v}_k^c \\ \tilde{\lambda}_{q,k}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ pi_b \\ 0 \\ pi_b \\ 0 \\ pi_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.38})$$

Onde:

$$pi_b = \mu \left( \frac{1}{\mathbf{s}_{low}} - \frac{1}{\mathbf{s}_{up}} \right) \quad (\text{C.39})$$

Na formulação polar não é necessário aumentar a dimensão do sistema linear.

## C.6 Atualização das Variáveis Primais e Duais

Para atualizar as variáveis do FPO, será utilizado, em princípio, os mesmos métodos utilizados para sistemas monofásicos.

## Bibliografia

- AGOSTINI M. N., DECKER I. C., SILVA A. S., 2000, “Desenvolvimento e Implementação de uma Base Computacional Orientada a objetos para aplicações em sistemas de energia elétrica”, *XIII Congresso Brasileiro de Automática*, Florianópolis, Brasil.
- ANDERSON P. M., 1995, “Analysis of Faulted Power Systems”, IEEE Press Power Systems Engineering Series.
- ARAUJO L. R., 2000, “*Técnicas de Programação Esparsa Utilizando Modelagem Orientada a Objetos*”, Tese de M.Sc., Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil
- ARAUJO, L. R., GARCIA, P. A. N., PEREIRA J. L. R., CARNEIRO, S. e VINAGRE M. P., 2002, “Modelagem Orientada a Objetos Aplicada Na Solução de Programas de Distribuição”, *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, Brasil.
- BARAN, M. E., WU F. F., 1989, “Optimal Sizing of Capacitor Placed on a Radial Distribution System”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 4, n. 1, pp. 725 – 734, January.
- BIJWE, P. R., KELAPURE, S. M., 2003, “Nondivergent Fast Power Flow Methods”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 2, pp. 633 – 638, May.
- BIRT, K. A., GRAFFY, J. J., McDONALD, J. D., 1976, “Three phase load flow program”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-95, January.
- BURCHETT R. C., HAPP H. H., VIERATH D. R., 1984, “Quadratically Convergent Optimal Power Flow”, *IEEE Transactions on PAS*, v. 103, n. 11, pp. 3267-3276, November.

- BURCHETT R. C., HAPP H. H., WIRGAU K. A., 1982, “Large Scale Optimal Power Flow”, *IEEE Transactions on PAS*, v. 101, pp. 3722-3732, October.
- CARPENTIER J., 1962, “Contribution á `L`etude du Dispatching Économique”, *Bulletin de la Societe Françoise dos Electriciens*, v. 11, SER-8, pp. 432–447.
- CARSON, J. R., 1926, “Wave Propagation in Overhead Wire with Ground Return”, *Bell System Technical Journal*, vol. 5.
- CASTRONUOVO E. D., CAMPAGNOLO J. M., SALGADO R., 2001, “On the Application of High Performance Computation Techniques to Nonlinear Interior Point Methods”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 16, n. 3, pp. 325–331, August.
- CÉSPEDES, G., 1990, “New Method for the Analysis of Distribution Networks”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 5, n. 1, pp. 391 – 396, January.
- CHEN, T. H., et al., 1991, “Distribution System Power Flow Analysis – A Rigid Approach”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 6, n. 3, pp. 1146 – 1152, July.
- CHEN, T., YANG, W., 2001, “Analysis of Multi-Grounded Four-Wire Distribution Systems Considering the Neutral Grounding”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 16, n. 4, pp. 710 – 717, October.
- CHIANG, H. D., 1991, “A Decoupled Load Flow Method for Distribution Power Networks”, *Electrical Power and Energy Systems*, v. 13, n. 3, pp. 130 – 138, June.
- CIRIC, R. M., FELTRIN, A. P., OCHOA, L. F., 2003, “Power Flow in Four-Wire Distribution Networks – General Approach”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 4, pp. 1283 – 1290, November.
- CLOSE, A. J., 1975, “Circuitos Lineares”, Editora Cidade.

- COSTA V. M., MARTINS N., PEREIRA J. L. R., 1999, “Developments in the Newton Raphson Power Flow Formulation Based on Current Injections”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v.14, n. 4, pp. 1320-1336, November.
- DAS, D., KOTHARI, D. P., KALAM, A., 1995, “A Simple and Efficient Method for Load Flow Solution of Radial Distribution Networks”, *Electrical Power and Energy Systems*, v. 17, n. 5, pp. 335 – 346.
- DERI, A., TEVAN, G., SEMLYEN, A., CASTANHEIRA, A., 1981, “*The Complex Ground Return Plane; A Simplified Model for Homogeneous and Multi-Layer Earth Return*”, *IEEE Transc on Power System*, vol.100, no. 8, pp.3686-3693.
- DOMMEL H. W., TINNEY W. F., 1968, “Optimal Power Flow Solutions”, *IEEE Transactions on PAS*, v. 87, pp. 1876–1886, October.
- ESQUIVEL C. F., et al., 1998, “Efficient Object Oriented Power Systems Software for the Analysis of Large-scale Networks Containing FACTS-Controlled Branches”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 13, n. 2, pp. 464–472, May.
- EXPÓSITO, A. G., RAMOS, E. R., 1999, “Reliable Load Flow Technique for Radial Distribution Networks”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 3, pp. 1063 – 1069, August.
- GARCIA P. A. N., ARAUJO, L. R., PEREIRA J. L. R., CARNEIRO Jr. S., PINTO, H. C. P., 2000b, “Fluxo de Potência Trifásico Para Sistemas de Transmissão e Distribuição”, *XIV SENDI*, 19 e 23 de Novembro, Foz do Iguaçu
- GARCIA P. A. N., PEREIRA J. L. R., CARNEIRO Jr. S., COSTA V. M., MARTINS N., 2000, “Three-phase Power Flow Calculations Using the Current Injection Method”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v.15, n. 2, pp. 508-514, May.

- GARCIA, A. V., ZAGO, M. G., 1996, “Three-Phase Fast Decoupled Power Flow for Distribution Networks”, *IEEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution*, v. 142, n. 2, pp. 188 – 192, March.
- GILL P. E., MURRAY W. e WRIGHT M. H., 1981, *Practical Optimizations*, Academic Press, London.
- GOMES Jr., S.; 1995, “*Otimização e Análise de Linhas de Transmissão*”, Tese de M.Sc., Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, RJ, Brasil
- GOMES Jr., S.; 2002, “*Modelagem e Métodos Numéricos para Análise Linear de Estabilidade Eletromecânica, Ressonância Subsíncrona, Transitórios Eletromagnéticos e Desempenho Harmônico de Sistemas de Potência*”, Tese de D.Sc., Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, RJ, Brasil
- GOMES Jr., S.; MARTINS, N.; PORTELA C.; 2000, “Modal Analysis Applied to s-Domain Models of ac Networks”, *IEEE PES Winter Meeting*, Columbus, Ohio, Janeiro.
- GRANVILLE S., 1994, “Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 1, pp. 136–146, February.
- GRANVILLE S., MELLO J. C. O. e MELO A.C.G., 1996, “Application of Interior Point Methods to Power Flow Insolvability”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. 11, n. 2, pp. 1096–1103, May.
- IEEE Task Force on Load Representation, 1995, “Bibliography on Load Models for Power Flow and Dynamic Performance Simulation”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 10, n. 1, pp. 523–538, February.
- KARMAKAR, (1984) “New Polynomial-Time Algorithm or Linear Programming”, *Combinatorica*, Vol. 4, p. 373-395.

- KERSTING, W. H., 2000, “Radial Distribution Test Feeders”, Distribution System Analysis Subcommittee Report, <http://ewh.ieee.org/soc/dsacom/testfeeders.html>
- KERSTING, W. H., MENDIVE, D. L., 1976, “An Application of Ladder Network Theory to the Solution of Three-Phase Radial Load Flow Problems”, *IEEE PES – Winter Meeting*, New York, January 6.
- KRUGLINSKI, D. J., 1997, “Inside Visual C++”, Microsoft Press.
- LATORRE, M. L., 1995, “*Aplicação do Método de Pontos Interiores Primal-Dual Para a Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo*”, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
- LIN, W. M., et al., 1999, “Three-Phase Unbalanced Distribution Power Flow Solutions With Minimum Data Preparation”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 3, pp. 1178 – 1183, August.
- LIU M., TSO S. K., e CHENG, Y.; 2002 “An Extended Nonlinear Primal-Dual Interior-Point Algorithm for Reactive-Power Optimization of Large-Scale Power Systems With Discrete Control Variables”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 17, n. 4, pp. 982–991, November.
- LUO, G. X., SEMLYEN, A., 1990, “Efficient Load Flow for Large Weakly Meshed Networks”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 5, n. 4, pp. 1309 – 1316, November.
- MANZONI A., SILVA A. S., DECKER I. C., 1999, “Power Systems Dynamic Simulation Using Object-Oriented Programming”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, n. 1, pp. 249–255, February.
- MENEZES S., 2003, “*Curto Circuito Trifásico*”, Tese de M.Sc., Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil

- MIU, K. N., WANG, J. C., CHIANG, H. D., 1997, “Explicit Loss Formula, Voltage Formula and Current Flow Formula for Large Scale Unbalanced Distribution Systems”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 3, pp. 1061 – 1067, August.
- MONTICELLI A. J., 1983, Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, SP.
- MONTICELLI, A., GARCIA, A., SAAVEDRA, O. R., 1990, “Fast Decoupled Load Flow: Hypothesis, Derivations and Testing”, *IEEE Transactions on Power Systems*, pp. 1425 – 1431, November.
- MOON, Y. H., et al., 1999, “Fast and Reliable Distribution System Load Flow Algorithm Based on the  $Y_{bus}$  Formulation”, *Proceedings of IEEE PES Summer Meeting – 1999*, v. 1, pp. 238 – 242, July.
- NEYER F. A., WU F. F., 1990, “Object-Oriented Programming for Flexible Software: Example of Load Flow”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 5, n. 3, pp. 689–696, August.
- NGUYEN, H. L., 1997, “Newton-Raphson Method in Complex Form”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 3, pp. 1355 – 1359, August.
- PENIDO D. R. R., PEREIRA J. L. R., ARAUJO, L. R. e GARCIA, P. A. N., 2002, “Análise de Propagação Harmônica em Redes Elétricas Utilizando Modelagem Orientada a objetos”, *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, Brasil.
- PENIDO, D. R. R., 2004, “Fluxo de Potência a Quatro Condutores”, Tese de M.Sc., Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil.
- PEREIRA L. A. C., 1991, “Implementação de um Programa de Fluxo de Potência Ótimo Utilizando Programação Quadrática Seqüencial”, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

- RAJICIC, D., BOSE A., 1988, “A Modification to the Fast Decoupled Power Flow for Network with High Ratios”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, n. 2, May.
- ROYTELMAN, I., 1999, “Power Flow, Optimization and Fault Calculation Methods”, *IEEE PES – Winter Meeting*, v. 1, Panel Session: Distribution System Analysis Methods, January.
- SANTOS J. R., LORA A. T., EXPOSITO A. G.; e RAMOS, J. L. M.; 2003 “Finding Improved Local Minima of Power System Optimization Problems by Interior-Point Methods”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 18, n. 1, pp. 238–244, February.
- SHIRMOHAMMADI, D., et al., 1988, “A Compensation-based Power Flow Method for Weakly Meshed Distribution and Transmission Networks”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 3, pp. 753 – 762, May.
- SHORT, T. A., et al., 2002, “Five-Wire Distribution System Demonstration Project”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 17, n. 2, pp. 649 – 654, April.
- SILVA F. L., 2004, “*Modelagem de Transformadores Trifásicos de Distribuição para Estudos de Fluxo de Potência*”, Tese de M.Sc., Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil
- SOTO, J. R. O.; 2000, “Manual do Usuário do Programa FLUPOT V 5.1”, CEPEL, Novembro.
- STOTT B., HOBSON H., 1977, “Power System Security Control Calculations Using Linear Programming – Parts I and II”, *IEEE PES Summer Meeting*, México, July.
- STOTT B., MARINHO J. L., 1978, “Linear Programming for Power System Network Security Applications”, *IEEE PES Summer Meeting*, Los Angeles, July.

- STOTT, B., ALSAC, 1974, “Fast Decoupled Load Flow”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. PAS-93, May-June.
- STROUSTRUP B., 1997, *The C++ Programming Language* Addison Wesley Publishing Company.
- SUN D. I., ASHLY B. T., BREWER B. J., HUGHES B. A., TINNEY W. F., 1984, “Optimal Power Flow by Newton Approach”, *IEEE Transactions on PAS*, v. 103, n. 10, October.
- SUN D. I., HUGHES B. A., TINNEY W. F., BRIGHT J., LAMONT J., 1987, “Optimal Power Flow by Newton Method”, *IEEE Tutorial Course – Reactive Power: Basics, Problems and Solutions*, February.
- TENG, J., 2003, “A Direct Approach for Distribution System Load Flow Solutions”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 18, n. 3, pp. 882 – 887, July.
- TINNEY W. F., (1972). “Compensation methods for network solution by optimally ordered triangular factorizations”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, No. 1, January/February 1972, pp. 123–127.
- TINNEY W. F., SUN D. I, 1987, “Optimal Power Flow: Research and Code”, EPRI Research Project No. 1724-1, Final Report, February
- TINNEY, W. F., HART, C. E., 1967, “*Power Flow Solution by Newton’s Method*”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, v. PAS-86, n. 3.
- UWEE, 2005, “Power Systems Test Case Archive”, University of Washington Electrical Engineering, <http://www.ee.washington.edu/research/pstca>
- VARRICCHIO, S. L, GOMES Jr., S. ARAUJO L. R., 2005; “Manual do Usuário do Programa HarmZs V 1.5”, CEPEL.

- VARRICCHIO, S. L.; GOMES Jr., S.; MARTINS, N.; 2002, “Two Powerful Network Modeling Approaches for the Modal Analysis of Harmonic Problems”, – *VIII SEPOPE*, Brasília, Brasil, 19 – 23 Maio.
- WARD, D. J., et al., 2003, “An Analysis of the Five-Wire Distribution System”, *IEEE Transactions on Power Delivey*, v. 18, n. 1, pp. 295 – 299, January.
- WASLEY, R. G., *SHLASH, M. A., 1974*, “Newton-Raphson Algorithm for 3-Phase Load Flow”, *Proceedings of IEEE, Panel Session: Distribution Systems Analysis Methods*, July.
- WRIGHT S., 1997, *Primal-Dual Interior-Point Methods*, Argonne, Illinois, Editora SIAM.
- WU Y. C., DEBS A. S. e MARSTEN R. E.; 1994, “A Direct Nonlinear Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flow”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 9, n. 2, pp. 876–883, May.
- ZHANG, F., CHENG, C. S, 1997, “A Modified Newton Method for Radial Distribution System Power Flow Analysis”, *IEEE Transactions on Power System*, v. 12, n. 1, pp. 389 – 397, February.
- ZHOU E. Z., 1996, “Object-Oriented Programming, C++ and Power System Simulation”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 11, n. 1, pp. 206–215, February.
- ZIMMERMAN, R. D., 1995, “Fast Decoupled Power Flow for Unbalanced Radial Distribution Systems”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 10, n. 2, pp. 2045 – 2052, November.