

CONTROLE DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS INCERTOS POR
REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA E MODO DESLIZANTE

José Paulo Vilela Soares da Cunha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

Prof. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, D.Sc.

Prof. Aldayr Dantas de Araújo, D.Sc.

Prof. Amit Bhaya, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2004

CUNHA, JOSÉ PAULO VILELA SOARES
DA

Controle de Sistemas Multivariáveis In-
certos por Realimentação de Saída e Modo
Deslizante [Rio de Janeiro] 2004

XII, 200 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
D.Sc., Engenharia Elétrica, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Modelo de referência
2. Realimentação de saída
3. Sistemas multivariáveis
4. Modo deslizante
5. Observador de alto ganho
6. Fenômeno *peaking*

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À memória de meus pais *Alfredo Soares da Cunha* e *Maria Augusta Vilela da Cunha*.

À memória dos amigos Ary da Silva Lopes, Helena Barbosa Coelho Pereira, Lilia dos Reis Soares da Cunha, Jorcimar Nunes Ferreira, Marina Pinto e Raquel Guimarães Romankevicius Costa que se foram durante o desenvolvimento desta Tese.

À minha esposa, amada e companheira *Alva Valeria Machado Nascimento* e ao nosso filho *Theo Nascimento Soares da Cunha*. Em 10 de março de 2004 eu pedi ao meu filho que desenhasse uma baleia. Então, aos três anos de idade, ele me deu de presente esta linda baleia.



Ao leitor uma pergunta:

Para quê serve uma Pirâmide?

Agradecimentos

Aos meus orientadores e amigos Liu Hsu e Ramon R. Costa pelo excelente Tema de Tese que propuseram e pelos longos anos de trabalho conjunto.

Aos que me incentivaram a estudar Eletrônica quando eu era criança: Ary da Silva Lopes e meus primos Antonio Abel Correia Vilela e Carlos Augusto Vilela.

Ao Professor Bernardo Severo da Silva Filho que me incentivou a ingressar na área de controle.

Ao amigo Fernando Lizarralde que tem sido um bom conselheiro.

Ao Prof. Amit Bhaya por ter indicado um artigo pouco conhecido, mas que foi fundamental nesta Tese (Baida 1993).

Aos Professores José Franco Machado do Amaral, Thales Alfredo de Ávila Carneiro, Luiz Biondi Neto, Maria Dias Bellar e Antônio Romeiro Sapienza, à secretária Sílvia Regina Cezar Medeiros e aos demais colegas do Departamento de Eletrônica e Telecomunicações da Faculdade de Engenharia da Universidade do Estado do Rio de Janeiro que me apoiaram na realização desta Tese.

Aos companheiros na Sala de Alunos de Doutorado do Laboratório de Controle Lin Jwo Min, Álvaro Koji Imai, Lin Yan, Alessandro Jacoud Peixoto e Alessandro Zachy pela convivência agradável e pelo intercâmbio de idéias que foram muito importantes no desenvolvimento desta Tese.

Aos meus Padrinhos José Soares da Cunha e Helena Barbosa Coelho Pereira, aos Soares da Cunha, aos Vilela e outros amigos pelo incentivo que deles recebi ao longo da minha vida.

Aos meus amigos Miguel Angelo Mollinedo Aramayo, Valéria Cristina Pinto Magalhães e Ana Maria Oliveira Macedo pela amizade, simplesmente.

Aos meus Professores que formaram a base desta Pirâmide.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CONTROLE DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS INCERTOS POR
REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA E MODO DESLIZANTE

José Paulo Vilela Soares da Cunha

Março/2004

Orientadores: Liu Hsu

Ramon Romankevicius Costa

Programa: Engenharia Elétrica

Nesta Tese são propostos controladores por modelo de referência e modo deslizante para sistemas multivariáveis incertos. As leis de controle são baseadas no controle vetorial unitário, em realimentação de saída e na formulação do controle adaptativo por modelo de referência. O controle proposto é uma extensão de um controlador à estrutura variável que fôra desenvolvido para sistemas monovariáveis. Aborda-se o controle de uma classe de sistemas multivariáveis com perturbação não-linear dependente do estado não medido. Destacam-se as seguintes características: (i) o sistema de controle é globalmente exponencialmente estável em relação a um pequeno conjunto residual; (ii) as incertezas podem ser descartadas em relação à entrada e (iii) a única hipótese sobre a matriz de ganho de alta frequência da planta é apenas uma condição Hurwitz. O esquema resultante é livre do fenômeno *peaking*, que pode ocorrer em controladores baseados em observadores. Ao final se desenvolve um controlador para sistemas monovariáveis incertos baseado num observador de alto ganho livre do fenômeno *peaking*.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

OUTPUT-FEEDBACK SLIDING MODE CONTROL OF UNCERTAIN MULTIVARIABLE SYSTEMS

José Paulo Vilela Soares da Cunha

March/2004

Advisors: Liu Hsu

Ramon Romankevicius Costa

Department: Electrical Engineering

Sliding mode model-reference controllers for uncertain multivariable systems are proposed in this Thesis. The control laws are based on unit vector control, output-feedback and model-reference adaptive control formulation. The proposed strategy is an extension of a variable structure controller devised for single-input-single-output (SISO) systems. A class of multivariable systems subject to nonlinear disturbances which depends on the unmeasurable state variables is considered. The main features of the proposed approach are as follows: (i) the control systems is globally exponentially stable with respect to a small residual set; (ii) the uncertainties can be unmatched with respect to the input and, (iii) a simple Hurwitz condition is imposed on the plant high frequency gain matrix. The proposed scheme is free of the peaking phenomenon, which is usual in some observer based controllers. Finally, a controller for uncertain SISO systems based on a peaking free high gain observer is developed.

Sumário

Abreviaturas	xi
1 Introdução	1
1.1 Objetivo	3
1.2 Notas Preliminares	3
1.2.1 Normas e notações	3
1.2.2 Margem de estabilidade	5
1.2.3 Conceitos básicos sobre sistemas multivariáveis	6
1.2.3.1 Observabilidade e parâmetros de Markov	6
1.2.3.2 Índice de observabilidade	8
1.2.3.3 Matriz <i>interactor</i> e grau relativo	8
1.2.4 Controle por modo deslizante	9
1.2.4.1 Equações diferenciais descontínuas	10
1.2.4.2 Controle equivalente estendido	10
1.2.5 Controle vetorial unitário	11
1.3 Controle de Sistemas Lineares por Realimentação de Saída	12
1.4 Controle de Sistemas Não-Lineares por Realimentação de Saída	14
1.5 Controle Baseado em Observador	15
1.5.1 Observadores de alto ganho para sistemas incertos	18
1.6 Formulação do Problema	19
1.6.1 Planta	19
1.6.2 Hipóteses sobre a planta	19
1.6.3 Modelo de referência	22
1.6.4 Objetivo de controle	22
1.7 Organização deste Texto	23
2 Controle Vetorial Unitário	25
2.1 Notas sobre Matrizes de Transferência Estritamente Reais Positivas	28
2.2 Lemas Sobre o Controle Vetorial Unitário	30
2.3 Controle Vetorial Unitário Versus Controle à Estrutura Variável	33
2.4 Condições sobre a Matriz de Ganho de Alta Frequência	38
2.4.1 Comparação da condição Hurwitz com a condição de definição de sinal	38
2.4.2 Conhecimento dos sinais dos menores principais	39
2.4.3 Comparação de condições sobre a matriz de ganho de alta frequência	40

2.5	Conexão do Controle Vetorial Unitário com Estabilização Adaptativa . . .	43
3	Aproximações por Filtros de Primeira Ordem	45
3.1	Aproximação por Filtro de Primeira Ordem para Sistemas Lineares . . .	46
3.2	Aproximação por Filtro de Primeira Ordem para Sistemas Não-Lineares	48
3.3	Síntese do Filtro	51
3.3.1	Critérios de desempenho	52
3.3.2	Síntese aplicando-se formas quadráticas de Lyapunov	53
3.3.2.1	Cálculo dos coeficientes	53
3.3.2.2	Exemplo de síntese aplicando-se formas quadráticas de Lyapunov	55
3.3.3	Otimização dos coeficientes do filtro	56
3.3.3.1	Estimação do <i>supremo</i>	57
3.3.3.2	Minimização do ganho DC	61
3.3.3.3	Exemplo de síntese ótima	66
3.4	Comentários	68
4	Parametrização do Controle por Modelo de Referência	69
4.1	Condições de Casamento	70
4.2	Equações do Erro	72
5	Controle de Sistemas Lineares de Grau Relativo Uniforme e Unitário	75
5.1	Projeto e Análise do Controle para Plantas de Grau Relativo Uniforme e Unitário	76
5.2	Exemplo de Projeto	81
5.2.1	Projeto	82
5.2.2	Resultados de simulação	84
5.3	Projeto para Plantas na Forma Regular	85
5.3.1	Abordagem por controle linear	85
5.3.2	Equações do erro	86
5.3.3	Abordagem pelo controle vetorial unitário	87
5.4	Aplicação ao Controle Tolerante a Falhas	89
5.4.1	Objetivo de controle	90
5.4.2	Dinâmica da cadeia de carros	90
5.4.2.1	Descrição das falhas	91
5.4.3	Estratégia de controle tolerante a falhas	92
5.5	Exemplo de Aplicação ao Controle Tolerante a Falhas	94
5.5.1	Projeto	95
5.5.2	Resultados de simulação	95
5.6	Comentários	96
6	Controle de Sistemas Lineares de Grau Relativo Uniforme Arbitrário	99
6.1	Análise Simplificada	101
6.2	Equações dos Erros Auxiliares	102
6.3	Majorantes dos Erros Auxiliares	103
6.4	Análise de Estabilidade	106
6.5	Aspectos de Implementação	108
6.5.1	Funções de modulação	109

6.5.2	Versão <i>relé</i>	110
6.5.3	Redução do <i>chattering</i>	110
6.6	Exemplo de Aplicação	111
6.6.1	Resultados de simulação	113
6.7	Sobre a Ausência do Fenômeno <i>Peaking</i> no VS-MRAC e no UV-MRAC	114
7	Controle de Sistemas Não-Lineares de Grau Relativo Uniforme e Unitário	115
7.1	Parametrização do Controle	116
7.2	Equações do Erro	116
7.3	Projeto e Análise para Plantas Não-Lineares de Grau Relativo Uniforme e Unitário	118
7.4	Procedimento de Projeto	122
7.5	Exemplo de Aplicação ao Controle Tolerante a Falhas	124
7.5.1	Projeto	127
7.5.2	Resultados de simulação	127
8	Controle de Sistemas Não-Lineares de Grau Relativo Uniforme Arbitrário	129
8.1	Estimação do Majorante da Perturbação em Plantas Não-Lineares	130
8.2	Majorante da Perturbação em Plantas Não-Lineares de Grau Relativo Uniforme Dois	131
8.3	Funções de Modulação	134
8.4	Sobre as Propriedades de Estabilidade	135
9	Controle por Modo Deslizante Baseado em Observador	137
9.1	Formulação do Problema	138
9.1.1	Planta	138
9.1.2	Hipóteses sobre a planta	138
9.1.3	Modelo de referência	139
9.1.4	Objetivo de controle	140
9.2	Parametrização do Controle	141
9.3	Equações do Erro	142
9.4	Controle de Sistemas de Grau Relativo Unitário	142
9.5	Controle de Sistemas de Grau Relativo Superior a Um	144
9.6	Observador de Alto Ganho	146
9.6.1	Majorante do erro de estimação	147
9.6.2	Fenômeno <i>peaking</i>	152
9.6.2.1	Tempo de extinção do pico	153
9.7	Controlador para Sistemas de Grau Relativo Superior a Um sem <i>Peaking</i> nos Sinais da Planta	156
9.7.1	Análise de estabilidade	156
9.8	Controlador para Sistemas de Grau Relativo Superior a Um Livre de <i>Peaking</i> nos Sinais da Planta e do Controlador	162
9.8.1	Análise de estabilidade	164
9.9	Exemplo de Aplicação a um Servomecanismo	166
9.9.1	Descrição do servomecanismo	166
9.9.2	Modelo da dinâmica do servomecanismo	168

9.9.3	Projeto	168
9.9.4	Resultados de simulação	169
9.9.5	Resultados experimentais	171
9.10	Comentários	176
10	Conclusão	177
10.1	Continuações Naturais para este Trabalho	179
	Referências Bibliográficas	181
	Apêndices	187
A	Trabalhos Publicados	187
B	Lema Auxiliar e Provas dos Lemas sobre Controle Vetorial Unitário	189
B.1	Lema Auxiliar para a Prova da Proposição 2.1	189
B.2	Provas dos Lemas da Seção 2.2	190
B.2.1	Prova do Lema 2.2	191
B.2.2	Prova do Corolário 2.2	192
B.2.3	Prova do Lema 2.3	193
C	Lemas sobre o Controle à Estrutura Variável de Sistemas Monovariáveis	197
D	Algoritmos de Simulação e de Projeto	199
D.1	Resolução Numérica de Equações Diferenciais	199
D.2	Algoritmos para o Projeto de Controladores	200

Abreviaturas

A/D — conversor analógico para digital

BIBO — estável no sentido entrada-saída (*bounded-input-bounded-output*)

D/A — conversor digital para analógico

DC — corrente contínua (*direct current*)

FDI — detecção e isolamento de falha (*fault detection and isolation*)

FOAF — filtro de aproximação de primeira ordem (*first order approximation filter*)

FTC — controle tolerante a falhas (*fault tolerant control*)

HFG — ganho de alta frequência (*high frequency gain*)

HGO — observador de alto ganho (*high gain observer*)

LI — localmente integrável segundo Lebesgue

LMDI — laço do modo deslizante ideal

LMI — desigualdades lineares matriciais (*linear matrix inequalities*)

LTI — linear e invariante no tempo (*linear time invariant*)

MIMO — múltiplas entradas e múltiplas saídas, multivariável (*multi-input-multi-output*)

MRAC — controle adaptativo por modelo de referência (*model-reference adaptive control*)

QFT — teoria da realimentação quantitativa (*quantitative feedback theory*)

SISO — uma entrada e uma saída, monovariável (*single-input-single-output*)

SMC — controle por modo deslizante (*sliding mode control*)

SPR — estritamente real positivo (*strictly positive real*)

UVC — controle vetorial unitário (*unit vector control*)

UV-MRAC — controle adaptativo por modelo de referência e vetor unitário (*unit vector model-reference adaptive control*)

VSC — controle à estrutura variável (*variable structure control*)

VS-MRAC — controle adaptativo por modelo de referência e estrutura variável (*variable structure model-reference adaptive control*)

Capítulo 1

Introdução

O controle automático tem desempenhado papéis vitais no avanço da engenharia e da ciência. Além de sua extrema importância em aviões, veículos espaciais, sistemas robóticos, eletrodomésticos e tantos outros sistemas eletromecânicos, o controle automático tornou-se uma parte importante de sistemas industriais e de manufatura modernos. Por exemplo, o controle automático é essencial em máquinas de comando numérico, nas indústrias de alimentos, químicas, farmacêuticas, siderúrgicas e têxtil (Ogata 1997).

O controle pode ser aplicado a *objetos complexos* como, por exemplo, sistemas biológicos, econômicos, sociais, animais e seres humanos. Um *objeto complexo* é caracterizado pelo desconhecimento de modelos matemáticos formais para o seu comportamento, por apresentar comportamento estocástico, intolerância ao controle, mudança de comportamento ao longo do tempo e irreprodutibilidade experimental (Rastrigin 1983, Seção I.3). Geralmente, *objetos complexos* interagem com outros sistemas através de diversas entradas e saídas, o que os caracteriza como *sistemas multivariáveis*.

Nesta Tese assume-se que o objeto a ser controlado, doravante denominado *planta*, pode ser modelado matematicamente por equações diferenciais ordinárias e, neste sentido, não é um *objeto complexo*. No entanto, os valores dos parâmetros deste modelo são desconhecidos, embora assumam-se os limites para seus valores. Além disto, o comportamento da planta pode ser variante no tempo, não-linear e está sujeito a perturbações que não podem ser medidas ou estimadas precisamente. Assume-se que os sinais de saída da planta utilizados na realimentação são medidos precisamente, isto é, sem erros nem atrasos, o que pode representar uma simplificação considerável

em problemas de controle reais devido ao desempenho limitado pelos transdutores, processamento de sinais, transmissão de dados e outros subsistemas de medição.

Há diversas técnicas de controle que podem ser adequadas a problemas de controle em que a planta tem essas características (Levine 1996): controle adaptativo, controle H_∞ , controle à estrutura variável, teoria da realimentação quantitativa (*quantitative feedback theory* — QFT), controle neural, controle nebuloso, controle por aprendizado (*learning control*), etc..

O controle à estrutura variável (*variable structure control* — VSC) é bem adequado a sistemas multivariáveis incertos. Originalmente as estratégias VSC são baseadas na medição do estado do sistema (e.g., (Utkin 1978)), o que nem sempre é viável devido a aspectos técnicos ou econômicos como, por exemplo, a impossibilidade de instalação ou de construção de alguns sensores, o custo de sensores e de sistemas de comunicação entre os sensores e o controlador. Isto justifica a aplicação de estratégias baseadas na realimentação de saída, em que são medidas apenas as variáveis que devem seguir sinais de referência.

O problema de estabilização robusta por realimentação de saída e VSC tem sido o tema de diversos trabalhos num passado recente, e.g., (Walcott & Žak 1988, Emelyanov, Korovin, Nersisian & Nisenzon 1992a, Emelyanov, Korovin, Nersisian & Nisenzon 1992b, Esfandiari & Khalil 1992, Oh & Khalil 1995, Edwards & Spurgeon 1998). Em particular, se for desejado especificar o desempenho do sistema em malha fechada, pode-se empregar o *modelo de referência*, que é bastante usual na área de controle adaptativo (Sastry & Bodson 1989, Ioannou & Sun 1996). O controle por modelo de referência e modos deslizantes já foi aplicado a sistemas lineares de uma entrada e uma saída (*single-input-single-output* — SISO) (Hsu & Costa 1989, Hsu, Araújo & Costa 1994), a sistemas lineares de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*multi-input-multi-output* — MIMO) (Tao & Ioannou 1989, Chien, Sun, Wu & Fu 1996), a sistemas não-lineares SISO (Oh & Khalil 1997, Min & Hsu 2000, Min 2001) e a sistemas não-lineares MIMO (Edwards & Spurgeon 1996).

1.1 Objetivo

O principal objetivo desta Tese é desenvolver algoritmos de controle por modo deslizante baseados na realimentação de saída para algumas classes de sistemas não-lineares multivariáveis com parâmetros e sinais incertos, em particular para sistemas lineares. O desempenho do sistema em malha fechada é especificado por um modelo de referência. Os algoritmos desenvolvidos devem possuir propriedades globais de estabilidade.

São consideradas duas abordagens: a primeira é baseada na arquitetura de controle adaptativo por modelo de referência e estrutura variável (*variable structure model-reference sliding mode controller* — VS-MRAC) (Hsu et al. 1994) e a segunda é baseada em observadores de alto ganho conjugados ao controle por estrutura variável (Oh & Khalil 1997).

1.2 Notas Preliminares

Revisa-se nesta seção alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento dos algoritmos de controle nesta Tese. O leitor poderá passar diretamente à Seção 1.3, caso já esteja familiarizado com estes conceitos e definições.

1.2.1 Normas e notações

São usados os conceitos e notações descritos a seguir.

- O máximo e o mínimo valores singulares da matriz A são denotados por $\sigma_{max}(A)$ e $\sigma_{min}(A)$, respectivamente.
- O máximo e o mínimo autovalores de uma matriz simétrica P são denotados por $\lambda_{max}(P)$ e $\lambda_{min}(P)$, respectivamente.
- $\|x\|$ denota a norma Euclidiana de um vetor x e $\|A\|$ denota a norma da matriz A induzida pela norma Euclidiana, que é dada pelo seu maior valor singular ($\sigma_{max}(A)$).
- Uma matriz $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é *positiva definida*, ou de forma equivalente $P > 0$, se a forma quadrática associada à matriz P for positiva definida, i.e., $x^T P x > 0$,

$\forall x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0$. Deve-se notar que a matriz P não precisa ser simétrica. Se $P = P^T$, então $P > 0$ se e somente se $\lambda_{\min}(P) > 0$, como se pode concluir do Teorema 11.3 de (Noble & Daniel 1986, p. 344). Conceitos análogos são válidos para matrizes negativas definidas.

- A norma $\mathcal{L}_{\infty e}$ do sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é definida como (Ioannou & Sun 1996, p. 70)

$$\|x_t\|_{\infty} := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\|. \quad (1.1)$$

Quando o tempo inicial é $t_0 \leq t$, pode-se utilizar a norma

$$\|x_{t,t_0}\|_{\infty} := \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\|. \quad (1.2)$$

- Uma função contínua $\alpha[0, a) \rightarrow [0, +\infty)$ pertence à classe \mathcal{K} se for estritamente crescente e $\alpha(0) = 0$ (Khalil 1996, Definição 3.3, p. 135).
- O conjunto de matrizes com p linhas e m colunas cujos elementos são funções racionais de s com coeficientes reais é representado por $\mathbb{R}^{p \times m}(s)$. O conjunto de matrizes polinomiais de dimensão $p \times m$ é representado por $\mathbb{R}^{p \times m}[s]$.
- Adota-se a representação mista do domínio do tempo com o domínio da transformada de Laplace (cálculo operacional). No entanto, para se definir precisamente estas representações, serão adotados os seguintes conceitos e notações. O sinal de saída y de um sistema linear e invariante no tempo com matriz de transferência $G(s)$ e entrada u é dado por $G(s)u$. A convolução pura $g(t) * u(t)$, sendo $g(t)$ a resposta impulsiva de $G(s)$, será escrita eventualmente como $G(s) * u$, por simplicidade. Considere a realização de $G(s)$ dada por $\dot{x} = A_p x + B_p u, y = C_p x + D_p u$. Então,

$$y(t) = G(s)u(t) = g(t) * u(t) + C_p \exp(A_p t)x(0), \quad (1.3)$$

onde o termo exponencial é a resposta homogênea do sistema ($u(t) \equiv 0$).

- O símbolo s denota tanto a variável complexa da transformada de Laplace quanto o operador diferencial $\frac{d}{dt}$ no domínio do tempo.

- A norma do operador $G(s)$ é definida como (Ioannou & Sun 1996, p. 69)

$$\|G(s)\| := \|g(t)\|_1 = \int_0^{+\infty} \|g(\tau)\| d\tau. \quad (1.4)$$

A seguinte desigualdade é válida para $y(t) = g(t) * u(t)$ (Ioannou & Sun 1996, pp. 80–81)

$$\|y_t\|_\infty \leq \|g(t)\|_1 \|u_t\|_\infty. \quad (1.5)$$

- Usa-se a abreviatura “LI” para denotar *localmente integrável segundo Lebesgue*.

1.2.2 Margem de estabilidade

Margem de estabilidade é um conceito fundamental para as *aproximações por filtros de primeira ordem* apresentadas no Capítulo 3 (Cunha, Costa & Hsu 2003b). O termo *margem de estabilidade* foi utilizado por (Ioannou & Tsakalis 1986) para os pólos de uma função de transferência. A seguir define-se a margem de estabilidade de matrizes de transferência, de matrizes reais e de polinômios (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Seção 2.1).

Definição 1.1 A margem de estabilidade de $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ é dada por

$$\gamma_0 := \min_j \{-\Re(p_j)\}, \quad (1.6)$$

onde $\{p_j\}$ são os pólos de $G(s)$.

Fato: o sistema com matriz de transferência $G(s)$ é BIBO estável (*bounded-input-bounded-output stable*, i.e., estável no sentido entrada-saída) se e somente se $\gamma_0 > 0$ (Kailath 1980, Seção 2.6.1).

Definição 1.2 A margem de estabilidade de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dada por

$$\lambda_0 := \min_j \{-\Re(\lambda_j)\}, \quad (1.7)$$

onde $\{\lambda_j\}$ são os autovalores de A . Se $\lambda_0 > 0$, então A é denominada matriz Hurwitz.

Definição 1.3 A margem de estabilidade de um polinômio $p(s) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}[s]$ é dada por

$$\gamma_0 := \min_j \{-\Re(z_j)\}, \quad (1.8)$$

onde $\{z_j\}$ são as raízes de $p(z_j) = 0$. Se $\gamma_0 > 0$, então $p(s)$ é denominado polinômio Hurwitz.

1.2.3 Conceitos básicos sobre sistemas multivariáveis

Para apresentar alguns conceitos básicos sobre sistemas multivariáveis, considera-se nesta Seção que $\{A_p, B_p, C_p\}$ é uma realização de uma matriz de transferência $m \times m$ racional, estritamente própria e não-singular $G(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p$.

1.2.3.1 Observabilidade e parâmetros de Markov

Uma realização $\{A_p, B_p, C_p\}$ é *observável* se é possível determinar de forma única o estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + B_p u, \\ y &= C_p x, \end{aligned} \quad (1.9)$$

assumindo-se o conhecimento das matrizes A_p , B_p e C_p e dos sinais $y(t)$ e $u(t)$, $t \geq 0$ (Kailath 1980, Seção 6.2.1). A princípio, isto poderia ser obtido a partir da equação

$$\mathcal{Y}(t) = \mathcal{O}x(t) + \mathcal{T}U(t), \quad (1.10)$$

onde

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C_p \\ C_p A_p \\ \vdots \\ C_p A_p^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

é a *matriz de observabilidade*, \mathbf{T} é a *matriz de transmissão* Toeplitz,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ g_{n-1} & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

com os *parâmetros de Markov*

$$g_0 = 0, \quad g_i = C_p A_p^{i-1} B_p, \quad (1.13)$$

e os vetores

$$\mathcal{Y}(t) := \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{U}(t) := \begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Os *parâmetros de Markov* são definidos de forma única pela matriz de transferência do sistema através da expansão

$$G(s) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i s^{-i}. \quad (1.15)$$

Se a matriz de observabilidade \mathcal{O} possuir posto completo, então a matriz $\mathcal{O}^T \mathcal{O}$ será não-singular, o que significa que $x(t)$ pode ser obtido a partir de (1.10) através de

$$x(t) = (\mathcal{O}^T \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^T [\mathcal{Y}(t) - \mathbf{T}\mathcal{U}(t)]. \quad (1.16)$$

Sendo assim, pode-se mostrar que a realização $\{A_p, B_p, C_p\}$ é observável se e somente se a matriz de observabilidade \mathcal{O} possuir posto completo (Kailath 1980, pp. 353–355).

1.2.3.2 Índice de observabilidade

O *índice de observabilidade* do par $\{C_p, A_p\}$ ($A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$) é o menor inteiro ν , ($1 \leq \nu \leq n$), tal que

$$\mathcal{O}_\nu = \begin{bmatrix} C_p \\ C_p A_p \\ \vdots \\ C_p A_p^{\nu-1} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

tenha posto completo. O índice de observabilidade pode ser interpretado de uma forma bastante interessante: $(\nu - 1)$ é o maior número de derivadas do sinal de saída $y(t)$ necessárias para se determinar o estado inicial $x(0)$ (Kailath 1980, pp. 356–357). Em outras palavras, o índice de observabilidade dá informação sobre a ordem dos filtros de estado utilizados na estrutura do controle multivariável por modelo de referência (vide Capítulo 4).

1.2.3.3 Matriz *interactor* e grau relativo

Outro conceito importante para o controle multivariável por modelo de referência é o *grau relativo* do sistema, que requer o conceito de matriz *interactor* para a sua definição. A matriz *interactor* associada a $G(s)$ é uma matriz triangular inferior com a forma (Wolovich & Falb 1976)

$$\xi(s) = H(s) \text{diag} \{s^{n_1^*}, \dots, s^{n_m^*}\}, \quad (1.18)$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21}(s) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

onde os polinômios $h_{ij}(s)$ são nulos ou divisíveis por s , tal que

$$K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi(s)G(s) \quad (1.20)$$

seja finito e não singular. Deve-se notar que a matriz $\xi(s)$ definida em (1.18) é única (Weller & Goodwin 1994) e mostra-se em (Wolovich & Falb 1976) que $\xi(s)$ é invariante à compensação dinâmica. A matriz $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ em (1.20) é denominada *ganho de alta frequência* (*high frequency gain* — HFG) e aqui (n_1^*, \dots, n_m^*) é o *grau relativo vetorial* de $G(s)$. Se $n_i^* = n^*, \forall i \in \{1, \dots, m\}$, diz-se que $G(s)$ tem *grau relativo vetorial uniforme* n^* . Doravante, *grau relativo vetorial uniforme* será referido abreviadamente como *grau relativo uniforme*.

Para sistemas com grau relativo uniforme tem-se $\xi(s) = s^{n^*}$, então o limite (1.20) pode ser reescrito como

$$K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n^*} G(s). \quad (1.21)$$

A partir da expansão da matriz de transferência $G(s)$ utilizando-se os parâmetros de Markov (1.15) obtém-se

$$K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{n^*} \sum_{i=1}^{+\infty} g_i s^{-i} = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n^*} g_i s^{n^*-i}, \quad (1.22)$$

de onde se conclui que a matriz HFG de sistemas com grau relativo uniforme $n^* \geq 1$ é dada pelo parâmetro de Markov

$$K_p = g_{n^*} = C_p A_p^{n^*-1} B_p. \quad (1.23)$$

Conclui-se também que, para sistemas com grau relativo uniforme $n^* \geq 2$, os parâmetros de Markov $g_i = C_p A_p^{i-1} B_p$ têm que ser nulos $\forall i \in \{1, \dots, n^* - 1\}$ para que o limite (1.22) seja finito.

1.2.4 Controle por modo deslizante

As estratégias de controle propostas nesta Tese são baseadas no *modo deslizante*. O *modo deslizante* pode ser gerado pelo *controle à estrutura variável* e pelo *controle vetorial unitário*, que são temas bastante extensos. Assume-se que o leitor já esteja familiarizado com o controle à *estrutura variável*, que é bem apresentado nos livros

(Utkin 1978, Utkin 1992). Além disso, aqui se aplica o *controle vetorial unitário*¹ (Baida 1993, Edwards & Spurgeon 1998), que é apresentado no Capítulo 2.

1.2.4.1 Equações diferenciais descontínuas

Durante a ocorrência do modo deslizante, o sinal de controle é descontínuo no tempo. Uma vez que nesta Tese são tratados sistemas com sinais descontínuos no tempo, é necessário definir precisamente o significado da solução de equações diferenciais com sinais descontínuos. Aqui se adota a definição de (Filippov 1964). Deve-se notar que o sinal de controle u não é necessariamente uma função do tempo no sentido usual quando o modo de deslizamento é atingido. Para evitar o excesso de notação, $u(t)$ denota funções localmente integráveis que são equivalentes a u , no sentido de *controle equivalente* (Utkin 1978), para qualquer solução de Filippov $x(t)$ do sistema em malha fechada. Deve ser enfatizado que a solução $x(t)$ é, *por definição*, absolutamente contínua. Esta definição é motivada pela representação adequada do comportamento de sistemas físicos quando o mecanismo de chaveamento real tende a um dispositivo ideal com frequência de chaveamento infinita que pode realizar o *modo deslizante “ideal”*, o que origina a equação diferencial descontínua (Filippov 1988, pp. 94–99), (Utkin 1992, Utkin et al. 1999). Então, para qualquer solução, u poderá ser substituído por $u(t)$ no lado direito da equação diferencial que rege a dinâmica do sistema. Embora o controle equivalente $u(t) = u_{eq}(t)$ não seja diretamente disponível, para sistemas afins a filtragem de u por uma matriz de transferência $G(s)$ estritamente própria resulta em $G(s)u = G(s)u(t) = G(s)u_{eq}(t)$. Além disso, se $G(s)$ for um filtro passa-baixas com ganho DC unitário ($G(0) = I$) e banda passante suficientemente larga, então o controle equivalente pode ser aproximado pelo *controle médio* $u_{eq}(t) \approx u_{av}(t) = G(s)u$.

1.2.4.2 Controle equivalente estendido

O *controle equivalente* em sistemas dinâmicos com modos deslizantes é usualmente definido durante a fase de deslizamento (Utkin 1978, Capítulo II). O *controle equivalente estendido* foi definido por (Hsu & Costa 1996, Definição 1.2) como uma generalização que se aplica ao movimento completo do sistema, i.e., dentro e fora da superfície de

¹Também denominado *controle unitário* (Utkin, Guldner & Shi 1999), *controle vetorial* (Utkin et al. 1999) e *vetor unitário* (Edwards & Spurgeon 1998).

deslizamento $\sigma(x(t), t) = 0$. Considere a classe de sistemas não-lineares afins no controle descrita por (Utkin 1978, eq. (2.2))

$$\dot{x} = f(x, t) + \Gamma(x, t)u, \quad (1.24)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\Gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são funções suaves. Seja $x(t)$ uma solução deste sistema para $t \in [0, T)$. Então, o *controle equivalente estendido* é uma função localmente integrável definida em quase todo o intervalo $[0, T)$, obtida a partir da derivada total $\frac{d}{dt}\sigma(x(t), t)$ e de (1.24), e é dado por

$$u_{eq} = [J\Gamma(x(t), t)]^{-1} \left[\frac{d}{dt}\sigma(x(t), t) - Jf(x(t), t) - \frac{\partial}{\partial t}\sigma(x(t), t) \right], \quad (1.25)$$

onde $J := \frac{\partial}{\partial x}\sigma(x(t), t)$ e se assume que $\det[J\Gamma(x(t), t)] \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T)$. Essa expressão está bem definida uma vez que a solução $x(t)$ é absolutamente contínua por definição e, portanto, tem derivadas em quase todo o tempo. No sentido usual, o *controle equivalente* é definido na superfície de deslizamento $\sigma(x(t), t) = 0$, então $\frac{d}{dt}\sigma(x(t), t) = 0$ em (1.25).

1.2.5 Controle vetorial unitário

Uma abordagem similar ao VSC é o controle não-linear robusto projetado pelo método de Lyapunov (Gutman & Leitmann 1975, Gutman 1979) baseado no *controle vetorial unitário* (*unit vector control* — UVC), em substituição à *função sinal* ($\text{sgn}(\cdot)$) que usualmente realiza o chaveamento do controle no VSC. A característica comum dessas abordagens é que estão fundamentadas direta ou indiretamente no modo deslizante. Assim, no que segue, se utiliza aqui o termo *controle por modo deslizante* (*sliding mode control* — SMC) para referir tanto o VSC quanto o UVC.

O SMC é projetado para que o modo deslizante ocorra em alguma variedade do espaço de estado expressa por $\sigma(x) = 0$, onde $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é alguma função suave. Para se apresentar os conceitos principais de uma forma simples, considera-se a planta linear (1.9), onde $x \in \mathbb{R}^n, u, y \in \mathbb{R}^m$, e o hiperplano definido por $\sigma(x) = Sx = 0$. Uma condição necessária para que o modo deslizante ocorra em $Sx = 0$ é $\text{posto}(SB_p) = m$, i.e., posto completo. Em outras palavras, diz-se que o *grau relativo* da matriz de transferência

de u para σ seja uniforme e unitário. É fácil satisfazer esta condição se o estado da planta for disponível. No entanto, quando se mede apenas o sinal de saída da planta (y), esta condição se aplica também à matriz $K_p = C_p B_p$, que deve ter também posto completo, i.e., a matriz de transferência da planta deve ter grau relativo uniforme e unitário, o que é estudado mais detalhadamente no Capítulo 2. Infelizmente, em diversas aplicações práticas, esta condição não é satisfeita e o projeto do SMC por realimentação de saída se torna um problema difícil, particularmente se a planta for incerta (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Seção 1). Uma forma de se aplicar o SMC por realimentação de saída em plantas em que $\text{posto}(C_p B_p) < m$ é através do uso de observadores, conforme é introduzido na Seção 1.5.

1.3 Controle de Sistemas Lineares por Realimentação de Saída

Os artigos (Edwards & Spurgeon 1996, Spurgeon, Edwards & Foster 1996, Edwards & Spurgeon 1997) aplicam um observador por modo deslizante para estimar o estado de plantas multivariáveis de grau relativo uniforme e unitário² a fim de realizar o controle vetorial unitário para seguir uma trajetória de referência. Em contraste, os Capítulos 5 e 6 desta Tese, de forma similar a (Tao & Ioannou 1989, Chien et al. 1996), seguem o desenvolvimento do controle adaptativo por modelo de referência (*model-reference adaptive control* — MRAC) que não usa observador de estado, que é substituído por filtros de entrada e de saída (Tao & Ioannou 1988), (Ioannou & Sun 1996, Seção 9.7.3). Assim, esta abordagem não se baseia num modelo de estado exato e, portanto, parece ser mais natural para sistemas incertos.

A abordagem aqui adotada permite a demonstração de propriedades de estabilidade global exponencial, o que não é feito em (Tao & Ioannou 1989, Chien et al. 1996, Edwards & Spurgeon 1996, Spurgeon et al. 1996, Edwards & Spurgeon 1997). Além disso, aborda-se tanto o controle por modo deslizante de sistemas lineares de grau relativo uniforme e unitário (Hsu, Cunha & Costa 2001, Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2003) quanto de grau relativo uniforme arbitrário (Hsu, Cunha, Costa

²Vide definição de *grau relativo uniforme* na Seção 1.2.3.3.

& Lizarralde 2002a, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002b), que anteriormente fôra abordado apenas por (Chien et al. 1996). O trabalho preliminar (Chien & Fu 1992) considerou apenas o controle de sistemas lineares com grau relativo uniforme igual a um ou dois. Deve-se ressaltar que o controle de sistemas de grau relativo uniforme arbitrário é bastante mais complexo do que o controle de sistemas de grau relativo uniforme e unitário. No entanto, o estudo do controle de sistemas de grau relativo uniforme e unitário é importante para servir de introdução ao caso mais geral e por ter aplicações práticas como o controle de um helicóptero (Spurgeon et al. 1996), o controle de um forno (Edwards & Spurgeon 1997) e o controle tolerante a falhas de uma cadeia de carros proposto na Seção 5.4 desta Tese (Cunha, Costa & Hsu 2003a).

Uma das propostas desta Tese é o controle vetorial unitário por modelo de referência, modo deslizante e realimentação de saída (*unit vector model-reference sliding mode controller* — UV-MRAC) para sistemas lineares multivariáveis incertos. A única informação de que se deve dispor *a priori* sobre a matriz HFG³ da planta (K_p) é o conhecimento de uma matriz S_p tal que $-K_p S_p$ seja Hurwitz. Isto relaxa o requisito de definição de sinal ($K_p S_p > 0$) usualmente assumido em outros métodos (Tao & Ioannou 1988, Tao & Ioannou 1989, Chien et al. 1996), (Ioannou & Sun 1996, Seção 9.7.3).

Em esquemas de controle de sistemas multivariáveis por modo deslizante e realimentação de saída desenvolvidos anteriormente (Edwards & Spurgeon 1996, Spurgeon et al. 1996, Edwards & Spurgeon 1997, Kwan 2001, Choi 2002) não há restrições explícitas sobre a matriz HFG da planta e a matriz de distribuição do controle pode ser incerta $B_p = B_p^{\text{nom}} + \Delta B_p$, onde B_p^{nom} é a matriz nominal de distribuição do controle e ΔB_p é a incerteza. No entanto, assume-se que a matriz de distribuição de saída C_p seja conhecida. Em (Spurgeon et al. 1996, Edwards & Spurgeon 1997, Choi 2002) a incerteza é casada, i.e., $\Delta B_p = B_p^{\text{nom}} F(t)$ onde a norma da matriz $F(t)$ é limitada por $\|F(t)\| \leq k_f < 1$. Restrições similares sobre ΔB_p são assumidas em (Edwards & Spurgeon 1996, Kwan 2001). De forma contrastante, o UV-MRAC não requer a limitação de $\|\Delta B_p\|$, que pode ser uma incerteza descasada. De fato, para uma dada matriz K_p nominal⁴ (K_p^{nom}) e alguma matriz S_p tal que $-K_p^{\text{nom}} S_p$ seja Hurwitz, existe

³Vide definição de *matriz HFG* na Seção 1.2.3.3.

⁴Para sistemas de grau relativo uniforme e unitário tem-se $K_p^{\text{nom}} = C_p^{\text{nom}} B_p^{\text{nom}}$ (vide Capítulo 5).

uma vizinhança aberta em torno de K_p^{nom} tal que $-K_p S_p$ seja Hurwitz. Essa vizinhança não precisa ser limitada nem precisa satisfazer alguma condição de casamento, assim sendo, pode-se trabalhar com incertezas mais gerais. De fato, presume-se ser difícil obter resultado melhor na aplicação do controle vetorial unitário, pois a condição Hurwitz é necessária e suficiente para a atratividade da superfície de deslizamento (vide (Baida 1993, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a) e Seção 2.3 desta Tese).

1.4 Controle de Sistemas Não-Lineares por Realimentação de Saída

Recentemente, (Edwards & Spurgeon 1996) propuseram um controlador por realimentação de saída para o rastreamento de um modelo de referência para sistemas MIMO não-lineares aplicando controle vetorial unitário e um observador por modo deslizante para estimar o estado da planta. Em contraste, as abordagens de (Min & Hsu 2000, Min 2001, Hsu, Costa & Cunha 2003) seguem o desenvolvimento do controle adaptativo por modelo de referência sem o uso de observadores de estado, mas filtros de entrada e de saída que não reconstróem o estado da planta explicitamente.

Os artigos (Hsu, Costa & Cunha 2002b, Hsu, Costa & Cunha 2002a, Hsu et al. 2003) combinam as idéias introduzidas em (Min & Hsu 2000) para tratar perturbações não-lineares em sistemas SISO com o UV-MRAC para sistemas multivariáveis lineares de grau relativo uniforme e unitário de (Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2003). Esse trabalho, aqui descrito no Capítulo 7, possibilita a aplicação do controle a uma classe de sistemas MIMO com perturbações não-lineares que não são necessariamente uniformemente limitadas. A limitação uniforme da perturbação é assumida em (Hsu et al. 2001, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002b, Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2003) e nos Capítulos 5 e 6 desta Tese.

Nesta Tese, a matriz de distribuição do controle (B_p), a matriz de distribuição da saída (C_p) e, conseqüentemente, a matriz de ganho de alta frequência da planta (K_p) podem ser incertas. A principal informação que se deve conhecer *a priori* sobre a matriz

Para o caso geral deve-se considerar a definição da matriz HFG na Seção 1.2.3.3.

K_p é uma matriz S_p tal que $-K_p S_p$ seja Hurwitz. Isto resulta em condições menos restritivas do que outras usualmente encontradas na literatura, como por exemplo, a hipótese de que a incerteza na matriz de distribuição do controle é restrita por algum majorante (e.g., (Edwards & Spurgeon 1998, Capítulo 7)).

Em (Edwards & Spurgeon 1998, Capítulo 7) considera-se o rastreamento de trajetórias de referência baseado no controle vetorial unitário e em observador por modo deslizante. Assume-se o conhecimento da parte linear nominal da planta que deve ter grau relativo uniforme e unitário. Todas as incertezas são inseridas numa perturbação não-linear que deve ser casada com a entrada da planta e limitada por funções conhecidas que dependem apenas da saída e da entrada da planta.

A Seção 3.6 de (Edwards & Spurgeon 1998) considera o controle vetorial unitário de plantas em que a perturbação não-linear pode estar descasada da entrada da planta e é dependente do estado. No entanto, nessa seção se assume que o estado da planta é medido e não se considera o rastreamento de trajetórias. O artigo de (Hui & Žak 1993) considera um problema similar, exceto que o controle é baseado apenas na realimentação de saída, escolhendo-se a superfície de chaveamento de forma que o grau relativo do sistema seja uniforme e unitário. No entanto, a região de estabilidade é limitada, uma vez que se adota uma amplitude constante para a função de modulação do controle por modo deslizante.

Nas abordagens propostas nos Capítulos 7 e 8 desta Tese para o controle de sistemas não-lineares de grau relativo uniforme arbitrário, tanto os termos lineares quanto os não-lineares podem ser incertos e admite-se que esses termos dependam das variáveis de estado não medidas. Além disto, as perturbações podem ser descasadas em relação à entrada da planta.

1.5 Controle Baseado em Observador

Devido a dificuldades práticas envolvidas na medição de todas as variáveis de estado, foram desenvolvidas diversas estratégias baseadas em realimentação de saída para SMC (vide (Oh & Khalil 1995, Shyu, Tsai, Yu & Chang 2000)). A esse respeito, o artigo pioneiro de (Bondarev, Bondarev, Kostyleva & Utkin 1985) introduziu o uso de observadores assintóticos (Kailath 1980) no VSC para resolver um problema fundamental

do SMC, ou seja, a realização do *modo deslizante “ideal”* na prática. A idéia chave de (Bondarev et al. 1985) (vide também (Utkin 1983, Utkin et al. 1999)) é o projeto do controle para se obter o modo deslizante no estado observado \hat{x} (Hsu 1997, Seção 2), (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Seção 1.1).

Para ilustrar a aplicação de observadores em SMC, considere-se o observador assintótico para a planta (1.9) dado por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A_p \hat{x} + B_p u - L \tilde{y}, \\ \tilde{y} &= C_p \hat{x} - y,\end{aligned}\tag{1.26}$$

no qual se assume o conhecimento dos valores das matrizes A_p , B_p e C_p da planta. A matriz de realimentação do erro de saída do observador (L) deve ser escolhida para que a matriz $(A_p - LC_p)$ seja Hurwitz, o que é sempre possível se o par $\{C_p, A_p\}$ for observável (Kailath 1980, Seções 4.1 e 7.3). Assim, garante-se que a dinâmica do erro de estimação do estado $\tilde{x}(t) := \hat{x}(t) - x(t)$, dada por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= (A_p - LC_p) \tilde{x}, \\ \tilde{y} &= C_p \tilde{x},\end{aligned}\tag{1.27}$$

seja assintoticamente estável. A variedade em que ocorre o modo deslizante é dada em termos de

$$\sigma(\hat{x}) = S \hat{x},\tag{1.28}$$

cuja derivada em relação ao tempo obtida a partir de (1.26) é

$$\dot{\sigma} = SA_p \hat{x} + SB_p u - SLC_p \tilde{x},\tag{1.29}$$

onde o termo $SLC_p \tilde{x}$ decai exponencialmente a zero. Assim, a condição de *posto* apresentada na Seção 1.2.5 para a existência do modo deslizante se aplica ao produto SB_p , i.e., a matriz S tem que ser escolhida para que SB_p tenha *posto completo*. Deve-se notar que σ é um erro auxiliar que pode ser calculado para qualquer S escolhido, uma vez que \hat{x} é totalmente conhecido.

Então, o deslizamento “ideal” pode ser obtido utilizando-se observadores de estado assintóticos, independentemente do grau relativo original da matriz de transferência da planta $G_{yu}(s)$.

Se o problema a ser resolvido for a estabilização da planta sem se requerer o casamento com um modelo de referência, então $G_{yu}(s)$ não precisa ser de fase mínima. Este requisito se aplica apenas à matriz de transferência $G_{\sigma u}(s)$ (vide Figura 1.1), uma vez que o deslizamento é governado pelos zeros de transmissão de $G_{\sigma u}(s)$ (Young, Kokotović & Utkin 1977).

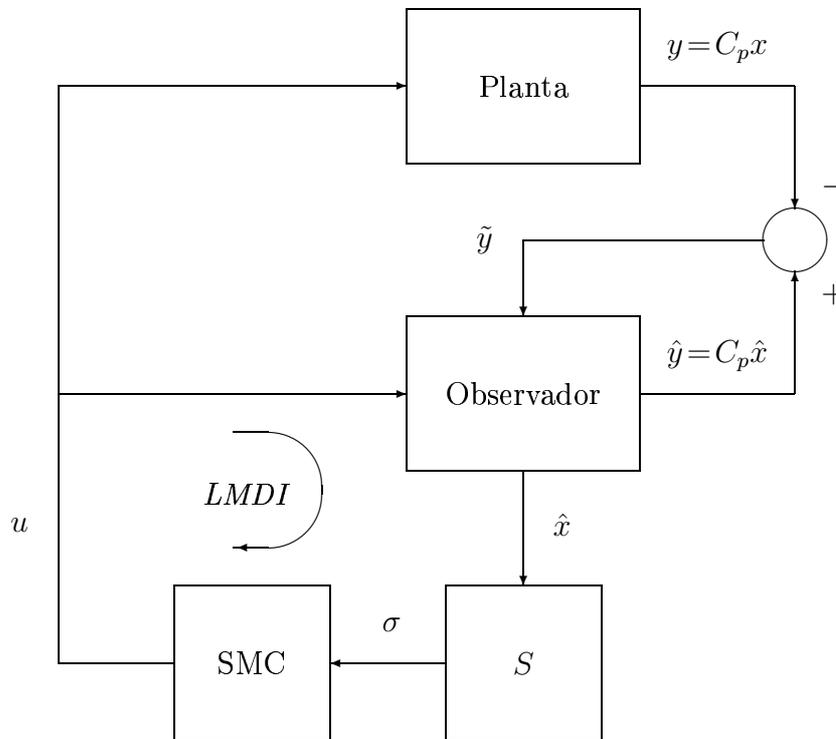


FIGURA 1.1: Controle por modo deslizante utilizando-se um observador de estado. *LMDI* indica o “Laço do Modo Deslizante Ideal”.

O ponto principal é que o sistema baseado no observador possibilita a existência de uma matriz de transferência linear com grau relativo uniforme $n^* = 1$ e de fase mínima fechando um laço, denominado “Laço do Modo Deslizante Ideal” (*LMDI*), em torno do bloco SMC (controle descontínuo), independentemente do grau relativo da planta, conforme é destacado na Figura 1.1. A existência de um *LMDI* é necessária para a realização do *modo deslizante “ideal”* (Utkin et al. 1999, Seção 8.3).

1.5.1 Observadores de alto ganho para sistemas incertos

Em (Bondarev et al. 1985) e na seção anterior se assume o conhecimento completo da planta. Para se garantir robustez a incertezas na planta, foram desenvolvidos observadores por modos deslizantes (Slotine, Hedrick & Misawa 1987, Walcott & Žak 1988) ou de alto ganho (Emelyanov et al. 1992*a*, Emelyanov et al. 1992*b*, Esfandiari & Khalil 1992, Oh & Khalil 1995, Lu & Spurgeon 1998, Lu & Spurgeon 1999).

Nos trabalhos anteriores sobre o controle baseado em observadores robustos, o objetivo mais usual é a estabilização através da realimentação da saída (e.g., (Walcott & Žak 1988, Emelyanov et al. 1992*a*, Emelyanov et al. 1992*b*, Esfandiari & Khalil 1992, Žak & Hui 1993, Oh & Khalil 1995, Lu & Spurgeon 1998, Lu & Spurgeon 1999)), mas o artigo (Oh & Khalil 1997) aborda o rastreamento de trajetórias.

Um exemplo simples e ilustrativo de estabilização baseado em SMC utilizando-se um observador de alto ganho (*high gain observer* — HGO) é apresentado em (Oh & Khalil 1995). Nessa abordagem, o *inverso* do ganho do observador é representado pelo parâmetro pequeno ε e um resultado típico é a existência de uma constante $\varepsilon^* > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, então se pode garantir o funcionamento do controlador. Por exemplo, considere-se a planta

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u + d(x_1), \\ y &= x_1.\end{aligned}\tag{1.30}$$

Então, considerando-se que $d(x_1)$ é uma perturbação, um HGO poderia ser (Oh & Khalil 1995)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \frac{1}{\varepsilon}(y - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= u + \frac{1}{\varepsilon^2}(y - \hat{x}_1).\end{aligned}\tag{1.31}$$

O efeito da perturbação sobre o estado estimado (\hat{x}_1, \hat{x}_2) é reduzido na medida que $\varepsilon \rightarrow +0$. Este HGO apresenta problemas inerentes com sensibilidade a ruído, além de poder exibir o indesejável fenômeno *peaking* (vide Seção 9.6.2) nos sinais do observador

e do controlador (Esfandiari & Khalil 1992, Oh & Khalil 1995). No Capítulo 9 desta Tese é desenvolvido um esquema VSC baseado num HGO livre de *peaking* para o controle por modelo de referência de sistemas SISO lineares e incertos.

1.6 Formulação do Problema

1.6.1 Planta

Nesta Tese considera-se plantas multivariáveis, observáveis e controláveis da forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + \phi(x_p, t) + B_p u, \\ y &= C_p x_p,\end{aligned}\tag{1.32}$$

onde $x_p \in \mathbb{R}^n$ é o estado da planta, $u \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de entrada, $y \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de saída e $n \geq m$. A perturbação $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é incerta e pode ser dependente do estado. O estado x_p não é medido. As matrizes A_p , B_p e C_p são incertas.

A matriz de transferência do subsistema linear é

$$G(s) := C_p (sI - A_p)^{-1} B_p.\tag{1.33}$$

1.6.2 Hipóteses sobre a planta

Assume-se que a planta satisfaz as seguintes condições:

- (A1) Os zeros de transmissão de $G(s)$ têm parte real estritamente negativa.
- (A2) $G(s)$ tem posto completo e é estritamente própria.
- (A3) O índice de observabilidade ν de $G(s)$ é conhecido.
- (A4) A matriz *interactor* $\xi(s)$ é diagonal e $G(s)$ possui grau relativo vetorial uniforme n^* .
- (A5) Para a matriz de ganho de alta frequência K_p assume-se que é conhecida uma matriz $S_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de forma que $-K_p S_p$ seja Hurwitz.

(A6) A perturbação $\phi(x_p, t)$ é contínua por partes em relação a t e localmente Lipschitz em relação a x_p .

(A7) O termo não-linear ϕ satisfaz $\|\phi(x_p, t)\| \leq k_x \|x_p\| + \varphi(y, t)$, $\forall x_p, t$, onde $k_x \geq 0$ é um escalar conhecido e $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função conhecida, contínua por partes em relação a t e contínua em relação a y .

A hipótese de fase mínima (A1) e a hipótese (A2) são padrão no controle adaptativo por modelo de referência (Ioannou & Sun 1996, Tao & Ioannou 1989, Chien et al. 1996).

A hipótese (A3) pode ser afrouxada de forma a se requerer apenas um majorante para ν , como é feito em (Ioannou & Sun 1996). No entanto, isto acarretaria no aumento da ordem dos filtros de estado utilizados na estrutura do controle por modelo de referência e no aumento do número de parâmetros do controlador.

A hipótese (A4) sobre a matriz *interactor* é discutida detalhadamente no que segue (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Seção 3.2). No caso monovariável, a hipótese (A4) equivale ao conhecimento do grau relativo de $G(s)$, o que é usual no controle MRAC (Ioannou & Sun 1996, Seção 6.7.3). A literatura sobre controle adaptativo ou VSC multivariável usualmente assume algum conhecimento prévio sobre a matriz *interactor* (Tao & Ioannou 1988, Tao & Ioannou 1989, Chien & Fu 1992, Chien et al. 1996). Uma vez que está sendo considerado o controle de sistemas incertos, algumas hipóteses podem ser inaceitáveis na prática. Nesse sentido a hipótese (A4), também assumida por (Costa, Hsu, Imai & Kokotović 2003), pode parecer muito restritiva. No entanto, pode-se argumentar que seria possível alcançar uma matriz *interactor* diagonal com o uso de um pré-compensador adequado. De fato, na maioria dos casos (num sentido genérico), o Lema 2.6 de (Tao & Ioannou 1988) garante a existência de um pré-compensador $W_p(s)$ de forma que $G(s)W_p(s)$ tenha matriz *interactor* diagonal (vide também (Gibbens, Schwartz & Fu 1993, Schwartz & Yan 1995)). Além disso, $W_p(s)$ não depende dos parâmetros de $G(s)$. Uma vez que a matriz *interactor* seja conhecida, diagonal e se o grau relativo de cada elemento de $G(s)$ (ou de $G(s)W_p(s)$) for conhecido, então $\xi(s)$ poderá ser determinada sem qualquer conhecimento prévio sobre os parâmetros de $G(s)$ (Wolovich & Falb 1976). Para se obter o grau relativo vetorial uniforme, pode-se seguir o método de (Chien et al. 1996) que aplica um pré-compensador resultando num grau relativo vetorial uniforme e igual a $n^* = \max_i \{n_i^*\}$.

Nesta Tese emprega-se o controle vetorial unitário, o que requer o cumprimento da hipótese (A5) e estende significativamente a classe de plantas que se pode controlar. Trabalhos anteriores requerem que a matriz $K_p S_p$ seja positiva definida e algumas abordagens também requerem que $K_p S_p$ seja simétrica (Ioannou & Sun 1996, Tao & Ioannou 1988, Tao & Ioannou 1989, Chien & Fu 1992, Chien et al. 1996). A simetria de $K_p S_p$ é uma propriedade não genérica que pode ser facilmente destruída por incertezas arbitrariamente pequenas em K_p . Além disso, se $K_p S_p$ for positiva definida, então isto implica que $-K_p S_p$ é Hurwitz. No entanto, a recíproca não é verdadeira, conforme a Proposição 2.2. Deve-se ressaltar que a hipótese (A5) pode não ser trivialmente satisfeita, pois assume-se que a matriz S_p é constante, mas a matriz K_p pode ser incerta, uma vez que o sistema é incerto. Nas Seções 2.3 e 2.4 são discutidas as condições sobre a matriz de ganho de alta frequência para sistemas a estrutura variável baseados na *função sinal* e para sistemas com adaptação paramétrica baseados na fatoração da matriz de ganho de alta frequência.

A hipótese (A6) sobre a não-linearidade garante a existência local e a unicidade da solução de (1.32) para $u \equiv 0$. A perturbação não-linear ϕ é desconhecida, entretanto, a hipótese (A7) estabelece majorantes para a sua norma. Aqui não se impõe nenhuma restrição forte sobre φ . Então, poderia se ter $\varphi(y) = \|y\|^2$, por exemplo. Assim, se admite tratar sistemas que apresentam o fenômeno de escape em tempo finito em malha aberta. Nos Capítulos 5 e 6, as hipóteses (A6) e (A7) são reformuladas para o caso de sistemas lineares, nos quais ϕ é função apenas do tempo e é uniformemente limitada.

É importante ressaltar que as incertezas em A_p , B_p , C_p e ϕ podem ser descasadas da entrada, como em (Tao & Ioannou 1989, Hui & Žak 1993, Spurgeon & Davies 1993, Chien et al. 1996). Esta é uma vantagem em relação a abordagens em que se assume que as incertezas estão casadas com a entrada, isto é, estão explicitamente concentradas numa perturbação de entrada (Walcott & Žak 1988, Kwan 2001, Žak & Hui 1993, Edwards & Spurgeon 1996, Edwards & Spurgeon 1997).

1.6.3 Modelo de referência

O modelo de referência é definido como (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Seção 3.3)

$$y_M = W_M(s)r, \quad (1.34)$$

onde $r, y_M \in \mathbb{R}^m$ e, sem perda de generalidade,

$$W_M(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s + \gamma_1}, \dots, \frac{1}{s + \gamma_m} \right\} L^{-1}(s), \quad \gamma_j > 0, \quad (j = 1, \dots, m), \quad (1.35)$$

$$L(s) = L_1(s)L_2(s) \cdots L_N(s), \quad N := n^* - 1, \quad (1.36)$$

$$L_i(s) = (s + \alpha_i)I, \quad \alpha_i > 0, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.37)$$

Assume-se que o sinal de referência $r(t)$ é contínuo por partes e uniformemente limitado. Este modelo de referência é adequado a plantas com matriz de transferência $G(s)$ de grau relativo uniforme n^* , o que equivale à matriz *interactor* ser da forma $\xi(s) = s^{n^*}I$. Para que a definição de $L(s)$ seja completa, se $n^* = 1$, então $L(s) = I$. Assim sendo, $W_M(s)$ tem o mesmo grau relativo n^* de $G(s)$ e seu ganho de alta frequência é a matriz identidade (i.e., $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi(s)W_M(s) = I$).

Para se utilizar modelos de referência mais gerais pode-se pré-processar o sinal de referência $r(t)$ através de um filtro estável apropriado, conforme é sugerido em (Sastry & Bodson 1989, Seção 6.3.3).

1.6.4 Objetivo de controle

O objetivo é obter a convergência assintótica do erro de saída

$$e(t) := y(t) - y_M(t) \quad (1.38)$$

para zero ou para uma pequena vizinhança de zero no espaço do erro.

1.7 Organização deste Texto

Este texto é organizado como segue. Os Capítulos 2 a 4 apresentam conceitos e Lemas básicos para o desenvolvimento das estratégias de controle propostas nos capítulos seguintes. O controle vetorial unitário é revisado no Capítulo 2, onde é comparado com o controle a estrutura variável baseado na *função sinal*. O Capítulo 3 apresenta a aproximação e a síntese de filtros de primeira ordem utilizados na função de modulação do controle vetorial unitário. A parametrização do controle por modelo de referência para sistemas lineares multivariáveis com perturbação de entrada é revisada no Capítulo 4, no qual destacam-se as condições de casamento da planta em malha fechada com o modelo de referência e o desenvolvimento das equações da dinâmica do erro.

O Capítulo 5 apresenta o desenvolvimento do controle vetorial unitário para o caso mais simples, isto é, sistemas lineares de grau relativo uniforme e unitário. A generalização do controle para sistemas lineares de grau relativo uniforme arbitrário é feita no Capítulo 6 seguindo-se o desenvolvimento de (Hsu et al. 1994, Hsu, Lizarralde & Araújo 1997) para o caso SISO.

O controle de uma classe de sistemas não-lineares de grau relativo uniforme e unitário é desenvolvido no Capítulo 7 e é estendido para uma classe de sistemas não-lineares de grau relativo uniforme arbitrário no Capítulo 8.

O Capítulo 9 revisa os observadores de alto ganho para, em seguida, apresentar o desenvolvimento de um esquema VSC baseado num HGO livre de *peaking* para o controle por modelo de referência de sistemas SISO, lineares e incertos. No final do capítulo são apresentados resultados experimentais para comprovar a eficácia do esquema proposto em condições bastante realistas.

O Capítulo 10 apresenta conclusões sobre o trabalho realizado nesta Tese e propõe algumas direções em que esta linha de pesquisa poderá seguir.

As publicações realizadas durante o desenvolvimento deste trabalho de doutorado são relacionadas no Apêndice A.

As provas de alguns Lemas apresentados ao longo do texto principal bem como alguns Lemas foram incluídos nos Apêndices B e C. Isto foi feito para facilitar a organização e a compreensão das principais contribuições desta Tese, que estão no texto principal.

O Apêndice D sumariza alguns aspectos dos métodos numéricos utilizados nesta Tese para o projeto de controladores e simulação.

Capítulo 2

Controle Vetorial Unitário

O α e o Ω desta Tese, o zero e o infinito estão na Proposição 2.1 e no Teorema 2.3.

Nesta Tese adota-se a lei de controle vetorial unitário (*unit vector control* — UVC) originalmente proposta por (Gutman & Leitmann 1975) (vide também (Gutman 1979, Young, Utkin & Özgüner 1999))

$$U = -\rho(x, t) \frac{v(x)}{\|v(x)\|}, \quad (2.1)$$

onde x é o vetor de estado, $v(x)$ é uma função vetorial do estado ou de parte deste (e.g., saída) e $\rho(x, t) \geq 0, \forall x, \forall t \geq 0$. A função $\rho(\cdot)$, denominada *função de modulação*, deve ser sintetizada de modo a induzir o deslizamento na variedade $v(x) = 0$. Doravante, assume-se que $U = 0$ se $v(x) = 0$, a fim de se definir completamente a lei de controle.

A Proposição 2.1, apresentada a seguir, estabelece as propriedades básicas de estabilidade e de convergência do controle vetorial unitário. Essa proposição relaxa a hipótese de que $\rho(x, t)$ nunca seja negativo, i.e., se requer apenas que $\exists t_p \geq 0$ tal que $\rho(x, t) \geq 0, \forall x, \forall t \geq t_p$. Isto é útil na análise de algoritmos baseados no UVC para se incluir o efeito do transitório dos filtros aplicados na geração de ρ , representado pelo sinal $\pi_2(t) \in \mathbb{R}$ introduzido na desigualdade (2.5). No que segue, os termos $\pi_i(t)$ são sinais exponencialmente decrescentes que satisfazem a desigualdade

$$\|\pi_i(t)\| \leq R \exp(-\lambda t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.2)$$

para algumas constantes reais $R \geq 0$ e $\lambda > 0$.

Proposição 2.1 *Considere o sistema MIMO*

$$\dot{e}(t) = A_M e(t) + K [U + d_U(t) + \pi_1(t)] , \quad (2.3)$$

$$U = -\rho(e, t) \frac{e}{\|e\|} , \quad (2.4)$$

onde $A_M, K \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $d_U(t)$ e ρ são LI. Assume-se que os sinais $\pi_1(t)$ e $\pi_2(t)$ são LI e exponencialmente decrescentes. Se $-K$ é Hurwitz e

$$\rho(e, t) \geq \delta + c_e \|e(t)\| + (1 + c_d) \|d_U(t)\| + \pi_2(t) , \quad \forall t \geq 0 , \quad (2.5)$$

onde $c_e, c_d \geq 0$ são constantes adequadas e $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária, então $\exists k_1, k_2, \lambda_1 > 0$ tais que a desigualdade

$$\|e(t)\| \leq (k_1 \|e(0)\| + k_2 R) \exp(-\lambda_1 t) \quad (2.6)$$

é satisfeita $\forall t \geq 0$. Assim, o sistema é globalmente exponencialmente estável quando $\pi_1(t) \equiv 0$ e $\pi_2(t) \equiv 0$. Além disso, se $\delta > 0$, então o modo deslizante no ponto $e = 0$ é iniciado em algum tempo finito $t_s \geq 0$.

Prova: Uma vez que $-K$ é Hurwitz, existem matrizes $P = P^T > 0$ e $Q = Q^T > 0$ que satisfazem a equação de Lyapunov

$$K^T P + P K = Q . \quad (2.7)$$

Então, considere-se a forma quadrática

$$V(e) = e^T P e , \quad (2.8)$$

que possui derivada temporal dada por

$$\dot{V} = -\rho \frac{e^T Q e}{\|e\|} + e^T (A_M^T P + P A_M) e + 2e^T P K (d_U + \pi_1) \quad (2.9)$$

$$\leq -\rho \lambda_{\min}(Q) \|e\| + \lambda_{\max}(A_M^T P + P A_M) \|e\|^2 + 2\sigma_{\max}(P K) \|e\| (\|d_U\| + \|\pi_1\|) . \quad (2.10)$$

Escolhendo-se uma função de modulação ρ que satisfaça a desigualdade (2.5) com

$$c_e \geq \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(A_M^T P + P A_M)}{\lambda_{\min}(Q)} + \bar{\delta}, 0 \right\}, \quad c_d \geq 2 \frac{\sigma_{\max}(PK)}{\lambda_{\min}(Q)} - 1, \quad (2.11)$$

onde a constante $\bar{\delta} > 0$ estabelece a margem de estabilidade desejada, obtém-se

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(Q) [\delta + \bar{\delta} \|e\| - (2 + c_d)R \exp(-\lambda t)] \|e\|. \quad (2.12)$$

Agora, tomando-se a desigualdade de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_{\min}(P) \|e\|^2 \leq V(e) \leq \lambda_{\max}(P) \|e\|^2, \quad (2.13)$$

e definindo-se as constantes $c_{Q1} = \lambda_{\min}(Q)/\sqrt{\lambda_{\max}(P)}$ (> 0), $c_{Q2} = \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$ (> 0) e $c_D = (2 + c_d)\lambda_{\min}(Q)/\sqrt{\lambda_{\min}(P)}$ (> 0), a desigualdade (2.12) pode ser reescrita como

$$\dot{V} \leq -\delta c_{Q1} \sqrt{V} - \bar{\delta} c_{Q2} V + c_D R \exp(-\lambda t) \sqrt{V}. \quad (2.14)$$

Definindo $r := \sqrt{V}$, obtém-se

$$2\dot{r} \leq -\delta c_{Q1} - \bar{\delta} c_{Q2} r + c_D R \exp(-\lambda t). \quad (2.15)$$

Conseqüentemente, aplicando o Lema B.1 (vide Seção B.1 no Apêndice B) pode-se concluir que

$$r(t) \leq [r(0) + cR] \exp(-\lambda_1 t), \quad (2.16)$$

onde $c > 0$ é uma constante apropriada e $\lambda_1 < \min(\lambda, \bar{\delta} c_{Q2}/2)$. Aplicando-se a desigualdade de Rayleigh-Ritz (2.13) em (2.16), obtém-se finalmente a desigualdade (2.6). Se $\delta > 0$ em (2.5), do Lema B.1 pode-se concluir, também, que $\exists t_1 \geq 0$ tal que $r(t) = 0$, $\forall t \geq t_1$, assim, o modo deslizante em $e = 0$ começa em algum tempo finito t_s , $0 \leq t_s \leq t_1$. ■

Corolário 2.1 (Proposição 2.1) *Se $A_M = -\gamma_M I$, $\gamma_M > 0$, então os resultados da*

Proposição 2.1 são válidos com $c_e = 0$ na função de modulação (2.5).

Prova: Com $A_M = -\gamma_M I$, $\gamma_M > 0$, tem-se que $\lambda_{\max}(A_M^T P + P A_M) = -2\gamma_M \lambda_{\min}(P)$ e a desigualdade (2.12) é satisfeita com $c_e = 0$ e $\bar{\delta} = 2\gamma_M \lambda_{\min}(P) / \lambda_{\min}(Q)$. A prova pode ser completada seguindo-se os passos da prova da Proposição 2.1. ■

O Corolário 2.1 apresenta uma condição em que se pode escolher $c_e = 0$ no limitante inferior da função de modulação (2.5), o que possibilita simplificar a sua implementação.

É importante ressaltar que a hipótese de que o ganho de alta frequência K do sistema seja *positivamente estável* ($-K$ seja Hurwitz) assumida na Proposição 2.1 é uma condição necessária e suficiente para a aplicação do controle vetorial unitário, conforme se conclui à frente na Seção 2.3. A relevância desta condição é avaliada nas Seções 2.3 e 2.4.

2.1 Notas sobre Matrizes de Transferência Estritamente Reais Positivas

A Proposição 2.1 considera sistemas MIMO com matriz de transferência $W_M(s)K$, onde $W_M(s) = (sI - A_M)^{-1}$ e $-K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é Hurwitz. Para sistemas SISO, se A_M for Hurwitz, este resultado pode ser estendido através do Lema de *Kalman-Yakubovich-Meyer* para qualquer $W_M(s)$ estritamente real positivo (*strictly positive real* — SPR), uma vez que $W_M(s)k$ ($k \in \mathbb{R}$) será SPR para qualquer $k > 0$ (Hsu et al. 1997). Isto é aplicado no Lema C.1 destinado a sistemas SISO (Apêndice C). No caso MIMO, se $W_M(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$ for uma matriz de transferência SPR e $-K$ for uma matriz Hurwitz genérica, então $W_M(s)K$ pode não ser SPR, como se pode concluir a partir do Lema 10.1 de (Khalil 1996, pp. 404–405), conforme é apresentado a seguir.

Lema 2.1 (Lema 10.1 de (Khalil 1996)) *Seja $Z(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$. Assume-se que $\det[Z(s) + Z^T(-s)]$ não seja identicamente nulo. Então, $Z(s)$ é estritamente real positiva se e somente se*

- (i) $Z(s)$ for Hurwitz, ou seja, os pólos de todos os elementos de $Z(s)$ tiverem parte real estritamente negativa,
- (ii) $Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) > 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, e

(iii) uma das três condições a seguir for satisfeita:

(iii.1) $Z(\infty) + Z^T(\infty) > 0$;

(iii.2) $Z(\infty) + Z^T(\infty) = 0$ e $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 [Z(j\omega) + Z^T(-j\omega)] > 0$;

(iii.3) $Z(\infty) + Z^T(\infty) \geq 0$ (é singular mas não é nula) e existem constantes positivas σ_0 e ω_0 tais que $\omega^2 \sigma_{\min}[Z(j\omega) + Z^T(-j\omega)] \geq \sigma_0, \forall |\omega| \geq \omega_0$.

Analizando-se as condições do Lema 2.1, conclui-se que se $Z(s)$ for SPR, então utilizando-se a matriz de ganho $K = kI$, com $k \in \mathbb{R}$ e $k > 0$, resultará que a matriz de transferência $(Z(s)K)$ também será SPR.

Por outro lado, para mostrar que $-K$ Hurwitz poderá resultar em $(Z(s)K)$ não-SPR, considera-se por exemplo a matriz de transferência

$$Z(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

que é SPR como se pode concluir verificando-se que $Z(s)$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii.2) do Lema 2.1. Assumindo-se

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

sendo $-K$ Hurwitz, então

$$Z(s)K = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{-10}{s+1} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Neste exemplo tem-se

$$Z(j\omega)K + K^T Z^T(-j\omega) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\omega^2+1} & \frac{-10}{j\omega+1} \\ \frac{-10}{-j\omega+1} & \frac{4}{\omega^2+4} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

que é uma matriz de sinal indefinido para $\omega = 0$, o que contraria a condição (ii) do Lema 2.1, conseqüentemente $(Z(s)K)$ não é SPR. Conclui-se a partir deste contra-exemplo que *assumindo-se que a matriz de transferência $Z(s)$ seja SPR, a condição de que $-K$ seja Hurwitz não é suficiente para que $(Z(s)K)$ seja SPR.*

Outra observação importante vem do fato de que as equações (2.4) e (2.5) poderiam ser reescritas como

$$U = -c_e e(t) - \rho_d(t) \frac{e}{\|e\|}, \quad (2.21)$$

$$\rho_d(t) \geq \delta + (1 + c_d) \|d_U(t)\|, \quad (2.22)$$

onde se enfatiza que a inclusão do termo $(c_e \|e(t)\|)$ na função de modulação (2.5) equivale à inclusão do termo de realimentação proporcional $(c_e e(t))$ em (2.21). O termo $(c_e \|e\|)$ em (2.5) pode ser adicionado ao termo $(A_M e)$ em (2.3), o que resulta na matriz de transferência dada por $(sI - A_M + c_e K)^{-1} K$, que é estável com realimentação por ganho escalar $U = -ke$, $\forall k \in \mathbb{R}^+$, desde que $-K$ seja Hurwitz e c_e seja suficientemente grande. É importante observar que as funções de transferência SPR, utilizadas nas abordagens SISO MRAC, também são estáveis com realimentação por ganho escalar. Conclui-se então que uma propriedade em comum nas abordagens SISO e MIMO MRAC por modos deslizantes é a *estabilidade para a realimentação por ganho escalar*.

2.2 Lemas Sobre o Controle Vetorial Unitário

A Seção 4.1 de (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a) apresenta diversos Lemas que servem como ferramentas para o desenvolvimento das leis para o controle vetorial unitário de sistemas multivariáveis com grau relativo vetorial uniforme arbitrário. Esses Lemas, enunciados a seguir, são generalizações para o caso multivariável dos Lemas correspondentes para sistemas SISO apresentados em (Hsu et al. 1997) (vide Apêndice C).

Lema 2.2 *Considere o sistema MIMO*

$$\varepsilon(t) = M(s) [U + d_U(t) + \pi_1(t)], \quad (2.23)$$

onde $M(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$ é de fase mínima, tem grau relativo vetorial uniforme e unitário e K é a sua matriz de ganho de alta frequência. Assume-se que $-K$ é Hurwitz, o sinal

$d_U(t)$ é LI e os sinais $\pi_1(t)$ e $\pi_2(t)$ são LI e exponencialmente decrescentes. Se

$$U = -\rho(\varepsilon, t) \frac{\varepsilon}{\|\varepsilon\|}, \quad (2.24)$$

$$\rho(\varepsilon, t) \geq \delta + c_\varepsilon \|\varepsilon\| + (1 + c_d) \|d_U(t)\| + c_f \varepsilon_f + \pi_2(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (2.25)$$

onde ρ é LI, o sinal ε_f é gerado pelo filtro

$$\dot{\varepsilon}_f = -\gamma_0 \varepsilon_f + \|\varepsilon\|, \quad (2.26)$$

$\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária e $c_f, \gamma_0, c_\varepsilon, c_d$ são constantes não negativas apropriadas, então $\exists c_1, c_2, \lambda_1 > 0$ tais que a desigualdade

$$\|\varepsilon(t)\| \text{ e } \|x_{ea}(t)\| \leq [c_1 \|x_{ea}(0)\| + c_2 R] \exp(-\lambda_1 t) \quad (2.27)$$

é satisfeita $\forall t \geq 0$, onde $x_{ea} := [x_e^T, \varepsilon_f^T]^T$ é o vetor de estado completo do sistema em malha fechada, sendo x_e o estado de qualquer realização estabilizável e detectável de (2.23) (possivelmente não-mínima). Além disso, se $\delta > 0$, então $\varepsilon(t)$ se torna identicamente nulo após algum tempo finito $t_s \geq 0$.

Prova: Vide seção B.2.1 no Apêndice B. ■

Uma versão mais especializada do Lema 2.2 é o seguinte Corolário.

Corolário 2.2 (Lema 2.2) *Supõe-se que*

$$M(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s + \gamma_1}, \dots, \frac{1}{s + \gamma_m} \right\} K, \quad (2.28)$$

no Lema 2.2. Então, todos os resultados do Lema 2.2 são válidos com qualquer função de modulação que seja LI e que satisfaça a desigualdade

$$\rho(\varepsilon, t) \geq \delta + c_\varepsilon \|\varepsilon\| + (1 + c_d) \|d_U(t)\| + \pi_2(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (2.29)$$

Além disso, se $\gamma_j = \gamma > 0$, ($\forall j \in \{1, \dots, m\}$), então pode-se escolher $c_\varepsilon = 0$ na função de modulação (2.29).

Prova: Vide seção B.2.2 no Apêndice B. ■

O seguinte Lema é uma versão revisada do Lema 2 em (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a). Para provar este Lema foi necessário adicionar a nova restrição (2.35) sobre a função de modulação. A importância desta restrição deverá ser reavaliada, uma vez que não parecia necessária originalmente.

Lema 2.3 *Considere o sistema MIMO*

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\varepsilon}}(t) &= -\alpha\hat{\varepsilon}(t) + K [U + d_U(t)] , \\ \varepsilon(t) &= \hat{\varepsilon}(t) + \pi_1(t) + \beta(t) ,\end{aligned}\tag{2.30}$$

o qual tem relação entrada-saída dada por

$$\varepsilon(t) = L^{-1}(s)K [U + d_U(t)] + \pi_1(t) + \beta(t) ,\tag{2.31}$$

onde $L(s) = (s + \alpha)I$, I é a matriz identidade $m \times m$, $\hat{\varepsilon}, \varepsilon, U, d_U, \beta, \pi_1 \in \mathbb{R}^m$, $\alpha > 0$, $-K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é Hurwitz, $\pi_1(t)$ é exponencialmente decrescente e os sinais $\pi_1(t)$ e $\beta(t)$ são absolutamente contínuos, $\forall t \geq 0$. Assume-se o conhecimento de um majorante $\bar{d}_U(t) \geq \|d_U(t)\|$, $\forall t \geq 0$, para a perturbação $d_U(t)$, sendo $d_U(t)$ e $\bar{d}_U(t)$ LI. Se

$$U = -\rho(t) \frac{\varepsilon}{\|\varepsilon\|} ,\tag{2.32}$$

$$\rho(t) = \bar{\rho}(t) + \pi_2(t) ,\tag{2.33}$$

onde o sinal escalar $\pi_2(t)$ é LI e exponencialmente decrescente e $\bar{\rho}$ é LI e satisfaz

$$\bar{\rho}(t) \geq (1 + \hat{c}_d)\bar{d}_U(t) ,\tag{2.34}$$

$$\bar{\rho}(t) \leq (1 + \tilde{c}_d)\bar{d}_U(t) ,\tag{2.35}$$

$\forall t \geq 0$, onde \hat{c}_d é uma constante adequada tal que $0 < \hat{c}_d \leq \tilde{c}_d < +\infty$, então, $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$ tais que os sinais $\varepsilon(t)$ e $\hat{\varepsilon}(t)$ são majorados por

$$\|\varepsilon(t)\| \text{ e } \|\hat{\varepsilon}(t)\| \leq c_1\|\hat{\varepsilon}(0)\| \exp(-\alpha t) + c_2 R \exp(-\lambda_1 t) + c_3\|\beta_t\|_\infty ,\tag{2.36}$$

onde $\lambda_1 < \min(\alpha, \lambda)$.

Prova: Vide seção B.2.3 no Apêndice B. ■

2.3 Controle Vetorial Unitário Versus Controle à Estrutura Variável

Diversos sistemas de controle à estrutura variável (VSC — *variable structure control*) tradicionais são baseados na *função sinal* ($x \in \mathbb{R}^m$)

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(x_1) \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(x_m) \end{bmatrix}, \quad \operatorname{sgn}(x_i) := \begin{cases} 1 & \text{se } x_i > 0, \\ 0 & \text{se } x_i = 0, \\ -1 & \text{se } x_i < 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Para se comparar as propriedades de estabilidade do VSC com as propriedades do UVC, enuncia-se o seguinte Teorema provado em (Hsu, Kaszkurewicz & Bhaya 2000, Teorema 2.3).

Teorema 2.1 *Considere o sistema descontínuo*

$$\dot{x} = K \operatorname{sgn}(x), \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (2.38)$$

Então $x(t) = 0$ é uma solução globalmente assintoticamente estável se e somente se uma das seguintes condições for satisfeita:

- (i) $k_{12}k_{21} = 0$, $k_{11} < 0$ e $k_{22} < 0$.
- (ii) $k_{12}k_{21} \neq 0$, $\frac{k_{11}}{|k_{12}|} + \frac{k_{22}}{|k_{21}|} < 0$, assim como $\det(K) > 0$.

A referência (Filippov 1988, pp. 256–258) apresenta condições equivalentes às do Teorema 2.1. Para sistemas de ordem arbitrária são conhecidas apenas condições suficientes, como a condição enunciada no Teorema abaixo.

Teorema 2.2 *Considere o sistema descontínuo*

$$\dot{x} = K \operatorname{sgn}(x), \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (2.39)$$

Se $\exists P = \text{diag}\{p_1, \dots, p_m\} > 0$ tal que $PK < 0$, então $x(t) = 0$ é uma solução globalmente assintoticamente estável.

Prova: A prova da suficiência desta condição desenvolvida por Persidskii é apresentada em (Hsu et al. 2000, Prova do Teorema 2.2). ■

É relevante notar que as matrizes K que satisfazem a condição para a aplicação do Teorema 2.2 são Hurwitz, mas nem toda matriz Hurwitz satisfaz esta condição.

Para o caso particular em que se impõe $P = I$ no Teorema 2.2, (Utkin 1992, p. 53) conclui que uma condição suficiente para a estabilidade do sistema (2.39) é que $K < 0$. Deve-se ressaltar que não se exige que K seja uma matriz simétrica.

Pode-se mostrar que sistemas com matriz de ganho de alta frequência $K = \{k_{ij}\}$ triangular, superior ou inferior, com $k_{ii} < 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}$, também satisfazem a hipótese assumida no Teorema 2.2. A análise destes sistemas pode aplicar o conceito de *controle hierárquico*, que é muito utilizado para sistemas multivariáveis (Utkin 1978, Seção III.4). Para apresentar o conceito de *controle hierárquico*, considera-se o caso em que a matriz K é triangular inferior, pois o caso da matriz triangular superior é análogo. Então pode-se escrever a seguinte equação diferencial para a primeira variável de estado:

$$\dot{x}_1 = k_{11} \text{sgn}(x_1), \quad t \geq 0, \quad (2.40)$$

que é independente das demais variáveis de estado. A solução da equação diferencial obedece $|x_1(t)| = |x_1(0)| + k_{11}t$, enquanto $x_1(t) \neq 0$. Como se assumiu que $k_{11} < 0$, conclui-se que $x_1(t)$ converge em tempo finito $t_1 = |x_1(0)|/|k_{11}| \geq 0$ para zero. A equação para a derivada da segunda variável de estado é dada por

$$\dot{x}_2 = k_{21} \text{sgn}(x_1) + k_{22} \text{sgn}(x_2), \quad t \geq 0. \quad (2.41)$$

Como o controle equivalente correspondente ao sinal $\text{sgn}(x_1)$ obedece $(\text{sgn}(x_1))_{eq} = 0, \forall t \geq t_1$, pode-se reescrever essa equação na forma equivalente

$$\dot{x}_2 = k_{22} \text{sgn}(x_2), \quad t \geq t_1, \quad (2.42)$$

concluindo-se que $x_2(t)$ converge em algum tempo finito para zero, de forma análoga à variável $x_1(t)$. Esse procedimento pode ser aplicado recursivamente às demais variáveis de estado, permitindo concluir que $\exists c_1, c_2 > 0$ tais que a norma do vetor de estado completo satisfaz $\|x(t)\| \leq -c_1 t + c_2 \|x(0)\|$ até que $x = 0$ seja atingido em algum tempo finito. Assim conclui-se que a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Infelizmente, não se conhece nenhuma condição necessária e suficiente para a estabilidade do sistema (2.39) com dimensão superior a dois. De forma contrastante, provou-se em (Baida 1993) o seguinte Teorema para sistemas com controle vetorial unitário de dimensão arbitrária.

Teorema 2.3 *Considere o sistema*

$$\dot{x} = K(x) \frac{x}{\|x\|}, \quad (2.43)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$, $K : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\det(K(x)) \neq 0, \forall x$. Assumindo-se que $K(x)$ e suas derivadas são limitadas, a origem do espaço de estado do sistema (2.43) é estável (assintoticamente estável, instável) se e somente se o sistema

$$\dot{z} = K(z)z, \quad z \in \mathbb{R}^m, \quad (2.44)$$

for estável (assintoticamente estável, instável).

Particularmente, se $K(x)$ for uma matriz constante, conclui-se que a origem do sistema UVC (2.43) será globalmente assintoticamente estável se e somente se a matriz de ganho de alta frequência K for Hurwitz. É fácil encontrar matrizes K que resultam na estabilidade assintótica de ambas as leis de controle, por exemplo: $K = -I$. No entanto, há matrizes que resultam na estabilidade do sistema em malha fechada apenas para uma das leis de controle, por exemplo a matriz

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1,5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

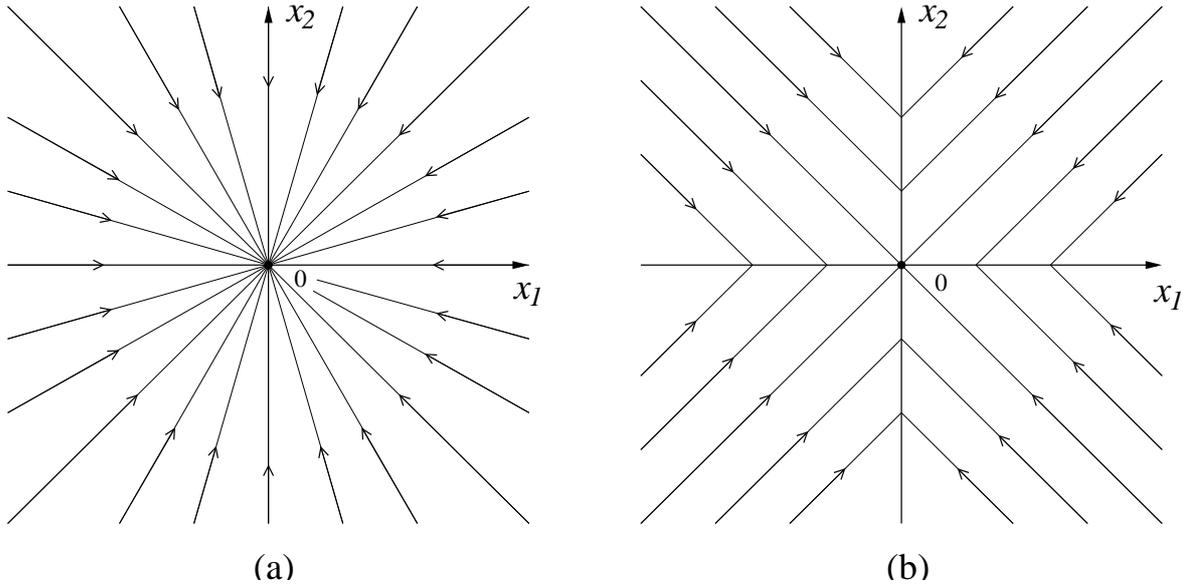


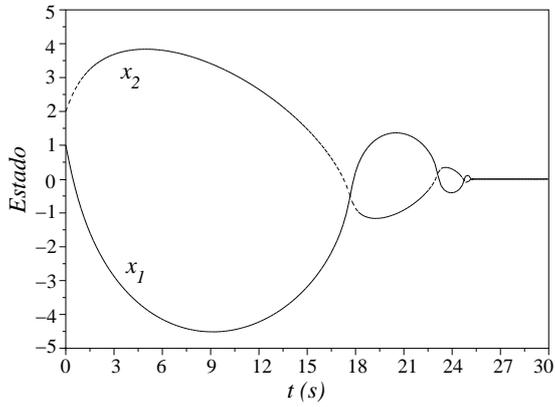
FIGURA 2.1: Planos de fase: (a) controle vetorial unitário e (b) controle pela função sinal. A matriz de ganho de alta frequência é $K = -I$ para ambas as leis de controle.

resulta na estabilidade apenas do UVC e, em contrapartida, a matriz

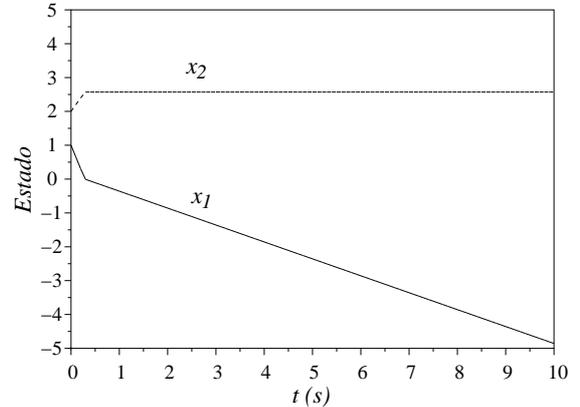
$$K_2 = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

resulta na estabilidade apenas do VSC. Para se comparar o desempenho das leis de controle, as Figuras 2.2 e 2.3 apresentam resultados de simulações com a lei de controle UVC (2.43) e com a lei de controle VSC (2.38) para $K = K_1$ e para $K = K_2$. Nessas simulações, a condição inicial é $x(0) = [1, 2]^T$. Nota-se nas Figuras 2.2.a e 2.3.b que ambas as leis de controle resultam na convergência do estado x para a origem em tempo finito, desde que o sistema em malha fechada seja assintoticamente estável.

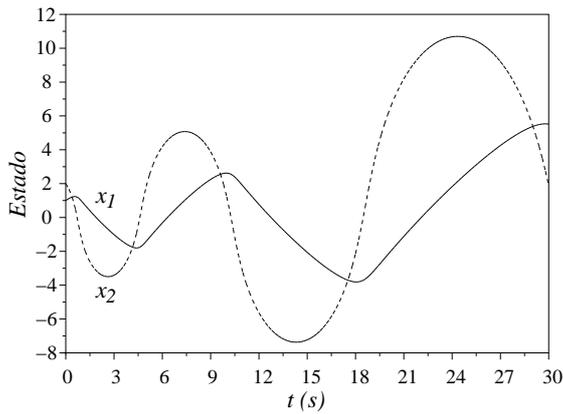
Uma diferença marcante entre essas leis é que o modo deslizante na lei VSC pode ocorrer em qualquer superfície de chaveamento individual ($x_i = 0$) antes de encontrar a interseção $x = 0$, enquanto que no UVC o modo deslizante ocorre apenas na origem. Isto é observado nos planos de fase na Figura 2.1. Para a lei VSC (Fig. 2.1.b) nota-se que $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ são superfícies de deslizamento, assim como a sua interseção $x = 0$. No entanto, para a lei UVC (Fig. 2.1.a) o modo deslizante é restrito ao ponto $x = 0$.



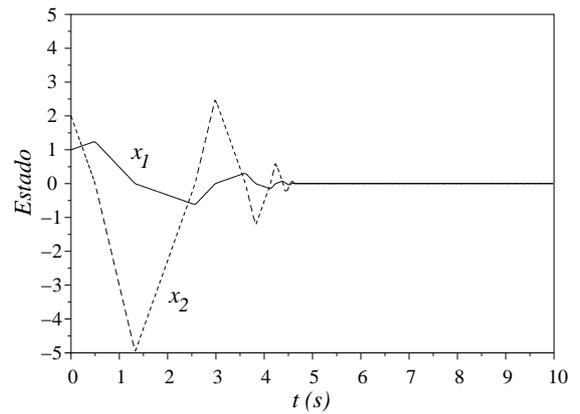
(a)



(a)



(b)



(b)

FIGURA 2.2: Simulações com o controle vetorial unitário (2.43) com (a) $K = K_1$ e (b) $K = K_2$. O sistema em malha fechada é instável com a matriz K_2 .

FIGURA 2.3: Simulações com o controle pela função sinal (2.38) com (a) $K = K_1$ e (b) $K = K_2$. O sistema em malha fechada é instável com a matriz K_1 .

2.4 Condições sobre a Matriz de Ganho de Alta Frequência

2.4.1 Comparação da condição Hurwitz com a condição de definição de sinal

Para se avaliar a relevância da condição Hurwitz sobre a matriz de ganho de alta frequência em sistemas que aplicam o controle vetorial unitário, apresenta-se a seguinte proposição que estabelece que a condição Hurwitz, assumida nesta Tese, é menos restritiva do que a exigência de que a matriz de ganho de alta frequência seja positiva definida assumida em (Ioannou & Sun 1996, Tao & Ioannou 1988, Tao & Ioannou 1989, Chien & Fu 1992, Chien et al. 1996).

Proposição 2.2 *Assumindo-se $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$, são verdadeiras as duas afirmações abaixo:*

- (i) *Se $K > 0$, então $-K$ é Hurwitz (K não é necessariamente simétrica). No entanto, a afirmação recíproca não é verdadeira.*
- (ii) *Se $K = K^T$, então $-K$ é Hurwitz se e somente se $K > 0$.*

Prova: Para se provar a primeira parte da afirmação (i), utiliza-se a equação de Lyapunov $PK + K^T P = Q$, com $P = I$, que resulta em $Q = K + K^T$. Uma vez que a forma quadrática associada à matriz K é positiva definida, então a forma quadrática associada à matriz Q também será positiva definida, concluindo-se que $-K$ é Hurwitz. A segunda parte dessa afirmação pode ser provada utilizando-se por exemplo a matriz

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

que possui os dois autovalores iguais a $+1$, portanto $-K_3$ é Hurwitz. No entanto, a forma quadrática associada à matriz K_3 ($x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$) tem sinal indefinido.

A afirmação (ii) decorre do fato de que $K = K^T > 0$ se e somente se todos os autovalores de K forem estritamente positivos, o que equivale a $-K$ ser Hurwitz. ■

Para se avaliar as conseqüências da Proposição 2.2, a matriz

$$K_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

é tomada como exemplo para comparações. A matriz $-K_{2 \times 2}$ será Hurwitz se as duas condições abaixo forem satisfeitas:

$$\text{(H1)} \quad \text{tr}(K_{2 \times 2}) = k_{11} + k_{22} > 0 \quad \text{e}$$

$$\text{(H2)} \quad \det(K_{2 \times 2}) > 0.$$

Por outro lado, $K_{2 \times 2} > 0$ equivale a se requerer que $K_{2 \times 2} + K_{2 \times 2}^T > 0$, o que exige o cumprimento das duas condições abaixo:

$$\text{(P1)} \quad \text{tr}(K_{2 \times 2}) = k_{11} + k_{22} > 0 \quad \text{e}$$

$$\text{(P2)} \quad \det(K_{2 \times 2}) > (k_{12} - k_{21})^2/4 \quad (\geq 0).$$

Comparando-se as condições acima, observa-se que (H1) é idêntica à condição (P1). No entanto, a condição (P2) pode ser bem mais restritiva do que a condição (H2), pois a restrição sobre o determinante é mais severa em (P2). Para matrizes simétricas, o lado direito da desigualdade em (P2) é nulo, então as condições (H2) e (P2) são equivalentes, conforme é de se esperar a partir da afirmação (ii) na Proposição 2.2.

2.4.2 Conhecimento dos sinais dos menores principais

Alguns trabalhos sobre o controle adaptativo de sistemas multivariáveis baseados em fatorações (e.g., LDU, SDU) da matriz de ganho de alta frequência assumem o conhecimento dos *sinais dos menores principais* dessa matriz (Costa et al. 2003). No caso da matriz de ganho de alta frequência da planta ser $K_p = \{k_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, isso significa que devem ser conhecidos os sinais dos determinantes

$$\Delta_1 = k_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & k_{mm} \end{vmatrix}, \quad (2.49)$$

e que esses menores não são nulos. O caso em que algum menor seja nulo pode ser contornado pós-multiplicando-se K_p por uma matriz de permutação de colunas adequada para que todos os menores sejam não nulos, o que pode ser possível uma vez que K_p é não-singular.

O conhecimento dos sinais dos menores de K_p equivale a se conhecer uma matriz S_p tal que todos os menores de $K = K_p S_p$ sejam positivos. Isso pode ser obtido pela matriz

$$S_p = \text{diag} \{ \text{sgn}(\Delta_1), \text{sgn}(\Delta_1 \Delta_2), \dots, \text{sgn}(\Delta_1 \dots \Delta_m) \} . \quad (2.50)$$

Então, considerando-se que todos os menores de K sejam positivos, pode-se comparar esta hipótese com a condição Hurwitz e com a condição de que $K > 0$.

No caso em que $K = K^T$, o Teorema 11.5 de (Noble & Daniel 1986, pp. 344–345) estabelece que uma condição necessária e suficiente para $K > 0$ é que todos os seus menores principais sejam positivos. A afirmação (ii) da Proposição 2.2 estabelece que se $K = K^T$, então $K > 0$ se e somente se $-K$ for Hurwitz. Assim sendo, conclui-se que as três condições são equivalentes para matrizes simétricas.

Para a matriz $K_{2 \times 2}$, a condição de positividade dos menores principais pode ser explicitada como:

$$(M1) \quad k_{11} > 0 \quad e$$

$$(M2) \quad \det(K_{2 \times 2}) > 0 .$$

Comparando-se as diversas condições estabelecidas para a matriz $K_{2 \times 2}$, nota-se que a condição (M2) é igual à condição (H2), que são menos restritivas do que a condição (P2). Por outro lado, as condições (H1) e (P1) são idênticas mas diferem de (M1).

2.4.3 Comparação de condições sobre a matriz de ganho de alta frequência

Para se completar a comparação das quatro condições sobre a matriz de ganho de alta frequência consideradas neste capítulo, a Tabela 2.1 apresenta alguns resultados

obtidos com matrizes incertas. Por simplicidade, considera-se apenas um parâmetro incerto ($\alpha \in \mathbb{R}$). A matriz considerada é dada pelo produto $K = K_p S_p$.

TABELA 2.1: Quadro comparativo de matrizes de ganho de alta frequência K_p com um parâmetro incerto α . É indicada a matriz de pré-compensação S_p adotada para cada K_p . Comparam-se as faixas de valores do parâmetro α para que a matriz $K = K_p S_p$ atenda as condições especificadas.

Caso	K_p	S_p	Condições especificadas			
			$K > 0$	$-K$ é Hurwitz	$\Delta_1, \Delta_2 > 0$	VSC*
(i)	$\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ -2 & \alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\alpha > 0$	$\alpha > 0$	$\alpha > 0$	$\alpha > 0$
(ii)	$\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha^2 \\ -2 & \alpha \end{pmatrix}$	I	$0,525 < \alpha < 1,490$	$-1 < \alpha < -0,25$ ou $\alpha > 0$	$\alpha < -0,25$ ou $\alpha > 0$	$-1 < \alpha < -0,25$ ou $\alpha > 0$
(iii)	$\begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$	I	$0,525 < \alpha < 1,490$	$-1 < \alpha < -0,25$ ou $\alpha > 0$	$\alpha > 0$	$-1 < \alpha < -0,25$ ou $\alpha > 0$
(iv)	$\begin{pmatrix} \alpha & -2 \\ 2\alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha < -0,333$ ou $\alpha > 0,2$	$\alpha < -0,25$ ou $\alpha > 0$	$\alpha < -0,25$ ou $\alpha > 0$	$\alpha < -0,25$ ou $\alpha > 0$
(v)	$\begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 4 & -\alpha^2 \end{pmatrix}$	I	$\nexists \alpha$	$0 < \alpha < 1$	$0 < \alpha < 1,587$	$0 < \alpha < 1,587$
(vi)	$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	I	$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

*A condição VSC requer que a matriz $-K$ satisfaça as condições necessárias e suficientes para a estabilidade do controle à estrutura variável baseado na função sinal que são estabelecidas no Teorema 2.1.

Para o caso (i) utilizou-se uma matriz S_p adequada para que $K_p S_p = (K_p S_p)^T$. Uma vez estabelecida a simetria da matriz, as quatro condições têm requisitos idênticos, ou seja, o parâmetro incerto deve estar na faixa $\alpha > 0$.

Para as matrizes K_p consideradas em (ii)–(vi), pode-se mostrar que $\nexists S_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det(S_p) \neq 0$, tal que $K_p S_p = (K_p S_p)^T$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Esta é uma restrição importante pois exclui os algoritmos de controle que exigem a simetria da matriz de ganho de alta frequência para garantir as suas propriedades.

Para os casos (ii) e (iii), nota-se que a condição $K > 0$ restringe o parâmetro α a faixas limitadas e muito estreitas. Para o caso (v) não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que resulte em $K > 0$. Por outro lado, para as demais condições e considerando-se os casos (ii) a (iv), as faixas admissíveis para α são ilimitadas ao menos unilateralmente. Para o caso (ii) a condição de menores principais positivos só impõe que o parâmetro esteja fora da faixa $-0,25 \leq \alpha \leq 0$, enquanto que a condição Hurwitz e a condição VSC também não admitem a faixa $\alpha \leq -1$. Para o caso (iii) a condição de menores positivos impõe que o parâmetro esteja na faixa $\alpha > 0$, enquanto que as condições Hurwitz e VSC também

admitem a faixa $-1 < \alpha < -0,25$, o que é uma vantagem bem modesta se comparada aos requisitos relativos aos menores principais positivos.

O caso (iv) considera a mesma matriz incerta K_p usada no caso (iii), mas adota-se uma matriz S_p que permuta as colunas de K_p e inverte o sinal da segunda coluna. Assim todas as condições resultam na exclusão de faixas bastante estreitas de valores de α . As restrições impostas pela condição Hurwitz, pela condição VSC e pela condição de menores principais positivos são idênticas entre si. No entanto, a condição $K > 0$ impõe limites para α um pouco mais restritivos do que aqueles impostos pelas demais condições.

Se for considerado que $-K$ deva satisfazer as condições necessárias e suficientes para a estabilidade do controle à estrutura variável baseado na função sinal (vide Teorema 2.1), nota-se que as faixas admissíveis para α são idênticas às faixas para a condição Hurwitz para os casos (i)–(iv) e (vi). No entanto, o caso (v) resulta numa faixa mais ampla de α para a condição VSC do que a faixa para a condição Hurwitz, coincidindo com a faixa de α em que ambos os menores são positivos.

A matriz de rotação no caso (vi) é bastante importante em controle por servovisão (Costa et al. 2003). Nota-se que todas as condições são satisfeitas para uma rotação de até dois quadrantes.

Conclui-se nessas comparações que *a escolha adequada da matriz S_p é crucial para reduzir as restrições às incertezas*. Se existir uma matriz S_p fixa que simetrize a matriz $(K_p S_p)$ para quaisquer valores dos parâmetros incertos, então as quatro condições serão equivalentes. De fato a condição de que K seja positiva definida é a mais restritiva de todas. Porém, não se pode afirmar no caso geral que alguma das três condições (Hurwitz, VSC ou sinais dos menores principais) seja a menos restritiva, pois as restrições dependem da classe da matriz incerta K_p considerada e da matriz S_p escolhida.

2.5 Conexão do Controle Vetorial Unitário com Estabilização Adaptativa

Aqui se discute a conexão entre o UVC e a *estabilização adaptativa* de (Byrnes & Willems 1984, Ilchmann & Owens 1990) conforme foi feito em (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Seção 4.3). Considera-se a planta

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u, \\ y &= C_p x_p,\end{aligned}\tag{2.51}$$

onde $x_p \in \mathbb{R}^n$ e $y, u \in \mathbb{R}^m$, que deve satisfazer as mesmas hipóteses de grau relativo uniforme e unitário (i.e., $\det(C_p B_p) \neq 0$) e fase mínima que são assumidas no Lema 2.2. Então, pode-se aplicar o estabilizador adaptativo de Byrnes-Willems dado por

$$u(t) = -k(t)y(t),\tag{2.52}$$

$$\dot{k}(t) = \|y(t)\|^2, \quad k(0) \in \mathbb{R},\tag{2.53}$$

onde $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é um ganho adaptativo escalar. Esta lei de controle resulta na estabilidade assintótica da saída y se $-K_p$ for Hurwitz (Byrnes & Willems 1984), onde $K_p = C_p B_p$ é a matriz HFG da planta.

O projeto do UVC requer o conhecimento de faixas para os valores dos parâmetros da planta, o que é desnecessário para a estabilização adaptativa. As vantagens do UVC são a sua estabilidade global e exponencial e a possibilidade de projetá-lo para que o sinal de saída da planta convirja para a origem em tempo finito, enquanto que os estabilizadores adaptativos podem obter apenas a *convergência assintótica* (Byrnes & Willems 1984) ou a *convergência exponencial* (Ilchmann & Owens 1990).

A condição Hurwitz sobre a matriz HFG pode ser mais relaxada no contexto de estabilização adaptativa. Em (Ryan 1993) se requer apenas o conhecimento de um conjunto finito de matrizes que contenha alguma matriz $S_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ adequada para que $-K_p S_p$ seja Hurwitz. Esse conjunto é denominado *spectrum-unmixing set* de K_p . O algoritmo de estabilização comuta ciclicamente o elemento do *spectrum-unmixing set* a ser usado na lei de controle. No entanto, o algoritmo proposto por (Ryan 1993) não é

globalmente exponencialmente estável.

Uma deficiência bem conhecida nos estabilizadores adaptativos é que alguns sinais que teoricamente permaneceriam finitos podem tornar-se excessivamente grandes como consequência do ruído de medição. Isto pode ser explicado na lei de adaptação (2.53) pois o sinal y medido será igual ao ruído de medição quando o sinal y verdadeiro for nulo. Assim, o ganho adaptativo k crescerá indefinidamente ainda que a saída verdadeira da planta seja nula. Em contraste, os sinais nos sistemas UVC permanecem limitados apesar do ruído de medição, desde que a geração da função de modulação seja imune ao ruído.

Capítulo 3

Aproximações por Filtros de Primeira Ordem

Nesta Tese, a geração das funções de modulação nas leis de controle por modo deslizante emprega *aproximações por filtros de primeira ordem* (Cunha, Costa & Hsu 2003b). Para ilustrar o que é e como se aplica a *aproximação por filtro de primeira ordem*, considere-se o seguinte sistema linear na *forma regular* (Young et al. 1977, Utkin 1992)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \Phi_{11}x_1 + \Phi_{12}y_p, \\ \dot{y}_p &= \Phi_{21}x_1 + \Phi_{22}y_p + \Gamma_2u_p,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $y_p \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída, $x_p = [x_1^T, y_p^T]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado e $u_p \in \mathbb{R}^m$ é um sinal de controle gerado pela lei de controle vetorial unitário

$$u_p = -\Gamma_2^{-1}\rho(y_p, t)\frac{y_p}{\|y_p\|}.\tag{3.2}$$

Se o sistema (3.1) for de fase mínima e a função de modulação satisfizer

$$\rho(y_p, t) \geq c_y\|y_p(t)\| + \|\phi(t) * y_p(t)\|,\tag{3.3}$$

onde $\phi(t) = \Phi_{21}\exp(\Phi_{11}t)\Phi_{12}$ e $c_y \geq 0$ é alguma constante apropriada, então a lei de controle (3.2) estabiliza globalmente e exponencialmente o ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada ($x_p=0$), como se pode concluir da aplicação do Lema 2.2.

Nota-se que o filtro com resposta impulsiva $\phi(t)$ é BIBO estável uma vez que Φ_{11} é uma matriz Hurwitz, pois assumiu-se que o sistema é de fase mínima.

Focalizam-se neste capítulo aproximações por filtros de primeira ordem que majoram normas de sinais filtrados tais como $\|\phi(t) * y_p(t)\|$ e que são aplicadas na geração de funções de modulação. Em outras palavras, dado um sistema com matriz de transferência racional e estritamente própria $G(s)$ e resposta impulsiva $g(t)$, o problema é calcular valores para os parâmetros c_1 e γ para que a desigualdade

$$\|g(t) * u(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \|u(t)\|, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.4)$$

seja satisfeita. Assume-se que o sinal de entrada u seja contínuo por partes ou um sinal gerado por uma lei de controle por modo deslizante.

Outras alternativas para a síntese de funções de modulação são baseadas em observadores (Edwards & Spurgeon 1998). Nesse caso, a função de modulação deve satisfazer $\rho(\hat{x}_p) \geq c_x \|\hat{x}_p(t)\|$, onde $\hat{x}_p(t)$ é uma estimativa para o estado $x_p(t)$ gerada por um observador e $c_x \geq 0$ é uma constante adequada. Por outro lado, a aplicação de aproximações por filtros de primeira ordem é mais vantajosa do que os observadores uma vez que (i) sua realização é mais simples do que as realizações dos observadores e (ii) a síntese das aproximações por filtros de primeira ordem não é baseada no modelo do sistema e, conseqüentemente, é mais natural para sistemas incertos.

3.1 Aproximação por Filtro de Primeira Ordem para Sistemas Lineares

Uma realização do filtro de aproximação de primeira ordem (*first order approximation filter* — FOAF) para sistemas lineares é:

$$\dot{\bar{y}}(t) = -\gamma \bar{y}(t) + c_1 \|u(t)\|, \quad (3.5)$$

onde $\bar{y}(t) \geq \|g(t) * u(t)\|$, $\forall t \geq 0$, desde que $\bar{y}(0) \geq 0$.

Definição 3.1 *O filtro com função de transferência $c_1/(s + \gamma)$ ou, de forma abreviada, o par (c_1, γ) , é um FOAF da matriz de transferência estritamente própria e estável*

$G(s)$ se

$$\|g(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.6)$$

onde $g(t)$ é a resposta impulsiva correspondente à matriz de transferência $G(s)$ e $c_1, \gamma > 0$ são constantes apropriadas.

As *margens de estabilidade* definidas na Seção 1.2.2 são fundamentais para os FOAFs conforme se percebe no Lema a seguir. Este Lema estende a aplicabilidade do Lema 3.1 de (Ioannou & Tsakalis 1986), desenvolvido para sistemas SISO, a sistemas multivariáveis.

Lema 3.1 *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Seja γ_0 a margem de estabilidade da matriz de transferência $G(s) := C(sI - A)^{-1}B$ e seja $\gamma := \gamma_0 - \delta$ com $\delta > 0$ sendo uma constante arbitrária. Seja $\bar{u}(t)$ um majorante instantâneo de $u(t)$, i.e., $\|u(t)\| \leq \bar{u}(t)$, $\forall t \geq 0$. Então, $\exists c_1, c_2 > 0$ tais que a resposta impulsiva $g(t)$ do sistema (3.7) satisfaça

$$\|g(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t), \quad (3.8)$$

e as seguintes desigualdades sejam satisfeitas

$$\|g(t) * u(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \bar{u}(t), \quad (3.9)$$

$$\|y(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \bar{u}(t) + c_2 \exp[-(\lambda_0 - \delta)t] \|x(0)\|, \quad (3.10)$$

$\forall t \geq 0$, onde λ_0 é a margem de estabilidade da matriz A .

Prova: A resposta impulsiva do sistema (3.7) é dada por

$$g(t) = \begin{cases} C \exp(At)B & \text{se } t > 0, \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

A exponencial matricial $\exp(At)$ e a resposta impulsiva $g(t)$ podem ser representadas como somas de termos exponenciais $A_{jl}t^l \exp(\lambda_j t)$ e $G_{jl}t^l \exp(\lambda_j t)$, respectivamente, onde $j \in \{1, \dots, n\}$, $l \in \{0, \dots, m_j - 1\}$, m_j é a multiplicidade do autovalor λ_j de A e $A_{jl} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $G_{jl} \in \mathbb{C}^{p \times m}$ são matrizes apropriadas. Assim se conclui que $\exists c_1, c_3 > 0$ tais que $\|\exp(At)\| \leq c_3 \exp[-(\lambda_0 - \delta)t]$, $\|g(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t)$, $\forall t \geq 0$. Conseqüentemente a seguinte desigualdade é válida

$$\|g(t) * u(t)\| \leq \|g(t)\| * \|u(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \bar{u}(t), \quad (3.12)$$

de onde resulta a desigualdade (3.9).

Uma vez que o sinal de saída do sistema (3.7) é dado por

$$y(t) = g(t) * u(t) + C \exp(At)x(0), \quad t \geq 0, \quad (3.13)$$

então a norma do sinal de saída $\|y(t)\|$ pode ser majorada pela soma dos majorantes (3.9) e $\{\|C\|c_3 \exp[-(\lambda_0 - \delta)t]\|x(0)\|\}$. Escolhendo-se $c_2 = \|C\|c_3$ finalmente se obtém (3.10), completando-se a prova. ■

Observação 3.1 *Se o sistema (3.7) for não-controlável ou não-observável, alguns autovalores de A não serão pólos de $G(s)$, então as margens de estabilidade obedecerão $\lambda_0 \leq \gamma_0$. Se o sistema for controlável e observável, então $\lambda_0 = \gamma_0$. Além disso, se o sistema autônomo for assintoticamente estável, então $0 < \lambda_0 \leq \gamma_0$.*

Observação 3.2 *Se a equação de saída do sistema (3.7) for $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, então a matriz de transferência do sistema é dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e o Lema 3.1 se verifica adicionando-se o termo $c_4 \bar{u}(t)$ ($c_4 \geq \|D\|$) aos majorantes (3.9) e (3.10). Naturalmente a resposta impulsiva $g(t)$ deve ser modificada adequadamente.*

3.2 Aproximação por Filtro de Primeira Ordem para Sistemas Não-Lineares

O Lema apresentado a seguir é aplicado na síntese das funções de modulação dos sistemas não-lineares com controle vetorial unitário propostos nos Capítulos 7 e 8. Este

Lema estabelece um majorante para a norma do estado do sistema não-linear (3.14). O sinal de entrada U pode ser um sinal chaveado gerado por uma lei de controle por modo deslizante. O sinal U_{av} é o *controle médio* gerado pelo filtro passa-baixas (3.15).

Lema 3.2 *Considere o sistema*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[U + d(t)] + B_\phi\phi(x, t), \quad (3.14)$$

$$\tau \dot{U}_{av}(t) = -U_{av}(t) + U, \quad (3.15)$$

onde $U, d \in \mathbb{R}^m$ são os sinais de entrada, d é LI, $\tau > 0$ é uma constante de tempo arbitrária, $x \in \mathbb{R}^n$, $U_{av} \in \mathbb{R}^m$. A função $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^l$ é contínua por partes em t , localmente Lipschitz em x e satisfaz $\|\phi(x, t)\| \leq k_x \|x\| + \varphi(t)$, onde $k_x \geq 0$ é algum escalar e $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua por partes. Assume-se que para cada condição inicial arbitrária $[x^T(0), U_{av}^T(0)]^T$ o sistema de equações diferenciais (3.14)–(3.15) possui solução contínua única no sentido de Filippov. Seja λ_0 a margem de estabilidade da matriz A . Sejam $c_\phi > 0$ e $\gamma < \lambda_0$ tais que $\|w_\phi(t)\| \leq c_\phi \exp(-\gamma t)$, $\forall t \geq 0$, onde $w_\phi(t)$ é a resposta impulsiva correspondente à matriz de transferência $(sI - A)^{-1}B_\phi$. Se $\gamma_x := \gamma - c_\phi k_x > 0$, então (3.14) é estável no sentido entrada-limitada-estado-limitado e $\exists c_i \geq 0$ ($i = 0, \dots, 6$) tais que a seguinte desigualdade se verifica $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq c_2\tau \|U_{av}(t)\| + \exp(-\gamma_x t) * [c_3\varphi(t) + (c_4 + \tau c_5)\|U_{av}(t)\| + c_6\|d(t)\|] \\ &+ \exp(-\gamma_x t) [c_0\|x(0)\| + c_1\tau \|U_{av}(0)\|]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Prova: De (3.15) pode-se exprimir $U = \tau \dot{U}_{av} + U_{av}$ para se reescrever (3.14) como

$$\dot{x} - B\tau \dot{U}_{av} = Ax + B[U_{av} + d] + B_\phi\phi(x, t). \quad (3.17)$$

Definindo-se o vetor de estado $\bar{x} := x - B\tau U_{av}$ essa equação pode ser reescrita como

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + (\tau A + I)BU_{av} + Bd + B_\phi\phi(\bar{x} + B\tau U_{av}, t). \quad (3.18)$$

Então, definindo-se o sinal escalar

$$r(t) = \exp(-\gamma t) * [c_\phi k_x \|\bar{x}\| + c_\phi \varphi(t) + c_{uav} \|U_{av}\| + c_u \|d\|] + c_0 \exp(-\gamma t) \|\bar{x}(0)\|, \quad (3.19)$$

e aplicando-se o Lema 3.1, obtém-se o majorante

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t)\| &\leq \exp(-\gamma t) * [c_\phi \|\phi(\bar{x} + B\tau U_{av}, t)\| + (c_u + \tau c_\tau) \|U_{av}\| + c_u \|d\|] \\ &+ c_0 \exp(-\gamma t) \|\bar{x}(0)\| \leq r(t), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde (c_u, γ) e (c_τ, γ) são FOAFs para as matrizes de transferência $(sI - A)^{-1}B$ e $(sI - A)^{-1}AB$, respectivamente, e

$$c_{uav} \geq c_u + \tau (c_\tau + c_\phi k_x \|B\|). \quad (3.21)$$

O sinal $r : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é a solução da equação diferencial

$$\dot{r} = -\gamma r + [c_\phi k_x \|\bar{x}\| + c_\phi \varphi(t) + c_{uav} \|U_{av}\| + c_u \|d\|], \quad r(0) = c_0 \|\bar{x}(0)\|. \quad (3.22)$$

Substituindo-se $\|\bar{x}\|$ por r em (3.22) obtém-se a equação diferencial

$$\dot{\bar{r}} = (c_\phi k_x - \gamma) \bar{r} + [c_\phi \varphi(t) + c_{uav} \|U_{av}\| + c_u \|d\|], \quad \bar{r}(0) = r(0) = c_0 \|\bar{x}(0)\|, \quad (3.23)$$

que satisfaz $\bar{r}(t) \geq r(t) \geq \|\bar{x}(t)\|$, $\forall t \geq 0$. Se $\gamma_x = \gamma - c_\phi k_x > 0$, então conclui-se que (3.23) e, conseqüentemente, (3.14) são estáveis. A partir de (3.23) obtém-se (3.16), uma vez que $\|x\| \leq \|\bar{x}\| + \tau \|B\| \|U_{av}\|$. ■

Observação 3.3 *Em versões prévias do Lema 3.2 (Hsu, Costa & Cunha 2002a, Hsu, Costa & Cunha 2002b) aplicou-se na prova uma abordagem baseada em funções de Lyapunov quadráticas. Assim, os resultados obtidos foram muito mais conservadores. A melhor estimativa para a margem de estabilidade λ_0 utilizando-se a abordagem pela equação de Lyapunov é igual a $\gamma_0 = 1/\lambda_{\max}(P) \leq \lambda_0$, onde $P = P^T > 0$ é a solução da equação $A^T P + P A = -2I$, conforme é discutido na Seção. 3.3.2. A aplicação de γ_0 nesse Lema resulta na taxa de decaimento do majorante (3.16) dada por $\bar{\gamma}_x =$*

$\gamma_0 - k_x \|B_\phi\|$, que é usualmente muito menor do que $\gamma_x = \gamma - c_\phi k_x$ computado utilizando-se o método de otimização proposto por (Cunha 2002, Cunha, Costa & Hsu 2003b) para minimizar a razão c_ϕ/γ (ganho DC), que aqui é descrito na Seção 3.3.3.2.

Observação 3.4 Poder-se-ia ter utilizado no Lema 3.2 a norma do sinal de controle chaveado $\|U\|$ diretamente sem o uso do filtro de média. No entanto, isso resultaria numa estimativa muito conservadora para a norma do estado ($\|x(t)\|$), pois $\|U_{eq}(t)\| \leq \|U\|$. Embora o controle equivalente não seja disponível, o controle equivalente em sistemas afins no controle pode ser aproximado pelo controle médio gerado por filtros passa-baixas com ganho DC unitário (e.g., (3.15)) desde que se escolha uma constante de tempo $\tau > 0$ suficientemente pequena, então $U_{eq}(t) \approx U_{av}(t)$ (vide (Utkin 1978)). O esquema proposto por (Min & Hsu 2000, Proposição 1) aplica o controle médio mas é livre de aproximações e não requer que a constante de tempo τ seja pequena. Esse esquema foi aplicado no Lema 3.2 com pequenas correções em relação à Proposição 1 de (Min & Hsu 2000) que são descritas em (Cunha 2002, Cunha, Costa & Hsu 2003b).

3.3 Síntese do Filtro

O Lema 3.1 estabelece condições de existência para as constantes c_1 e c_2 e um majorante para γ de forma adequada à análise de estabilidade de sistemas de controle (e.g., (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a)). No entanto, isto é insuficiente para a síntese dos FOAFs. No projeto de controladores por modo deslizante, os valores das constantes c_1 e γ devem ser selecionados para se manter as amplitudes dos sinais em níveis moderados. Nesta seção, são apresentados métodos para a computação dos valores dos coeficientes do FOAF seguindo-se as duas linhas propostas por (Cunha 2002, Cunha, Costa & Hsu 2003b):

1. A *síntese baseada em formas quadráticas de Lyapunov* que é bastante simples para ser implementada em algoritmos computacionais, mas pode resultar em desempenho muito conservador.
2. A *otimização dos coeficientes* para se melhorar o desempenho do FOAF segundo um dos três critérios que são estabelecidos a seguir na Seção 3.3.1.

Até o final deste capítulo assume-se que a realização $\{A, B, C\}$ é mínima e estável, o que implica em $\gamma_0 = \lambda_0 > 0$.

3.3.1 Critérios de desempenho

A síntese do FOAF deve ser baseada em critérios orientados pela aplicação do filtro. Aqui são consideradas três características do FOAF:

- (a) A velocidade da dinâmica do filtro, dada por γ .
- (b) O ganho DC, dado por c_1/γ .
- (c) O valor de pico da resposta impulsiva do filtro, dado por c_1 .

Se a aplicação requerer resposta rápida no transitório, então um critério natural é escolher um valor grande para o parâmetro γ , respeitando-se as restrições

$$\gamma \leq \gamma_0 - \delta_u, \quad (3.24)$$

imposta pelo Lema 3.1 com $\delta \geq \delta_u > 0$, e

$$\gamma \geq \delta_l, \quad (3.25)$$

uma vez que o FOAF deve respeitar alguma margem de estabilidade especificada $\delta_l > 0$.

Aplicações que não toleram picos de grande amplitude em resposta a pulsos rápidos de entrada (semelhantes a impulsos) requerem que o valor escolhido para a constante c_1 seja o menor possível, sujeito à restrição

$$c_1 \exp(-\gamma t) \geq \|g(t)\|, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.26)$$

que é equivalente à

$$c_1 \geq C_1(\gamma), \quad C_1(\gamma) := \sup_{0 \leq t < +\infty} \{\|g(t)\| \exp(\gamma t)\}. \quad (3.27)$$

O ganho DC do FOAF é uma característica importante em vista dos seguintes aspectos:

- (i) O ganho DC coincide com a área da resposta impulsiva do filtro.
- (ii) O ganho DC deve ser pequeno para se manter pequena a amplitude da função de modulação do controlador por modo deslizante gerada pelo FOAF.

O ganho DC do FOAF (3.5) é dado por

$$S(c_1, \gamma) = \int_0^{+\infty} c_1 \exp(-\gamma t) dt = \frac{c_1}{\gamma}. \quad (3.28)$$

3.3.2 Síntese aplicando-se formas quadráticas de Lyapunov

Nesta seção apresenta-se uma técnica simples de síntese dos coeficientes do FOAF baseada em formas quadráticas de Lyapunov, que podem ser computadas através de algoritmos numéricos já consolidados (Patel, Laub & Van Dooren 1994, Parte 7). Uma vez que se assume que a matriz A do sistema (3.7) seja Hurwitz, então existe uma solução positiva definida $P = P^T$ para a equação de Lyapunov

$$A^T P + P A = -2Q, \quad (3.29)$$

para cada $Q = Q^T > 0$ (Khalil 1996, Teorema 3.6). A melhor estimativa para a margem de estabilidade de A (λ_0) calculada através da equação de Lyapunov é obtida com $Q = I$ e é igual a

$$\gamma = \frac{1}{\lambda_{max}(P)}, \quad (3.30)$$

conforme (Edwards & Spurgeon 1998, pp. 22-23). Pode-se concluir que $0 < \gamma \leq \lambda_0$ a partir de (Van Loan 1985, Teorema 1.1).

3.3.2.1 Cálculo dos coeficientes

Para se computar as constantes c_1 , c_2 e γ das desigualdades (3.9) e (3.10), aplica-se a forma quadrática $V(x) = x^T P x$ cuja derivada é limitada por

$$\dot{V} = -2\|x\|^2 + 2x^T P B u \leq -2\|x\|^2 + 2\|PB\| \|x\| \|u\|. \quad (3.31)$$

Aplicando-se a desigualdade de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2, \quad (3.32)$$

obtém-se

$$\dot{V} \leq -\frac{2}{\lambda_{\max}(P)} V + \frac{2\|PB\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \sqrt{V} \|u\|. \quad (3.33)$$

Então, definindo-se $r := \sqrt{V}$, pode-se obter

$$\dot{r} \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} r + \frac{\|PB\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \|u\|. \quad (3.34)$$

Um majorante $\bar{r}(t)$ para $r(t)$ é dado pela solução da equação diferencial

$$\dot{\bar{r}} = -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \bar{r} + \frac{\|PB\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \|u\|, \quad \bar{r}(0) = r(0) \geq 0, \quad (3.35)$$

que é

$$\bar{r}(t) = \frac{\|PB\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \exp(-\gamma t) * \|u(t)\| + \exp(-\gamma t) r(0), \quad t \geq 0. \quad (3.36)$$

Através da aplicação da desigualdade de Rayleigh-Ritz (3.32) à solução (3.36) e lembrando-se que $\|y\| \leq \|C\| \|x\|$ conclui-se que

$$\|y(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \|u(t)\| + c_2 \exp(-\gamma t) \|x(0)\|, \quad (3.37)$$

com

$$c_1 = \frac{\|C\| \|PB\|}{\lambda_{\min}(P)}, \quad c_2 = \|C\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \quad (3.38)$$

que são estimativas para as constantes em (3.9) e (3.10).

3.3.2.2 Exemplo de síntese aplicando-se formas quadráticas de Lyapunov

Aqui se exemplifica a síntese de um FOAF através de formas quadráticas de Lyapunov para a norma do sinal de saída do sistema com função de transferência dada por

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}. \quad (3.39)$$

Para se avaliar a dependência da síntese através de formas quadráticas de Lyapunov em relação à realização do filtro, consideram-se as três realizações na Tabela 3.1: controlável, cascata e paralela. A resposta impulsiva de cada FOAF e a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($|g_1(t)|$) são apresentadas na Figura 3.1.

TABELA 3.1: Resultados da síntese através de formas quadráticas de Lyapunov para três realizações de $G_1(s)$.

Realização	Matrizes da realização			Características do FOAF		
	A	B	C	$\gamma (s^{-1})$	c_1	S
Controlável	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}$	0,38	18,6	48,5
Cascata	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}$	0,82	16,2	19,6
Paralela	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & -10 \end{pmatrix}$	1,00	31,7	31,7

Os resultados da síntese através de formas quadráticas de Lyapunov sumarizados na Tabela 3.1 mostram que a realização paralela resulta na dinâmica mais rápida pois permite a obtenção da maior estimativa admissível para γ . Isto é justificado pelo fato de que nessa realização a matriz A é diagonal. Então a solução da equação de Lyapunov é $P = -A^{-1}$, que permite a melhor estimativa para a margem de estabilidade $\gamma = 1/\lambda_{max}(P) = \lambda_{min}(-A)$. No entanto, neste exemplo a realização paralela produz o maior valor de pico na resposta impulsiva (constante c_1), vide Figura 3.1. Outro fato relevante é que a realização cascata resulta nos menores valor de pico (c_1) e ganho DC (S).

Neste exemplo, os desempenhos dos FOAFs sintetizados aplicando-se formas qua-

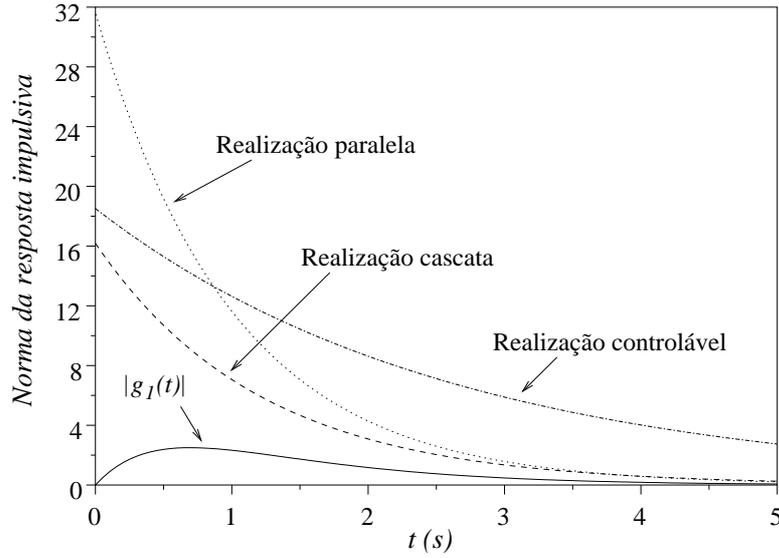


FIGURA 3.1: Resposta impulsiva de cada filtro de aproximação de primeira ordem sintetizado através da aplicação de formas quadráticas de Lyapunov. Exibese, também, a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($|g_1(t)|$).

dráticas de Lyapunov são muito conservadores para qualquer uma das três realizações consideradas. Isto se torna claro através da comparação da resposta impulsiva de cada FOAF com a norma da resposta impulsiva do filtro ($|g_1(t)|$) na Figura 3.1.

3.3.3 Otimização dos coeficientes do filtro

A síntese do FOAF pode ser formulada como um problema de otimização restrita à região viável definida pelas restrições na Seção 3.3.1:

$$\mathcal{V} = \{ (c_1, \gamma) : c_1, \gamma \in \mathbb{R}^+, \quad (3.40)$$

$$c_1 \geq C_1(\gamma), \quad (3.41)$$

$$\gamma \leq \gamma_0 - \delta_u, \quad (3.42)$$

$$\gamma \geq \delta_l \}. \quad (3.43)$$

São enunciados três problemas de otimização:

- (a) *Maximizar a velocidade da dinâmica do filtro γ e manter pequeno o valor de pico da resposta impulsiva c_1 . A máxima velocidade é $\gamma = \gamma_0 - \delta_u$, como se pode*

concluir do Lema 3.1 e da restrição (3.42). Assim, a solução deste problema é simplesmente dada por

$$c_1 = C_1(\gamma_0 - \delta_u), \quad \gamma = \gamma_0 - \delta_u. \quad (3.44)$$

(b) *Minimizar o ganho DC do filtro.* Este problema pode ser formulado como

$$\text{minimizar } S(c_1, \gamma), \quad (3.45)$$

$$\text{sujeito a } (c_1, \gamma) \in \mathcal{V}. \quad (3.46)$$

A resolução deste problema pode ser simplificada através da substituição da restrição do tipo desigualdade (3.41) pela restrição do tipo igualdade $c_1 = C_1(\gamma)$, uma vez que para um valor fixo de γ em (3.28) pode-se afirmar que $S(c_1, \gamma)$ será mínimo se e somente se c_1 for mínimo.

(c) *Minimizar o valor de pico da resposta impulsiva.* Este problema pode ser formulado como

$$\text{minimizar } c_1, \quad (3.47)$$

$$\text{sujeito a } (c_1, \gamma) \in \mathcal{V}. \quad (3.48)$$

A resolução deste problema pode ser simplificada através da substituição da restrição do tipo desigualdade (3.41) pela restrição do tipo igualdade $c_1 = C_1(\gamma)$, assim como é feito no problema de otimização precedente. Além disso, notando-se que a função de custo (3.47) decresce à medida que γ decresce (de forma monótona ou semi-monótona), então as restrições do tipo desigualdade (3.42) e (3.43) podem ser substituídas pela restrição do tipo igualdade $\gamma = \delta_l$, que é mais simples.

3.3.3.1 Estimação do *supremo*

Um problema chave encontrado nos três problemas de otimização formulados acima é a computação do *supremo* $C_1(\gamma)$ definido em (3.27). A computação do *supremo* resolve

diretamente os problemas de otimização (a) e (c). No entanto, as principais dificuldades envolvidas são:

1. A função $\|g(t)\| \exp(\gamma t)$ pode possuir um número infinito de *extremos* no intervalo $t \in [0, +\infty)$. Assim a computação de $C_1(\gamma)$ é geralmente um problema de otimização não-convexa.
2. A função $\|g(t)\|$ pode não ser analítica em todo o intervalo $t \in [0, +\infty)$, o que dificulta a aplicação de métodos de otimização baseados em derivadas.
3. O horizonte de busca é irrestrito unilateralmente.

As seguintes simplificações são adotadas para se contornar essas dificuldades:

- (i) Adota-se um horizonte de busca finito, i.e., $t \in [0, t_f]$, $0 < t_f < +\infty$. Esta simplificação é baseada na BIBO estabilidade de $G(s)$, que implica em $g(t) \rightarrow 0$ exponencialmente à medida que $t \rightarrow +\infty$. Assim, t_f deve ser escolhido para que $\|g(t)\| \exp(\gamma t)$ seja desprezível $\forall t > t_f$.
- (ii) A busca do *máximo* é restrita a amostras periódicas no intervalo $t \in [0, t_f]$. O *intervalo de amostragem* $h \in \mathbb{R}^+$ deve ser escolhido de forma que o *máximo* possa ser computado com boa precisão.

Finalmente, o valor estimado para $C_1(\gamma)$ é dado por

$$\hat{C}_1(\gamma, h, k_f) := \max_{k \in [0, \dots, k_f]} \{ \|\hat{g}(kh)\| \exp(\gamma kh) \}, \quad (3.49)$$

onde $k, k_f \in \mathbb{N}$, $t_f = k_f h$ e $\hat{g}(kh)$ é a resposta impulsiva amostrada periodicamente.

Computação da resposta impulsiva: A resposta impulsiva amostrada pode ser computada através da seguinte fórmula de recursão que evita a computação da exponencial matricial em cada passo:

$$\begin{aligned} X(kh + h) &= \exp(Ah)X(kh), \quad X(0) = B, \\ \hat{g}(kh) &= CX(kh), \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde $\hat{g}(kh) = g(kh)$ para $k \geq 1$ e por conveniência $\hat{g}(0) = g(0+)$. Uma fórmula de recursão análoga é usada para se computar $\exp(\gamma kh)$.

As seguintes *regras heurísticas* baseadas nas frequências naturais de $G(s)$ podem ser aplicadas à escolha dos parâmetros h e k_f :

$$h = \frac{\varepsilon_1}{\max_j \{|\lambda_j|\}}, \quad k_f = \text{int} \left(0, 5 + \frac{h_o}{h \min_j \{|\lambda_j|\}} \right), \quad (3.51)$$

onde $\{\lambda_j\}$ são os autovalores de A , $\varepsilon_1 > 0$ estabelece a resolução da busca, $h_o > 0$ define o horizonte de busca e $\text{int}(\cdot)$ é a parte inteira do argumento. A restrição $\varepsilon_1 < \pi$ é imposta para possibilitar a reconstrução de $g(t)$ a partir de suas amostras, como se pode concluir a partir do *Teorema da Amostragem de Nyquist-Shannon* aplicado no pior caso, i.e., quando o par de autovalores com a maior frequência natural possui baixo fator de amortecimento, resultando em oscilações *quase* senoidais. Por outro lado, o horizonte deve ser amplo o suficiente ($h_o \gg 1$) para permitir a apreciação dos efeitos dos modos mais lentos. Sugere-se adotar os valores $\varepsilon_1 = 0,1$ e $h_o = 10$, que têm resultado em baixos custos computacionais e resultados numéricos bastante exatos.

Região de confiança (trust region): Para tornar mais rápida a execução de (3.49) em computadores, a busca do máximo pode ser restrita à *região de confiança*¹

$$\mathcal{T} = \{k_i \in [0, \dots, k_f - 1] : \|\hat{g}(k_i h)\| > \|\hat{g}(k h)\|, \forall k \in [k_i + 1, \dots, k_f]\} \cup \{k_f\}, \quad (3.52)$$

que é justificada pelo fato de que $\forall \gamma, h > 0$ e $\forall k \in \{k_j \in [0, \dots, k_f] : k_j \notin \mathcal{T}\}$, tem-se que $\exists k_i > k$, $k_i \in \mathcal{T}$, tal que $\|\hat{g}(k_i h)\| \exp(\gamma k_i h) > \|\hat{g}(k h)\| \exp(\gamma k h)$, o que permite excluir a amostra k da *região de confiança*.

Para ilustrar a vantagem de se restringir a busca à região \mathcal{T} , considera-se a computação de $\hat{C}_1(\gamma, h, k_f)$ para o sistema com função de transferência

$$G_2(s) = \frac{(s+7)(s-1+4j)(s-1-4j)}{(s+1)^3(s+0.5+10j)(s+0.5-10j)}, \quad (3.53)$$

onde $h = 0,01 s$ e $k_f = 400$. O número de amostras na *região de confiança* é 88, que é 22% do total de 401 amostras. A Figura 3.2 apresenta o gráfico de $|g_2(t)|$ onde estão assinalados os segmentos da *região de confiança*.

¹Nesta Tese, o termo *região de confiança* não tem o significado usualmente assumido na área de otimização (Belegundu & Chandrupatla 1999, Seção 3.9). Este termo foi adotado por ser o mais parecido com o conceito que se desejava descrever aqui.

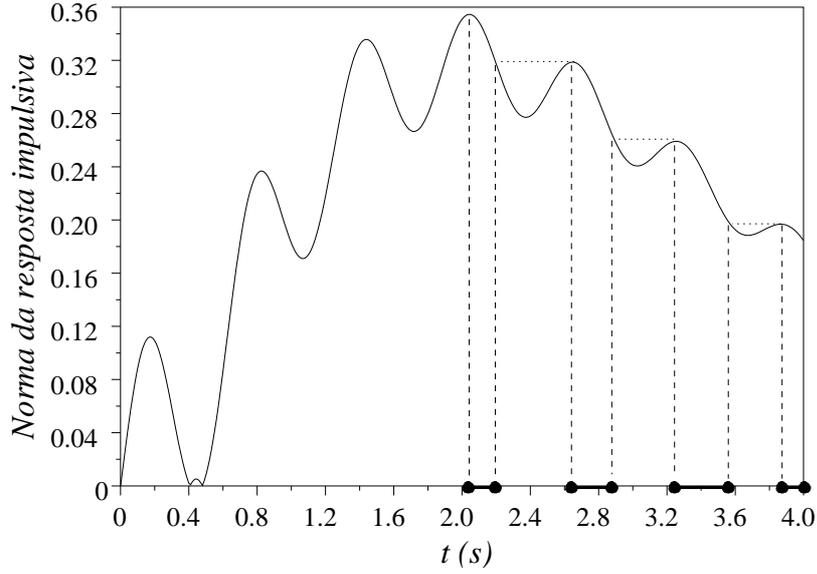


FIGURA 3.2: Norma da resposta impulsiva do sistema com função de transferência $G_2(s)$. Os segmentos da *região de confiança* são marcados em negrito no eixo do tempo.

A *região de confiança* pode ser ainda mais reduzida através do aproveitamento de computações prévias de \hat{C}_1 para a mesma resposta impulsiva porém com outros valores de γ . Uma vez que $\hat{C}_1(\gamma_{i-1}, h, k_f)$ tenha sido computado para algum valor de γ sujeito a $\gamma_{i-1} > \gamma_i$, o novo final da busca ($k_{fi} \leq k_{fi-1} \leq k_f$) pode ser escolhido de forma que

$$\begin{aligned} \|\hat{g}(kh)\| \exp(\gamma_{i-1}kh) &< \hat{C}_1(\gamma_{i-1}, h, k_f) \quad \text{se } k < k_{fi}, \\ \|\hat{g}(kh)\| \exp(\gamma_{i-1}kh) &\leq \hat{C}_1(\gamma_{i-1}, h, k_f) \quad \text{se } k > k_{fi}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

uma vez que se pode mostrar que $\|\hat{g}(kh)\| \exp(\gamma_i kh)$ tem um máximo em k_i^* que precede o máximo de $\|\hat{g}(kh)\| \exp(\gamma_{i-1} kh)$ em $k_{i-1}^* = k_{fi}$, i.e., $k_i^* \leq k_{i-1}^*$.

De forma análoga, o início da *região de confiança* pode ser refinado levando-se em consideração alguma computação prévia de $\hat{C}_1(\gamma_{i-1}, h, k_f)$ com $\gamma_i > \gamma_{i-1}$.

O estreitamento da *região de confiança* é ilustrado na Figura 3.3 pela comparação da norma da resposta impulsiva $|g_2(t)|$ com duas funções exponenciais $c_i \exp(-\gamma_i t)$, com $\gamma_1 = 0,499 \text{ s}^{-1}$, $\gamma_2 = 0,339 \text{ s}^{-1}$ e $c_i = \hat{C}_1(\gamma_i; 0,01; 400)$. Como se previu, os pontos de tangência entre $|g_2(t)|$ e a exponencial “2” (em $t \approx 2,7 \text{ s}$ e $t \approx 3,3 \text{ s}$) precedem o ponto de tangência entre $|g_2(t)|$ e a exponencial “1” (em $t \approx 3,9 \text{ s}$), uma vez que $\gamma_1 > \gamma_2$.

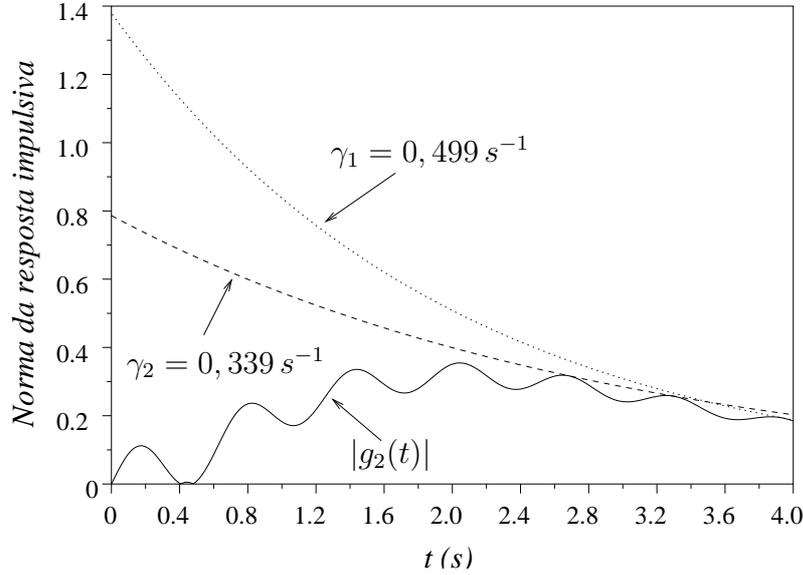


FIGURA 3.3: Norma da resposta impulsiva do sistema com função de transferência $G_2(s)$ e as respostas impulsivas de dois FOAFs com valores distintos para γ .

3.3.3.2 Minimização do ganho DC

Os problemas de maximização da velocidade da dinâmica do FOAF ou de minimização do valor de pico da sua resposta impulsiva são resolvidos diretamente pela estimação do *supremo* apresentada na Seção 3.3.3.1. No entanto, o problema de minimização do ganho DC do FOAF requer outro passo para se encontrar o valor ótimo de γ que minimiza $S(\hat{C}_1(\gamma, h, k_f), \gamma)$.

A minimização do ganho DC do FOAF formulada Seção 3.3.3 pode ser redefinida como

$$\min_{\delta_l \leq \gamma \leq \gamma_0 - \delta_u} \hat{S}(\gamma, h, k_f), \quad (3.55)$$

com

$$\hat{S}(\gamma, h, k_f) := \gamma^{-1} \hat{C}_1(\gamma, h, k_f), \quad (3.56)$$

resultando numa solução ótima em algum ponto (c_1^*, γ^*) , sendo $c_1^* = \hat{C}_1(\gamma^*, h, k_f)$. A

natureza da função ganho DC é ilustrada no gráfico de $\hat{S}(\gamma; 0, 01; 400)$ obtido para o sistema com função de transferência $G_2(s)$ (Figura 3.4.a) e o gráfico da derivada da função ganho DC $\partial\hat{S}(\gamma; 0, 01; 400)/\partial\gamma$ (Figura 3.4.b) computada numericamente através de uma aproximação por diferenças finitas. O mínimo valor de \hat{S} é obtido para $\gamma^* \approx 0,34 (s^{-1})$. A derivada $\partial\hat{S}/\partial\gamma$ é descontínua em três pontos, como se observa na Figura 3.4.b, particularmente no mínimo, o que impede a aplicação de métodos de otimização baseados em derivadas à minimização de \hat{S} .

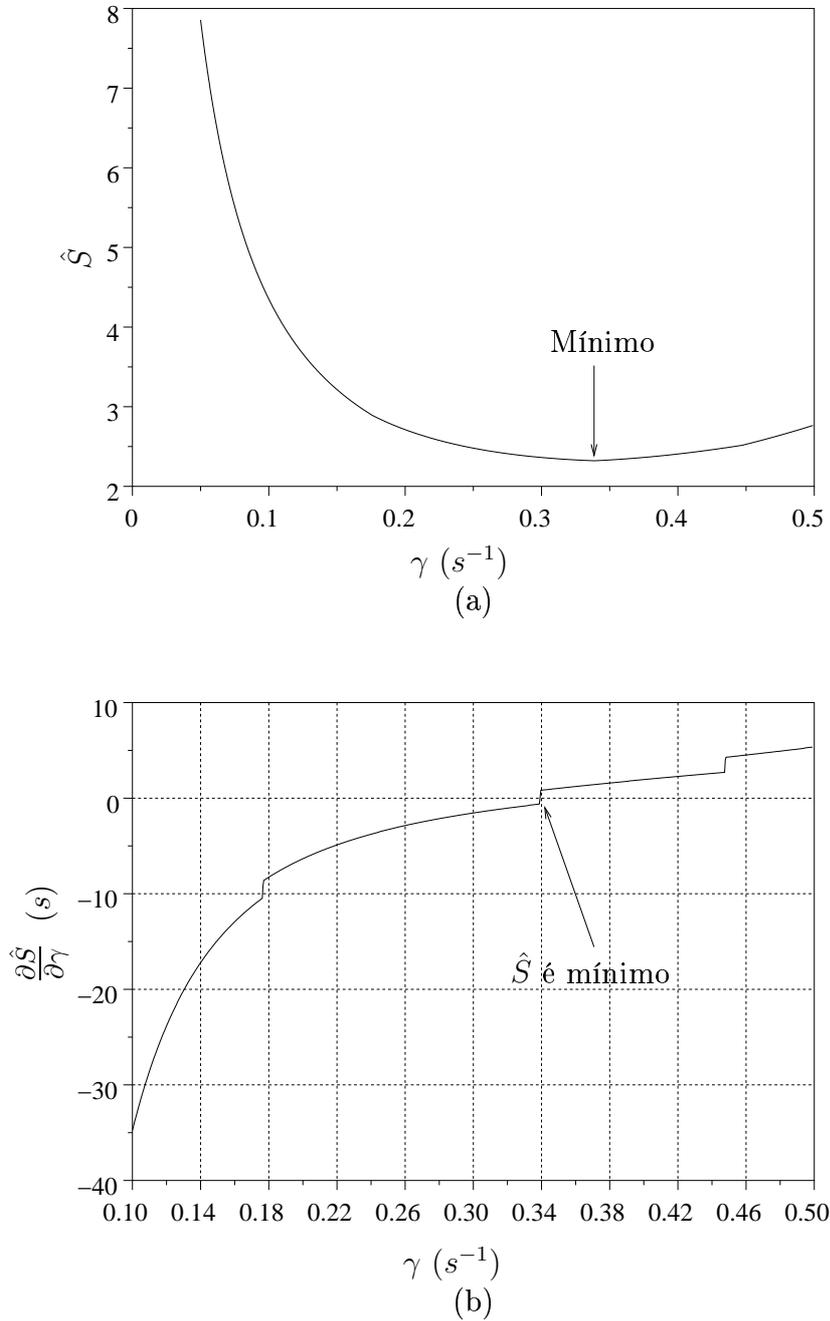


FIGURA 3.4: Gráficos do (a) ganho DC ($\hat{S}(\gamma; 0, 01; 400)$) e da (b) derivada do ganho DC ($\partial\hat{S}(\gamma; 0, 01; 400)/\partial\gamma$) do FOAF projetado para o sistema com função de transferência $G_2(s)$. Ambos os gráficos são traçados em função do parâmetro γ .

Por outro lado, a função \hat{S} é convexa conforme a Proposição a seguir, o que possibilita a aplicação de métodos de otimização convexa.

Proposição 3.1 *Sejam as constantes arbitrárias $h > 0$, $k_f \in \mathbb{N}$ e $\gamma_0 - \delta_u \geq \delta_l > 0$. Então, a função $\hat{S}(\gamma, h, k_f)$ definida em (3.56) é convexa no domínio $\mathcal{D} := \{\gamma \in \mathbb{R}^+ : \delta_l \leq \gamma \leq \gamma_0 - \delta_u\}$.*

Prova: O passo inicial é reescrever (3.56) como

$$\hat{S}(\gamma, h, k_f) = \max_{k \in \mathcal{T}} \{f(\gamma, h, k)\}, \quad (3.57)$$

onde \mathcal{T} é a região de confiança (3.52) e

$$f(\gamma, h, k) := \|\hat{g}(kh)\| \exp(\gamma kh) \gamma^{-1}. \quad (3.58)$$

Um passo intermediário é provar que se k e h forem mantidos constantes, então f é convexa no domínio \mathcal{D} . Com essa finalidade usa-se a segunda derivada parcial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} = \|\hat{g}(kh)\| \frac{(\gamma kh)^2 - 2\gamma kh + 2}{\gamma^3} \exp(\gamma kh), \quad (3.59)$$

que é contínua em relação a γ e positiva desde que $\gamma > 0$. Estas características implicam na convexidade de f no domínio \mathcal{D} , como se pode concluir de (Belegundu & Chandrupatla 1999, p. 25).

Completa-se a prova através da aplicação da definição de função convexa: \hat{S} é uma função convexa no domínio \mathcal{D} se para todo par γ_1 e γ_2 em \mathcal{D} e $0 \leq \alpha \leq 1$, a seguinte condição for satisfeita (e.g., (Belegundu & Chandrupatla 1999, p. 25)):

$$\hat{S}(\alpha\gamma_1 + (1 - \alpha)\gamma_2, h, k_f) \leq \alpha\hat{S}(\gamma_1, h, k_f) + (1 - \alpha)\hat{S}(\gamma_2, h, k_f). \quad (3.60)$$

De (3.57) tem-se que $\exists \bar{k} \in \mathcal{T}$ tal que

$$\hat{S}(\alpha\gamma_1 + (1 - \alpha)\gamma_2, h, k_f) = f(\alpha\gamma_1 + (1 - \alpha)\gamma_2, h, \bar{k}). \quad (3.61)$$

Por outro lado, uma vez que f é convexa em \mathcal{D} , a seguinte desigualdade é satisfeita

no mesmo domínio

$$\begin{aligned} f(\alpha\gamma_1 + (1 - \alpha)\gamma_2, h, k) &\leq \alpha f(\gamma_1, h, k) + (1 - \alpha)f(\gamma_2, h, k) \\ &\leq \alpha\hat{S}(\gamma_1, h, k_f) + (1 - \alpha)\hat{S}(\gamma_2, h, k_f), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$\forall k \in \mathcal{T}$, $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{D}$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$. Substituindo-se k por \bar{k} em (3.62) e aplicando-se (3.61), prova-se que a desigualdade (3.60) é satisfeita, o que finalmente prova que \hat{S} é convexa no domínio \mathcal{D} . ■

A convexidade de $\hat{S}(\gamma, h, k_f)$ em relação a γ no domínio $[\delta_l, \gamma_0 - \delta_u]$ implica na sua *unimodalidade* e, por isso, pode-se aplicar a busca através da razão áurea (*Golden Section Search*) (Van Loan 2000) à minimização (3.55). Neste método, atualiza-se passo a passo um intervalo $[\gamma_{1i}, \gamma_{4i}]$ que contém γ^* além de um par de pontos “interiores” γ_{2i} e γ_{3i} que satisfazem $\gamma_{1i} < \gamma_{2i} < \gamma_{3i} < \gamma_{4i}$ e

$$\gamma_{2i} = \gamma_{1i} + r(\gamma_{4i} - \gamma_{1i}), \quad (3.63)$$

$$\gamma_{3i} = \gamma_{1i} + (1 - r)(\gamma_{4i} - \gamma_{1i}), \quad (3.64)$$

para algum fator $r \in (0, 0,5)$ escolhido. Aplica-se a *razão áurea* $r_* = (1 + \sqrt{5})/2$ que geralmente resulta na convergência rápida do algoritmo. Uma vez que $r_* = (1 - r)^{-1}$, tem-se $r = (3 - \sqrt{5})/2 \approx 0,3819660$.

Se $\hat{S}(\gamma_{2i}, h, k_f) \leq \hat{S}(\gamma_{3i}, h, k_f)$, então devido à unimodalidade tem-se \hat{S} crescente no intervalo $[\gamma_{3i}, \gamma_{4i}]$, logo $\gamma^* \in [\gamma_{1i}, \gamma_{3i}]$. Por outro lado, se $\hat{S}(\gamma_{2i}, h, k_f) > \hat{S}(\gamma_{3i}, h, k_f)$ então $\gamma^* \in [\gamma_{2i}, \gamma_{4i}]$, como se pode concluir de forma análoga ao caso anterior. Isto sugere o algoritmo descrito na Tabela 3.2.

Deve-se notar que a variável de contagem i é desnecessária e as variáveis indexadas podem ser substituídas por variáveis escalares. O critério de parada ($\gamma_{3i} - \gamma_{1i} \leq \varepsilon_2 \gamma_{1i}$) é escolhido para que o erro relativo na estimativa $\hat{\gamma}^*$, dado por $|\hat{\gamma}^* - \gamma^*|/\gamma^*$, seja mantido dentro de uma margem tolerada ($\varepsilon_2 > 0$). Naturalmente, o número de iterações cresce na medida em que o erro relativo tolerado decresce ou o intervalo de busca inicial $[\delta_l, \gamma_0 - \delta_u]$ se torna mais amplo.

Uma propriedade relevante da *busca através da razão áurea* é que o valor estimado $\hat{\gamma}^*$ sempre converge para o ótimo γ^* na medida que $i \rightarrow +\infty$, desde que \hat{S} seja *unimodal*

TABELA 3.2: Algoritmo para a minimização do ganho DC baseado na *busca através da razão áurea*.

```

início
 $\gamma_{11} = \delta_l$ 
 $\gamma_{41} = \gamma_0 - \delta_u$ 
computar  $\gamma_{21}$  e  $\gamma_{31}$  através de (3.63) e (3.64)
 $i = 1$ 
enquanto  $(\gamma_{3i} - \gamma_{1i}) > (\varepsilon_2 \gamma_{1i})$  faça
  se  $\hat{S}(\gamma_{2i}, h, k_f) \leq \hat{S}(\gamma_{3i}, h, k_f)$  então
     $\gamma_{1i+1} = \gamma_{2i}$ 
     $\gamma_{2i+1} = \gamma_{3i}$ 
     $\gamma_{4i+1} = \gamma_{4i}$ 
    computar  $\gamma_{3i+1}$  através de (3.64)
  se não
     $\gamma_{4i+1} = \gamma_{3i}$ 
     $\gamma_{3i+1} = \gamma_{2i}$ 
     $\gamma_{1i+1} = \gamma_{1i}$ 
    computar  $\gamma_{2i+1}$  através de (3.63)
  fim
   $i = i + 1$ 
fim
selecionar  $\hat{\gamma}^* = \min\{\hat{S}(\gamma_{1i}, h, k_f), \hat{S}(\gamma_{2i}, h, k_f), \hat{S}(\gamma_{3i}, h, k_f), \hat{S}(\gamma_{4i}, h, k_f)\}$  e
  obter o valor correspondente de  $\hat{\gamma}^*$ 
 $\hat{c}^* = \hat{\gamma}^* \hat{S}(\hat{\gamma}^*, h, k_f)$ 
fim

```

no intervalo inicial (Van Loan 2000).

3.3.3.3 Exemplo de síntese ótima

Como exemplo, são sintetizados FOAFs ótimos para a norma do sinal de saída do sistema com função de transferência $G_1(s)$ (vide (3.39)). Os resultados obtidos para os três objetivos de otimização através dos algoritmos descritos anteriormente nesta seção são apresentados na Tabela 3.3. Os parâmetros de projeto são: $\delta_l = \delta_u = 0,1 s^{-1}$, $\varepsilon_1 = 0,1$, $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ e $h_o = 10$. As respostas impulsivas de cada FOAF e a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($|g_1(t)|$) são apresentadas na Figura 3.5.

Comparando-se os resultados das Tabelas 3.1 e Tabelas 3.3, nota-se que os ganhos DC e os valores de pico da resposta impulsiva ótimos são muito menores do que os obtidos pela síntese através de formas quadráticas de Lyapunov. Uma exceção é que o ganho DC para o projeto com pico mínimo (26,9) é maior que o menor ganho DC obtido através da síntese por Lyapunov (19,6) para a realização em cascata de $G_1(s)$. Isto não é surpreendente uma vez que o ganho DC para o projeto pela minimização

TABELA 3.3: Resultados da síntese para os três objetivos de otimização aplicados ao filtro $G_1(s)$.

Objetivo	Características do FOAF		
	γ (s^{-1})	c_1	S
Minimizar a constante de tempo	0,90	7,2	8,0
Minimizar o ganho DC	0,69	4,9	7,1
Minimizar o valor de pico	0,10	2,7	26,9

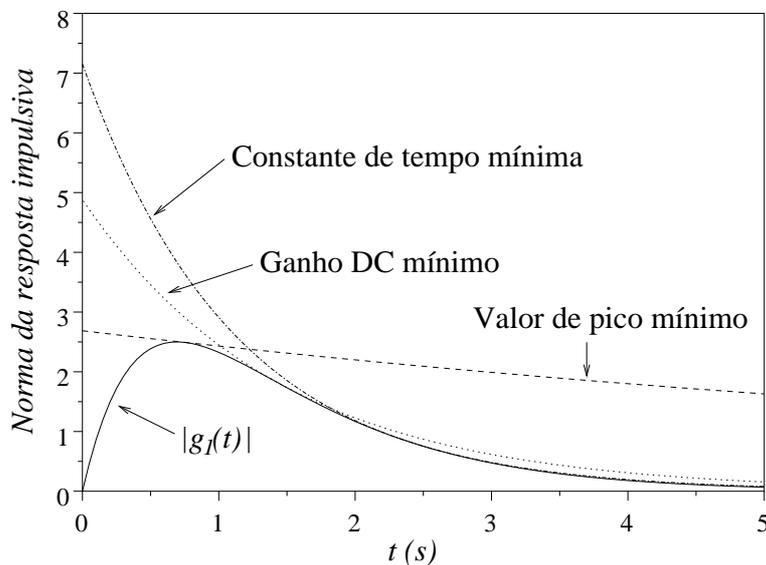


FIGURA 3.5: Resposta impulsiva de cada FOAF ótimo e a norma da resposta impulsiva de $G_1(s)$ ($|g_1(t)|$).

do valor de pico da resposta impulsiva tende a infinito na medida que a margem de estabilidade especificada $\delta_l \rightarrow 0+$.

Devido aos valores escolhidos para os parâmetros ε_1 e h_o , foram computadas 201 amostras da resposta impulsiva $\hat{g}_1(kh)$ para o cálculo de \hat{C}_1 . O período de amostragem correspondente é $h = 0,05$ s. O horizonte de tempo $t_f = 10$ s parece ter sido superestimado, uma vez que na Figura 3.5 a norma da resposta impulsiva é desprezível para fins práticos após $t = 5$ s, o que sugere que o valor recomendado para o parâmetro do horizonte de busca poderia ser $h_o = 5$ neste exemplo.

3.4 Comentários

Neste capítulo revisou-se a síntese de FOAFs para majorar a norma dos sinais de saída de sistemas MIMO tendo-se em vista o projeto de sistemas de controle por modo deslizante. Os FOAFs são aplicados à síntese das funções de modulação nos sistemas de controle por modo deslizante desenvolvidos nesta Tese. Outras abordagens empregam observadores de estado (e.g., (Edwards & Spurgeon 1998)), no entanto, a estrutura do FOAF é mais simples e é inerentemente robusta a incertezas se comparada a observadores.

O Lema 3.1 estabelece a existência do FOAF para a norma do sinal de saída de sistemas (filtros) lineares e invariantes no tempo (*linear time invariant* — LTI). O Teorema 2 de (Cunha 2002, Cunha, Costa & Hsu 2003b) estende a aplicabilidade do FOAF a sistemas LTI com sinais de entrada descontínuos gerados em sistemas com modos deslizantes. O Lema 3.2 aqui apresentado é mais geral do que esse Teorema pois se aplica a sistemas não-lineares, variantes no tempo e com modos deslizantes.

Foram desenvolvidos algoritmos computacionais para a otimização dos coeficientes do FOAF de acordo com três critérios de desempenho: **(a)** constante de tempo mínima; **(b)** ganho DC mínimo; ou **(c)** mínimo valor de pico da resposta impulsiva. Uma dificuldade encontrada no desenvolvimento desses algoritmos é que esses problemas podem recair em otimização não-convexa e não-diferenciável. O projeto ótimo pode resultar em desempenhos muito melhores do que os usualmente obtidos pela síntese através de formas quadráticas de Lyapunov. Os algoritmos foram codificados com o pacote de *software* científico Scilab 2.6 (ou 2.7) (vide (Cunha 2002)), que é disponível livremente no endereço <http://www.scilab.org>.

Assumi-se que as matrizes da realização $\{A, B, C\}$ são conhecidas. No entanto, o Lema 3.1 permite concluir que o FOAF pode ser projetado para sistemas com parâmetros incertos, desde que os coeficientes c_1 e γ sejam escolhidos adequadamente. A síntese dos coeficientes para sistemas com parâmetros incertos é muito importante no controle por modos deslizantes, porém é deixada como tema para pesquisa futura. Nesta Tese o projeto para sistemas incertos é realizado utilizando-se o algoritmo de minimização do ganho DC de forma que a desigualdade (3.6) seja satisfeita para um conjunto finito de combinações extremas (pessimistas) dos parâmetros incertos.

Capítulo 4

Parametrização do Controle por Modelo de Referência

Para simplificar o desenvolvimento da parametrização do controle, neste capítulo considera-se o caso em que o sistema a ser controlado é linear e a perturbação $\phi(t)$ é do tipo casada, isto é, equivale a uma perturbação de entrada $d(t)$, sendo $\phi(t) = B_p d(t)$. Portanto, a equação de estado da planta (1.32) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p [u + d(t)] , \\ y &= C_p x_p .\end{aligned}\tag{4.1}$$

A parametrização do controle para sistemas em que a perturbação $\phi(x_p, t)$ é não-linear e descasada é abordada nas Seções 7.1 e 7.2.

Se a planta (4.1) fosse perfeitamente conhecida e nenhuma perturbação estivesse presente ($d(t) \equiv 0$), então uma lei de controle que casaria a matriz de transferência da malha fechada com o modelo $W_M(s)$ seria dada pela seguinte parametrização, que é usual na literatura sobre controle adaptativo (e.g., (Sastry & Bodson 1989))

$$u^* = \theta^{*T} \omega ,\tag{4.2}$$

onde a matriz de parâmetros θ^* e o vetor regressor $\omega(t)$ são dados por

$$\theta^{*T} = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^{*T} \ \theta_4^{*T}], \quad (4.3)$$

$$\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y^T \ r^T]^T, \quad (4.4)$$

$$\omega_1 = A(s)\Lambda^{-1}(s)u, \quad \omega_2 = A(s)\Lambda^{-1}(s)y, \quad (4.5)$$

$$A(s) = [Is^{\nu-2} \ Is^{\nu-3} \ \dots \ Is \ I]^T, \quad (4.6)$$

$$\Lambda(s) = \lambda(s)I, \quad (4.7)$$

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^{m(\nu-1)}$, $\theta_1^*, \theta_2^* \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m}$, $\theta_3^*, \theta_4^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\lambda(s)$ é um polinômio mônico Hurwitz de grau $\nu - 1$.

Se houver perturbação de entrada, esta poderá ser cancelada pelo sinal $W_d(s) * d(t)$ adicionado à lei de controle (4.2) como segue

$$u^* = \theta^{*T} \omega - W_d(s) * d(t), \quad (4.8)$$

$$W_d(s) = I - \theta_1^{*T} A(s) \Lambda^{-1}(s). \quad (4.9)$$

Deve-se notar que a matriz de transferência $W_d(s)$ é BIBO estável (uma vez que $\lambda(s)$ é Hurwitz) e própria. Este esquema de controle por modelo de referência é apresentado na Figura 4.1, que ilustra o efeito do sinal de cancelamento da perturbação.

4.1 Condições de Casamento

Considere a decomposição em frações matriciais (MFD) pela direita da matriz de transferência da planta

$$G(s) = N_R(s)D_R^{-1}(s), \quad N_R(s), D_R(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]. \quad (4.10)$$

Assumindo-se que não há perturbação, a matriz de transferência de r para y é igual ao modelo $W_M(s)$ se e somente se a seguinte equação diofantina for satisfeita (Sastry

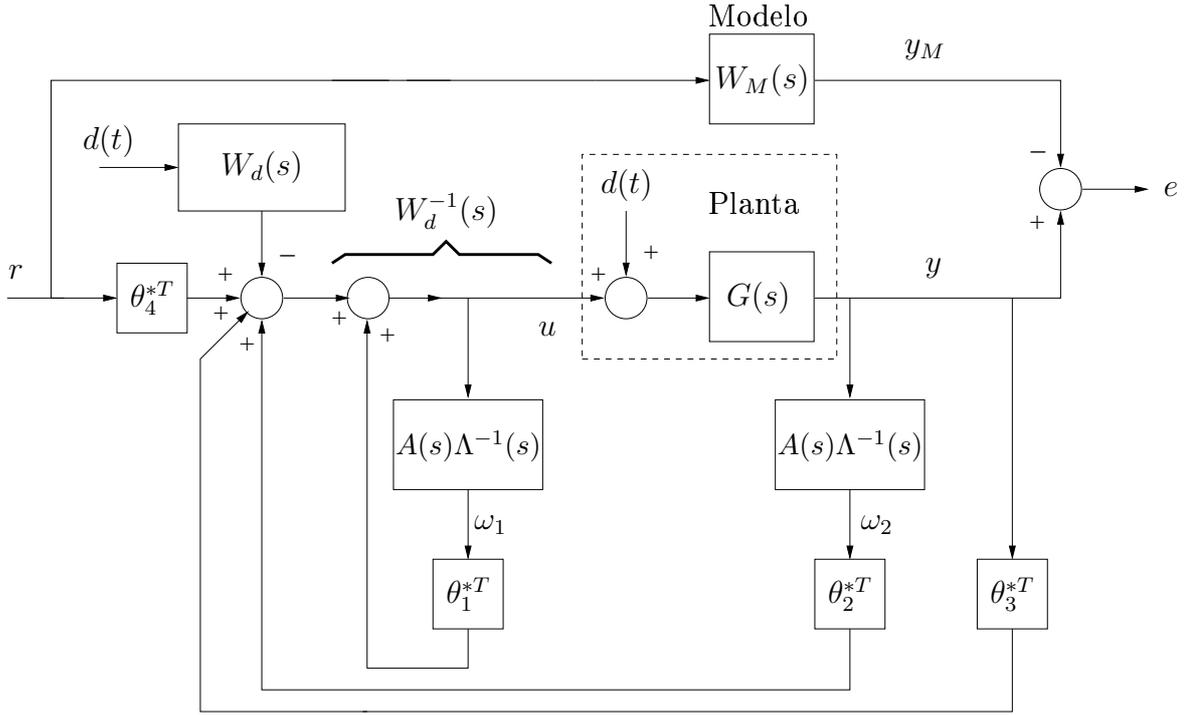


FIGURA 4.1: Estrutura e parametrização do controle por modelo de referência. Destacam-se o sinal de referência (r), o sinal de erro (e) e o sinal $W_d(s) * d(t)$ para o cancelamento da perturbação de entrada $d(t)$.

& Bodson 1989, de Mathelin & Bodson 1994)

$$N_R(s) \{ [\Lambda(s) - \theta_1^{*T} A(s)] D_R(s) - [\theta_2^{*T} A(s) + \theta_3^{*T} \Lambda(s)] N_R(s) \}^{-1} \Lambda(s) \theta_4^{*T} = W_M(s). \quad (4.11)$$

Se o controle for parametrizado por (4.2)–(4.7) então $\exists \theta^*$ de forma que (4.11) seja satisfeita (Sastry & Bodson 1989, Proposição 6.3.3). Esta condição de casamento requer $\theta_4^{*T} = K_p^{-1}$. No entanto, a unicidade de θ^* não é garantida por esta proposição. Um resultado importante, apresentado em (de Mathelin & Bodson 1994), é que θ^* é único se for imposta a seguinte restrição à solução de (4.11):

$$\partial_{c_i} D^*(s) \leq \nu_i - 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (4.12)$$

onde $\{\nu_i\}$ são os índices de observabilidade de $G(s)$ e $\partial_{c_i} D^*(s)$ são os graus por coluna de $D^*(s) := [\theta_2^{*T} A(s) + \theta_3^{*T} \Lambda(s)] \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$. Particularmente, se $\nu_i = \nu, \forall i$, então θ^* é único, uma vez que $\nu = \max_i(\nu_i)$ (Sastry & Bodson 1989).

A equação diofantina (4.11) pode ser reescrita como um sistema de equações lineares

algébricas em que a incógnita é θ^* , conforme as equações (6.3.12)–(6.3.15) de (Ioannou & Sun 1996, p. 335) desenvolvidas para o caso SISO. A unicidade da solução θ^* não é requerida nesta Tese. Uma parametrização que satisfaça a condição de unicidade (4.12) resulta em filtros de ordem mínima para gerar os sinais ω_1 e ω_2 , no entanto, isto requer o conhecimento *a priori* de todos os índices de observabilidade da planta. Doravante, θ^* denota a *solução da equação linear de casamento obtida pelo método de mínimos quadrados*, a fim de se formular precisamente as leis de controle.

4.2 Equações do Erro

Tendo em vista o desenvolvimento e a análise dos controladores nos Capítulos 5 e 6, revisa-se nesta seção o desenvolvimento das equações da dinâmica do erro, que segue a abordagem usual aplicada ao MRAC SISO como é apresentada por exemplo em (Hsu et al. 1994, Ioannou & Sun 1996). Os sinais filtrados da entrada e da saída (4.5) podem ser gerados pelos filtros

$$\dot{\omega}_1 = \Phi\omega_1 + \Gamma u, \quad \dot{\omega}_2 = \Phi\omega_2 + \Gamma y, \quad (4.13)$$

onde $\Gamma \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m}$ e $\Phi \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m(\nu-1)}$ cujo polinômio característico é $\det(sI - \Phi) = \det(\Lambda(s)) = \lambda^m(s)$. Seja o vetor de estado $X := [x_p^T, \omega_1^T, \omega_2^T]^T$. O sistema em malha aberta composto pela planta (4.1) e pelos filtros (4.13) pode ser representado por

$$\dot{X} = A_o X + B_o u + B_{od} d, \quad (4.14)$$

$$y = C_o X, \quad (4.15)$$

onde

$$A_o = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 \\ \Gamma C_p & 0 & \Phi \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} B_p \\ \Gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{od} = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_o = [C_p \quad 0 \quad 0]. \quad (4.16)$$

Então o vetor regressor é dado por

$$\omega = \Omega_1 X + \Omega_2 r, \quad \Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Substituindo-se u por u^* dado por (4.8) em (4.14) e lembrando-se que a perturbação é cancelada por u^* , obtém-se a seguinte realização não-mínima de $W_M(s)$

$$\dot{X}_M = A_c X_M + B_c r - B_o W_d(s) * d(t) + B_o d, \quad (4.18)$$

$$y_M = C_o X_M, \quad (4.19)$$

onde

$$A_c = A_o + B_o \theta^{*T} \Omega_1 = \begin{bmatrix} A_p + B_p \theta_3^{*T} C_p & B_p \theta_1^{*T} & B_p \theta_2^{*T} \\ \Gamma \theta_3^{*T} C_p & \Phi + \Gamma \theta_1^{*T} & \Gamma \theta_2^{*T} \\ \Gamma C_p & 0 & \Phi \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$B_c = B_o \theta^{*T} \Omega_2 = B_o \theta_4^{*T} = \begin{bmatrix} B_p \theta_4^{*T} \\ \Gamma \theta_4^{*T} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

A matriz A_c é Hurwitz, uma vez que o modelo de referência e os filtros de estado são estáveis. Finalmente, a equação de estado do erro é obtida subtraindo-se (4.18)–(4.19) de (4.14)–(4.15), o que resulta em

$$\dot{X}_e = A_c X_e + B_c (\theta_4^{*T})^{-1} [u - \theta^{*T} \omega + W_d(s) * d(t)], \quad (4.22)$$

$$e = C_o X_e, \quad (4.23)$$

onde $X_e := X - X_M$ é o estado da equação do erro. Como $\{A_c, B_c, C_o\}$ é uma realização não-mínima de $W_M(s)$ e $(\theta_4^{*T})^{-1} = K_p$, a matriz de transferência da equação do erro de

saída (4.22)–(4.23) pode ser escrita como

$$e = W_M(s)K_p [u - \theta^{*T}\omega + W_d(s) * d(t)] . \quad (4.24)$$

Capítulo 5

Controle de Sistemas Lineares de Grau Relativo Uniforme e Unitário

A matriz *interactor* de sistemas de grau relativo uniforme e unitário é $\xi(s) = sI$, conforme a definição de grau relativo uniforme apresentada na Seção 1.2.3.3. Outra condição equivalente para que o grau relativo da planta (4.1) seja unitário é $\det(C_p B_p) \neq 0$ (Bodson & Groszkiewicz 1997). Assim sendo, neste capítulo a hipótese (A4) é substituída pela hipótese mais específica:

(A4.a) O grau relativo da planta é uniforme e unitário, i.e., $\det(C_p B_p) \neq 0$.

Neste caso, a matriz de ganho de alta frequência da planta é dada por $K_p = C_p B_p$.

Inicialmente, assume-se que a perturbação atua na entrada da planta, conforme o Capítulo 4. Na Seção 5.3 considera-se que a perturbação é *descasada*. Além disso, considera-se que o sistema é linear, a perturbação é independente do estado e a seguinte hipótese substitui as hipóteses (A6) e (A7):

(A6.a) A perturbação de entrada $d(t)$ é contínua por partes e se conhece um majorante $\bar{d}(t)$, também contínuo por partes, de forma que $\|d(t)\| \leq \bar{d}(t) \leq \bar{d}_{sup} < +\infty, \forall t \geq 0$.

Uma realização do modelo de referência (1.34)–(1.35) de grau relativo unitário ($L(s)=1$) é dada por

$$\dot{y}_M = A_M y_M + r, \quad A_M = -\text{diag} \{ \gamma_1, \dots, \gamma_m \}. \quad (5.1)$$

Assim, para o caso do grau relativo uniforme e unitário, a equação do erro (4.24) pode ser reescrita na seguinte forma

$$e = (sI - A_M)^{-1} K_p [u - \theta^{*T} \omega + W_d(s) * d(t)] . \quad (5.2)$$

A partir desta parametrização do controle, se assume que a lei de controle pertence à seguinte classe:

(A8.a) A lei de controle satisfaz a desigualdade

$$\|u_t\|_\infty \leq K_\omega \|\omega_t\|_\infty + K_{rd} , \quad (5.3)$$

onde K_ω , K_{rd} são constantes positivas.

Com isto garante-se que não ocorrerá o *escape em tempo finito* dos sinais do sistema. De fato, neste caso os sinais do sistema serão *regulares* e, portanto, podem crescer no máximo exponencialmente (Sasthy & Bodson 1989).

5.1 Projeto e Análise do Controle para Plantas de Grau Relativo Uniforme e Unitário

O UV-MRAC (*Unit Vector MRAC*) é derivado da estrutura do VS-MRAC (*Variable Structure MRAC*) desenvolvido para sistemas SISO em (Hsu & Costa 1989) e generalizado para o caso MIMO em (Chien & Fu 1992, Chien et al. 1996) em que se utiliza o controle pela função sinal. Comparando-se os resultados obtidos em (Hsu et al. 2001, Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2003) com os resultados de (Chien & Fu 1992, Chien et al. 1996), as principais características novas são: (a) demonstram-se propriedades de estabilidade exponencial global e (b) a hipótese sobre a matriz do ganho de alta freqüência da planta é menos restritiva.

A partir da equação do erro (5.2) e de acordo com a Proposição 2.1, a lei de controle

vetorial unitário proposta é

$$u = u^{\text{nom}} + S_p U, \quad (5.4)$$

$$U = -\rho \frac{e}{\|e\|}, \quad (5.5)$$

$$u^{\text{nom}} = \theta^{\text{nom}T} \omega, \quad (5.6)$$

onde $S_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz que pode ser escolhida pelo projetista observando-se (A5) e θ^{nom} é um valor nominal para θ^* . O controle nominal u^{nom} é utilizado para permitir a redução da amplitude do termo chaveado do sinal de controle se a incerteza paramétrica $\|\theta^* - \theta^{\text{nom}}\|$ for pequena. O UV-MRAC é esquematizado na Figura 5.1.

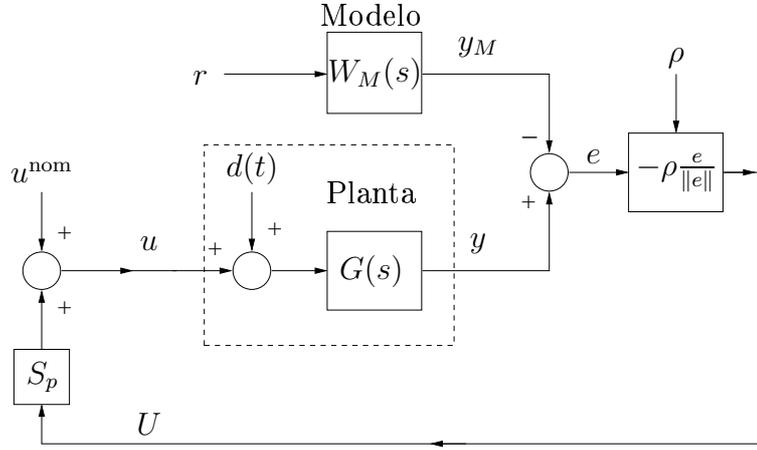


FIGURA 5.1: Diagrama de blocos do UV-MRAC para plantas de grau relativo uniforme e unitário. Os filtros de estado e a síntese da função de modulação ρ foram omitidos para simplificar o diagrama.

Da Proposição 2.1 tem-se que a convergência exponencial do erro de saída (e) será obtida se o sinal de modulação ρ satisfizer a desigualdade

$$\rho \geq \delta + c_e \|e\| + (1 + c_d) \left\| S_p^{-1} \left[(\theta^{\text{nom}} - \theta^*)^T \omega + W_d(s) * d(t) \right] \right\|, \quad (5.7)$$

onde $c_e, c_d \geq 0$ são constantes adequadas que satisfazem as desigualdades (2.11) e $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária. Notando-se que $d(t)$ é limitada e $W_d(s)$ é própria e estável, uma função de modulação que satisfaz (5.7) e (A8.a) é

$$\rho = \delta + c_1 \|\omega\| + c_2 \|e\| + c_3 \hat{d}(t), \quad (5.8)$$

com

$$\hat{d}(t) = \bar{d}(t) + \frac{c_4}{s + \gamma_d} * \bar{d}(t) \geq \|[I - \theta_1^{*T} A(s) \Lambda^{-1}(s)] * d(t)\|. \quad (5.9)$$

O majorante (5.9) é obtido pela aplicação do Lema 3.1 onde γ_d satisfaz $\gamma_0 > \gamma_d > 0$, sendo γ_0 a margem de estabilidade do filtro com matriz de transferência $A(s) \Lambda^{-1}(s)$.

A matriz de transferência da planta $G(s)$ é incerta e pertence a uma dada classe \mathcal{P} que é um subconjunto de $\mathbb{R}^{m \times m}(s)$. Cada elemento de \mathcal{P} satisfaz as hipóteses (A1)–(A3), (A4.a) e (A5) para S_p e ν fixos. A implementação da função de modulação (5.8)–(5.9) requer o seguinte:

(A9.a) São conhecidos valores para as constantes $c_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, 4$) e $\gamma_d > 0$, de forma que a desigualdade (5.7) seja satisfeita $\forall G(s) \in \mathcal{P}$ com algum θ^* correspondente a cada elemento de \mathcal{P} que satisfaça a equação diofantina (4.11).

Observação 5.1 *A unicidade de θ^* não é necessária em (A9.a). Uma parametrização que satisfaça a condição de unicidade (4.12) resulta em filtros de ordem mínima para a geração dos sinais ω_1 and ω_2 . No entanto, isto requer o conhecimento a priori de todos os índices de observabilidade da planta, o que é mais restritivo do que assumir o conhecimento do índice de observabilidade ν .*

Observação 5.2 *Nota-se que os sinais ω_1 e ω_2 podem ser expressos como sinais filtrados da saída y através de filtros estáveis e causais, conforme é feito em (Ioannou & Sun 1996, eq. (6.4.12)) para o caso SISO. Então pode-se majorar $\|\omega_1\|$ e $\|\omega_2\|$ pelo sinal ρ_y que satisfaz*

$$\rho_y = \frac{c_5 s + c_6}{s + c_7} \|y\|, \quad (5.10)$$

obtido através da aplicação do Lema 3.1 conforme a Observação 3.2. Assim obtém-se a função de modulação em (Emelyanov et al. 1992a, eq. (6)), exceto que o UV-MRAC não requer o conhecimento de $K_p = C_p B_p$ para o projeto da lei de controle e que a lei de chaveamento aqui é o vetor unitário em vez da função sinal usada loc. cit.. Além do mais, essa simplificação pode resultar numa função de modulação de amplitude exageradamente grande.

O seguinte resultado de estabilidade foi obtido em (Hsu et al. 2001, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2003):

Teorema 5.1 *Considere o sistema formado pela equação do erro (4.22)–(4.23), a lei de controle (5.4)–(5.6) e a função de modulação (5.8)–(5.9). Se as hipóteses (A1)–(A3), (A4.a), (A5), (A6.a) e (A9.a) forem satisfeitas, então a estratégia UV-MRAC será globalmente exponencialmente estável, i.e., $\exists k, \lambda > 0$ tais que $\|X_e(t)\| \leq k \exp(-\lambda t) \|X_e(0)\|$, $\forall t \geq 0$. Além disso, se $\delta > 0$, então o erro de saída $e(t)$ se tornará nulo após algum tempo finito.*

Prova: Ao longo da prova o símbolo k_i ($i \in \mathbb{N}$) denota *constante positiva apropriada*. A equação do erro (4.22)–(4.23) pode ser representada utilizando-se a *decomposição de Kalman* (Åström & Wittenmark 1997, pp. 101–102)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{X}}_e &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{22} & 0 & 0 \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} & \bar{A}_{34} \\ 0 & \bar{A}_{42} & 0 & \bar{A}_{44} \end{bmatrix} \bar{X}_e + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \\ \bar{B}_3 \\ 0 \end{bmatrix} [u - u^*], \\ e &= \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{X}_e, \end{aligned} \quad (5.11)$$

obtida através de alguma transformação linear adequada $\bar{T}X_e = \bar{X}_e$. A *decomposição de Kalman* particiona o sistema em sub-sistemas observáveis, não-observáveis, controláveis e não-controláveis. Uma vez que a matriz de transferência de (5.11) é dada por $e = \bar{C}_1(sI - \bar{A}_{11})^{-1}\bar{B}_1[u - u^*]$, que é igual à matriz de transferência da equação do erro (5.2), tem-se que a matriz HFG da planta é dada por $K_p = \bar{C}_1\bar{B}_1$, onde as matrizes quadradas \bar{C}_1 e \bar{B}_1 não são singulares. A não-singularidade destas matrizes permite a aplicação da transformação

$$\begin{bmatrix} e \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = T \bar{X}_e, \quad T = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ -\bar{B}_3\bar{B}_1^{-1} & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

resultando na *forma regular* (Young et al. 1977, Utkin 1992)

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u - u^*]. \quad (5.13)$$

Comparando-se a matriz de transferência de (5.13) ($e = (sI - A_{11})^{-1}K_p[u - u^*]$) com a matriz de transferência da equação do erro (4.24), conclui-se que $A_{11} = A_M$. Além disso, as sub-matrizes A_{ii} ($i = 1, \dots, 4$) são Hurwitz uma vez que A_c é Hurwitz.

Agora aplica-se a Proposição 2.1 ao sistema em malha fechada composto por (5.4)–(5.6), (5.8)–(5.9) e (5.13) com $K = K_p S_p$, $\pi_1(t) = K^{-1}A_{12} \exp(A_{22}t)x_2(0)$, $\pi_2(t) \equiv 0$ e $d_U(t) = S_p^{-1}[u^{\text{nom}} - u^*]$. Uma vez que $-K$ é Hurwitz em virtude da hipótese (A5) e que a função de modulação (5.8) satisfaz a desigualdade (5.7) conforme a hipótese (A9.a), tem-se que o erro de saída é limitado por

$$\|e(t)\| \leq (k_1\|e(0)\| + k_2\|x_2(0)\|) \exp(-\lambda_1 t), \quad (5.14)$$

$\forall t \geq 0$. Além disso, se $\delta > 0$, então o modo deslizante no ponto $e = 0$ começa em algum tempo finito $t_s \geq 0$. Uma vez que

$$x_2(t) = \exp(A_{22}t)x_2(0), \quad (5.15)$$

$$x_3(t) = \exp(A_{33}t)x_3(0) + \exp(A_{33}t) * [A_{31}e(t) + A_{32}x_2(t) + A_{34}x_4(t)], \quad (5.16)$$

$$x_4(t) = \exp(A_{44}t)x_4(0) + \exp(A_{44}t) * [A_{42}x_2(t)], \quad (5.17)$$

$\forall t \geq 0$, as submatrizes A_{ii} são Hurwitz e $e(t)$ converge exponencialmente para zero, pode-se mostrar que

$$\|x_i(t)\| \leq k_3 \exp(-\lambda_5 t) \|X_e(0)\|, \quad (i = 2, 3, 4), \quad (5.18)$$

$\forall t \geq 0$, onde $0 < \lambda_5 < \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_i = \min_j \{\text{Re}(-\lambda_{ij})\} > 0$ e $\{\lambda_{ij}\}$ é o espectro de A_{ii} ($i = 2, 3, 4$). Dos majorantes (5.14) e (5.18), conclui-se que $\|X_e(t)\| \leq k_4 \exp(-\lambda_5 t) \|X_e(0)\|$, $\forall t \geq 0$, o que prova que o sistema é globalmente exponencial-

mente estável. ■

Observação 5.3 *O conhecimento de uma matriz constante S_p tal que $-K_p S_p$ seja Hurwitz pode não ser necessário no contexto de estabilização adaptativa. Em (Ryan 1993), a hipótese sobre S_p é menos restritiva pois se requer apenas o conhecimento de um conjunto finito de matrizes que contenha alguma S_p adequada. Esse conjunto é denominado spectrum-unmixing set de K_p . O algoritmo de estabilização comuta ciclicamente o elemento do spectrum-unmixing set a ser usado na lei de controle. No entanto, o algoritmo proposto loc. cit. não é globalmente exponencialmente estável e alguns sinais que teoricamente permaneceriam finitos podem tornar-se excessivamente grandes como consequência do ruído de medição.*

5.2 Exemplo de Projeto

Para ilustrar o projeto do UV-MRAC, considera-se um sistema de terceira ordem descrito pela matriz de transferência (Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2003)

$$G_\alpha(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+0,6}{s^2-1} & \frac{-1,2}{s^2-1} \\ \frac{0,4}{s^2-1} & \frac{s+2,2}{s^2-1} \end{bmatrix} K_p. \quad (5.19)$$

Esta planta tem pólos em $s = \{1, 1, -1\}$, um zero de transmissão em $s = -1, 8$, índice de observabilidade $\nu=2$ e matriz de ganho de alta frequência

$$K_p = \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha^2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

onde a constante $\alpha \in [0, 3; 4]$ é um parâmetro incerto. Todos os demais parâmetros são conhecidos. Portanto, pode-se afirmar que a planta pertence à classe $\mathcal{P} = \{G_\alpha(s) : 0, 3 \leq \alpha \leq 4\}$. A perturbação de entrada é uniformemente limitada por $\bar{d}(t) \equiv 5$ de acordo com a hipótese (A6.a).

Escolhendo $S_p = I$ tem-se que $-K_p S_p$ é Hurwitz se e somente se $-1 < \alpha < -0, 25$ ou $\alpha > 0$, então o UV-MRAC pode ser aplicado. Em contraste, esse parâmetro incerto deveria ser restrito à faixa $0, 525 < \alpha < 1, 490$ para que $K_p S_p$ fosse mantido positivo definido para possibilitar a aplicação de algoritmos VSC como aqueles apresentados

em (Tao & Ioannou 1989, Chien & Fu 1992, Chien et al. 1996), o que é claramente uma imposição muito mais restritiva do que a condição Hurwitz. Além disso, pode-se mostrar que $\nexists S_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det(S_p) \neq 0$, tal que $K_p S_p = (K_p S_p)^T$, $\forall \alpha \in [0, 3; 4]$. Portanto, plantas desta classe não podem ser controladas por algoritmos que exijam a simetria da matriz HFG e que assumam que S_p seja uma matriz fixa.

5.2.1 Projeto

O modelo de referência escolhido é

$$W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Os filtros de estado são escolhidos com $\lambda(s) = s + 1$. A matriz de parâmetros nominais é calculada para $\alpha^{\text{nom}} = 1$, o que resulta em

$$\begin{aligned} \theta^{*T} &= \begin{bmatrix} -0,99 & 0,57 & -0,42 & -0,42 & -0,39 & 1,41 & 0,2 & -0,4 \\ -0,23 & -0,11 & -0,34 & -0,34 & -1,03 & -0,43 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ são coeficientes arbitrários que permitem varrer completamente o conjunto das matrizes de parâmetros θ^* que satisfazem a equação diofantina (4.11) para $\alpha = 1$. Escolheu-se $\theta^{\text{nom}} = \theta^*$ com $p_1 = p_2 = 0$ o que gera uma solução de mínimos quadrados para a equação diofantina.

A função de modulação (5.8) deve ser projetada observando-se (A9.a) e procurando-se manter o sinal de controle com pequena amplitude de forma sub-ótima (vide (Kase & Mutoh 2000)). Para isto as constantes da função de modulação devem ser as menores possíveis. A constante c_1 é calculada para satisfazer a desigualdade

$$c_1 \geq \bar{c}_1 = \frac{2}{\lambda_{\min}(Q)} \left\| PK_p (\theta^{\text{nom}} - \theta^*)^T \right\|, \quad (5.23)$$

que foi desenvolvida a partir de (5.7) e (2.11) mas utilizando-se o majorante menos conservativo $\|PK_p(\theta^{\text{nom}} - \theta^*)^T\| \leq \|PK_p S_p\| \|S_p^{-1}(\theta^{\text{nom}} - \theta^*)^T\|$ que pode ser obtido

a partir de (2.9). A matriz $P = P^T > 0$ satisfaz a equação de Lyapunov $PK_pS_p + (K_pS_p)^T P = Q$ para uma dada matriz $Q = Q^T > 0$, que é um parâmetro livre de projeto. Aqui se escolheu $Q = I$. Em (5.23), P , K_p e θ^* dependem do parâmetro incerto da planta α . O gráfico de \bar{c}_1 versus α apresentado na Figura 5.2 permite concluir que o valor $c_1 = 17$ possibilita que a desigualdade (5.7) seja satisfeita para qualquer planta que pertença à classe \mathcal{P} .

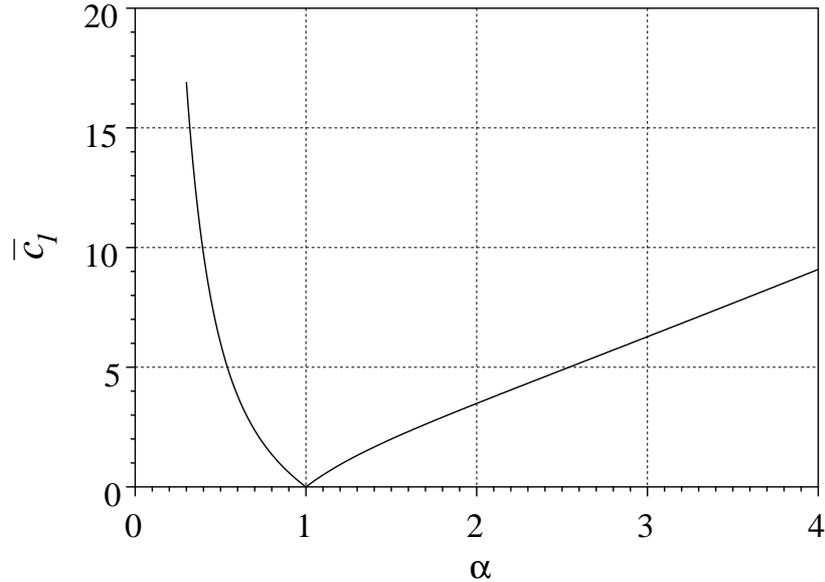


FIGURA 5.2: Coeficiente \bar{c}_1 da função de modulação em função do parâmetro incerto da planta (α).

A função de modulação pode ser simplificada uma vez que o modelo de referência é tal que $A_M = -\gamma_M I$, $\gamma_M > 0$, então $c_2 = 0$, conforme o Corolário 2.1.

A constante c_3 deve satisfazer

$$c_3 \geq \bar{c}_3 = \frac{2}{\lambda_{\min}(Q)} \|PK_p\|, \quad (5.24)$$

e pode ser computada através de um procedimento similar àquele aplicado na escolha de c_1 , que resulta em $c_3 = 6, 9$.

Uma vez que a perturbação é uniformemente limitada, tem-se $\hat{d}(t) \equiv w_{dc}\bar{d}$, onde $w_{dc} \geq \max_{0,3 < \alpha < 4} (\|W_d(0)\|)$ e $W_d(0)$ é o ganho DC de $W_d(s)$ que depende do parâmetro α . Aqui $w_{dc} = 2, 8$.

Utiliza-se o parâmetro da função de modulação $\delta > 0$ ($\delta = 0, 1$) para garantir que a

convergência do erro de saída ocorra em tempo finito.

5.2.2 Resultados de simulação

Nas simulações os sinais de referência são uma onda quadrada de amplitude 80 e frequência 24 rad/s (r_1) e uma onda senoidal de amplitude 40 e frequência 18 rad/s (r_2). A perturbação é uma onda quadrada de amplitude 2 e frequência 30 rad/s aplicada em ambas as entradas da planta. As Figuras 5.3 a 5.6 apresentam os resultados de simulação obtidos para $\alpha = 0,35$. O bom desempenho do UV-MRAC é bem evidenciado pela rápida convergência do erro de saída que pode ser apreciada na Figura 5.4.

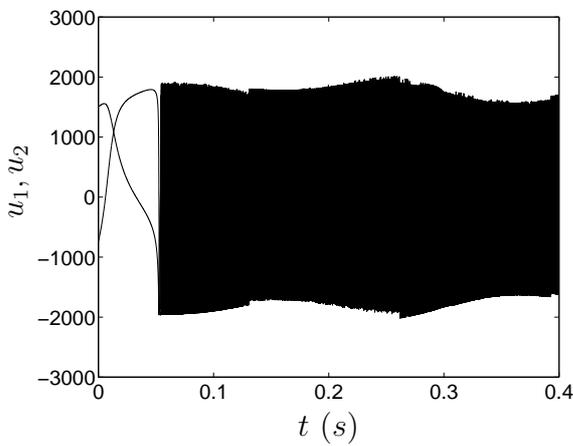


FIGURA 5.3: Sinais de controle.

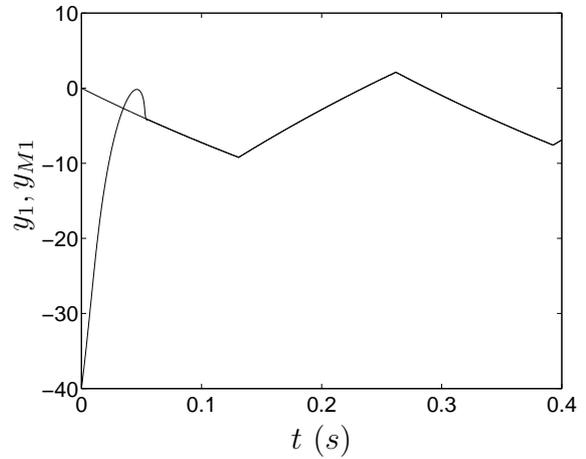


FIGURA 5.5: Saídas da planta e do modelo de referência (y_1, y_{M1}).

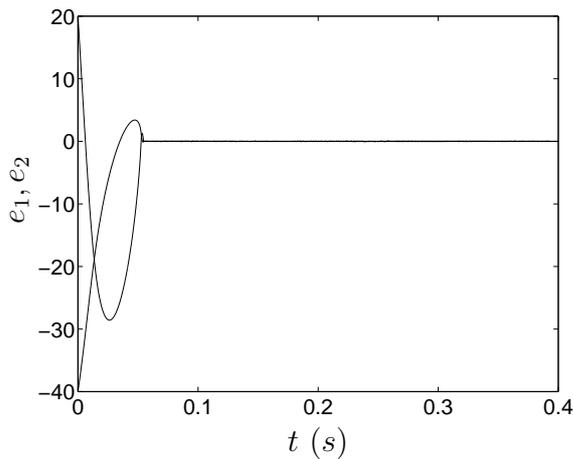


FIGURA 5.4: Erros de saída.

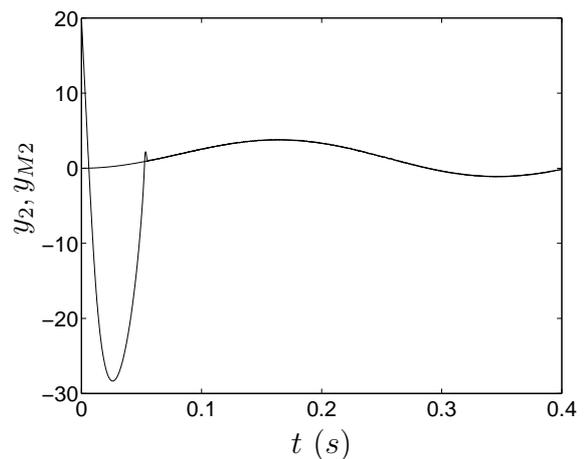


FIGURA 5.6: Saídas da planta e do modelo de referência (y_2, y_{M2}).

5.3 Projeto para Plantas na Forma Regular

O artigo sobre a aplicação do UV-MRAC a sistemas tolerantes a falhas (Cunha, Costa & Hsu 2003a) considera plantas na *forma regular* (Young et al. 1977, Utkin 1992)

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}y + d_1(t), \quad (5.25)$$

$$\dot{y} = A_{21}x_1 + A_{22}y + d_2(t) + K_p u, \quad (5.26)$$

onde $y \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída (medido), $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ é o vetor de parte do estado que não é medido, o vetor de estado completo é $x_p = [x_1^T, y^T]^T$ e $u \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle. As matrizes A_{ij} e a matriz de ganho de alta frequência (K_p) são incertas. Assume-se que a matriz A_{11} seja Hurwitz, o que implica que o sistema (5.25)–(5.26) é de fase mínima, isto é, a hipótese (A1) deve ser satisfeita.

Para que se afirme que o sistema esteja na *forma regular* é necessário que $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seja não-singular. Assim, este sistema é de grau relativo uniforme e unitário e as hipóteses (A2) e (A4) são substituídas pela seguinte hipótese mais específica:

(A4.b) O grau relativo da planta é uniforme e unitário, i.e., $\det(K_p) \neq 0$.

Sobre as perturbações d_1 e d_2 assume-se o seguinte:

(A6.b) As perturbações $d_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ e $d_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ são contínuas por partes e são conhecidos majorantes $\bar{d}_i(t)$, também contínuos por partes, tais que $\|d_i(t)\| \leq \bar{d}_i(t) \leq \bar{d}_{sup} < +\infty, \forall t \geq 0$ ($i=1, 2$).

Deve-se notar que $d_1(t)$ é uma perturbação *descasada*. Por outro lado, $d_2(t)$ é uma perturbação *casada* pois pode ser representada como uma perturbação de entrada $d(t) = K_p^{-1}d_2(t)$.

5.3.1 Abordagem por controle linear

Se os parâmetros e os sinais de perturbação no sistema (5.25)–(5.26) fossem perfeitamente conhecidos, então uma lei de controle linear que casaria a matriz de transferência do sistema em malha fechada com o modelo de referência $W_M(s) = (sI - A_M)^{-1}$ é dada

por

$$\dot{\hat{x}}_1 = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}y + d_1(t), \quad (5.27)$$

$$u = K_p^{-1} [A_M y + r - (A_{21}\hat{x}_1 + A_{22}y + d_2(t))] . \quad (5.28)$$

O estado $\hat{x}_1(t)$ estimado pelo observador em malha aberta (5.27) tende exponencialmente para o estado verdadeiro $x_1(t)$ uma vez que a matriz A_{11} é Hurwitz. O termo entre parênteses em (5.28) cancela a dinâmica do sistema em malha aberta para permitir o casamento com o modelo de referência que é imposto pelo termo de realimentação de saída $A_M y + r$.

5.3.2 Equações do erro

As equações do erro do casamento com o modelo são necessárias para o desenvolvimento do UV-MRAC na Seção 5.3.3. Para fins de análise, considera-se a seguinte realização não-mínima do modelo de referência

$$\dot{x}_{1M} = A_{11}x_{1M} + A_{12}y_M + d_1(t), \quad x_{1M}(0) = 0, \quad (5.29)$$

$$\dot{y}_M = A_M y_M + r, \quad (5.30)$$

que inclui o sinal de perturbação $d_1(t)$ sem afetar o sinal de saída y_M . Por outro lado, a lei de controle

$$u^* = -K_p^{-1} [A_{21}x_1 + (A_{22} - A_M) y + d_2(t) - r], \quad (5.31)$$

aplicada à planta (5.25)–(5.26) casa a equação de estado da malha fechada com a realização não-mínima do modelo de referência. Então, subtraindo-se (5.29)–(5.30) da equação de estado da planta (5.25)–(5.26), o erro do estado ($\tilde{x}_1 := x_1 - x_{1M}$) e o erro de saída (e) satisfazem

$$\dot{\tilde{x}}_1 = A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}e, \quad \tilde{x}_1(0) = x_1(0), \quad (5.32)$$

$$\dot{e} = A_M e + K_p [u - u^*]. \quad (5.33)$$

5.3.3 Abordagem pelo controle vetorial unitário

A lei de controle vetorial unitário é

$$u = u^{\text{nom}} + S_p U, \quad (5.34)$$

$$U = -\rho \frac{e}{\|e\|}, \quad (5.35)$$

$$u^{\text{nom}} = (K_p^{\text{nom}})^{-1} [(A_M - A_{22}^{\text{nom}})y + r], \quad (5.36)$$

onde A_{22}^{nom} e K_p^{nom} são valores nominais para as matrizes correspondentes do sistema em malha aberta e a matriz $S_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pode ser escolhida pelo projetista observando-se (A5). O controle nominal u^{nom} permite reduzir a amplitude da função de modulação (ρ) se as incertezas ($\|A_{22} - A_{22}^{\text{nom}}\|$, $\|K_p^{-1} - (K_p^{\text{nom}})^{-1}\|$), os sinais de perturbação e $\|A_{21}x_1(t)\|$ forem pequenos. Naturalmente, a amplitude de ρ poderia ser reduzida se o controle nominal fosse computado através de (5.27)–(5.28), pagando-se o preço da implementação completa do controlador linear nominal.

Aplicando-se a Proposição 2.1 à equação do erro (5.33) conclui-se que ocorrerá a convergência exponencial do erro de saída para zero se $-K_p S_p$ for Hurwitz e o sinal de modulação satisfizer a desigualdade

$$\rho \geq \delta + c_e \|e\| + (1 + c_d) \|S_p^{-1} (u^{\text{nom}} - u^*)\|, \quad (5.37)$$

onde $c_d, c_e \geq 0$ são constantes que satisfazem as desigualdades (2.11) e $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária. Uma função de modulação que satisfaz (5.37), descontando-se termos exponencialmente decrescentes, é dada por

$$\rho = \delta + c_1 \|e\| + c_2 \|y\| + c_3 \|r\| + c_4 \bar{d}_2(t) + \bar{x}_1(t), \quad (5.38)$$

onde as constantes c_i satisfazem $c_1 \geq c_e$,

$$\begin{aligned} c_2 &\geq (1 + c_d) \|(K_p^{\text{nom}} S_p)^{-1} (A_M - A_{22}^{\text{nom}}) - (K_p S_p)^{-1} (A_M - A_{22})\|, \\ c_3 &\geq (1 + c_d) \|(K_p^{\text{nom}} S_p)^{-1} - (K_p S_p)^{-1}\|, \\ c_4 &\geq (1 + c_d) \|(K_p S_p)^{-1}\|. \end{aligned} \quad (5.39)$$

O estado parcial $x_1(t)$ não pode ser medido para a computação do termo $\bar{x}_1(t)$ da função de modulação. Algumas alternativas são o uso de um observador linear, como por exemplo (5.27) ou um observador por modo deslizante (Edwards & Spurgeon 1998). No entanto, o projeto de observadores seria dificultado pelas incertezas paramétricas no sistema e pelas perturbações que não são medidas. Aqui, o sinal escalar $\bar{x}_1(t)$ gerado pelo FOAF

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = -\gamma_1 \bar{x}_1(t) + c_5 \|y(t)\| + c_6 \bar{d}_1(t) \quad (5.40)$$

substitui a norma do estado parcial ($\|x_1(t)\|$). O escalar $\gamma_1 > 0$ é menor que a margem de estabilidade da matriz A_{11} . Os coeficientes $c_5, c_6, \gamma_1 > 0$ deste filtro são obtidos conforme o Capítulo 3 tendo em vista satisfazer a desigualdade

$$\bar{x}_1(t) \geq (1+c_d) \left\| \left[(K_p S_p)^{-1} A_{21} \exp(A_{11}t) \right] * [A_{12}y(t) + d_1(t)] \right\|, \quad (5.41)$$

descontando-se termos exponencialmente decrescentes.

A implementação da função de modulação (5.38) e (5.40) requer o seguinte:

(A9.b) São conhecidos valores para as constantes $c_i \geq 0$, ($i = 1, \dots, 6$) e $\gamma_1 > 0$, de forma que a desigualdade (5.37) seja satisfeita (descontando-se termos exponencialmente decrescentes) para qualquer planta pertencente à classe considerada.

Para se enunciar o Teorema sobre a estabilidade deste sistema de controle, considere-se o sistema da equação do erro (5.32)–(5.33) e o vetor de estado aumentado $z := [\tilde{x}_1^T, e^T, \bar{x}_1^0]^T$, no qual a variável de estado \bar{x}_1^0 representa a solução homogênea do FOAF (5.40). Então, pode-se enunciar o seguinte resultado de estabilidade (Cunha, Costa & Hsu 2003a).

Teorema 5.2 *Considere o sistema formado pela planta (5.25)–(5.26), pelo modelo de referência (5.1), pela lei de controle (5.34)–(5.36), (5.38) e pelo filtro (5.40). Se as hipóteses (A1), (A4.b), (A5), (A6.b) e (A9.b) forem satisfeitas, então a estratégia UV-MRAC será globalmente exponencialmente estável, i.e., $\exists k, \lambda > 0$ tais que $\|z(t)\| \leq k \exp(-\lambda t) \|z(0)\|$, $\forall t \geq 0$. Além disso, se $\delta > 0$, então o erro de saída $e(t)$ se tornará nulo após algum tempo finito.*

Prova: Para se aplicar a Proposição 2.1 nesta prova, utiliza-se a solução homogênea de (5.40) que é dada por

$$\bar{x}_1^0(t) = \exp(-\gamma_1 t) \bar{x}_1^0(0), \quad \bar{x}_1^0(0) = \bar{x}_1(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (5.42)$$

Então, o sinal $\pi_2(t) = \bar{x}_1^0(t)$ representará o termo transitório do FOAF que está presente na desigualdade (2.5) a ser respeitada pela função de modulação ρ na Proposição 2.1. O restante da prova deste Teorema segue a prova do Teorema 5.1, exceto que aqui o sistema já está na *forma regular* e que a *decomposição de Kalman* é desnecessária. ■

Observação 5.4 *Uma característica relevante da abordagem de projeto do UV-MRAC desenvolvida nesta Seção é que não são necessários os filtros para gerar os sinais ω_1 e ω_2 utilizados na abordagem desenvolvida na Seção 5.1. Além disso, o conhecimento do índice de observabilidade da planta (ν na hipótese (A2)) é desnecessário, pois ν seria utilizado apenas para se definir a ordem dos filtros que gerariam ω_1 e ω_2 .*

Observação 5.5 *Outras características interessantes do projeto do UV-MRAC seguindo-se a abordagem desta Seção são:*

1. *O projeto não requer a solução da equação diofantina.*
2. *O projeto é realizado no espaço de parâmetros da planta, como se pode concluir das desigualdades (5.39) utilizadas para o cálculo das constantes da função de modulação.*

5.4 Aplicação ao Controle Tolerante a Falhas

Nesta Seção aplica-se o UV-MRAC ao controle de velocidade de uma cadeia composta por m carros ativos acionados por $m+1$ atuadores com deslocamento linear, conforme a Figura 5.7 (Cunha, Costa & Hsu 2003a). Os atuadores são operados cooperativamente de forma que o desempenho no rastreamento de trajetórias seja imune à falha completa de um único atuador bem como a grandes incertezas paramétricas e perturbações limitadas. Os carros ativos podem ser conectados a um número arbitrário de carros passivos (sem atuadores) através de elos compostos por molas e amortecedores.

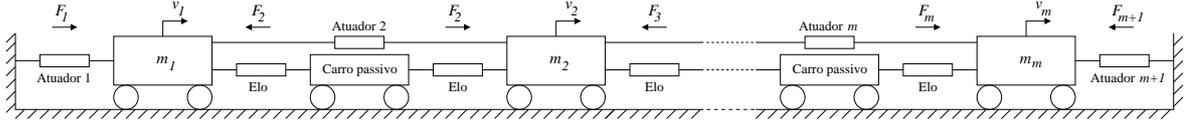


FIGURA 5.7: Diagrama da cadeia de carros. Não são assinaladas as forças de perturbação para que o desenho fique mais simples e claro.

As técnicas de *controle tolerante a falhas* (*fault tolerant control* — FTC) podem ser classificadas em *ativas* e *passivas*. Na abordagem ativa, a *deteção e o isolamento da falha* (*fault detection and isolation* — FDI) são aplicados no reprojeto da lei de controle de forma que o sistema com falha tenha um desempenho aceitável. Por outro lado, a abordagem passiva emprega técnicas de controle robusto ou adaptativo para garantir que o sistema em malha fechada se mantenha insensível a certas falhas (Noura, Sauter, Hamelin & Theilliol 2000). Alguns métodos usados no FTC passivo são o controle robusto H_∞ (Veillette, Medanić & Perkins 1992), a teoria da realimentação quantitativa (*quantitative feedback theory* — QFT) (Niksefat & Sepehri 2002) e o controle adaptativo paramétrico (Bodson & Groszkiewicz 1997).

A estratégia FTC desenvolvida em (Cunha, Costa & Hsu 2003a) é *passiva*. O comportamento desejado em malha fechada é estabelecido pelo modelo de referência (5.1), onde $y_M := [v_{M1}, \dots, v_{Mm}]^T$ é o vetor das velocidades desejadas para os carros ativos.

5.4.1 Objetivo de controle

O objetivo é manter a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada e obter a convergência assintótica do erro de rastreamento das velocidades dos carros ativos ($e(t) = y(t) - y_M(t)$) para zero, apesar de incertezas paramétricas, perturbações limitadas e falhas nos atuadores.

5.4.2 Dinâmica da cadeia de carros

A equação de estado da cadeia de carros é dada por

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}y + d_1(t), \quad (5.43)$$

$$\dot{y} = A_{21}x_1 + A_{22}y + d_2(t) + M^{-1}Sf, \quad (5.44)$$

onde $y := [v_1, \dots, v_m]^T$ é o vetor das velocidades dos carros ativos, $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $x_p := [x_1^T, y^T]^T$ é o vetor de estado do sistema incluindo-se a dinâmica dos carros passivos e $f := [F_1, \dots, F_{m+1}]^T$ é o vetor das forças dos atuadores. Mede-se apenas o vetor de velocidades dos carros ativos (y), o que caracteriza a realimentação de saída. A matriz de inércia dos carros ativos ($M = \text{diag}\{m_1, \dots, m_m\}$) e as matrizes A_{ij} são incertas. A matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m+1} \quad (5.45)$$

é aplicada na computação das resultantes das forças dos atuadores.

As perturbações $d_1(t)$ e $d_2(t)$ representam atritos e componentes dos pesos que não são nulas se o sistema opera numa superfície não horizontal. Essas perturbações respeitam a hipótese (A6.b).

Assume-se que a matriz A_{11} seja Hurwitz para satisfazer a hipótese de fase mínima (A1).

5.4.2.1 Descrição das falhas

O sinal de controle $\bar{u} \in \mathbb{R}^{m+1}$ é o vetor de forças desejadas dos atuadores. As falhas nos atuadores são modeladas por (Noura et al. 2000)

$$f = \mathcal{F}\bar{u}, \quad \mathcal{F} = \text{diag}\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{m+1}\}, \quad (5.46)$$

onde o índice de falha $\mathcal{F}_i = 1$ se o i -ésimo atuador está operando corretamente, $0 < \mathcal{F}_i < 1$ se o seu desempenho é degradado ou $\mathcal{F}_i = 0$ se está completamente inoperante.

5.4.3 Estratégia de controle tolerante a falhas

Uma vez que o sistema (5.43)–(5.46) possui m sinais de saída, são necessários apenas m sinais de controle independentes tendo-se em vista o objetivo de controle proposto. Seja $u \in \mathbb{R}^m$ o vetor de sinais de saída do controlador. Um esquema ativo usual para tratar falhas em atuadores aplica uma matriz de pesos (W) denominada misturador (*mixer*) para distribuir os sinais de controle aos atuadores, i.e., $\bar{u} = Wu$. O misturador W é reconfigurado de acordo com a falha identificada para se manter a força resultante desejada (Bajpai, Chang & Lau 2001).

Aqui se adota uma abordagem passiva baseada no UV-MRAC descrito na Seção 5.3 e uma matriz misturadora constante de forma que em malha fechada a estabilidade e o desempenho no rastreamento sejam imunes a algumas falhas nos atuadores. A matriz misturadora proposta é

$$\bar{u} = S^T M^{\text{nom}} u, \quad (5.47)$$

onde M^{nom} é um valor nominal para a matriz de inércia M . A matriz de ganho de alta frequência do sistema composto por (5.43)–(5.46) em conjunto com a matriz misturadora (5.47) é dada por

$$K_p = M^{-1} S \mathcal{F} S^T M^{\text{nom}}. \quad (5.48)$$

Então, aplicando-se esta matriz HFG, a equação de estado da cadeia de carros pode ser reescrita na forma (5.25)–(5.26). Para se aplicar o controle vetorial unitário é essencial que a matriz HFG do sistema seja Hurwitz, o que é estabelecido na proposição a seguir (Cunha, Costa & Hsu 2003a, Proposição 1).

Proposição 5.1 *Seja $K_p = M^{-1} S \mathcal{F} S^T M^{\text{nom}}$, onde $\mathcal{F} = \text{diag}\{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{m+1}\}$ e a matriz S está definida em (5.45). Sobre as matrizes $M, M^{\text{nom}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ assume-se que $(M^{\text{nom}} M^{-1}) > 0$. Se $\mathcal{F}_j \geq 0$ para algum $j \in \{1, \dots, m+1\}$ e $\mathcal{F}_i > 0, \forall i \in \{1, \dots, m+1\} : i \neq j\}$, então $(S \mathcal{F} S^T) > 0$ e $-K_p$ será Hurwitz.*

Prova: A matriz $(S \mathcal{F} S^T)$ pode ser representada pela combinação linear de ma-

trizes positivas semidefinidas (S_i)

$$S\mathcal{F}S^T = \sum_{i=1}^{m+1} \mathcal{F}_i S_i, \quad (5.49)$$

onde $S_1 = \text{Blockdiag}\{1, 0_{m-1}\}$, $S_2 = \text{Blockdiag}\{J, 0_{m-2}\}$, $S_j = \text{Blockdiag}\{0_{j-2}, J, 0_{m-j}\}$ ($j=3, \dots, m-1$), $S_m = \text{Blockdiag}\{0_{m-2}, J\}$, $S_{m+1} = \text{Blockdiag}\{0_{m-1}, 1\}$, $0_l \in \mathbb{R}^{l \times l}$ é a matriz nula e

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.50)$$

Uma vez que $\mathcal{F}_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, m+1\}$, por hipótese e $S_i \geq 0$, pode-se concluir que $(S\mathcal{F}S^T) \geq 0$. Além disso, notando-se que as hipóteses assumidas sobre os coeficientes \mathcal{F}_i implicam que a matriz $(S\mathcal{F}S^T)$ possui posto completo, então pode-se concluir que $(S\mathcal{F}S^T) > 0$.

Para se provar que a matriz $-K_p$ é Hurwitz, usa-se a transformação de similaridade $\bar{K}_p = MK_pM^{-1} = S\mathcal{F}S^TM^{\text{nom}}M^{-1}$. Usando-se $P = (S\mathcal{F}S^T)^{-1} > 0$ na equação de Lyapunov $P\bar{K}_p + \bar{K}_p^T P = M^{\text{nom}}M^{-1} + (M^{\text{nom}}M^{-1})^T > 0$, conclui-se que as matrizes $-\bar{K}_p$ e, conseqüentemente, $-K_p$ são Hurwitz. ■

A aplicação da Proposição 5.1 em conjunto com o Teorema 5.2 resulta diretamente no seguinte Teorema sobre a estabilidade deste sistema tolerante a falhas nos atuadores (Cunha, Costa & Hsu 2003a, Teorema 1).

Teorema 5.3 *Considere o sistema formado pela planta (5.43)–(5.46), pela matriz misturadora (5.47), pelo modelo de referência (5.1), pela lei de controle (5.34) (com $S_p = I$), (5.35), (5.36), (5.38) e pelo filtro (5.40). Se o número de atuadores completamente inoperantes for menor do que 2 e as hipóteses (A1), (A6.b) e (A9.b) forem satisfeitas, então a estratégia UV-MRAC será globalmente exponencialmente estável, i.e., $\exists k, \lambda > 0$ tais que $\|z(t)\| \leq k \exp(-\lambda t) \|z(0)\|$, $\forall t \geq 0$. Além disso, se $\delta > 0$, então o erro de saída $e(t)$ se tornará nulo após algum tempo finito.*

5.5 Exemplo de Aplicação ao Controle Tolerante a Falhas

Para ilustrar a aplicação do UV-MRAC ao controle tolerante a falhas, considera-se a cadeia composta por três carros esquematizada na Figura 5.8. Os sinais de saída são as velocidades dos carros ativos $y = [v_1, v_2]^T$ e o vetor de estado parcial é $x_1 = [l_{31}, v_3]^T$, onde l_{31} é a posição do carro passivo (no centro) em relação ao primeiro carro e v_3 é a velocidade do carro passivo. Os carros são conectados por um amortecedor com coeficiente de amortecimento $b_{23} = 1 \text{ Ns/m}$ e uma mola com coeficiente elástico $k_{31} = 1 \text{ N/m}$.

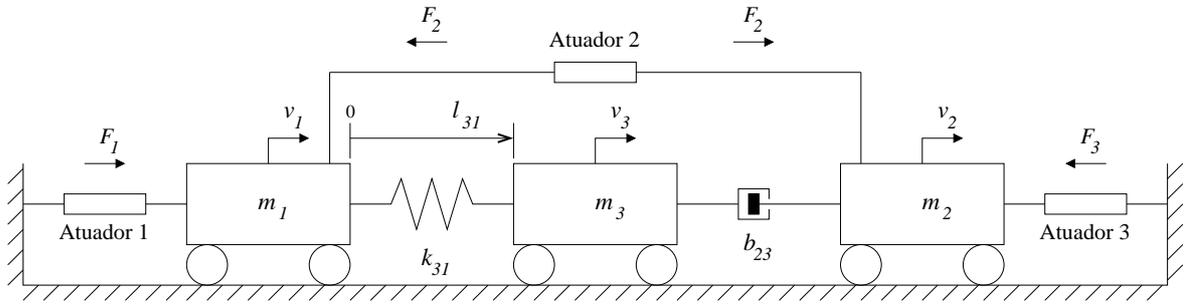


FIGURA 5.8: Diagrama da cadeia de carros considerada no exemplo de aplicação do UV-MRAC ao controle tolerante a falhas.

As massas verdadeiras dos carros ativos são $m_1 = 1 \text{ kg}$ e $m_2 = 2 \text{ kg}$, assim a matriz de inércias é $M = \text{diag}\{1, 2\}$. A massa do carro passivo é incerta, no entanto sabe-se que está na faixa $0,5 \leq m_3 \leq 1,5 \text{ (kg)}$.

A dinâmica da cadeia de carros pode ser representada pela equação de estado (5.43)–(5.44) com

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{31}/m_3 & -b_{23}/m_3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & b_{23}/m_3 \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} k_{31}/m_1 & 0 \\ 0 & b_{23}/m_2 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -b_{23}/m_2 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Nota-se que a matriz companheira A_{11} é sempre Hurwitz, assim a hipótese de fase mínima necessária à aplicação do UV-MRAC é satisfeita.

5.5.1 Projeto

O modelo de referência escolhido é

$$W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

o que permite a simplificação da função de modulação (5.38) uma vez que se pode escolher $c_1 = 0$ em virtude do Corolário 2.1.

Como as massas dos carros ativos são conhecidas perfeitamente, utiliza-se a matriz de inércias nominais $M^{\text{nom}} = M$ no cálculo da matriz misturadora (5.47). As matrizes nominais K_p^{nom} e A_{22}^{nom} , aplicadas na geração do controle nominal (5.36), são computadas para o caso em que todos os atuadores operam perfeitamente ($\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = 1$).

Uma vez que não há perturbações de entrada ($d_1(t) \equiv 0$ e $d_2(t) \equiv 0$), os coeficientes da função de modulação correspondentes são escolhidos como $c_4 = c_6 = 0$. Os demais parâmetros da função de modulação foram escolhidos de forma que o desempenho em malha fechada seja mantido em situações nas quais ao menos dois atuadores operem perfeitamente e a massa incerta m_3 seja mantida na faixa especificada. Por outro lado, esses parâmetros devem ser tais que a amplitude do sinal de controle seja tão pequena quanto possível, resultando: $c_2 = 3, 9$, $c_3 = 2, 2$, $c_5 = 3, 4$, $\gamma_1 = 0, 32 \text{ s}^{-1}$ e $\delta = 0, 1$.

5.5.2 Resultados de simulação

O desempenho do sistema de controle tolerante a falhas aqui proposto pode ser apreciado nos resultados de simulação apresentados nas Figuras 5.9–5.12. Neste exemplo, o sinal de referência é $r = [16 \text{ sen}(12t), -8 \text{ sen}(6t)]^T$. A massa do carro passivo é $m_3 = 0, 5 \text{ kg}$.

Enquanto $0 \leq t < 0, 67 \text{ s}$ todos os três atuadores operam perfeitamente ($\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = 1$). O modo deslizante é iniciado antes de $0, 1 \text{ s}$, quando o erro de rastreamento se torna nulo conforme se observa na Figura 5.10. Para $t \geq 0, 67 \text{ s}$ o atuador 1 está completamente inoperante ($\mathcal{F}_1 = 0$), conseqüentemente $F_1 = 0 \text{ N}$ e a força do atuador 1 é redistribuída pelos outros atuadores, como se percebe na Figura 5.9. O desempenho do UV-MRAC é insensível a esta falha abrupta, o que é evidente nas Figuras 5.11 e 5.12.

Os gráficos das forças na Figura 5.9 são os controles equivalentes estimados por filtros passa-baixas de primeira ordem com constante de tempo pequena (1 ms), que são necessários uma vez que os sinais de controle são descontínuos durante o deslizamento.

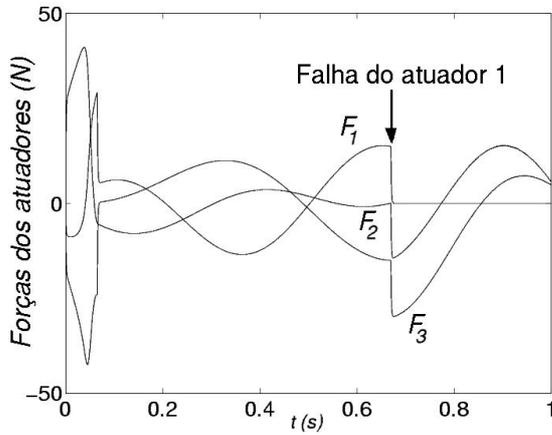


FIGURA 5.9: Forças geradas pelos atuadores (F_1 , F_2 , F_3).

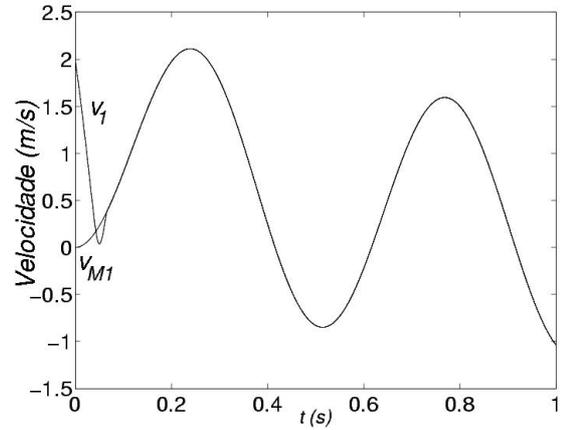


FIGURA 5.11: Velocidade do carro 1 (v_1) e o sinal de saída do modelo de referência (v_{M1}).

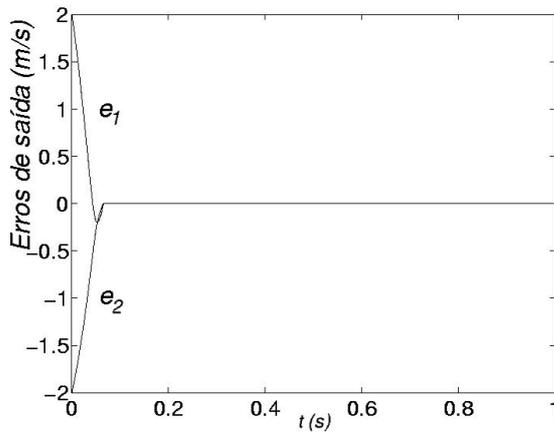


FIGURA 5.10: Erros de saída.

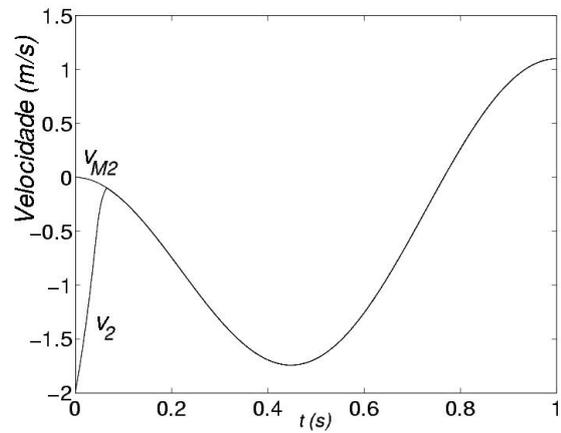


FIGURA 5.12: Velocidade do carro 2 (v_2) e o sinal de saída do modelo de referência (v_{M2}).

5.6 Comentários

Neste Capítulo se propôs uma estratégia de controle por modo deslizante e realimentação de saída (UV-MRAC) para sistemas lineares multivariáveis. O UV-MRAC é baseado na formulação de controle adaptativo por modelo de referência e no controle

vetorial unitário.

Não se assume o conhecimento da matriz de ganho de alta frequência da planta (K_p). Os principais resultados estabelecem que o sistema é globalmente exponencialmente estável e pode ser projetado para que o modo deslizante na superfície $e=0$ seja atingido em tempo finito, desde que $-K_p S_p$ seja uma matriz Hurwitz, onde S_p é uma matriz constante especificada pelo projetista. Isto é menos restritivo do que a hipótese de que $K_p S_p$ seja uma matriz definida positiva, que é assumida em trabalhos anteriores que também admitam incertezas grandes na matriz K_p .

Além de incertezas paramétricas na planta, admitem-se perturbações de entrada e até mesmo perturbações descasadas, desde que sejam limitadas.

O escopo deste Capítulo se restringe ao controle de sistemas com grau relativo uniforme e unitário, mas serve como base para o controle de sistemas com grau relativo uniforme arbitrário, que é o tema do Capítulo a seguir.

A aplicação do UV-MRAC a sistemas tolerantes a falhas em atuadores proposta neste Capítulo parece ser mais simples do que esquemas baseados na detecção e no isolamento de falhas. Um ponto chave para o sucesso do esquema é a proposta da matriz misturadora (5.47), que foi desenvolvida heurísticamente para se garantir teoricamente o bom desempenho do sistema de controle, ainda que ocorram falhas bastante severas.

Capítulo 6

Controle de Sistemas Lineares de Grau Relativo Uniforme Arbitrário

Neste Capítulo considera-se que a planta é representada pela equação de estado (4.1) e satisfaz as hipóteses (A1)–(A5) e (A6.a) (vide Capítulo 5). A hipótese (A4) sobre a matriz *interactor* da planta impõe $\xi(s) = s^{n^*}I$, onde $n^* \geq 1$ é o grau relativo uniforme da planta. O caso mais particular em que $n^* = 1$ é tratado no Capítulo 5.

A lei de controle deve respeitar a hipótese (A8.a) estabelecida no Capítulo 5 para evitar a ocorrência do escape em tempo finito dos sinais do sistema.

O controle vetorial unitário não pode ser aplicado diretamente a sistemas de grau relativo uniforme maior do que um. Para tratar as dificuldades que surgem neste caso, modifica-se a estrutura do controlador conforme as Figuras 6.1 e 6.2 (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002b), de forma semelhante à estrutura do VS-MRAC (*variable structure MRAC*) para sistemas SISO (Hsu et al. 1994, Hsu et al. 1997).

Uma idéia central na generalização do controlador é a introdução do erro de predição (Hsu et al. 1994)

$$\hat{e} = W_M(s)L(s)K^{\text{nom}} [U_0 - L^{-1}(s)U_N] , \quad (6.1)$$

onde K^{nom} é um valor nominal para $K := K_p S_p$. A finalidade do operador $L(s)$, dado por (1.36), é fazer com que $G(s)L(s)$ e $W_M(s)L(s)$ tenham grau relativo uniforme e unitário. O operador $L(s)$ é não-causal mas pode ser aproximado pelo filtro de avanço

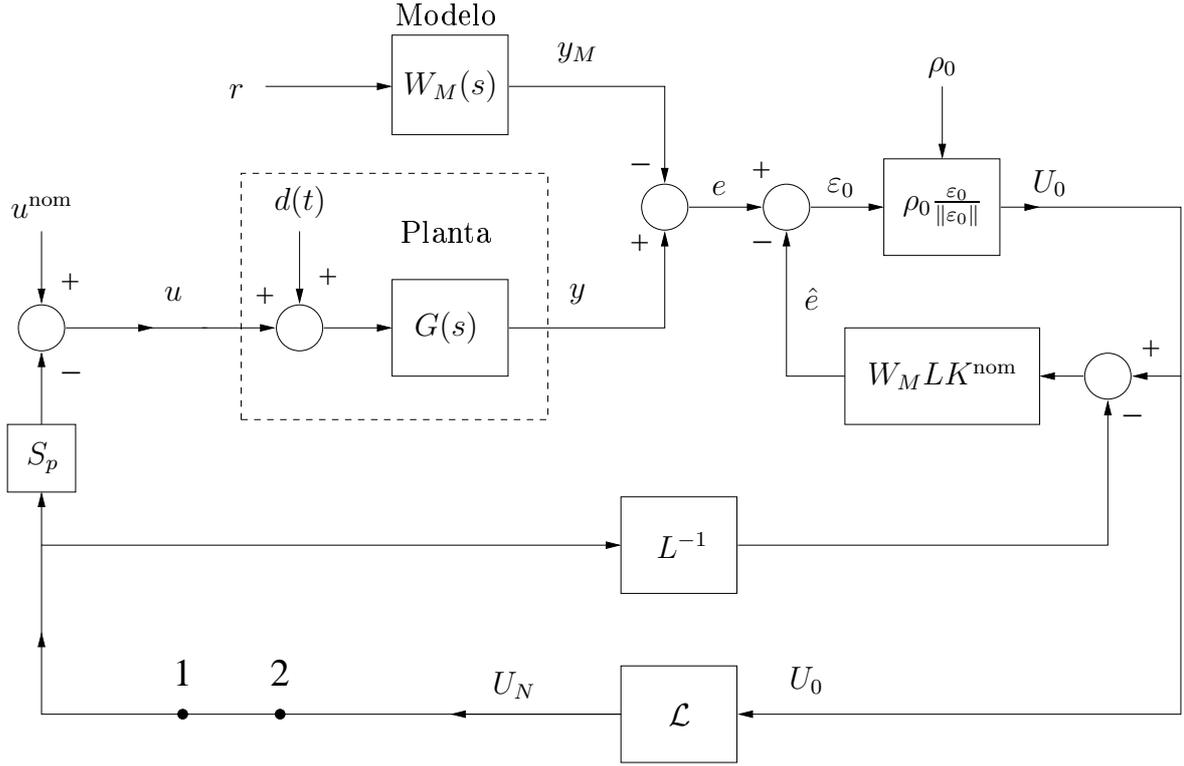


FIGURA 6.1: UV-MRAC para sistemas de grau relativo uniforme $n^* \geq 2$. Os filtros de estado e a síntese do sinal ρ_0 foram omitidos para simplificar o diagrama. A realização do operador \mathcal{L} é apresentada na Figura 6.2. Pode-se incluir um filtro passa-baixas entre os pontos “1” e “2” para suavizar o sinal de controle, conforme a Seção 6.5.3.

de fase \mathcal{L} (*lead filter*) esquematizado na Figura 6.2, que é baseado no controle vetorial unitário. O caso de grau relativo unitário pode ser tratado fazendo-se $L(s) = \mathcal{L} = I$. Então, $\hat{e} \equiv 0$ e conseqüentemente a malha interna do erro de predição é eliminada, resultando no esquema apresentado na Figura 5.1.

Os *filtros de média* $F_i^{-1}(\tau s)$ na Figura 6.2 são do tipo passa-baixas com matriz de transferência

$$F_i^{-1}(\tau s) = [f_{avi}(\tau s)I]^{-1}, \quad (6.2)$$

onde $f_{avi}(\tau s)$ são polinômios Hurwitz em τs escolhidos de forma que o filtro tenha ganho DC unitário ($f_{avi}(0) = 1$), e.g., $f_{avi}(\tau s) = \tau s + 1$. Se a constante de tempo $\tau > 0$ for suficientemente pequena, os filtros de média fornecem uma aproximação para o

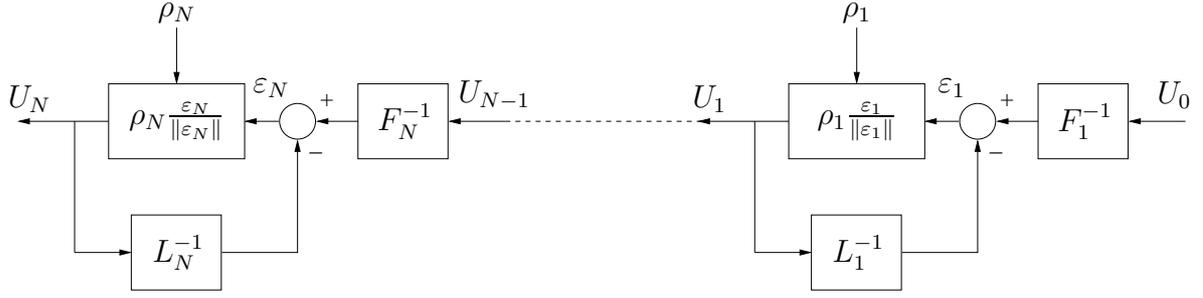


FIGURA 6.2: Estrutura do filtro de avanço de fase baseado no controle vetorial unitário (operador \mathcal{L}).

controle equivalente (Utkin 1992)

$$(U_{i-1})_{eq} \approx F_i^{-1}(\tau s)U_{i-1}. \quad (6.3)$$

Esta aproximação foi usada na justificativa da estabilidade do VS-MRAC para sistemas SISO em (Hsu 1990). Os trabalhos posteriores (Hsu et al. 1994, Hsu et al. 1997) apresentaram provas completas da estabilidade do VS-MRAC levando em conta o efeito dos *filtros de média*.

6.1 Análise Simplificada

Primeiramente analisa-se o UV-MRAC de maneira simplificada para auxiliar na compreensão do seu funcionamento (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a). Tal como é feito em (Hsu 1990), assume-se que as funções de modulação ρ_i são adequadas para que o modo de deslizamento ideal comece em algum tempo finito t_{si} em cada malha com controle vetorial unitário. Desprezando-se a constante de tempo τ dos *filtros de média* tem-se $(U_{i-1})_{eq} = F_i^{-1}(\tau s)(U_{i-1})$ e, conseqüentemente, $(U_N)_{eq} = L(s)(U_0)_{eq}$. Então, os sinais de entrada e de saída do bloco $W_M LK^{\text{nom}}$ seriam devidos a transitórios de filtros lineares assintoticamente estáveis e, portanto, seriam exponencialmente decrescentes. Uma vez que o modo de deslizamento ocorreria em cada malha de controle vetorial unitário, tem-se $\varepsilon_0 = 0$ e, conseqüentemente, o erro de saída $e(t)$ tem que decair a zero exponencialmente acompanhando a saída do bloco $W_M LK^{\text{nom}}$. No caso de grau relativo maior do que um, a convergência do erro de saída é assintótica e não pode ocorrer em tempo finito devido à dinâmica do bloco $W_M LK^{\text{nom}}$.

Este resultado serve de guia para a prova rigorosa da estabilidade no sentido que representa a situação limite quando os controles médios tendem para os controles equivalentes correspondentes na medida que a constante de tempo $\tau \rightarrow +0$.

A função da malha do erro de predição (\hat{e}) não fica evidente nesta análise simplificada. No entanto, sem a malha do erro de predição não haveria a possibilidade de se obter o modo de deslizamento ideal na primeira malha do controle vetorial unitário que corresponde a U_0 (Hsu 1997) devido aos pequenos atrasos inseridos pelos *filtros de média*. Assim o fenômeno de *chattering* seria inevitável. O principal papel da malha do erro de predição é criar o modo de deslizamento ideal necessário na primeira malha de controle vetorial unitário.

6.2 Equações dos Erros Auxiliares

Aqui são apresentadas as expressões dos erros auxiliares de forma adequada para o projeto do controlador e para a análise de estabilidade (Hsu et al. 1997, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a).

De (4.24) e (6.1), o erro auxiliar $\varepsilon_0 = e - \hat{e}$ pode ser reescrito como

$$\varepsilon_0 = W_M(s)K_p [u - \theta^{*T}\omega + W_d(s) * d(t)] - W_M(s)L(s)K^{\text{nom}} [U_0 - L^{-1}(s)U_N] . \quad (6.4)$$

Usando-se $u = \theta^{\text{nom}T}\omega - S_p U_N$, $K = K_p S_p$ e

$$\bar{U} := (K^{\text{nom}})^{-1}K_p [(\theta^* - \theta^{\text{nom}})^T \omega - W_d(s) * d(t)] - [I - (K^{\text{nom}})^{-1}K] U_N , \quad (6.5)$$

o erro auxiliar ε_0 em (6.4) pode ser reescrito como

$$\varepsilon_0 = W_M(s)L(s)K^{\text{nom}} [-U_0 - L^{-1}(s)\bar{U}] , \quad (6.6)$$

onde fica claro que no caso nominal ($\theta^* = \theta^{\text{nom}}$ e $K = K^{\text{nom}}$) o sinal de controle U_0 deve rejeitar apenas o efeito da perturbação $d(t)$.

Os erros auxiliares dos filtros de avanço de fase são dados por

$$\varepsilon_i = F_i^{-1}(\tau s)U_{i-1} - L_i^{-1}(s)U_i . \quad (6.7)$$

Aplicando-se U_0 (obtido de (6.6)) em (6.7), o erro auxiliar do primeiro filtro de avanço de fase é dado por

$$\varepsilon_1 = L_1^{-1}(s) \left\{ -F_1^{-1}(\tau s) L_1(s) L^{-1}(s) \left[(K^{\text{nom}})^{-1} W_M^{-1}(s) \varepsilon_0 + \bar{U} \right] - U_1 \right\}. \quad (6.8)$$

Através da aplicação recursiva deste procedimento, os erros auxiliares são reescritos como

$$\varepsilon_i = L_i^{-1}(s) \left[-U_i - F_{1,i}^{-1}(\tau s) L_{i+1,N}^{-1}(s) \bar{U} \right] - \pi_{ei} - \pi_{0i}, \quad (i = 1, \dots, N-1), \quad (6.9)$$

$$\varepsilon_N = -L_N^{-1}(s) (K^{\text{nom}})^{-1} K \left[U_N + F_{1,N}^{-1}(\tau s) U_d \right] - \left[I - (K^{\text{nom}})^{-1} K \right] \beta_{uN} - \pi_{eN} - \pi_{0N}, \quad (6.10)$$

onde $L_{i,j}(s) = \prod_{k=i}^j L_k(s)$ ($L_{i,j}(s) = I$ se $j < i$), $F_{i,j}(\tau s)$ é definido de forma análoga,

$$U_d = S_p^{-1} \left[(\theta^* - \theta^{\text{nom}})^T \omega - W_d(s) * d(t) \right], \quad (6.11)$$

$$\beta_{uN} = [F_{1,N}(\tau s) - I] F_{1,N}^{-1}(\tau s) L_N^{-1}(s) U_N, \quad (6.12)$$

$$\pi_{ei} = \sum_{j=1}^{i-1} L_{j,i-1}(s) F_{j+1,i}^{-1}(\tau s) \varepsilon_j = L_{i-1}(s) F_i^{-1}(\tau s) [\pi_{e,i-1} + \varepsilon_{i-1}], \quad (6.13)$$

$$\pi_{0i} = [W_M(s) F_{1,i}(\tau s) L_{i,N}(s) K^{\text{nom}}]^{-1} \varepsilon_0, \quad (6.14)$$

e $\pi_{e1} \equiv 0$, por convenção.

6.3 Majorantes dos Erros Auxiliares

Considera-se o sistema composto pelas equações do erro (4.22)–(4.23), (6.6), (6.9), e (6.10). Para representar o transitório de filtros usados na síntese das funções de modulação, são introduzidos os sinais escalares LI e exponencialmente decrescentes $\pi_{\rho i}(t)$ ($i = 0, \dots, N$), i.e., $|\pi_{\rho i}(t)| \leq R \exp(-\lambda t)$, $\forall t \geq 0$, com constantes reais $R \geq 0$ e $\lambda > 0$ adequadas. O vetor de estado de (6.6) é denominado X_e enquanto que x_{FL}^0 denota o estado dos termos transitórios dos seguintes operadores: L^{-1} em (6.6), $F_{1,i}^{-1} L_{i+1,N}^{-1}$

em (6.9) e todos os demais operadores associados com $\beta_{uN}, \pi_{ei}, \pi_{0i}$ em (6.12)–(6.14), além dos filtros usados na síntese das funções de modulação. Uma vez que todos esses operadores e filtros são estáveis, $\exists K_{FL}, a_{FL} > 0$ de forma que

$$\|x_{FL}^0(t)\| \leq K_{FL} \exp(-a_{FL}t) \|x_{FL}^0(0)\|. \quad (6.15)$$

A fim de levar em consideração de forma completa as condições iniciais, utiliza-se o vetor de estado z assim definido:

$$\begin{aligned} z^T &:= [(z^0)^T, \varepsilon_N^T, X_e^T], \\ (z^0)^T &:= [X_e^T, \varepsilon_1^T, \varepsilon_2^T, \dots, \varepsilon_{N-1}^T, (x_{FL}^0)^T]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

No que segue, todos os K 's e a 's simbolizam constantes positivas genéricas; a norma de um operador ($\|\cdot\|$) é induzida pela norma $\mathcal{L}_{\infty e}$ (vide Seção 1.2.1); “ Π ” e “ Π^0 ” simbolizam qualquer termo da forma $K\|z(0)\| \exp(-at)$ e $K\|z^0(0)\| \exp(-at)$, respectivamente.

O seguinte Teorema sobre a convergência dos erros auxiliares foi provado em (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Teorema 4) sem se levar em conta os termos exponencialmente decrescentes $\pi_{\rho i}(t)$ que aqui podem estar presentes nas funções de modulação.

Teorema 6.1 *Para $N = n^* - 1 \geq 1$, considere os erros auxiliares (6.6), (6.9) e (6.10). Se $-K^{\text{nom}}$ e $-(K^{\text{nom}})^{-1}K$ forem Hurwitz e as funções de modulação satisfizerem*

$$\rho_0 \geq (1 + c_{d0}) \|L^{-1} * \bar{U}\| + c_{\varepsilon 0} \|\varepsilon_0\| + \pi_{\rho 0}(t), \quad (6.17)$$

$$\rho_i \geq (1 + c_{di}) \|(F_{1,i}^{-1} L_{i+1,N}^{-1}) * \bar{U}\| + \pi_{\rho i}(t), \quad (i = 1, \dots, N - 1), \quad (6.18)$$

$$\rho_N \geq (1 + c_{dN}) \|F_{1,N}^{-1} * U_d\| + \pi_{\rho N}(t), \quad (6.19)$$

$\forall t \geq 0$, com constantes adequadas $c_{\varepsilon 0} \geq 0$ e $c_{di} \geq 0$ ($i = 0, \dots, N$), então os erros auxiliares ε_i ($i = 0, \dots, N - 1$) tenderão a zero ao menos exponencialmente. Além

disso,

$$\|\varepsilon_i(t)\|, \|X_\varepsilon(t)\| \leq \Pi^0, \quad (6.20)$$

$$\|\varepsilon_N(t)\| \leq \tau \|I - (K^{\text{nom}})^{-1}K\| K_{eN} C(t) + \Pi, \quad (6.21)$$

e

$$\|\pi_{ei}(t)\|, \|\pi_{0i}(t)\| \leq \Pi^0, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (6.22)$$

$$\|\beta_{uN}(t)\| \leq \tau K_{\beta N} C(t) + \Pi^0, \quad (6.23)$$

onde

$$C(t) = M_\theta \|\omega_t\|_\infty + M_{\text{red}}, \quad (6.24)$$

com constantes positivas M_θ e M_{red} adequadas.

Prova: Segundo o Corolário 2.2, ε_0 e o estado X_ε em (6.6) convergem para zero ao menos exponencialmente, se a função de modulação ρ_0 satisfizer a desigualdade (6.17). Note que aqui o termo transiente de L^{-1} é representado por $\pi_1(t)$ e $\pi_2(t) \equiv \pi_{\rho_0}(t)$, que são majorados por Π^0 . Conseqüentemente, pode-se concluir que $\|X_\varepsilon(t)\| \leq \Pi^0$ e $\|\varepsilon_0(t)\| \leq \Pi^0, \forall t \geq 0$.

De (6.14) pode-se escrever $\pi_{0i} = H_i(s)\varepsilon_0 = h_i(t) * \varepsilon_0(t) + \pi_{0i}^0(t)$. Uma vez que $\|\pi_{0i}^0\| \leq \Pi^0$ e $\|h_i(t) * \varepsilon_0(t)\| \leq \Pi^0$, então $\|\pi_{0i}\| \leq \Pi^0, \forall t \geq 0$. Agora, para $N > 1$ e $i = 1$, uma vez que $\pi_{e1} \equiv 0$, a equação (6.9) resulta em $\|\varepsilon_1(t)\| \leq \Pi^0, \forall t \geq 0$, a partir do Lema 2.3 com $\beta(t) \equiv 0$.

Utilizando-se um argumento similar, conclui-se recursivamente a partir de (6.9), (6.13) e do Lema 2.3 com $\beta(t) \equiv 0$ que $\|\pi_{ei}(t)\| \leq \Pi^0$ e $\|\varepsilon_i(t)\| \leq \Pi^0, \forall t \geq 0$ ($i = 2, \dots, N - 1$).

Agora considera-se ε_N em (6.10). Note que, da hipótese (A8.a) (vide Capítulo 5), M_θ e M_{red} podem ser escolhidos de forma que $\|U_N(t)_t\|_\infty \leq C(t)$. Uma vez que $\pi_{e,N-1}$ e ε_{N-1} podem ser majorados por Π^0 , esse mesmo majorante se aplica a π_{eN} , i.e.,

$\|\pi_{eN}(t)\| \leq \Pi^0, \forall t \geq 0$. De (6.12) tem-se

$$\|(\beta_{uN} - \beta_{uN}^0)_t\|_\infty \leq \underbrace{\|(F_{1,N}(\tau s) - I)F_{1,N}^{-1}(\tau s)L_N^{-1}(s)\|}_{O(\tau)} C(t) = \tau K_{\beta N} C(t), \quad (6.25)$$

onde $\beta_{uN}^0(t)$ é majorado por Π^0 . Então, aplicando-se o Lema 2.3 à equação (6.10), que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon_N = & -L_N^{-1}(K^{\text{nom}})^{-1}K [U_N + F_{1,N}^{-1}U_d] - [I - (K^{\text{nom}})^{-1}K] [\beta_{uN} - \beta_{uN}^0] - \\ & - [(I - (K^{\text{nom}})^{-1}K) \beta_{uN}^0 + \pi_{eN} + \pi_{0N}], \end{aligned} \quad (6.26)$$

pode-se concluir que o majorante (6.21) é válido. Uma vez que $\|(\beta_{uN} - \beta_{uN}^0)_t\|_\infty \geq \|\beta_{uN} - \beta_{uN}^0\| \geq \|\beta_{uN}\| - \Pi^0$, então o majorante (6.23) é obtido de (6.25). ■

Observação 6.1 *No Teorema 6.1 a condição Hurwitz sobre $-K^{\text{nom}}$ e $-(K^{\text{nom}})^{-1}K$ poderia ser satisfeita escolhendo-se $K^{\text{nom}} = k^{\text{nom}}I$, com $k^{\text{nom}} \in \mathbb{R}$, $k^{\text{nom}} > 0$. Particularmente, se $K^{\text{nom}} = k^{\text{nom}}I$ a condição sobre a matriz de ganho de alta frequência é simplesmente “ $-K$ deve ser Hurwitz”, ou seja, a hipótese (A5).*

6.4 Análise de Estabilidade

O Teorema 6.2, provado em (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Teorema 5), estabelece as propriedades de estabilidade do sistema com todas as equações dos sinais de erro dadas por (6.6), (6.9) e (6.10). Para $N=0$ ($n^*=1$) a estabilidade exponencial é estabelecida no Teorema 5.1.

Teorema 6.2 *Para $N=n^*-1 \geq 1$, assume-se que as matrizes $-K^{\text{nom}}$ e $-(K^{\text{nom}})^{-1}K$ sejam Hurwitz e que as funções de modulação satisfaçam (6.17)–(6.19). Então, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, o sistema composto pelas equações dos erros (4.22), (6.6), (6.9) e (6.10) com estado z definido em (6.16) será globalmente exponencialmente estável em relação a um conjunto residual de ordem τ , isto é, $\exists a, K_z > 0$ tais que*

$$\|z(t)\| \leq K_z \exp(-at) \|z(0)\| + O(\tau), \quad (6.27)$$

$\forall z(0), \forall t \geq 0$.

Prova: Por conveniência, reescreve-se (6.10) como

$$\varepsilon_N = -L_N^{-1} [U_N + \bar{U}] + \bar{\beta}_{uN} - \pi_{eN} - \pi_{0N}, \quad (6.28)$$

onde $\bar{\beta}_{uN} = (F_{1,N} - I)F_{1,N}^{-1}L_N^{-1}\bar{U}$ pode ser majorado por $C(t)$ (vide (6.24)) similarmente a β_{uN} em (6.25), i.e., $\|(\bar{\beta}_{uN} - \bar{\beta}_{uN}^0)_t\|_\infty \leq \tau \bar{K}_{\beta N} C(t)$. Relembrando-se que $u = u^{\text{nom}} - S_p U_N$, nota-se que L_N^{-1} em (6.28) opera no mesmo sinal U_N que aquele em (4.22). A partir de (4.22) e (6.10), o erro de rastreamento do modelo pode ser reescrito como

$$\dot{X}_e = A_c X_e + B_c K^{\text{nom}} \left[\dot{\hat{e}}_N + \alpha_N \hat{e}_N \right], \quad (6.29)$$

onde $\hat{e}_N := \varepsilon_N - (\bar{\beta}_{uN} - \pi_{eN} - \pi_{0N})$. Para eliminar a derivada $\dot{\hat{e}}_N$, emprega-se a transformação de variáveis $\bar{X}_e := X_e - B_c K^{\text{nom}} \hat{e}_N$ resultando em

$$\dot{\bar{X}}_e = A_c \bar{X}_e + (A_c + \alpha_N I) B_c K^{\text{nom}} \hat{e}_N. \quad (6.30)$$

Uma vez que A_c é Hurwitz, e a partir de (6.21), tem-se que $\|\bar{X}_e(t)\| \leq \tau \bar{K} C(t) + \Pi$, $\forall t \geq 0$. Além disso, conforme é esclarecido abaixo,

$$\|X_e(t)\| \text{ e } \|e(t)\| \leq \tau K_0 C(t) + \Pi, \quad (6.31)$$

$$\|\omega_t\|_\infty \leq \tau K_1 C(t) + K_2 \|z(0)\| + K_m, \quad (6.32)$$

$$C(t) \leq \frac{K'_{\text{red}} + K_4 \|z(0)\|}{1 - \tau K_3}. \quad (6.33)$$

De fato, as desigualdades em (6.31) vêm de $\bar{X}_e = X_e - B_c K^{\text{nom}} \hat{e}_N$. Da relação (4.17), tem-se que $\|\omega\| \leq K_M + K_\Omega \|X_e\|$, então, se obtém (6.32) a partir de (6.31), onde $K_2 \|z(0)\|$ vem do valor inicial do termo Π em (6.31). Agora, a partir de (6.24) e (6.32), $C(t)$ também pode ser majorado por $C(t) \leq \tau K_3 C(t) + K_4 \|z(0)\| + K'_{\text{red}}$, do qual se obtém por intermédio de manipulações algébricas o majorante (6.33), que é válido

para $\tau < K_3^{-1}$. Conforme é explicado a seguir, pode-se escrever também

$$\|z^0(t)\| \leq K_z \exp(-a_z t) \|z^0(0)\|, \quad (6.34)$$

$$\|z_e(t)\| \leq \tau K_5 (\|z_e(0)\| + \|z^0(0)\|) + O(\tau) + \Pi. \quad (6.35)$$

De fato, as variáveis X_ε , ε_i ($i=0, \dots, N-1$) e x_{FL}^0 são majoradas por Π^0 no Teorema 6.1. Assim, particionando-se $z^T = [(z^0)^T, z_e^T]$, onde $z_e^T := [\varepsilon_N^T, X_e^T]$ obtém-se (6.34), onde figura apenas a condição inicial de z^0 . Agora, de (6.21), (6.31) e (6.33) vem (6.35), onde o termo residual $O(\tau)$ é independente das condições iniciais. Notando-se que o instante inicial é irrelevante na derivação das expressões acima, pode-se escrever

$$\|z_e(t)\| \leq \{\tau K_5 + K_6 \exp[-a(t - t_k)]\} \{\|z_e(t_k)\| + \|z^0(t_k)\|\} + O(\tau), \quad (6.36)$$

$$\|z^0(t)\| \leq K_z \exp[-a_z(t - t_k)] \|z^0(t_k)\|, \quad (6.37)$$

$$\|z_e(t_{k+1})\| \leq \lambda (\|z_e(t_k)\| + \|z^0(t_k)\|) + O(\tau), \quad (6.38)$$

$$\|z^0(t_{k+1})\| \leq \lambda \|z^0(t_k)\|, \quad (6.39)$$

para $t \geq t_k \geq 0$ ($k=0, 1, \dots$) arbitrário e algum período $T_1 = t_{k+1} - t_k > 0$ adequado para se obter $\lambda < 1$.

As equações (6.38) e (6.39) são obtidas de (6.36) e (6.37) como segue: para $\tau < K_5^{-1}$, existe $T_1 > 0$ tal que $\lambda = \max\{\tau K_5 + K_6 \exp(-aT_1), K_z \exp(-a_z T_1)\} < 1$. Então, são válidas as desigualdades lineares recursivas (6.38) e (6.39) que permitem concluir que, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, o sistema das equações dos erros é globalmente exponencialmente estável com relação a um conjunto residual de ordem τ . ■

6.5 Aspectos de Implementação

Nesta seção aborda-se a implementação de funções de modulação para o UV-MRAC e a redução do *chattering*. Apresenta-se também uma versão do UV-MRAC bastante simplificada que pode ser usada na prática quando for suficiente a obtenção de estabilidade local.

6.5.1 Funções de modulação

Para o caso em que $n^* = 1$, o projeto das funções de modulação é desenvolvido detalhadamente nas Seções 5.1 e 5.2.1. Aqui são desenvolvidas funções de modulação similares para o caso $n^* > 1$. Aplica-se o Lema 3.1 às desigualdades (6.17)–(6.19) que devem ser respeitadas pelas funções de modulação ρ_i ($i = 0, \dots, N$) obtendo-se para ρ_0

$$\rho_0 = \delta_0 + c_{\varepsilon 0} \|\varepsilon_0\| + c_{\omega 0} \|L^{-1}(s)\omega\| + c_{U0} \|L^{-1}(s)U_N\| + \hat{d}_0(t), \quad (6.40)$$

$$\hat{d}_0(t) = \bar{c}_{d0} \bar{d}(t) + \frac{c_{d0}}{s + \lambda_{d0}} * \bar{d}(t), \quad (6.41)$$

com constantes apropriadas $c_{\varepsilon 0}, c_{\omega 0}, c_{U0}, \bar{c}_{d0}, c_{d0} \geq 0$, $\delta_0 \geq 0$ arbitrário e $\bar{\lambda}_{d0} > \lambda_{d0} > 0$, onde $\bar{\lambda}_{d0}$ é a margem de estabilidade do filtro $L^{-1}(s)W_d(s)$.

De forma análoga obtém-se

$$\rho_i = \delta_i + c_{\omega i} \|F_{1,i}^{-1}(\tau s)L_{i+1,N}^{-1}(s)\omega\| + c_{U i} \|F_{1,i}^{-1}(\tau s)L_{i+1,N}^{-1}(s)U_N\| + \hat{d}_i(t), \quad (6.42)$$

$$\hat{d}_i(t) = \bar{c}_{di} \bar{d}(t) + \frac{c_{di}}{s + \lambda_{di}} * \bar{d}(t), \quad (6.43)$$

para $i \in \{1, \dots, N-1\}$, com $\delta_i \geq 0$ arbitrário, constantes apropriadas $c_{\omega i}, c_{U i}, \bar{c}_{di}, c_{di} \geq 0$ e $\bar{\lambda}_{di} > \lambda_{di} > 0$, onde $\bar{\lambda}_{di}$ é a margem de estabilidade do filtro $F_{1,i}^{-1}(\tau s)L_{i+1,N}^{-1}(s)W_d(s)$.

Para ρ_N tem-se

$$\rho_N = \delta_N + c_{\omega N} \|F_{1,N}^{-1}(\tau s)\omega\| + \hat{d}_N(t), \quad (6.44)$$

com $\delta_N \geq 0$ arbitrário e constantes apropriadas $c_{\omega N}, \bar{c}_{dN}, c_{dN} \geq 0$, $\hat{d}_N(t)$ dado por (6.43) com $\bar{\lambda}_{dN} > \lambda_{dN} > 0$, onde $\bar{\lambda}_{dN}$ é a margem de estabilidade do filtro $F_{1,N}^{-1}(\tau s)W_d(s)$.

A computação das diversas constantes necessárias à implementação destas funções de modulação para sistemas com $n^* > 1$ pode seguir procedimentos semelhantes àquele que é detalhado na Seção 5.2.1 para sistemas com grau relativo uniforme e unitário.

A implementação das funções de modulação pode ser simplificada através da aplicação do Lema 3.1 para gerar majorantes simples para $\|\omega\|$ e outros sinais filtrados, conforme é detalhado em (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Seção 7.2) e (Cunha, Costa & Hsu 2003b, Seção III).

6.5.2 Versão relé

A implementação do UV-MRAC pode ser significativamente simplificada em aplicações que requerem apenas a estabilidade local. Essa implementação consiste no uso de amplitudes de controle constantes $\rho_i \equiv c_i > 0$ ($i = 0, \dots, N$). Então, os filtros aplicados na geração das funções de modulação são desnecessários. O rastreamento com rejeição de perturbação pode ser obtido utilizando-se valores adequados para as amplitudes c_i . O controlador resultante é denominado *Relé UV-MRAC* porque no caso SISO os sinais de controle são gerados por relés simples $U_i = c_i \text{sgn}(\varepsilon_i)$ (Hsu et al. 1994).

6.5.3 Redução do *chattering*

A presença de efeitos não ideais, como pequenos atrasos e histerese nos dispositivos de chaveamento reais ou dinâmica não-modelada na planta, resulta no surgimento do fenômeno denominado *chattering* (Utkin 1978, Seção 5 do Capítulo I). Uma forma de se evitar o *chattering* é substituir o controle vetorial unitário descontínuo (2.1) por aproximações contínuas como a zona linear (Edwards & Spurgeon 1998, p. 61)

$$U = \begin{cases} -\rho(x, t) \frac{v(x)}{\|v(x)\|} & \text{se } \|v(x)\| \geq \delta_v, \\ -\delta_v^{-1} \rho(x, t) v(x) & \text{se } \|v(x)\| < \delta_v, \end{cases} \quad (6.45)$$

ou a aproximação sigmoideal (Edwards & Spurgeon 1998, pp. 15–17, 62–63)

$$U = -\rho(x, t) \frac{v(x)}{\|v(x)\| + \delta_v}, \quad (6.46)$$

onde $\delta_v > 0$ é um escalar de valor pequeno que define a largura da região da aproximação contínua. Ambas as aproximações introduzem uma zona contínua na vizinhança da descontinuidade original. O resultado é a redução do ganho do controlador nessa vizinhança. O preço a ser pago é o surgimento de um erro residual (e.g., *offset*) que aumenta na medida em que δ_v cresce. Por outro lado, a aproximação pode ser ajustada para estar arbitrariamente próxima da lei de controle ideal escolhendo-se δ_v pequeno.

Além disso, se a aplicação em vista não admitir oscilações de alta frequência por questões de ordem prática, pode-se filtrar o sinal gerado pela lei de controle descontínua, mesmo que não se empregue a zona de aproximação contínua. Na Figura 6.1, poder-

se-ia incluir um filtro passa-baixas entre os pontos “1” e “2” sem destruir o modo deslizante em cada malha de controle vetorial unitário e, além disso, o sinal de controle seria suavizado antes de ser aplicado à planta. Este procedimento já foi aplicado no VS-MRAC e poderia ser aplicado no UV-MRAC seguindo-se a abordagem de controle deslizante suave proposta em (Hsu 1997).

6.6 Exemplo de Aplicação

Apresenta-se um exemplo para mostrar a aplicabilidade do UV-MRAC e permitir a avaliação do seu desempenho através de simulação (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Seção 8). A Figura 6.3 apresenta o diagrama de um sistema de suspensão articulado. O objetivo é fazer a posição da carga (y_2) e o ângulo de orientação da carga (ϕ) rastream a saída do modelo de referência através do comando de dois atuadores de deslocamento linear. Os sinais de comando são as forças dos atuadores \bar{u}_1 e \bar{u}_2 . A planta é linearizada na vizinhança de $\phi = 0 \text{ rad}$, resultando na seguinte representação entrada-saída

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} K_p [\bar{u} + d], \quad (6.47)$$

$$K_p = \begin{bmatrix} l_1/J & -l_2/J \\ 1/m & 1/m \end{bmatrix}, \quad d = K_p^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad (6.48)$$

onde o vetor de saída é $y = [\phi, y_2]^T$ e o vetor de controle é $\bar{u} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2]^T = u - d^{\text{nom}}$. O controle nominal $d^{\text{nom}} = [50, 50]^T \text{ N}$ é utilizado para a compensação do peso da carga, o que permite reduzir a amplitude do sinal de controle u . Ajustou-se $\hat{d}_0(t) \equiv 250$ e $\hat{d}_1(t) \equiv 50$ nas funções de modulação levando-se em conta a perturbação residual ($d - d^{\text{nom}}$). Não se usa a matriz de parâmetros nominais ($\theta^{\text{nom}} = 0$) para que o projeto do controlador necessite de pouco conhecimento sobre os valores dos parâmetros da planta.

Os parâmetros da planta usados nas simulações são: massa da carga $m = 10 \text{ kg}$, momento de inércia da carga $J = 1 \text{ kg m}^2$, aceleração da gravidade $g = 9,81 \text{ m/s}^2$,

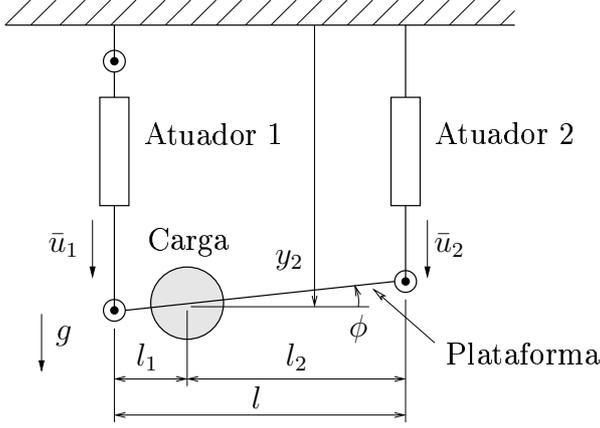


FIGURA 6.3: Diagrama do sistema de suspensão.

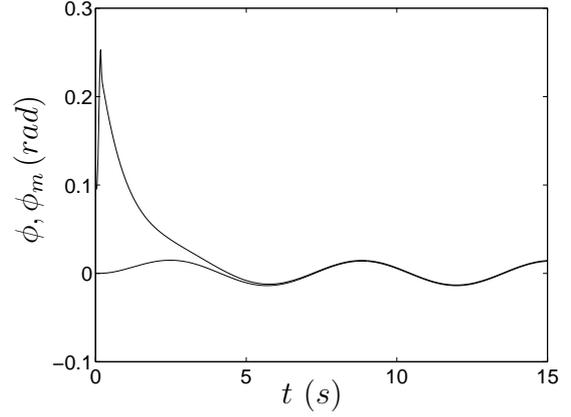


FIGURA 6.5: Ângulo de orientação da carga e o sinal de saída do modelo (ϕ, ϕ_M) .

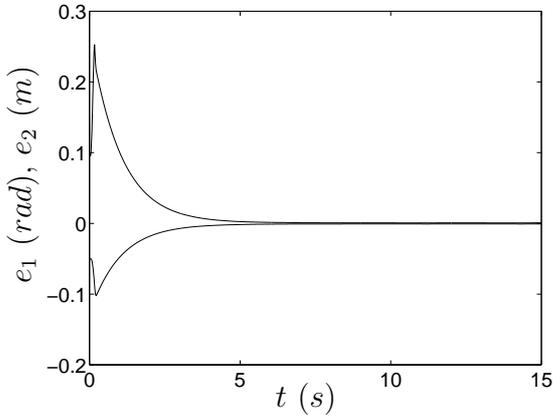


FIGURA 6.4: Erros de saída do sistema de suspensão.

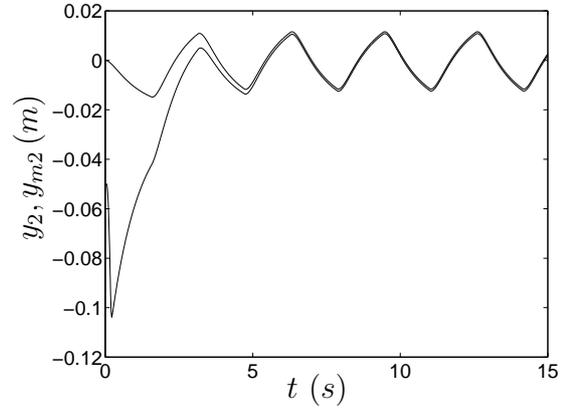


FIGURA 6.6: Posição da carga e o sinal de saída do modelo (y_2, y_{M2}) .

comprimento da plataforma $l = 4 \text{ m}$ e posição da carga $l_2 = 3 \text{ m}$. Esses parâmetros não foram usados no projeto do UV-MRAC. A massa da plataforma, as massas dos atuadores e os atritos foram desprezados.

O modelo de referência escolhido é

$$W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+5)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)(s+5)} \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Os parâmetros do controlador são: $c_{\omega 0} = c_{U0} = 1$, $c_{\omega 1} = 0, 2$, $\delta_0 = \delta_1 = 0, 1$, $\theta^{\text{nom}} = 0$, $L(s) = \lambda(s) = s + 5$ e $K^{\text{nom}} = 0, 1 I$.

A condição Hurwitz requerida para a aplicação do UV-MRAC é satisfeita para

$S_p = I$ se e somente se $l_1 > -J/m$, o que é sempre verdadeiro uma vez que a carga é mantida dentro da plataforma. No entanto, se fosse aplicada alguma lei de controle que exija que a matriz $K_p S_p$ seja positiva definida, como por exemplo (Tao & Ioannou 1989, Chien et al. 1996), então seria necessário e suficiente que as seguintes condições fossem satisfeitas simultaneamente:

$$l_1 > -\frac{J}{m}, \quad (6.50)$$

$$\text{e} \quad l_2^2 + \frac{2J}{m}l_2 + \frac{J^2}{m^2} - \frac{4Jl}{m} < 0. \quad (6.51)$$

Neste exemplo a carga deveria ser posicionada respeitando-se a restrição $l_2 < 1,164m$, caso contrário, deveria ser escolhida outra matriz S_p para tornar $K_p S_p$ positiva definida. Deve ser ressaltado que a definição positiva de $K_p S_p$ implica que $(-K_p S_p)$ seja Hurwitz, o que sugere que o UV-MRAC pode ser aplicado a classes mais amplas de plantas do que outros algoritmos, como por exemplo (Tao & Ioannou 1988, Tao & Ioannou 1989, Chien et al. 1996).

As constantes nas funções de modulação ($c_{\omega 0}$, $c_{\omega 1}$ e c_{U0}) foram escolhidas para manter a amplitude do sinal de controle u tão pequena quanto é possível, mas obtendo-se a robustez da estabilidade e do desempenho do controlador a incertezas nos parâmetros da planta.

6.6.1 Resultados de simulação

Nas simulações apresentadas nas Figuras 6.4 a 6.6 o sinal de referência é $r = [0, 1 \sin(t); 0, 1 \text{sqw}(2t)]^T$, onde $\text{sqw}(\cdot) := \text{sgn}[\sin(\cdot)]$ é uma onda quadrada.

A convergência dos sinais do erro de saída é exponencial, como é observado na Figura 6.4. No entanto, durante o transitório inicial são observados grandes picos com amplitudes $0,25 \text{ rad}$ ($\approx 14^\circ$) em e_1 e $0,11 m$ em e_2 , que são causados por condições iniciais desfavoráveis. Isto justifica a prática de se ajustar as condições iniciais do modelo de referência para que o erro inicial seja pequeno.

Duas características do UV-MRAC para plantas com grau relativo uniforme $n^* > 1$ são **(i)** a impossibilidade da convergência do erro de saída em tempo finito e **(ii)** o erro pode não tender a zero, mas para um conjunto residual. Isto contrasta com o

UV-MRAC para plantas com $n^* = 1$, que podem ser projetados para que o erro de rastreamento convirja para zero em tempo finito (sugere-se comparar a Figura 6.4 com a Figura 5.4).

A constante de tempo dos *filtros de média* ($\tau = 0,003$ s) foi escolhida suficientemente pequena para manter o sistema em malha fechada estável e o erro de rastreamento pequeno após o transitório inicial, como se observa nas Figuras 6.4 a 6.6 para $t > 5$ s.

6.7 Sobre a Ausência do Fenômeno *Peaking* no VS-MRAC e no UV-MRAC

O VS-MRAC (SISO) e o UV-MRAC (MIMO) para plantas de grau relativo uniforme $n^* > 1$ utilizam *filtros de média* com constante de tempo τ suficientemente pequena. Esta constante de tempo é similar ao parâmetro ε de pequeno valor que caracteriza os observadores de alto ganho (*high gain observer* — HGO) empregados em alguns controladores por modo deslizante e realimentação de saída. O fenômeno *peaking*, descrito em (Sussmann & Kokotović 1991, Khalil 1996) e na Seção 9.6.2, pode ocorrer nos sinais do HGO e, conseqüentemente, nos sinais de controle na medida que $\varepsilon \rightarrow +0$. Tanto nos controladores baseados em observadores de alto ganho quanto no VS-MRAC e no UV-MRAC, os erros de rastreamento tendem a zero na medida em que os parâmetros pequenos tendem a zero. No entanto, em alguns sistemas baseados em HGO (e.g., (Esfandiari & Khalil 1992, Emelyanov et al. 1992a, Emelyanov et al. 1992b)), os sinais podem exibir picos no transitório inicial cujas amplitudes aumentam na medida em que $\varepsilon \rightarrow +0$. Em contraste, o VS-MRAC e o UV-MRAC possuem propriedades de estabilidade exponencial global uniformes em relação a $\tau \in (0, \tau^*]$ para algum valor suficientemente pequeno $\tau^* > 0$. Isto implica que a estabilidade global do UV-MRAC (ou VS-MRAC) é preservada e este é livre do fenômeno *peaking* na medida que $\tau \rightarrow +0$.

No Capítulo 9 revisa-se o HGO e se desenvolve um MRAC baseado em controle à estrutura variável e num HGO para sistemas lineares SISO. O sistema de controle resultante é livre de *peaking* e possui propriedades globais de estabilidade.

Capítulo 7

Controle de Sistemas Não-Lineares de Grau Relativo Uniforme e Unitário

Neste Capítulo o UV-MRAC desenvolvido no Capítulo 5 é estendido para a classe de sistemas não-lineares representados pela equação de estado (1.32) que satisfazem as hipóteses (A1)–(A3), (A4.a) (isto é, grau relativo uniforme e unitário) e (A5)–(A7).

O modelo de referência de grau relativo uniforme e unitário é dado por (5.1).

Este Capítulo combina as idéias introduzidas em (Min & Hsu 2000) para tratar perturbações não-lineares em sistemas SISO com o UV-MRAC para sistemas multivariáveis lineares de grau relativo uniforme e unitário de (Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2003). Isto resulta no desenvolvimento de um controlador para uma classe de sistemas MIMO com perturbações não-lineares que não são necessariamente uniformemente limitadas (Hsu et al. 2003). Deve-se lembrar que a limitação uniforme da perturbação é assumida em (Hsu et al. 2001, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002b, Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2003) e nos Capítulos 5 e 6 desta Tese. A classe da não-linearidade aqui considerada é mais ampla do que aquela permitida em (Min & Hsu 2000), pois assume-se *loc. cit.* que a não-linearidade seja dependente apenas do tempo e da saída da planta, enquanto que aqui pode ser dependente, também, do estado não medido, conforme a hipótese (A7).

7.1 Parametrização do Controle

A parametrização do controle aqui apresentada é similar àquela descrita no Capítulo 4. No entanto, o vetor regressor e a matriz de parâmetros são particionados de uma forma mais conveniente para o desenvolvimento de leis de controle para sistemas não-lineares. Para o caso sem perturbação ($\phi(x_p, t) \equiv 0$) a lei de controle é

$$u^* = \theta^{*T} \omega + \theta_4^{*T} r, \quad (7.1)$$

onde

$$\theta^{*T} = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^{*T}], \quad (7.2)$$

$$\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y^T]^T, \quad (7.3)$$

sendo os demais termos definidos em (4.5)–(4.7).

7.2 Equações do Erro

O desenvolvimento das equações do erro para sistemas não-lineares detalhado em (Hsu et al. 2003) segue a Seção 4.2 desta Tese. O sistema em malha aberta composto pela planta (1.32) e pelos filtros (4.13) pode ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_c X + B_c K_p [u - \theta^{*T} \omega] + B_\phi \phi, \\ y &= C_o X, \end{aligned} \quad (7.4)$$

onde o vetor de estado é $X := [x_p^T, \omega_1^T, \omega_2^T]^T$ e

$$B_\phi = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.5)$$

O modelo de referência pode ser representado por

$$\begin{aligned}\dot{X}_M &= A_c X_M + B_c K_p [\theta_4^{*T} r - W_\phi(s) * \phi] + B_\phi \phi, \\ y_M &= C_o X_M,\end{aligned}\tag{7.6}$$

com

$$W_\phi(s) = K_p^{-1} [W_M(s)]^{-1} C_o (sI - A_c)^{-1} B_\phi,\tag{7.7}$$

que é uma matriz de transferência estável. Se a planta possuir grau relativo uniforme e unitário, então a matriz de transferência $W_\phi(s)$ será própria. O termo $W_\phi(s) * \phi$ cancela o efeito da perturbação ϕ na saída y_M , conforme foi proposto por (Min & Hsu 2000).

Agora, subtraindo-se (7.6) de (7.4), conclui-se que o vetor de estado do erro ($X_e := X - X_M$) e o erro de saída satisfazem

$$\begin{aligned}\dot{X}_e &= A_c X_e + B_c K_p [u - \bar{u}], \\ e &= C_o X_e,\end{aligned}\tag{7.8}$$

onde

$$\bar{u} = \theta^{*T} \omega + \theta_4^{*T} r - W_\phi(s) * \phi.\tag{7.9}$$

Uma vez que $\{A_c, B_c, C_o\}$ é uma realização de $W_M(s)$, a equação do erro pode ser reescrita segundo a representação entrada-saída

$$e = W_M(s) K_p [u - \bar{u}].\tag{7.10}$$

É importante ressaltar que as equações do erro (7.8) e (7.10) são válidas para sistemas com matriz *interactor* arbitrária, desde que o modelo de referência seja escolhido adequadamente. No entanto, no caso geral a matriz de transferência $W_\phi(s)$ poderá ser imprópria, conforme é discutido no Capítulo 8.

7.3 Projeto e Análise para Plantas Não-Lineares de Grau Relativo Uniforme e Unitário

A lei de controle vetorial unitário tem a mesma forma da lei de controle para sistemas lineares de grau relativo unitário (vide (5.4)–(5.6) e (Hsu, Costa & Cunha 2002a, Hsu, Costa & Cunha 2002b))

$$u = u^{\text{nom}} + S_p U, \quad (7.11)$$

$$U = -\rho \frac{e}{\|e\|}, \quad (7.12)$$

$$u^{\text{nom}} = \theta^{\text{nom}T} \omega + \theta_4^{\text{nom}T} r, \quad (7.13)$$

onde θ^{nom} e θ_4^{nom} são valores nominais para θ^* e θ_4^* , respectivamente.

Da Proposição 2.1 tem-se que a convergência exponencial do erro de saída para zero será obtida se a função de modulação satisfizer a desigualdade

$$\rho \geq \delta + c_e \|e\| + (1 + c_d) \left\| S_p^{-1} \left[(\theta^{\text{nom}} - \theta^*)^T \omega + (\theta_4^{\text{nom}} - \theta_4^*)^T r + W_\phi(s) * \phi \right] \right\|, \quad (7.14)$$

onde $c_e, c_d \geq 0$ são constantes adequadas que satisfazem as desigualdades (2.11) e $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária. Uma função de modulação que satisfaz (7.14), excluindo-se termos exponencialmente decrescentes gerados pelo transitório de filtros estáveis, é

$$\rho = \delta + c_1 \|\omega\| + c_2 \|r\| + c_3 \|e\| + \hat{\phi}(t), \quad (7.15)$$

com

$$\hat{\phi}(t) = \left[c_4 + \frac{c_5}{s + \gamma_\phi} \right] \|\phi\| \geq (1 + c_d) \left\| S_p^{-1} W_\phi(s) * \phi \right\|. \quad (7.16)$$

Uma vez que a matriz de transferência $W_\phi(s)$ é própria e estável, obtém-se o majorante (7.16) através da aplicação do Lema 3.1, onde γ_ϕ obedece $\bar{\gamma}_\phi > \gamma_\phi > 0$, sendo $\bar{\gamma}_\phi$ a margem de estabilidade de $W_\phi(s)$.

O termo $\|\phi\|$ em (7.16) não pode ser medido. Porém, da hipótese (A7) e lembrando-

se que $\|X\|^2 = \|x_p\|^2 + \|\omega_1\|^2 + \|\omega_2\|^2$, obtém-se a estimativa

$$\|\phi\| \leq k_x \sqrt{\|X\|^2 - \|\omega_1\|^2 - \|\omega_2\|^2} + \varphi(y, t). \quad (7.17)$$

Os sinais ω_1 , ω_2 e φ são disponíveis. A norma do estado $\|X\|$ pode ser estimada através da aplicação do Lema 3.2 à (7.4), que resulta no majorante

$$\|X\| \leq c_6 \tau \|U_{av}\| + \frac{1}{s + \gamma_x} [c_7 \varphi + (c_8 + \tau c_9) \|U_{av}\| + c_{10} \|\omega\| + c_{11} \|r\|], \quad (7.18)$$

$$U_{av} = \frac{I}{\tau s + 1} U_{eq} = \frac{I}{\tau s + 1} U, \quad (7.19)$$

onde U_{eq} é o *controle equivalente*, $\gamma_x := \gamma - c_\phi k_x > 0$, $\lambda_0 > \gamma > 0$, λ_0 é a margem de estabilidade da matriz A_c e $c_\phi > 0$ está definido no Lema 3.2.

O *controle equivalente* U_{eq} não é disponível porém pode ser substituído pelo *controle médio* U_{av} gerado pelo filtro passa-baixas (7.19) com constante de tempo $\tau > 0$ de valor arbitrário. O uso do *controle médio* não é uma aproximação do *controle equivalente* pois foi incluído rigorosamente no Lema 3.2 e não se requer que τ seja pequeno.

Observação 7.1 *A estabilidade do sistema de controle requer a limitação do lado direito da desigualdade (7.18), o que requer $\gamma_x > 0$. Nota-se que γ e c_ϕ dependem do modelo de referência e dos filtros de entrada e de saída escolhidos. Assim, deve-se tentar escolher o modelo de referência para minimizar a relação c_ϕ/γ e, então, se admitirá que a incerteza seja maior, isto é, o valor de k_x poderá ser maior. Uma vez que estas constantes devem ser escolhidas de forma que $\|w_\phi(t)\| \leq c_\phi \exp(-\gamma t)$, $\forall t \geq 0$, onde $w_\phi(t)$ é a resposta impulsiva correspondente à matriz de transferência $(sI - A_c)^{-1} B_\phi$ (vide Lema 3.2), o ganho DC do FOAF $c_\phi/(s + \gamma)$ (dado por c_ϕ/γ) deve ser minimizado, o que pode ser realizado pelo método de otimização proposto em (Cunha, Costa & Hsu 2003b) (vide Seção 3.3.3.2 desta Tese).*

Observação 7.2 *Em vez de se minimizar o ganho DC de um FOAF conforme a Observação 7.1, a alternativa proposta em (Hsu, Costa & Cunha 2002b, Hsu, Costa & Cunha 2002a) é a maximização da margem de estabilidade (γ_0) da matriz A_c estimada através de formas quadráticas de Lyapunov (vide Observação 3.3). Para a parte linear da planta sem perturbação e aumentada pelos filtros de entrada e de saída, este proble-*

ma pode ser resolvido pelo projeto da lei de controle $u = \theta^{\text{nom}T} \omega$ que otimiza a margem de estabilidade estimada do sistema em malha fechada. Esse é um problema de controle robusto bem conhecido que pode ser resolvido por otimização convexa usando Desigualdades Lineares Matriciais (Linear Matrix Inequalities — LMI) (Boyd, Balakrishnan, El Ghaoui & Feron 1994). No entanto, o uso de formas quadráticas de Lyapunov para a computação dos coeficientes do FOAF foi evitado nesta Tese, pois pode resultar em estimativas muito conservadoras, conforme se conclui na Seção 3.4.

Observação 7.3 Para que a aplicação do Lema 3.2 resulte num sistema estável em malha fechada, é necessário que a matriz A_c seja Hurwitz, condição que é satisfeita pois essa é a matriz da equação do erro. O uso da equação do erro simplifica significativamente a estimação da norma do estado $\|x_p\|$ que é usada no majorante (7.17). Em (Min & Hsu 2000) se utilizava um controlador linear adicional para estabilizar a planta e, então, possibilitar a estimação da norma $\|x_p\|$.

A matriz de transferência da planta $G(s)$ é incerta e pertence a uma dada classe \mathcal{P} que é um subconjunto de $\mathbb{R}^{m \times m}(s)$. Cada elemento de \mathcal{P} satisfaz as hipóteses (A1)–(A3), (A4.a) e (A5) para S_p e ν fixos. A implementação da função de modulação aplicando-se (7.15)–(7.19) requer a seguinte hipótese adicional:

(A9.c) São conhecidos valores para as constantes $c_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, 11$) e $\gamma_\phi, \gamma_x > 0$ de forma que a desigualdade (7.14) seja satisfeita (excluindo-se termos exponencialmente decrescentes) $\forall G(s) \in \mathcal{P}$ com algum par (θ^*, θ_4^*) correspondente a cada elemento de \mathcal{P} que satisfaça a equação diofantina (4.11).

Detalhes sobre o cálculo dessas constantes são apresentados na Seção 7.4. O algoritmo UV-MRAC aqui proposto é resumido na Tabela 7.1.

Para enunciar o Teorema da estabilidade deste controlador, considera-se o sistema formado pela equação do erro (7.8) e o vetor de estado aumentado $z = [X_e^T, x_F^{0T}]^T$, onde o vetor de estado x_F^0 representa os termos transitórios dos filtros em (7.16), (7.18) e (7.19) aplicados na geração do sinal $\hat{\phi}$. Então, obtêve-se em (Hsu, Costa & Cunha 2002a, Hsu et al. 2003) o resultado de estabilidade enunciado no Teorema a seguir.

TABELA 7.1: Algoritmo proposto para o controle vetorial unitário por modelo de referência para sistemas não-lineares com grau relativo uniforme e unitário.

Modelo de referência	$\dot{y}_M = A_M y_M + r$
Sinal de erro	$e(t) = y(t) - y_M(t)$
Filtros de estado	$\dot{\omega}_1 = \Phi \omega_1 + \Gamma u, \quad \dot{\omega}_2 = \Phi \omega_2 + \Gamma y$
Vetor regressor	$\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y^T]^T$
Lei de controle	$u = u^{\text{nom}} + S_p U, \quad U = -\rho \frac{e}{\ e\ }$
Controle nominal	$u^{\text{nom}} = \theta^{\text{nom}T} \omega + \theta_4^{\text{nom}T} r$
Controle médio	$U_{av} = \frac{I}{\tau s + 1} U$
Função de modulação	$\rho = \delta + c_1 \ \omega\ + c_2 \ r\ + c_3 \ e\ + \hat{\phi}(t)$
(*)	$\hat{\phi}(t) = \left[c_4 + \frac{c_5}{s + \gamma_\phi} \right] \left[k_x \sqrt{\max \left\{ \hat{X}^2 - \ \omega_1\ ^2 - \ \omega_2\ ^2, 0 \right\}} + \varphi(y, t) \right]$
Estimativa de $\ X\ $	$\hat{X}(t) = c_6 \tau \ U_{av}\ + \frac{1}{s + \gamma_x} [c_7 \varphi + (c_8 + \tau c_9) \ U_{av}\ + c_{10} \ \omega\ + c_{11} \ r\]$

(*) A função $\max\{\cdot, 0\}$ foi introduzida para evitar a raiz quadrada de números negativos que poderia ocorrer devido ao transitório dos filtros utilizados na geração do sinal $\hat{X}(t)$.

Teorema 7.1 *Considere o sistema composto pela planta (1.32) e o UV-MRAC descrito na Tabela 7.1. Se as hipóteses (A1)–(A3), (A4.a), (A5)–(A7) e (A9.c) forem satisfeitas, então o UV-MRAC será globalmente exponencialmente estável, isto é, $\exists k, \lambda > 0$ tais que $\|z(t)\| \leq k \exp(-\lambda t) \|z(0)\|, \forall t \geq 0$. Além disso, se $\delta > 0$, então o erro de saída $e(t)$ se tornará nulo após algum tempo finito.*

Prova: A prova apresentada em (Hsu et al. 2003) é análoga à prova do Teorema 5.1 para sistemas lineares de grau relativo uniforme e unitário apresentada nesta Tese. As diferenças mais relevantes aparecem na aplicação da Proposição 2.1:

- (i) Aqui se introduz o sinal exponencialmente decrescente $\pi_2(t)$ ($\|\pi_2(t)\| \leq k_4 \exp(-\lambda_5 t) \|x_F^0(0)\|$ com $0 < \lambda_5 < \min(\gamma_\phi, \gamma_x, \tau^{-1})$) para representar o transitório dos filtros que geram a função de modulação;
- (ii) O termo de perturbação é dado por $d_U(t) = S_p^{-1}[u^{\text{nom}} - \bar{u}]$.

■

7.4 Procedimento de Projeto

O projeto do UV-MRAC para sistemas não-lineares de grau relativo uniforme e unitário pode ser desenvolvido seguindo-se os passos descritos a seguir.

1. Especifica-se o modelo de referência como em (5.1).
2. Escolhe-se um polinômio mônico e Hurwitz $\lambda(s)$ de grau $\nu - 1$ para os filtros de entrada e de saída (4.5). Então, são escolhidas as matrizes Φ e Γ para a realização desses filtros (4.13).
3. Estima-se um limite inferior para a margem de estabilidade $\gamma_x = \gamma - c_\phi k_x$ e as constantes $c_\phi, \gamma > 0$ através da minimização do ganho DC (c_ϕ/γ) do FOAF $c_\phi/(s + \gamma)$ para a matriz de transferência $(sI - A_c)^{-1}B_\phi$ (vide Lema 3.2 e Observação 7.1). Isto pode ser realizado através do método de otimização proposto na Seção 3.3.3.2.
4. Se a margem de estabilidade γ_x for muito pequena ou negativa, então retorna-se ao passo 1. As especificações do modelo de referência e dos filtros de entrada e de saída devem ser revistas até que γ_x se torne positivo e suficientemente grande.
5. Computa-se as matrizes de parâmetros nominais θ^{nom} e θ_4^{nom} para a planta nominal. As matrizes de parâmetros nominais devem satisfazer as condições de casamento descritas em (Sastry & Bodson 1989). Deve-se notar que o valor de θ^{nom} pode não ser único, conforme é discutido em (de Mathelin & Bodson 1994). Assim, o projetista é livre para escolher qualquer valor de casamento que for conveniente. Aqui se sugere a escolha de valores que tenham normas suficientemente pequenas, a fim de se manter pequena a amplitude do controle nominal.
6. Escolhe-se valores para as constantes na função de modulação (7.15) que possibilitem que a desigualdade (7.14) seja satisfeita. Essas constantes devem satisfazer:

$$c_1 \geq (1 + c_d) \left\| S_p^{-1} (\theta^{\text{nom}} - \theta^*)^T \right\|, \quad (7.20)$$

$$c_2 \geq (1 + c_d) \left\| S_p^{-1} (\theta_4^{\text{nom}} - \theta_4^*)^T \right\|, \quad (7.21)$$

$$c_3 \geq c_e, \quad (7.22)$$

onde $c_e, c_d \geq 0$ satisfazem a desigualdade (2.11) para matrizes simétricas $P, Q > 0$ que satisfaçam a equação de Lyapunov (2.7). Deve-se lembrar que se a matriz da realização do modelo de referência escolhido for da forma $A_M = -\gamma_M I$ com $\gamma_M > 0$, então a função de modulação poderá ser simplificada com $c_3 = c_e = 0$, conforme estabelecido no Corolário 2.1. A constante $\delta \geq 0$ pode ser escolhida arbitrariamente pequena, uma vez que é necessária apenas para garantir a convergência do erro de saída para zero em tempo finito.

7. Escolhe-se valores para as constantes $c_4, c_5 \geq 0$ e $\gamma_\phi > 0$ tais que a desigualdade (7.16) seja satisfeita descontando-se termos exponencialmente decrescentes. Para se obter valores para estas constantes, reescreve-se a matriz de transferência como $(1+c_d)S_p^{-1}W_\phi(s) = W(s) + (1+c_d)S_p^{-1}K_p^{-1}C_p$, onde $W(s) = (1+c_d)S_p^{-1}K_p^{-1}(C_oA_c - A_M C_o)(sI - A_c)^{-1}B_\phi$. Então, pode-se escolher

$$c_4 \geq (1 + c_d) \|S_p^{-1}K_p^{-1}C_p\|. \quad (7.23)$$

As constantes c_5 e γ_ϕ devem ser escolhidas conforme o Lema 3.1. Para se manter pequena a amplitude da função de modulação, estas constantes devem ser otimizadas para minimizar o ganho DC do FOAF $c_5/(s + \gamma_\phi)$, conforme se descreve na Seção 3.3.3.

8. Os valores para as constantes γ, γ_x e c_ϕ já foram obtidos no passo 3. O próximo passo é a obtenção das constantes $c_u, c_\tau \geq 0$ tais que os filtros $c_u/(s + \gamma)$ e $c_\tau/(s + \gamma)$ sejam FOAFs para as matrizes de transferência $(sI - A_c)^{-1}B_o$ e $(sI - A_c)^{-1}A_c B_o S_p$, respectivamente. A minimização dessas constantes é de importância prática. Quanto menores os valores das constantes, tanto menor será a amplitude do sinal de controle.
9. As constantes $c_6, \dots, c_{11} \geq 0$ devem ser tais que a desigualdade (7.18) seja satisfeita para qualquer valor escolhido para a constante de tempo do filtro de média ($\tau > 0$), descontando-se termos exponencialmente decrescentes. A partir de (7.4)

e seguindo-se os passos da prova do Lema 3.2, obtém-se

$$\begin{aligned}
c_6 &\geq \|B_o S_p\|, \\
c_7 &\geq c_\phi, \\
c_8 &\geq c_u \|S_p\|, \\
c_9 &\geq c_\tau + c_\phi k_x \|B_o S_p\|, \\
c_{10} &\geq c_u \|\theta^* - \theta^{\text{nom}}\|, \\
c_{11} &\geq c_u \|\theta_4^{\text{nom}}\|,
\end{aligned} \tag{7.24}$$

onde se usam $B_o = B_c K_p$ e a definição do controle nominal em (7.13).

7.5 Exemplo de Aplicação ao Controle Tolerante a Falhas

Para ilustrar a aplicação do UV-MRAC considera-se nesta Seção o controle tolerante a falhas de uma cadeia composta por três carros, conforme a Figura 7.1 (Hsu et al. 2003). O sinal de controle é o vetor de forças desejadas dos atuadores $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$, o sinal de saída é o vetor de velocidades $y = [v_1, v_2]^T$ e o vetor de estado é $x_p = [v_1, v_2, v_3]^T$. Há um atuador redundante para que o sistema seja tolerante à perda total de um dos atuadores, de forma análoga ao que é feito na Seção 5.4. As massas dos carros são $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ e $m_3 = 0,5 \text{ kg}$.

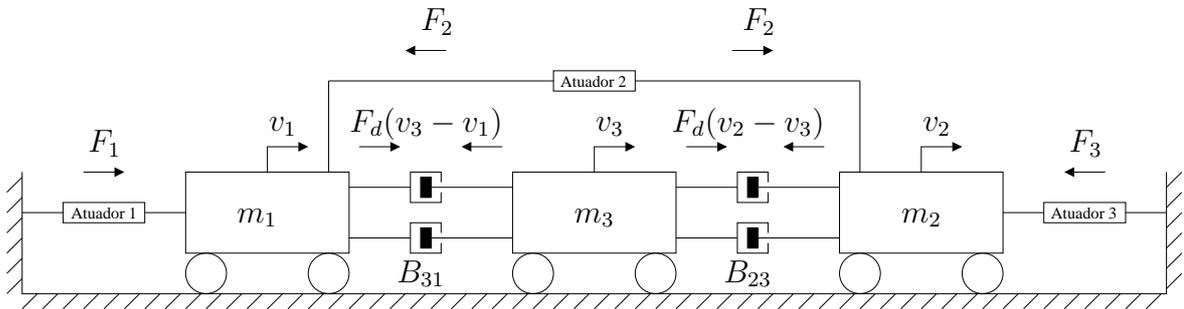


FIGURA 7.1: Diagrama da cadeia de carros considerada no exemplo de aplicação do UV-MRAC ao controle tolerante a falhas. Os amortecedores superiores são não-lineares e os inferiores possuem amortecimento linear.

Os carros são conectados por amortecedores, dois dos quais possuem coeficientes

de amortecimento linear $B_{31} = B_{23} = 1 \text{ N s/m}$ e os outros dois amortecedores são não-lineares. A força de cada amortecedor não-linear é uma função da velocidade relativa entre os extremos do amortecedor ($F_d(v) = 0,1875v + \pi^{-1} \tan^{-1}(v)$) representada graficamente na Figura 7.2. O amortecedor não-linear foi inspirado no trabalho sobre suspensão semi-ativa de (Gordon & Best 1994).

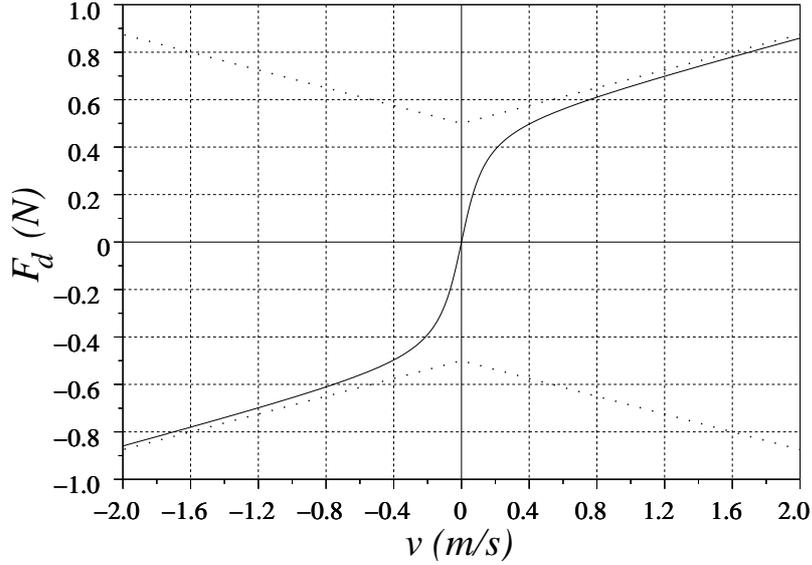


FIGURA 7.2: Força do amortecedor não-linear em função da velocidade (linha cheia). As linhas pontilhadas representam os majorantes $\pm(0,5 + 0,1875|v|)$.

O vetor das forças resultantes dos atuadores $F_r \in \mathbb{R}^2$ é dado por

$$F_r = S\mathcal{F}\bar{u}, \quad (7.25)$$

onde a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

é aplicada à geração das forças resultantes e

$$\mathcal{F} = \text{diag} \{ \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \}, \quad (7.27)$$

onde o índice de falha $\mathcal{F}_i = 1$ se o i -ésimo atuador está operando corretamente, $0 < \mathcal{F}_i < 1$

se o seu desempenho é degradado ou $\mathcal{F}_i=0$ se está completamente inoperante.

Uma vez que o sistema possui dois sinais de saída, são necessários apenas dois sinais de controle tendo-se em vista o objetivo de que as velocidades v_1 e v_2 sigam as saídas correspondentes do modelo de referência. Para que o sistema resultante seja robusto a falhas dos atuadores, utiliza-se a matriz misturadora (5.47) proposta na Seção 5.4.3:

$$\bar{u} = S^T M^{\text{nom}} u, \quad (7.28)$$

onde M^{nom} é um valor nominal para a matriz de inércia $M := \text{diag}\{m_1, m_2\}$. A dinâmica da cadeia de carros incluindo a matriz misturadora pode ser representada pela equação de estado (1.32) com

$$A_p = \begin{bmatrix} -B_{31}m_1^{-1} & 0 & B_{31}m_1^{-1} \\ 0 & -B_{23}m_2^{-1} & B_{23}m_2^{-1} \\ B_{31}m_3^{-1} & B_{23}m_3^{-1} & -(B_{31} + B_{23})m_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} m_1^{-1} & 0 \\ 0 & m_2^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S \mathcal{F} S^T M^{\text{nom}},$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi(x_p) = \begin{bmatrix} F_d(v_3 - v_1)m_1^{-1} \\ -F_d(v_2 - v_3)m_2^{-1} \\ [F_d(v_2 - v_3) - F_d(v_3 - v_1)]m_3^{-1} \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

Utilizando-se $M^{\text{nom}}=I$, a matriz de ganho de alta frequência será dada por

$$K_p = \begin{bmatrix} m_1^{-1}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) & -m_1^{-1}\mathcal{F}_2 \\ -m_2^{-1}\mathcal{F}_2 & m_2^{-1}(\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3) \end{bmatrix}. \quad (7.30)$$

A condição (A5) de que a matriz $-K_p S_p$ seja Hurwitz é satisfeita escolhendo-se $S_p=I$ em (7.11), conforme a Proposição 5.1. É digno de nota que a matriz incerta K_p (7.30) pode ter sinal indefinido e pode não ser simétrica, o que impede a aplicação de algoritmos que requerem a definição de sinal e a simetria.

Notando-se que o sistema (1.32) com (7.29) está na forma regular, conclui-se que este possui um zero de transmissão localizado em $s = -(B_{31} + B_{23})m_3^{-1}$, conseqüentemente o sistema é de fase mínima, o que satisfaz a hipótese (A1).

Na Figura 7.2 se nota que as forças dos amortecedores não-lineares são limitadas por $|F_d(v)| \leq 0,1875|v| + 0,5$. Então, o termo não-linear pode ser majorado por $\|\phi(x_p)\| \leq$

$0,96\|x_p\| + 2,1$, conforme a hipótese (A7).

7.5.1 Projeto

O modelo de referência escolhido é

$$W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}, \quad (7.31)$$

o que permite a simplificação da função de modulação (7.15) uma vez que se pode escolher $c_3=0$ em virtude do Corolário 2.1. O polinômio característico escolhido para os filtros de estado é $\lambda(s)=s+10$, o que resulta na margem de estabilidade $\gamma_x=1,36 s^{-1}$.

As matrizes de parâmetros nominais θ^{nom} e θ_4^{nom} foram computadas para o caso em que todos os atuadores operam perfeitamente ($\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=\mathcal{F}_3=1$).

Os parâmetros do controlador foram escolhidos de forma que o sistema em malha fechada mantenha o seu bom desempenho desde que ao menos dois atuadores operem corretamente. Os demais parâmetros do controlador foram calculados seguindo-se os passos descritos na Seção 7.4: $c_1=110$, $c_2=3,2$, $c_4=4,8$, $c_5=21$, $c_6=2,7$, $c_7=2,5$, $c_8=4,5$, $c_9=23$, $c_{10}=477$, $c_{11}=7,2$, $\gamma_\phi=3,98 s^{-1}$, $\tau=0,01 s$ e $\delta=0,1$.

7.5.2 Resultados de simulação

Nos resultados de simulação apresentados nas Figuras 7.3–7.6 o sinal de referência é dado por $r = [10\text{sqw}(60t), 10\text{sen}(60t)]^T$. Para mostrar a robustez do desempenho do UV-MRAC a grandes incertezas paramétricas, o atuador 1 está completamente inoperante ($\mathcal{F}_1 \equiv 0$, $\mathcal{F}_2 \equiv \mathcal{F}_3 \equiv 1$). Na Figura 7.4 se observa a convergência dos erros de saída para zero em tempo finito.

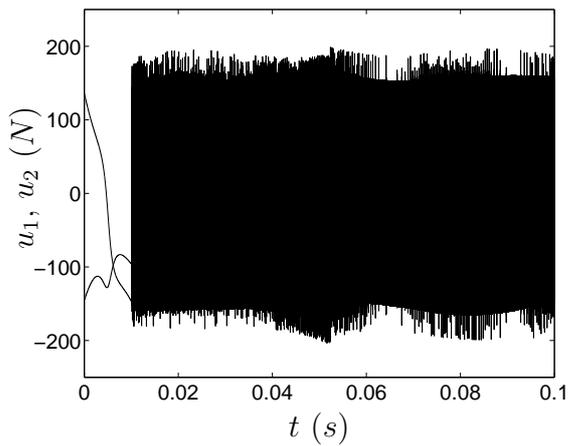


FIGURA 7.3: Sinais de controle.

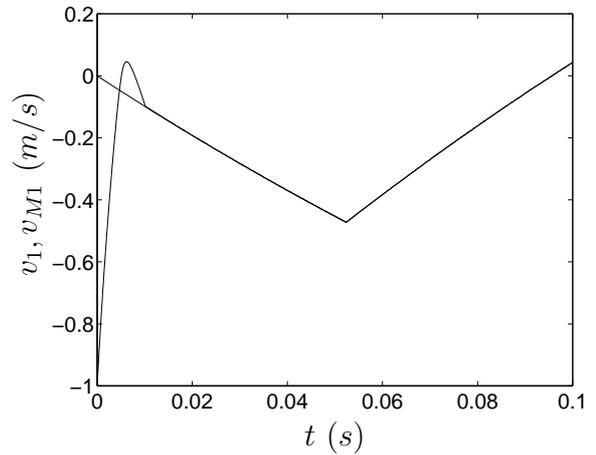


FIGURA 7.5: Velocidade do carro 1 (v_1) e o sinal de saída do modelo de referência (v_{M1}).

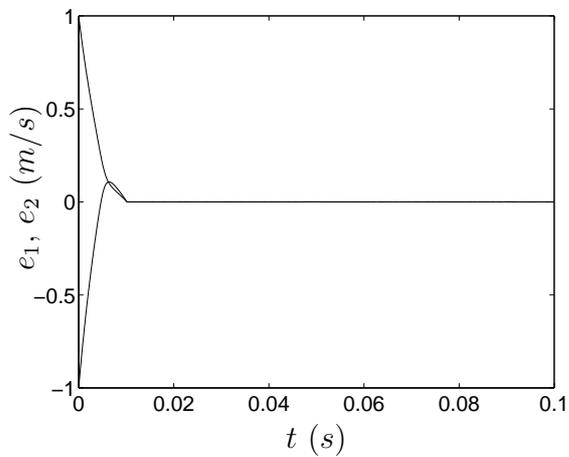


FIGURA 7.4: Erros de saída.

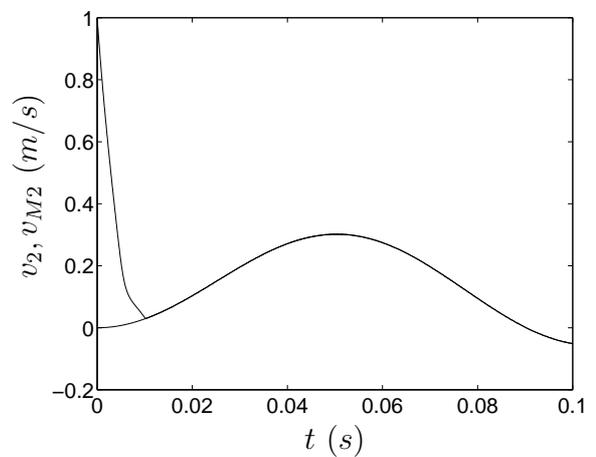


FIGURA 7.6: Velocidade do carro 2 (v_2) e o sinal de saída do modelo de referência (v_{M2}).

Capítulo 8

Controle de Sistemas Não-Lineares de Grau Relativo Uniforme Arbitrário

Em (Min & Hsu 2000, Min 2001) são apresentadas algumas formas de desenvolver o VS-MRAC para classes de sistemas SISO não-lineares de grau relativo $n^* = 2$ que podem ser adaptadas para algumas classes de sistemas MIMO não-lineares em que o grau relativo da parte linear seja uniforme $n^* \geq 2$.

Seguindo essa abordagem, o UV-MRAC para sistemas de grau relativo uniforme maior do que um proposto neste capítulo conjuga:

1. a abordagem para sistemas lineares de grau relativo uniforme arbitrário apresentada no Capítulo 6 com
2. a forma de tratar o termo não-linear descasado como perturbação de entrada proposta no Capítulo 7 e em (Hsu, Costa & Cunha 2002a, Hsu et al. 2003) estendida para sistemas em que a parte linear possui grau relativo uniforme arbitrário.

O tratamento do termo não-linear descasado foi inspirado no trabalho de (Min & Hsu 2000) e (Min 2001, Capítulo 5). Originalmente, o termo não-linear poderia ser dependente apenas da saída da planta (i.e., $\phi(y, t)$ em (1.32)), que é um sinal medido. No Capítulo 7 desta Tese, permite-se que o termo não-linear seja dependente de todas as variáveis de estado (i.e., $\phi(x_p, t)$ em (1.32)) ainda que nem todas sejam medidas, desde que o termo $\phi(x_p, t)$ satisfaça as hipóteses (A6) e (A7).

Na Seção 7.2, o sinal $W_\phi(s) * \phi$ é introduzido para permitir que a perturbação descasada ϕ seja tratada como perturbação de entrada. No caso de sistemas de grau relativo

uniforme e unitário pode-se garantir que a matriz de transferência da perturbação $W_\phi(s)$ (7.7) seja própria. No entanto, uma dificuldade que surge no caso de sistemas de grau relativo uniforme arbitrário, é que a matriz de transferência da perturbação $W_\phi(s)$ pode ser imprópria.

Para que o termo não-linear possa ser tratado como perturbação de entrada, neste capítulo se impõe que a norma da perturbação de entrada equivalente ($W_\phi(s) * \phi$ em (7.8)–(7.9)) possa ser majorada por funções dependentes de sinais mensuráveis (e.g., a saída y) e majorantes gerados por FOAFs, ou seja,

$$\|W_\phi(s) * \phi\| \leq c_1 \|x_p\| + c_2 \bar{\varphi}(y, t) + \frac{c_3}{s + \gamma_\phi} * [k_x \|x_p\| + \varphi(y, t)] , \quad (8.1)$$

onde $c_1, c_2, c_3 \geq 0$ são constantes adequadas e γ_ϕ obedece $\bar{\gamma}_\phi > \gamma_\phi > 0$, sendo $\bar{\gamma}_\phi$ a margem de estabilidade de $W_\phi(s)$. A função $\varphi(y, t) \geq 0$ e a constante $k_x \geq 0$ estão definidas na hipótese (A7). A função $\bar{\varphi}: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ representa majorantes de sinais a serem definidos oportunamente.

8.1 Estimação do Majorante da Perturbação em Plantas Não-Lineares

Nesta seção são desenvolvidos majorantes para a norma da perturbação equivalente de entrada ($\|W_\phi(s) * \phi\|$). Tendo isto em mente, deve-se lembrar que a norma da perturbação ($\|\phi(x_p, t)\|$) pode ser majorada utilizando-se (7.17)–(7.19), que são expressões válidas para sistemas com grau relativo uniforme arbitrário. Por outro lado, a matriz de transferência $W_\phi(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}(s)$, definida em (7.7), pode ser decomposta como

$$W_\phi(s) = W_N s^N + \dots + W_1 s + W_0 + \bar{W}_\phi(s) , \quad (8.2)$$

onde $W_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($i = 0, 1, \dots, N$), $\bar{W}_\phi(s) \in \mathbb{R}^{m \times n}(s)$ é estritamente própria e BIBO estável, $N := n^* - 1$ e n^* é o grau relativo uniforme da parte linear do sistema, conforme a hipótese (A4).

Para sistemas de grau relativo uniforme e unitário, $W_\phi(s)$ é própria e, conseqüentemente, apenas a matriz W_0 e a matriz racional $\bar{W}_\phi(s)$ podem ser não nulas. Assim,

a função de modulação do controle vetorial unitário aplica diretamente o majorante (7.16) baseado num FOAF.

Para sistemas de grau relativo uniforme $n^* \geq 2$, podem ser necessários majorantes para as derivadas totais de $\phi(x_p, t)$ em relação ao tempo. Para esses sistemas é difícil obter regras gerais. Para ilustrar os conceitos propostos, a seguir são desenvolvidas expressões para sistemas com grau relativo uniforme $n^* = 2$. No entanto, o desenvolvimento poderia ser estendido a alguns sistemas não-lineares com grau relativo uniforme $n^* > 2$.

8.2 Majorante da Perturbação em Plantas Não-Lineares de Grau Relativo Uniforme Dois

Se o grau relativo da planta for uniforme e $n^* = 2$, então $N = 1$ e a matriz de transferência da perturbação (7.7) resultante é

$$W_\phi(s) = K_p^{-1} [s^2 I + s(\alpha_1 I - A_M) - \alpha_1 A_M] C_o (sI - A_c)^{-1} B_\phi, \quad (8.3)$$

onde $A_M = -\text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ e os escalares $\alpha_1, \gamma_j > 0$ são definidos para o modelo de referência $W_M(s)$ em (1.35)–(1.37). A matriz $W_\phi(s)$ pode ser decomposta segundo (8.2) com

$$\bar{W}_\phi(s) = K_p^{-1} [C_o A_c^2 + (\alpha_1 I - A_M) C_o A_c - \alpha_1 A_M C_o] (sI - A_c)^{-1} B_\phi, \quad (8.4)$$

$$W_o = K_p^{-1} [C_o A_c B_\phi + (\alpha_1 I - A_M) C_p], \quad (8.5)$$

$$W_1 = K_p^{-1} C_p, \quad (8.6)$$

onde se utilizou o fato de que $C_p = C_o B_\phi$. De (8.6) conclui-se que $W_1 \neq 0$ e, conseqüentemente, o termo $d(W_1 \phi)/dt$ pode não ser identicamente nulo. Seguindo-se (Min & Hsu 2000, Seção 2) tem-se

$$\frac{d[W_1 \phi(x_p, t)]}{dt} = \frac{\partial W_1 \phi}{\partial x_p} \dot{x}_p + \frac{\partial W_1 \phi}{\partial t}, \quad (8.7)$$

com \dot{x}_p obtido diretamente da equação de estado da planta (1.32), o que permite concluir que

$$\frac{d[W_1\phi(x_p, t)]}{dt} = K_p^{-1} \left[\frac{\partial C_p\phi}{\partial x_p} (A_p x_p + \phi + B_p u) + \frac{\partial C_p\phi}{\partial t} \right]. \quad (8.8)$$

Para que a norma deste sinal possa ser convenientemente majorada, impõe-se a seguinte hipótese adicional sobre a planta:

(A10.a) A função $C_p\phi(x_p, t)$ e as suas derivadas parciais de primeira ordem devem satisfazer:

1. A função $C_p\phi(x_p, t)$ deve ser contínua em relação aos seus argumentos e as suas derivadas parciais de primeira ordem devem existir, $\forall x_p, t$.
2. A norma da derivada parcial $\partial C_p\phi/\partial x_p$ deve ser uniformemente limitada por $\left\| \frac{\partial C_p\phi}{\partial x_p} \right\| \leq k_{\phi x}, \forall x_p, t$, onde $k_{\phi x} \geq 0$ é um escalar conhecido.
3. A derivada parcial $\partial C_p\phi/\partial x_p$ deve satisfazer $\frac{\partial C_p\phi}{\partial x_p} B_p \equiv 0$.
4. A norma da derivada parcial $\partial C_p\phi/\partial t$ deve ser limitada por $\left\| \frac{\partial C_p\phi}{\partial t} \right\| \leq k_{\phi t} \|x_p\| + \varphi_{\phi t}(y, t), \forall x_p, t$, onde $k_{\phi t} \geq 0$ é um escalar conhecido e $\varphi_{\phi t} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função conhecida, contínua por partes em relação a t e contínua em relação a y .

As hipóteses (A.10.a.2) e (A.10.a.4) estabelecem a necessidade de se conhecer majorantes para as derivadas parciais da função $C_p\phi(x_p, t)$.

A hipótese (A.10.a.3) é necessária para que o majorante independa do sinal de controle u , uma vez que este é chaveado e o controle equivalente não é disponível para gerar a função de modulação. Para interpretar a hipótese (A.10.a.3), lembra-se que a matriz HFG de sistemas lineares de grau relativo uniforme $n^* = 2$ é dada pelo parâmetro de Markov $K_p = C_p A_p B_p$, c.f. (1.23). Se o termo de perturbação ϕ fosse linear e invariante no tempo, i.e., $\phi(x_p) = A_\phi x_p$, então $\frac{\partial C_p\phi}{\partial x_p} B_p = C_p A_\phi B_p$, ou seja, a perturbação modificaria a matriz HFG do sistema. Assim, a hipótese (A.10.a.3) impõe que as incertezas sobre a matriz HFG estejam concentradas na parte linear da planta.

Uma vez que as hipóteses (A.6), (A.7) e (A.10.a) sobre a perturbação ϕ sejam satisfeitas, a norma da perturbação equivalente de entrada pode ser majorada pelo

sinal

$$\hat{d}(t) = c_1 \hat{X}_p + c_2 \varphi_{\phi t}(y, t) + \left[c_3 + \frac{c_4}{s + \gamma_\phi} \right] \hat{\phi} \quad (\geq \|W_\phi(s) * \phi\|), \quad (8.9)$$

excluindo-se termos exponencialmente decrescentes que resultam do transitório de filtros assintoticamente estáveis. Neste majorante são utilizados os seguintes majorantes auxiliares desenvolvidos na Seção 7.3:

$$\hat{\phi}(t) = k_x \hat{X}_p + \varphi(y, t) \quad (\geq \|\phi(x_p, t)\|), \quad (8.10)$$

$$\hat{X}_p(t) = \sqrt{\max \left\{ \hat{X}^2 - \|\omega_1\|^2 - \|\omega_2\|^2, 0 \right\}} \quad (\geq \|x_p(t)\|), \quad (8.11)$$

$$\hat{X}(t) = c_6 \tau \|U_{av}\| + \frac{1}{s + \gamma_x} [c_7 \varphi + (c_8 + \tau c_9) \|U_{av}\| + c_{10} \|\omega\| + c_{11} \|r\|] \quad (\geq \|X(t)\|), \quad (8.12)$$

com o controle médio U_{av} gerado pelo filtro passa-baixas

$$U_{av} = \frac{I}{\tau s + 1} U_{Neq} = \frac{I}{\tau s + 1} U_N, \quad (8.13)$$

onde U_N é o sinal gerado pelo último relé do filtro de avanço de fase baseado no controle vetorial unitário (vide Figura 6.2) e $\tau > 0$ é uma constante de tempo arbitrária.

A matriz de transferência da planta $G(s)$ é incerta e pertence a uma dada classe \mathcal{P} que é um subconjunto de $\mathbb{R}^{m \times m}(s)$. Cada elemento de \mathcal{P} satisfaz as hipóteses (A1)–(A5) para $n^* = 2$, S_p e ν fixos. A implementação deste majorante para a perturbação equivalente \hat{d} requer a seguinte hipótese adicional:

(A9.d) São conhecidos valores para as constantes $c_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, 4, 6, \dots, 11$) e $\gamma_\phi, \gamma_x > 0$ de forma que a desigualdade em (8.9) seja satisfeita (excluindo-se termos exponencialmente decrescentes) $\forall G(s) \in \mathcal{P}$ com algum par (θ^*, θ_4^*) correspondente a cada elemento de \mathcal{P} que satisfaça a equação diofantina (4.11).

As constantes c_i , γ_ϕ e γ_x podem ser computadas de forma análoga ao procedimento desenvolvido na Seção 7.4 para sistemas não-lineares de grau relativo uniforme e unitário.

8.3 Funções de Modulação

Para que o UV-MRAC desenvolvido para sistemas lineares no Capítulo 6 possa ser estendido a sistemas não-lineares, é necessário que as funções de modulação utilizadas no controle vetorial unitário sejam adequadas. No caso de plantas lineares as funções de modulação devem satisfazer as desigualdades (6.17)—(6.19), que para plantas não-lineares são reescritas como

$$\rho_0 \geq (1 + c_{d0}) \|L^{-1} * \bar{U}_{nl}\| + c_{\varepsilon 0} \|\varepsilon_0\| + \pi_{\rho 0}(t), \quad (8.14)$$

$$\rho_i \geq (1 + c_{di}) \|(F_{1,i}^{-1} L_{i+1,N}^{-1}) * \bar{U}_{nl}\| + \pi_{\rho i}(t), \quad (i = 1, \dots, N - 1), \quad (8.15)$$

$$\rho_N \geq (1 + c_{dN}) \|F_{1,N}^{-1} * U_{dnl}\| + \pi_{\rho N}(t), \quad (8.16)$$

$\forall t \geq 0$, com constantes adequadas $c_{\varepsilon 0} \geq 0$ e $c_{di} \geq 0$ ($i = 0, \dots, N$) e os sinais

$$\bar{U}_{nl} := (K^{\text{nom}})^{-1} K_p \left[(\theta^* - \theta^{\text{nom}})^T \omega - W_\phi(s) * \phi \right] - [I - (K^{\text{nom}})^{-1} K] U_N, \quad (8.17)$$

$$U_{dnl} := S_p^{-1} \left[(\theta^* - \theta^{\text{nom}})^T \omega - W_\phi(s) * \phi \right], \quad (8.18)$$

onde se destacam as perturbações não-lineares $W_\phi(s) * \phi$. Assim, percebe-se como os majorantes para a norma $\|W_\phi(s) * \phi\|$ podem ser utilizados na síntese das funções de modulação, que pode seguir as orientações apresentadas na Seção 6.5.1 para o caso de plantas lineares.

Os sinais escalares LI e exponencialmente decrescentes $\pi_{\rho i}(t)$ (onde $i = 0, \dots, N$ e $|\pi_{\rho i}(t)| \leq R \exp(-\lambda t)$, $\forall t \geq 0$, com constantes reais $R \geq 0$ e $\lambda > 0$ adequadas) foram introduzidos nas desigualdades (8.14)—(8.16) para representar o transitório de filtros usados na geração das funções de modulação a fim de possibilitar a análise do sistema de controle completo. Naturalmente, estes sinais são desnecessários na síntese das funções de modulação.

8.4 Sobre as Propriedades de Estabilidade

Presume-se que as propriedades de estabilidade do UV-MRAC para sistemas MIMO não-lineares de grau relativo uniforme e arbitrário sejam análogas às propriedades do VS-MRAC para sistemas SISO não-lineares de grau relativo arbitrário estabelecidas em (Min 2001, Teorema 4, pp. 66–67), dadas as semelhanças estruturais entre ambos os controladores.

Devido à possibilidade de escape em tempo finito introduzida pela não-linearidade $\phi(x_p, t)$, se obtém apenas a *estabilidade semi-global exponencial* (Khalil 1996, p. 483) do sistema em malha fechada com relação a um conjunto residual de ordem τ (Min 2001), ou seja:

Considere-se o estado z do sistema composto pelas equações dos erros e pelos termos transitórios dos estados dos filtros. Defina-se o conjunto compacto $B_z = \{z : \|z\| \leq k_{z0}\}$ limitado pela constante $k_{z0} > 0$ arbitrária. Se todas as hipóteses assumidas forem satisfeitas, então $\exists \tau^, k_z, \lambda_z > 0$ tais que*

$$\|z(t)\| \leq k_z \exp(-\lambda_z t) \|z(0)\| + O(\tau), \quad (8.19)$$

$\forall \tau \in (0, \tau^]$, $\forall z(0) \in B_z$, $\forall t \geq 0$. A constante k_{z0} pode ser arbitrariamente grande se τ^* for suficientemente pequeno.*

Um fato importante é que o valor da constante k_z em (8.19) independe do valor de τ , o que significa que o sistema é livre do fenômeno *peaking* (vide Seções 6.7 e 9.6.2).

Para o caso SISO, (Min 2001, Corolário 1, p. 52) estabelece que a estabilidade exponencial será global se a perturbação não-linear for *globalmente Lipschitz*, o que é mais restritivo do que a hipótese (A6).

Deve-se enfatizar que as propriedades de estabilidade do UV-MRAC para sistemas multivariáveis não-lineares não foram desenvolvidas de forma rigorosa nesta Tese. Portanto, este poderá ser um tema para trabalhos futuros.

Capítulo 9

Controle por Modo Deslizante Baseado em Observador

Este capítulo aborda o controle por modelo de referência e modo deslizante baseado em observador de estado para a geração da superfície de deslizamento. Utiliza-se um observador de alto ganho (*high gain observer* — HGO) pois este é insensível a incertezas paramétricas e perturbações na planta (Oh & Khalil 1997). Um problema é que o transitório do HGO pode apresentar o fenômeno *peaking* (Sussmann & Kokotović 1991) que prejudica o desempenho do sistema de controle. Após a formulação do problema e algumas notas preliminares, propõe-se nas Seções 9.5 a 9.7 uma estratégia que evita a ocorrência de *peaking* no sinal de controle e nos sinais da planta, apesar de não se eliminar o *peaking* no HGO. Em seguida, na Seção 9.8, o *peaking* é eliminado do HGO através do escalonamento adequado de cada variável de estado estimada.

Para simplificar o desenvolvimento desta estratégia, trata-se apenas o caso de sistemas SISO. A extensão para sistemas multivariáveis poderá ser desenvolvida futuramente utilizando-se o controle vetorial unitário, que parece mais natural para sistemas MIMO do que o controle baseado na função sinal adotado neste capítulo.

9.1 Formulação do Problema

9.1.1 Planta

Considera-se um sistema SISO linear, invariante no tempo, observável, controlável e descrito pela equação de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p [u + d(t)], \\ y &= C_p x_p,\end{aligned}\tag{9.1}$$

onde $x_p \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}$ é o sinal de entrada, $y \in \mathbb{R}$ é o sinal de saída e $d \in \mathbb{R}$ é uma perturbação não mensurável. O modelo entrada/saída correspondente é dado por

$$y = G(s)[u + d(t)],\tag{9.2}$$

onde

$$G(s) = C_p (sI - A_p)^{-1} B_p = K_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)},\tag{9.3}$$

é a função de transferência do sistema (9.1), $K_p \in \mathbb{R}$ é o ganho de alta frequência, $N_p(s)$ e $D_p(s)$ são polinômios mônicos. Assume-se que os valores dos parâmetros da planta são incertos, mas pertencem a intervalos finitos conhecidos.

9.1.2 Hipóteses sobre a planta

São assumidas as seguintes hipóteses sobre a planta:

- (A1.o) $G(s)$ é de fase mínima.
- (A2.o) $G(s)$ é estritamente própria.
- (A3.o) A ordem do sistema (n) é conhecida.
- (A4.o) O grau relativo n^* de $G(s)$ é conhecido.
- (A5.o) O sinal do ganho de alta frequência K_p é conhecido.

(A6.o) A perturbação $d(t)$ é contínua por partes e se conhece um majorante $\bar{d}(t)$ tal que $|d(t)| \leq \bar{d}(t) \leq \bar{d}_{sup} < +\infty, \forall t \geq 0$.

Estas hipóteses correspondem àquelas assumidas no Capítulo 6 para o controle por modelo de referência de sistemas lineares multivariáveis de grau relativo uniforme arbitrário.

A hipótese (A3.o) é análoga à hipótese (A3) em que se assume o conhecimento do índice de observabilidade ν de sistemas multivariáveis (vide Seção 1.6.2) e serve para estabelecer a ordem dos filtros de estado (9.12). A hipótese (A3.o) poderia ser relaxada de forma a se requerer apenas um majorante para n , como é feito em (Ioannou & Sun 1996, Seção 6.3.1). No entanto, isto acarretaria no aumento da ordem dos filtros de estado utilizados na estrutura do controle por modelo de referência e no aumento do número de parâmetros do controlador.

Doravante, assume-se que $K_p > 0$ para simplificar a notação no desenvolvimento do controlador. Se $K_p < 0$, então o sinal de controle deve ser invertido. Assim, a hipótese (A5.o) é satisfeita.

A hipótese (A4.o) poderia ser relaxada, no entanto, a lei de controle resultante seria mais complexa (Ioannou & Sun 1996, Seção 6.7).

9.1.3 Modelo de referência

O modelo de referência é definido por (Ioannou & Sun 1996, Seção 6.3.1)

$$y_M = W_M(s) r, \quad r, y_M \in \mathbb{R}, \quad (9.4)$$

onde

$$W_M(s) = K_M \frac{N_M(s)}{D_M(s)} = K_M \frac{s^{p_m - n^*} + b_{p_m - n^* - 1} s^{p_m - n^* - 1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^{p_m} + a_{p_m - 1} s^{p_m - 1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (9.5)$$

onde $K_M > 0$ é o ganho de alta frequência especificado para o modelo de referência. O modelo de referência deve ser estável e de fase mínima. Os graus dos polinômios Hurwitz e mônicos $N_M(s)$ e $D_M(s)$ são $p_m - n^*$ e p_m , respectivamente. A ordem do modelo p_m deve respeitar $p_m \leq n$.

Assume-se que o sinal de referência $r(t)$ seja contínuo por partes e uniformemente limitado.

Para plantas com grau relativo unitário, a função de transferência do modelo de referência ($W_M(s)$) deve ser estritamente real positiva (SPR — *strictly positive real*), pois neste caso o desenvolvimento do controle segue a abordagem de (Hsu & Costa 1989), que é revista na Seção 9.4.

Para plantas com grau relativo $n^* > 1$, em (Hsu et al. 1994, Hsu et al. 1997) escolhe-se um polinômio mônico e Hurwitz $L(s)$ de grau $N := n^* - 1$ de forma que a função de transferência $W_M(s)L(s)$ seja SPR. Aqui a escolha do modelo de referência é mais restritiva pois se requer que $W_M(s)L(s) = K_M/(s + \gamma)$, em virtude da estrutura do HGO (vide Observação 9.2 na Seção 9.6.1) e da forma como se emprega o Lema C.2 na prova de estabilidade do sistema de controle em malha fechada. Assim, para plantas com $n^* > 1$, a função de transferência do modelo de referência é

$$W_M(s) = \frac{K_M}{L(s)(s + \gamma)} = \frac{K_M}{s^{p_m} + a_{p_m-1}s^{p_m-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (9.6)$$

onde $K_M, \gamma > 0$, $p_m = n^*$ e $L(s)$ é um polinômio mônico e Hurwitz de grau $N := n^* - 1$. Deve-se notar que aqui as raízes de $L(s)$ não precisam ser reais. Neste aspecto há mais liberdade no projeto do que no VS-MRAC desenvolvido por (Hsu et al. 1994, Hsu et al. 1997), que requer que $L(s)$ tenha apenas raízes reais, uma vez que o operador $L(s)$ é realizado *loc. cit.* por uma conexão em cascata de N filtros de avanço de fase baseados em estrutura variável com zeros simples e reais, similares àqueles filtros apresentados na Figura 6.2 para sistemas multivariáveis.

9.1.4 Objetivo de controle

O objetivo é projetar uma lei de controle u de forma que a saída da planta y rastreie assintoticamente a saída y_M do modelo de referência, admitindo-se um pequeno erro residual. Mais precisamente, o objetivo de controle é obter a convergência assintótica do erro de saída

$$e(t) := y(t) - y_M(t) \quad (9.7)$$

para zero ou para uma pequena vizinhança residual de zero.

9.2 Parametrização do Controle

A parametrização do controle por modelo de referência de sistemas SISO é análoga àquela descrita no Capítulo 4 para sistemas MIMO. Para sistemas SISO, o controle que casa a planta com o modelo de referência é dado por

$$u^* = \theta^{*T} \omega - W_d(s) * d(t), \quad (9.8)$$

$$W_d(s) = 1 - \theta_1^{*T} \frac{A(s)}{\Lambda(s)}, \quad (9.9)$$

onde o vetor de parâmetros é dado por

$$\theta^{*T} = [\theta_1^{*T} \ \theta_2^{*T} \ \theta_3^* \ \theta_4^*], \quad (9.10)$$

com $\theta_1^*, \theta_2^* \in \mathbb{R}^{(n-1)}$, $\theta_3^*, \theta_4^* \in \mathbb{R}$ e o vetor regressor é

$$\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y \ r]^T. \quad (9.11)$$

Aqui os filtros de estado são dados por

$$\omega_1 = \frac{A(s)}{\Lambda(s)} u, \quad \omega_2 = \frac{A(s)}{\Lambda(s)} y, \quad (9.12)$$

$$A(s) = [s^{n-2} \ s^{n-3} \ \dots \ s \ 1]^T, \quad (9.13)$$

onde $\Lambda(s)$ é um polinômio arbitrário, mônico e Hurwitz de grau $n - 1$ que contém $N_M(s)$ como fator, i.e.,

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s) N_M(s), \quad (9.14)$$

o que implica que $\Lambda_0(s)$ seja mônico, Hurwitz e de grau $n_0 = n - 1 - p_m + n^*$, conforme (Ioannou & Sun 1996, Seção 6.3.2). Uma realização para os filtros de estado pode utilizar as matrizes Φ e Γ de forma similar aos filtros de estado para sistemas

MIMO (4.13).

As condições de casamento requerem que $\theta_4^* = K_p^{-1}K_M$ (Ioannou & Sun 1996, eq. (6.3.12)).

9.3 Equações do Erro

A equação do erro é uma particularização do que já foi desenvolvido na Seção 4.2 para sistemas MIMO, isto é

$$\dot{X}_e = A_c X_e + B_c (\theta_4^*)^{-1} [u - \theta^{*T} \omega + W_d(s) * d(t)] , \quad (9.15)$$

$$e = C_o X_e , \quad (9.16)$$

onde $X_e := X - X_M \in \mathbb{R}^{3n-2}$ é o estado da equação do erro. Deve-se notar que aqui $(\theta_4^*)^{-1} = K_M^{-1}K_p$, enquanto que para sistemas MIMO tem-se $(\theta_4^{*T})^{-1} = K_p$ em virtude de se ter escolhido o modelo de referência (1.35) cuja matriz de ganho de alta frequência é a identidade. Como $\{A_c, B_c, C_o\}$ é uma realização não-mínima de $W_M(s)$, o erro de saída pode ser escrito a partir de (9.15)–(9.16) como

$$e = W_M(s) \frac{K_p}{K_M} [u - \theta^{*T} \omega + W_d(s) * d(t)] . \quad (9.17)$$

A partir desta parametrização do controle, assume-se que a lei de controle pertença à classe definida na hipótese (A8.a) para se evitar *escape em tempo finito* dos sinais do sistema, conforme discutido no Capítulo 5.

9.4 Controle de Sistemas de Grau Relativo Unitário

Para $n^* = 1$, tem-se $N = n^* - 1 = 0$, $L(s) = 1$ e o modelo de referência $W_M(s)$ deve ser escolhido SPR. Assim, a partir da equação do erro (9.17) e de acordo com o Lema C.1, a lei de controle a estrutura variável por modelo de referência (VS-MRAC) originalmente

proposta em (Hsu & Costa 1989) é dada por

$$u = u^{\text{nom}} + U, \quad (9.18)$$

$$U = -\rho \operatorname{sgn}(e), \quad (9.19)$$

$$u^{\text{nom}} = \theta^{\text{nom}T} \omega, \quad (9.20)$$

onde θ^{nom} é o valor nominal de θ^* . O controle nominal u^{nom} permite a redução da amplitude da função de modulação ρ se a incerteza $\|\theta^* - \theta^{\text{nom}}\|$ for pequena.

A partir do Lema C.1, obtém-se estabilidade exponencial se a função de modulação $\rho \in \mathbb{R}^+$ satisfizer a desigualdade

$$\rho \geq \delta + \left\| (\theta^{\text{nom}} - \theta^*)^T \omega + W_d(s) * d(t) \right\|, \quad (9.21)$$

onde $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária. Uma função de modulação que satisfaz a desigualdade (9.21) e a hipótese (A8.a) é

$$\rho = \delta + c_1 \|\omega\| + \hat{d}(t), \quad (9.22)$$

com

$$\hat{d}(t) = \bar{d}(t) + \frac{c_2}{s + \gamma_d} * \bar{d}(t) \quad (\geq \|(1 - \theta_1^{*T} A(s) \Lambda^{-1}(s)) * d(t)\|), \quad (9.23)$$

onde $c_1 \geq \|\theta^* - \theta^{\text{nom}}\|$. O majorante (9.23) é obtido pela aplicação do Lema 3.1, de onde se tem que $c_2 \geq 0$ é uma constante apropriada e γ_d satisfaz $\gamma_0 > \gamma_d > 0$, sendo γ_0 a margem de estabilidade do filtro com matriz de transferência $A(s) \Lambda^{-1}(s)$.

O seguinte resultado de estabilidade foi provado originalmente em (Hsu & Costa 1989).

Teorema 9.1 *Para $n^* = 1$, considere-se o sistema formado pela equação do erro (9.15)–(9.16) e pela lei de controle (9.18)–(9.20). Se as hipóteses (A1.o)–(A6.o) forem satisfeitas e a função de modulação satisfizer a hipótese (A8.a) e a desigualdade (9.21), então a estratégia VS-MRAC é globalmente exponencialmente estável, i.e., $\exists k, \lambda > 0$ tais que $\|X_e(t)\| \leq k \exp(-\lambda t) \|X_e(0)\|$, $\forall t \geq 0$. Além disso, se $\delta > 0$, então o erro de*

saída $e(t)$ se tornará nulo após algum tempo finito.

Prova: A prova é uma aplicação direta do Lema C.1 ao sistema composto pela realização não-mínima da equação (9.17), dada pela equação do erro (9.15)–(9.16), e pela lei de controle (9.18)–(9.20). ■

Observação 9.1 *Fica evidente que o uso de observadores é desnecessário para o controle de sistemas de fase mínima e grau relativo unitário em que se emprega estrutura variável e realimentação de saída. No entanto, o livro (Edwards & Spurgeon 1998) emprega observadores por modo deslizante no controle de sistemas com grau relativo unitário com a finalidade de gerar a função de modulação, sem nenhuma vantagem aparente em relação à abordagem desta Tese. Nesta seção e no Capítulo 5, evita-se o uso de observadores através da aplicação de filtros de estado e de FOAFs para a geração das funções de modulação. Esta abordagem parece mais simples e natural para sistemas incertos do que o uso de observadores, pois não requer o conhecimento da estrutura do sistema.*

9.5 Controle de Sistemas de Grau Relativo Superior a Um

Para plantas com grau relativo $n^* > 1$, o controle à estrutura variável baseado em realimentação de saída não pode ser aplicado diretamente, uma vez que o modelo de referência não é SPR. A abordagem de (Hsu et al. 1994, Hsu et al. 1997) é baseada no erro de predição e em filtros de avanço de fase por estrutura variável (vide Capítulo 6).

Aqui se propõe uma estratégia de controle alternativa baseada num observador de alto ganho (*high gain observer* — HGO). Uma idéia natural seria estimar o estado da planta como no controlador para estabilização robusta em (Oh & Khalil 1995). No entanto, aqui se utiliza o modelo de referência (sem incerteza) em vez do modelo da planta (incerto) para reconstruir o estado da equação do erro, adotando-se o argumento de (Chang & Lee 1996) de que é mais fácil construir um observador para o modelo de referência do que para a planta. Uma abordagem similar a esta é proposta por (Oh & Khalil 1997) para o rastreamento de trajetórias em sistemas não-lineares. No entanto,

tanto (Oh & Khalil 1995) quanto (Oh & Khalil 1997) utilizam uma lei VSC em que a função de modulação é globalmente limitada a fim de se eliminar o fenômeno *peaking*, mas pagando-se o preço de que as propriedades de estabilidade são *semi-globais*.

Aqui, se utiliza um observador para gerar a lei de chaveamento e, ao mesmo tempo, utiliza-se uma função de modulação gerada por filtros de estado e FOAFs para se obter a estabilidade global sem que o fenômeno *peaking* se manifeste na planta e no sinal de comando, apesar de que o *peaking* pode ocorrer no observador de alto ganho.

Considera-se a realização de ordem mínima na forma canônica do observador para o modelo de referência $W_M(s)$ dada pelas matrizes

$$A_M = \begin{bmatrix} -a_{p_m-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{p_m-2} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{p_m-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} K_M, \quad C_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.24)$$

Então, as equações do erro (9.15)–(9.16) podem ser reescritas como

$$\dot{x}_e = A_M x_e + B_M \frac{K_p}{K_M} [u - \theta^{*T} \omega + W_d(s) * d(t) + \pi_e(t)], \quad (9.25)$$

$$e = C_M x_e, \quad (9.26)$$

onde a condição inicial $x_e(0)$ e o sinal escalar exponencialmente decrescente $\pi_e(t)$ são adequados para representar os efeitos das condições iniciais dos modos observáveis mas não-controláveis na equação do erro (9.15)–(9.16). O sinal $\pi_e(t)$ satisfaz

$$|\pi_e(t)| \leq k_e \exp(-\lambda_e t) \|X_e(0)\|, \quad \forall t \geq 0, \quad (9.27)$$

com alguma constante apropriada $k_e \geq 0$ e $\bar{\lambda}_e > \lambda_e > 0$, onde $\bar{\lambda}_e$ é a margem de estabilidade da matriz A_c . A Observação 9.4 na Seção 9.6.1 justifica a inclusão do sinal $\pi_e(t)$ na equação dinâmica em vez de se acrescentar um sinal exponencialmente decrescente na equação de saída para representar os efeitos das condições iniciais dos modos observáveis mas não-controláveis, como poderia parecer mais natural.

É possível projetar uma matriz $S \in \mathbb{R}^{1 \times p_m}$ que define a superfície de chaveamento ideal $\sigma(x_e) = 0$, onde $\sigma(x_e) := Sx_e$, para que $\{A_M, B_M, S\}$ seja uma realização da função de transferência SPR $W_M(s)L(s)$. Para o caso em que se escolhe $N_M(s) = 1$, o que implica que a ordem do modelo de referência é dada por $p_m = n^*$ e $B_M = [0, \dots, 0, K_M]^T$, tem-se (Kailath 1980, pp. 39–45)

$$S^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p_m-1} \\ \vdots & \ddots & 1 & a_{p_m-1} & a_{p_m-2} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & a_{p_m-1} & a_{p_m-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ l_{N-1} \\ \vdots \\ l_1 \\ l_0 \end{bmatrix}, \quad (9.28)$$

onde l_i são os coeficientes do polinômio $L(s) = s^N + l_{N-1}s^{N-1} + \cdots + l_1s + l_0$ e $N = n^* - 1$.

Assumindo-se que uma estimativa \hat{x}_e de x_e esteja disponível, então uma lei de controle é

$$u = u^{\text{nom}} + U, \quad U = -\rho \operatorname{sgn}(S\hat{x}_e), \quad (9.29)$$

onde o controle nominal u^{nom} é dado por (9.20). Se $\hat{x}_e(t) \equiv x_e(t)$ e a função de modulação ρ satisfizer (9.21), então o estado x_e e o erro de saída e convergem exponencialmente para zero, como se pode concluir através da aplicação do Lema C.1.

9.6 Observador de Alto Ganho

Uma vez que o estado x_e não é disponível, este será substituído na lei de controle pelo estado estimado \hat{x}_e obtido pelo observador de alto ganho

$$\dot{\hat{x}}_e = A_M \hat{x}_e + B_M \frac{K_p^{\text{nom}}}{K_M} U - [\alpha(\varepsilon^{-1}) - a_M] \tilde{e}, \quad (9.30)$$

$$\tilde{e} = C_M \hat{x}_e - e, \quad (9.31)$$

onde \tilde{e} é o erro de saída do observador, K_p^{nom} é o valor nominal do ganho de alta frequência da planta K_p e o vetor

$$a_M = \begin{bmatrix} a_{p_m-1} \\ a_{p_m-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}. \quad (9.32)$$

Os coeficientes α_i no vetor de realimentação do observador (Lu & Spurgeon 1998)

$$\alpha(\varepsilon^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{p_m-1}}{\varepsilon} \\ \frac{\alpha_{p_m-2}}{\varepsilon^2} \\ \vdots \\ \frac{\alpha_1}{\varepsilon^{p_m-1}} \\ \frac{\alpha_0}{\varepsilon^{p_m}} \end{bmatrix} \quad (9.33)$$

devem ser escolhidos de forma que o polinômio característico do observador em malha fechada seja Hurwitz, o que se obtém se o polinômio

$$N_\alpha(s) = s^{p_m} + \alpha_{p_m-1}s^{p_m-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 \quad (9.34)$$

for Hurwitz e $\varepsilon > 0$.

O parâmetro ε deve ser ajustado para que as incertezas e perturbações no sistema afetem pouco o estado estimado \hat{x}_e . Para isso, a norma do ganho da realimentação do observador ($\|\alpha(\varepsilon^{-1})\|$) deve ser alta, o que requer que ε seja pequeno.

9.6.1 Majorante do erro de estimação

O Teorema 9.2 apresentado a seguir estabelece um majorante para a norma do erro de estimação do estado $\tilde{x}_e(t) := \hat{x}_e(t) - x_e(t)$ e para o módulo do erro de saída $\tilde{e}(t)$ do observador de alto ganho. Este Teorema será útil na prova de estabilidade do sistema de controle em malha fechada.

Para simplificar o desenvolvimento deste Teorema, assume-se que a margem de

estabilidade do polinômio $N_\alpha(s)$ ($\bar{\lambda}_\alpha$) e o escalar λ_α satisfaçam a desigualdade $0 < \lambda_e < \lambda_\alpha < \bar{\lambda}_\alpha$. Além disso, impõe-se que $0 < \varepsilon \leq 1$ para que a margem de estabilidade do observador não seja inferior à margem de estabilidade $\bar{\lambda}_\alpha$.

Para desenvolver o Teorema a seguir, define-se o sinal

$$\bar{U} := [1 - (K^{\text{nom}})^{-1}K]U + (K^{\text{nom}})^{-1}K \left[(\theta^* - \theta^{\text{nom}})^T \omega - W_d(s) * d(t) \right], \quad (9.35)$$

onde $K := K_M^{-1}K_p$, $K^{\text{nom}} := K_M^{-1}K_p^{\text{nom}}$ e o sinal de controle U é dado por (9.29).

Teorema 9.2 *Considere o observador (9.30)–(9.33) e a equação do erro (9.15)–(9.16). Se a hipótese (A8.a) for satisfeita, os sinais $r(t)$ e $d(t)$ forem uniformemente limitados, o polinômio $N_\alpha(s)$ for Hurwitz, $N_M(s) = 1$ e o parâmetro ε for mantido na faixa $0 < \varepsilon \leq 1$, então $\exists k_1, \dots, k_6 > 0$ tais que o erro de estimação do estado (\tilde{x}_e) e o erro de saída do observador (\tilde{e}) satisfazem as desigualdades*

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_e(t)\| &\leq \frac{k_1}{\varepsilon^{p_m-1}} \|\tilde{x}_e(0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon}t\right) + k_2\varepsilon \|X_e(0)\| \exp(-\lambda_e t) \\ &\quad + \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon}t\right) * [k_3\|\omega(t)\| + k_4], \end{aligned} \quad (9.36)$$

$$\|\tilde{x}_e(t)\| \leq \frac{k_1}{\varepsilon^{p_m-1}} \|\tilde{x}_e(0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon}t\right) + k_2\varepsilon \|X_e(0)\| \exp(-\lambda_e t) + \varepsilon C(t, 0), \quad (9.37)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{e}(t)| &\leq k_1 \|\tilde{x}_e(0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon}t\right) + k_2\varepsilon^{p_m} \|X_e(0)\| \exp(-\lambda_e t) \\ &\quad + \varepsilon^{p_m-1} \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon}t\right) * [k_3\|\omega(t)\| + k_4], \end{aligned} \quad (9.38)$$

$$|\tilde{e}(t)| \leq k_1 \|\tilde{x}_e(0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon}t\right) + k_2\varepsilon^{p_m} \|X_e(0)\| \exp(-\lambda_e t) + \varepsilon^{p_m} C(t, 0), \quad (9.39)$$

$\forall t \geq 0$, onde

$$C(t, t_0) = k_5 \|\omega_{t,t_0}\|_\infty + k_6. \quad (9.40)$$

Prova: Utilizando-se a definição do erro de estimação do estado reescreve-se a

equação do erro de saída do observador (9.31) como

$$\tilde{e} = C_M \tilde{x}_e. \quad (9.41)$$

Subtraindo-se (9.25) de (9.30) se obtém a equação da dinâmica do erro de estimação do estado

$$\dot{\tilde{x}}_e = A_M \tilde{x}_e + B_M [K^{nom} \bar{U} - K \pi_e(t)] - [\alpha(\varepsilon^{-1}) - a_M] \tilde{e}, \quad (9.42)$$

que pode ser reescrita substituindo-se o erro de saída do observador (9.41) na equação da dinâmica do erro de estimação (9.42), resultando em

$$\dot{\tilde{x}}_e = A_e(\varepsilon^{-1}) \tilde{x}_e + B_M [K^{nom} \bar{U} - K \pi_e(t)], \quad (9.43)$$

onde se utiliza a matriz

$$A_e(\varepsilon^{-1}) = A_M - [\alpha(\varepsilon^{-1}) - a_M] C_M = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_{p_m-1}}{\varepsilon} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha_{p_m-2}}{\varepsilon^2} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha_1}{\varepsilon^{p_m-1}} & 0 & 0 & & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\varepsilon^{p_m}} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.44)$$

Então, aplicando-se a transformação

$$\bar{x}_e = T(\varepsilon) \tilde{x}_e, \quad T(\varepsilon) = \text{diag} \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p_m-1}\}, \quad (9.45)$$

reescreve-se a equação do erro (9.43) na nova base como

$$\varepsilon \dot{\bar{x}}_e = \bar{A}_e \bar{x}_e + \varepsilon \bar{B}_M(\varepsilon) [K^{nom} \bar{U} - K \pi_e(t)], \quad (9.46)$$

com

$$\bar{A}_e = \begin{bmatrix} -\alpha_{p_m-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_{p_m-2} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\alpha_1 & 0 & 0 & & 1 \\ -\alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_M(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{p_m-2}\varepsilon \\ \vdots \\ b_1\varepsilon^{p_m-2} \\ b_0\varepsilon^{p_m-1} \end{bmatrix} K_M. \quad (9.47)$$

Como $N_M(s) = 1$, tem-se que $\bar{B}_M(\varepsilon) = [0, \dots, 0, \varepsilon^{p_m-1}]^T K_M$ e, conseqüentemente, $\|\bar{B}_M(\varepsilon)\| = \varepsilon^{p_m-1} K_M$. Assim sendo, a norma do estado \bar{x}_e pode ser majorada por

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_e(t)\| &\leq k_1 \|\bar{x}_e(0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon} t\right) + k_2 \varepsilon^{p_m} \|X_e(0)\| \exp(-\lambda_e t) \\ &\quad + k_7 \frac{\varepsilon^{p_m}}{\varepsilon s + \lambda_\alpha} * \|\bar{U}(t)\|, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Uma vez que a hipótese (A8.a) é satisfeita e os sinais $r(t)$ e $d(t)$ são uniformemente limitados, conclui-se a partir de (9.35) que $\exists k_{\bar{U}\omega}, k_{\bar{U}} \geq 0$ tais que $\|\bar{U}_{t,0}\|_\infty \leq k_{\bar{U}\omega} \|\omega_{t,0}\|_\infty + k_{\bar{U}}, \forall t \geq 0$. Por outro lado, a partir da definição da transformação (9.45), tem-se que $\|T(\varepsilon)\| = 1$ e $\|T^{-1}(\varepsilon)\| = \varepsilon^{1-p_m}$, uma vez que $\varepsilon \in (0, 1]$. Utilizando-se estes fatos, obtém-se a partir de (9.48) os majorantes (9.36) e (9.37) para a norma do erro de estimação do estado.

Os majorantes (9.38) e (9.39) para o módulo do erro de saída do observador são obtidos utilizando-se a desigualdade $|\tilde{e}| = |C_M T^{-1}(\varepsilon) \bar{x}_e| = |C_M \bar{x}_e| \leq \|\bar{x}_e\|$. ■

Observação 9.2 *O Teorema 9.2 impõe que o modelo de referência seja da forma*

$$W_M(s) = \frac{K_M}{s^{p_m} + a_{p_m-1} s^{p_m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad (9.49)$$

com ordem $p_m = n^*$, para que se possa garantir que o erro de estimação do estado residual seja da ordem do parâmetro ε . A análise do observador de alto ganho para que se admita o modelo de referência mais geral (9.5) parece ser bem mais complexa e, por isto, não foi desenvolvida nesta Tese.

Observação 9.3 *Para se verificar o comportamento do observador de alto ganho em condições nominais ($K = K^{\text{nom}}$ e $\theta^* = \theta^{\text{nom}}$) e sem perturbação de entrada ($d(t) \equiv 0$),*

lembra-se que neste caso tem-se $\bar{U}(t) \equiv 0$, o que se conclui a partir da definição (9.35). Assim, a partir da análise da equação da dinâmica do erro de estimação (9.43), conclui-se que o erro de estimação $\tilde{x}_e(t) \rightarrow 0$ exponencialmente, uma vez que o sinal $\pi_e(t) \rightarrow 0$ exponencialmente e a matriz $A_e(\varepsilon^{-1})$ é Hurwitz desde que $\varepsilon > 0$. Isto é de se esperar pois o HGO é um observador linear que apresenta este comportamento em condições nominais e sem perturbações não medidas.

Observação 9.4 Poderia parecer mais natural representar os efeitos das condições iniciais dos modos observáveis mas não-controláveis da equação do erro (9.15)–(9.16) através da inclusão de um sinal exponencialmente decrescente $\bar{\pi}_e(t)$ na equação de saída (9.26), que passaria a ser

$$e = C_M x_e + \bar{\pi}_e(t), \quad (9.50)$$

e permitiria a eliminação do sinal $\pi_e(t)$ da equação (9.25). No entanto, a inclusão do termo $\bar{\pi}_e(t)$ resultaria no majorante

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_e(t)\| \leq & \frac{k_1}{\varepsilon^{p_m-1}} \|\tilde{x}_e(0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon} t\right) + \frac{\bar{k}_2}{\varepsilon^{p_m-1}} \|X_e(0)\| \exp(-\lambda_e t) \\ & + \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon} t\right) * [k_3 \|\omega(t)\| + k_4], \end{aligned} \quad (9.51)$$

onde se nota que o termo $\frac{\bar{k}_2}{\varepsilon^{p_m-1}} \|X_e(0)\| \exp(-\lambda_e t)$ é muito mais conservador do que o termo $k_2 \varepsilon \|X_e(0)\| \exp(-\lambda_e t)$ presente no majorante (9.36), que é obtido utilizando-se a equação do erro (9.25)–(9.26). Naturalmente, deve-se considerar que o estado $x_e(t)$ da equação do erro (9.25) é modificado no caso em que se elimina o sinal $\pi_e(t)$ desta equação.

Observação 9.5 O uso das transformações $T(\varepsilon)$ e $T^{-1}(\varepsilon)$ na obtenção dos majorantes (9.36) e (9.37) para a norma do erro de estimação do estado $\|\tilde{x}_e\|$ pode gerar resultados muito conservadores, como se pode concluir do fato de que $\|T(\varepsilon)T^{-1}(\varepsilon)\| = 1$, embora o majorante para esta norma, estabelecido por $\|T(\varepsilon)\| \|T^{-1}(\varepsilon)\| = 1/\varepsilon^{p_m-1}$, se torna exageradamente grande na medida que $\varepsilon \rightarrow +0$, uma vez que $p_m \geq 2$.

O uso da norma $\|T^{-1}(\varepsilon)\|$ na síntese da função de modulação no sinal de controle em (Emelyanov et al. 1992b, eq. (18)) pode resultar em peaking, que pode ser observado

no controlador proposto loc. cit. segundo (Oh & Khalil 1997).

9.6.2 Fenômeno *peaking*

O fenômeno *peaking* no observador de alto ganho é caracterizado pelo termo

$$\frac{k_1}{\varepsilon^{p_m-1}} \|\tilde{x}_e(0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon} t\right), \quad (9.52)$$

presente nos majorantes do erro de estimação do estado (9.36) e (9.37). Por um lado deve-se escolher o parâmetro ε suficientemente pequeno para reduzir o erro de estimação residual e para tornar mais rápido o transitório do observador. Por outro lado, isto pode resultar no aumento do pico do erro de estimação do estado durante o transitório inicial na proporção de $1/\varepsilon^{p_m-1}$. Um fato curioso é que não há *peaking* no erro de saída do observador, conforme se pode constatar nos majorantes (9.38) e (9.39).

Para ilustrar o fenômeno *peaking* no HGO, considera-se a equação dinâmica

$$\dot{\tilde{x}}_e(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\varepsilon} & 1 \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_e(t), \quad \tilde{x}_e(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (9.53)$$

que representa a dinâmica do erro de estimação do estado (9.43) de um HGO de segunda ordem quando $\bar{U}(t) \equiv 0$ e $\pi_e(t) \equiv 0$. Sem estas incertezas, o majorante (9.36) resulta em

$$\|\tilde{x}_e(t)\| \leq \frac{k_1}{\varepsilon^{p_m-1}} \|\tilde{x}_e(0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon} t\right), \quad \forall t \geq 0. \quad (9.54)$$

Notando-se que a margem de estabilidade do polinômio $N_\alpha(s) = s^2 + 2s + 1$ é $\bar{\lambda}_\alpha = 1 \text{ s}^{-1}$, escolheu-se $\lambda_\alpha = 0,3 \text{ s}^{-1} < \bar{\lambda}_\alpha$ para que o pico do majorante seja pequeno e o seu transitório seja razoavelmente rápido. A constante $k_1 = 1,2$ foi computada para minimizar o valor de pico do majorante (9.54) para o valor estipulado de λ_α .

A Figura 9.1 apresenta a norma do erro de estimação do estado durante o transitório de (9.53). O fenômeno *peaking* fica evidente quando o parâmetro ε é reduzido de 1 para 0,1. Nota-se que os majorantes estabelecidos pela desigualdade (9.54) são bastante conservadores, embora reflitam o *peaking* pois a amplitude do majorante e a sua taxa de decaimento aumentam na medida em que o parâmetro ε é reduzido, tal qual ocorre com a norma do estado.

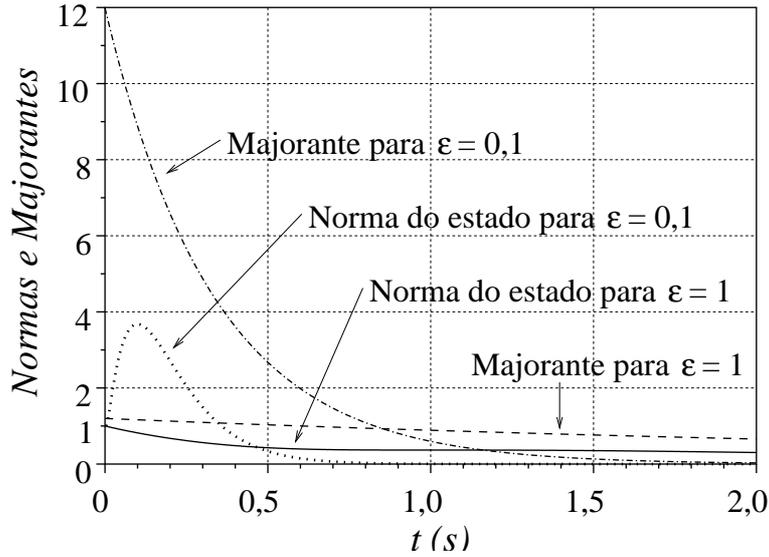


FIGURA 9.1: Fenômeno *peaking* no observador de alto ganho. A norma do estado ($\|\tilde{x}_e(t)\|$) da equação do erro de estimação do estado (9.53) é comparada com o seu majorante (9.54) para dois valores do parâmetro ε .

9.6.2.1 Tempo de extinção do pico

Um conceito importante sobre observadores de alto ganho é o *tempo de extinção do pico*, que é definido abaixo conforme a Figura 9.2.

Definição 9.1 Considere-se a equação da dinâmica do erro de estimação do estado ($\tilde{x}_e(t)$) de um HGO com $\bar{U}(t) \equiv 0$ e $\pi_e(t) \equiv 0$ dada por

$$\dot{\tilde{x}}_e(t) = A_e(\varepsilon^{-1})\tilde{x}_e(t), \quad t \geq 0, \quad (9.55)$$

onde a matriz Hurwitz $A_e(\varepsilon^{-1})$ é definida em (9.44). O tempo de extinção do pico (t_e) do HGO é o menor valor que satisfaz a desigualdade

$$\|\tilde{x}_e(t)\| \leq \|\tilde{x}_e(0)\|, \quad \forall t \geq t_e \geq 0, \quad \forall \tilde{x}_e(0) \in \mathbb{R}^{p_m}, \quad (9.56)$$

para um valor fixo do parâmetro $\varepsilon \in (0, 1]$.

O tempo de extinção do pico de um HGO pode ser difícil de ser calculado. Por isso, em vez de calculá-lo exatamente, pode ser mais conveniente estimá-lo através do

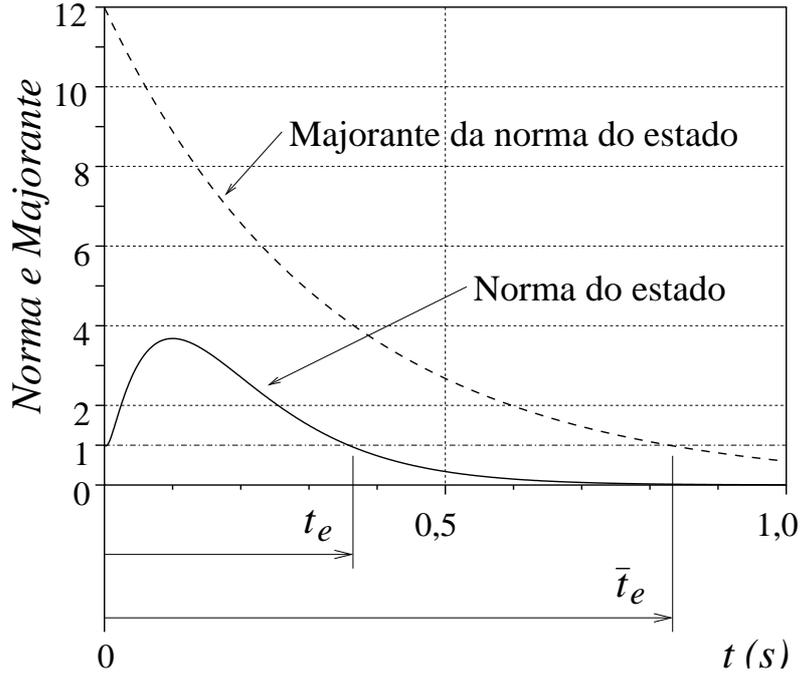


FIGURA 9.2: *Tempo de extinção do pico* (t_e) definido a partir da norma do estado ($\|\tilde{x}_e(t)\|$) e o *majorante do tempo de extinção do pico* (\bar{t}_e) definido a partir do majorante (9.54). Aqui se utiliza como exemplo o fenômeno *peaking* no observador de alto ganho com equação do erro de estimação (9.53) para $\varepsilon=0,1$.

majorante (9.54) que resulta na desigualdade

$$\frac{k_1}{\varepsilon^{p_m-1}} \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon} t\right) \leq 1, \quad \forall t \geq \bar{t}_e \geq 0, \quad (9.57)$$

onde $\bar{t}_e \geq t_e$ (vide Figura 9.2), da qual se conclui que

$$\bar{t}_e = \frac{\varepsilon}{\lambda_\alpha} [\ln(k_1) + (1 - p_m)\ln(\varepsilon)] = \frac{p_m - 1}{\lambda_\alpha} \varepsilon [(p_m - 1)^{-1}\ln(k_1) - \ln(\varepsilon)]. \quad (9.58)$$

Para se compreender a dependência do *tempo de extinção do pico* em relação ao parâmetro ε define-se o *majorante normalizado do tempo de extinção do pico*

$$\bar{T}_e := \frac{\lambda_\alpha}{p_m - 1} \bar{t}_e, \quad (9.59)$$

que é dado por

$$\bar{T}_e(\varepsilon, K_{pm}) = \varepsilon [K_{pm} - \ln(\varepsilon)] , \quad (9.60)$$

onde $K_{pm} := (p_m - 1)^{-1} \ln(k_1)$. A família de curvas na Figura 9.3 representa $\bar{T}_e(\varepsilon, K_{pm})$ para alguns valores da constante K_{pm} . Pode-se concluir que o *majorante do tempo de extinção do pico* é uniformemente limitado em relação ao parâmetro $\varepsilon \in (0, 1]$ e tende a zero na medida que $\varepsilon \rightarrow +0$, uma vez que sejam fixados os valores dos parâmetros $k_1 \geq 1$, $\lambda_\alpha > 0$ e $p_m \geq 2$.

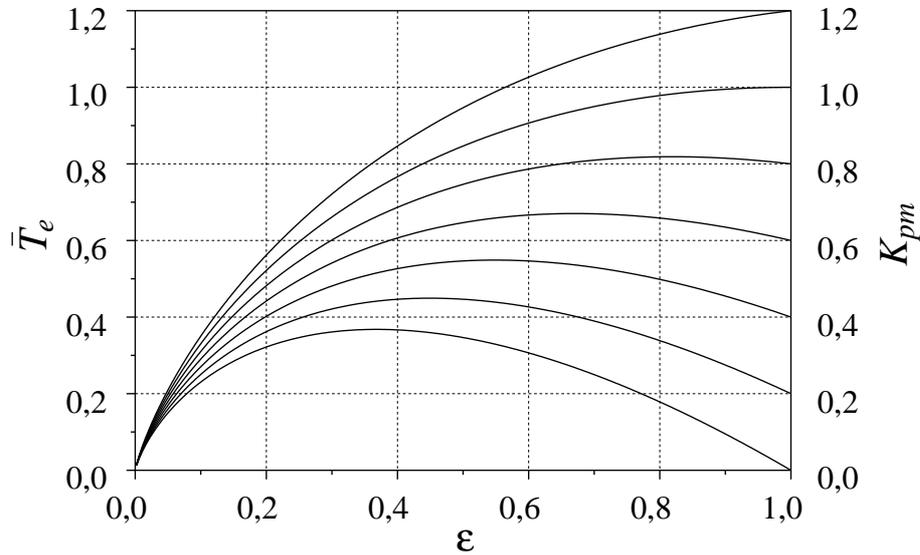


FIGURA 9.3: Família de curvas do *majorante normalizado do tempo de extinção do pico* ($\bar{T}_e(\varepsilon, K_{pm})$).

Observação 9.6 Para a eliminação do peaking, (Chitour 2002) propõe um observador de alto ganho que pode ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_e &= A_M \hat{x}_e - [H(t, \varepsilon^{-1}) - a_M] \tilde{e}, \\ \tilde{e} &= C_M \hat{x}_e - e, \end{aligned} \quad (9.61)$$

onde $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{p_m}$ é um vetor variante no tempo. Inicialmente o vetor $H(t, \varepsilon^{-1})$ tem norma pequena para que o peaking seja evitado. Então, o vetor $H(t, \varepsilon^{-1})$ converge exponencialmente para o vetor $\alpha(\varepsilon^{-1})$ a fim de que o erro de estimação seja pequeno

após o transitório inicial. No entanto, (Chitour 2002) reconhece que o observador (9.61) não teria sucesso em situações reais nas quais perturbações poderiam causar o peaking quando a norma do vetor $H(t, \varepsilon^{-1})$ for grande, embora o seu observador elimine o peaking em condições ideais durante o transitório inicial.

Uma ausência digna de nota no observador (9.61) é o sinal de controle U . Esse termo é indispensável para formar um laço de realimentação com grau relativo unitário a fim de que o controle a estrutura variável gere o modo deslizante.

9.7 Controlador para Sistemas de Grau Relativo Superior a Um sem *Peaking* nos Sinais da Planta

O primeiro controlador proposto para sistemas lineares com $n^* \geq 2$ utiliza a lei de controle a estrutura variável (9.29) conjugada com o HGO (9.30)–(9.31). Para se evitar o *peaking* no sinal de controle u e nos sinais da planta, utiliza-se os filtros de estado (9.12) na síntese da função de modulação ρ . No entanto, ocorre o *peaking* no estado estimado, pois este fenômeno é intrínseco no HGO (9.30)–(9.31). Este controlador é descrito na Tabela 9.1.

9.7.1 Análise de estabilidade

Para analisar a estabilidade do sistema de controle para plantas com grau relativo $n^* \geq 2$, levando-se em consideração de forma completa as condições iniciais, utiliza-se o vetor de estado z assim definido:

$$z := [X_e^T, \tilde{x}_e^T]^T . \quad (9.62)$$

No que segue, todos os k 's e λ 's simbolizam constantes positivas genéricas, \mathcal{K} 's são funções da classe \mathcal{K} e a norma de um operador ($\|\cdot\|$) é induzida pela norma $\mathcal{L}_{\infty e}$ (vide Seção 1.2.1).

O Teorema 9.3 estabelece as propriedades de estabilidade do sistema com todas as equações dos sinais de erro dadas por (9.15)–(9.16) e (9.43). Para $N = 0$ ($n^* = 1$) a estabilidade global exponencial é estabelecida no Teorema 9.1.

TABELA 9.1: Algoritmo proposto para o controle por modelo de referência de sistemas lineares com grau relativo superior a um sem *peaking* nos sinais da planta. Este algoritmo é baseado em estrutura variável e num observador de alto ganho. A função de modulação apresentada nesta tabela pode ser substituída por qualquer outra função de modulação que satisfaça a desigualdade (9.21) e a hipótese (A8.a).

Modelo de referência	$\dot{x}_M = A_M x_M + B_M r, \quad y_M = C_M x_M$
Sinal de erro	$e(t) = y(t) - y_M(t)$
Filtros de estado	$\dot{\omega}_1 = \Phi \omega_1 + \Gamma u, \quad \dot{\omega}_2 = \Phi \omega_2 + \Gamma y$
Vetor regressor	$\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y \ r]^T$
Lei de controle	$u = u^{\text{nom}} + U,$ $U = -\rho \text{sgn}(\sigma(\hat{x}_e)),$ $\sigma(\hat{x}_e) = S \hat{x}_e$
Controle nominal	$u^{\text{nom}} = \theta^{\text{nom}T} \omega$
Função de modulação	$\rho = \delta + c_1 \ \omega\ + \hat{d}(t)$ $\hat{d}(t) = \bar{d}(t) + \frac{c_2}{s+\gamma_d} * \bar{d}(t)$
Observador de alto ganho	$\dot{\hat{x}}_e = A_M \hat{x}_e + B_M \frac{K_p^{\text{nom}}}{K_M} U - [\alpha(\varepsilon^{-1}) - a_M] \tilde{e},$ $\tilde{e} = C_M \hat{x}_e - e$

Teorema 9.3 Para $N = n^* - 1 \geq 1$, considere-se a planta (9.1) e o controlador descrito na Tabela 9.1. Se as hipóteses (A1.o)–(A6.o) forem satisfeitas e a função de modulação ρ satisfizer a desigualdade (9.21) e a hipótese (A8.a), então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema composto pelas equações dos erros (9.15)–(9.16) e (9.43) com estado z definido em (9.62) será globalmente exponencialmente estável em relação a um conjunto residual de ordem ε , isto é, $\exists k_z, \lambda_z > 0$ e uma função $\mathcal{K}_X(\varepsilon)$ da classe \mathcal{K} tais que

$$\|z(t)\| \leq \left[\frac{k_z}{\varepsilon^{p_m-1}} \|z(0)\| + \mathcal{K}_X(\varepsilon) \right] \exp(-\lambda_z t) + O(\varepsilon), \quad (9.63)$$

$$|e(t)| \text{ e } \|X_e(t)\| \leq [k_z \|z(0)\| + \mathcal{K}_X(\varepsilon)] \exp(-\lambda_z t) + O(\varepsilon), \quad (9.64)$$

$\forall z(0), \forall t \geq 0$.

Prova: Uma vez que a hipótese (A8.a) sobre o sinal de controle u é satisfeita, os sinais do sistema são *regulares* e, portanto, podem crescer no máximo exponencialmente (Sastry & Bodson 1989). Da relação (4.17) e lembrando-se que o sinal $r(t)$ é uniformemente limitado, tem-se que $\|\omega\| \leq k_M + k_\Omega \|X_e\|$. Então, pode-se concluir que

$$\|x_e(t)\| \text{ e } \|X_e(t)\| \leq k_{e1} \exp(\lambda_{e1} t) \|X_e(0)\| + k_{e2} [\exp(\lambda_{e1} t) - 1], \quad \forall t \geq 0. \quad (9.65)$$

Segundo o conceito do *tempo de extinção do pico* (t_e) proposto na Seção 9.6.2, conclui-se que $t_e \leq \bar{t}_e$ dado por (9.58) pode ser majorado por uma função de ε da classe \mathcal{K} . Assim, o majorante (9.65) pode ser majorado por

$$\|x_e(t)\| \text{ e } \|X_e(t)\| \leq (k_{e3} + k_{e4}\varepsilon) \|X_e(0)\| + \mathcal{K}_{e6}(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, t_e], \quad (9.66)$$

que, em conjunto com o majorante do erro de estimação do estado (9.37), permite concluir que

$$\|\tilde{x}_e(t)\| \leq \frac{k_1}{\varepsilon^{p_m-1}} \|\tilde{x}_e(0)\| \exp\left(-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon} t\right) + \varepsilon [k_{e9} \|X_e(0)\| + k_{e10}], \quad \forall t \in [0, t_e]. \quad (9.67)$$

Agora o desenvolvimento de um majorante para o estado z prossegue para $t > t_1 := t_e$. Tomando-se t_1 como um novo instante inicial após a extinção do pico no transitório

do HGO, tem-se, $\forall t \geq t_1$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_e(t)\| &\leq [\|\tilde{x}_e(0)\| + \varepsilon(k_{e11}\|X_e(0)\| + k_{e12})] \exp\left[-\frac{\lambda_\alpha}{\varepsilon}(t-t_1)\right] + k_2\varepsilon\|X_e(0)\| \exp(-\lambda_e t) \\ &\quad + \varepsilon C(t, t_1), \end{aligned} \quad (9.68)$$

$$\leq [\|\tilde{x}_e(0)\| + \varepsilon(k_{e13}\|X_e(0)\| + k_{e12})] \exp[-\lambda_e(t-t_1)] + \varepsilon C(t, t_1). \quad (9.69)$$

É conveniente se reescrever a equação do erro (9.25) como

$$\dot{x}_e = A_M x_e + B_M K [U + d_U + \pi_e(t)], \quad (9.70)$$

onde

$$d_U := (\theta^{\text{nom}} - \theta^*)^T \omega + W_d(s) * d(t). \quad (9.71)$$

Uma vez que a lei de controle utiliza o estado estimado pelo HGO ($\hat{x}_e(t) = x_e(t) + \tilde{x}_e(t)$), pode-se reescrever a lei de controle (9.29) como

$$U = -\rho \operatorname{sgn}(\sigma(\hat{x}_e)), \quad (9.72)$$

$$\sigma(\hat{x}_e) = S(x_e + \tilde{x}_e) = Sx_e + S\tilde{x}_e. \quad (9.73)$$

Lembrando-se que $\{A_M, B_M, S\}$ é uma realização não-mínima e controlável de $W_M(s)L(s) = \frac{K_M}{(s+\gamma)}$ e que $K = K_M^{-1}K_p$, o sinal de chaveamento $\sigma(\hat{x}_e)$ pode ser representado a partir da equação dinâmica (9.70) e da equação algébrica (9.73) como

$$\sigma(\hat{x}_e) = \frac{K_p}{(s+\gamma)} [U + d_U(t)] + \pi_1(t) + \beta(t), \quad (9.74)$$

com $\pi_1(t) + \beta(t) = \frac{K_p}{(s+\gamma)} * \pi_e(t) + S\tilde{x}_e(t)$. Utilizando-se o majorante para $\|\tilde{x}_e\|$ dado por (9.69), tem-se, $\forall t \geq t_1$,

$$|\pi_1(t)| \leq k_{e14} [\|\tilde{x}_e(0)\| + \|X_e(0)\| + \varepsilon k_{e12}] \exp[-\lambda_e(t-t_1)], \quad (9.75)$$

$$\|\beta_{t,t_1}\|_\infty \leq \varepsilon k_\beta C(t, t_1). \quad (9.76)$$

Então, uma vez que se assumiu que $K_p > 0$ e a que função de modulação satisfaz $\rho(t) \geq |d_U(t)|$ ($\forall t \geq 0$), pode-se aplicar o Lema C.2 ao sistema formado por (9.74) e pela lei de controle (9.72), o que resulta no majorante

$$|\sigma(\hat{x}_e)| \text{ e } |\hat{\sigma}(\hat{x}_e)| \leq k_{e15} [\|z(0)\| + \varepsilon k_{e12}] \exp[-\lambda_e(t-t_1)] + 2\varepsilon k_\beta C(t, t_1), \quad (9.77)$$

$\forall t \geq t_1$, onde $\hat{\sigma} := \sigma - \pi_1(t) - \beta(t)$. Relembrando-se que $u = u^{\text{nom}} + U$, nota-se que $\frac{K_p}{(s+\gamma)}$ em (9.74) opera no mesmo sinal $U + d_U$ que aquele em (9.15). A partir de (9.74) se conclui que $U + d_U = K_p^{-1}[\dot{\hat{\sigma}} + \gamma\hat{\sigma}]$. Então, a partir de (9.15), o erro de rastreamento do modelo pode ser reescrito como

$$\dot{X}_e = A_c X_e + B_c K [\dot{\hat{\sigma}} + \gamma\hat{\sigma}]. \quad (9.78)$$

Para eliminar a derivada $\dot{\hat{\sigma}}$, emprega-se a transformação de variáveis $\bar{X}_e := X_e - B_c K \hat{\sigma}$ resultando em

$$\dot{\bar{X}}_e = A_c \bar{X}_e + (A_c + \gamma I) B_c K \hat{\sigma}. \quad (9.79)$$

Uma vez que A_c é Hurwitz e que o sinal $\hat{\sigma}$ satisfaz o majorante (9.77), tem-se que

$$\|\bar{X}_e(t)\| \leq k_{e16} [\|z(0)\| + \varepsilon k_{e12}] \exp[-\lambda_e(t-t_1)] + \varepsilon \bar{k} C(t, t_1), \quad \forall t \geq t_1. \quad (9.80)$$

Além disso, conforme é esclarecido abaixo, $\forall t \geq t_1$,

$$\|X_e(t)\| \text{ e } \|e(t)\| \leq k_{e17} [\|z(0)\| + \varepsilon k_{e12}] \exp[-\lambda_e(t-t_1)] + \varepsilon k_{e18} C(t, t_1), \quad (9.81)$$

$$\|\omega_{t,t_1}\|_\infty \leq \varepsilon k_{e19} C(t, t_1) + k_{e20} \|z(0)\| + k_m, \quad (9.82)$$

$$C(t, t_1) \leq \frac{k'_{\text{red}} + k_{e21} \|z(0)\|}{1 - \varepsilon k_{e22}}. \quad (9.83)$$

De fato, as desigualdades em (9.81) vêm de $X_e = \bar{X}_e + B_c K \hat{\sigma}$. Uma vez que $\|\omega\| \leq k_M + k_\Omega \|X_e\|$, então, se obtém (9.82) a partir de (9.81). Agora, a partir de (9.40) e (9.82), pode-se concluir que $C(t, t_1)$ também pode ser majorado por $C(t, t_1) \leq \varepsilon k_{e22} C(t, t_1) + k_{e21} \|z(0)\| + k'_{\text{red}}$, do qual se obtém por intermédio de manipulações algé-

bricas o majorante (9.83), que é válido para $\varepsilon < k_{e22}^{-1}$. Os majorantes (9.69) para $\|\tilde{x}_e\|$ e (9.81) para $\|X_e\|$ podem ser conjugados no majorante

$$\|z(t)\| \leq [k_{e23}\|z(0)\| + \varepsilon k_{e24}] \exp[-\lambda_e(t-t_1)] + \varepsilon k_{e25} C(t, t_1), \quad \forall t \geq t_1, \quad (9.84)$$

no qual pode-se utilizar o majorante (9.83) para $C(t, t_1)$ que resulta em

$$\|z(t)\| \leq [k_{e23}\|z(0)\| + \varepsilon k_{e24}] \exp[-\lambda_e(t-t_1)] + \varepsilon \frac{k_{e26} + k_{e27}\|z(0)\|}{1 - \varepsilon k_{e22}}, \quad \forall t \geq t_1, \quad (9.85)$$

que para $0 < \varepsilon \leq k_\varepsilon < \min(1, k_{e22}^{-1})$ pode ser reescrito como

$$\|z(t)\| \leq [k_{e23}\|z(0)\| + \varepsilon k_{e24}] \exp[-\lambda_e(t-t_1)] + \varepsilon [k_{e28} + k_{e29}\|z(0)\|], \quad \forall t \geq t_1, \quad (9.86)$$

de onde pode-se afirmar que

$$\|z(t)\| \leq \{k_{e23} \exp[-\lambda_e(t-t_1)] + \varepsilon k_{e29}\} \|z(0)\| + O(\varepsilon), \quad \forall t \geq t_1, \quad (9.87)$$

onde o termo residual $O(\varepsilon)$ é independente das condições iniciais. Notando-se que o instante inicial é irrelevante na derivação das expressões acima, pode-se escrever

$$\|z(t)\| \leq \{k_{e30} \exp[-\lambda_e(t-t_i)] + \varepsilon k_{e31}\} \|z(t_i)\| + O(\varepsilon), \quad (9.88)$$

para $t \geq t_i \geq t_1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) arbitrário. Esta desigualdade conduz à desigualdade linear recursiva

$$\|z(t_{i+1})\| \leq \lambda \|z(t_i)\| + O(\varepsilon), \quad (9.89)$$

com $\lambda = k_{e30} \exp(-\lambda_e T_1) + \varepsilon k_{e31}$ e algum período $T_1 = t_{i+1} - t_i > 0$. Para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^* < k_{e31}^{-1}$ e escolhendo-se o período $T_1 > 0$ adequadamente longo, obtém-se $\lambda < 1$. Assim conclui-se que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, a recursão (9.89) converge em progressão geométrica para um conjunto residual de ordem ε .

Conjugando-se a convergência exponencial do estado $z(t)$ para um conjunto residual de ordem ε a partir do instante t_1 , o que se conclui da recursão (9.89), aos majorantes (9.66) para $\|X_e\|$ e (9.67) para $\|\tilde{x}_e\|$, válidos para $0 \leq t \leq t_1$, obtém-se finalmente os

majorantes (9.63) e (9.64) para as normas dos vetores de estado das equações dos erros que são válidos $\forall t \geq 0$. ■

Observação 9.7 *O controlador de rastreamento de trajetória por realimentação de saída proposto por (Oh & Khalil 1997) é baseado em estrutura variável e num HGO. Essa estratégia de controle não apresenta o fenômeno peaking na planta, que é evitado através da saturação do sinal de controle que é globalmente limitado. No entanto, os resultados obtidos loc. cit. garantem apenas a estabilidade semi-global (i.e., restrita a uma região arbitrariamente grande mas limitada) e o estado da equação do erro de rastreamento converge em algum tempo finito para um conjunto residual de ordem $\sqrt{\varepsilon}$. Nesse aspecto os resultados obtidos por (Oh & Khalil 1997) não são tão bons quanto estes estabelecidos no Teorema 9.3 desta Tese, em que se obtém a estabilidade global e os estados das equações dos erros convergem exponencialmente para um conjunto residual de ordem ε . Em contrapartida, aqui a planta deve ser linear e invariante no tempo, contrastando com a abordagem de (Oh & Khalil 1997) que foi orientada a plantas não-lineares.*

9.8 Controlador para Sistemas de Grau Relativo Superior a Um Livre de *Peaking* nos Sinais da Planta e do Controlador

O segundo controlador proposto para sistemas lineares com $n^* \geq 2$ utiliza um HGO para o estado da equação do erro (9.25) escalonado pela transformação

$$\zeta = T(\varepsilon)x_e, \quad T(\varepsilon) = \text{diag} \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p_m-1}\}. \quad (9.90)$$

O HGO livre do *peaking* no estado estimado é obtido através da aplicação da transformação $\hat{\zeta} = T(\varepsilon)\hat{x}_e$ ao HGO (9.30)–(9.31), resultando no observador dinâmico

$$\varepsilon \dot{\hat{\zeta}} = \bar{A}_M(\varepsilon)\hat{\zeta} + \varepsilon^{p_m} B_M \frac{K_p^{\text{nom}}}{K_M} U - [\bar{\alpha} - \bar{a}_M(\varepsilon)] \tilde{e}, \quad (9.91)$$

$$\tilde{e} = C_M \hat{\zeta} - e, \quad (9.92)$$

onde

$$\bar{A}_M(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -a_{p_m-1}\varepsilon & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{p_m-2}\varepsilon^2 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_1\varepsilon^{p_m-1} & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0\varepsilon^{p_m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_M \end{bmatrix}, \quad C_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{p_m-1} \\ \alpha_{p_m-2} \\ \vdots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{a}_M(\varepsilon) = \begin{bmatrix} a_{p_m-1}\varepsilon \\ a_{p_m-2}\varepsilon^2 \\ \vdots \\ a_1\varepsilon^{p_m-1} \\ a_0\varepsilon^{p_m} \end{bmatrix}. \quad (9.93)$$

Pode-se concluir que este observador é livre do *peaking* pois a equação da dinâmica do erro de estimação do estado $\bar{x}_e(t) := \hat{\zeta}(t) - \zeta(t)$ é dada por (9.46), que não exhibe *peaking* conforme o majorante para norma do erro de estimação do estado (9.48).

A lei de controle a estrutura variável neste caso é definida pela superfície de chaveamento $\sigma(\hat{x}_e) = 0$, onde $\sigma(\hat{x}_e) := S\hat{x}_e = ST^{-1}(\varepsilon)\hat{\zeta}$. No entanto, uma vez que o sinal $\sigma(T^{-1}(\varepsilon)\hat{\zeta})$ poderia apresentar *peaking* devido ao uso da transformação $T^{-1}(\varepsilon)$ cuja norma é ε^{1-p_m} , este é escalado adequadamente resultando no sinal $\bar{\sigma}(\hat{\zeta}) := \varepsilon^{p_m-1}ST^{-1}(\varepsilon)\hat{\zeta}$ que não exhibe *peaking*. Assim a lei de controle é dada por

$$u = u^{\text{nom}} + U, \quad U = -\rho \operatorname{sgn} \left(\bar{S}(\varepsilon)\hat{\zeta} \right), \quad (9.94)$$

onde $\bar{S}(\varepsilon) := \varepsilon^{p_m-1}ST^{-1}(\varepsilon)$ e o controle nominal u^{nom} é dado por (9.20). Este controlador é descrito na Tabela 9.2 e no diagrama de blocos na Figura 9.4. Neste diagrama de blocos foi assinalado o *laço do modo deslizante "ideal"*, no qual a função de transferência do sinal U para o sinal $\bar{\sigma}$ é de fase mínima e possui grau relativo unitário, o que possibilita a ocorrência do modo deslizante (Bondarev et al. 1985). O relé que gera o controle chaveado faz parte de uma malha de realimentação que passa diretamente através do observador, que realiza o *bypass* da dinâmica da planta. Assim, o *chattering* que poderia ser causado por dinâmicas parasitas na planta, sensores e atuadores pode

ser evitado pelo uso do observador na malha com controle por modo deslizante (Young et al. 1999), (Utkin et al. 1999, Seção 8.3).

TABELA 9.2: Algoritmo proposto para o controle por modelo de referência de sistemas lineares com grau relativo superior a um livre de *peaking*. Este algoritmo é baseado em estrutura variável e num observador de alto ganho livre de *peaking*. A função de modulação apresentada nesta tabela pode ser substituída por qualquer outra função de modulação que satisfaça a desigualdade (9.21) e a hipótese (A8.a).

Modelo de referência	$\dot{x}_M = A_M x_M + B_M r, \quad y_M = C_M x_M$
Sinal de erro	$e(t) = y(t) - y_M(t)$
Filtros de estado	$\dot{\omega}_1 = \Phi \omega_1 + \Gamma u, \quad \dot{\omega}_2 = \Phi \omega_2 + \Gamma y$
Vetor regressor	$\omega = [\omega_1^T \ \omega_2^T \ y \ r]^T$
Lei de controle	$u = u^{\text{nom}} + U,$ $U = -\rho \operatorname{sgn}(\bar{\sigma}(\hat{\zeta}))$ $\bar{\sigma}(\hat{\zeta}) = \bar{S}(\varepsilon)\hat{\zeta}, \quad \bar{S}(\varepsilon) = \varepsilon^{p_m-1} S T^{-1}(\varepsilon)$
Controle nominal	$u^{\text{nom}} = \theta^{\text{nom}T} \omega$
Função de modulação	$\rho = \delta + c_1 \ \omega\ + \hat{d}(t)$ $\hat{d}(t) = \bar{d}(t) + \frac{c_2}{s+\gamma_d} * \bar{d}(t)$
Observador de alto ganho	$\varepsilon \dot{\hat{\zeta}} = \bar{A}_M(\varepsilon)\hat{\zeta} + \varepsilon^{p_m} B_M \frac{K_p^{\text{nom}}}{K_M} U - [\bar{\alpha} - \bar{a}_M(\varepsilon)] \tilde{e},$ $\tilde{e} = C_M \hat{\zeta} - e$

9.8.1 Análise de estabilidade

Para analisar a estabilidade do sistema de controle que utiliza o HGO livre do *peaking* para plantas com grau relativo $n^* \geq 2$, levando-se em consideração de forma completa as condições iniciais, utiliza-se o vetor de estado \bar{z} assim definido:

$$\bar{z} := [X_e^T, \bar{x}_e^T]^T. \quad (9.95)$$

O Teorema 9.4 estabelece as propriedades de estabilidade do sistema com todas as equações dos sinais de erro dadas por (9.15)–(9.16) e (9.46). É evidenciado que o sistema de controle é globalmente estável, livre do *peaking* e os erros convergem

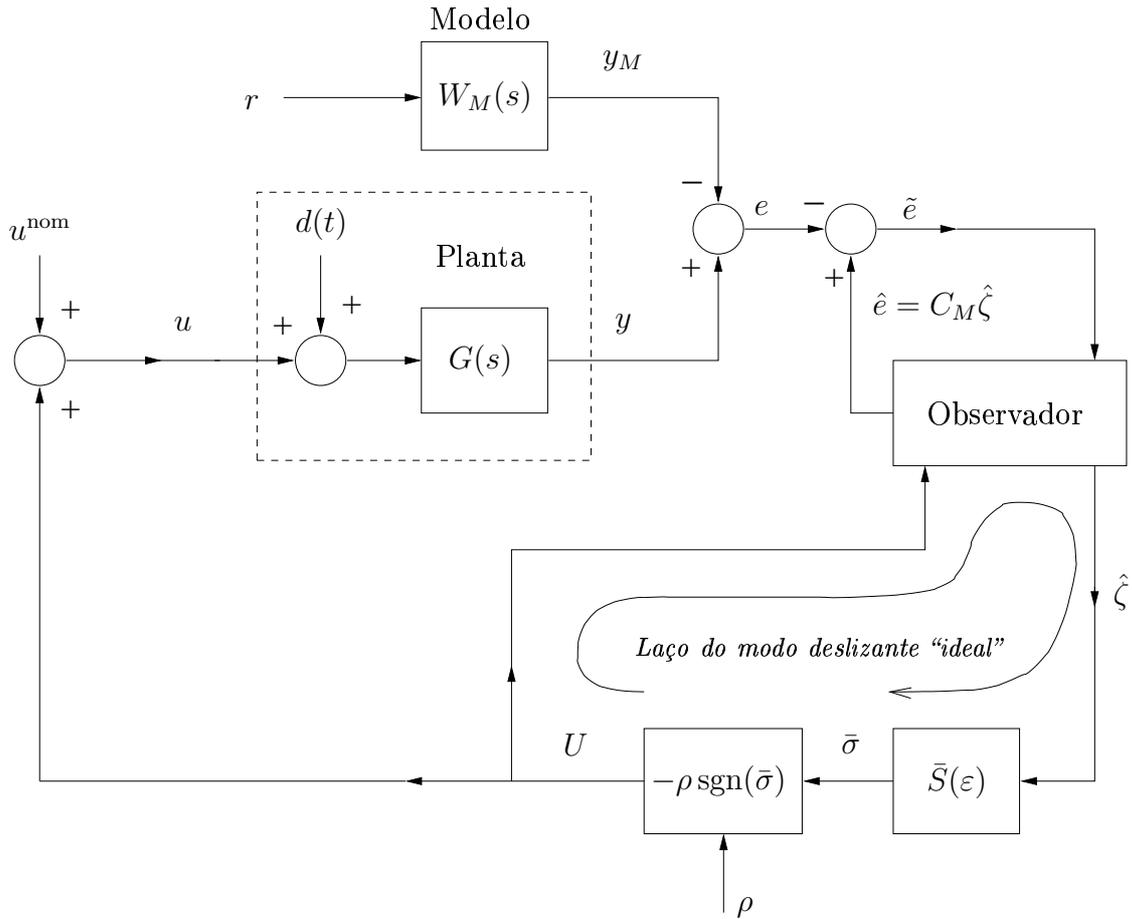


FIGURA 9.4: Algoritmo proposto para o controle por modelo de referência de sistemas lineares com grau relativo $n^* \geq 2$ livre de *peaking*. Os filtros de estado e a síntese do sinal ρ foram omitidos para simplificar o diagrama.

exponencialmente para um conjunto residual de ordem ε .

Teorema 9.4 Para $N = n^* - 1 \geq 1$, considere-se a planta (9.1) e o controlador descrito na Tabela 9.2. Se as hipóteses (A1.o)–(A6.o) forem satisfeitas e a função de modulação ρ satisfizer a desigualdade (9.21) e a hipótese (A8.a), então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o sistema composto pelas equações dos erros (9.15)–(9.16) e (9.46) com estado \bar{z} definido em (9.95) será globalmente exponencialmente estável em relação a um conjunto residual de ordem ε , isto é, $\exists k_z, \lambda_z > 0$ e uma função $\mathcal{K}_X(\varepsilon)$ da classe \mathcal{K} tais que

$$|e(t)| \text{ e } \|\bar{z}(t)\| \leq [k_z \|\bar{z}(0)\| + \mathcal{K}_X(\varepsilon)] \exp(-\lambda_z t) + O(\varepsilon), \quad (9.96)$$

$$\forall \bar{z}(0), \forall t \geq 0.$$

Prova: A prova deste Teorema segue a prova do Teorema 9.3, considerando-se que o erro de estimação do estado \bar{x}_e é dado pela transformação $\bar{x}_e(t) = T(\varepsilon)\tilde{x}_e(t)$. ■

Observação 9.8 *Os Teoremas 9.3 e 9.4 estabelecem a estabilidade global exponencial dos controladores propostos baseados em estrutura variável e em HGOs em relação a um conjunto residual. As funções forçantes $r(t)$ e $d(t)$ que excitam o sistema resultam no termo exponencialmente decrescente $\mathcal{K}_X(\varepsilon)\exp(-\lambda_z t)$ presente nos majorantes do estado (9.63)–(9.64) e (9.96). No caso autônomo, i.e., $r(t) \equiv 0$ e $d(t) \equiv 0$, pode-se escolher $\mathcal{K}_X(\varepsilon) \equiv 0$. Em contraste, o VS-MRAC para sistemas SISO (Hsu et al. 1997) e o UV-MRAC para sistemas MIMO (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a) são globalmente exponencialmente estáveis em relação a um conjunto residual de ordem τ sem o termo $\mathcal{K}_X(\tau)\exp(-at)$ no majorante da norma do estado (6.27), ainda que as funções forçantes $r(t)$ e $d(t)$ estejam ativas (vide Teorema 6.2).*

9.9 Exemplo de Aplicação a um Servomecanismo

Para ilustrar a aplicação do controlador a estrutura variável baseado no observador de alto ganho livre de *peaking*, considera-se um servomecanismo em que se controla posição de um carrinho ao longo de um trilho. Trata-se de um sistema em que a dinâmica dominante é de segunda ordem e o grau relativo é dois.

9.9.1 Descrição do servomecanismo

Utilizou-se o servomecanismo de posicionamento linear fabricado pela *Quanser Consulting* descrito no manual (Apkarian 1995, Seções 3.1 e 5.2.1) e disponível no Laboratório de Engenharia Elétrica da Universidade do Estado do Rio de Janeiro. O sistema é composto por um carrinho acionado por um motor DC sobre um trilho. A posição do carro (y) é medida por um potenciômetro multivoltas que gera uma tensão proporcional à posição ($e_p = 10,7y$). O eixo do motor e o eixo do potenciômetro são conectados por engrenagens a uma cremalheira instalada no trilho conforme a Figura 9.5.

A interface com o computador utiliza um conversor A/D e um conversor D/A com resolução de 12 bits e tensões de entrada e de saída na faixa de $-5V$ a $+5V$. O sinal de controle (u) atua na tensão enviada ao motor do carro.

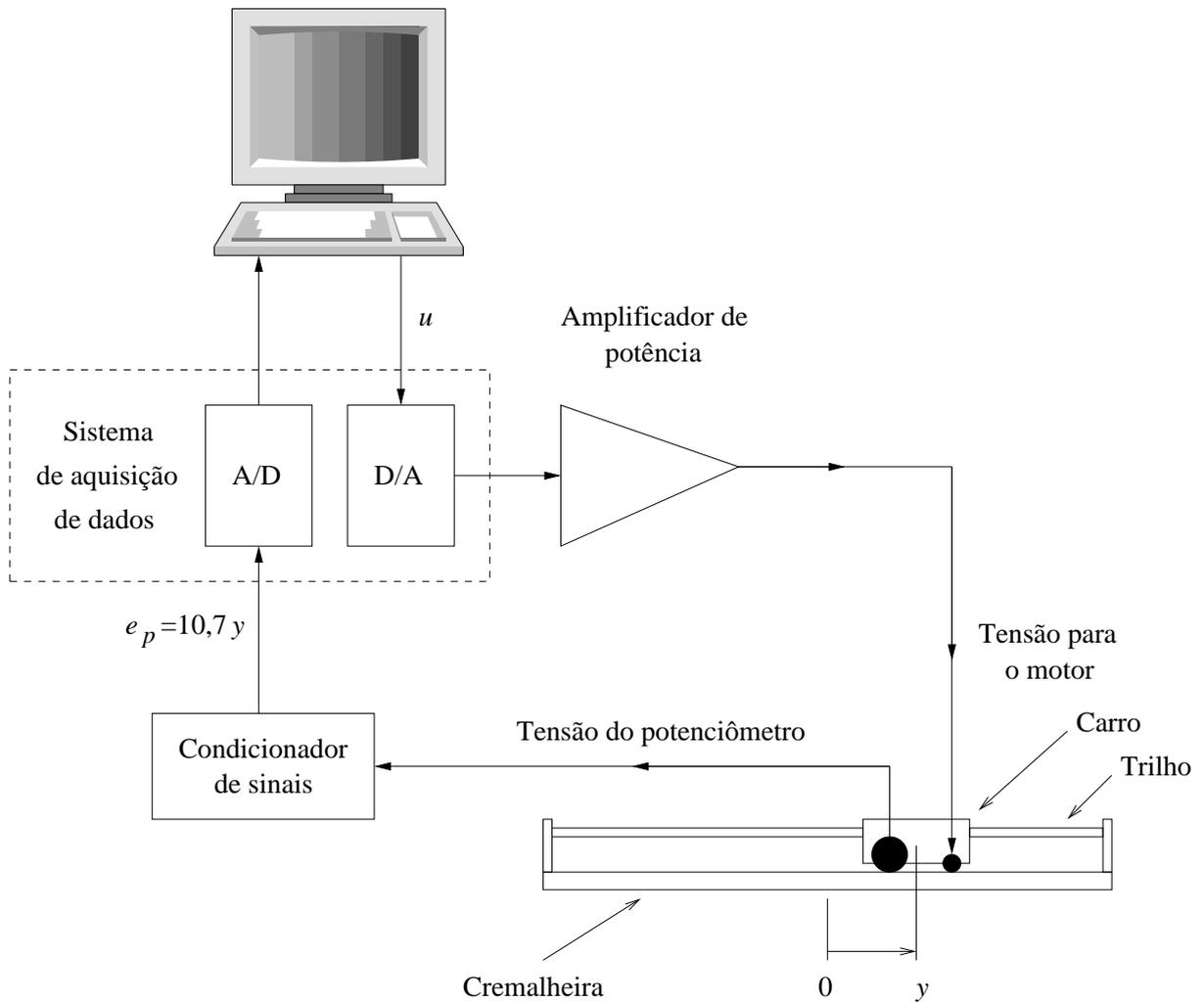


FIGURA 9.5: Diagrama do servomecanismo destacando-se as conexões do sistema de controle por computador.

O algoritmo de controle baseado no HGO livre de *peaking* (Tabela 9.2) é codificado num diagrama de blocos através do *software* Simulink/MatLab 5.2 para gerar um programa executável. As variáveis são amostradas periodicamente com intervalo de amostragem de 1 ms , que é o menor intervalo de amostragem que se pôde obter com este sistema de aquisição de dados. O algoritmo de controle é implementado através da integração numérica pelo método de Euler.

9.9.2 Modelo da dinâmica do servomecanismo

A função de transferência do servomecanismo obtida através da modelagem da sua dinâmica é

$$G_{\text{mod}}(s) = \frac{2,93}{s(s + 13,1)}, \quad (9.97)$$

onde foram utilizados os valores nominais disponíveis no manual (Apkarian 1995, Seção 5.2.1). Os valores dos parâmetros de $G_{\text{mod}}(s)$ são bastante próximos daqueles da função de transferência obtida através das curvas de resposta em frequência medida experimentalmente

$$G_{\text{nom}}(s) = \frac{2,41}{s(s + 13,4)}, \quad (9.98)$$

que foi adotada como a função de transferência da *planta nominal* para o projeto do controlador.

A função de transferência do servomecanismo possui ainda dois pólos estáveis que foram desprezados por serem considerados rápidos: (1) um pólo em $-14,4 \text{ ks}^{-1}$ relativo à dinâmica elétrica do circuito de armadura do motor DC e (2) um pólo em -165 s^{-1} introduzido por um filtro passa-baixas no condicionador de sinais que atua como filtro *antialiasing* (Åström & Wittenmark 1997).

O atrito não está incluído no desenvolvimento da modelagem que resultou na função de transferência (9.97). No entanto, a perturbação mais significativa é o atrito, que é incorporado na perturbação de entrada (tensão). A perturbação é uniformemente limitada por $\bar{d}_{\text{sup}} = 0,3 \text{ V}$, conforme se verificou experimentalmente.

9.9.3 Projeto

O modelo de referência escolhido é

$$W_M(s) = \frac{50}{(s + 5)(s + 10)}, \quad (9.99)$$

que tem ganho DC unitário. Escolheu-se o polinômio $L(s) = s + 10$ para cancelar o pólo em -10 s^{-1} do modelo de referência.

Os filtros de estado são escolhidos com $\lambda(s) = s + 10$. Uma vez que $W_M(s)$ e $\lambda(s)$ já foram especificados, o vetor de parâmetros utilizado no controle nominal é calculado para casar a planta nominal $G_{\text{nom}}(s)$ com o modelo de referência, o que resulta em

$$\theta^{\text{nom}T} = \begin{bmatrix} -1,6 & -22,56124 & -18,48031 & 20,736434 \end{bmatrix}. \quad (9.100)$$

A função de modulação (9.22) deve ser projetada de forma que o majorante (9.21) seja satisfeito considerando-se que os parâmetros da planta são incertos: o pólo estável pertence à faixa $-15,0 s^{-1}$ a $-9,5 s^{-1}$ e o ganho de alta frequência pertence à faixa 1,59 a 2,99. Além disso deve-se manter o sinal de controle com pequena amplitude, o que pode ser conseguido se as constantes da função de modulação forem pequenas. Assim escolheu-se $c_1 = 44$. Utilizou-se também o termo $\hat{d}(t) \equiv 0,4$ para possibilitar o cancelamento do efeito do atrito.

A utilização do parâmetro δ na função de modulação é inócua para sistemas com grau relativo $n^* > 1$, pois não se pode garantir a convergência do erro de saída em tempo finito mesmo que se escolha $\delta > 0$. Assim sendo, utiliza-se $\delta = 0$ na função de modulação (9.22).

9.9.4 Resultados de simulação

Nas simulações e nos experimentos (Seção 9.9.5) o sinal de referência é uma onda quadrada com amplitude 20 mm e frequência 3 rad/s . Nas simulações não há perturbação aplicada na entrada da planta, embora no sistema real haja atrito seco que poderia ser incluído como perturbação de entrada. No entanto, para se avaliar os efeitos das incertezas paramétricas, nas simulações os valores dos parâmetros da função de transferência do servomecanismo são bastante distintos dos valores nominais, isto é,

$$G_{\text{dist}}(s) = \frac{1,59}{s(s+15)}. \quad (9.101)$$

Todas as condições iniciais são nulas, exceto a posição inicial do carro que é $y(0) = 100 \text{ mm}$.

As Figuras 9.6 e 9.7 apresentam os resultados de simulação obtidos para dois valores do parâmetro ε a fim de se avaliar a influência de ε no desempenho do sistema de

controle. O bom desempenho do controlador é bem evidenciado pela rápida convergência do erro de saída que pode ser apreciada na Figura 9.6. Conforme esperado, o erro residual após o transitório inicial é significativamente reduzido na medida em que ε passa de 0,1 (Figura 9.6.a) para 0,01 (Figura 9.6.b).

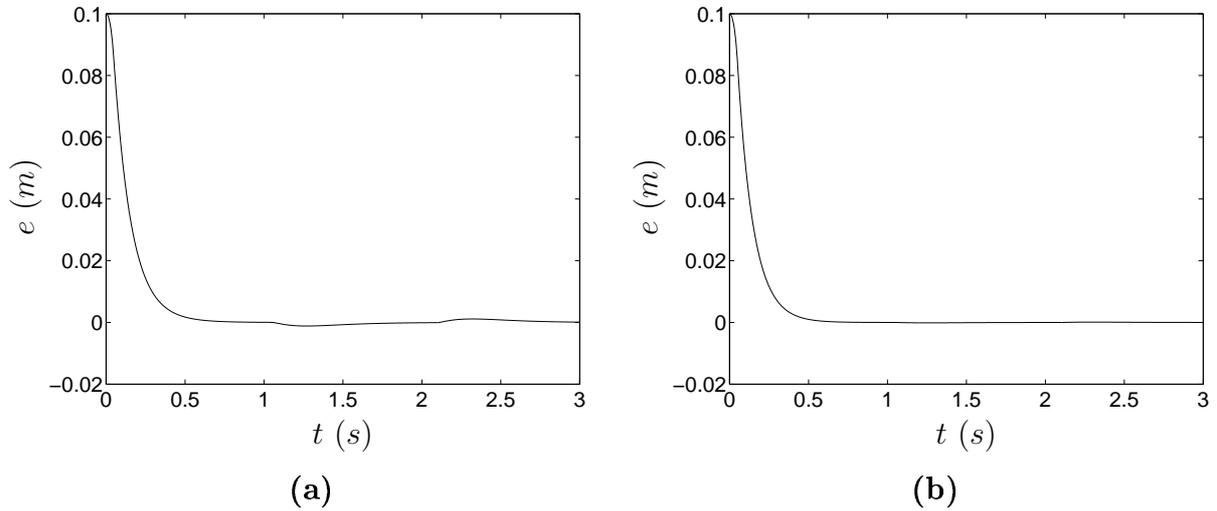


FIGURA 9.6: Resultados das simulações do erro de saída para: (a) $\varepsilon = 0,1$ e (b) $\varepsilon = 0,01$.

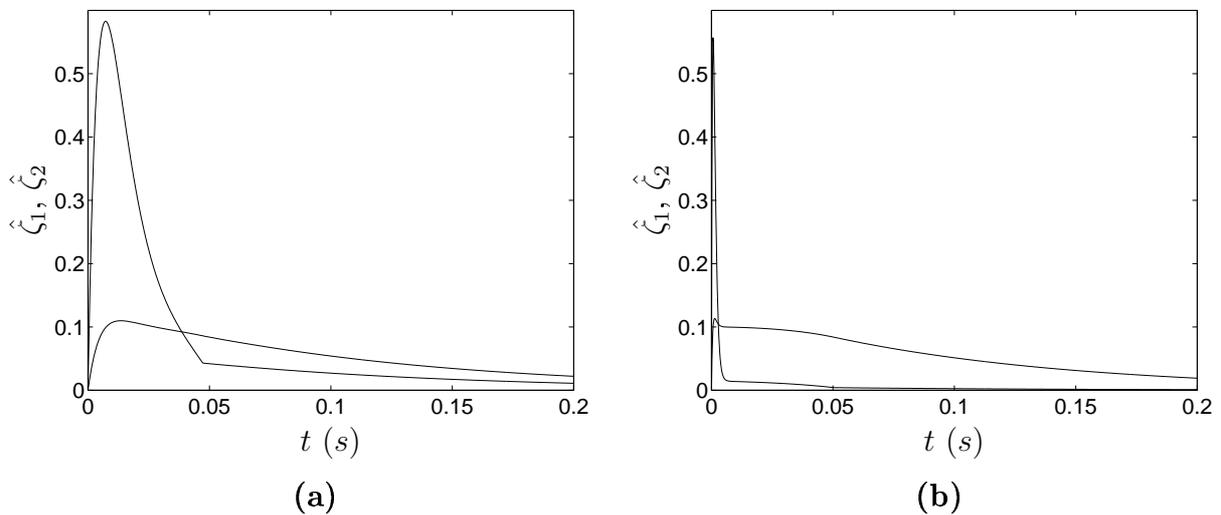


FIGURA 9.7: Resultados das simulações das variáveis de estado estimadas pelo observador de alto ganho para: (a) $\varepsilon = 0,1$ e (b) $\varepsilon = 0,01$.

O fenômeno *peaking* não ocorre em nenhum dos sinais simulados, uma vez que este controlador é livre de *peaking*. Particularmente, nota-se que o *peaking* não ocorre nas variáveis de estado estimadas $\hat{\zeta}_1$ e $\hat{\zeta}_2$, pois quando o valor do parâmetro ε é reduzido de 0,1 para 0,01 as amplitudes dos picos destas variáveis ficam praticamente inalteradas, bem como as constantes de tempo dos modos mais lentos, conforme se percebe comparando-se a Figura 9.7.a com a Figura 9.7.b.

O passo de integração utilizado nestas simulações é bastante pequeno ($10 \mu s$) para possibilitar que o erro da integração numérica seja tolerável para o caso em que a dinâmica do HGO é a mais rápida, i.e., quando $\varepsilon = 0,01$. De fato, notou-se que o passo de integração com valor igual ao intervalo de amostragem dos experimentos ($1 ms$ na Seção 9.9.5) só seria satisfatório para $\varepsilon = 0,1$. Por isto, nos experimentos apresentados na seção a seguir utilizou-se $\varepsilon = 0,1$, o que resulta em erros de rastreamento bastante significativos.

9.9.5 Resultados experimentais

Nesta seção são apresentados resultados experimentais obtidos com três variações das leis de controle baseadas no HGO sem *peaking*:

1. O controle é linear e nominal, i.e., $u = \theta^{\text{nom}T} \omega$ na Figura 9.8.
2. O controle a estrutura variável não utiliza o controle nominal, i.e., $u = -\rho \text{sgn}(\bar{\sigma})$ nas Figuras 9.9 e 9.10.
3. O controle a estrutura variável inclui o controle nominal, i.e., $u = \theta^{\text{nom}T} \omega - \rho \text{sgn}(\bar{\sigma})$ nas Figuras 9.11 e 9.12.

A massa nominal do carro é $m_{\text{nom}} = 0,455 kg$. Os experimentos são realizados, também, quando a massa do carro é aumentada para $m_{\text{dist}} = 0,665 kg$, o que é conseguido pelo acréscimo de uma haste com massa de $0,210 kg$. Deve-se ressaltar que esta alteração é bastante significativa em comparação com a massa nominal (46%).

Na Figura 9.8 verifica-se que o controle nominal linear é incapaz de realizar o rastreamento preciso das trajetórias, ainda que a massa do carro seja a nominal. O erro de rastreamento é ainda maior quando a massa do carro é aumentada (vide Figura 9.8.b). Aparentemente, a principal causa desses erros exagerados é o atrito seco, cujo efeito é

mais evidente quando a velocidade do carro é pequena, o que causa o ceifamento do sinal de posição do carro na Figura 9.8.b. O atrito seco é maior no carro com massa aumentada devido ao aumento do peso, o que acentua o erro no rastreamento.

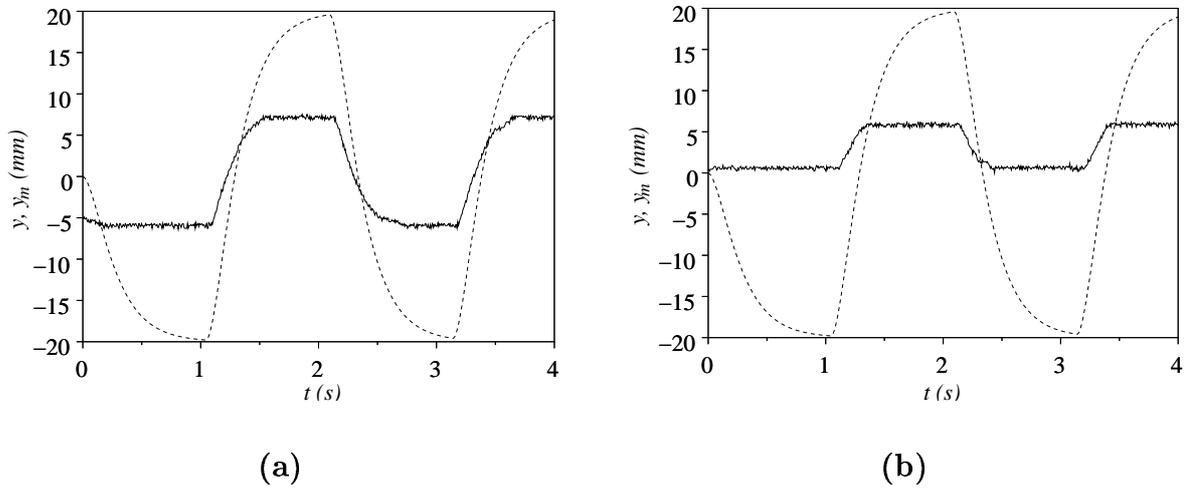
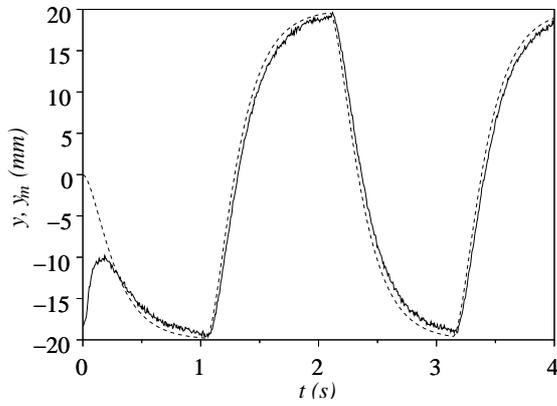
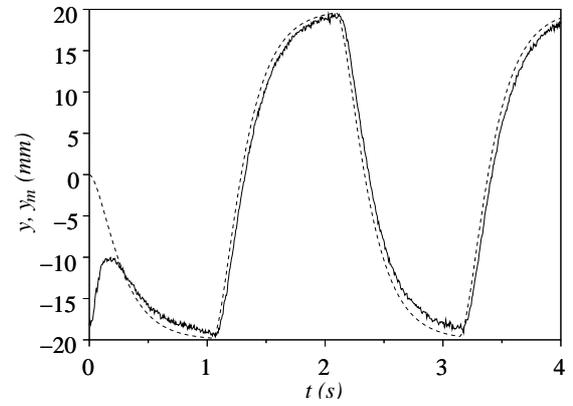


FIGURA 9.8: Resultados experimentais do rastreamento de trajetórias com o controle linear nominal: (a) carro com massa nominal e (b) carro com massa adicional. Nos gráficos: y — linha contínua; y_M — linha tracejada.

O controle a estrutura variável baseado no HGO resulta num rastreamento bastante preciso, ainda que a massa do carro seja aumentada (vide Figuras 9.9 a 9.12). Nota-se que o uso do controle nominal aliado ao controle a estrutura variável reduz significativamente o erro de saída, o que se conclui da comparação dos erros na Figura 9.10 (sem o controle nominal) com os erros na Figura 9.12 (incluindo o controle nominal).

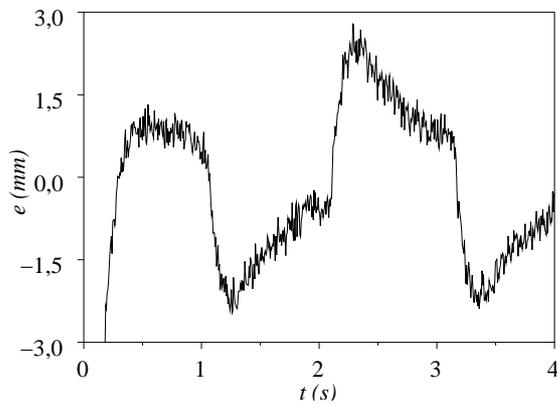


(a)

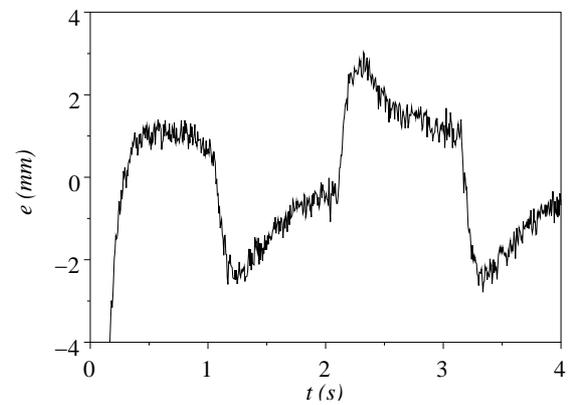


(b)

FIGURA 9.9: Resultados experimentais do rastreamento de trajetórias com o controle a estrutura variável sem o controle nominal: (a) carro com massa nominal e (b) carro com massa adicional. Nos gráficos: y — linha contínua; y_M — linha tracejada.

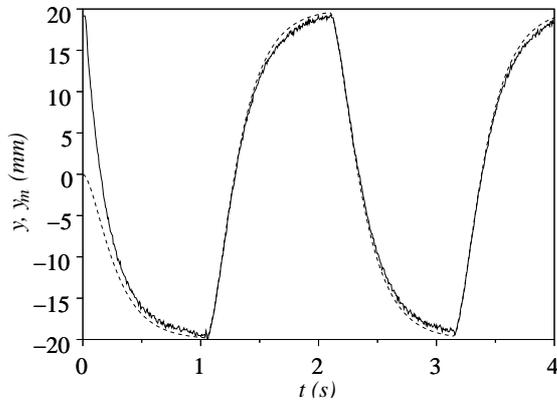


(a)

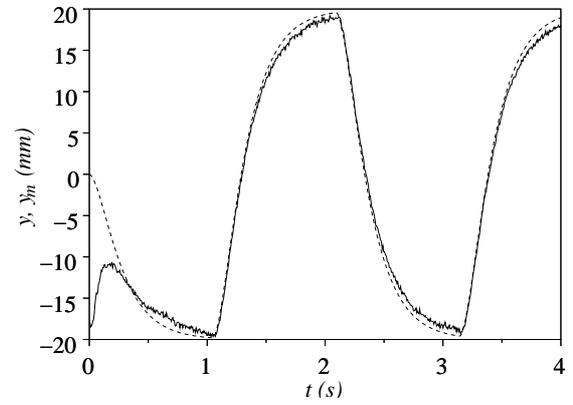


(b)

FIGURA 9.10: Erros de saída obtidos experimentalmente com o controle a estrutura variável sem o controle nominal: (a) carro com massa nominal e (b) carro com massa adicional.

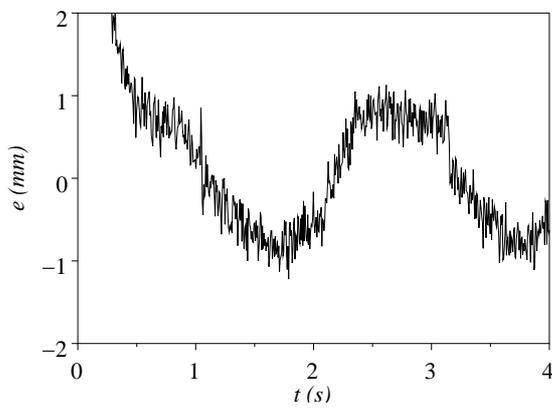


(a)

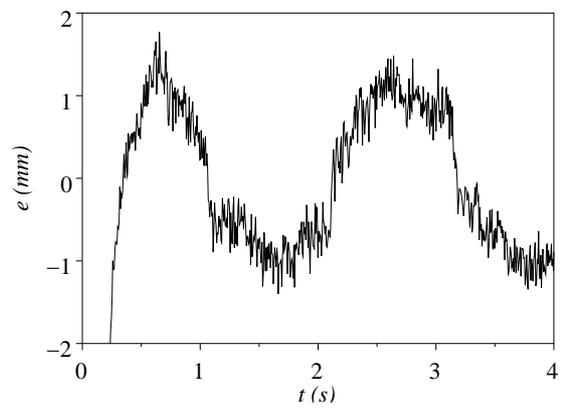


(b)

FIGURA 9.11: Resultados experimentais do rastreamento de trajetórias com o controle a estrutura variável incluindo o controle nominal: (a) carro com massa nominal e (b) carro com massa adicional. Nos gráficos: y — linha contínua; y_M — linha tracejada.



(a)



(b)

FIGURA 9.12: Erros de saída obtidos experimentalmente com o controle a estrutura variável incluindo o controle nominal: (a) carro com massa nominal e (b) carro com massa adicional.

Uma característica importante é a natureza do sinal de controle u . Na Figura 9.13 o sinal de controle linear nominal é bastante suave e de pequena amplitude. O algoritmo baseado em estrutura variável e no HGO sem *peaking* resulta no sinal controle chaveado em alta frequência e de grande amplitude apresentado na Figura 9.14. Conseqüentemente, a potência dissipada em calor no motor foi maior no esquema baseado em estrutura variável do que no caso do controlador linear nominal. Na Figura 9.14 observa-se que inicialmente o sinal u ultrapassa um pouco as tensões de saturação do conversor D/A ($\pm 5V$), o que não causou problemas no desempenho do controlador.

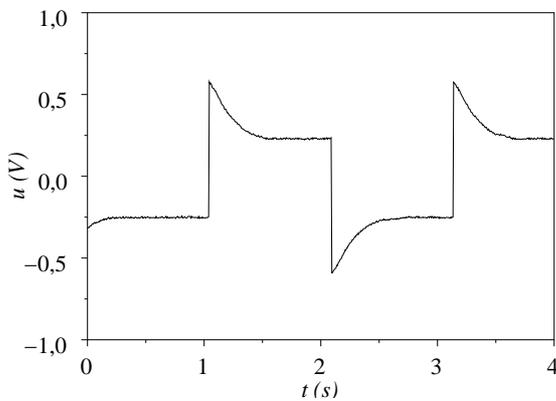


FIGURA 9.13: Sinal de controle obtido experimentalmente com o controle nominal para o carro com massa nominal.

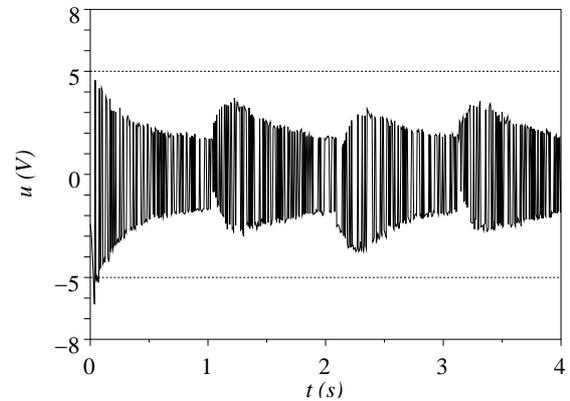


FIGURA 9.14: Sinal de controle obtido experimentalmente com o algoritmo a estrutura variável incluindo o controle nominal para o carro com massa nominal.

Comprovou-se que o uso do observador reduziu as oscilações em baixa frequência (*chattering*), que poderiam ser causadas pela dinâmica não modelada (e.g., dinâmica elétrica da armadura do motor, filtro *antialiasing* no sistema de aquisição de dados). Apesar disto, o controle a estrutura variável resulta em vibrações que poderiam desgastar os componentes mecânicos. As causas aparentes destas vibrações são o ruído na medição da posição y e a frequência de amostragem relativamente baixa (1 kHz) que pôde ser obtida com o sistema de aquisição de dados utilizado nos experimentos.

9.10 Comentários

Neste capítulo foi desenvolvido um controlador baseado em estrutura variável e num observador de alto ganho para sistemas lineares SISO incertos. A principal contribuição é que este sistema é globalmente exponencialmente estável e livre do fenômeno *peaking*. Em (Esfandiari & Khalil 1992, Emelyanov et al. 1992b) o uso do HGO resultou em *peaking*, conforme foi mostrado em (Oh & Khalil 1995). Algumas alternativas utilizadas para se evitar o *peaking* são:

1. A limitação do sinal de controle empregando-se saturações (Oh & Khalil 1995, Oh & Khalil 1997), cuja pena é se obter apenas a estabilidade semi-global, i.e., numa região limitada mas arbitrariamente grande.
2. O uso de um HGO com ganho variante no tempo (Chitour 2002), vide Observação 9.6.
3. O uso de um *observador de semi-alto ganho* (Lu & Spurgeon 1998, Lu & Spurgeon 1999), que de fato é um HGO em que se usa um valor para o parâmetro ε que não seja muito conservador, mas que é computado para se garantir a estabilidade do sistema em malha fechada.

Uma característica interessante do esquema de controle aqui proposto é que este guarda alguma semelhança com o VS-MRAC para sistemas SISO (Hsu et al. 1994, Hsu et al. 1997) e o UV-MRAC para sistemas MIMO, conforme se observa comparando-se o diagrama de blocos do UV-MRAC na Figura 6.1 (que é semelhante ao diagrama de blocos do VS-MRAC) com o diagrama de blocos do controlador baseado no HGO (Figura 9.4).

O VS-MRAC, o UV-MRAC e o controlador proposto neste capítulo são livres do fenômeno *peaking* e globalmente exponencialmente estáveis em relação a conjuntos residuais da ordem de pequenos parâmetros, que em condições ideais devem ser diminuídos para se reduzir o erro de rastreamento.

Os resultados experimentais obtidos com o controlador baseado em estrutura variável e no HGO livre de *peaking* indicam que se pode obter bons desempenhos em situações realistas com perturbações não-lineares (e.g., atrito seco), ruído de medição, dinâmica não modelada e grandes incertezas paramétricas.

Capítulo 10

Conclusão

Nesta Tese foram propostos diversos controladores para o rastreamento do sinal de saída de um modelo de referência utilizando-se apenas a realimentação da saída da planta. Considerou-se o controle de algumas classes de plantas não-lineares, multivariáveis, com parâmetros incertos e perturbações. Particularmente, se deu atenção especial a plantas lineares multivariáveis. A família de controladores aqui desenvolvida foi denominada UV-MRAC (*unit vector model-reference adaptive control*) pois emprega o controle vetorial unitário (UVC).

Uma grande contribuição desta Tese é trazer à luz a condição Hurwitz sobre a matriz de ganho de alta frequência em sistemas com UVC (vide Capítulo 2). Anteriormente, apenas (Baida 1993) havia obtido um resultado semelhante (vide Teorema 2.3) que, no entanto, ficara obscuro e desconhecido.

As principais características que deixam o UV-MRAC em evidência em relação a outros controladores são:

1. Aqui foi provada rigorosamente a estabilidade exponencial global do sistema de controle para plantas lineares multivariáveis de grau relativo uniforme arbitrário com perturbações de entrada e para uma classe de plantas multivariáveis de grau relativo uniforme e unitário com perturbações não-lineares descasadas da entrada.
2. Também foi desenvolvido um esquema de controle para uma classe de plantas multivariáveis de grau relativo uniforme arbitrário com perturbações não-lineares descasadas da entrada. No entanto, as suas propriedades de estabilidade ainda não foram analisadas rigorosamente.

3. Mostrou-se que o erro de rastreamento converge exponencialmente para uma vizinhança da origem. No caso do grau relativo do sistema ser uniforme e unitário, o erro de saída converge exponencialmente para zero e a lei de controle pode ser projetada para que o erro de saída convirja para zero em tempo finito.
4. As classes de incertezas paramétricas na planta são mais amplas do que outros controladores por modo deslizante admitem. Particularmente, a aplicação do UV-MRAC impõe apenas uma condição Hurwitz sobre a matriz de ganho de alta frequência, enquanto que outros controladores por modo deslizante exigem que a matriz de ganho de alta frequência seja positiva definida (Tao & Ioannou 1989, Chien & Fu 1992, Chien et al. 1996) ou que as incertezas sejam limitadas (Edwards & Spurgeon 1996, Spurgeon et al. 1996, Edwards & Spurgeon 1997, Kwan 2001, Choi 2002).
5. O UV-MRAC não é baseado em observadores, o que parece conveniente para sistemas em que as incertezas podem dificultar o projeto de observadores.
6. O sistema de controle formado pelo UV-MRAC é livre do fenômeno *peaking*, que é indesejável e pode ocorrer em alguns sistemas baseados em observadores de alto ganho, c.f. Seção 6.7.

O UV-MRAC é desenvolvido a partir da formulação de controle adaptativo com adaptação paramétrica. No entanto, o UV-MRAC utiliza *adaptação por síntese de sinais*, que lhe confere robustez à dinâmica não modelada e perturbações.

Nesta Tese também foi desenvolvido um controlador para sistemas lineares, mono-variáveis, incertos e com grau relativo arbitrário em que a superfície de chaveamento é gerada a partir do estado estimado por um observador de alto ganho. Por outro lado, a função de modulação da lei de controle à estrutura variável é gerada por filtros de entrada e de saída, resultando numa estrutura que se assemelha às daquelas do VS-MRAC de (Hsu et al. 1994) e do UV-MRAC. A novidade é que se conseguiu evitar a ocorrência do fenômeno *peaking* e, simultaneamente, mantêve-se as propriedades globais de estabilidade exponencial.

10.1 Continuações Naturais para este Trabalho

Propõem-se os seguintes tópicos de pesquisa para continuar este trabalho:

1. A extensão do UV-MRAC para sistemas multivariáveis não-lineares de classes mais amplas.
2. O desenvolvimento de um controlador para sistemas multivariáveis incertos em que a superfície de chaveamento seja gerada a partir do estado estimado por um observador para sistemas incertos, e.g., observador de alto ganho. A função de modulação poderia ser gerada por filtros de entrada e de saída como é feito no UV-MRAC e no controlador baseado em observadores de alto ganho proposto no Capítulo 9. Assim, pretende-se reduzir as restrições sobre a matriz *interactor* do sistema (e.g., grau relativo uniforme), que é uma vantagem que talvez possa ser obtida pelo uso de observadores, além de se evitar a ocorrência do *peaking*, fenômeno que não ocorre no UV-MRAC nem no controlador baseado em observador proposto no Capítulo 9.
3. As funções de modulação para o controle vetorial unitário foram desenvolvidas utilizando-se normas euclidianas de vetores e normas induzidas de matrizes. Embora o uso de normas vetoriais e matriciais resulte numa formulação matemática concisa e elegante, o uso indiscriminado dessas normas na síntese das funções de modulação pode resultar em sinais de controle com amplitudes desnecessariamente grandes. Assim, funções de modulação muito conservadoras podem demandar o consumo excessivo de energia e podem exceder as limitações físicas do sistema. Este problema poderia ser amenizado pelo uso de sinais gerados elemento a elemento de cada vetor na síntese das funções de modulação, a fim de se reduzir a amplitude dessas funções, conforme foi feito no VS-MRAC para sistemas lineares monovariáveis de grau relativo unitário (Hsu & Costa 1989) e como é sugerido em (Utkin et al. 1999, p. 285).
4. Tendo em vista o projeto do UV-MRAC para sistemas incertos, poderiam ser desenvolvidos algoritmos de otimização dos coeficientes das *aproximações por filtros de primeira ordem* e para os coeficientes das funções de modulação do UV-MRAC. De fato algumas idéias já foram lançadas no Capítulo 3 e nas Seções 5.2.1

e 7.4, mas falta desenvolver procedimentos mais sistemáticos e genéricos para o projeto.

5. Os esquemas de controle desenvolvidos nesta Tese são bastante robustos a incertezas paramétricas e perturbações na planta, o que é conseguido assumindo-se que os sinais de saída utilizados na realimentação são livres de ruído. Isto motiva a avaliação da influência do ruído de medição, possivelmente conjugado a outras imperfeições (e.g., dinâmica não modelada), no desempenho do sistema de controle. Naturalmente, isso motivará o desenvolvimento de estratégias para reduzir os efeitos danosos do ruído no desempenho do UV-MRAC.

Referências Bibliográficas

- Apkarian, J. (1995), *A Comprehensive and Modular Laboratory for Control Systems Design and Implementation*, Quanser Consulting.
- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (1997), *Computer-Controlled Systems*, 3rd edn, Prentice-Hall.
- Baida, S. V. (1993), 'Unit sliding mode control in continuous- and discrete-time systems', *Int. J. Contr.* **57**(5), 1125–1132.
- Bajpai, G., Chang, B. C. & Lau, A. (2001), 'Reconfiguration of flight control systems for actuator failures', *IEEE Aerosp. Electron. Syst. Mag.* **16**(9), 29–33.
- Belegundu, A. D. & Chandrupatla, T. R. (1999), *Optimization Concepts and Applications in Engineering*, Prentice Hall.
- Bodson, M. & Groszkiewicz, J. E. (1997), 'Multivariable adaptive algorithms for reconfigurable flight control', *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **5**(2), 217–229.
- Bondarev, A. G., Bondarev, S. A., Kostyleva, N. E. & Utkin, V. I. (1985), 'Sliding modes in systems with asymptotic state observers', *Autom. Remote Control* **46**(6), 679–684. Pt. 1.
- Boyd, S., Balakrishnan, R., El Ghaoui, L. & Feron, E. (1994), *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM.
- Byrnes, C. I. & Willems, J. C. (1984), Adaptive stabilization of multivariable linear systems, in 'Proc. IEEE Conf. on Decision and Control', Las Vegas, NV, pp. 1574–1577.
- Chang, P. H. & Lee, J. W. (1996), 'A model reference observer for time-delay control and its application to robot trajectory control', *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **4**(1), 2–10.
- Chien, C.-J. & Fu, L.-C. (1992), 'A new robust model reference control with improved performance for a class of multivariable unknown plants', *Int. J. Adaptive Contr. Signal Process.* **6**, 69–93.
- Chien, C.-J., Sun, K.-C., Wu, A.-C. & Fu, L.-C. (1996), 'A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants', *Automatica* **32**(6), 833–848.
- Chitour, Y. (2002), 'Time-varying high-gain observers for numerical differentiation', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **47**(9), 1565–1569.

- Choi, H. H. (2002), ‘Variable structure output feedback control design for a class of uncertain dynamic systems’, *Automatica* **38**(2), 335–341.
- Costa, R. R., Hsu, L., Imai, A. K. & Kokotović, P. (2003), ‘Lyapunov-based adaptive control of MIMO systems’, *Automatica* **39**, 1251–1257.
- Cunha, J. P. V. S. (2002), First order upperbound for norms of filtered signals, Technical report, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
*<http://www.coep.ufrj.br/~jpaulo/First-order-approximation.ps>
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Hsu, L. (2003a), Cooperative actuators for fault tolerant model-reference sliding mode control, in ‘IEEE Int. Symp. Ind. Electron.’, Rio de Janeiro.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Hsu, L. (2003b), Design of first order approximation filters applied to sliding mode control, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Maui, Hawaii, pp. 3531–3536.
- Cunha, J. P. V. S., Hsu, L., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2003), ‘Output-feedback model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **48**(12), 2245–2250.
- de Mathelin, M. & Bodson, M. (1994), ‘Multivariable adaptive control: identifiable parameterizations and parameter convergence’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(8), 1612–1617.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. K. (1996), ‘Robust output tracking using a sliding-mode controller/observer scheme’, *Int. J. Contr.* **64**(5), 967–983.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. K. (1997), ‘Sliding mode output tracking with application to a multivariable high temperature furnace problem’, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* **7**, 337–351.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. K. (1998), *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, Taylor & Francis Ltd.
- Emelyanov, S. V., Korovin, S. K., Nersisian, A. L. & Nisenzon, Y. Y. (1992a), ‘Discontinuous output feedback stabilizing an uncertain MIMO plant’, *Int. J. Contr.* **55**(1), 83–107.
- Emelyanov, S. V., Korovin, S. K., Nersisian, A. L. & Nisenzon, Y. Y. (1992b), ‘Output feedback stabilization of uncertain plants: a variable structure systems approach’, *Int. J. Contr.* **55**(1), 61–81.
- Esfandiari, F. & Khalil, H. K. (1992), ‘Output feedback stabilization of fully linearizable systems’, *Int. J. Contr.* **56**, 1007–1037.
- Filippov, A. F. (1964), ‘Differential equations with discontinuous right-hand side’, *American Math. Soc. Translations* **42**(2), 199–231.
- Filippov, A. F. (1988), *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*, Kluwer Academic Publishers.

- Gibbens, P. W., Schwartz, C. A. & Fu, M. (1993), 'Achieving diagonal interactor matrix for multivariable linear systems with uncertain parameters', *Automatica* **29**(6), 1547–1550.
- Gordon, T. G. & Best, M. C. (1994), Dynamic optimization of nonlinear semi-active suspension controllers, in 'Proc. Int. Conf. on Control (Control'94)', Vol. 1, Conventry, UK, pp. 332–337.
- Gutman, S. (1979), 'Uncertain dynamical systems — a Lyapunov min-max approach', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **24**(3), 437–443.
- Gutman, S. & Leitmann, G. (1975), Stabilizing control for linear systems with bounded parameters and input uncertainty, in 'Proc. 7th IFIP Conf. on Optimization Techniques', Nice, France, pp. 8–14.
- Hamming, R. W. (1973), *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd edn, Dover Publications.
- Hsu, L. (1990), 'Variable structure model reference adaptive control using only I/O measurement: General case', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **35**(11), 1238–1243.
- Hsu, L. (1997), 'Smooth sliding control of uncertain systems based on a prediction error', *Int. J. on Robust and Nonlinear Control* **7**, 353–372.
- Hsu, L., Araújo, A. D. & Costa, R. R. (1994), 'Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(1), 4–21.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1989), 'Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurement: Part I', *Int. J. Contr.* **49**(2), 399–416.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1996), Adaptive control with sliding modes: theory and applications, in 'Minicourse Proc. XI Congresso Brasileiro de Automática', São Paulo, pp. 39–60.
- Hsu, L., Costa, R. R. & Cunha, J. P. V. S. (2002a), Model-reference output-feedback sliding mode control of a class of multivariable nonlinear systems, in 'Proc. XIV Congresso Brasileiro de Automática', Natal, RN, Brazil, pp. 1016–1021.
- Hsu, L., Costa, R. R. & Cunha, J. P. V. S. (2002b), Output-feedback sliding mode controller for nonlinear uncertain multivariable systems, in 'Proc. 7th Int. Workshop on Variable Structure Sys.', Sarajevo, pp. 123–132.
- Hsu, L., Costa, R. R. & Cunha, J. P. V. S. (2003), 'Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems', *Asian Journal of Control* **5**(4), 543–556.
- Hsu, L., Cunha, J. P. V. S. & Costa, R. R. (2001), Model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems, in 'Proc. IEEE Conf. on Decision and Control', Vol. 1, Orlando, FL, USA, pp. 756–761.
- Hsu, L., Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2002a), Multivariable output-feedback sliding mode control, in X. Yu & J.-X. Xu, eds, 'Variable Structure Systems: Towards the 21st Century', Springer-Verlag, pp. 283–313.

- Hsu, L., Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2002*b*), Unit vector control of multivariable systems, *in* 'Preprints of the 15th IFAC World Congress', Barcelona.
- Hsu, L., Kaszkurewicz, E. & Bhaya, A. (2000), 'Matrix-theoretic conditions for the realizability of sliding manifolds', *Systems & Contr. Letters* **40**, 145–152.
- Hsu, L., Lizarralde, F. & Araújo, A. D. (1997), 'New results on output-feedback variable structure adaptive control: design and stability analysis', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**(3), 386–393.
- Hui, S. & Žak, S. H. (1993), 'Robust output feedback stabilization of uncertain dynamic systems with bounded controllers', *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* **3**(2), 115–132.
- Ilchmann, A. & Owens, D. H. (1990), 'Adaptive stabilization with exponential decay', *Systems & Contr. Letters* **14**, 437–443.
- Ioannou, P. A. & Sun, J. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall.
- Ioannou, P. & Tsakalis, K. (1986), 'A robust direct adaptive controller', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **31**(11), 1033–1043.
- Kailath, T. (1980), *Linear Systems*, Prentice Hall.
- Kase, W. & Mutoh, Y. (2000), 'Suboptimal exact model matching for multivariable systems with measurement noise', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **45**(6), 1170–1175.
- Khalil, H. K. (1996), *Nonlinear Systems*, 2nd edn, Prentice Hall.
- Kwan, C. (2001), 'Further results on variable structure output feedback controllers', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **46**(9), 1505–1508.
- Levine, W. S., ed. (1996), *The Control Handbook*, CRC Press.
- Lu, X.-Y. & Spurgeon, S. K. (1998), 'Output feedback stabilization of SISO nonlinear systems via dynamic sliding modes', *Int. J. Contr.* **70**(5), 735–759.
- Lu, X.-Y. & Spurgeon, S. K. (1999), 'Output feedback stabilization of MIMO nonlinear systems via dynamic sliding mode', *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* **9**, 275–305.
- Min, L. J. (2001), Controlador Deslizante para Sistema Não-Linear Incerto Usando Realimentação de Saída, PhD thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Min, L. J. & Hsu, L. (2000), Sliding controller for output feedback of uncertain nonlinear systems: global and semi-global results, *in* 'Proc. 6th IEEE Int. Workshop on Variable Structure Sys.', Gold Coast, Australia, pp. 169–178.
- Niksefat, N. & Sepehri, N. (2002), 'A QFT fault-tolerant control for electrohydraulic positioning systems', *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **10**(4), 626–632.

- Noble, B. & Daniel, J. W. (1986), *Álgebra Linear Aplicada*, 2^a edn, Prentice-Hall do Brasil.
- Noura, H., Sauter, D., Hamelin, F. & Theilliol, D. (2000), ‘Fault-tolerant control in dynamic systems: application to a winding machine’, *IEEE Control Syst. Mag.* **20**(1), 33–49.
- Ogata, K. (1997), *Modern Control Engineering*, 3rd edn, Prentice-Hall.
- Oh, S. & Khalil, H. K. (1995), ‘Output feedback stabilization using variable structure control’, *Int. J. Contr.* **62**(4), 831–848.
- Oh, S. & Khalil, H. K. (1997), ‘Nonlinear output-feedback tracking using high-gain observer and variable structure control’, *Automatica* **33**(10), 1845–1856.
- Patel, R. V., Laub, A. J. & Van Dooren, P. M., eds (1994), *Numerical Linear Algebra Techniques for Systems and Control*, IEEE Press.
- Rastrigin, L. A. (1983), *Contemporary Principles to Control Complex Objects*, MIR.
- Ryan, E. P. (1993), ‘Adaptive stabilization of multi-input nonlinear systems’, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* **3**(2), 169–181.
- Sastry, S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice-Hall.
- Schwartz, C. A. & Yan, A. (1995), ‘Comments on ‘achieving diagonal interactor matrix for multivariable linear systems with uncertain parameters’’, *Automatica* **31**(1), 161–164.
- Shyu, K.-K., Tsai, Y.-W., Yu, Y. & Chang, K.-C. (2000), ‘Dynamic output feedback sliding mode design for a class of linear unmatched uncertain systems’, *Int. J. Contr.* **73**(16), 1463–1474.
- Slotine, J. J. E., Hedrick, J. K. & Misawa, E. A. (1987), ‘On sliding observers for nonlinear systems’, *ASME J. Dynamic Systems Measurement and Control* **109**, 245–252.
- Spurgeon, S. K. & Davies, R. (1993), ‘A nonlinear control strategy for robust sliding mode performance in the presence of unmatched uncertainty’, *Int. J. Contr.* **57**(5), 1107–1123.
- Spurgeon, S. K., Edwards, C. & Foster, N. P. (1996), Robust model reference control using a sliding mode controller/observer scheme with application to a helicopter problem, in ‘Proc. IEEE Workshop on Variable Struct. Sys.’, pp. 36–41.
- Sussmann, H. J. & Kokotović, P. V. (1991), ‘The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **36**(4), 424–440.
- Tao, G. & Ioannou, P. A. (1988), ‘Robust model reference adaptive control for multi-variable plants’, *Int. J. Adaptive Contr. Signal Process.* **2**, 217–248.

- Tao, G. & Ioannou, P. A. (1989), A MRAC for multivariable plants with zero residual tracking error, *in* 'Proc. IEEE Conf. on Decision and Control', Tampa, USA, pp. 1597–1600.
- Utkin, V. (1983), 'Variable structure systems: Present and future', *Automation and Remote Control* **44**(9), 1105–1120.
- Utkin, V., Guldner, J. & Shi, J. (1999), *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor & Francis Ltd.
- Utkin, V. I. (1978), *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR.
- Utkin, V. I. (1992), *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag.
- Van Loan, C. (1985), 'How near is a stable matrix to an unstable one?', *Contemporary Math.* **47**, 465–478.
- Van Loan, C. F. (2000), *Introduction to Scientific Computing: a Matrix-Vector Approach Using MATLAB*, 2nd edn, Prentice Hall.
- Veillette, R. J., Medanić, J. V. & Perkins, W. R. (1992), 'Design of reliable control systems', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **37**(3), 290–304.
- Walcott, B. L. & Žak, S. (1988), 'Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications', *IEEE Trans. Syst. Man and Cyber.* **18**(1), 88–104.
- Weller, S. R. & Goodwin, G. C. (1994), 'Hysteresis switching adaptive control of linear multivariable systems', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(7), 1360–1375.
- Wolovich, W. A. & Falb, P. L. (1976), 'Invariants and canonical forms under dynamic compensation', *SIAM J. Contr. Optim.* **14**(6), 996–1008.
- Young, K. D., Utkin, V. I. & Özgüner, U. (1999), 'A control engineer's guide to sliding mode control', *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **7**(3), 328–342.
- Young, K.-K. D., Kokotović, P. V. & Utkin, V. I. (1977), 'A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **22**(6), 931–938.
- Žak, S. H. & Hui, S. (1993), 'Output feedback variable structure controllers and state estimators for uncertain/nonlinear dynamic systems', *IEE Proc.-D.* **140**(1), 41–50.

Apêndice A

Trabalhos Publicados

Para evidenciar a divulgação dos resultados obtidos nesta Tese de Doutorado, este apêndice relaciona e descreve sucintamente as principais publicações realizadas até este momento:

1. O UV-MRAC para sistemas lineares multivariáveis de grau relativo uniforme e unitário foi publicado no artigo em periódico (Cunha, Hsu, Costa & Lizarralde 2003). Uma versão preliminar do UV-MRAC para essa classe de sistemas fôra publicada anteriormente no artigo em congresso (Hsu et al. 2001).
2. O artigo em periódico (Hsu et al. 2003) é o mais completo que foi publicado sobre o UV-MRAC para uma classe de sistemas multivariáveis não-lineares de grau relativo uniforme e unitário. Esse apresenta o desenvolvimento da prova de estabilidade, que anteriormente fôra apresentada no artigo em congresso (Hsu, Costa & Cunha 2002*a*). Além disso, apresenta um exemplo de aplicação a um sistema de controle tolerante a falhas que já havia sido publicado no artigo em congresso (Hsu, Costa & Cunha 2002*b*).
3. O capítulo de livro (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002*a*) propõe o UV-MRAC para sistemas multivariáveis lineares de grau relativo uniforme arbitrário. Nesse trabalho, destacam-se ainda os seguintes tópicos: (i) a revisão bastante abrangente da literatura sobre controle à estrutura variável de sistemas multivariáveis; (ii) a revisão do controle à estrutura variável baseado em observadores; (iii) a comparação do controle vetorial unitário (UVC) com o controle à estrutura variável

baseado na *função sinal*; (iv) relaciona-se o UVC com a *estabilização adaptativa*; (v) são enunciados e provados diversos lemas, que servem como ferramentas para o desenvolvimento de sistemas UVC. Uma versão mais compacta sobre o UV-MRAC para essa classe de sistemas foi publicada no artigo de congresso (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002b).

4. O UV-MRAC para sistemas lineares de grau relativo uniforme e unitário foi aplicado no controle tolerante a falhas de uma cadeia composta por diversos carros (Cunha, Costa & Hsu 2003a). Esse artigo, apresentado em um congresso, também propôs uma abordagem de desenvolvimento do UV-MRAC baseada na *forma regular* da equação de estado da planta.
5. Alguns métodos para a síntese da *aproximação por filtro de primeira ordem* (*first order approximation filter* — FOAF) foram apresentados no artigo de congresso (Cunha, Costa & Hsu 2003b). Um dos métodos é baseado em funções quadráticas de Lyapunov. Os demais são baseados na otimização de alguns critérios de desempenho do FOAF.

Apêndice B

Lema Auxiliar e Provas dos Lemas sobre Controle Vetorial Unitário

B.1 Lema Auxiliar para a Prova da Proposição 2.1

Abaixo é apresentado um lema (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Lema 3) que auxilia na prova da Proposição 2.1.

Lema B.1 *Seja $r(t)$ uma função escalar absolutamente contínua. Supõe-se que $r(t)$ seja não negativa e que enquanto $r > 0$ satisfaça*

$$\dot{r} \leq -\delta - \gamma r + R \exp(-\lambda t), \quad (\text{B.1})$$

onde $\delta, \gamma, \lambda, R$ são constantes não negativas. Então, pode-se afirmar que:

(a) $r(t)$ é limitado por

$$r(t) \leq [r(0) + cR] \exp(-\lambda_1 t), \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{B.2})$$

onde c é uma constante positiva apropriada e $\lambda_1 < \min(\lambda, \gamma)$;

(b) se $\delta > 0$ então $\exists t_1 \geq 0$ tal que $r(t) = 0, \forall t \geq t_1$.

Prova: De acordo com o Teorema da Comparação (Filippov 1964, Teorema 7), um majorante $\bar{r}(t)$ para $r(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\dot{\bar{r}} = -\gamma\bar{r} + R \exp(-\lambda t), \quad \bar{r}(0) = r(0), \quad t \geq 0.$$

A solução da equação acima tem a forma:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(0) \exp(-\gamma t) + \exp(-\gamma t) * R \exp(-\lambda t), \quad t \geq 0.$$

Assim,

$$r(t) \leq [r(0) + cR] \exp(-\lambda_1 t), \quad \forall t \geq 0,$$

o que prova a primeira parte do Lema. Agora, se $\delta > 0$, a equação de comparação é

$$\dot{\bar{r}} = -\delta - \gamma\bar{r} + R \exp(-\lambda t), \quad \bar{r}(0) = r(0), \quad t \geq 0, \quad (\text{B.3})$$

a qual implica que enquanto a desigualdade $r(t) > 0$ for satisfeita tem-se

$$r(t) \leq \left[r(0) + \frac{\delta}{\gamma} + cR \right] \exp(-\lambda_1 t) - \frac{\delta}{\gamma}. \quad (\text{B.4})$$

Definindo-se

$$t_1 := \frac{1}{\lambda_1} \ln \left[\frac{\gamma(r(0) + \delta/\gamma + cR)}{\delta} \right] < +\infty, \quad (\text{B.5})$$

nota-se que o lado direito da desigualdade (B.4) é negativo $\forall t > t_1$. Assim, uma vez que $r(t)$ é contínuo e $r(t) \geq 0$, conclui-se que $r(t)$ torna-se identicamente nulo para $t \geq t_1$. ■

B.2 Provas dos Lemas da Seção 2.2

A seguir são apresentadas as provas dos Lemas sobre o controle vetorial unitário apresentados na Seção 2.2. Estas provas foram originalmente desenvolvidas em (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Apêndices B.2 a B.4). Aqui foi incluído o sinal com

decaimento exponencial $\pi_2(t)$ nas funções de modulação e foi revisada a prova do Lema 2.3.

B.2.1 Prova do Lema 2.2

Considere uma realização estabilizável e detectável de (2.23)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(U + d + \pi_1), \\ \varepsilon &= Cx,\end{aligned}\tag{B.6}$$

onde $M(s) = C(sI - A)^{-1}B$. A matriz de ganho de alta frequência é $K = CB$. O sistema (B.6) pode ser reescrito na *forma regular* (vide (Young et al. 1977, Utkin 1992))

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}\varepsilon,\tag{B.7}$$

$$\dot{\varepsilon} = A_{21}x_1 + A_{22}\varepsilon + K(U + d + \pi_1).\tag{B.8}$$

O vetor de estado desta realização é $x_e := [x_1^T, \varepsilon^T]^T$. A dinâmica dos zeros de (B.7)–(B.8) é dada por

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1.\tag{B.9}$$

Como se assumiu que $M(s)$ é de fase mínima, então A_{11} é uma matriz Hurwitz. Seja λ_0 a margem de estabilidade da matriz A_{11} e $0 < \gamma_0 < \lambda_0$. Então, de acordo com o Lema 3.1 aplicado ao subsistema (B.7) com matriz de transferência dada por $x_1 = (sI - A_{11})^{-1}A_{12}\varepsilon$, obtém-se o majorante

$$\|x_1(t)\| \leq c_1 [|\varepsilon_f(t)| + |\varepsilon_f^0(t)|] + \|x_1^0(t)\|,\tag{B.10}$$

com

$$\varepsilon_f(t) = \exp(-\gamma_0 t) * \|\varepsilon(t)\|,\tag{B.11}$$

onde ε_f^0 e x_1^0 são termos exponencialmente decrescentes que são devidos às condições iniciais. Por outro lado, uma vez que $-K$ é Hurwitz e, conseqüentemente, não-singular,

a equação (B.8) pode ser reescrita como

$$\dot{\varepsilon} = A_{22}\varepsilon + K [U_1 + d + K^{-1}A_{21}(sI - A_{11})^{-1}A_{12} * \varepsilon + \pi_3(t)] , \quad (\text{B.12})$$

onde

$$U_1 = -\rho_1 \frac{\varepsilon}{\|\varepsilon\|} , \quad (\text{B.13})$$

$$\rho_1 \geq \delta + (1 + c_d)\|d(t)\| + c_\varepsilon\|\varepsilon\| + c_f \exp(-\gamma_0 t) * \|\varepsilon\| + \pi_4(t) . \quad (\text{B.14})$$

O termo π_3 inclui os termos π_1 e x_1^0 . O termo π_4 inclui os termos π_2 e ε_f^0 . Ambos os termos satisfazem

$$\|\pi_3(t)\| \text{ e } \|\pi_4(t)\| \leq [c_1\|x_{ea}(0)\| + R] \exp(-\lambda_1 t) , \quad (\text{B.15})$$

onde $x_{ea} := [x_1^T, \varepsilon^T, \varepsilon_f^T]^T$ é o vetor de estado completo do sistema em malha fechada e $\lambda_1 < \min(\gamma_0, \lambda)$. Assim, da Proposição 2.1 conclui-se que a desigualdade (2.27) é satisfeita para $\|\varepsilon\|$, desde que as constantes $c_d, c_\varepsilon, c_f \geq 0$ sejam escolhidas adequadamente. Uma vez que $\|x_1\|$ e $\|\varepsilon_f\|$ satisfaçam uma desigualdade similar, então $\|x_{ea}(t)\|$ também satisfaz (2.27).

Da Proposição 2.1, pode-se concluir, também, que se $\delta > 0$ em (2.25), então ε torna-se identicamente nulo a partir de algum tempo finito $t_s \geq 0$.

B.2.2 Prova do Corolário 2.2

Para simplificar a prova, assume-se que a realização de $M(s)$ é controlável. Neste caso, se há estados inobserváveis, o elemento A_{21} da forma regular (B.7)–(B.8) é identicamente nulo, i.e., $A_{21} = 0$. Então, o resultado segue diretamente da prova do Lema 2.2. No caso de uma realização não-mínima que seja não-controlável e/ou não-observável, a prova pode ser desenvolvida de uma forma similar utilizando-se a *decomposição de Kalman* (vide (Åström & Wittenmark 1997, pp. 101–102)) da forma regular (B.7)–(B.8).

Se $\gamma_j = \gamma > 0, (\forall j \in \{1, \dots, m\})$, então a aplicação do Corolário 2.1 na prova do Lema 2.2 permite concluir que se pode escolher $c_\varepsilon = 0$ na função de modulação (2.29).

B.2.3 Prova do Lema 2.3

Ao longo da prova o símbolo k_i ($i \in \mathbb{N}$) denota *constante positiva apropriada*.

Uma vez que $-K$ é Hurwitz, existem matrizes $P = P^T > 0$ e $Q = Q^T > 0$ que satisfazem a equação de Lyapunov

$$K^T P + P K = Q. \quad (\text{B.16})$$

Então, a derivada da forma quadrática

$$V(\varepsilon) = \hat{\varepsilon}^T P \hat{\varepsilon} \quad (\text{B.17})$$

é dada por

$$\dot{V} = -2\alpha \hat{\varepsilon}^T P \hat{\varepsilon} + [\hat{\varepsilon}^T P K U + U^T K^T P \hat{\varepsilon}] + 2\hat{\varepsilon}^T P K d_U. \quad (\text{B.18})$$

Utilizando-se a lei de controle (2.32) tem-se que

$$\dot{V} = -2\alpha V - \rho \frac{\hat{\varepsilon}^T P K \varepsilon + \varepsilon^T K^T P \hat{\varepsilon}}{\|\varepsilon\|} + 2\hat{\varepsilon}^T P K d_U. \quad (\text{B.19})$$

Agora, isolando-se o termo exponencial $\pi_2(t)$ na função de modulação (2.33) obtém-se

$$\dot{V} \leq -2\alpha V + 2\|PK\| |\pi_2| \|\hat{\varepsilon}\| - \bar{\rho} \frac{\hat{\varepsilon}^T P K \varepsilon + \varepsilon^T K^T P \hat{\varepsilon}}{\|\varepsilon\|} + 2\hat{\varepsilon}^T P K d_U, \quad (\text{B.20})$$

que pode ser majorado por

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\alpha V + 2\|PK\| |\pi_2| \|\hat{\varepsilon}\| - \bar{\rho} \frac{\varepsilon^T P K \varepsilon + \varepsilon^T K^T P \varepsilon}{\|\varepsilon\|} \\ &\quad + \bar{\rho} \frac{(\pi_1 + \beta)^T P K \varepsilon + \varepsilon^T K^T P (\pi_1 + \beta)}{\|\varepsilon\|} + 2\varepsilon^T P K d_U - 2(\pi_1 + \beta)^T P K d_U \\ &\leq -2\alpha V + 2\|PK\| |\pi_2| \|\hat{\varepsilon}\| - \bar{\rho} \lambda_{\min}(Q) \|\varepsilon\| \\ &\quad + 2\bar{\rho} \|PK\| \|\pi_1 + \beta\| + 2\|PK\| \|\varepsilon\| \|d_U\| + 2\|PK\| \|\pi_1 + \beta\| \|d_U\|. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Seja uma função de modulação $\bar{\rho}$ tal que

$$(1 + \bar{c}_d)(1 + c_d)\bar{d}_U(t) \leq \bar{\rho}(t) \leq (1 + \tilde{c}_d)\bar{d}_U(t), \quad (\text{B.22})$$

$\forall t \geq 0$, com

$$c_d \geq 2 \frac{\|PK\|}{\lambda_{\min}(Q)} - 1 \geq 0, \quad \hat{c}_d = (1 + \bar{c}_d)(1 + c_d) - 1, \quad (\text{B.23})$$

e quaisquer $\bar{c}_d > 0$, $\tilde{c}_d \geq \hat{c}_d$ (vide (2.34) e (2.35)). Utilizando-se o majorante $\bar{d}_U(t) \geq \|d_U(t)\|$, $\forall t \geq 0$, obtém-se a partir de (B.21)

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\alpha V + 2\|PK\| |\pi_2| \|\hat{\varepsilon}\| - 2(1 + \bar{c}_d)\|PK\| \|\varepsilon\| \bar{d}_U \\ &\quad + 2(1 + \tilde{c}_d)\|PK\| \|\pi_1 + \beta\| \bar{d}_U + 2\|PK\| \|\varepsilon\| \bar{d}_U + 2\|PK\| \|\pi_1 + \beta\| \bar{d}_U \\ &= -2\alpha V + 2\|PK\| |\pi_2| \|\hat{\varepsilon}\| - 2\tilde{c}_d\|PK\| \|\varepsilon\| \bar{d}_U + 2(2 + \tilde{c}_d)\|PK\| \|\pi_1 + \beta\| \bar{d}_U \\ &= -2\alpha V + 2\|PK\| |\pi_2| \|\hat{\varepsilon}\| + 2\|PK\| [(2 + \tilde{c}_d)\|\pi_1 + \beta\| - \tilde{c}_d\|\varepsilon\|] \bar{d}_U. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Como $\varepsilon = \hat{\varepsilon} + \pi_1 + \beta$ tem-se que $\|\varepsilon\| \geq \|\hat{\varepsilon}\| - \|\pi_1 + \beta\|$ e, assim sendo,

$$\dot{V} \leq -2\alpha V + 2\|PK\| |\pi_2| \|\hat{\varepsilon}\| + 2\|PK\| [(2 + \tilde{c}_d + \bar{c}_d)\|\pi_1 + \beta\| - \bar{c}_d\|\hat{\varepsilon}\|] \bar{d}_U. \quad (\text{B.25})$$

Então, enquanto o sinal $\hat{\varepsilon}(t)$ estiver fora da bola definida por

$$\|\hat{\varepsilon}(t)\| \leq \frac{2 + \tilde{c}_d + \bar{c}_d}{\bar{c}_d} \|\pi_1(t) + \beta(t)\|, \quad (\text{B.26})$$

a seguinte desigualdade será válida

$$\dot{V} \leq -2\alpha V + 2\|PK\| |\pi_2| \|\hat{\varepsilon}\| \leq -2\alpha V + 2\|PK\| \|\hat{\varepsilon}\| R \exp(-\lambda t). \quad (\text{B.27})$$

Agora, tomando-se a desigualdade de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_{\min}(P) \|\hat{\varepsilon}\|^2 \leq V(\hat{\varepsilon}) \leq \lambda_{\max}(P) \|\hat{\varepsilon}\|^2, \quad (\text{B.28})$$

define-se $r := \sqrt{V}$ e $c_D := \|PK\|/\sqrt{\lambda_{\min}(P)}$, para se obter

$$\dot{r} \leq -\alpha r + c_D R \exp(-\lambda t). \quad (\text{B.29})$$

Conseqüentemente, seguindo-se o desenvolvimento da prova do Lema B.1 (vide Seção B.1) pode-se concluir que

$$r(t) \leq r(0) \exp(-\alpha t) + k_1 R \exp(-\lambda_1 t), \quad (\text{B.30})$$

onde $\lambda_1 < \min(\lambda, \alpha)$. Aplicando-se a desigualdade de Rayleigh-Ritz (B.28) em (B.30), obtém-se a desigualdade

$$\|\hat{\varepsilon}(t)\| \leq k_2 \|\hat{\varepsilon}(0)\| \exp(-\alpha t) + k_3 R \exp(-\lambda_1 t), \quad (\text{B.31})$$

que é satisfeita enquanto o sinal $\hat{\varepsilon}(t)$ estiver fora da bola estabelecida por (B.26). O majorante

$$\|\hat{\varepsilon}(t)\| \leq k_4 [R \exp(-\lambda_1 t) + \|\beta_t\|_\infty], \quad (\text{B.32})$$

define uma bola que contém a bola (B.26), fora da qual a derivada \dot{V} é majorada por (B.27). Assim, se a condição inicial $\hat{\varepsilon}(0)$ estiver fora da bola (B.32), a trajetória $\hat{\varepsilon}(t)$ será limitada por (B.31) até que a bola (B.32) seja atingida. Por outro lado, quando a condição inicial estiver dentro da bola (B.32), ou a partir do instante t_1 em que $\hat{\varepsilon}(t)$ entrar na bola (B.32), então a trajetória $\hat{\varepsilon}(t)$ permanecerá dentro desta bola $\forall t \geq t_1 \geq 0$, pois fora dela \dot{V} é majorado por (B.27) e pode-se mostrar que a bola (B.31) converge para o interior da bola (B.32) e nela permanece a partir de t_1 . Assim sendo, o majorante

$$\|\hat{\varepsilon}(t)\| \leq \max \{k_2 \|\hat{\varepsilon}(0)\| \exp(-\alpha t) + k_3 R \exp(-\lambda_1 t), k_4 [R \exp(-\lambda_1 t) + \|\beta_t\|_\infty]\}, \quad (\text{B.33})$$

é válido $\forall t \geq 0$. Finalmente, lembrando-se que $\|\varepsilon\| \leq \|\hat{\varepsilon}\| + \|\pi_1\| + \|\beta\|$ obtém-se a desigualdade (2.36) que é um majorante para (B.33).

Apêndice C

Lemas sobre o Controle à Estrutura Variável de Sistemas Monovariáveis

Neste Apêndice são apresentados dois lemas que são aplicados no desenvolvimento do VS-MRAC para sistemas SISO (Hsu et al. 1997) e que são aplicados no Capítulo 9. O Lema C.1 é utilizado na revisão do VS-MRAC para sistemas com grau relativo unitário. O Lema C.2 é aplicado na prova de estabilidade do VS-MRAC baseado num observador de alto ganho.

No que segue, o termo $\pi_1(t)$ é um sinal escalar exponencialmente decrescente, i.e., $|\pi_1(t)| \leq R \exp(-\lambda t)$, $\forall t \geq 0$, para algumas constantes reais $R \geq 0$ e $\lambda > 0$.

Lema C.1 *Considere o sistema SISO*

$$e(t) = M(s) [U + d_U(t) + \pi_1(t)] , \quad (\text{C.1})$$

onde $M(s) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}(s)$ é uma função de transferência SPR. Assume-se que o sinal $d_U(t)$ é LI e o sinal $\pi_1(t)$ é LI e exponencialmente decrescente. Se

$$U = -\rho(t) \operatorname{sgn}(e) , \quad (\text{C.2})$$

$$\rho(t) \geq \delta + |d_U(t)| , \quad \forall t \geq 0 , \quad (\text{C.3})$$

onde ρ é LI e $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária, então $\exists c_1, c_2, \lambda_1 > 0$ tais que a desi-

gualdade

$$|e(t)| \text{ e } \|x_e(t)\| \leq [c_1 \|x_e(0)\| + c_2 R] \exp(-\lambda_1 t) \quad (\text{C.4})$$

é satisfeita $\forall t \geq 0$, onde x_e é o estado de qualquer realização estabilizável e detectável de (C.1) (possivelmente não-mínima). Além disso, se $\delta > 0$, então $e(t)$ se torna identicamente nulo após algum tempo finito $t_s \geq 0$.

Prova: A prova deste Lema segue o que é apresentado em (Hsu & Costa 1989). Este Lema pode ser interpretado como um Corolário do Lema 2.2 restrito a sistemas SISO. ■

Lema C.2 *Considere o sistema SISO que tem relação entrada-saída dada por*

$$\sigma(t) = \frac{K_p}{(s + \gamma)} [U + d_U(t)] + \pi_1(t) + \beta(t), \quad (\text{C.5})$$

e o sinal

$$\hat{\sigma}(t) = \sigma(t) - \pi_1(t) - \beta(t), \quad (\text{C.6})$$

onde $K_p, \gamma > 0$ são constantes escalares, $\hat{\sigma}, \sigma, U, d_U, \beta, \pi_1 \in \mathbb{R}$, $d_U(t)$ é LI, $\pi_1(t)$ é exponencialmente decrescente e os sinais $\pi_1(t)$ e $\beta(t)$ são absolutamente contínuos, $\forall t \geq 0$.

Se

$$U = -\rho(t) \operatorname{sgn}(\sigma), \quad (\text{C.7})$$

$$\rho(t) \geq |d_U(t)|, \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{C.8})$$

onde ρ é LI, então os sinais $\sigma(t)$ e $\hat{\sigma}(t)$ são limitados por

$$|\sigma(t)| \text{ e } |\hat{\sigma}(t)| \leq |\hat{\sigma}(0)| \exp(-\gamma t) + 2 [R \exp(-\lambda_1 t) + \|\beta_t\|_\infty], \quad (\text{C.9})$$

onde $\lambda_1 < \min(\gamma, \lambda)$.

Prova: Vide prova do Lema 2 em (Hsu et al. 1997). Este Lema pode ser interpretado como um Corolário do Lema 2.3 restrito a sistemas SISO. ■

Apêndice D

Algoritmos de Simulação e de Projeto

D.1 Resolução Numérica de Equações Diferenciais

O método de resolução numérica que tem parecido o mais adequado a equações diferenciais com sinais descontínuos é o *método de Euler* que utiliza passo de integração fixo (Hamming 1973, pp. 382–383). Métodos baseados em interpolações ou derivadas dos sinais que estão sendo integrados (e.g., Runge-Kutta) são inadequados por causa da descontinuidade dos sinais de controle. Por outro lado, algoritmos que utilizam passo de integração variável (adaptativo) podem resultar no “congelamento” da integração se o passo de integração for reduzido demasiadamente.

Assim, geralmente se aplicou nesta Tese o *método de Euler* com passo de integração suficientemente pequeno para que o resultado da simulação convirja para uma solução numérica que seja coerente com o comportamento dinâmico esperado. Não foram utilizadas aproximações suaves para as descontinuidades (vide Seção 6.5.3) para se evitar o surgimento de erros de rastreamento que poderiam ser causados por essas aproximações.

A Tabela D.1 relaciona o intervalo de integração adotado em cada simulação realizada com o *software* Simulink/Matlab 5.1.

As simulações dos sistemas com controle vetorial unitário e com controle à estrutura variável na Seção 2.3 foram realizadas com o Scicos/Scilab 2.7 utilizando-se o algoritmo denominado *lsodar*.

As soluções de equações diferenciais no Capítulo 3 e na Seção 9.6.2 foram obtidas

TABELA D.1: Passo de integração utilizado em cada simulação.

Simulação	Passo de integração (μs)
Seção 5.2.2	20
Seção 5.5.2	1
Seção 6.6.1	1
Seção 7.5.2	4
Seção 9.9.4	10

utilizando-se exponenciais exatas, uma vez que aqueles sistemas são lineares.

D.2 Algoritmos para o Projeto de Controladores

O projeto dos controladores foi realizado utilizando-se o *software* de computação numérica Scilab 2.7. O Scilab foi escolhido por possuir comandos adequados para realizar cálculos com matrizes polinomiais, o que é especialmente conveniente na resolução da equação diofantina (4.11) utilizada no casamento do sistema em malha fechada com o modelo de referência. Foram desenvolvidas algumas rotinas de uso geral que estão nos arquivos `MRCtools.sci` e `FDAF-tools.sci`. Além desses arquivos, os programas de projeto específicos para os exemplos apresentados nesta Tese estão disponíveis na página da *Internet*:

<http://www.coep.ufrj.br/~jpaulo>