



ALGORITMO SUPER-TWISTING GENERALIZADO COM GANHOS
ADAPTATIVOS PARA SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Jair Luiz de Azevedo Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Eduardo Vieira Leão Nunes

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2020

ALGORITMO SUPER-TWISTING GENERALIZADO COM GANHOS
ADAPTATIVOS PARA SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Jair Luiz de Azevedo Filho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Orientador: Eduardo Vieira Leão Nunes

Aprovada por: Prof. Eduardo Vieira Leão Nunes

Prof. Tiago Roux de Oliveira

Prof. Alberto Mota Simões

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 2020

Azevedo Filho, Jair Luiz de

Algoritmo Super-Twisting Generalizado com Ganhos Adaptativos para Sistemas Multivariáveis/Jair Luiz de Azevedo Filho. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2020.

XII, 136 p.: il.: 29, 7cm.

Orientador: Eduardo Vieira Leão Nunes

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 110 – 115.

1. Sistemas Incertos.
 2. Controle por modos deslizantes.
 3. Sistemas a Estrutura Variável.
 4. Algoritmo super-twisting.
 5. Controle Adaptativo.
- I. Nunes, Eduardo Vieira Leão. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Aos meus pais, Jair Luiz de
Azevedo e Maria Cristina da
Silva Grossi, por todo o carinho
e paciência em minha jornada.*

Agradecimentos

Agradeço principalmente a Deus, por toda a resiliência durante este importante trecho da minha vida e por não permitir que eu esmorecesse nos obstáculos que surgiram durante esta etapa.

Não posso deixar de agradecer aos meus pais, Jair Luiz e Maria Cristina por me darem todo o suporte para que eu pudesse me dedicar inteiramente ao mestrado. Sem eles, nada disso seria possível.

Ao meu grande amigo, Vinícius Siston pela amizade de longa data.

Ao meu orientador e amigo, Eduardo Vieira Leão Nunes pela paciência interminável e por toda a confiança depositada que, sem dúvida, foram determinantes para a conclusão desta etapa.

Aos professores Josiel Alves Gouvea e Liu Hsu, por todo o esforço em me ajudar a me tornar uma pessoa melhor.

Aos professores Tiago Roux de Oliveira e Alberto Mota Simões por terem aceitado participar da banca examinadora desta dissertação.

Por fim, meus agradecimentos à CAPES e à FAPERJ pelo suporte financeiro, e à COPPE pela oportunidade de realizar o mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ALGORITMO SUPER-TWISTING GENERALIZADO COM GANHOS ADAPTATIVOS PARA SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Jair Luiz de Azevedo Filho

Fevereiro/2020

Orientador: Eduardo Vieira Leão Nunes

Programa: Engenharia Elétrica

Nesta dissertação, é desenvolvida uma estratégia adaptativa baseada no controle super-twisting para sistemas incertos na presença de incertezas/perturbações possivelmente não-lineares e dependentes do estado, cujos limitantes superiores são desconhecidos. Uma versão generalizada da estratégia adaptativa de camada dupla recentemente proposta é introduzida, permitindo incorporar a mesma a uma família de algoritmos multivariáveis baseados no super-twisting. Utilizando uma análise por função de Lyapunov, são demonstradas formalmente propriedades de convergência global em tempo finito. Além disso, ainda por meio de funções de Lyapunov, demonstra-se que a estratégia adaptativa proposta garante uma escolha de ganhos não-conservadora, atenuando os efeitos do chattering e evitando sinais de controle desnecessariamente elevados. Outra importante contribuição desta dissertação é o desenvolvimento de abordagens de controle baseadas em modos deslizantes capazes de lidar com ataques cibernéticos em sistemas ciber-físicos. Com o uso de algoritmos inspirados no super-twisting, propõe-se o desenvolvimento de monitores de ataques aos estados e à saída de sistemas ciber-físicos incertos. Após a reconstrução dos mesmos, o problema de rastreamento de saída é considerado, no qual compensadores baseados em modos deslizantes de segunda ordem garantem a rejeição dos ataques e a convergência do erro de rastreamento em tempo finito. Resultados de simulação ilustram a efetividade das técnicas de controle baseadas no super-twisting apresentadas nesta dissertação.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

GENERALIZED SUPER-TWISTING ALGORITHM WITH ADAPTIVE GAINS FOR MULTIVARIABLE SYSTEMS

Jair Luiz de Azevedo Filho

February/2020

Advisor: Eduardo Vieira Leão Nunes

Department: Electrical Engineering

In this dissertation, an adaptive strategy based on super-twisting control is designed for uncertain systems in the presence of possibly nonlinear state-dependent uncertainties/disturbances, whose upper-bounds are unknown. A generalized version of the recently proposed adaptive dual-layer strategy is presented, allowing it to be incorporated into a family of multivariable algorithms based on super-twisting. Using a Lyapunov approach, properties of global finite-time convergence are formally demonstrated. Furthermore, still using a Lyapunov approach, it is shown that the proposed adaptive strategy ensures a non-overestimated choice for gains, mitigating the effects of chattering and avoiding unnecessarily high control signals. Another important contribution of this dissertation is the development of control approaches based on sliding modes, capable of dealing with cyber-physical systems under attack. Using algorithms inspired by super-twisting, the development of attack monitors for state and output attacks in uncertain cyber-physical systems is proposed. After their reconstruction, the output tracking problem is considered, in which compensators based on second order sliding modes guarantee the attack rejection and the finite time tracking error convergence. Simulation results show the effectiveness of the techniques based on super-twisting presented in this dissertation.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Tema: Controle por Modos Deslizantes	2
1.2 Revisão da Literatura	3
1.3 Objetivo	6
1.4 Contribuições	6
1.5 Conceitos preliminares	7
1.6 Organização da dissertação	8
2 Controle por Modos Deslizantes	9
2.1 Conceitos Básicos	10
2.2 Controle Equivalente	17
2.3 Solução de Filippov	19
2.4 Controle por Modos Deslizantes	24
2.4.1 Superfície de Deslizamento	24
2.4.2 Controle Vetorial Unitário	24
2.5 Modos Deslizantes de Ordem Superior	29
2.5.1 Super-Twisting	33
2.5.2 Super-Twisting com termos lineares	35
2.5.3 Super-Twisting com ganhos variáveis	37
2.5.4 Super-Twisting Multivariável	41
2.5.5 Super-Twisting Multivariável Generalizado	45
3 Super-Twisting Multivariável Generalizado com Ganhos Adaptati- vos	51
3.1 Algoritmo Super-Twisting com Ganhos Adaptativos Monovariável	53
3.2 Generalização do Algoritmo Super-Twisting com Ganhos Adaptativos Multivariável	59
3.2.1 Esquema Generalizado de Adaptação de Camada Dupla	63
3.2.2 Casos particulares	67

4	Sistemas Ciber-Físicos	75
4.1	Apresentação do problema	77
4.1.1	Classe de ataques ciber-físicos	78
4.2	Detecção e reconstrução de ataques aos estados	79
4.2.1	Super-Twisting com Ganhos Variáveis Multivariável por Re-	
	alimentação de Saída	83
4.2.2	Algoritmo Super-Twisting com Ganhos Adaptativos Multi-	
	variável Generalizado	84
4.3	Detecção e reconstrução de ataques às saídas	89
4.4	Compensação de ataques aos estados	93
4.5	Compensação de ataques à saída	100
5	Conclusão e Trabalhos Futuros	108
	Referências Bibliográficas	110
A	Produto de Kronecker	116
A.1	Propriedades	116
A.1.1	Bilinearidade	116
A.1.2	Produto misto	116
A.1.3	Transposição	116
A.1.4	Autovalores da matriz de blocos	116
B	Algoritmo Super-Twisting	117
B.1	Demonstração do Teorema 2.1	117
B.2	Demonstração do Teorema 2.2	120
C	Algoritmo Super-Twisting com esquema adaptativo de Camada	
	Dupla	123
C.1	Demonstração do Teorema 3.1	123
C.2	Demonstração do Teorema 3.2	125
C.3	Demonstração do Teorema 3.3	127
C.3.1	Forward Completeness	131
C.3.2	Convergência Global em Tempo Finito	132
C.4	Demonstração do Teorema 3.4	134

Lista de Figuras

2.1	Desempenho da lei de controle via realimentação linear de estados aplicada ao sistema linear de segunda ordem em estudo.	11
2.2	Plano de fase do sistema (2.5), para $\rho = 1$ e $\kappa = 2$. A reta tracejada descreve a superfície $\sigma = \kappa x_1 + x_2 = 0$	13
2.3	Plano de fase do sistema (2.6), para $\rho = 1$ e $\kappa = 2$. A reta tracejada descreve a superfície $\sigma = \kappa x_1 + x_2 = 0$	14
2.4	Trajetoária do sistema linear de segunda ordem com o sinal de controle por modos deslizantes com os seguintes atrasos no chaveamento: (a,b) 0.2s; (c,d) 0.1s; (e,f) 0.01s.	15
2.5	Plano de fase do sistema linear de segunda ordem em estudo com a lei de controle por modos deslizantes, onde $d(x, t) \equiv 0$, $\rho = 1$ e $\kappa = 2$	16
2.6	Desempenho da lei de controle por modos deslizantes, com $\rho = \kappa = 2$, aplicada ao sistema linear em estudo, sob o efeito da perturbação $d(t) = \text{sen}(4t)$	17
2.7	Construção geométrica do campo vetorial $g^s(x, t)$ da solução de Filippov sobre a superfície de descontinuidade S_1	22
2.8	Desempenho da lei de controle por modos deslizantes aplicada ao sistema do Exemplo 2.3, com função de modulação dada por (2.51). A perturbação $d(x, u, t)$ considerada é definida em (2.52).	28
2.9	Modo Deslizante de Segunda Ordem [1].	30
2.10	Modelo de trajetória no espaço de estados de um super-twisting.	33
2.11	Curva limitante utilizada na análise geométrica do super-twisting.	34
2.12	Desempenho do RED proposto, estimando a derivada do sinal base $f_0(t) = \cos(3t) + e^{-t}\text{sen}(t)$	37
2.13	Desempenho da lei de controle por realimentação de estados associada ao VGSTA aplicada ao sistema linear na forma normal apresentado no Exemplo 2.5.	41
2.14	Controlador MIMO STA aplicado ao sistema não-linear multivariável apresentado no Exemplo 2.6.	45

2.15	Desempenho do algoritmo generalizado baseado no super-twisting multivariável sujeito a perturbações $\rho_1(\sigma, t) = \cos(2t)\phi_1(\sigma)$ e $\rho_2(t) = \text{sen}(t) \phi_2(\sigma)$	50
3.1	Desempenho da lei de controle baseada no algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos monovariável, aplicada ao problema de estimação de estados.	59
3.2	Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla escalar.	60
3.3	Desempenho da lei de controle baseada na generalização do algoritmo Super-Twisting com ganhos adaptativos multivariável aplicada ao problema de estabilização de um satélite.	72
3.4	Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada.	73
3.5	Aplicação de margens de segurança conservadoras.	73
3.6	Desempenho da lei de controle baseada na generalização do algoritmo Super-Twisting com ganhos adaptativos multivariável para perturbações ilimitadas.	74
3.7	Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada.	74
4.1	Normas dos erros de observação e reconstrução de ataques aos estados com a aplicação do algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável generalizado.	88
4.2	Evolução das variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada.	88
4.3	Diagrama de blocos com a reconstrução e compensação de ataques aos estados.	95
4.4	Desempenho do FOAF e as normas dos erros de observação $e_1(t)$ e $e_2(t)$	97
4.5	Reconstrução dos ataques aos estados através das técnicas em comparação.	97
4.6	Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada para o problema de reconstrução de ataques aos estados.	98
4.7	Sinais de controle contínuos projetados de acordo com: (a) Algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável; (b) VGSTA.	99
4.8	Sinal de controle baseado no Método 3 e a norma do erro de rastreamento para cada técnica.	99
4.9	Diagrama de blocos com a reconstrução e compensação de ataques à saída.	102
4.10	Perturbação com o formato “dente de serra”.	103

4.11	Desempenho do FOAF e as normas dos erros de observação e_{ω_1} e $e_{y_f}(t)$.	104
4.12	Reconstrução dos ataques às saídas através do (a) Algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável; (b) VGSTA. 105
4.13	Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada para o problema de reconstrução de ataques às saídas. 106
4.14	Sinais de controle contínuos projetados de acordo com: (a) Algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável; (b) VGSTA.	. . . 107
4.15	Erros de rastreamento obtidos de acordo com: (a) Algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável (b) VGSTA. 107

Capítulo 1

Introdução

Um dos principais tópicos abordados na literatura de teoria de controle está relacionado ao projeto de controladores capazes de garantir que a saída de um dado sistema rastreie um determinado sinal de referência. Note que, sobre um outro ponto de vista, este tema pode ser interpretado como um problema de estabilização, onde a trajetória de referência passa a ser incorporada ao estado do sistema [2]. No entanto, em aplicações práticas, distúrbios externos e incertezas no modelo matemático do sistema podem ocorrer, interferindo no desempenho do controlador projetado. Entre tais interferências encontram-se dinâmicas não-modeladas, desgastes dos componentes do sistema, causadores de variações paramétricas, e o uso de aproximações para o comportamento do sistema, com o intuito de simplificar o modelo. Nota-se, portanto, a necessidade de projetar um controlador capaz de rejeitar tais sinais e garantir o desempenho desejado para o sistema [1, 3].

Entre os métodos mais populares para o projeto desta classe de controladores, encontra-se o controle por modos deslizantes, visto que esta abordagem possui características vantajosas para este tipo de problema, como rejeição de perturbações externas e/ou incertezas casadas, comportamento satisfatório durante o transitório, e, principalmente, robustez em estabilidade e em desempenho [1, 3]. Todavia, os trabalhos pioneiros sobre esta abordagem consideravam leis de controle descontínuas, que quando usadas em aplicações reais, com a presença de fenômenos físicos, como, por exemplo, atraso, geravam um sinal chaveado de alta frequência, conhecido como *chattering* [4], que, para determinadas aplicações tornava-se indesejável, visto que o mesmo poderia excitar dinâmicas não-modeladas de alta frequência do sistema, reduzindo seu desempenho ou até instabilizando-o [4, 5].

Com o objetivo de atenuar a limitação apresentada acima, desenvolveu-se posteriormente o conceito de modos deslizantes de ordem superior, que representa uma generalização da abordagem convencional, enquanto garante suas vantagens originais [6]. Controladores baseados nesse novo conceito apresentam, em casos ideais, acurácia superior e leis de controle com menor presença de *chattering*, sendo até em

determinados casos livre do mesmo [7].

1.1 Tema: Controle por Modos Deslizantes

O controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control*) é uma técnica não-linear a estrutura variável popular no controle de sistemas incertos devido às suas propriedades de robustez e insensibilidade à perturbações externas e incertezas do sistema [3, 5]. Por ser uma técnica a estrutura variável, sua lei de controle é caracterizada por um sinal descontínuo que pode garantir em certas aplicações que a dinâmica em malha fechada do sistema transite entre estruturas distintas, gerando um perfil de movimento conhecido como modo deslizante [1, 3, 8]. O objetivo desta técnica é assegurar que as trajetórias do sistema convirjam e se mantenham sobre uma determinada superfície de interesse, denominada superfície de deslizamento, onde a mesma é definida de tal modo que a dinâmica do sistema em malha fechada satisfaça algum critério de desempenho desejado. Logo, quando as trajetórias do sistema alcançam essa superfície, garante-se o desempenho em malha fechada citado e, conseqüentemente, a rejeição de certas classes de perturbações externas e incertezas no modelo, inerentes ao sistema. Devido ao uso de uma lei de controle descontínua, a presença de perturbações e incertezas pode induzir o surgimento do *chattering*, que como já apresentado, pode interferir no desempenho do sistema em malha fechada [4, 5].

Com a introdução do controle por modos deslizantes de ordem superior (*Higher Order Sliding Mode*) à teoria de controle, o conceito de modos deslizantes convencional pode ser generalizado. Diferente da estratégia original, onde a lei de controle atuava sobre a primeira derivada temporal da variável de deslizamento, este novo conceito permite que a lei de controle atue sobre as suas derivadas temporais de ordem mais alta. Desse modo, não só se garante a convergência da variável de deslizamento como de suas derivadas temporais de ordem inferior. Observa-se, portanto, que as mesmas propriedades de robustez e desempenho da técnica original são mantidas, porém com acurácia superior, uma vez que as derivadas temporais da variável de deslizamento também são consideradas. Note ainda que este conceito considera uma lei de controle contínua, logo, em casos ideais, os efeitos provocados pelo *chattering* na dinâmica do sistema em malha fechada são atenuados.

Com a consolidação desta abordagem, novas técnicas de controle surgiram, como o controlador Twisting, desenvolvido através de métodos geométricos [9] e posteriormente usando a teoria de sistemas homogêneos [10]. Embora essa estratégia apresentasse um avanço no sentido de atenuação do *chattering* sobre a lei de controle, o conhecimento da derivada temporal da variável de deslizamento é requerido, restringindo sua aplicação em casos onde esse sinal não seja disponível. Esta restrição é superada com o desenvolvimento do algoritmo Super-Twisting, que baseado no

mesmo conceito, propõe uma lei de controle dependente apenas da variável de interesse, capaz de garantir o seu deslizamento e de sua primeira derivada temporal em tempo finito [6].

Além de apresentar avanços na atenuação do chattering, este algoritmo se destaca entre as demais técnicas de modos deslizantes de ordem superior por não depender de derivadas temporais da variável de deslizamento. Esta característica permitiu que importantes contribuições de interesse prático fossem obtidas, como o rastreamento exato de trajetórias e o projeto de diferenciadores exatos [7].

1.2 Revisão da Literatura

Motivada pelas contribuições obtidas com o algoritmo Super-Twisting, observou-se um interesse crescente na comunidade de controle pelo estudo de controladores baseados em modos deslizantes de ordem superior, com ênfase no algoritmo em questão. Entretanto, o fato de sua análise de estabilidade ser baseada em métodos geométricos e na teoria de sistemas homogêneos dificultava o desenvolvimento de técnicas de controle baseadas no Super-Twisting [11]. Visando a ampliar a classe de sistemas abordadas e reduzir o conjunto de hipóteses adotadas, uma estratégia alternativa para a análise de estabilidade deste algoritmo é então proposta em [11], onde a mesma é feita baseada em funções Lyapunov, permitindo que o algoritmo fosse estendido de forma sistemática para outras aplicações, como a inclusão de termos lineares [11, 12], e de ganhos variáveis [13, 14]. Note que com esta mudança, sistemas em malha fechada não homogêneos passam a ser englobados, permitindo que uma classe mais ampla de sistema seja considerada.

É válido frisar que esta nova forma de análise também favoreceu o desenvolvimento de controladores baseado nesse algoritmo para sistemas multivariáveis acoplados [15], onde posteriormente ganhos variáveis também foram incluídos [16].

Nota-se que uma hipótese em comum assumida pelas contribuições citadas acima é o conhecimento de limitantes superiores para as perturbações e incertezas associadas ao sistema. Este conhecimento a priori permite que os ganhos sejam definidos de forma que as propriedades inerentes ao modo deslizante de ordem superior sejam garantidas. Embora estes limitantes possam ser constantes ou funções variáveis no tempo, observa-se que essa limitação restringe a implementação desses algoritmos em aplicações onde não há tal conhecimento.

Uma alternativa para contornar esta limitação baseia-se no uso de ganhos adaptativos, onde a dinâmica dos mesmos é projetada de modo que as propriedades do algoritmo Super-Twisting sejam preservadas. É válido destacar que o uso de estratégias adaptativas não se restringe à técnicas baseadas em modos deslizantes de ordem superior. Por exemplo, em [17] e [18], leis de adaptação para os ganhos de

controladores baseados em modos deslizantes de primeira ordem foram propostas.

O uso de estratégias adaptativas para os ganhos do Super-Twisting também pode ser incentivado por outros motivos, como assegurar o desempenho do sistema enquanto se reduz o esforço de controle e o desconhecimento de limitantes superiores para perturbações externas e estados não medidos do sistema, por exemplo. Em [19], o problema de rastreamento exato de saída para sistemas SISO incertos com grau relativo arbitrário é abordado. Como assume-se que parte dos estados não são medidos, a dinâmica das derivadas temporais do erro de rastreamento não são disponíveis para fins de controle. Através do uso de técnicas baseadas no controle adaptativo por modelo de referência (*Model Reference Adaptive Control* - MRAC) e em diferenciadores baseados em modos deslizantes de ordem superior, esta restrição pode ser contornada e o grau relativo do sistema com relação a variável de deslizamento torna-se unitário. Com relação a lei de controle, o Algoritmo Super-Twisting com Ganhos Variáveis foi utilizado, sendo o ajuste dos ganhos baseado em um observador para a norma dos estados.

Com relação ao comportamento dos ganhos, de modo geral, as estratégias adaptativas para o Super-Twisting são divididas em duas categorias. A primeira considera ganhos crescentes para o algoritmo. Quando a superfície de deslizamento é alcançada, os ganhos se tornam constantes até que um novo distúrbio tire as trajetórias do sistema da superfície. Neste caso, os ganhos voltam a crescer até que a mesma seja alcançada novamente. Estratégias pertencentes à esta categoria voltadas para sistemas escalares não-lineares são propostas em [20], [21], e [22]. Em [20], assume-se que embora o formato do distúrbio seja conhecido, seu limitante não é. A estratégia adaptativa considerada atua sobre ambos os ganhos do algoritmo, garantindo que, com uma escolha adequada dos parâmetros do controlador, as variáveis de deslizamento convirjam para a origem. Esta estratégia, no entanto, somente garante esta condição com uma escolha conservadora dos ganhos adaptativos. Visando generalizar a estratégia citada, o termo de entrada passa a ser considerado incerto em [21]. Além disso, demonstra-se que com uma estratégia adaptativa menos conservadora pode-se garantir a limitação das variáveis de deslizamento.

Em [22], é proposto um controlador baseado no algoritmo Twisting, que é uma técnica de modos deslizantes de segunda ordem que antecede o Super-Twisting. Como esta técnica utiliza a variável de deslizamento e sua derivada temporal, que nem sempre é conhecida, o Super-Twisting é empregado como um diferenciador de primeira ordem da variável de deslizamento, permitindo assim, que o controlador proposto possa ser implementado. Para lidar com perturbações limitadas cujo majorante é desconhecido, é proposta uma estratégia adaptativa que permite que os ganhos do controlador cresçam até que o modo deslizante de segunda ordem seja alcançado em tempo finito. Após esse intervalo, a adaptação para e o ganho perma-

nece constante, voltando a crescer caso o modo deslizante seja perdido.

Por sua vez, a segunda categoria de estratégias adaptativas para os ganhos do Super-Twisting consideram escolhas não conservadoras, permitindo que os ganhos sejam reduzidos enquanto garantem que a superfície de deslizamento seja alcançada. Entre as principais contribuições nesse contexto encontram-se [23] e [24], onde distúrbios limitados porém com limitantes desconhecidos são considerados. A ideia geral dessas estratégias adaptativas é permitir que um ganho específico do algoritmo cresça até que a superfície de deslizamento seja alcançada. Após este instante, o ganho passa a se comportar como um limitante superior não-conservador do distúrbio, garantindo assim, uma ação de controle menos conservadora. Esta estratégia adaptativa recebe o nome de camada dupla, uma vez que é baseada em duas leis de adaptação associadas.

No entanto, uma vez que somente um dos ganhos é adaptado, o ajuste dos demais ganhos ainda requer o conhecimento de limitantes superiores para os distúrbios, introduzindo conservadorismo na ação de controle adotada. Para contornar esta limitação, a estratégia de camada dupla foi estendida para ambos os ganhos do algoritmo Super-Twisting escalar [25], onde, através da inclusão de um novo termo linear, resultados globais de convergência foram obtidos, diferentemente das versões anteriores. É válido frisar que outra aplicação relevante desse algoritmo é no problema de estimação de distúrbios em sistemas livres de incertezas no modelo, visto que a estratégia de camada dupla garante que o mesmo seja reconstruído a partir do momento em que as trajetórias do sistema são mantidas sobre a superfície de deslizamento.

Baseado nessa estratégia adaptativa, foi proposto recentemente em [26] a aplicação dessa técnica na versão multivariável do algoritmo Super-Twisting considerado em [23, 24]. Entretanto, assim como em sua versão escalar, considera-se que somente um dos ganhos é adaptado pelo esquema citado, enquanto o outro ganho é ajustado grande o suficiente. Logo, as mesmas limitações da versão escalar são observadas. Visando a contornar tais limitações, é proposto nesta dissertação a aplicação de uma versão generalizada da estratégia adaptativa citada em ambos os ganhos de uma família de algoritmos baseados no Super-Twisting Multivariável.

Devido às propriedades de robustez apresentadas acima para controladores por modos deslizantes, observa-se que esses algoritmos são, de modo geral, indicados para o controle de sistemas incertos e/ou sob efeito de perturbações externas [1, 3]. Entre suas aplicações observa-se o problema de controle tolerante a falhas [27] e a detecção e compensação de ataques cibernéticos em sistemas ciber-físicos [28, 29].

Esta última aplicação ganhou notoriedade após determinados ciber-ataques causarem graves danos à sistemas de significativa importância [30, 31]. Portanto, o estudo desta classe de sistemas tem recebido cada vez mais atenção da comuni-

dade de controle. Sistemas ciber-físicos são caracterizados por integrarem processos físicos, estruturas de comunicação e recursos computacionais [32]. Essa classe de sistema pode ser encontrada em redes de transporte, sistemas inteligentes e geração de energia [33].

Entre as principais contribuições baseadas em modos deslizantes para sistemas ciber-físicos estão [28] e [29], onde assume-se que uma classe desses sistemas podem ser modelados como sistemas lineares, contínuos e invariantes no tempo. Além disso, considera-se que os ciber-ataques ocorrem aos estados ou às saídas de tais modelos.

Nota-se, portanto, que tais ataques podem ser interpretados como perturbações externas de entrada ou saída, respectivamente. Logo, sobre determinadas hipóteses, controladores baseados em modos deslizantes podem garantir rejeição de tais distúrbios, além de reconstruí-los em tempo finito. Em [28] e [29], a detecção de tais sinais é feita através de uma estratégia similar ao controle por modos deslizantes convencional. Verifica-se, portanto, um grande potencial para o uso de técnicas baseadas em modos deslizantes de ordem superior no controle desta classe de sistemas.

1.3 Objetivo

Nesta dissertação, será abordado o problema do controle Super-Twisting aplicado em sistemas incertos passíveis de características não lineares relevantes. O foco central deste trabalho será considerar casos práticos no qual a modelagem do sistema e seu controlador possam ser desenvolvidas através de uma abordagem não-linear e/ou multivariável de maneira vantajosa, tendo como objetivo a generalização da estratégia adaptativa de camada dupla para os ganhos de uma família de controladores multivariáveis baseados no algoritmo super-twisting. A estratégia desenvolvida deve ser capaz de atender uma classe mais ampla de sistemas, garantindo desempenho satisfatório independentemente de possíveis incertezas relacionadas a implementação, como chattering, perturbações externas, dinâmicas não-modeladas, o desconhecimento a priori de limitantes superiores para tais sinais, entre outros.

1.4 Contribuições

Uma das contribuições a serem apresentadas nesta dissertação é a generalização da estratégia adaptativa de camada dupla proposta em [25] para os ganhos de uma família de controladores multivariáveis baseados no algoritmo super-twisting, garantindo propriedades distintas de acordo com o controlador considerado [15, 16]. A partir de uma análise de estabilidade baseada em funções de Lyapunov, demonstra-se que caso a derivada da perturbação/incerteza do sistema seja limitada embora desconhecida, o modo deslizante de segunda ordem é alcançado em tempo finito

com uma escolha não conservadora dos ganhos. É válido frisar que a estratégia ainda é capaz de lidar com determinadas perturbações ilimitadas embora possuam majorantes desconhecidos, ao custo de ganhos ilimitados. A extensão do caso escalar apresentado em [25] para o caso multivariável através da metodologia proposta resultou em um artigo aceito para a publicação no IFAC 2020 [34].

Outra contribuição desta dissertação é o estudo de caso de controladores baseados em modos deslizantes para uma classe de sistemas ciber-físicos sobre ataques aos estados e à saída. Baseado na classe de sistemas abordada em trabalhos anteriores [28, 29], são desenvolvidas aqui técnicas baseadas no algoritmo super-twisting para a detecção e compensação de ciber-ataques para tais sistemas. Entre as técnicas aplicadas, estão o Algoritmo Super-Twisting com ganhos variáveis (*Variable Gain Super-Twisting* - VGSTA) multivariável [16] e a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada, citada acima. Comparado com a literatura existente de estimadores e controladores baseados em modos deslizantes para esta classe de sistemas ciber-físicos, os controladores propostos neste trabalho além de garantirem desempenho superior na reconstrução dos ataques e no problema de rastreamento de saída, reduzem o número de hipóteses consideradas, alcançando uma classe de sistemas e de perturbações/incertezas mais ampla. O desenvolvimento do estimador e do controlador para sistemas ciber-físicos baseado em VGSTA resultou em um outro artigo aceito para a publicação no IFAC 2020 [35].

1.5 Conceitos preliminares

Nesta dissertação, assume-se a definição de Filippov para a solução de equações diferenciais descontínuas [36]. A norma euclideana para vetores e a norma induzida para matrizes é representada por $\|\cdot\|$. O posto de uma matriz S é dado por $r(S)$, enquanto a margem de estabilidade para uma matriz A real é dada por

$$\lambda_m := \min_j \{-\mathbf{Re}(\lambda_j)\}$$

onde λ_j são os autovalores de A . A matriz A é Hurwitz se $\lambda_m > 0$. A margem de estabilidade de uma matriz de transferência de dimensões $m \times p$ dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ é definida por

$$\gamma_m := \min_j \{-\mathbf{Re}(\gamma_j)\} \tag{1.1}$$

onde γ_j são os pólos de $G(s)$. O sistema com matriz de transferência $G(s)$ é BIBO estável se e somente se $\gamma_m > 0$. Por sua vez, a matriz identidade de ordem n é representada como I_n , enquanto o menor e o maior autovalor de uma matriz S são

representados por $\lambda_{min}(S)$ e $\lambda_{max}(S)$, respectivamente.

O produto interno entre dois vetores $a, b \in \mathbb{R}^n$ é representado por $a \cdot b$.

O operador \otimes representa o produto de Kronecker. Esta operação é realizada entre duas matrizes de dimensões arbitrárias resultando em uma matriz de blocos [37]. Para fins ilustrativos, considere duas matrizes arbitrárias, $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathfrak{R}^{p \times q}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Logo, o produto de Kronecker $A \otimes B$ é uma matriz de blocos de dimensão $mp \times nq$ dada por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

As propriedades deste operador usadas durante esta dissertação são apresentadas no Apêndice A.1.

1.6 Organização da dissertação

Esta dissertação é organizada da seguinte forma:

- No Capítulo 2 são apresentados os principais fundamentos e aspectos do controle a estrutura variável por modos deslizantes, incluindo sua generalização para o caso de ordem superior e os principais trabalhos inerentes a esse caso desenvolvidos a partir do Algoritmo Super-Twisting.
- No capítulo 3, é apresentado o esquema de adaptação de camada dupla para o caso escalar proposto em [25], seguido da generalização do mesmo para uma família de algoritmos baseados no super-twisting multivariável, proposta neste trabalho.
- Por sua vez, o capítulo 4 apresenta a classe de sistemas ciber-físicos para o qual se propõe projetar um monitor de ataques e um controlador para o problema de rastreamento de saída, sendo ambos os projetos baseados em técnicas de modos deslizantes de segunda ordem.
- No capítulo 5, são apresentadas as conclusões gerais sobre as contribuições propostas e os trabalhos futuros que as mesmas podem proporcionar.

Capítulo 2

Controle por Modos Deslizantes

O controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* - SMC) é uma técnica não-linear conhecida por seu bom comportamento durante o transitório, robustez e insensibilidade à perturbações externas e incertezas no modelo do sistema. Sua estrutura permite que a dinâmica do sistema em malha fechada transite entre diferentes estruturas de acordo com a trajetória do sistema no espaço de estados, gerando um movimento denominado modo deslizante [8, 9]. Baseado em suas características, é possível desenvolver uma estratégia de chaveamento onde as trajetórias do sistema sejam conduzidas e mantidas em uma superfície de interesse que definirá o comportamento do sistema em malha fechada, denominada superfície de deslizamento. Uma vez que esta estratégia define como o sistema em malha fechada se comportará durante o modo deslizante, garante-se que os efeitos causados pelas perturbações externas e incertezas do sistema serão rejeitados. Esta característica é referida na literatura de controle como propriedade da invariância.

A capacidade mencionada acima de transitar entre determinadas estruturas, é obtida através do uso de leis de controle descontínuas. No entanto, quando este controlador é aplicado em sistemas incertos, o sinal gerado pela lei de controle torna-se um sinal chaveado de frequência finita, porém elevada. Este fenômeno é conhecido como *chattering*, sendo em determinadas aplicações práticas prejudicial ao desempenho do sistema, visto que o mesmo pode excitar certas dinâmicas não-modeladas da planta [4, 5]. Com o desenvolvimento da teoria de modos deslizantes de ordem superior (*Higher Order Sliding Mode*- HOSM), obtido através da generalização do conceito de modos deslizantes, este fenômeno pode ser mitigado [6]. Técnicas de controle baseadas nesta abordagem atuam sobre as derivadas de ordem mais alta da variável de deslizamento, enquanto a estratégia convencional atuava somente sobre a primeira derivada. Deste modo, além de garantir as propriedades naturais do SMC, como rejeição de distúrbios, convergência em tempo finito e desempenho satisfatório durante o transitório, obtém-se maior acurácia, visto que não somente a variável de deslizamento converge para uma superfície de interesse, mas suas derivadas até certa

ordem também. Além disso, como tais técnicas possuem sinal de controle contínuo, o problema causado pelo chattering pode ser atenuado [9].

Entre as principais técnicas desenvolvidas com essa abordagem, encontra-se o algoritmo Super-Twisting, que tornou-se popular no controle de sistemas com grau relativo unitário por ser capaz de atenuar o efeito do chattering enquanto requer somente o conhecimento da variável de deslizamento [6, 9]. Os primeiros trabalhos envolvendo esta técnica desenvolveram a análise de estabilidade por meio da teoria de sistemas homogêneos e métodos geométricos, garantindo que as trajetórias do sistema se mantiveriam entre curvas limitantes. No entanto, como este método se baseava em sistemas homogêneos, determinadas contribuições eram restringidas pela forma de análise proposta. Após o desenvolvimento da análise de estabilidade por funções de Lyapunov [11, 12], novas contribuições puderam ser feitas de maneira sistemática, estendendo a aplicação da técnicas para uma classe mais ampla de sistemas e distúrbios. Entre tais contribuições encontram-se o uso de ganhos variáveis [13, 14], aplicação em sistemas multivariáveis [15, 16] e o uso de ganhos adaptativos [21, 38].

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos relacionados ao controle por modos deslizantes, que servirão como base para os conteúdos abordados nos capítulos seguintes. Visando a tornar a apresentação deste conceitos didática, os mesmos serão ilustrados através de exemplos simples. Posteriormente, os conceitos de controle equivalente e a solução de Fillipov para equações diferenciais com lado direito descontínuo serão apresentados. Em seguida, o projeto de controladores baseados em modo deslizantes será descrito, incluindo a escolha da superfície de deslizamento e o caso multivariável. Finalmente serão apresentados o conceito de modos deslizantes de ordem superior e as principais estratégias baseadas no super-twisting, obtidas com a análise de estabilidade por funções de Lyapunov.

2.1 Conceitos Básicos

Por questões práticas, a modelagem de sistemas físicos apresenta determinadas discrepâncias em relação ao sistema original, dadas por dinâmicas não-modeladas, variações paramétricas, aproximações do comportamento do sistema e perturbações externas. Por esses motivos o estudo de controladores robustos à tais distúrbios se torna relevante.

Para exemplificar, considere o seguinte sistema de segunda ordem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + d(x_1, x_2, t)) \quad (2.1)$$

onde $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$ são os estados do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle e $d(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}$ representa possíveis perturbações externas e incertezas do sistema tal que $|d(x_1, x_2, t)| < D$, com $D > 0$ sendo uma constante limitada e conhecida. O objetivo do controle é garantir que ambos os estados convirjam assintoticamente para zero, apesar do distúrbio presente no sistema. Note que inserindo uma lei de controle linear por realimentação de estados da forma

$$u(t) = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) \quad (2.2)$$

obtem-se a seguinte dinâmica em malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (-1 - k_1) & (1 - k_2) \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(x_1, x_2, t) \quad (2.3)$$

onde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ são ganhos do controlador e $A_{cl} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Note que embora os ganhos do controlador possam ser definidos tal que A_{cl} seja Hurwitz, não é possível garantir a convergência dos estados do sistema com $d(x_1, x_2, t) \neq 0$. Isto pode ser observado caso (2.3) seja interpretada como a dinâmica de um filtro estável para o sinal de entrada $d(x_1, x_2, t)$, cuja saída serão os estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Como a perturbação é limitada, pode-se demonstrar que os estados também serão, mas nota-se que para $d(x_1, x_2, t) \neq 0$ os mesmos não convergirão para zero. É ilustrado na Figura 2.1 o desempenho deste controlador com $k_1 = 8$ e $k_2 = 7$ e $d(t) = \text{sen}(4t)$. A condição inicial adotada foi $x_1(0) = 0.5$ e $x_2(0) = -0.5$. Verifica-se que apesar da limitação dos estados ser garantida, sua convergência não é alcançada devido à presença da perturbação.

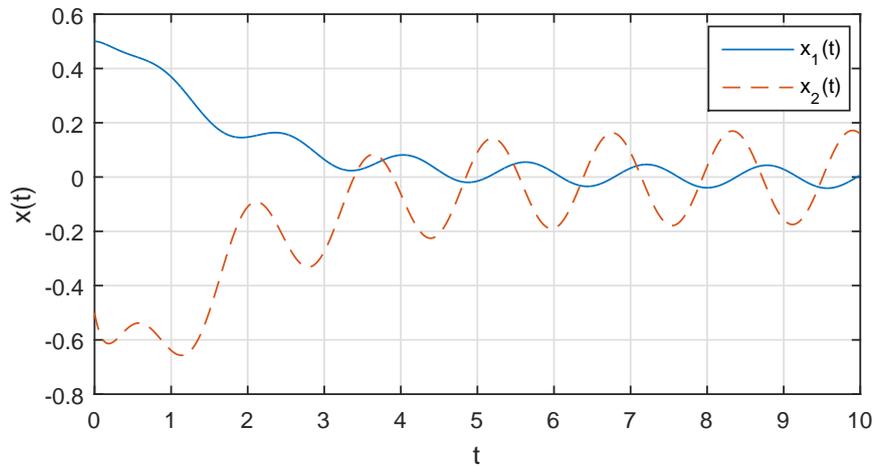


Figura 2.1: Desempenho da lei de controle via realimentação linear de estados aplicada ao sistema linear de segunda ordem em estudo.

Considere agora a seguinte lei de controle não-linear

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -(\kappa - 1)x_1(t) - (\kappa + 1)x_2(t) - \rho \text{sign}(\sigma), \\
 \sigma(x_1, x_2) &= \kappa x_1 + x_2 \\
 \text{sign}(\sigma) &= \begin{cases} 1, & \text{se } \sigma(x) > 0 \\ -1, & \text{se } \sigma(x) < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde ρ e κ são constantes de projeto a serem definidas. Para fins didáticos, trataremos inicialmente o caso onde $d(x_1, x_2, t) \equiv 0$. Substituindo (2.4) em (2.1), nota-se que a dinâmica do sistema em malha fechada é alterada de acordo com o valor de $\sigma(x_1, x_2)$. Na região $\sigma(x_1, x_2) > 0$, a estrutura do sistema em malha fechada é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\kappa x_1 - \kappa x_2 - \rho \end{cases} \tag{2.5}$$

enquanto na região $\sigma(x_1, x_2) < 0$ o sistema em malha fechada apresenta a seguinte estrutura

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\kappa x_1 - \kappa x_2 + \rho \end{cases} \tag{2.6}$$

As Figuras 2.2 e 2.3 apresentam o plano de fase de cada estrutura isoladamente, com $\rho = 1$ e $\kappa = 2$. Apesar de (2.5) e (2.6) apresentarem dinâmicas instáveis quando estudadas isoladamente, observa-se que em suas respectivas regiões, isto é, $\sigma(x_1, x_2) > 0$ e $\sigma(x_1, x_2) < 0$, todas as trajetórias do sistema convergem para a superfície $\sigma = \kappa x_1 + x_2 = 0$, que está tracejada nas Figuras 2.2 e 2.3.

Com ambas as regiões estudadas, será agora apresentado o comportamento das trajetórias do sistema sobre a superfície em questão. Como sobre essa superfície ocorre o chaveamento, é válido interpretar as consequências de atrasos sobre o mesmo, isto é, os efeitos sobre o sistema quando o sinal de controle não é alterado instantaneamente de região para região. Logo, quanto menor for o atraso, mais próximo o sistema estará de seu comportamento ideal. É mostrado na Figura 2.4 a trajetória do sistema e o sinal de controle para uma determinada condição inicial com atrasos de $0.2s$, $0.1s$, e $0.01s$, respectivamente. Embora o sinal de controle apresente frequências mais altas para atrasos menores, conforme o atraso diminui, as trajetórias do sistema se mantêm por mais tempo sobre a superfície de chaveamento. Logo, para o caso sem atraso espera-se um sinal de controle descontínuo com a trajetória do sistema confinada sobre esta superfície. Por este resultado é possível inferir que em aplicações práticas a presença do chattering é esperada, visto que o chaveamento ocorrerá em frequência elevada porém finita. Note ainda que caso a frequência não seja alta o suficiente ao ponto de ser atenuada pelo sistema, dinâmicas não-modeladas podem ser excitadas e interferir na sua performance.

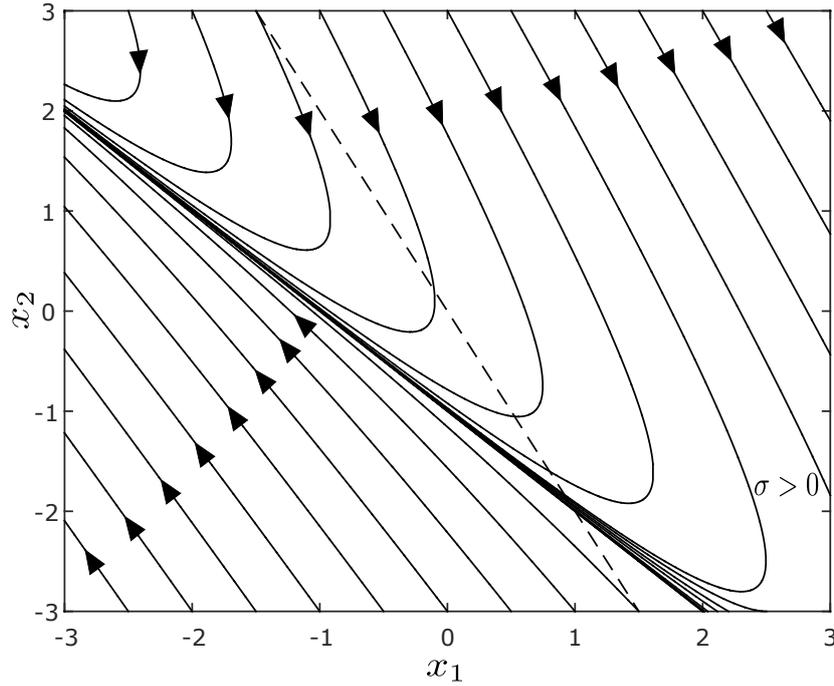


Figura 2.2: Plano de fase do sistema (2.5), para $\rho = 1$ e $\kappa = 2$. A reta tracejada descreve a superfície $\sigma = \kappa x_1 + x_2 = 0$.

Verifica-se, portanto, que no caso ideal após um tempo finito $t_1 > 0$, as trajetórias do sistema alcançarão esta superfície e se manterão sobre a mesma, garantindo que o comportamento do sistema em malha fechada seja dado pela dinâmica da superfície, que possui ordem reduzida quando comparada ao sistema e é dada por

$$\begin{aligned}\sigma(x_1, x_2) &= \kappa x_1 + x_2 = x_1 + x_2 + (\kappa - 1)x_1 = 0 \\ &= \dot{x}_1 + (\kappa - 1)x_1 = 0 \quad \forall t > t_1\end{aligned}\tag{2.7}$$

resolvendo esta EDO, note que a solução é dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(t_1)e^{-(\kappa-1)(t-t_1)}, \\ x_2(t) = -\kappa x_1(t_1)e^{-(\kappa-1)(t-t_1)}, \quad \forall t > t_1 \end{cases}\tag{2.8}$$

onde a solução de $x_2(t)$ é obtida do fato de que sobre a superfície $\sigma(x_1, x_2) = 0$, $x_2(t) = -\kappa x_1(t)$. Como κ é uma constante de projeto, nota-se que definindo $\kappa > 1$ garante-se a convergência exponencial de ambas as variáveis de estado. Note que este movimento é observado exclusivamente sobre esta superfície, sendo denominado como modo deslizante. Por sua vez, a superfície

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x_1, x_2) = 0\}\tag{2.9}$$

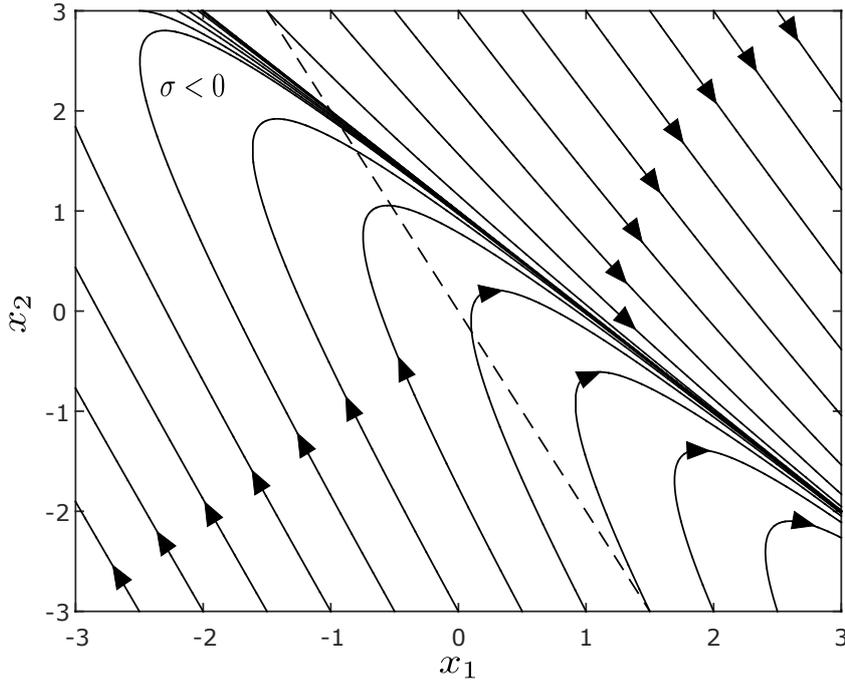


Figura 2.3: Plano de fase do sistema (2.6), para $\rho = 1$ e $\kappa = 2$. A reta tracejada descreve a superfície $\sigma = \kappa x_1 + x_2 = 0$.

onde este movimento ocorre, e a função $\sigma(x_1, x_2)$ em (2.7), que descreve a dinâmica desejada em malha fechada, são referidas na literatura como superfície e variável de deslizamento, respectivamente. O plano de fase completo para o caso sem perturbações é apresentado na Figura 2.5.

Considere agora o problema original onde a perturbação $d(x_1, x_2, t) \neq 0$ está inclusa. Substituindo (2.4) em (2.1), obtém-se o seguinte sistema em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\kappa(x_1 + x_2) - \rho \text{sign}(\sigma) + d(x_1, x_2, t) \end{cases} \quad (2.10)$$

o objetivo do controlador utilizado continua sendo garantir a convergência assintótica para ambos os estados. No entanto, como agora trata-se de um sistema sob o efeito de perturbações externas, o controlador deve ser capaz de rejeitar tais distúrbios enquanto garante o desempenho desejado. Para tal, a escolha da variável ρ deve ser feita de modo que as trajetórias do sistema sejam globalmente atraídas em tempo finito para a superfície S , onde sabe-se por (2.8) que o desempenho desejado para os estados do sistema é obtido. Portanto, considere a seguinte função de Lyapunov

$$V(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2} \quad (2.11)$$

note que esta função é positiva definida e radialmente ilimitada. Sua derivada tem-

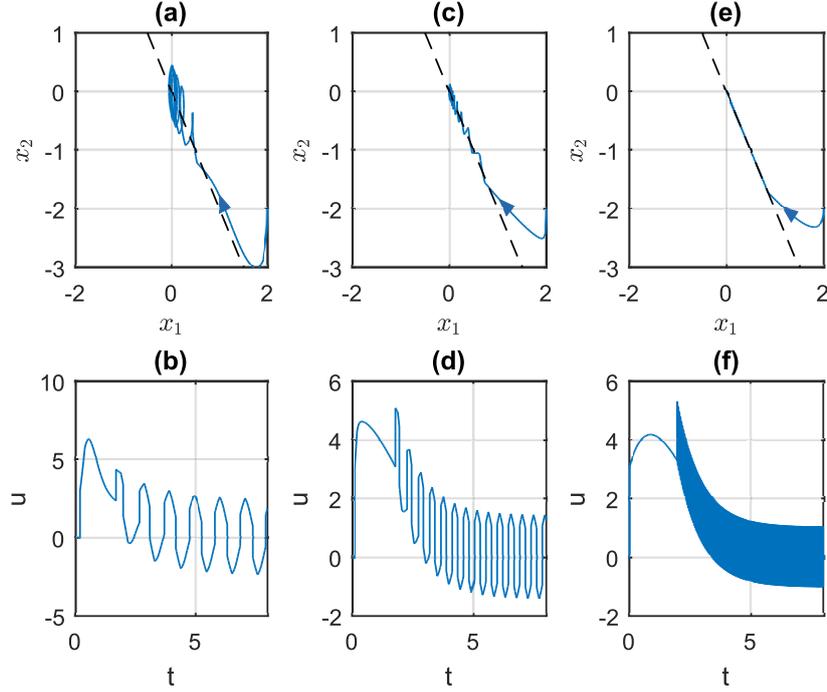


Figura 2.4: Trajetória do sistema linear de segunda ordem com o sinal de controle por modos deslizantes com os seguintes atrasos no chaveamento: (a,b) 0.2s; (c,d) 0.1s; (e,f) 0.01s.

poral é dada por

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\sigma) &= \sigma \dot{\sigma} = \sigma (\kappa \dot{x}_1 + \dot{x}_2) \\
 &= \sigma (\kappa (x_1 + x_2) - \kappa (x_1 + x_2) - \rho \text{sign}(\sigma) + d(x_1, x_2, t)) \\
 &= -\rho |\sigma| + d(x_1, x_2, t) \sigma \\
 &\leq (-\rho + |d(x_1, x_2, t)|) |\sigma|
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Como, por Hipótese, $|d(x_1, x_2, t)| < D$, (2.12) possui um limitante dado por

$$\dot{V}(\sigma) \leq (-\rho + D) |\sigma(t)| = -\mu \sqrt{2V} \tag{2.13}$$

onde ρ é definido tal que $\mu = \rho - D > 0$. Como a solução da equação diferencial

$$\dot{v}(t) = -\mu \sqrt{2v(t)}$$

é dada por

$$v(t) = \frac{1}{2} \left(-\mu (t - t_0) + \sqrt{2v(t_0)} \right)^2,$$

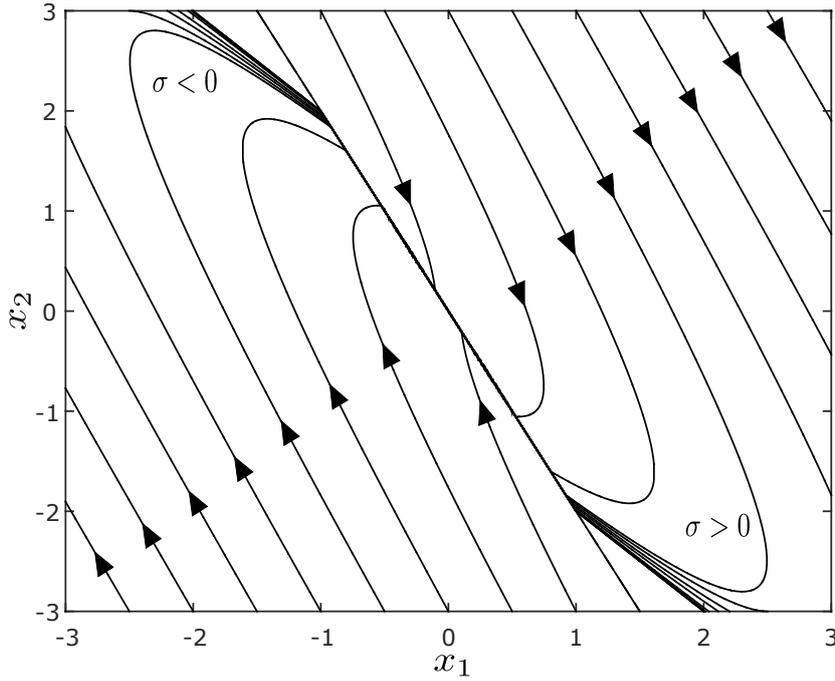


Figura 2.5: Plano de fase do sistema linear de segunda ordem em estudo com a lei de controle por modos deslizantes, onde $d(x, t) \equiv 0$, $\rho = 1$ e $\kappa = 2$.

sabe-se pelo princípio da comparação [39] que

$$V(\sigma(t)) \leq \frac{1}{2} \left(-\mu(t - t_0) + \sqrt{2V(\sigma(t_0))} \right)^2. \quad (2.14)$$

Definindo $t_0 = 0$, sabe que (2.14) pode ser reescrita como

$$\sqrt{2V(\sigma(t))} - \sqrt{2V(\sigma(0))} \leq -\mu t \quad (2.15)$$

Logo, conclui-se que a função $V(\sigma)$ e consequentemente $\sigma(t)$ convergem para zero em um tempo finito t_f dado por

$$t_f \leq \frac{\sqrt{2V(\sigma(0))}}{\mu} \quad (2.16)$$

Note que após o instante de tempo t_f garante-se que o modo deslizante é alcançado, e portanto a dinâmica dos estados do sistema passa a ser regida por (2.8). Observe que durante este movimento a dinâmica do sistema torna-se insensível à perturbação $d(x_1, x_2, t)$ e, portanto, pode-se garantir a convergência exponencial dos estados do sistema.

Visando a ilustrar os conceitos acima apresentados, a Figura 2.6 apresenta a dinâmica em malha fechada do sistema (2.10) com $d(t) = \text{sen}(4t)$. Como $|d(t)| \leq 1$, os parâmetros do controlador (2.4) foram definidos como $\rho = \kappa = 2$. Como esperado,

nota-se que a variável de deslizamento $\sigma = 2x_1 + x_2$ converge para zero em tempo finito, enquanto os estados do sistema convergem exponencialmente. Após o sistema entrar em modo deslizante, observa-se que o sinal de controle passa a chavear em uma frequência elevada, porém finita o que indica a presença de chattering. Note que por se tratar de uma perturbação casada, este fenômeno teoricamente não deveria ocorrer, no entanto, como essa simulação foi implementada em um computador digital, é necessário a utilização de integração numérica. Dessa forma, a discretização produz um sinal de controle contínuo por partes e com uma frequência elevada porém finita. Portanto, o chattering visto nessa ação de controle é exclusivamente numérico.

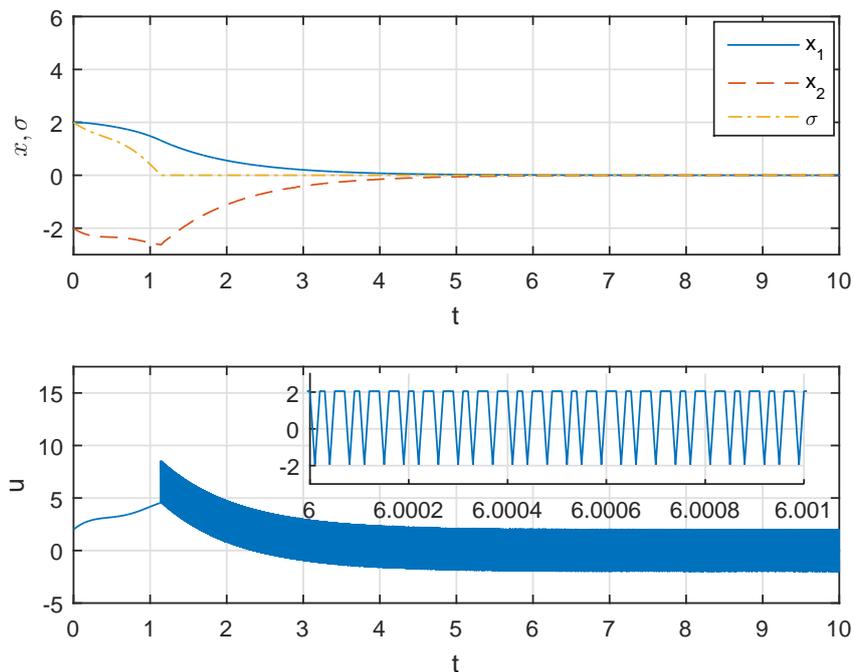


Figura 2.6: Desempenho da lei de controle por modos deslizantes, com $\rho = \kappa = 2$, aplicada ao sistema linear em estudo, sob o efeito da perturbação $d(t) = \text{sen}(4t)$.

2.2 Controle Equivalente

Quando o modo deslizante é alcançado, uma ação de controle descontínua surge, tornando a análise da dinâmica sobre a superfície de deslizamento mais desafiadora. No entanto, há um sinal contínuo capaz de substituir tal lei de controle durante o modo deslizante e manter as trajetórias do sistema sobre a superfície de deslizamento. Este sinal é definido como controle equivalente [4, 8].

Embora tal conceito seja abstrato, sobre o ponto de vista de análise ele torna-se relevante, visto que o mesmo facilita a obtenção de uma expressão para a dinâmica

do sistema durante o deslizamento, simplificando a análise de estabilidade do sistema em malha fechada.

Considere o sistema a seguir

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u + \bar{d}(x, t) \quad (2.17)$$

onde $a(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $b(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são funções suaves conhecidas que compõem a dinâmica do sistema, $\bar{d}(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa perturbações externas e incertezas no modelo, e $u \in \mathbb{R}^m$ é uma lei de controle possivelmente descontínua capaz de conduzir as trajetórias de (2.17) para a superfície de deslizamento $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\}$. Considere ainda que $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja uma função continuamente diferenciável e que $\bar{d}(x, t)$ seja uma função limitada e desconhecida. Como, por definição, o controle equivalente é um sinal contínuo capaz de manter as trajetórias do sistema sobre a superfície de deslizamento, o mesmo pode ser obtido pela seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(x) &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = 0 \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} (a(x, t) + b(x, t)u_{eq} + \bar{d}(x, t)) = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

logo, assumindo-se que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} b(x, t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é invertível, obtém-se o seguinte sinal equivalente

$$u_{eq} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} b(x, t) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} (a(x, t) + \bar{d}(x, t)) \quad (2.19)$$

Como pode-se observar, este sinal não possui relação com a lei de controle u , que pode apresentar uma ação descontínua sobre determinadas condições. Note ainda que como tal sinal é composto pelo sinal desconhecido $\bar{d}(x, t)$, o mesmo não pode ser implementado no lugar de u . Substituindo (2.19) em (2.17), infere-se que a dinâmica do sistema em malha fechada durante o modo deslizante é dada por

$$\dot{x} = \left(I_n - b(x, t) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} b(x, t) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) (a(x, t) + \bar{d}(x, t)) \quad (2.20)$$

Considere agora, que $\bar{d}(x, t)$ seja uma perturbação/incerteza casada, isto é, $\bar{d}(x, t) = b(x, t)d(x, t)$. Observe que isto ocorre sempre que as incertezas estão associadas à matriz de entrada $b(x, t)$ ou caso a perturbação externa seja incorporada à dinâmica do sistema por meio do sinal de controle. Sobre esta nova consideração, por (2.20) nota-se que a dinâmica do sistema em malha fechada durante o deslizamento pode

ser reescrita como

$$\dot{x} = \left(I_n - b(x, t) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} b(x, t) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) a(x, t) \quad (2.21)$$

Verifica-se portanto, que durante o modo deslizante, o sistema em malha fechada torna-se insensível à perturbações/incertezas casadas, visto que a dinâmica do sistema não possui mais relação com $\bar{d}(x, t)$. Esta característica positiva do controle por modos deslizantes que lhe concede robustez para esta classe de distúrbios é denominada propriedade de invariância.

Visando a ilustrar tal conceito, considere novamente o sistema apresentado em (2.1) no exemplo a seguir

Exemplo 2.1. Considere o sistema (2.1) com a lei de controle dada por (2.4). Para $t \geq t_1$, sendo t_1 o instante onde o modo deslizante é alcançado e as trajetórias são mantidas sobre a superfície $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x_1, x_2) = \kappa x_1 + x_2 = 0\}$, o controle equivalente é definido por (2.19), com

$$a(x, t) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{bmatrix}, \quad b(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{d}(x, t) = b(x, t)d(x, t), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \begin{bmatrix} \kappa & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$u_{eq} = -(\kappa - 1)x_1 - (\kappa + 1)x_2 - d(x, t)$$

substituindo em (2.19), segue que

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\kappa(x_1 + x_2) \end{cases}, \quad \forall (x_1, x_2) \in S \quad (2.22)$$

Como esperado para uma perturbação casada, nota-se que esta EDO não depende de $\bar{d}(x, t)$, garantindo o princípio da invariância. Note ainda que a solução da mesma para $t \geq t_1$, é dada por (2.8).

2.3 Solução de Filippov

Uma das principais características de sistemas a estrutura variável é a modelagem por equações diferenciais com lado direito descontínuo com relação aos estados do sistema. Esta descontinuidade implica na impossibilidade do uso da teoria clássica para a solução de equações diferenciais ordinárias, visto que as condições de existência e unicidade obtidas pela condição de Lipschitz não podem ser aplicadas. Esta restrição torna-se ainda mais complexa pelo fato das leis de controle baseadas nesta abordagem não serem devidamente definidas sobre a superfície de deslizamento, impedindo

o modo deslizante de ser formalmente interpretado.

Para lidar com esta classe de equações diferenciais, foi proposto por Filippov o conceito de solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo [36, 40], onde o campo vetorial sobre a descontinuidade é definido como uma combinação convexa dos campos vetoriais obtidos por aproximações ao redor de tal ponto. Para melhor compreensão deste importante conceito, considere um sistema definido pela seguinte equação diferencial

$$\dot{x}(t) = g(x, t) \quad (2.23)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, e $g(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função definida em quase todo ponto em um domínio E do espaço (x, t) , sendo mensurável no sentido de Lebesgue. Adicionalmente, em qualquer subconjunto $E_i \subset E$ do espaço (x, t) , existe uma função $\Psi(t)$ integrável e finita em quase todo ponto (x, t) do subconjunto, tal que

$$\|g(x, t)\| < \Psi(t)$$

A solução de Filippov para equações diferenciais com lado direito descontínuo [36, 40] é formalmente apresentada a seguir

Definição 2.1. (*Solução de Filippov*) Uma função $x(\cdot)$ é solução de (2.23) no intervalo $[t_a, t_b]$, se $x(\cdot)$ é absolutamente contínua em $[t_a, t_b]$, e se, para quase todo $t \in [t_a, t_b]$, tem-se a seguinte inclusão diferencial:

$$\dot{x} \in G(x)$$

com

$$G(x) = \bigcap_{r>0} \bigcap_{\mu N=0} \overline{\text{co}} \{g(B_r(x) \setminus N, t)\} \quad (2.24)$$

onde μ é a medida de Lebesgue, $B_r(x)$ representa uma bola de raio r centrada em x , $\overline{\text{co}} \{\cdot\}$ denota o fecho convexo, $g(B_r(x) \setminus N, t)$ é o conjunto de todos os valores de $g(x, t)$ para $x \in B_r(x) \setminus N$, e a notação $\bigcap_{\mu N=0}$ denota a interseção de todos os conjuntos N de medida nula no sentido de Lebesgue.

Por esta definição infere-se que, para um ponto sobre a descontinuidade, $G(x)$ representa o conjunto convexo mínimo de todos os valores de $g(x, t)$ na vizinhança de x , com exceção do conjunto de medida nula. A ideia geral da solução de Filippov é, portanto, definir $G(x)$ para um ponto x pertencente à uma certa superfície de descontinuidade em função de pontos na vizinhança do mesmo, nos quais $g(x, t)$ é uma função definida, excluindo, conseqüentemente, pontos de medida nula para os quais $g(x, t)$ não é definida. Note que a aplicação deste conceito para um ponto x_1 não pertencente a descontinuidade resulta num conjunto convexo mínimo composto por um único elemento, o próprio campo vetorial $g(x_1, t)$.

Visando a ilustrar a definição apresentada, considere novamente o sistema (2.23) e uma superfície de descontinuidade em seu domínio dada por $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\}$, sendo $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, onde

$$\frac{\partial}{\partial x} [\sigma(x)] = \nabla_x \sigma(x) \neq 0, \quad \forall x \in S_1$$

Considere ainda que a superfície S_1 particiona o espaço de estados em duas regiões independentes na qual a dinâmica do sistema é definida pela seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = \begin{cases} g^+(x, t), & x \in \mathcal{G}^+ \\ g^-(x, t), & x \in \mathcal{G}^- \end{cases} \quad (2.25)$$

onde,

$$\mathcal{G}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) > 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) < 0\}$$

Como a dinâmica do sistema em questão transita entre duas estruturas, apresentadas em (2.25), pela Definição 2.1 pode-se mostrar que a solução do sistema no sentido de Filippov é dada em função da seguinte inclusão diferencial

$$\dot{x} \in G(x), \quad (2.26)$$

$\forall x \in S_1$, onde, por (2.25), sabe-se que

$$G(x) = \{(1 - a)g^+(x, t) + ag^-(x, t) \mid a \in [0, 1]\} \quad (2.27)$$

Para a determinação do campo vetorial sobre a superfície de descontinuidade, considere o seguinte vetor normal a mesma no ponto x_s , apontando de \mathcal{G}^- para \mathcal{G}^+

$$N_s(x_s) = \begin{cases} \nabla_x^T \sigma(x_s), & \text{se } \nabla_x^T \sigma(x_s) \text{ aponta de } \mathcal{G}^- \text{ para } \mathcal{G}^+, \\ -\nabla_x^T \sigma(x_s), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.28)$$

Por sua vez, pode-se inferir que as projeções normais dos campos vetoriais $g^+(x, t)$ e $g^-(x, t)$ em relação ao vetor $N_s(x_s)$ são dadas por

$$\begin{aligned} g_N^+(x_s, t) &= g^+(x_s, t) \cdot N_s(x_s), \\ g_N^-(x_s, t) &= g^-(x_s, t) \cdot N_s(x_s). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Baseado na inclusão diferencial (2.26), sabe-se que caso a trajetória de estados do sistema esteja sobre a superfície de descontinuidade S_1 , a mesma deixará a superfície se $g_N^+(x_s, t)g_N^-(x_s, t) > 0$. Isto é, caso a projeção normal de ambos os campos vetoriais apontarem em direção à uma das regiões, \mathcal{G}^+ ou \mathcal{G}^- . Todavia, caso observe-se que nenhuma projeção normal aponta em direção oposta a superfície de descontinuidade

e pelo menos uma delas apontam em direção à superfície, garante-se que a trajetória do sistema permanecerá sobre S_1 , sendo tangente à mesma no ponto em questão. Em termos algébricos, esta condição ocorre se $g_N^+(x_c, t) \leq 0$ e $g_N^-(x_c, t) \geq 0$, com $g_N^-(x_c, t) - g_N^+(x_c, t) > 0$. Para o caso de interesse, isto é, onde a trajetória é mantida sobre a superfície, a constante a_s utilizada na combinação convexa (2.27) que definirá o campo vetorial $g^s(x, t)$ sobre S_1 pode ser obtida através da seguinte igualdade

$$g^s(x_c, t) \cdot N_s(x) = 0, \quad (2.30)$$

uma vez que $g^s(x, t)$ é tangente à S_1 . Substituindo (2.27) em (2.30), sabe-se, por (2.29), que

$$\begin{aligned} ((1 - a_s)g^+(x_c, t) + a_s g^-(x_c, t)) \cdot N_s(x_c) &= 0 \\ (1 - a_s)g_N^+(x_c, t) + a_s g_N^-(x_c, t) &= 0 \end{aligned}$$

Isolando a_s , segue que

$$a_s = \frac{g_N^+(x_c, t)}{g_N^+(x_c, t) - g_N^-(x_c, t)} \quad (2.31)$$

Para fins ilustrativos, a Figura 2.7 apresenta a construção geométrica do campo vetorial $g^s(x, t)$ sobre a superfície de descontinuidade S_1 para o caso particular onde $g_N^+ < 0$ e $g_N^- > 0$. Para um dado ponto $x_s \in S_1$, nota-se que $g^s(x, t)$ é obtido pela interseção do hiperplano tangente à S_1 e o segmento de reta que representa o fecho convexo que incluem $g^-(x, t)$ e $g^+(x, t)$.

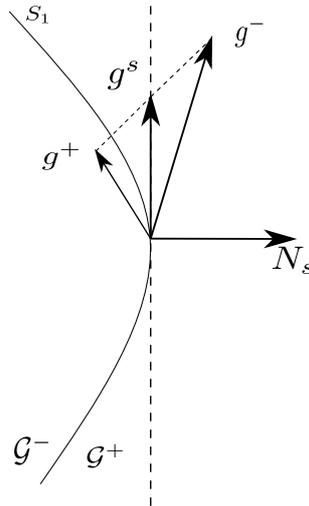


Figura 2.7: Construção geométrica do campo vetorial $g^s(x, t)$ da solução de Filippov sobre a superfície de descontinuidade S_1 .

O exemplo a seguir apresentará a aplicação dessa solução ao problema estudado na seção 2.1

Exemplo 2.2 Considere o sistema a estrutura variável em malha fechada (2.10),

com $d(x_1, x_2, t) \equiv 0$. Observe que sua dinâmica em cada estrutura pode ser interpretada como os campos vetoriais $g^+(x, t)$ e $g^-(x, t)$

$$g^+(x, t) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -\kappa(x_1 + x_2) - \rho \end{bmatrix}, \quad g^-(x, t) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -\kappa(x_1 + x_2) + \rho \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

permitindo deste modo que (2.10) seja escrito na forma de (2.25). Como, por definição $\sigma(x_1, x_2) = \kappa x_1 + x_2$, sabe-se que

$$N_s(x) = \nabla_x^T(\sigma) = \begin{bmatrix} \kappa \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

visto que $\nabla_x^T(\sigma)$ aponta de \mathcal{G}^- para \mathcal{G}^+ . Por (2.29), sabe-se que as projeções normais de $g^+(x, t)$ e $g^-(x, t)$ são dadas por

$$g_N^+(x, t) = -\rho, \quad g_N^-(x, t) = \rho \quad (2.34)$$

Como $g_N^+ < 0$ e $g_N^- > 0$, garante-se que as trajetórias do sistema estarão confinadas sobre a superfície $\sigma = \kappa x_1 + x_2$. Tendo posse de tais projeções, é possível inferir o valor de a_s por (2.31),

$$a_s = \frac{-\rho}{-\rho - \rho} = \frac{1}{2}$$

Portanto, por (2.27) observa-se que o campo vetorial sobre a superfície de descontinuidade é dada pela média entre os campos $g^+(x, t)$ e $g^-(x, t)$

$$g^s(x, t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -\kappa(x_1 + x_2) - \rho \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -\kappa(x_1 + x_2) + \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -\kappa(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação diferencial $\dot{x} = g^s(x, t)$ com $t > t_1$, onde t_1 é o instante onde o modo deslizante é alcançado, é possível verificar que a solução da mesma é dada por (2.8). Note ainda que as componentes de $g^s(x, t)$ estão associadas de acordo com a definição da superfície de deslizamento (2.9), para $\sigma = 0$.

É importante frisar que as condições descritas até o momento são condições necessárias para garantir a existência da solução no sentido de Filippov para equações diferenciais com lado direito descontínuo. Porém, uma condição suficiente que garante a unicidade da solução é a de que, se $g(x, t)$ for contínua por partes e os campos vetoriais $g^+(x, t)$ e $g^-(x, t)$ forem localmente Lipschitz em x nas regiões \mathcal{G}^+ e \mathcal{G}^- , respectivamente, então a solução será única se pelo menos uma das desigualdades abaixo for satisfeita $\forall x \in S_1$.

$$g_N^+(x, t) < 0, \quad g_N^-(x, t) > 0$$

2.4 Controle por Modos Deslizantes

Controladores baseados em modos deslizantes de primeira ordem são, de modo geral, projetados em dois estágios [3]. Inicialmente, deve-se projetar uma superfície de deslizamento que garanta que a variável de deslizamento σ possua grau relativo uniforme e unitário com relação à ação de controle u . Adicionalmente, deve-se assegurar que, quando as trajetórias do sistema alcancem a superfície de deslizamento escolhida, o modo deslizante obtido garanta a dinâmica desejada para o sistema em malha fechada. Note que esta condição pode ser verificada através do conceito de controle equivalente, apresentado na Seção 2.2.

Com a superfície de deslizamento definida, o passo seguinte é a escolha de uma lei de controle descontínua, capaz de assegurar que a superfície de deslizamento adotada seja, no mínimo, localmente atrativa, garantindo que as trajetórias do sistema a alcançarão em tempo finito.

As subseções seguintes serão voltadas para o estudo dos dois estágios descritos acima, necessários para o projeto de controladores por modos deslizantes de primeira ordem.

2.4.1 Superfície de Deslizamento

Conforme ilustrado na escolha da superfície de deslizamento em (2.9), seu projeto baseia-se em assegurar que as seguintes condições sejam satisfeitas

- (A1) A variável de deslizamento $\sigma(x)$ possuirá grau relativo uniforme e unitário com relação ao sinal de controle u .
- (A2) A dinâmica em malha fechada obtida durante o modo deslizante deve garantir a convergência exponencial das variáveis de estado envolvidas em $\sigma(x)$.

Note que a escolha de $\sigma(x_1, x_2)$ feita em (2.7) possui dinâmica dada por

$$\dot{\sigma}(x_1, x_2) = \kappa \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = (\kappa - 1)x_1 + (\kappa + 1)x_2 + u + d(x_1, x_2, t)$$

Portanto, verifica-se que a condição (A1) é satisfeita $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Por sua vez, note que tal escolha também garante a convergência exponencial dos estados do sistema, como pode ser visto em (2.8). Logo, a condição (A2) também é satisfeita.

2.4.2 Controle Vetorial Unitário

Caso a lei de controle seja projetada de modo que a superfície de deslizamento S seja globalmente atrativa, pode-se mostrar pelas hipóteses adotadas na Subseção 2.4.1 que o sistema de controle em questão será globalmente exponencialmente estável,

com as suas trajetórias convergindo em tempo finito para S . Uma forma de garantir o comportamento descrito acima é através da condição a seguir, denominada condição de alcançabilidade

$$\frac{d\|\sigma\|}{dt} \leq -\mu \quad \therefore \quad \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|} \leq -\mu \quad \therefore \quad \sigma^T \dot{\sigma} \leq -\mu \|\sigma\|, \quad (2.35)$$

onde $\mu > 0$ é uma constante de projeto e $\|\cdot\|$ corresponde à norma euclidiana de um vetor, ou a norma induzida para uma matriz. Ao integrar a desigualdade acima, segue que

$$\|\sigma(t)\| - \|\sigma(0)\| \leq -\mu t \quad (2.36)$$

Assumindo que t_s seja o instante de tempo finito no qual o modo deslizante é alcançado, por (2.36) pode-se obter um limitante superior para este tempo dado por

$$t_s \leq \frac{\|\sigma(0)\|}{\mu} \quad (2.37)$$

Pelos resultados obtidos acima infere-se que, caso a lei de controle se baseie nessa condição, a superfície de deslizamento será alcançada em tempo finito e o modo deslizante será mantido $\forall t \geq t_s$.

Visando a ilustrar o projeto de tal lei de controle, considere o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u + d(x, u, t)) \\ \sigma &= Sx \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, $u \in \mathbb{R}^m$, com $1 \leq m \leq n$ é uma lei de controle descontínua e $d(x, u, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ engloba todas as incertezas e perturbações externas e não-linearidades associadas ao sistema. Além disso considera-se que embora este sinal seja desconhecido, possui um limitante superior limitado dado por

$$\|d(x, u, t)\| \leq \kappa_u \|u\| + \tilde{d}(x, t), \quad (2.39)$$

onde $0 \leq \kappa_u < 1$ é uma constante conhecida e $\tilde{d}(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva conhecida. Por sua vez, as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, e $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

onde as dimensões das submatrizes de A , B , e S são definidas de acordo com $x = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix}^T$, com $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $x_2 \in \mathbb{R}^m$. Adicionalmente, assume-se que $B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz não-singular e que o par (A, B) é controlável.

Note que o sistema apresentado em (2.38) está em sua forma normal, de acordo

com (2.40). No entanto, pode-se provar que sistemas cuja a matriz B possui posto completo, podem assumir a forma de (2.40) através de uma transformação homogênea no espaço de estados [3]. Portanto, o sistema ilustrado aqui não se restringe à uma classe específica de sistemas que já estão na forma normal apresentada, mas sim a todos aqueles cuja a matriz B possua posto completo.

De acordo com a Hipótese (A1) apresentada na Subseção 2.4.1 para a definição da superfície de deslizamento, nota-se que o projeto da matriz S deve ser desenvolvido de tal modo que o produto $S_2 B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seja não-singular, garantindo assim grau relativo uniforme e unitário.

Note que por (2.38), a dinâmica da variável de deslizamento pode ser escrita como

$$\dot{\sigma} = S\dot{x} = SAx + SB(u + d(x, u, t)) = SAx + S_2 B_m u + S_2 B_m d(x, u, t) \quad (2.41)$$

Substituindo (2.41) em (2.35), segue que

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T (SAx + S_2 B_m u + S_2 B_m d(x, u, t)) \quad (2.42)$$

Definindo $S_2 = B_m^{-1}$ e

$$u = v - SAx, \quad (2.43)$$

pode-se reescrever (2.42) como

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T (v + d(x, u, t)) \leq \|\sigma\| \|d(x, u, t)\| + \sigma^T v \quad (2.44)$$

Por (2.39), sabe-se que a seguinte desigualdade é válida $\forall \sigma \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \sigma^T \dot{\sigma} &\leq \|\sigma\| \left(\kappa_u \|u\| + \tilde{d}(x, t) \right) + \sigma^T v \\ &\leq \|\sigma\| \left(\kappa_u (\|SAx\| + \|v\|) + \tilde{d}(x, t) \right) + \sigma^T v \end{aligned} \quad (2.45)$$

Note que a variável de controle disponível tem como objetivo introduzir uma ação de controle descontínua sobre o sistema, de modo que as suas trajetórias alcancem e se mantenham sobre a superfície $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\}$. Para o caso escalar, isto é, $m = 1$, este sinal poderia ser definido como $v = -\rho \text{sign}(\sigma)$. Note ainda que até mesmo em casos multivariáveis desacoplados tal ação de controle ainda poderia ser adaptada, definindo

$$v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{bmatrix}^T, \quad v_i = -\rho_i \text{sign}(\sigma_i),$$

onde σ_i representaria o i -ésimo elemento do vetor $\sigma(x)$. No entanto, como o caso estudado pode possuir acoplamento, este sinal descontínuo deve ser generalizado

para o caso multivariável. Considere, portanto o seguinte sinal descontínuo

$$v = -\rho(x, t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (2.46)$$

onde $\rho(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de modulação positiva de projeto. Note que, para $m = 1$, $\|\sigma\| = |\sigma|$, portanto este sinal pode ser reescrito como $v = -\rho(x, t) \text{sign}(\sigma)$, que é seu equivalente para o caso escalar. Substituindo (2.46) em (2.45), segue que

$$\begin{aligned} \sigma^T \dot{\sigma} &\leq \|\sigma\| \left(\kappa_u \left(\|SAx\| + \left\| \rho \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \right\| \right) + \tilde{d}(x, t) \right) - \rho \frac{\sigma^T \sigma}{\|\sigma\|} \\ &\leq \|\sigma\| \left(\kappa_u \|SAx\| + \tilde{d}(x, t) - (1 - \kappa_u) \rho \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Definindo a função de modulação como

$$\rho(x, t) = \frac{1}{1 - \kappa_u} \left(\kappa_u \|SAx\| + \tilde{d}(x, t) + \mu \right) \quad (2.48)$$

verifica-se que a condição de alcançabilidade descrita em (2.35) é satisfeita.

Exemplo 2.3. Considere o sistema apresentado em (2.38)-(2.40) com os seguintes valores numéricos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad S = B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Considere ainda que a perturbação $d(x, u, t)$ possui um limitante superior dado por (2.39), com $\kappa_u = 0.75$ e $\tilde{d}(x, t) = \|x\| + 1$. Note que embora este sistema não esteja na forma normal, ainda é possível desenvolver a estratégia proposta, uma vez que B possui posto completo.

Uma vez que S possui posto completo e é uma matriz quadrada, segue que

$$\sigma = Sx = 0 \implies x = 0, \quad \forall x \in S_1$$

Logo, caso a lei de controle seja definida de tal forma que a superfície $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\}$ seja alcançada em tempo finito pelas trajetórias do sistema, garante-se que os estados x_1 e x_2 convergirão para zero em tempo finito. Baseado em (2.43) e (2.46), a seguinte lei de controle foi projetada

$$u = - \left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \rho(x, t) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \right) \quad (2.50)$$

com função de modulação dada por

$$\rho(x, t) = 3 \left\| \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x \right\| + 4 (\|x\| + 1.25) \quad (2.51)$$

onde $\mu = 0.25$. Logo verifica-se que a condição de alcançabilidade é satisfeita globalmente e a superfície S_1 será alcançada em tempo finito, garantindo assim a convergência dos estados do sistema em tempo finito para qualquer condição inicial $x_1(0)$ e $x_2(0)$. Os resultados deste exemplo são apresentados na Figura 2.8, onde pode-se verificar que os estados do sistema convergem em tempo inferior à $T = 0.15s$, como esperado por (2.37).

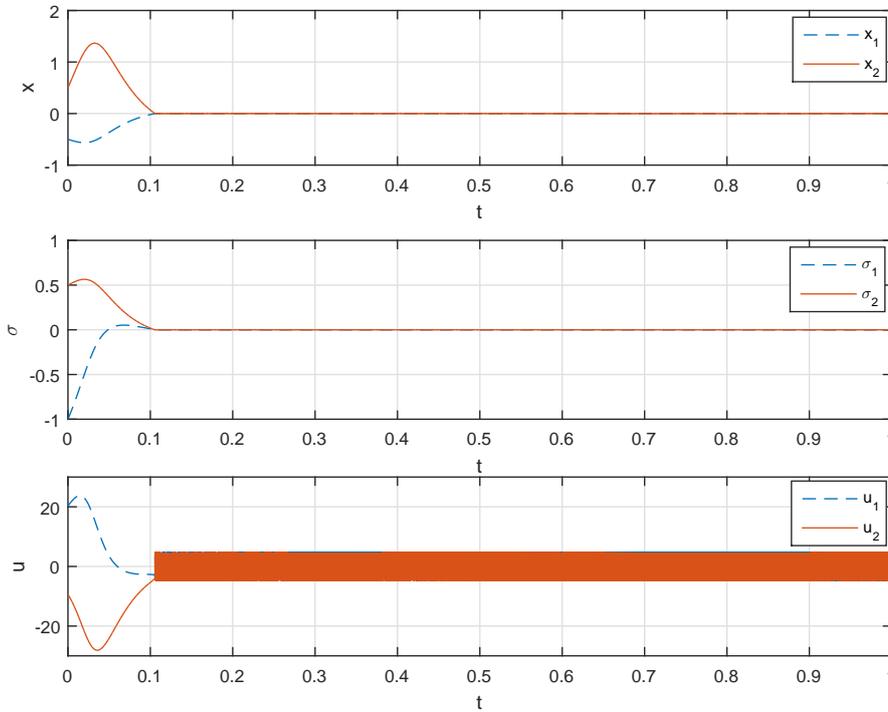


Figura 2.8: Desempenho da lei de controle por modos deslizantes aplicada ao sistema do Exemplo 2.3, com função de modulação dada por (2.51). A perturbação $d(x, u, t)$ considerada é definida em (2.52).

Para este exemplo, a perturbação foi definida como

$$d(x, u, t) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} u + \frac{4}{10} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ \text{sen}(\pi t) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Como esperado, observa-se na Figura 2.8 que, no momento em que o modo deslizante é alcançado, o sinal de controle começa a chavear em uma frequência elevada. Este fenômeno ocorre justamente devido aos atrasos na implementação discreta as-

sociados à descontinuidade na lei de controle adotada.

2.5 Modos Deslizantes de Ordem Superior

O conceito de modos deslizantes de ordem superior consiste na generalização do conceito de modos deslizantes convencional [1, 6]. Diferente dos controladores baseados no modo deslizante convencional, essa nova abordagem tem como objetivo atuar nas derivadas de ordem mais alta da variável de deslizamento, de modo que não somente a mesma seja igual a zero, mas suas derivadas de ordem inferior à citada também. Dessa forma, além de garantir as propriedades inerentes do modo deslizante convencional, como insensibilidade a distúrbios casados e convergência em tempo finito para a variável de deslizamento, obtém-se maior acurácia e uma lei de controle contínua e, portanto, com os efeitos do *chattering* mitigados [1, 6, 41].

Essa nova abordagem define a ordem do deslizamento de acordo com o grau de suavidade da dinâmica de cada derivada temporal na vizinhança das superfícies de deslizamento, incluindo a de ordem zero $\frac{d^0\sigma}{dt^0} = \sigma$. Note que, de acordo com esta classificação, a estratégia por modos deslizantes convencional se enquadra como modo deslizante de primeira ordem, visto que a descontinuidade é observada na primeira derivada da variável de deslizamento. A definição formal desse conceito é dada a seguir

Definição 2.2. [1, 9] *Considere a seguinte equação diferencial descontínua*

$$\dot{x} = f(x)$$

cuja solução é entendida no sentido de Filippov, com função de restrição $\sigma(x)$ suave. Suponha que as seguintes condições são satisfeitas

(a) *As derivadas temporais $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ são funções contínuas do estado x .*

(b) *O conjunto*

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\} \quad (2.53)$$

é um conjunto integral não vazio, isto é, consiste em trajetórias de Filippov.

(c) *O conjunto de campos vetoriais admissíveis de Filippov nos pontos pertencentes a (2.53) contém mais de um vetor.*

Então, o movimento no conjunto (2.53) é dito existir em um modo deslizante de ordem r , e o conjunto (2.53) é denominado conjunto deslizante de ordem r . O caso não-autônomo é reduzido ao caso considerado acima introduzindo o estado fictício t , cuja dinâmica é dada por $\dot{t} = 1$.

Infere-se, portanto, que o deslizamento ocorre sobre o conjunto deslizante (2.53), com dimensão r no espaço de estados. Note ainda que diferente do modo deslizante de primeira ordem, no qual a superfície de deslizamento precisava ser alcançada em tempo finito para que o modo deslizante ocorresse, a convergência para um conjunto deslizante como em (2.53) com $r \geq 2$ pode também ser assintótica. Para ilustrar, considere um sistema de segunda ordem no qual um controlador baseado em modos deslizantes de primeira ordem garante que as trajetórias do sistema alcançam em tempo finito e se mantêm sobre a seguinte superfície

$$S = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma_1(x, \dot{x}) = x + \dot{x} = 0\} \quad (2.54)$$

Considere agora uma nova restrição dada por $\sigma_2(x, \dot{x}) = x$. Note que para esta função as condições impostas na Definição 2.2 são satisfeitas para $r = 2$. Portanto, sabe-se por (2.53) que quando o modo deslizante de segunda ordem ocorrer, $\sigma_2 = \dot{\sigma}_2 = 0$. Como o controlador utilizado garante que a superfície (2.54) é alcançada em tempo finito, conseqüentemente o modo deslizante de segunda ordem será alcançado exponencialmente.

Visando a ilustrar o conceito de modos deslizantes de ordem superior, considere a Figura 2.9, que representa um modo deslizante de segunda ordem sendo alcançado. É possível observar a interseção das restrições $\dot{\sigma} = 0$ e $\sigma = 0$, isto é, o conjunto descrito em (2.53) para $r = 2$. Note que o ponto M possui dois campos vetoriais, ilustrando o item (c) na Definição 2.2.

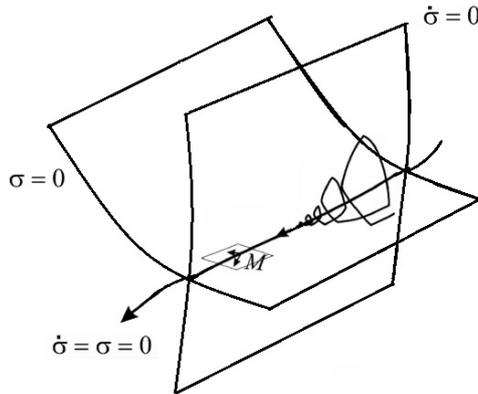


Figura 2.9: Modo Deslizante de Segunda Ordem [1].

A acurácia com que as trajetórias do sistema são mantidas sobre uma determinada restrição possui relação direta com o intervalo de tempo τ entre as medições (ou o atraso no chaveamento, como visto em 2.4). Como em um modo deslizante de primeira ordem a descontinuidade é observada na primeira derivada temporal da variável de deslizamento, a acurácia com que a restrição $\sigma(x) = 0$ é mantida

é proporcional a τ . Pelo mesmo raciocínio, infere-se que em um modo deslizante de ordem r , a restrição $\sigma^{(r-1)} = 0$ é mantida com precisão proporcional a τ , o que implica que as outras restrições, isto é, $\sigma^{(r-j)} = 0$, $j = 1, \dots, r$, apresentam acurácias proporcionais a τ^j , garantindo, assim, acurácia superior para $\sigma = 0$ em técnicas baseadas em HOSM. Note, no entanto, que como esta característica é observada somente durante o deslizamento, é necessário que o modo deslizante de ordem superior seja alcançado em um tempo finito.

De modo geral, em sistemas de controle, o conceito de grau relativo está associado ao número de diferenciações temporais que devem ser feitas sobre a saída desse sistema até que se observe diretamente o efeito da ação de controle. Logo, sistemas de controle baseados em modos deslizantes cujas descontinuidades sejam exclusivamente associadas ao sinal de controle, podem ter seu grau relativo definido de acordo com o número de derivadas temporais da saída necessárias para que se observe um sinal descontínuo. Portanto, verifica-se que o grau relativo e a ordem do modo deslizante estão intimamente relacionadas, conforme será apresentado a seguir

Considere o seguinte sistema dinâmico

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u \\ y = \sigma(x, t) \end{cases} \quad (2.55)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, e $u \in \mathbb{R}$ são os estados, a saída e o sinal de entrada do sistema, respectivamente. Por sua vez, $\sigma(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $b(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções suaves. Aumentando o sistema com a introdução do estado fictício $\dot{t} = 1$ e definindo $\bar{x}^T = [x^T \quad t]^T$, sua dinâmica passa a ser dada por

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} a(x, t) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b(x, t) \\ 0 \end{bmatrix} u = \bar{a}(\bar{x}) + \bar{b}(\bar{x})u \quad (2.56)$$

com saída dada por $y = \sigma(\bar{x})$. Deve-se destacar que embora a introdução do tempo como um estado fictício simplifique a definição de grau relativo do sistema, ela pode gerar outras dificuldades, uma vez que a norma do estado passa a ser ilimitada. Por exemplo, a definição de estabilidade tem que ser modificada para tratar adequadamente esse caso.

Como, por definição, o grau relativo da saída σ com relação à uma entrada u em um dado ponto \bar{x} é equivalente a ordem da derivada total de σ na qual a entrada u surge pela primeira vez acompanhada de um coeficiente não-nulo, é possível calculá-lo pela diferenciação direta da saída do sistema. Sua primeira derivada temporal é

dada por

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = \nabla_{\bar{x}} \sigma(\bar{x}) \cdot (\bar{a}(\bar{x}) + \bar{b}(\bar{x})u) = \mathcal{L}_{\bar{a}} \sigma(\bar{x}) + \mathcal{L}_{\bar{b}} \sigma(\bar{x})u$$

onde $\mathcal{L}_f \sigma(\bar{x}) = \nabla_{\bar{x}} \sigma(\bar{x}) \cdot f(\bar{x})$ corresponde a derivada de Lie de $\sigma(\bar{x})$ com respeito a $f(\bar{x})$ [42], considerando uma função diferenciável $\sigma(\bar{x})$ com respeito a um campo vetorial $f(\bar{x})$ em um dado ponto \bar{x} . Portanto, caso exista algum ponto \bar{x}_r onde $\mathcal{L}_{\bar{b}} \sigma(\bar{x}) \neq 0$, então o sistema possuirá grau relativo unitário neste ponto. Caso em uma vizinhança do mesmo $\mathcal{L}_f \sigma(\bar{x}) \equiv 0$, então implica que seu grau relativo pode ser maior e deve-se portanto analisar sua segunda derivada:

$$\ddot{\sigma} = \mathcal{L}_{\bar{a}} \{ \mathcal{L}_{\bar{a}} \sigma(\bar{x}) \} + \mathcal{L}_{\bar{b}} \{ \mathcal{L}_{\bar{a}} \sigma(\bar{x}) \} u = \mathcal{L}_{\bar{a}}^2 \sigma(\bar{x}) + \mathcal{L}_{\bar{b}} \mathcal{L}_{\bar{a}} \sigma(\bar{x})u$$

Caso $\mathcal{L}_{\bar{b}} \mathcal{L}_{\bar{a}} \sigma(\bar{x}) \neq 0$ em um ponto \bar{x}_r , implica que o grau relativo de σ em \bar{x}_r é igual a dois. Estendendo este raciocínio, pode-se formalizar o conceito de grau relativo através da definição a seguir

Definição 2.3. [43] Considere o sistema (2.55), com entrada $u \in \mathbb{R}$ e saída $\sigma \in \mathbb{R}$. Assuma que as seguintes hipóteses são satisfeitas:

- (a) $\mathcal{L}_{\bar{b}} \mathcal{L}_{\bar{a}}^i \sigma(\bar{x}_r) \equiv 0$, com $i = 0, 1, \dots, r - 2$, em todo ponto \bar{x} em dada vizinhança de \bar{x}_r .
- (b) $\mathcal{L}_{\bar{b}} \mathcal{L}_{\bar{a}}^{r-1} \sigma(\bar{x}_r) \neq 0$

Então, é dito que o sistema (2.55) possui grau relativo r no ponto $\bar{x}_r^T = \begin{bmatrix} \bar{x}_r^T & t_r \end{bmatrix}^T$.

Considerando a definição acima para o sistema (2.55) com grau relativo constante e igual a r , isto é, com o mesmo grau relativo para todo ponto $\bar{x}_r \in \mathbb{R}^n$ de seu domínio, infere-se que as derivadas temporais da saída do sistema serão dadas por

$$\begin{cases} \sigma^{(i)} = \mathcal{L}_{\bar{a}}^i \sigma(\bar{x}), & i = 1, \dots, r - 1 \\ \sigma^{(r)} = \mathcal{L}_{\bar{a}}^r \sigma(\bar{x}) + \mathcal{L}_{\bar{b}} \mathcal{L}_{\bar{a}}^{(r-1)} \sigma(\bar{x})u \end{cases} \quad (2.57)$$

onde $\mathcal{L}_{\bar{b}} \mathcal{L}_{\bar{a}}^{(r-1)} \sigma(\bar{x}) \neq 0$. Portanto as derivadas temporais de σ com ordem inferior a r serão funções contínuas de \bar{x} . Como o sinal de controle atua da r -ésima derivada temporal em diante, verifica-se que a restrição $\sigma = 0$ só pode ser garantida com um modo deslizante de ordem r ou superior. Caso a ordem escolhida seja $r^* > r$, a lei de controle deve ser projetada de tal forma que possua sinal descontínuo na derivada de ordem r , para que assim seja possível garantir o deslizamento de ordem superior.

Entre os controladores por modos deslizantes de ordem superior com lei de controle contínua, destaca-se o algoritmo Super-Twisting (*Super-Twisting Algorithm*-STA) [6]. Sua popularidade entre tais técnicas deve-se ao fato de não depender do conhecimento da primeira derivada temporal da variável de deslizamento para sua implementação. Seu principal objetivo é atenuar o efeito do chattering em sistemas com grau relativo unitário. Apesar dos benefícios citados, a primeira versão deste controlador baseava-se na teoria de sistemas homogêneos e em métodos geométricos [11], o que limitou o desenvolvimento de técnicas baseadas no STA. Com o uso de funções de Lyapunov para a análise de estabilidade desse algoritmo [11, 12], ele pôde ser estendido para novas aplicações, como o uso de ganhos variáveis [13, 14], o caso multivariável [15, 16] e o uso de ganhos adaptativos [24, 25]. Nas subseções a seguir, será apresentado o algoritmo Super-Twisting baseado em funções de Lyapunov e as principais contribuições desenvolvidas através dele, incluindo suas generalizações.

2.5.1 Super-Twisting

Baseado em modos deslizantes de segunda ordem, o Super-Twisting é um algoritmo cujo o objetivo é atenuar o efeito do chattering em sistemas com grau relativo unitário [1, 6, 9]. A ação de controle descontínua, presente em algoritmos baseados em modos deslizantes, é encontrada em sua derivada temporal, o que permite que sua lei de controle seja definida como um sinal contínuo. Uma das principais características da aplicação deste algoritmo em sistemas de controle é o movimento em espiral em torno da origem do plano de fase $(\sigma, \dot{\sigma})$, como ilustrado na figura 2.10.

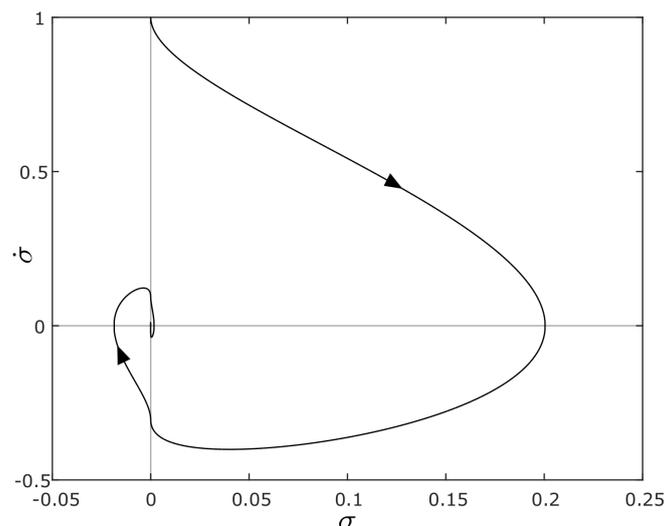


Figura 2.10: Modelo de trajetória no espaço de estados de um super-twisting.

O fato de não depender do conhecimento de $\dot{\sigma}$ no projeto de sua lei de controle, fez com que o Super-Twisting ganhasse popularidade entre as técnicas baseadas

em modos deslizantes de segunda ordem. Entre as suas aplicações encontram-se a diferenciação robusta e exata em tempo real [44] e o controle de sistemas de interesse prático [45-47].

Os primeiros trabalhos baseados no Super-Twisting faziam uso de métodos geométricos e da teoria de sistemas homogêneos para a análise de estabilidade do algoritmo [6, 10]. A análise geométrica consiste em garantir que, caso os ganhos do algoritmo sejam definidos grandes o suficiente, as trajetórias do sistema em malha fechada serão mantidas entre curvas limites. No entanto, além dos ganhos definidos através dessa análise poderem ser conservadores, a convergência é garantida somente em uma vizinhança da origem. A Figura 2.11 ilustra a presença de uma das curvas limitantes usadas na análise de estabilidade do Super-Twisting. Uma condição suficiente para garantir a convergência do algoritmo por esta análise é que a desigualdade $|\dot{\sigma}_M/\dot{\sigma}_0| < 1$ seja satisfeita para cada curva em estudo [9].

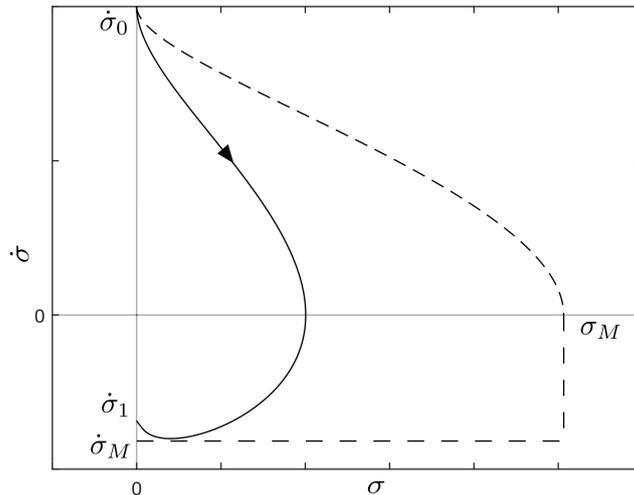


Figura 2.11: Curva limitante utilizada na análise geométrica do super-twisting.

Visando a simplificar a análise geométrica, o método homogêneo considera o uso de inclusões diferenciais homogêneas no processo de análise de estabilidade do algoritmo, padronizando as formas de demonstração com a inclusão do conceito de homogeneidade de deslizamento [10].

Embora tais trabalhos tenham contribuído para o desenvolvimento do algoritmo, a forma de análise adotada trazia certas limitações, visto que eram usados em casos particulares. A análise por métodos geométricos exigia uma abordagem específica de acordo com o algoritmo, restringindo o desenvolvimento de uma análise sistemática. Por sua vez, o método baseado em homogeneidade limitava-se ao estudo de sistemas homogêneos e, portanto, tinha seu alcance limitado.

Visando contornar tais restrições, uma nova forma de análise baseada em funções

de Lyapunov foi proposta em [11]. Além de garantir ao algoritmo novas propriedades, como convergência global, permitiu que a análise fosse feita de forma sistemática. Como consequência, novas contribuições baseadas no Super-Twisting foram desenvolvidas, estendendo sua aplicação para uma classe mais ampla de sistemas e perturbações.

2.5.2 Super-Twisting com termos lineares

Considere o algoritmo Super-Twisting apresentado em [11], no qual a análise por funções de Lyapunov foi introduzida

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= -k_1|\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma) - k_2\sigma + z + d_1(\sigma, t) \\ \dot{z} &= -k_3\text{sign}(\sigma) - k_4\sigma + d_2(\sigma, t)\end{aligned}\tag{2.58}$$

onde $\sigma \in \mathbb{R}$ corresponde à variável de deslizamento, $z \in \mathbb{R}$ é uma variável interna do algoritmo, $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ são ganhos constantes a serem projetados e $d_1(\sigma, t), d_2(\sigma, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ representam todas as perturbações e incertezas associadas ao sistema. Adicionalmente, considera-se que tais distúrbios são globalmente limitados por

$$|d_1(\sigma, t)| \leq \delta_1|\sigma|^{\frac{1}{2}} + \delta_3|\sigma|, \quad |d_2(\sigma, t)| \leq \delta_2 + \delta_4|\sigma|\tag{2.59}$$

onde as constantes $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \geq 0$ são conhecidas. Note que o algoritmo estudado em [9], cuja a análise de estabilidade é feita por métodos geométricos, está incluído em (2.58). Isto pode ser verificado adotando $k_2 = k_4 = 0$, visto que a presença de tais termos torna o sistema em questão não homogêneo. Baseado no algoritmo acima e na classe de perturbações adotada, o teorema a seguir é enunciado

Teorema 2.1. [11] *Considere o sistema (2.58) sob o efeito de perturbações/incertezas $d_1(\sigma, t)$ e $d_2(\sigma, t)$, que possuem limitantes superiores dados por (2.59). Então, os ganhos k_i podem ser projetados grandes o suficiente tal que a origem $\sigma = 0$ seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e todas as trajetórias convirjam em tempo finito para a origem*

Demonstração. Ver Apêndice B.1 □

Visando ilustrar o algoritmo apresentado, considere o seguinte exemplo

Exemplo 2.4. (*Robust Exact Differentiator- RED*). Considere um integrador simples

$$\dot{x} = u$$

onde $x \in \mathbb{R}$ corresponde ao estado deste sistema e $u \in \mathbb{R}$ à entrada do mesmo. O objetivo em questão é rastrear em tempo real a derivada de um sinal base $f_0(t)$:

$\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ em tempo finito. Pela dinâmica natural do integrador, isto pode ser obtido através do próprio sinal base. Definindo $\sigma = x - f_0$ como o erro de estimação desse sinal, obtém-se a seguinte dinâmica para σ

$$\dot{\sigma} = u - \dot{f}_0$$

Definindo a lei de controle como

$$\begin{aligned} u &= -k_1|\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma) - k_2\sigma + v \\ \dot{v} &= -k_3\text{sign}(\sigma) - k_4\sigma \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde $v = -\int_{t_0}^t (k_3\text{sign}(\sigma) + k_4\sigma)dt$, obtém-se o sistema descrito em (2.58), com $z = v - \dot{f}_0$, $d_1(\sigma, t) \equiv 0$ e $d_2(\sigma, t) = -\ddot{f}_0$. Adicionalmente, considerando que $|f_0| < C$, garante-se pelo Teorema 2.1 que um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ é alcançado em tempo finito se os ganhos k_i , $i = 1, \dots, 4$ satisfizerem as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} k_1 &> 2\sqrt{C} \\ k_2 &> 0 \\ k_3 &> C \\ k_4 &> \frac{9}{4} \frac{k_1^2 k_2^2}{k_3 - C} + \frac{5}{2} k_2^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

que atendem simultaneamente às condições (B.6) e (B.7). Com os ganhos definidos de acordo com (2.61), garante-se que, após um tempo finito T , as seguintes igualdades serão válidas

$$\begin{aligned} \sigma = 0 & \quad \therefore f_0 = x \\ z = 0 & \quad \therefore \dot{f}_0 = \int_{t_0}^t (-k_3\text{sign}(\sigma) - k_4\sigma) dt = v \end{aligned} \quad (2.62)$$

Note, portanto, que a derivada temporal do sinal base é rastreada em tempo finito por u e pelo sinal auxiliar v , que são, por definição, sinais contínuos. A Figura 2.12 apresenta os resultados obtidos em simulação para a estimação da derivada do sinal base $f_0(t) = \cos(3t) + e^{-t}\text{sen}(t)$, utilizando o derivador de primeira ordem apresentado. Os ganhos foram definidos como $k_1 = 7.5$, $k_2 = 0.5$, $k_3 = 20$ e $k_4 = 6$. Observe que após um tempo $T < 0.5$ o modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ é alcançado. A partir desse instante, as igualdades apresentadas em (2.62) são satisfeitas. É válido frisar que o sinal de controle u é contínuo $\forall t \geq 0$, tornando-se, portanto, menos propenso ao chattering.

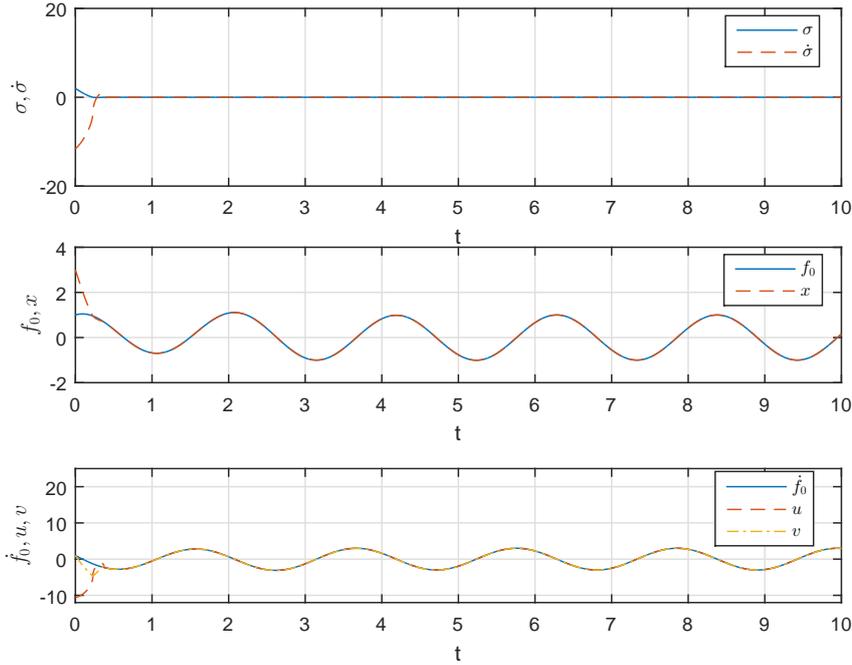


Figura 2.12: Desempenho do RED proposto, estimando a derivada do sinal base $f_0(t) = \cos(3t) + e^{-t}\sin(t)$.

2.5.3 Super-Twisting com ganhos variáveis

Como apresentado na Subseção [2.5.2](#), a análise de estabilidade e convergência por funções de Lyapunov permitiu que novas contribuições pudessem ser feitas de forma sistemática para o algoritmo Super-Twisting, como a inclusão de termos lineares em [\[11\]](#), que garantem o deslizamento para uma classe de perturbações/ incertezas linearmente dependentes da variável de deslizamento. No entanto, tais contribuições permitiam apenas compensar distúrbios com derivadas limitadas por constantes conhecidas a priori.

Visando lidar com uma classe de perturbações/incertezas mais ampla, uma generalização do algoritmo Super-Twisting foi proposta em [\[13, 14\]](#), no qual ganhos variáveis foram incluídos. Esta extensão ficou conhecida como Algoritmo Super-Twisting com Ganhos Variáveis (*Variable Gain Super-Twisting Algorithm - VGSTA*). Além de preservar as propriedades do algoritmo apresentado na Subseção [2.5.2](#), esta técnica permite a compensação de forma exata de uma classe mais abrangente de distúrbios, cujas derivadas temporais sejam limitadas por funções contínuas previamente conhecidas, devido aos ganhos variáveis.

Considere o seguinte sistema

$$\dot{\xi} = A\xi + B(u + d(\xi, t)) \quad (2.63)$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \leq n$, é o sinal de controle, e $d(\xi, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função absolutamente contínua que engloba todas as perturbações externas e incertezas no modelo casadas e não-linearidades do sistema. Por sua vez, considere que a matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ possui posto completo e o par (A, B) seja controlável. Sobre estas condições, existe uma matriz $B_\perp \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ de posto completo tal que $B_\perp B = 0$. Portanto, existe uma transformação de estados homogênea

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_\perp \\ (B^T B)^{-1} B^T \end{bmatrix} \xi$$

que reescreve o sistema em sua forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u + d(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde $x_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $x_2 \in \mathbb{R}^m$. Por simplicidade, será considerado deste ponto em diante que $m = 1$, isto é, o caso escalar. Note, no entanto, que a extensão dessa abordagem para o caso multivariável pode ser feita de forma direta [15].

O objetivo da lei de controle para o sistema em estudo é garantir que a superfície de deslizamento $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = \dot{\sigma} = 0\}$ com

$$\sigma(x_1, x_2) = x_2 - Kx_1 \quad (2.65)$$

seja globalmente atrativa. Note que a escolha da variável de deslizamento proposta em (2.65) assegura grau relativo uniforme e unitário de σ com respeito a u e dinâmica de ordem reduzida durante o modo deslizante, visto que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} + A_{12}K)x_1 \\ x_2 &= Kx_1 \end{aligned}, \forall (x_1, x_2) \in S_2 \quad (2.66)$$

Além disso, pode-se concluir que com uma escolha apropriada de K , garante-se convergência exponencial para x_1 e x_2 . Esta escolha pode ser feita baseada em métodos como alocação de polos ou minimização linear quadrática [1, 14].

Como a superfície de deslizamento garante as condições apresentadas na Subseção 2.4.1, deve-se projetar uma lei de controle que garanta que as trajetórias do sistema alcancem a superfície S_2 em tempo finito e se mantenham sobre a mesma. Uma vez que a dinâmica da variável de deslizamento é dada por

$$\dot{\sigma} = (A_{21} - KA_{11})x_1 + (A_{22} - KA_{12})x_2 + u + d(x_1, x_2, t), \quad (2.67)$$

considere o seguinte sinal de controle

$$u = -(A_{21} - KA_{11})x_1 - (A_{22} - KA_{12})x_2 + v \quad (2.68)$$

Substituindo (2.68) em (2.67) e considerando (2.64), pode-se reescrever a dinâmica do sistema em malha fechada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (A_{11} + A_{12}K)x_1 + A_{12}\sigma \\ \dot{\sigma} &= v + d(x_1, Kx_1 + \sigma, t) \end{aligned} \quad (2.69)$$

A fim de garantir o modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$, a variável de controle v será definida de acordo com o *Variable Gain Super-Twisting Algorithm* [13, 14], dado por

$$v = -k_1(x, t)\phi_1(\sigma) - \int_{t_0}^t k_2(x, \tau)\phi_2(\sigma)d\tau, \quad (2.70)$$

com

$$\phi_1(\sigma) = |\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma) + k_3\sigma, \quad \phi_2(\sigma) = \frac{1}{2}\text{sign}(\sigma) + \frac{3}{2}k_3|\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma) + k_3^2\sigma, \quad (2.71)$$

onde k_3 é uma constante positiva de projeto. Comparando os algoritmos apresentados, note que o ganho k_3 em (2.70) tem função semelhante aos ganhos k_2 e k_4 em (2.60), uma vez que ambos introduzem os termos não homogêneos em seus respectivos algoritmos, permitindo que os mesmos compensem incertezas linearmente dependentes de σ e convirjam mais rapidamente para a origem.

Baseado em (2.70) e (2.71), o termo $d(x_1, Kx_1 + \sigma, t)$ é reescrito como

$$d(x_1, Kx_1 + \sigma, t) = \underbrace{d(x_1, Kx_1 + \sigma, t) - d(x_1, Kx_1, t)}_{g_1(x_1, \sigma, t)} + \underbrace{d(x_1, Kx_1, t)}_{g_2(x_1, t)} \quad (2.72)$$

onde $g_1(x_1, 0, t) = 0$. Considere ainda que as seguintes desigualdades são satisfeitas $\forall \sigma \in \mathbb{R}$

$$|g_1(x_1, \sigma, t)| \leq \varrho_1(x, t)|\phi_1(\sigma)|, \quad \left| \frac{d}{dt} [g_2(x_1, t)] \right| \leq \varrho_2(x, t)|\phi_2(\sigma)|, \quad (2.73)$$

onde $\varrho_1(x, t) \geq 0$ e $\varrho_2(x, t) \geq 0$ são funções contínuas conhecidas. Portanto, substi-

tuindo (2.70) em (2.69), pode-se reescrever o sistema em malha fechada como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (A_{11} + A_{12}K)x_1 + A_{12}\sigma \\ \dot{\sigma} &= -k_1(x, t)\phi_1(\sigma) + z + g_1(x_1, \sigma, t) \\ \dot{z} &= -k_2(x, t)\phi_2(\sigma) + \frac{d}{dt} [g_2(x_1, t)]\end{aligned}\tag{2.74}$$

onde

$$z = - \int_{t_0}^t k_2(x, \tau)\phi_2(\sigma)d\tau + g_2(x_1, t)\tag{2.75}$$

Baseado nas condições apresentadas, o comportamento do sistema (2.74) é descrito pelo seguinte teorema

Teorema 2.2. [13, 14]. *Considere o sistema em malha fechada (2.74). Assuma que as desigualdades (2.73) sejam satisfeitas para determinadas funções contínuas conhecidas $\varrho_1 \geq 0$ e $\varrho_2 \geq 0$. Então, as trajetórias do sistema serão globalmente atraídas em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$, se os ganhos variáveis forem definidos como*

$$\begin{aligned}k_1(x, t) &= \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon\varrho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \varrho_1] (\beta + 4\epsilon^2) \right\} \\ k_2(x, t) &= \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(x, t)\end{aligned}\tag{2.76}$$

onde δ, β, ϵ são constantes positivas arbitrárias.

Demonstração. O apêndice B.2 apresenta a análise de estabilidade do sistema (2.74) e a convergência em tempo finito para o conjunto $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = \dot{\sigma} = 0\}$ proposta em [13, 14], baseada em funções de Lyapunov. \square

O exemplo a seguir ilustrará a aplicação do algoritmo apresentado

Exemplo 2.5. Considere o sistema na forma normal apresentado em (2.64), onde

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

e $d(x_1, x_2, t)$ pode ser reescrito como (2.72), onde as desigualdades impostas em (2.73) são satisfeitas com

$$\varrho_1(x, t) = \frac{1}{k_3}, \quad \varrho_2(x, t) = 10|x_1| + 4 + \frac{5}{k_3^2}$$

Definindo $K = 3$ em (2.65), nota-se por (2.66) que a dinâmica em malha fechada durante o deslizamento é exponencialmente estável. A lei de controle utilizada é baseada no *Variable Gain Super-Twisting*, apresentado em (2.68) e (2.70). Definindo os ganhos variáveis do algoritmo de acordo com (2.76), onde $\beta = 50$, $\delta = 0.5$,

$\epsilon = 1$, e $k_3 = 1$, um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ é alcançado, conforme apresentado na Figura 2.13. Os resultados desta simulação foram obtidos considerando a seguinte perturbação externa/incerteza no modelo

$$d(x_1, x_2, t) = 2x_1 + x_2 + \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.77)$$

que pode ser reescrita conforme (2.72), com

$$g_1(x_1, \sigma, t) = \sigma, \quad g_2(x_1, t) = 5x_1 + \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Como esperado, a presença dos termos lineares em (2.70) permitem que perturbações linearmente dependentes de σ possam ser compensadas, permitindo que um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ seja alcançado em um tempo inferior ou igual à $T = 1s$. Após este tempo, nota-se que os estados do sistema convergem exponencialmente para zero, com dinâmica dada por (2.66).

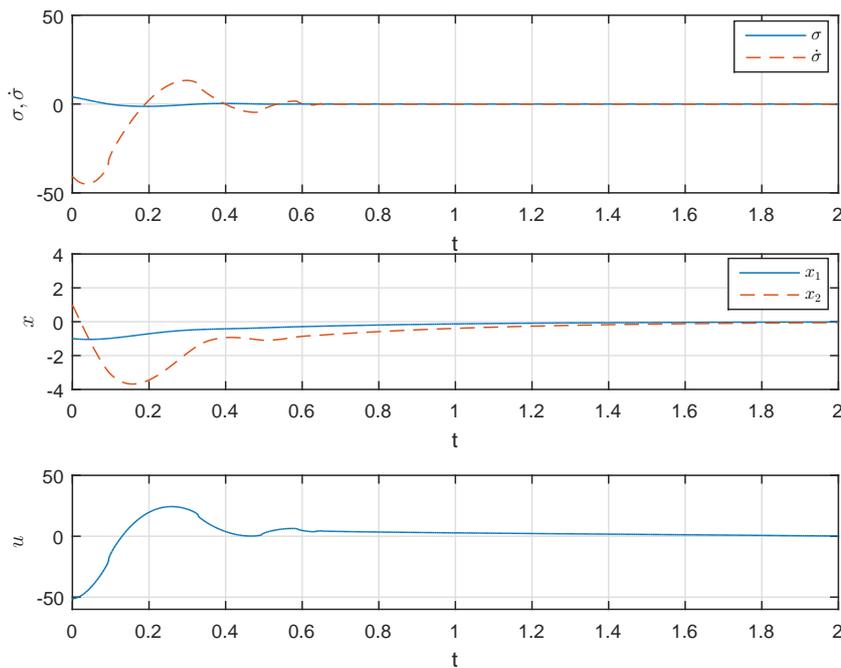


Figura 2.13: Desempenho da lei de controle por realimentação de estados associada ao VGSTA aplicada ao sistema linear na forma normal apresentado no Exemplo 2.5.

2.5.4 Super-Twisting Multivariável

Em determinadas aplicações, o controle de sistemas multivariáveis com m entradas pode ser decomposto no controle de m sistemas escalares. Em tais casos, técnicas escalares baseadas em modos deslizantes podem ser aplicadas para esses problemas,

como as técnicas apresentadas nas Subseções [2.5.2](#) e [2.5.3](#). No entanto, se o acoplamento entre os estados do sistema for muito forte, a estratégia sugerida pode apresentar desempenho inferior ou até mesmo falhar. Neste sentido, outra contribuição de destaque baseada no algoritmo Super-Twisting foi o desenvolvimento de uma estratégia multivariável [\[15\]](#), na qual a análise de estabilidade e convergência é feita através da generalização da função de Lyapunov usada em [\[11, 12\]](#) para o caso multivariável. Esta contribuição permitiu que perturbações/incertezas acopladas em relação aos estados do sistema pudessem ser compensadas, estendendo a classe de distúrbios rejeitadas pelo Super-Twisting.

Considere o seguinte sistema multivariável de grau relativo uniforme e unitário

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x, t) + b(x, t)u \\ \sigma &= \sigma(x, t)\end{aligned}\tag{2.78}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ são os estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, e $\sigma \in \mathbb{R}^m$ é variável de deslizamento. Suponha que $a(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, e $\sigma(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ sejam funções suaves. Assuma ainda que a dinâmica da variável de deslizamento possa ser escrita como

$$\dot{\sigma} = f(x, t) + g(x, t)u\tag{2.79}$$

onde $g(x, t) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} b(x, t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz de posto completo e $f(x, t) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} a(x, t) \in \mathbb{R}^m$ pode ser reescrito como

$$f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)\tag{2.80}$$

onde $f_1(x, t), f_2(x, t) \in \mathbb{R}^m$ são funções suaves que satisfazem as desigualdades a seguir

$$\|f_1(x, t)\| \leq \delta_1 \|\sigma\|, \quad \left\| \frac{d}{dt} [f_2(x, t)] \right\| \leq \delta_2,\tag{2.81}$$

onde δ_1 e δ_2 são constantes positivas conhecidas. Definindo uma lei de controle u como

$$u = g^{-1}(x, t)\bar{u}\tag{2.82}$$

onde \bar{u} é uma variável de controle a ser definida, pode-se reescrever [\(2.79\)](#) como

$$\dot{\sigma} = f_1(x, t) + f_2(x, t) + \bar{u}\tag{2.83}$$

O objetivo é definir o sinal auxiliar de controle \bar{u} de modo que um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ seja alcançado em tempo finito. Para isto, considere a seguinte estrutura multivariável acoplada baseada no algoritmo Super-Twisting

[15], chamada de MIMO STA

$$\dot{\bar{u}} = -k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma - \int_{t_0}^t \left(k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + k_4 \sigma \right) d\tau \quad (2.84)$$

Note que, definindo $m = 1$, este algoritmo se reduz à estratégia apresentada na Subseção 2.5.2. Sua extensão ao caso multivariável foi possível devido à generalização da função $sign(\cdot)$ para a função vetorial unitária, apresentada na Subseção 2.4.2. Substituindo (2.84) em (2.83), pode-se reescrever a dinâmica do sistema em malha fechada como

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= -k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + z + f_1(x, t) \\ \dot{z} &= -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma + \frac{d}{dt} [f_2(x, t)] \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde

$$z = - \int_{t_0}^t \left(k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + k_4 \sigma \right) d\tau + f_2(x, t)$$

As propriedades de estabilidade e convergência de (2.85) são apresentadas no teorema a seguir

Teorema 2.3. [15] *Considere o sistema em malha fechada (2.85). Suponha que as desigualdades (2.81) são satisfeitas para determinadas constantes positivas conhecidas δ_1 e δ_2 . Então, existem intervalos de valores para os ganhos k_1 , k_2 , k_3 , e k_4 tais que as trajetórias do sistema sejam globalmente atraídas em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$.*

Demonstração. Ver [15]. □

Sobre as condições impostas no Teorema 2.3, um intervalo de valores para os ganhos do algoritmo Super-Twisting multivariável (2.84) que garantem as propriedades listadas é definido por [15]

$$k_1 > \sqrt{2\delta_2}, \quad k_2 > 2\delta_1, \quad k_3 > \max\{k_3^\Omega, k_3^\Psi\}, \quad k_4 > \max\{k_4^\Omega, k_4^\Psi\} \quad (2.86)$$

com

$$\begin{aligned} k_3^\Omega &= 3\delta_2 + \frac{2\delta_2^2}{k_1^2}, \quad k_3^\Psi = \frac{\frac{9}{16}(k_1\delta_1)^2}{k_2(k_2 - 2\delta_1)} + \frac{\frac{1}{2}k_1^2\delta_1 - 2k_1^2k_2 + k_2\delta_2}{k_2 - 2\delta_1}, \\ k_4^\Omega &= \frac{\beta_1}{\beta_2} + 2k_2^2 + \frac{3}{2}k_2\delta_1, \quad k_4^\Psi = \frac{\alpha_1}{\alpha_2(k_2 - 2\delta_1)} + \frac{2k_2^2\delta_1 + \frac{1}{4}k_2\delta_1^2}{k_2 - 2\delta_1} \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_1 = \frac{9(k_1\delta_1)^2}{16k_2^2} \left(k_2 + \frac{1}{2}\delta_1\right)^2, \quad \alpha_2 = k_2(k_3 + 2k_1^2 - \delta_2) - \left(2k_3 + \frac{1}{2}k_1^2\right)\delta_1 - \frac{9(k_1\delta_1)^2}{16k_2},$$

$$\beta_1 = \left(\frac{3}{2}k_1^2k_2 + 3\delta_2k_2\right)^2, \quad \beta_2 = k_3k_1^2 - 2\delta_2^2 - 3\delta_2k_1^2$$

Logo ajustando os ganhos de (2.84) de acordo com (2.86), garante-se a ocorrência de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ em tempo finito.

Visando a ilustrar o algoritmo apresentado, considere o seguinte exemplo

Exemplo 2.6. Considere o sistema multivariável apresentado em (2.78) com

$$a(x, t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3\sin(t) \\ -\cos(2t) \end{bmatrix}, \quad b(x, t) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \sigma(x, t) = x$$

onde $a(x, t)$ engloba incertezas/perturbações associadas ao sistema. Note que, neste caso, a dinâmica da variável de deslizamento coincide com a dinâmica do sistema. Portanto, segue que $a(x, t) = f(x, t)$ e $b(x, t) = g(x, t)$. Como $g(x, t)$ apresenta posto completo $\forall x \in \mathbb{R}^2$, pode-se verificar que σ possui grau relativo uniforme e unitário. Note que os termos na diagonal secundária de $a(x, t)$ impedem que uma abordagem desacoplada seja utilizada, portanto o controlador MIMO STA será empregado.

Definindo, baseado em (2.80), as perturbações

$$f_1(x, t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x, \quad f_2(x, t) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3\sin(t) \\ -\cos(2t) \end{bmatrix}$$

verifica-se que as desigualdades (2.81) são satisfeitas para δ_1 e δ_2 definidos como

$$\delta_1 = \left\| \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|, \quad \delta_2 = 1$$

Por sua vez, definindo-se os ganhos k_i , $i = 1, \dots, 4$ de acordo com (2.86), obtêm-se as propriedades enunciadas no Teorema 2.3. Os ganhos foram definidos como $k_1 = 1.5$, $k_2 = 3$, $k_3 = 18.9$, $k_4 = 38.5$. A Figura 2.14 apresenta os resultados de simulação deste exemplo com o controlador MIMO STA. Pode-se observar que um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ ocorre a partir de $T = 0.5$ segundos, apesar da presença de perturbações acopladas e linearmente dependente dos estados, comprovando a eficácia da estrutura multivariável apresentada. Nota-se também que o sinal de controle utilizado é contínuo durante toda a simulação, sendo, portanto, menos propenso ao *chattering*.

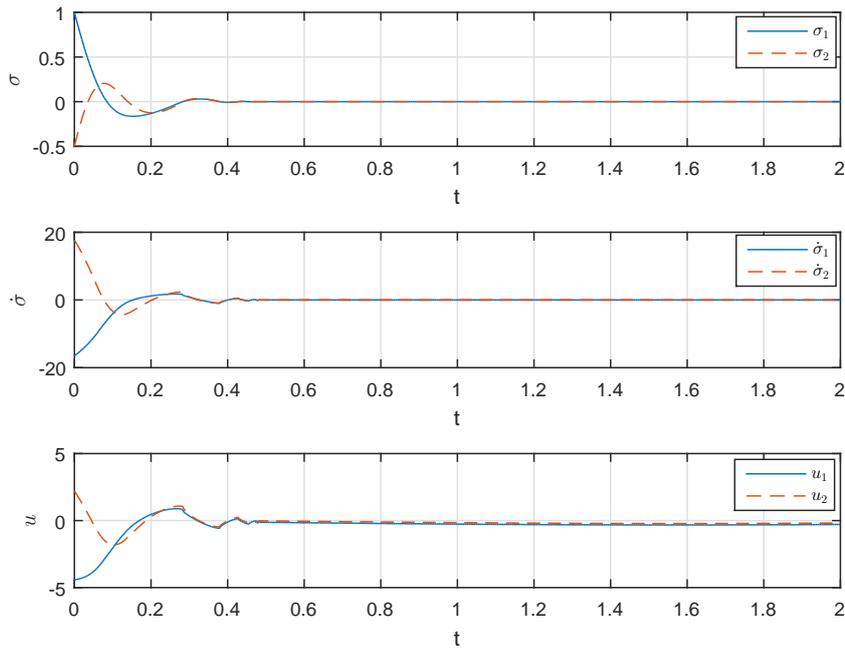


Figura 2.14: Controlador MIMO STA aplicado ao sistema não-linear multivariável apresentado no Exemplo 2.6.

2.5.5 Super-Twisting Multivariável Generalizado

O desenvolvimento de algoritmos inspirados no Super-Twisting cuja a análise foi baseada em funções de Lyapunov permitiu que novos problemas associados à sistemas de controle pudessem ser abordados, uma vez que classes mais amplas de perturbações/incertezas foram consideradas [11, 14, 15]. No entanto, como cada algoritmo introduzia novas propriedades à estratégia e considerava novas classes de distúrbios, novas funções de Lyapunov precisavam ser desenvolvidas para cada caso. Como consequência direta, quando desejava-se implementar algum desses algoritmos, além de se verificar se o sistema em questão correspondia à classe de sistemas estudada, devia-se garantir que as perturbações/incertezas se adequavam ao problema em questão.

Visando contornar este problema, uma abordagem generalizada multivariável para o algoritmo Super-Twisting foi desenvolvida, de modo que os principais algoritmos baseados no STA pudessem ser obtidos por uma escolha particular de seus parâmetros [48]. Com análise de estabilidade e convergência desenvolvida por uma função de Lyapunov generalizada, a ideia principal desta estrutura é garantir que a escolha do algoritmo pudesse ser feita de forma direta, definindo seu parâmetros de modo que a classe de perturbações/incertezas do problema em questão pudesse ser compensada e garantisse as propriedades associadas ao Super-Twisting.

Considere o seguinte algoritmo

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= -K_1\phi_1(\sigma) + K_3z(t) + \rho_1(\sigma, z, t) \\ \dot{z}(t) &= -K_2\phi_2(\sigma) + \rho_2(\sigma, t)\end{aligned}\tag{2.87}$$

onde $\sigma(t), z(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ são as variáveis de deslizamento, $K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes de projeto, os termos $\rho_1(\sigma, z, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\rho_2(\sigma, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ correspondem à todas as perturbações/incertezas associadas ao sistema de controle, e as funções $\phi_1, \phi_2(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazem as seguintes hipóteses

(A1) A função ϕ_1 é diferenciável em quase todo ponto, exceto, possivelmente, em um conjunto de medida nula $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ de seu domínio. De forma similar, a função ϕ_2 é contínua em quase todo ponto, exceto possivelmente em \mathbb{S} . Assume-se ainda que as soluções de (2.87) atravessam o conjunto $\mathbb{S} \setminus \{0\}$.

(A2) A função $\phi_1(\sigma) = 0$ se e somente se $\sigma = 0$, e $\|\phi_1(\sigma)\| \rightarrow \infty$ quando $\|\sigma\| \rightarrow \infty$.

(A3) A função ϕ_2 é dada por

$$\phi_2(\sigma) = J(\sigma)\phi_1(\sigma)$$

com $J(\sigma) > 0$, $\forall \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}$, onde

$$J(\sigma) := \nabla_{\sigma}\phi_1(\sigma)\tag{2.88}$$

(A4) Os termos $\rho_1(\sigma, z, t)$ e $\rho_2(\sigma, t)$ podem ser escritos em função de matrizes possivelmente desconhecidas porém com elementos limitados

$$\begin{aligned}\rho_1(\sigma, z, t) &= G_1(t)\phi_1(\sigma) + G_3(t)z \\ \rho_2(\sigma, t) &= G_2(t)\phi_2(\sigma)\end{aligned}\tag{2.89}$$

(A5) A seguinte propriedade é satisfeita

$$L_2(t)J(\sigma) = J(\sigma)L_2(t), \quad \forall t, \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}\tag{2.90}$$

com

$$L(t) := \begin{bmatrix} -L_1(t) & L_3(t) \\ -L_2(t) & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -K_1 & K_3 \\ -K_2 & 0 \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} G_1(t) & G_3(t) \\ G_2(t) & 0 \end{bmatrix}}_{G(t)} = A + G(t)\tag{2.91}$$

onde $L(t), A, G(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$.

A Hipótese (A1) permite que, embora (2.87) possa apresentar lado direito descontínuo, suas soluções não permaneçam no conjunto $\mathbb{S} \setminus \{0\}$, permitindo que o Teo-

rema de Lyapunov generalizado para inclusões diferenciais [49] seja usado na análise de estabilidade e convergência do algoritmo.

Por sua vez, a Hipótese (A4) descreve o formato das perturbações consideradas, que são dependentes de ϕ_1 , ϕ_2 , e z . Além disso, note que as matrizes $G_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ podem ser variantes no tempo, embora seus elementos sejam funções limitadas. Substituindo (2.89) em (2.87), o algoritmo pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= -L_1(t)\phi_1(\sigma) + L_3(t)z \\ \dot{z} &= -L_2(t)\phi_2(\sigma)\end{aligned}\tag{2.92}$$

uma vez que, por (2.91), $L = A + G(t)$. Além disso, note que, definindo

$$\zeta = \begin{bmatrix} \phi_1(\sigma)^T & z^T \end{bmatrix}^T\tag{2.93}$$

e levando em conta a Hipótese (A3), a seguinte dedução pode ser obtida

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1(t) & L_3(t) \\ -L_2(t)J(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(\sigma) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & J(\sigma) \end{bmatrix} L(t)\zeta(\sigma, z)\tag{2.94}$$

onde I_n representa uma matriz identidade de ordem n . O Teorema a seguir apresenta as propriedades de estabilidade e convergência do algoritmo apresentado.

Teorema 2.4. [48] *Considere as Hipóteses (A1)-(A5). Além disso, suponha que exista uma matriz $P = P^T > 0$ tal que*

$$W := - (P [I_2 \otimes J(\sigma)] L(t) + L^T(t) [I_2 \otimes J^T(\sigma)] P) > 0,\tag{2.95}$$

$\forall t \geq 0, \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}$, e para todas as matrizes $G(t)$, onde $L(t)$ e $G(t)$ são definidas em (2.91). Então, a origem de (2.87) é globalmente assintoticamente estável com a função quadrática de Lyapunov

$$V(\sigma, z) = \zeta^T P \zeta$$

Demonstração. Ver [48], Teorema 1. □

Note que a generalização do algoritmo Super-Twisting apresentada acima inclui alguns dos algoritmos apresentados nas subseções anteriores, como a estratégia com ganhos variáveis proposta em [13, 14]. Pode-se mostrar que com determinados ajustes sobre os ganhos, a generalização apresentada também pode ser aplicada aos algoritmos descritos nas Subseções 2.5.2 e 2.5.4, desde que os termos lineares não sejam incluídos na escolha das funções ϕ_1 e ϕ_2 .

Embora a estrutura apresentada permita a generalização da análise de estabili-

dade e convergência para algoritmos baseados no Super-Twisting, percebe-se ainda a necessidade de se verificar quais desses algoritmos satisfazem as Hipóteses (A1)-(A5). Visando tornar esta verificação mais simples e permitir o desenvolvimento de novos algoritmos, é proposto em [48] a construção de funções ϕ_1 e ϕ_2 generalizadas, para o caso multivariável desacoplado e acoplado, que serão mostradas a seguir.

Estados desacoplados

Este cenário permite que o problema de controle multivariável possa ser interpretado como n problemas escalares. Portanto, o desenvolvimento de algoritmos escalares baseados no Super-Twisting podem ser projetados de modo que cada um dos estados possua desempenho distinto.

Considere o algoritmo (2.87) com as funções $\phi_1(\sigma)$ e $\phi_2(\sigma)$ definidas como

$$\begin{aligned}\phi_{1_i}(\sigma_i) &= (\alpha_i|\sigma_i|^{1-p_i} + \beta_i|\sigma_i| + \gamma_i|\sigma_i|^{1+q_i}) \text{sign}(\sigma_i) \\ j_i(\sigma_i) &= \alpha_i(1-p_i)|\sigma_i|^{-p_i} + \beta_i + \gamma_i(1+q_i)|\sigma_i|^{q_i} \\ \phi_{2_i}(\sigma_i) &= j_i(\sigma_i)\phi_{1_i}(\sigma_i)\end{aligned}\tag{2.96}$$

com $i = 1, \dots, n$, $\alpha_i > 0$, $\beta_i, \gamma_i \geq 0$ e

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{1_1} \\ \phi_{1_2} \\ \vdots \\ \phi_{1_n} \end{bmatrix}, \quad J(\sigma) = \begin{bmatrix} j_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & j_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j_n \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_{2_1} \\ \phi_{2_2} \\ \vdots \\ \phi_{2_n} \end{bmatrix}\tag{2.97}$$

Note que definindo $n = 1$, $p_i = \frac{1}{2}$, $\beta_i = k_3$ e $\gamma_i = 0$, as funções ϕ_1 e ϕ_2 descritas em (2.71) são obtidas. Por sua vez, mantendo os valores de n , p_i e γ e tornando $\beta_i = 0$, pode-se reescrever (2.58) com uma escolha apropriada de α_i . O corolário a seguir apresenta as propriedades associadas para a estrutura apresentada

Corolário 2.1. [48] *Considere o cenário descrito no Teorema 2.4. Além disso, assuma que os ganhos K_i e $G_i(t)$, $\forall i \in [1, 3]$ sejam diagonais. Finalmente, considere que as funções ϕ_1 e ϕ_2 são definidas por (2.96) e (2.97), com*

$$0 < p_i \leq \frac{1}{2}, \quad q_i > 0, \quad \forall i \in [1, n].$$

Então, a origem de (2.87) é um ponto de equilíbrio estável alcançável em tempo finito para qualquer condição inicial $(\sigma(0), z(0))$.

Demonstração. Ver [48], Corolário 1. □

Estados acoplados

Este caso apresenta uma estrutura acoplada que pode ser interpretada como uma generalização direta do algoritmo Super-Twisting multivariável [15], apresentado em (2.84). Nesta generalização, além da inclusão de termos novos, os ganhos desta estratégia podem ser variáveis.

Considere o algoritmo (2.87) com as funções $\phi_1(\sigma)$ e $\phi_2(\sigma)$ definidas como

$$\begin{aligned}\phi_1(\sigma) &= (\alpha\|\sigma\|^{-p} + \beta + \gamma\|\sigma\|^q)\sigma \\ J(\sigma) &= (\alpha\|\sigma\|^{-p} + \beta + \gamma\|\sigma\|^q)I_n + (\gamma q\|\sigma\|^q - \alpha p\|\sigma\|^{-p})\frac{\sigma\sigma^T}{\sigma^T\sigma}, \\ \phi_2(\sigma) &= J(\sigma)\phi_1(\sigma) = (\alpha(1-p)\|\sigma\|^{-p} + \beta + \gamma(1+q)\|\sigma\|^q)\phi_1\end{aligned}\quad (2.98)$$

com $\alpha > 0$, $\beta, \gamma \geq 0$. Quando uma estratégia escalar é estendida ao caso multivariável, certas propriedades não podem ser mantidas, como, por exemplo, realizar comutação entre variáveis indiscriminadamente, que é uma prática comum no caso escalar. Entre uma das extensões multivariáveis que se adequa à escolha das funções ϕ_1 e ϕ_2 proposta em (2.98), está o Algoritmo Super-Twisting Multivariável com Ganhos Variáveis (*Variable Gain Super-Twisting Algorithm - VGSTA*) [16], que representa uma extensão do algoritmo apresentado na Subseção 2.5.3. A estratégia em questão pode ser reconstruída definindo-se $\alpha = 1$, $\beta = k_3$, $\gamma = 0$, e $p = \frac{1}{2}$.

O corolário a seguir descreve as propriedades do sistema (2.87) para a escolha das funções ϕ_1 e ϕ_2 proposta em (2.98)

Corolário 2.2. [48] *Considere o cenário apresentado no Teorema 2.4, onde as matrizes A e $G(t)$ definidas em (2.91) são compostas por blocos de matrizes, cujo os blocos são matrizes diagonais, isto é,*

$$K_j = k_j I_n, \quad G_j = g_j(t) I_n, \quad \forall j \in [1, 3] \quad (2.99)$$

Assuma ainda que as funções ϕ_1 e ϕ_2 são definidas como em (2.98), com $0 < p \leq \frac{1}{2}$ e $q > 0$. Então, a origem de (2.87) é um ponto de equilíbrio estável alcançável em tempo finito para qualquer condição inicial $(\sigma(0), z(0))$.

Demonstração. Ver [48], Corolário 2. □

Visando a ilustrar a técnica apresentada, considere o seguinte exemplo

Exemplo 2.7. Considere o algoritmo apresentado em (2.87) sujeito às seguintes perturbações

$$\rho_1(\sigma, t) = \cos(2t)\phi_1(\sigma), \quad \rho_2(t) = |\text{sen}(t)|\phi_2(\sigma) \quad (2.100)$$

com

$$\phi_1(\sigma) \left(\|\sigma\|^{-\frac{1}{2}} + \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \right) \sigma, \quad \phi_2(\sigma) = J(\sigma)\phi_1(\sigma)$$

onde $\sigma \in \mathbb{R}^2$ e $J(\sigma)$ é definido em (2.88). Uma vez que o distúrbio em questão apresenta acoplamento, infere-se que a estratégia desacoplada não é recomendada. Portanto as funções ϕ_1 e ϕ_2 serão escolhidas de acordo com (2.98). Definindo $\alpha = \gamma = 1$ e $\beta = 0$, note que as igualdades apresentadas em (2.89) são satisfeitas, com

$$G_1 = \begin{bmatrix} \cos(2t) & 0 \\ 0 & \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} |\text{sen}(t)| & 0 \\ 0 & |\text{sen}(t)| \end{bmatrix}, \quad G_3 = 0 \cdot I_2$$

onde, por (2.99), sabe-se que $-1 \leq g_1(t) \leq 1$ e $0 \leq g_2(t) \leq 1$. Escolhendo os ganhos de (2.87) de acordo com [48], Apêndice A1]

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

garante-se que um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ é alcançado em um tempo finito inferior a $T = 1s$, como mostrado na Figura 2.15. Note ainda que a estratégia utilizada apresenta robustez a perturbações dependentes das funções ϕ_1 e ϕ_2 , permitindo que uma classe mais ampla de perturbações possa ser considerada.

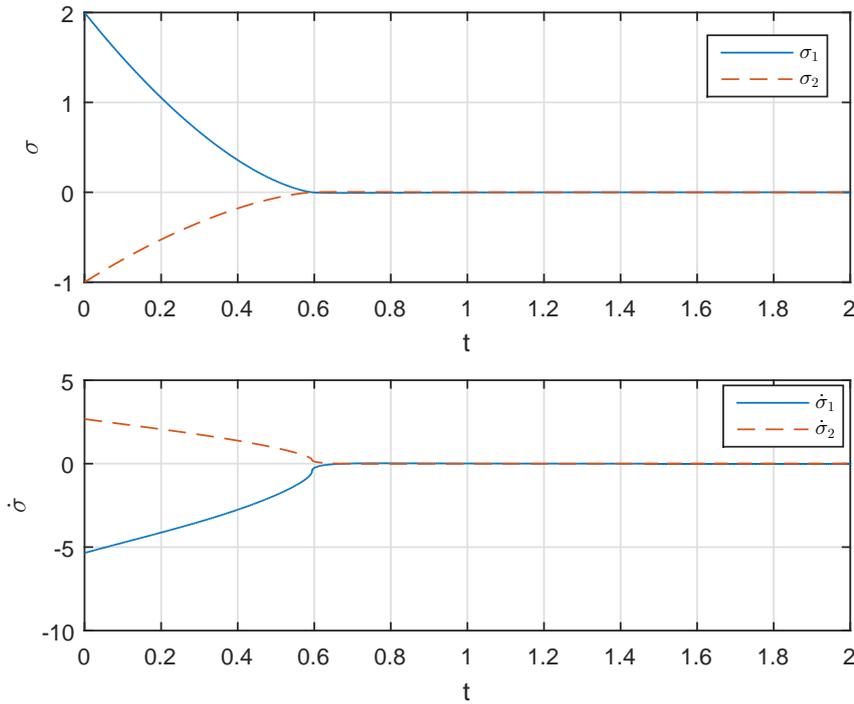


Figura 2.15: Desempenho do algoritmo generalizado baseado no super-twisting multivariável sujeito a perturbações $\rho_1(\sigma, t) = \cos(2t)\phi_1(\sigma)$ e $\rho_2(t) = |\text{sen}(t)|\phi_2(\sigma)$.

Capítulo 3

Super-Twisting Multivariável Generalizado com Ganhos Adaptativos

Como apresentado no Capítulo 2, o desenvolvimento da extensão multivariável para o algoritmo Super-Twisting teve grande influência na literatura de controle por modos deslizantes. Entre as consequências desta contribuição estão o desenvolvimento da versão multivariável com ganhos variáveis [16] e a generalização do algoritmo Super-Twisting [48], apresentada na Subseção 2.5.5. Com o desenvolvimento de novas técnicas de controle baseadas em modos deslizantes, novas classes de perturbações/incertezas passam a ser consideradas, ampliando a aplicabilidade de tais algoritmos em aplicações práticas.

Embora cada contribuição introduza novas propriedades e novas aplicações aos algoritmos baseados no Super-Twisting, o conhecimento a priori de limitantes superiores para os distúrbios é uma hipótese comum aos algoritmos até então apresentados. Note, no entanto, que em determinadas aplicações o conhecimento destes limitantes pode não ser disponível antes da implementação. Um exemplo natural de tais casos ocorre em sistemas ciber-físicos sob ataque [29, 33]. Como o sinal em questão tem natureza danosa, não se pode prever seu perfil a priori.

Para contornar tal limitação, estratégias adaptativas para os ganhos de controladores por modos deslizantes foram desenvolvidas, onde leis de adaptação baseadas na variável de deslizamento ajustavam os ganhos on-line, de modo a garantir que o modo deslizante fosse alcançado apesar das perturbações/incertezas presentes no sistema [21, 25].

O uso de leis de adaptação para os ganhos de algoritmos baseados em modos deslizantes pode ser dividido em duas categorias. Na primeira, os ganhos são adaptados de modo que cresçam o suficiente até que garantam o modo deslizante. Deste

ponto em diante, a adaptação para e os ganhos permanecem constantes. Caso um novo distúrbio faça com que o deslizamento seja perdido, os ganhos voltam a crescer até que a superfície de deslizamento seja alcançada novamente. Estratégias pertencentes a essa categoria conservadora são usadas em algoritmos baseados em modos deslizantes convencional [38] e de ordem superior [20, 21].

A segunda categoria de estratégias adaptativas tem como objetivo o uso de ganhos não conservadores, de forma que sejam os menores possíveis enquanto garantam o deslizamento. Essa classe de técnica foca na utilização de informações sobre os distúrbios do sistema, obtidas de forma on-line. Uma das principais técnicas incluídas nessa categoria é a estratégia adaptativa de camada dupla [23-26]. Baseado no conceito de controle equivalente, a ideia dessa estratégia é garantir que os ganhos do algoritmo cresçam até que o deslizamento seja alcançado. A partir deste momento, o conceito de controle equivalente é utilizado para se obter uma aproximação do distúrbio, garantindo que durante o modo deslizante os ganhos se comportem como limitantes superiores não conservadores da perturbação. Os primeiros trabalhos baseados nesse método aplicam a estratégia adaptativa em somente um dos ganhos do algoritmo Super-Twisting [23, 24]. No entanto, como a escolha dos demais ganhos baseava-se em limitantes superiores, certo conservadorismo ainda é introduzido na ação de controle. Baseado nessa técnica, o uso da estratégia de camada dupla foi estendida à sistemas multivariáveis desacoplados [26], porém mantendo a adaptação de camada dupla limitada a um único ganho. Portanto, além de ainda exigir o conhecimento a priori de limitantes para os distúrbios, as principais características associadas à sistemas multivariáveis que os diferem de sistemas escalares não são consideradas, como o efeito do acoplamento entre os estados.

A adaptação de ambos os ganhos por meio desse método foi introduzida em [25], onde uma nova estrutura foi considerada e aplicada no problema de controle de sistemas escalares, servindo de referência para a contribuição apresentada neste capítulo.

Este capítulo tem como objetivo generalizar a estratégia adaptativa de camada dupla proposta em [25] para o caso multivariável, permitindo que os ganhos de uma família de algoritmos baseados no Super-Twisting multivariável possam ser adaptados de acordo com esta estratégia. Utilizando uma função de Lyapunov generalizada mostra-se teoricamente que é possível garantir um modo deslizante de segunda ordem em tempo finito apesar do desconhecimento de quaisquer limitantes a priori para os distúrbios do sistema. Note, portanto, que a contribuição proposta estende a classe de perturbações/incertezas rejeitadas pela família de algoritmos Super-Twisting estudados. Além disso, a partir de uma análise formal, demonstra-se que a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada proposta garante uma escolha não-conservadora dos ganhos.

Visando a tornar a apresentação do conteúdo didática, o algoritmo proposto em [25] será inicialmente apresentado na Seção 3.1, para então apresentar a generalização proposta nesse trabalho na Seção 3.2.

3.1 Algoritmo Super-Twisting com Ganhos Adaptativos Monovariável

Considere o seguinte sistema SISO, proposto em [25]

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= -\alpha(t)|\sigma(t)|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma(t)) + z(t) + \Phi(\sigma, t) \\ \dot{z}(t) &= -\beta(t)\text{sign}(\sigma(t)) + d(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $\sigma(t)$ e $z(t) \in \mathbb{R}$ são as variáveis de deslizamento e $d(t) \in \mathbb{R}$ é uma perturbação de entrada desconhecida porém limitada tal que $|d(t)| < a_0$, onde a_0 é uma constante positiva desconhecida. Os ganhos variáveis $\alpha(t)$ e $\beta(t) \in \mathbb{R}$ são funções dadas por

$$\alpha(t) = \alpha_0\sqrt{L(t)} \text{ e } \beta(t) = \beta_0L(t)\tag{3.2}$$

onde $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ são constantes positivas e $L(t)$ é um parâmetro adaptativo que será apresentado posteriormente. Por sua vez, o termo adicional $\Phi(\sigma, t)$ é dado por

$$\Phi(\sigma, t) = -\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\sigma(t)\tag{3.3}$$

Note que, definindo $L(t)$ como uma constante positiva, $\Phi(\sigma, t) = 0$ e (3.1) se reduz ao Algoritmo de Super-Twisting convencional proposto em [50]. Além disso, definindo $L(t)$ grande o suficiente tal que $L(t) > |f(t)|$, os ganhos definidos em (3.2) podem ser projetados tal que o modo deslizante de segunda ordem $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$ seja alcançado.

Portanto, o objetivo da lei de adaptação proposta para $L(t)$ é garantir que, embora o limitante a_0 seja desconhecido, o modo deslizante de segunda ordem seja alcançado com uma escolha não conservadora dos ganhos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, apesar da presença do termo $d(t)$.

Visando a análise de estabilidade e convergência das variáveis de deslizamento de (3.1), assume-se a seguinte Hipótese

- (A1)** O ganho $L(t)$ é diferenciável, limitado e satisfaz a seguinte desigualdade para todo $t \geq 0$

$$L(t) > \max(|d(t)|, l_0)$$

onde $l_0 \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de projeto positivo que será definido posterior-

mente.

Considere agora as três matrizes a seguir

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_0}{2} & \frac{1}{2} \\ -\beta_0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e a seguinte matriz simétrica positiva definida

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, $p_1, p_3 > 0$ e $p_1 p_3 > p_2^2$.

Teorema 3.1. *Assuma que a Hipótese (A1) seja satisfeita. Então, o modo deslizante de segunda ordem ocorre fazendo a superfície $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$ ser alcançada em tempo finito se os ganhos α_0 e β_0 forem escolhidos de modo que exista uma matriz $P = P^T > 0$ na forma de (3.5) tal que*

$$PA_0 + A_0^T P + \epsilon_0 P + PB_0 B_0^T P + C_0^T C_0 < 0 \quad (3.6)$$

onde $\epsilon_0 > 0$ é um parâmetro escalar.

Demonstração. ver Apêndice C.1. □

Como se trata do caso escalar, sabe-se por [51] que o uso do Bounded Real Lemma em (3.6) é equivalente à restrição no domínio da frequência $\|G_0(s)\|_\infty < 1$, onde

$$G_0(s) \triangleq C_0(sI - A_0)^{-1} B_0 = \frac{1}{2s^2 + \alpha_0 s + \beta_0} \quad (3.7)$$

Note que definindo $\beta_0 > 1$ esta restrição é satisfeita. O fato de β_0 ser maior que um será explorado posteriormente.

Uma vez que os resultados apresentados no Teorema 3.1 são baseados na Hipótese (A1), o problema se torna definir uma lei de adaptação para o ganho $L(t)$ de modo que esta hipótese seja satisfeita. Esta adaptação será baseada em uma variação do esquema de Camada Dupla apresentado em [24].

Este esquema baseia-se no conceito de controle equivalente [4], permitindo que o ganho $L(t)$ possa crescer e decrescer. Note que quando o modo deslizante é alcançado, $\sigma(t) = 0$ e $\dot{\sigma}(t) = z(t) = 0$. Logo, de (3.1), sabe-se que

$$\beta(t) \text{sign}(\sigma(t))|_{eq} = d(t) \quad (3.8)$$

onde $\beta(t) \text{sign}(\sigma(t))|_{eq}$ é um sinal contínuo capaz de substituir $\beta(t) \text{sign}(\sigma(t))$ e manter o modo deslizante.

Embora o conceito de controle equivalente seja exclusivamente teórico, ele pode ser aproximado aplicando um filtro passa-baixas ao sinal original

$$\dot{\bar{u}}_{eq}(t) = \frac{1}{\tau} (-\bar{u}_{eq}(t) + \beta(t) \text{sign}(\sigma(t))) \quad (3.9)$$

onde $\bar{u}_{eq}(t) \in \mathbb{R}$ e $\tau \in \mathbb{R}$ é uma constante positiva pequena. É importante frisar que apesar de $\bar{u}_{eq}(t)$ ser apenas uma aproximação do sinal equivalente, esta diferença pode ser reduzida através da diminuição do parâmetro τ , ao custo da passagem de frequências mais altas pelo filtro (3.9) [1]. Embora antes do deslizamento, isto é, durante a fase de alcance, não haja relação entre tais sinais, o sinal filtrado $\bar{u}_{eq}(t)$ também será considerado no esquema de adaptação durante esta etapa.

Considere a seguinte variável escalar

$$\delta(t) = L(t) - \frac{1}{a\beta_0} |\bar{u}_{eq}(t)| - \epsilon \quad (3.10)$$

onde as constantes a, ϵ são definidas tais que $0 < a < 1$ com $a\beta_0 < 1$ e $\epsilon > 0$. Assim como em [24], estes parâmetros são margens de segurança com a função de garantir que

$$\frac{1}{a\beta_0} |\bar{u}_{eq}(t)| + \frac{\epsilon}{2} > |u_{eq}(t)| \quad (3.11)$$

O esquema de adaptação para o ganho $L(t)$ é dado por

$$L(t) = l_0 + l(t) \quad (3.12)$$

onde l_0 é uma constante de projeto positiva apresentada na Hipótese (A1) e $l(t)$ é uma função escalar com dinâmica dada por

$$\dot{l}(t) = -\rho(t) \text{sign}(\delta(t)) \quad (3.13)$$

com $\rho(t) = r_0 + r(t)$, onde r_0 é uma constante positiva de projeto e $r(t)$ é uma função positiva que evolui de acordo com (3.14)

$$\dot{r}(t) = \gamma |\delta(t)| \quad (3.14)$$

com o parâmetro de projeto $\gamma > 0 \in \mathbb{R}$. O seguinte teorema apresenta as propriedades desta lei de adaptação.

Teorema 3.2. *Considere o sistema (3.1) sujeito à incertezas/perturbações $d(t)$ que satisfaçam as seguintes restrições $|d(t)| < a_0$ e $|\dot{d}(t)| < a_1$, onde a_0 e a_1 são constantes finitas mas desconhecidas. Então, o Esquema de Adaptação de Camada Dupla, apresentado em (3.9), (3.10), (3.12)-(3.14) garante $L(t) > |d(t)|$ em tempo finito.*

Demonstração. ver Apêndice [C.2](#). □

É válido citar que a estratégia de adaptação apresentada no Teorema [3.2](#) garante a convergência assintótica da variável $\delta(t)$. Portanto, por [\(3.10\)](#) e [\(3.11\)](#) sabe-se que quando $\delta(t)$ se aproxima de zero, o ganho adaptativo “rastrea” o termo $|d(t)|$, de tal forma que conforme $|d(t)|$ diminui, $L(t)$ diminui, evitando desta forma uma escolha conservadora para os ganhos.

Conforme apresentado em [\[25\]](#), note ainda que as margens de segurança a e ϵ definidas em [\(3.10\)](#) estabelecem, após um tempo finito, um cone de segurança ao redor de $|u_{eq}(t)|$ dado por

$$L(t) > |\bar{u}_{eq}(t)| + \frac{1 - a\beta_0}{a\beta_0} |\bar{u}_{eq}(t)| + \frac{\epsilon}{2} \quad (3.15)$$

onde $\frac{1-a\beta_0}{a\beta_0}$ e $\frac{\epsilon}{2}$ são termos que embora introduzam certo conservadorismo à estratégia adaptativa, também garantem robustez a mesma, tornando-se cruciais ao método visto que $|u_{eq}(t)|$ é estimado exclusivamente por $|\bar{u}_{eq}(t)|$.

Considere o intervalo $T_a = [t_1 \ t_3]$ durante o qual as variáveis de deslizamento ainda estão na fase de alcance, isto é, antes do modo deslizante ser alcançado. Neste intervalo, sabe-se que para quase todo $t \in T_a$, $|\text{sign}(\sigma(t))| = 1$. Portanto, de [\(3.9\)](#) segue que $|\bar{u}_{eq}(t)|$ é uma versão filtrada de $\beta(t)$. Além disso, existe um intervalo de tempo $T_b = [t_2 \ t_3] \subset T_a$ onde, para quase todo $t \in T_b$, sabe-se que

$$|\bar{u}_{eq}(t)| \geq a\beta(t) = a\beta_0 L(t), \quad 0 < a < 1 \quad (3.16)$$

Substituindo [\(3.16\)](#) em [\(3.10\)](#) tem-se que

$$\delta(t) \leq L(t) - \frac{a\beta_0}{a\beta_0} L(t) - \epsilon \leq -\epsilon \quad (3.17)$$

Portanto, de [\(3.13\)](#), conclui-se que para quase todo $t \in T_b$, $\dot{L}(t) = \dot{l}(t) = r(t) + r_0 > 0$, o que garante que em um intervalo de tempo inferior a $\frac{a\epsilon}{r_0}$, $L(t)$ crescerá o suficiente a ponto de induzir o modo deslizante. Note que após esta etapa, isto é, durante o deslizamento, este ganho passa a rastrear $|d(t)|$, conforme descrito acima.

Como $\delta(t)$ converge assintoticamente para zero, nota-se de [\(3.14\)](#) que em implementações físicas, $\dot{r}(t) > 0 \ \forall t$. Para contornar esta limitação, [\(3.14\)](#) pode ser substituído por

$$\dot{r}(t) = \begin{cases} \gamma|\delta(t)|, & \text{se } |\delta(t)| > \delta_0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.18)$$

onde $\delta_0 > 0 \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de projeto pequeno. Note que esta estrutura cria uma zona morta na qual $r(t)$ assume valor constante dentro da mesma, evitando

assim imperfeições na integração numérica e limitações envolvendo ruídos. Assim como em [25], infere-se que como (3.15) requer apenas que $|\delta(t)| < \frac{\epsilon}{2}$, a convergência para zero de (3.10) não é necessária, e portanto o esquema proposto em (3.18) não interfere na estratégia de adaptação proposta no Teorema 3.2.

Visando a evitar ambiguidade, a estratégia adaptativa proposta em [25], apresentada acima, será denominada como estratégia adaptativa de camada dupla escalar, enquanto a versão proposta nesta dissertação, que será apresentada posteriormente será denominada como estratégia adaptativa de camada dupla generalizada.

Exemplo 3.1. Considere o seguinte sistema predominantemente linear

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(t) \\ y &= 2x_1 + x_2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ são os estados, $u \in \mathbb{R}$ é a ação de controle, $y \in \mathbb{R}$ é a saída e $d(x_1, x_2, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ representa perturbações/incertezas associadas ao sistema de controle em questão. Além disso, sabe-se que as seguintes desigualdades são satisfeitas

$$|\dot{d}(t)| \leq a_0, \quad |\ddot{d}(t)| \leq a_1 \quad (3.20)$$

onde a_0 e a_1 são constantes positivas limitadas porém desconhecidas. Considerando que somente os sinais y e u são disponíveis, o objetivo é desenvolver um estimador de estados capaz de reconstruir exponencialmente ambos os estados do sistema, isto é, x_1 e x_2 . Para tal, considere o seguinte estimador não-linear

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (y - \hat{y}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \\ \hat{y} &= 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde v é uma variável de controle que será definida posteriormente. Definindo os erros de estimação como

$$e_1 = x_1 - \hat{x}_1, \quad e_2 = x_2 - \hat{x}_2, \quad e_y = y - \hat{y}$$

verifica-se por (3.19) e (3.21) que a dinâmica dos erros de estimação é dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-v + d(t)] \\ e_y &= 2e_1 + e_2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Definindo a variável de deslizamento como $\sigma = e_y$, note que o sistema (3.22) pode

ser reescrito em função da dinâmica de σ

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -3e_1 + \sigma \\ \dot{\sigma} = 3\sigma - v + d(t) \end{cases} \quad (3.23)$$

Note que garantindo um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ em tempo finito, garante-se por (3.23) a convergência exponencial de e_1 . Por sua vez, como durante o deslizamento, $\sigma = 0$, o erro de estimação e_2 também converge para zero exponencialmente.

Entretanto, note por (3.20) que como não há limitantes superiores conhecidos para as derivadas da perturbação, não é possível empregar nenhuma das técnicas baseadas no Super-Twisting apresentadas no Capítulo 2. Portanto, uma ação de controle baseada em (3.1) é proposta

$$v = 3\sigma + \alpha(t)|\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma) + \int_{t_0}^t \beta(\tau)\text{sign}(\sigma)d\tau - \Phi(\sigma, t) \quad (3.24)$$

onde $\alpha(t)$, $\beta(t)$, e $\Phi(\sigma, t)$ são definidas em (3.2) e (3.3). Substituindo (3.24) em (3.23), tem-se que a dinâmica em malha fechada do sistema em questão é dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -3e_1 + \sigma \\ \dot{\sigma} &= -\alpha(t)|\sigma|^{\frac{1}{2}}\text{sign}(\sigma) + z(t) + \Phi(\sigma, t) \\ \dot{z} &= -\beta(t)\text{sign}(\sigma) + \dot{d}(t) \end{aligned}$$

onde $z = -\int_{t_0}^t \beta(\tau)\text{sign}(\sigma)d\tau + d(t)$. Os resultados de simulação são apresentados na Figura 3.1. Note que após um tempo finito, um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ é alcançado através de um sinal de controle contínuo. Após este tempo, verifica-se a convergência exponencial de ambos os erros de estimação, apesar da perturbação adotada $d(t) = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Os termos constantes α_0 e β_0 foram definidos como $\alpha_0 = 3$ e $\beta_0 = 1.1$.

Por sua vez a Figura 3.2 apresenta o comportamento da estratégia adaptativa por camada dupla, com parâmetros definidos por $a = 0.8$, $\tau = 0.01$, $l_0 = r_0 = \epsilon = 0.1$, e $\gamma = 5$. Note que até que o modo deslizante seja alcançado, o ganho $L(t)$ continua crescendo, porém, ao alcançar o deslizamento, o mesmo passa a se comportar como um limitante superior não conservador para $|\dot{d}(t)|$.

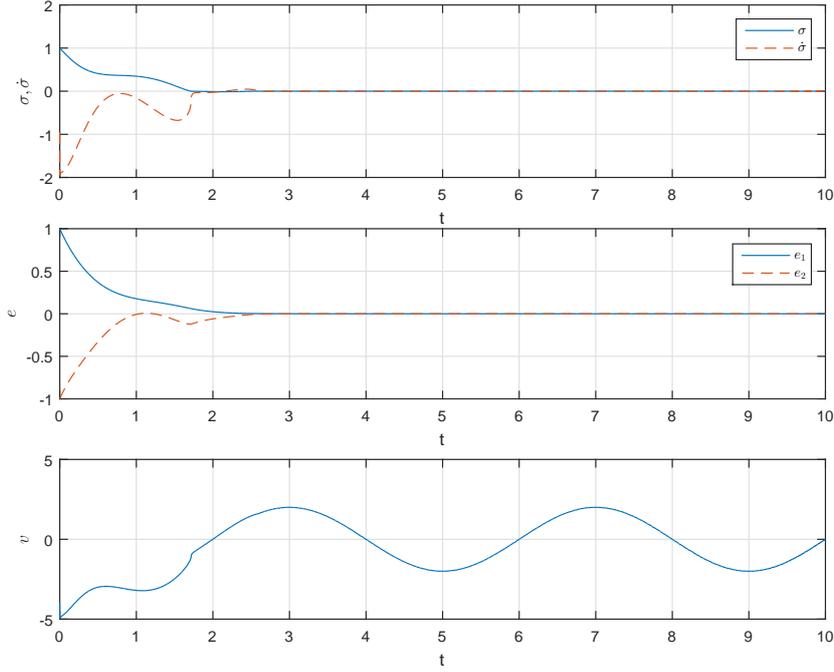


Figura 3.1: Desempenho da lei de controle baseada no algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos monovariável, aplicada ao problema de estimação de estados.

3.2 Generalização do Algoritmo Super-Twisting com Ganhos Adaptativos Multivariável

Baseado na seção anterior, é proposta a seguir uma generalização do algoritmo Super-Twisting multivariável cujos ganhos adaptativos são baseados em uma variação do esquema de camada dupla, que será proposta neste trabalho.

Considere o sistema não-linear MIMO incerto descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}(t) &= -\alpha(t)\phi_1(\sigma) + \Phi(t, \phi_1) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -\beta(t)\phi_2(\sigma) + d(\sigma, t),\end{aligned}\tag{3.25}$$

onde $\sigma(t)$ e $z(t) \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de deslizamento, $\alpha(t)$ e $\beta(t) \in \mathbb{R}$ são ganhos escalares variáveis dados por

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sqrt{L(t)}, \quad \beta(t) = \beta_0 L(t),\tag{3.26}$$

onde $L(t) > 0 \in \mathbb{R}$ é um ganho adaptativo que será definido posteriormente. O termo $d(\sigma, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função absolutamente contínua que engloba as perturbações/incertezas casadas presentes no sistema. Assume-se que a perturbação e sua derivada no tempo, $\dot{d}(\sigma, t)$, não possuem limitantes conhecidos a priori, podendo $d(\sigma, t)$ ser ilimitada para certas classes de perturbação descritas posteriormente.

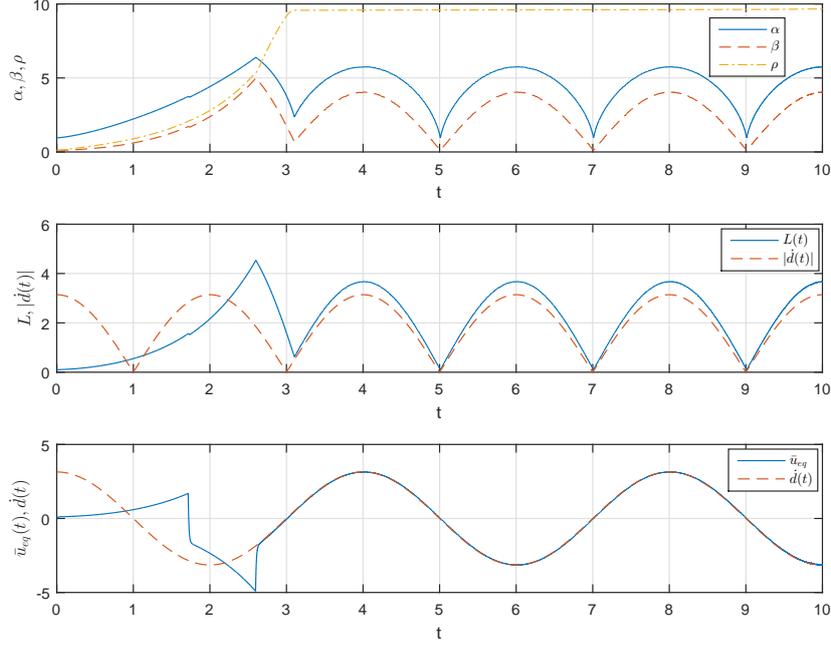


Figura 3.2: Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla escalar.

O vetor $\Phi(t, \phi_1) \in \mathbb{R}^n$ é dado por

$$\Phi(t, \phi_1) = -\frac{\dot{L}}{2L} \left(\frac{d\phi_1}{d\sigma} \right)^{-1} \phi_1(\sigma), \quad (3.27)$$

Note que, assim como na Seção 3.1, para um valor constante de $L(t)$, $\Phi(t, \phi_1) = 0$. Logo, com uma escolha apropriada das funções $\phi_1(\sigma)$ e $\phi_2(\sigma) \in \mathbb{R}^n$, (3.25) pode ser reduzido para algoritmos multivariáveis baseados em Super-Twisting conhecidos, como [48], [16], [52], e [15], onde outras estratégias são apresentadas para o projeto dos ganhos.

Neste trabalho, as funções $\phi_1(\sigma)$ e $\phi_2(\sigma)$ são definidas tais que as seguintes hipóteses sejam atendidas:

(A1) A função $\phi_1(\sigma)$ é sempre diferenciável, exceto, possivelmente, em um conjunto de medida nula $S \subset \mathbb{R}^n$, de seu domínio. Por sua vez, a função $\phi_2(\sigma)$ é quase sempre contínua, exceto, possivelmente, em S . Adicionalmente, assume-se que as soluções de (3.25) não podem se manter em $S/\{0\}$ permanentemente.

(A2) $\|\phi_1(\sigma)\| \rightarrow \infty$ se $\|\sigma(t)\| \rightarrow \infty$, e $\phi_1(\sigma) = 0$ se e somente se $\sigma(t) = 0$.

(A3) As funções $\phi_1(\sigma)$ e $\phi_2(\sigma)$ estão relacionadas por

$$\phi_2(\sigma) = \frac{d\phi_1}{d\sigma} \phi_1(\sigma), \quad \forall \sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S \quad (3.28)$$

onde $\phi'_1(\sigma) \triangleq \frac{d\phi_1}{d\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica, isto é,

$$\phi'_1(\sigma) = (\phi'_1(\sigma))^T > 0$$

(A4) Para todo $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$, a função $\phi_2(\sigma)$ pode ser reescrita como

$$\phi_2(\sigma) = \lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) \phi_1(\sigma) \quad (3.29)$$

(A5) A função $\phi_2(\sigma)$ possui um limitante inferior constante e positivo $\forall \sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$:

$$\|\phi_2(\sigma)\| \geq \frac{1}{c} \quad (3.30)$$

Note que embora (3.25) tenha um lado direito possivelmente descontínuo, a Hipótese (A1) garante que sua solução apenas atravessa o conjunto $S/\{0\}$, permitindo estudar a estabilidade de suas trajetórias conforme apresentado em [12]. De acordo a Hipótese (A.2), sabe-se que $\forall \sigma(t) = 0$, $\phi_1(\sigma) = 0$. Portanto, garante-se por (3.27) e (3.25) que quando o modo deslizante de segunda ordem é alcançado ($\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$), $\dot{\sigma}(t) = v = 0$.

Considerando a Hipótese (A3) e a desigualdade de Rayleigh, a seguinte propriedade é garantida para $n \geq 2$.

(P1) Para todo $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$, é válido que

$$\lambda_{\max}(\phi'_1(\sigma)) \|v\|^2 \geq v^T \phi'_1(\sigma) v \geq \lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) \|v\|^2, \forall v \in \mathbb{R}^n, \quad (3.31)$$

onde

$$\lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) = \frac{1}{\|\phi'_1(\sigma)^{-1}\|} > 0, \quad \forall \sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S \quad (3.32)$$

$$\lambda_{\max}(\phi'_1(\sigma)) = \|\phi'_1(\sigma)\| > 0, \quad \forall \sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S \quad (3.33)$$

Em [16], um caso particular do algoritmo Super-Twisting é estudado, onde uma análise de convergência e estabilidade para as variáveis de deslizamento é proposta usando as Hipóteses (A3) e (A4) e a propriedade (P1). No presente trabalho, esta análise é generalizada para uma família de algoritmos baseados no Super-Twisting que satisfaçam as Hipóteses (A1)-(A5).

A estratégia proposta para a análise do algoritmo (3.25) é dividida em duas etapas: Primeiramente, assume-se que o ganho $L(t)$ presente em (3.26) e (3.27) possui uma lei de adaptação na qual a seguinte hipótese é satisfeita:

(A6) A função $L(t) > 0$ é diferenciável e satisfaz a seguinte desigualdade para todo

$t \in \mathbb{R}^+$:

$$L(t) > \begin{cases} l_0, \forall 0 \leq t < t_s \\ \|d(\sigma, t)\|, \forall t \geq t_s \end{cases} \quad (3.34)$$

onde l_0 é uma constante positiva que será definida durante o projeto de adaptação de $L(t)$, assim como o tempo finito $t_s > 0$.

Sobre esta hipótese e com uma escolha apropriada dos ganhos α_0 e β_0 garante-se o surgimento do modo deslizante de segunda ordem ($\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$) em tempo finito. Em sequência, propõe-se uma lei de adaptação de forma que a Hipótese (A6) seja satisfeita e garanta uma escolha não-conservadora para os ganhos de (3.25).

As propriedades de estabilidade e convergência do algoritmo Super-Twisting MIMO generalizado com ganhos adaptativos proposto neste trabalho são apresentadas a seguir:

Teorema 3.3. *Considere o sistema multivariável (3.25) e suponha que as Hipóteses (A1)-(A6) sejam satisfeitas. Então, o sistema é globalmente uniformemente estável e suas trajetórias são atraídas globalmente e em tempo finito para a superfície de deslizamento $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$ se os ganhos α_0 e β_0 descritos em (3.26) forem definidos tais que:*

$$\frac{\alpha_0^2 \beta_0^2}{\alpha_0^2 + \beta_0 + c} > \frac{c^2 \kappa^2}{4(\kappa - 1)} \text{ e } \beta_0 > \max(1, c) \quad (3.35)$$

onde $\kappa > 1$ é um parâmetro de projeto e o termo constante c é descrito em (3.30).

Demonstração. ver Apêndice C.3 □

Em [25], a análise das variáveis de deslizamento é feita através de uma função de Lyapunov e de um Lema baseado em desigualdades matriciais lineares, denominado *Bounded Real Lemma*. No entanto, embora essa análise possa ser estendida para o caso multivariável, a escolha dos ganhos α_0 e β_0 seria feita de forma implícita, dificultando uma implementação direta do algoritmo. Visando a simplificar o projeto dos ganhos, a análise proposta no Apêndice C.3 considera uma nova abordagem baseada em uma função de Lyapunov generalizada, na qual os ganhos α_0 e β_0 podem ser obtidos de forma explícita, como pode-se observar em (3.35).

Uma vez que as análises de estabilidade e convergência das variáveis de deslizamento são baseadas na Hipótese (A6), a lei de adaptação para o ganho $L(t)$ deve garantir sua validade.

3.2.1 Esquema Generalizado de Adaptação de Camada Dupla

O esquema proposto neste trabalho apresenta uma variação da estratégia adaptativa apresentada na Seção 3.1, onde o conceito de controle equivalente é considerado, permitindo que o ganho $L(t)$ seja projetado como um “limitante superior” não conservador para $\|d(\sigma, t)\|$. Para tal, o termo $\beta(t)\phi_2(\sigma)$ é utilizado.

Note de (3.25) que quando o modo deslizante é alcançado, $\dot{\sigma}(t) = z(t) = 0$. Logo,

$$\beta(t)\phi_2(\sigma)|_{eq} = d(\sigma, t) \quad (3.36)$$

onde (3.36) é um sinal contínuo equivalente que pode substituir o sinal original $\beta(t)\phi_2(\sigma)$ e ainda manter o modo deslizante [4], [53].

Assim como em (3.9), seu valor teórico pode ser aproximado em tempo real por um filtro passa-baixas, que neste caso, é multivariável

$$\begin{aligned} \dot{u}_{eq}(t) &= T^{-1}(-\bar{u}_{eq}(t) + \beta(t)\phi_2(\sigma)) \\ T &= \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde $\bar{u}_{eq}(t) \in \mathbb{R}^n$, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz diagonal e τ_1, \dots, τ_n são constantes positivas pequenas.

Observe, portanto, que durante o modo deslizante, $d(\sigma, t)$ pode ser estimado em tempo real através de $\bar{u}_{eq}(t)$. Embora esse sinal filtrado aproxime o controle equivalente somente durante o deslizamento, $\bar{u}_{eq}(t)$ também será empregado na estratégia de adaptação durante a fase de alcance, isto é, enquanto o modo deslizante ainda não foi alcançado.

É válido frisar que, assim como no caso escalar, durante o modo deslizante a diferença entre o controle equivalente, $u_{eq}(t)$, e sua aproximação, $\bar{u}_{eq}(t)$, pode ser minimizada através da redução de τ_i . Entretanto, esta redução implica na passagem de frequências mais altas através do filtro. Portanto, caso o comportamento em frequência do sinal $d(\sigma, t)$ seja conhecido, ele pode ser usado para uma escolha apropriada dos parâmetros do filtro.

Caso este comportamento não seja conhecido, uma possível solução é alcançada definindo todos os parâmetros do filtro iguais, isto é, $\tau_1 = \cdots = \tau_n = \tau$ e realizando simulações e ensaios experimentais para o ajuste dos mesmos.

Considere agora a seguinte variável escalar, adaptada de (3.10)

$$\delta(t) = L(t) - \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| - \epsilon, \quad (3.38)$$

onde $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$, $1 > a > 0 \in \mathbb{R}$, e $b \geq 1 \in \mathbb{R}$ são variáveis de projeto escalares, onde a é definido tal que $\frac{b}{a\beta_0} > 1$ e b seja tal que, em todo o subespaço $\mathbb{R}^n \setminus S$, $b\|\phi_2(\sigma)\| \geq 1$.

Note que, diferente do esquema de adaptação proposto em [25], o termo b foi introduzido na definição da variável auxiliar (3.38) de tal modo que este esquema de adaptação possa lidar com valores diferentes de $\|\phi_2(\sigma)\|$, permitindo sua aplicação em uma classe mais ampla de algoritmos baseados no Super-Twisting. Por sua vez, as variáveis de projeto a e ϵ continuam sendo interpretadas como margens de segurança com a função de garantir que

$$\frac{b}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| + \frac{\epsilon}{2} \geq \frac{1}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| + \frac{\epsilon}{2} > \|u_{eq}(t)\| \quad (3.39)$$

De (3.30) e (3.38) nota-se que embora as variáveis b e c possuam funções similares, estas são definidas para situações distintas. Suponha que c seja definido igual a b . Uma vez que, por definição, $b \geq 1$, a escolha de α_0 e β_0 em (3.35) pode se tornar conservadora em casos onde a Hipótese (A5) é satisfeita com $c < 1$. O mesmo argumento é válido para o caso inverso, uma vez que c pode ser menor que um e, por definição, $b \geq 1$.

Assim como em (3.12), o ganho $L(t)$ é definido como

$$L(t) = l(t) + l_0 \quad (3.40)$$

onde $l_0 > 0 \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de projeto constante apresentado na Hipótese (A6), e $l(t)$ é uma função escalar com derivada temporal dada por

$$\dot{l}(t) = -\rho(t) \text{sign}(\delta(t)), \quad (3.41)$$

com $\rho(t) = r_0 + r(t)$ e

$$\dot{r}(t) = \gamma |\delta(t)|, \quad (3.42)$$

onde $\gamma, r_0 > 0 \in \mathbb{R}$ são parâmetros de projeto constantes.

Baseado no esquema generalizado descrito acima, pode-se apresentar o seguinte Teorema

Teorema 3.4. *Considere o sistema (3.25) sujeito à perturbação de entrada $d(\sigma, t)$, que satisfaz $\|\dot{d}(\sigma, t)\| \leq a_1$, onde a constante positiva a_1 é finita porém desconhecida. Então, o Esquema Generalizado Adaptativo de Camada Dupla (3.37), (3.38), (3.40),*

(3.41), e (3.42) garantem $L(t) > \|d(\sigma, t)\|$ em um tempo finito t_k .

Demonstração. ver Apêndice C.4 □

É válido frisar que a análise de estabilidade apresentada no Apêndice C.4 apresenta diferenças em relação à análise da estratégia de camada dupla original, apresentada no Apêndice C.2 visto que por se tratar de uma generalização de controladores multivariáveis, o uso de parâmetros de projeto adicionais e sinais multivariáveis são considerados. No entanto, de modo geral, pode-se observar que ambas as análises seguem os mesmos passos.

Baseado na Hipótese (A5), nota-se que antes do deslizamento ser alcançado, isto é, durante a fase de alcance, há um intervalo de tempo $[t_a, t_c]$ onde $\|\phi_2(\sigma)\| \geq \frac{1}{c}$ para todo $t \in [t_a, t_c]$, onde $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Baseado no filtro (3.37) onde $\tau_i \forall i = 1, \dots, n$ são constantes pequenas, o sinal $\bar{u}_{eq}(t)$ é uma versão filtrada pelo filtro passa-baixas de $\beta(t) \|\phi_2(\sigma)\|$. Além disso, existe um intervalo de tempo $[t_b, t_c] \subset [t_a, t_c]$ no qual $\|\bar{u}_{eq}(t)\| > a\beta(t)/c$ para quase todo $t \in [t_b, t_c]$, onde a é uma constante positiva menor que um apresentada em (3.38). Portanto, segue de (3.26) e (3.38) que

$$\delta(t) < L(t) - \frac{b}{a\beta_0} \left(\frac{a\beta_0 L(t)}{c} \right) - \epsilon$$

Definindo

$$b = \max(1, c) \tag{3.43}$$

note que (3.39) é satisfeita e

$$\delta(t) < L(t) - \frac{\max(1, c)}{c} L(t) - \epsilon \leq -\epsilon$$

Portanto, de (3.41) sabe-se que $\forall t \in [t_b, t_c]$, onde $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$, $\dot{L}(t) = \dot{l}(t) = \rho(t) > 0$. Logo, definido $l(t_0) \geq 0$, garante-se por (3.41) que durante o intervalo descrito acima, $L(t) > l_0$.

Por sua vez, pode-se inferir em (3.42) que $\dot{\rho}(t) = \dot{r}(t) \geq \gamma|\epsilon|$, o que garante que $\rho(t)$ cresce como uma rampa de inclinação superior a $\gamma|\epsilon|$. Consequentemente, $L(t)$ cresce, no mínimo, como uma parábola. Como pelo Teorema 3.4 sabe-se que a dinâmica de $d(\sigma, t)$ é limitada por uma constante, a mesma não pode crescer mais rápido que uma rampa. Portanto, garante-se que após um tempo $t_s > 0$, $L(t) > \|d(\sigma, t)\|$.

A partir deste instante, garante-se pelo Teorema 3.3 que o modo deslizante de segunda ordem é alcançado. Por (3.41), infere-se que como $\delta(t)$ pode assumir valores positivos $\forall t \geq t_s$, o ganho $L(t)$ pode decrescer, assumindo seu valor mínimo em

$$L_m = \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| + \epsilon > \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| + \frac{\epsilon}{2} \tag{3.44}$$

uma vez que, se $L(t) < L_m$, então $\delta(t) < 0$, garantindo por (3.41) e (3.42) que $\dot{L}(t) > 0$, e que $L(t)$ volte a crescer conseqüentemente. Note ainda que mesmo em seu valor mínimo, o ganho $L(t)$ continua sendo superior a $\|d(\sigma, t)\|$, visto que a desigualdade (3.39) é satisfeita. Baseado nos resultados acima e nos resultados obtidos no Teorema 3.4, pode-se concluir que

$$L(t) > \begin{cases} l_0, & \text{se } 0 < t < t_s \\ \|d(\sigma, t)\|, & \text{se } t \geq t_s \end{cases}$$

satisfazendo, deste modo, a Hipótese (A6).

Por sua vez, observe que a imposição apresentada no Teorema 3.4 sobre a derivada temporal de $d(\sigma, t)$ ainda permite que perturbações ilimitadas sejam rejeitadas através do esquema de adaptação proposto. Este resultado estende a aplicabilidade do Esquema Adaptativo de Camada Dupla proposto em [25] para uma classe mais ampla de perturbações e incertezas.

É importante frisar que de acordo com a Hipótese (A6), a rejeição de perturbações ilimitadas requer que o ganho $L(t)$, e conseqüentemente $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, se tornem ilimitados. Note, no entanto, que de acordo com o Teorema 3.3, $\sigma(t)$ e $\dot{\sigma}(t)$ permanecem limitados.

Além disso, de (3.38), é possível mostrar que um limitante superior para $L(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} |L(t)| = L(t) &\leq |\delta(t)| + \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| + \epsilon \\ &\leq |\delta(t)| + \frac{b\bar{q}}{a\beta_0} \|d(\sigma, t)\| + \epsilon \end{aligned}$$

onde $\bar{q} > 1$ é uma margem de segurança constante capaz de garantir que $\|\bar{u}_{eq}(t)\| < \bar{q}\|d(\sigma, t)\|$. Portanto, para perturbações de entrada limitadas, o ganho $L(t)$ permanece limitado. É válido frisar que a margem de segurança \bar{q} é um parâmetro considerado exclusivamente em análise. Portanto, seu desconhecimento não interfere na estratégia adaptativa de camada dupla generalizada proposta.

Assim como na Seção 3.1, os parâmetros a e ϵ são interpretados como margens de segurança [25], sendo responsáveis por criarem um cone similar ao apresentado em (3.15) para o caso generalizado. Note, entretanto, que se a inclusão do termo b em (3.38) não for considerada na escolha de a , o esquema adaptativo pode se tornar conservador para $b > 1$. Para contornar tal comportamento e garantir que $0 < a < 1$, define-se $\beta_0 > b$, conforme (3.35). Sobre esta condição, note que como

por definição a é tal que $\frac{b}{a\beta_0} > 1$, tem-se

$$\frac{b}{a\beta_0} > 1 \therefore 1 > \frac{b}{\beta_0} > a > 0 \quad (3.45)$$

e portanto a satisfaz (3.39) com um ajuste não-conservador das margens de segurança.

Por sua vez, a modificação sugerida em (3.18) para implementações práticas continua sendo válida para este caso.

Combinando os Teoremas 3.3 e 3.4, o principal resultado desta seção é alcançado. Vale ressaltar que o modo deslizante de segunda ordem ocorre em tempo finito para uma família de algoritmos multivariáveis baseados no Super-Twisting que satisfaçam as Hipóteses (A1)-(A5), apesar da perturbação de entrada considerada. Conforme $\delta(t)$ converge para zero, $L(t)$ se torna um limitante superior próximo a $\|d(\sigma, t)\|$, garantindo o deslizamento e prevenindo escolhas conservadoras para os ganhos do algoritmo generalizado do Super-Twisting, proposto em (3.25).

3.2.2 Casos particulares

Nesta subseção serão apresentados algoritmos multivariáveis baseados no Super-Twisting, no qual a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada pode ser implementada. Além dos algoritmos que satisfazem diretamente as Hipóteses (A1)-(A5), são apresentadas outras técnicas que, através de ajustes sobre as suas funções ϕ_1 e ϕ_2 , também podem ser incluídas na família de algoritmos baseados no Super-Twisting capazes de utilizar a estratégia adaptativa proposta.

Versão multivariável do Super-Twisting convencional

Considere a versão multivariável do algoritmo proposto em [6] e [54]

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= -\alpha\phi_1(\sigma) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -\beta\phi_2(\sigma) \end{aligned} \quad (3.46)$$

com $\alpha, \beta > 0$ e

$$\phi_1(\sigma) = \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \text{ e } \phi_2(\sigma) = \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (3.47)$$

onde

$$\phi_1'(\sigma) = \frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} I_n - \frac{\sigma\sigma^T}{2\|\sigma|^{\frac{5}{2}}} \text{ e } \lambda_{min}(\phi_1'(\sigma)) = \frac{1}{2\|\sigma(t)\|^{\frac{1}{2}}}$$

Note que embora esta escolha satisfaça as Hipóteses (A1) e (A2), a escolha de $\phi_2(\sigma)$ não satisfaz as Hipóteses (A3) e (A4). Portanto, propõe-se a seguinte alteração

$$\phi_1(\sigma) = \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \text{ e } \phi_2(\sigma) = \frac{\sigma}{2\|\sigma\|} \quad (3.48)$$

Embora a modificação seja simples, note que definindo $c = 2$, as Hipóteses (A1)-(A5) são satisfeitas simultaneamente. Por sua vez, definindo α e β em (3.46) como em (3.26) garante-se que os resultados do Teorema 3.3 sejam válidos para este caso. Além disso, definindo b como em (3.43), note que (3.39) é satisfeita e o Esquema de Camada Dupla pode ser implementado.

Note que o caso particular apresentado em (3.47), com $n = 1$, reconstrói o algoritmo apresentado em (3.1). Entretanto, como pode-se observar, esta escolha de $\phi_1(\sigma)$ e $\phi_2(\sigma)$ restringe o uso direto das propriedades oriundas das Hipóteses (A3)-(A4), que permitem a generalização proposta neste trabalho.

Em [26], uma versão desacoplada deste caso particular é estudada, baseando-se no Esquema de Camada Dupla apresentado em [23]. É válido frisar que embora um dos ganhos seja baseado na estratégia adaptativa de camada dupla, o outro ganho é projetado de acordo com um limitante superior para o distúrbio. Além disso, como esta técnica é voltada para sistemas multivariáveis desacoplados, poderia-se utilizar a estratégia escalar proposta em [23] diretamente para cada componente. Logo, percebe-se que além desta técnica contrastar com a filosofia do Esquema de Adaptação de Camada Dupla proposto aqui e em [25], os efeitos do acoplamento entre estados, presente na grande maioria dos sistemas multivariáveis, não é considerado. Por sua vez, este trabalho propõe uma versão multivariável generalizada onde ambos os ganhos são adaptados, evitando, portanto, uma escolha conservadora para os mesmos.

Super-Twisting com termos lineares

Outra importante contribuição associada ao algoritmo Super-Twisting foi apresentada em [16], onde ganhos variáveis foram incluídos na versão multivariável do algoritmo. Considerando a estrutura genérica apresentada em (3.46), o algoritmo citado é obtido fazendo

$$\phi_1(\sigma) = \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_3\sigma \text{ e } \phi_2(\sigma) = \frac{\sigma}{2\|\sigma\|} + \frac{3k_3}{2} \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_3^2\sigma \quad (3.49)$$

sendo $k_3 > 0$, e

$$\phi'_1(\sigma) = \left(\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) I_n - \frac{\sigma\sigma^T}{2\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \text{ e } \lambda_{min}(\phi'_1(\sigma)) = \frac{1}{2\|\sigma(t)\|^{\frac{1}{2}}} + k_3$$

A inclusão dos termos lineares tem como função acelerar a convergência para casos onde há perturbações/incertezas linearmente dependentes da variável de deslizamento e em casos onde as trajetórias do sistema encontrem-se afastadas da origem, o que garante um desempenho diferente daquele apresentado na Subseção anterior.

Definindo $c = 2$, verifica-se que as Hipóteses (A1)-(A5) são respeitadas simultaneamente e sem a necessidade de ajustes sobre as funções ϕ_1 e ϕ_2 . Por sua vez, definindo α e β em (3.46) como em (3.26), garante-se que o modo deslizante ocorre em tempo finito. Além disso, com b definido de acordo com (3.43), o Esquema Generalizado de Adaptação de Camada Dupla garante uma escolha não conservadora para os ganhos.

Embora o algoritmo apresentado em [16] também faça uso de ganhos variáveis, a forma como os mesmos são definidos exerce influência direta no comportamento da técnica. Enquanto o trabalho citado faz uso de funções majorantes conhecidas a priori para as perturbações de entrada do sistema, a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada proposta nesta dissertação não depende de tais limitantes, sendo, portanto, capaz de abranger uma classe maior de problemas, visto que menos informações sobre o distúrbio são necessárias para a sua implementação. Outra importante distinção é encontrada no conservadorismo dos ganhos, visto que enquanto a estratégia adaptativa busca os menores valores possíveis capazes de manter o deslizamento, a técnica proposta em [16] considera funções limitantes que podem ser conservadores para o distúrbio em questão.

Super-Twisting multivariável generalizado

Em [48] um algoritmo baseado no Super-Twisting Multivariável é apresentado, onde a convergência em tempo finito é garantida por meio do conhecimento a priori de funções limitantes para as perturbações/incertezas do sistema. Conforme apresentado na Subseção 2.5.5, a ideia geral desta estrutura é incluir os principais algoritmos baseados no Super-Twisting em uma análise generalizada. Baseando-se em (3.46) O algoritmo pode ser descrito como

$$\begin{aligned}\phi_1(\sigma) &= (k_1\|\sigma\|^{-p} + k_2 + k_3\|\sigma\|^q) \sigma, \\ \phi_2(\sigma) &= (c_1\|\sigma\|^{-2p} + c_2\|\sigma\|^{-p} + c_3\|\sigma\|^{q-p} + c_4 + c_5\|\sigma\|^q + c_6\|\sigma\|^{2q}) \sigma\end{aligned}\tag{3.50}$$

onde,

$$\begin{aligned}c_1 &= k_1^2(1 - p) & c_2 &= k_1k_2(2 - p) & c_3 &= k_1k_3(2 + q - p) \\ c_4 &= k_2^2 & c_5 &= k_2k_3(2 + q) & c_6 &= k_3^2(1 + q)\end{aligned}$$

É possível mostrar que $\phi_2(\sigma) = \lambda_{\min}(\phi_1'(\sigma))\phi_1(\sigma)$, uma vez que

$$\phi_1'(\sigma) = (k_1\|\sigma\|^{-p} + k_2 + k_3\|\sigma\|^q) I_n + (k_3q\|\sigma\|^q - k_1p\|\sigma\|^{-p}) \frac{\sigma\sigma^T}{\|\sigma\|^2}$$

e

$$\lambda_{\min}(\phi_1'(\sigma)) = k_1(1-p)\|\sigma\|^{-p} + k_2 + k_3(1+q)\|\sigma\|^q,$$

com $k_1, k_2, k_3 > 0$, $\frac{1}{2} \geq p > 0$ e $q > 0$.

Note que para todo $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$, a norma da função $\phi_2(\sigma)$ é dada por

$$\|\phi_2(\sigma)\| = c_1\|\sigma\|^{1-2p} + c_2\|\sigma\|^{1-p} + c_3\|\sigma\|^{1+q-p} + c_4\|\sigma\| + c_5\|\sigma\|^{1+q} + c_6\|\sigma\|^{1+2q} \quad (3.51)$$

De (3.51), verifica-se que a Hipótese (A5) não é satisfeita para qualquer escolha de p . Portanto, neste trabalho ele será definido como $p = \frac{1}{2}$. Logo definindo $c = c_1$, verifica-se que as Hipóteses (A1)-(A5) são satisfeitas simultaneamente, e, portanto, as propriedades relacionadas ao Teorema 3.3 são garantidas. Por sua vez, definindo b como em (3.43), o Esquema Generalizado de Adaptação de Camada Dupla garante a adaptação dos ganhos do Super-Twisting de maneira não-conservadora.

É válido frisar que em [48] a perturbação externa é definida como

$$d(\sigma, t) = G(t)\phi_2(\sigma) \quad (3.52)$$

onde $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz incerta de elementos limitados. Observe que esta restrição sobre a classe de perturbações possui certas propriedades que dão liberdade para a escolha de certos parâmetros, como a constante p . Por exemplo, considere que $\frac{1}{2} > p > 0$. Neste caso, por (3.51), sabe-se que conforme $\|\sigma(t)\| \rightarrow 0$, $\|d(\sigma, t)\| \rightarrow 0$.

Como a restrição imposta em (3.52) não é necessária para a estratégia proposta neste trabalho, $d(\sigma, t)$ pode ser uma perturbação independente das variáveis de deslizamento e, portanto, pode não convergir para zero. Por esta razão, define-se $p = \frac{1}{2}$.

Note ainda que a implementação do Esquema Generalizado de Adaptação de Camada Dupla proposto neste trabalho permite que o conhecimento de funções limitantes para a perturbação não sejam mais necessárias, reduzindo as restrições impostas em [48] para este algoritmo.

Exemplo 3.2: Estabilização de um satélite

Visando ilustrar as propriedades obtidas para o algoritmo proposto neste Capítulo, considere o problema de estabilização do movimento de um satélite controlado por propulsores. A seguinte equação não-linear descreve o movimento do mesmo [15, 55]

$$\dot{\omega} = J^{-1}(T - \omega \times J\omega) + d(t) \quad (3.53)$$

onde $\omega \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular inercial do satélite, $T \in \mathbb{R}^3$ é o torque fornecido pelos propulsores e $d(t) \in \mathbb{R}^3$ é uma perturbação não-linear que satisfaz a seguinte desigualdade

$$\|\ddot{d}(t)\| \leq a_1 \quad (3.54)$$

onde a_1 é uma constante positiva limitada porém desconhecida. Por sua vez $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é uma matriz conhecida a priori e dada por

$$J = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1.2757 & -0.0040 & -0.0230 \\ -0.0040 & 0.6597 & 0.0063 \\ -0.0230 & 0.0063 & 0.8750 \end{bmatrix} \text{kgm}^2$$

O objetivo é projetar uma lei de controle contínua capaz de garantir que as trajetórias do sistema sejam atraídas globalmente para a superfície de deslizamento $\omega = \dot{\omega} = 0$, estabilizando o movimento do satélite. Uma vez que não há limitantes superiores disponíveis para a perturbação $d(t)$, técnicas baseadas no super-twisting multivariável não podem ser aplicadas. Entre elas encontram-se os algoritmos apresentados nas Subseções [2.5.4](#), [2.5.5](#) e o Algoritmo Super-Twisting Multivariável com Ganhos Variáveis [\[16\]](#), que será introduzido no próximo capítulo. Portanto, a seguinte lei de controle baseada no Algoritmo Super-Twisting Adaptativo Multivariável Generalizado é projetada

$$T = \omega \times J\omega + J \left(-\alpha(t)\phi_1(\omega) - \int_{t_0}^t \beta(\tau)\phi_2(\omega)d\tau + \Phi(t, \phi_1) \right) \quad (3.55)$$

onde $\alpha(t)$, $\beta(t)$, e $\Phi(t, \phi_1)$ são definidos em [\(3.26\)](#) e [\(3.27\)](#), respectivamente. Para este caso, as funções vetoriais $\phi_1(\cdot)$ e $\phi_2(\cdot)$ serão definidas de acordo com [\(3.48\)](#). Substituindo [\(3.55\)](#) em [\(3.53\)](#) obtém-se a seguinte estrutura em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\alpha(t) \frac{\omega}{\|\omega\|^{\frac{1}{2}}} + z(t) + \Phi(t, \omega) \\ \dot{z} &= -\beta(t) \frac{\omega}{2\|\omega\|} + \bar{d}(t) \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde $\bar{d}(t) = \dot{d}(t)$. Note que, considerando $\kappa = 2$, os ganhos α_0 e β_0 definidos como $\alpha_0 = 2$ e $\beta_0 = 3.5$ satisfazem [\(3.35\)](#). Os resultados de simulação são apresentados na Figura [3.3](#), para uma condição inicial $\omega_0 = [0.5 \quad -0.2 \quad 9]^T \text{rad/s}$ e uma perturbação externa $d(t) = [3\cos(t) \quad e^{-\frac{t}{3}}\sin(t) \quad \sin(3t)]^T$, que satisfaz a desigualdade [\(3.54\)](#) $\forall t \geq 0$.

Nota-se que um modo deslizante de segunda ordem $\omega = \dot{\omega} = 0$ é alcançado em tempo finito, embora não haja conhecimento de nenhum limitante superior para a perturbação externa $\bar{d}(t)$. Observa-se ainda a presença de um sinal de controle

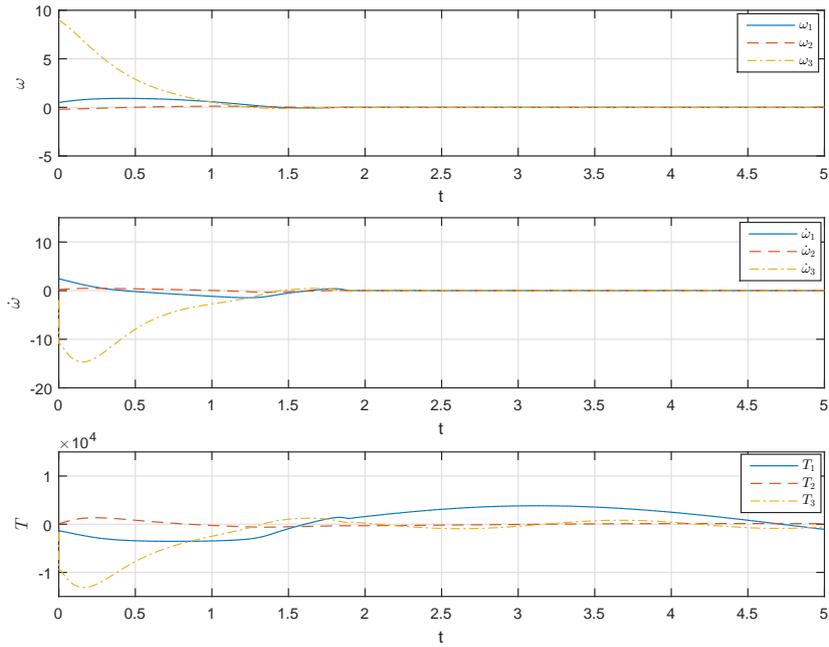


Figura 3.3: Desempenho da lei de controle baseada na generalização do algoritmo Super-Twisting com ganhos adaptativos multivariável aplicada ao problema de estabilização de um satélite.

contínuo e portanto menos propenso aos efeitos do *chattering*. Por sua vez, os parâmetros utilizados na estratégia adaptativa de camada dupla generalizada foram $a = 0.54$, $l_0 = r_0 = \epsilon = 0.1$, $\gamma = 5$, $\tau = 0.01$ e $c = b = 2$. Note que a escolha proposta para a e b garante por (3.45) uma escolha não conservadora das margens de segurança do esquema adaptativo. A Figura ?? apresenta o comportamento das variáveis adaptativas do esquema proposto durante a simulação.

Nota-se que, após um tempo finito $T = 2s$, o ganho $L(t)$ representa um limitante superior não conservador para $\|\bar{d}(t)\|$. Considere agora que a margem de segurança a foi definida de acordo com a estratégia de camada dupla original [25], isto é, desconsiderando o parâmetro b em seu projeto. A Figura 3.5 apresenta os parâmetros adaptativos para $a = 0.25$. Note que embora a convergência das variáveis de deslizamento sejam asseguradas, uma escolha conservadora para as margens de segurança adicionam conservadorismo nos ganhos, agindo em sentido contrário à filosofia da estratégia de camada dupla.

Admita agora que a perturbação aplicada ao sistema (3.53) possui derivada temporal ilimitada, isto é, $\bar{d}(t)$ é um sinal ilimitado dado por $\bar{d}(t) = [(t+1)^{\frac{2}{3}} t \sin(t)]^T$, cuja derivada pode ser escrita como

$$\dot{\bar{d}}(t) = \left[\frac{2}{3(t+1)^{\frac{1}{3}}} \quad 1 \quad \cos(t) \right]^T$$

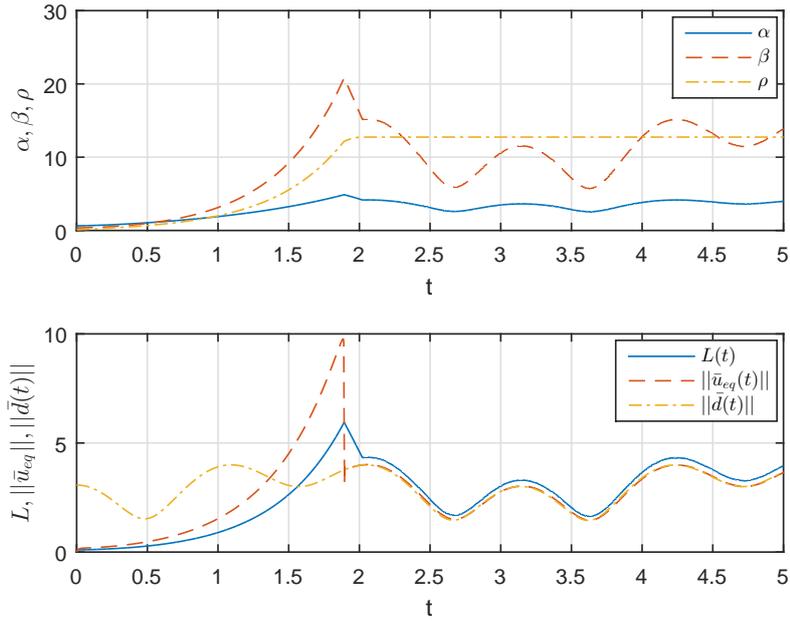


Figura 3.4: Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada.

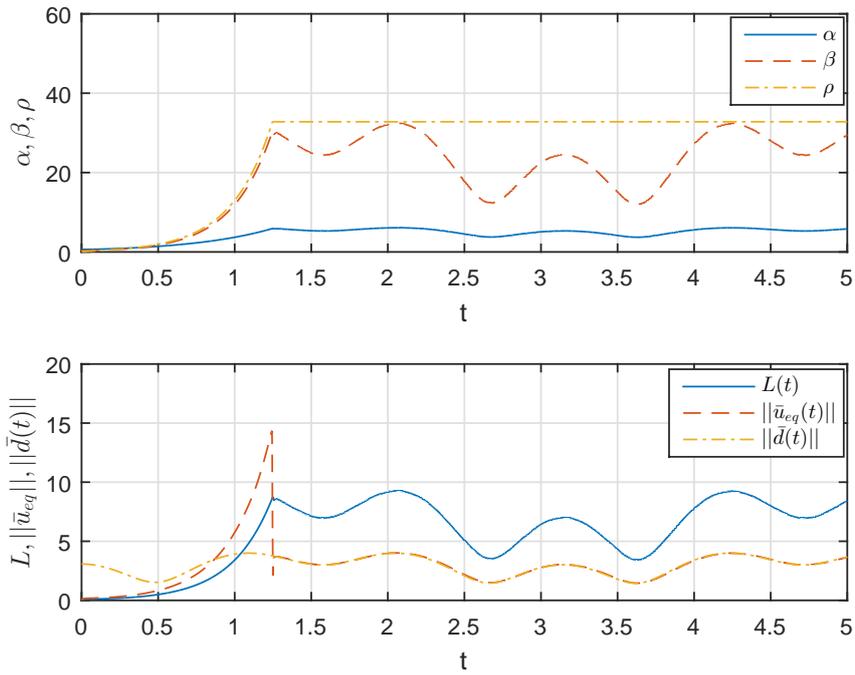


Figura 3.5: Aplicação de margens de segurança conservadoras.

satisfazendo (3.54) para todo $t \geq 0$. Os resultados de simulação são mostrados nas Figuras 3.6 e 3.7, onde os mesmos parâmetros utilizados na simulação inicial foram considerados. Note que embora o ganho adaptativo $L(t)$ se torne ilimitado, o esquema de adaptação de camada dupla generalizada garante o surgimento de um

modo deslizante $\omega = \dot{\omega} = 0$ em tempo finito. Note que mesmo com perturbações ilimitadas o esquema adaptativo garante uma escolha não conservadora para os ganhos do algoritmo.

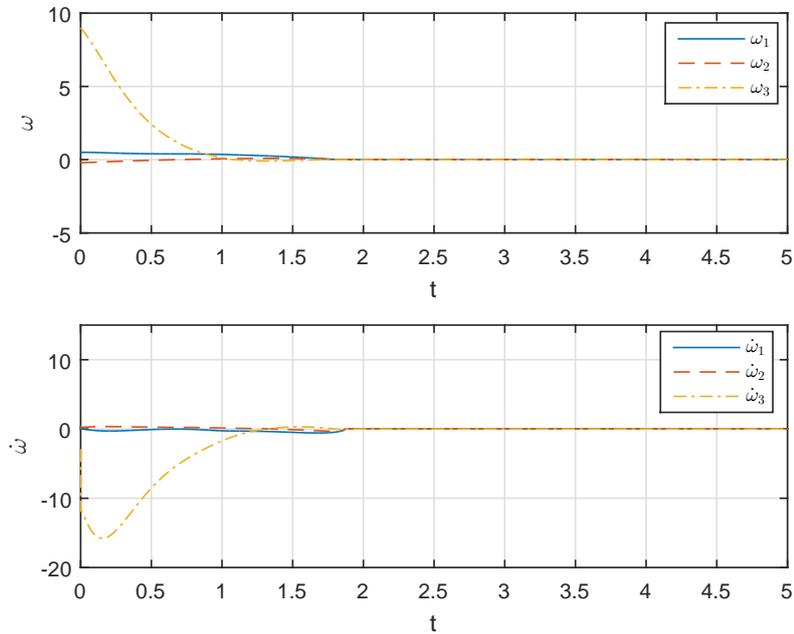


Figura 3.6: Desempenho da lei de controle baseada na generalização do algoritmo Super-Twisting com ganhos adaptativos multivariável para perturbações ilimitadas.

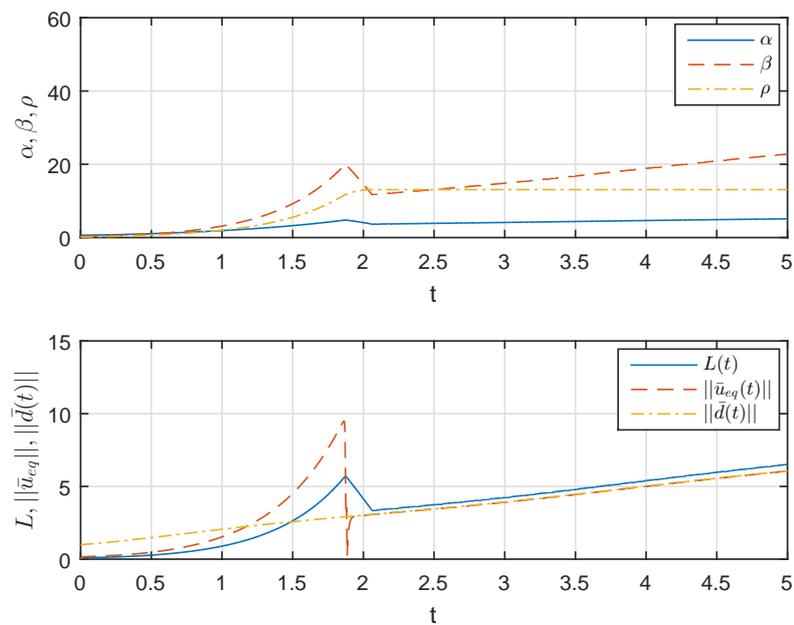


Figura 3.7: Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada.

Capítulo 4

Sistemas Ciber-Físicos

Uma classe de sistemas cada vez mais presente em aplicações práticas são os sistemas ciber-físicos [33]. Encontrados nas principais estruturas da sociedade, como sistemas inteligentes, geração de energia e redes de transporte, sistemas ciber-físicos integram processos físicos, estruturas de comunicação e recursos computacionais [32]. Apesar de aperfeiçoar o desempenho do processo de interesse, esta classe de sistemas torna-se mais suscetível à ataques envolvendo o domínio cibernético, denominados como ciber-ataques [56]. Como a principal forma de acesso ilegal ao sistema é através dos canais de comunicação, grande parcela dos ciber-ataques são feitos desta maneira. Entre os principais danos causados por essa classe de ataques estão os apagões de energia no Brasil [30], e o vírus de computador *Stuxnet* [31]. A ocorrência destes ataques comprovou que os mecanismos de segurança já usados precisavam ser complementados por estratégias capazes de detectar e rejeitar tais ataques.

Note que do ponto de vista da teoria de controle, ciber-ataques podem ser interpretados como perturbações externas, enquanto sistemas ciber-físicos podem ser classificados como sistemas de controle incertos. Como esta classe de sistema faz parte de uma ampla área de pesquisa com trabalhos relevantes, o uso de estratégias de controle como mecanismos de segurança em sistemas ciber-físicos tornou-se frequente.

Devido às suas características de robustez e convergência em tempo finito, técnicas de controle por modos deslizantes foram elaboradas para lidar com esta nova classe de distúrbios. Em [57] sistemas não-lineares foram considerados. Através de diferenciadores baseados em modos deslizantes de ordem superior, os ataques eram aproximados através de técnicas de otimização. No entanto, esta técnica considerava que todos os estados do sistema estariam disponíveis, o que em aplicações práticas nem sempre é possível. Por sua vez, foi proposto em [58] um controlador baseado em modo deslizante integral capaz de garantir desempenho quase ótimo para sistemas incertos. Esta técnica, entretanto, considera que o sistema livre de ataques e distúrbios externos estará disponível antes de sua implementação.

Baseado em [28], uma estratégia interessante baseada em uma aproximação contínua do modo deslizante convencional foi proposta para o controle de sistemas ciber-físicos lineares [29]. Além de estimar possíveis estados não medidos do sistema, esta técnica é capaz de detectar e reconstruir ataques aos estados e à saída do mesmo. Para este fim, um monitor de ataques e um observador de estados é utilizado. Por sua vez, a compensação dos ataques é feita através de técnicas baseadas em modos deslizantes de primeira ordem, e, portanto, propensas ao *chattering*.

Uma vez que esta técnica baseia-se em uma aproximação da estratégia por modos deslizantes de primeira ordem, certas propriedades como convergência em tempo finito não são garantidas. Consequentemente, o desempenho alcançado na reconstrução e compensação dos ataques torna-se inferior ao obtido por técnicas de modos deslizantes. Além disso, a estratégia proposta apresenta uma análise de estabilidade local, o que restringe sua aplicação em determinados sistemas de interesse prático. Uma possível alternativa para contornar esses problemas seria o uso de técnicas baseadas em modos deslizantes de ordem superior para o projeto de monitores e compensadores de ataques.

Nesse sentido, na Seção 4.1 será considerada a mesma classe de sistemas ciber-físicos apresentadas em [29]. Nas Seções 4.2 e 4.3 propõe-se o projeto de monitores de ataques baseados no *Variable Gain Super-Twisting* multivariável [16] e na estratégia adaptativa de camada dupla generalizada, proposta na Seção 3.2 para ataques aos estados e à saída. Além disso, demonstra-se que na ausência de distúrbios externos, os erros de monitoramento de ambas as técnicas convergem exponencialmente, embora a técnica adaptativa proposta necessite de menos informações sobre o ataque. Por sua vez, as Seções 4.4 e 4.5 consideram o problema de rastreamento em sistemas ciber-físicos sob efeito de ataques aos estados e à saída, respectivamente. Com o desenvolvimento de compensadores baseados no *Variable Gain Super-Twisting* multivariável e na estratégia adaptativa de camada dupla generalizada proposta, garante-se convergência do erro de rastreamento em tempo finito, além do uso de uma lei de controle contínua e, portanto, menos propensa ao *chattering*.

É válido frisar que o uso de ambas as técnicas para o problema de monitoramento e compensação de ataques é considerado para fins de comparação, visto que a forma como os ganhos são sintonizados tem efeito direto no desempenho do sistema em questão. Além disso, como cada estratégia exige Hipóteses distintas, um conjunto maior de problemas envolvendo o monitoramento e a compensação de ciber-ataques pode ser considerado.

4.1 Apresentação do problema

Considere o seguinte sistema não-linear incerto

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \bar{A}\zeta(t) + \bar{B}_u u(t) + \bar{B}_f f(\zeta, t) + \bar{D}_d d(\zeta, t) \\ y(t) &= \bar{C}\zeta(t) + D_u u(t) + D_f f(\zeta, t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde $t \in [0, \infty)$, $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é a entrada do sistema e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída, com $p \geq m$. As matrizes \bar{A} , \bar{B}_u , \bar{C} e \bar{D}_d são plenamente conhecidas e possuem dimensões compatíveis. O termo $\bar{D}_d d(\zeta, t) \in \mathbb{R}^n$ descreve qualquer incerteza do modelo ou perturbação externa. As matrizes \bar{B}_f e D_f são definidas de acordo com os canais de estado/saída onde se deseja detectar um possível ataque $f(\zeta, t) \in \mathbb{R}^q$.

Assim como em [29] e [28], assume-se que o vetor de estados $\zeta(t)$ engloba as variáveis físicas e cibernéticas do sistema. Por sua vez, assume-se que as únicas variáveis disponíveis para estimação e controle são $u(t)$ e $y(t)$. Adicionalmente, assume-se que o sistema definido em (4.1) satisfaz as seguintes Hipóteses

- (A1) O par (\bar{A}, \bar{C}) é completamente observável.
- (A2) $r(\bar{C}\bar{B}_f) = r(\bar{B}_f)$, onde \bar{B}_f é uma matriz de posto completo por colunas.
- (A3) As matrizes \bar{B}_u e D_f possuem posto completo por colunas.
- (A4) A matriz de transferência $G(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}_u + D_u$ é de fase mínima.
- (A5) Todos os ataques são detectáveis, isto é, o sistema $(\bar{A}, \bar{B}_f, \bar{C}, D_f)$ não possui zeros invariantes.

Note que a Hipótese (A2) implica que $q \leq p$. Logo a escolha de \bar{B}_f e D_f garante que até p canais de estados/saídas sejam monitorados simultaneamente. A Hipótese (A3) garante que não há entradas redundantes para o sistema, enquanto a Hipótese (A5) garante que todo ataque não-nulo, seja ele persistente ou não, pode ser detectado por meio de um monitor de ataques. É válido frisar que as Hipóteses apresentadas acima são as mesmas consideradas em [29] e [28]

Como o sistema é conhecido com exceção do termo de perturbação externa $d(\zeta, t)$ e as Hipóteses (A1)-(A5) são satisfeitas, o objetivo é reconstruir os ataques aos estados e às saídas através de um estimador de estados associado a um monitor de ataques.

Em [29], a reconstrução de tais ataques é feita de forma escalar, isto é, $\bar{B}_f \in \mathbb{R}^n$ e $D_f \in \mathbb{R}^p$. Como consequência, utiliza-se um estimador de estados e um monitor para cada um dos possíveis p ataques, tornando a estratégia custosa do ponto de vista computacional. Neste trabalho, esta limitação é contornada propondo-se $\bar{B}_f \in \mathbb{R}^{n \times p}$

e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Desta forma, é necessário apenas um estimador de estados e um monitor de ataques, que reconstruirá um vetor $\hat{f}(\sigma, t) \in \mathbb{R}^p$.

Note pela Hipótese (A2) que, como $\bar{B}_f \in \mathbb{R}^{n \times p}$, tem-se que $p = r(\bar{B}_f)$. Portanto, garante-se a existência de uma matriz $\bar{B}_{f\perp} \in \mathbb{R}^{n-p \times n}$, tal que $\bar{B}_{f\perp} \bar{B}_f = 0$. Além disso note pela mesma hipótese que uma escolha apropriada de \bar{B}_f garante que $\bar{C} \bar{B}_f \in \mathbb{R}^{p \times p}$ se torne uma matriz não singular.

Logo, a transformação linear de coordenadas de estado $x = T\zeta$, dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{f\perp} \\ \bar{C} \end{bmatrix} \zeta \quad (4.2)$$

onde $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, reescreve o sistema em sua forma normal

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} d(x, t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} f(x, t) \quad (4.3)$$

com

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + D_u u(t) + D_f f(x, t) \quad (4.4)$$

onde $B = \bar{C} \bar{B}_f \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é uma matriz não-singular, e $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$ e $x_2(t) \in \mathbb{R}^p$ são estados não-medidos e medidos, respectivamente. Note ainda que a Hipótese (A4) garante que $A_{11} \in \mathbb{R}^{n-p \times n-p}$ é uma matriz Hurwitz.

4.1.1 Classe de ataques ciber-físicos

A segurança de sistemas ciber-físicos pode ser comprometida por diversos tipos de ataques, que podem afetar tanto seus componentes físicos quanto os seus cibernéticos [29]. Entre os modelos de ataque mais estudados, destacam-se o ataque por negação de serviços (*Denial of Service*), ataques de repetição (*Replay Attacks*), injeção de dados falsos (*False Data Injection*), ataques fraudulentos (*Deception Attacks*) e ataques aos sensores (*Sensor Attacks*) [33].

Em [33] e [59], *Deception Attacks* são definidos como ataques maliciosos para sistemas de controle capazes de alterar o comportamento de atuadores e sensores, comprometendo a integridade dos pacotes de controle ou das medidas obtidas pelos sensores. Note portanto, que do ponto de vista da teoria de controle, esta classe de ataque pode ser interpretada como uma perturbação de entrada ou saída, de acordo com quais sinais são comprometidos.

Por sua vez, *Sensor Attacks* são ataques exclusivamente relacionados aos sensores. Embora tenham o mesmo propósito dos *Deception Attacks*, este tipo de ataque também pode ser usado para atrasar ou até mesmo impedir a detecção de ataques aos pacotes de controle, podendo resultar na alteração do regime nominal do sistema

ou até mesmo no comprometimento de sua estabilidade [60]. Logo, quando ambos os ataques ocorrem simultaneamente, nota-se que a detecção dos mesmos pode ser impraticável [29].

Neste trabalho, o vetor $f(x, t)$ pode representar os dois ataques citados acima. No entanto, uma vez que a Hipótese (A5) garante que todos os ataques não nulos são detectáveis, assume-se a seguinte hipótese

(A6) *Deception Attacks* e *Sensor Attacks* não ocorrem simultaneamente, isto é, $\|\bar{B}_f\| \cdot \|D_f\| = 0$.

Note que esta hipótese associada às Hipóteses (A2) e (A3) implicam que \bar{B}_f ou D_f é uma matriz de zeros. Portanto, ciber-ataques representados por $f(x, t)$ não podem afetar os estados e as saídas simultaneamente.

Sobre estas condições, as seções seguintes apresentam os estimadores de estados usados para ataques aos estados ($\bar{B}_f \neq 0, D_f = 0$) e às saídas ($\bar{B}_f = 0, D_f \neq 0$).

4.2 Detecção e reconstrução de ataques aos estados

De acordo com a Hipótese (A6), sabe-se que $D_f = 0$. Reescrevendo (4.3) e (4.4) segue que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) + D_1d(x, t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) + Bf(x, t) + D_2d(x, t) \\ y(t) &= x_2(t) + D_uu(t),\end{aligned}\tag{4.5}$$

Uma vez que o modelo do sistema e os sinais $u(t)$ e $y(t)$ são conhecidos, propõe-se o seguinte estimador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1(t) &= A_{11}\hat{x}_1(t) + B_1u(t) + A_{12}(y(t) - D_uu(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= A_{21}\hat{x}_1(t) + B_2u(t) + B\hat{f} + A_{22}(y(t) - D_uu(t)) \\ \hat{y}(t) &= \hat{x}_2(t) + D_uu(t),\end{aligned}\tag{4.6}$$

onde \hat{f} será definido posteriormente como o monitor de ataques. Definindo os erros de estimação como

$$\begin{aligned}e_1(t) &:= x_1(t) - \hat{x}_1(t) \\ e_2(t) &:= x_2(t) - \hat{x}_2(t) \\ e_y(t) &:= y(t) - \hat{y}(t)\end{aligned}\tag{4.7}$$

sabe-se por (4.5) e (4.6) que a dinâmica dos erros é dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1(t) &= A_{11}e_1(t) + D_1d(x, t) \\ \dot{e}_y(t) &= A_{21}e_1(t) + B \left(f(x, t) - \hat{f} \right) + D_2d(x, t)\end{aligned}\tag{4.8}$$

uma vez que $e_2(t) = e_y(t)$. Definindo o erro de estimação de saída como a variável de deslizamento $\sigma_d(t)$, sua dinâmica pode ser descrita como

$$\dot{\sigma}_d(t) = -B\hat{f} + \Delta(x, t)\tag{4.9}$$

com

$$\Delta(e_1, \sigma_d, t) = A_{21}e_1(t) + Bf(e_1, \sigma_d, t) + D_2d(e_1, \sigma_d, t)\tag{4.10}$$

onde embora o termo $\Delta(e_1, \sigma_d, t) = \Delta(x, t)$ inclua perturbações/incertezas do sistema e ciber-ataques, é tratado do ponto de vista de implementação como uma perturbação não-linear possivelmente dependente do estado. Logo, este termo pode ser reescrito como em [16]

$$\Delta(e_1, \sigma_d(t), t) = g_1(e_1, \sigma_d(t), t) + g_2(e_1, t)\tag{4.11}$$

sendo

$$\begin{aligned}g_1(e_1, \sigma_d, t) &= B(f(e_1, \sigma_d, t) - f(e_1, 0, t)) + D_2(d(e_1, \sigma_d, t) - d(e_1, 0, t)) \\ g_2(e_1, t) &= A_{21}e_1(t) + Bf(e_1, 0, t) + D_2d(e_1, 0, t)\end{aligned}\tag{4.12}$$

e $g_1(e_1, 0, t) = 0$. Note que a derivada temporal de $g_2(e_1, t)$ pode ser escrita em função de (4.8)

$$\frac{d}{dt} [g_2(e_1, t)] = A_{21}A_{11}e_1(t) + A_{21}D_1d(e_1, \sigma_d, t) + B\frac{d}{dt} [f(e_1, 0, t)] + D_2\frac{d}{dt} [d(e_1, 0, t)]\tag{4.13}$$

Neste trabalho, propõe-se um monitor de ataques baseado em modos deslizantes de ordem superior, de modo que seja possível obter uma estimativa do ciber-ataque apesar da presença da perturbação/incerteza $d(e_1, \sigma_d, t)$ com acurácia superior a observada em [29]. Note em [16], por exemplo, que a implementação de algoritmos de ordem superior como o Super-Twisting, no qual não há nenhum esquema adaptativo para os seus ganhos, exigem o conhecimento de funções limitantes superiores para $g_1(e_1, \sigma_d, t)$ e $\frac{d}{dt} [g_2(e_1, t)]$. Portanto, considere as seguintes hipóteses

(A7) O vetor de ataque e sua derivada temporal possuem limitantes superiores co-

nhcidos a priori

$$\|f(e_1, \sigma_d, t)\| \leq \rho_1(e_1, \sigma_d, t) \text{ e } \left\| \frac{d}{dt} [f(e_1, \sigma_d, t)] \right\| \leq \rho_2(e_1, \sigma_d, t) \quad (4.14)$$

onde $\rho_1(e_1, \sigma_d, t)$ e $\rho_2(e_1, \sigma_d, t)$ são funções positivas.

(A8) O vetor de perturbações/incertezas e sua derivada temporal possuem limitantes superiores conhecidos a priori

$$\|d(e_1, \sigma_d, t)\| \leq \rho_d(e_1, \sigma_d, t) \text{ e } \left\| \frac{d}{dt} [d(e_1, \sigma_d, t)] \right\| \leq \bar{\rho}_d(e_1, \sigma_d, t) \quad (4.15)$$

onde $\rho_d(e_1, \sigma_d, t)$ e $\bar{\rho}_d(e_1, \sigma_d, t)$ são funções positivas e $\rho_d(e_1, \sigma_d, t)$ é um sinal limitado.

Note de (4.12) que um limitante superior para $g_1(e_1, \sigma_d, t)$ pode ser obtido a partir das Hipóteses (A7) e (A8)

$$\|g_1(e_1, \sigma_d, t)\| \leq 2(\|B\|\rho_1(e_1, \sigma_d, t) + \|D_1\|\rho_d(e_1, \sigma_d, t)) \quad (4.16)$$

Por sua vez, nota-se por (4.13) que um majorante para $\frac{d}{dt} [g_2(e_1, t)]$ requer o conhecimento de um limitante superior para $e_1(t)$, que é um sinal desconhecido.

No entanto, sabe-se por (4.8) que a dinâmica $\dot{e}_1(t) = A_{11}e_1(t)$ é estável, logo $e_1(t)$ se comporta como um sinal filtrado de $D_1d(x, t)$. Associando a Hipótese (A8) à dinâmica de $e_1(t)$, nota-se que, $\forall t \geq 0$, $e_1(t)$ possui um limitante superior dado por

$$\begin{aligned} \|e_1(t)\| &\leq \alpha_1 e^{-\gamma t} \|e_1(0)\| + \alpha \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \|D_d\| \cdot \|d(x, t)\| d\tau \\ &\leq \alpha_1 e^{-\gamma t} \|e_1(0)\| + \alpha \|D_d\| \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \rho_d(x, t) d\tau \\ &\leq \alpha_1 e^{-\gamma t} \|e_1(0)\| + \alpha_2 \|D_d\| \leq \rho \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde α_1 , α_2 , e ρ são constantes positivas limitadas. Em [29], o parâmetro ρ é considerado conhecido e é usado no projeto do monitor de ataques proposto. Note, no entanto, que como $x_1(t)$ descreve os estados não medidos do sistema, sua condição inicial, e consequentemente do erro $e_1(t)$, pode não ser disponível, o que impediria o conhecimento direto de ρ . Para contornar esta limitação, um limitante superior para $e_1(t)$ é obtido através de filtros de aproximação de primeira ordem [16, 61]. O projeto deste filtro pode ser feito através do Lema a seguir, extraído de [16]

Lema 4.1. *Considere um sistema linear e invariante no tempo descrito por*

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada, e $y \in \mathbb{R}^p$ é a saída. Assuma que a matriz A seja Hurwitz. Defina γ_0 como a margem de estabilidade da matriz de transferência $H(s) := C(sI - A)^{-1}B$ e $\gamma := \gamma_0 - \delta_0 > 0$, onde δ_0 é uma constante positiva arbitrária menor que γ_0 . Então, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que a resposta ao impulso $h(t)$ satisfaça

$$\|h(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0$$

e que as seguintes desigualdades sejam válidas, $\forall t \geq t_0 \geq 0$

$$\|h(t) * u(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t} * \|u(t)\|, \quad \|x(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t} * \|u(t)\| + c_2 e^{-(\lambda_0 - \delta_0)(t - t_0)} \|x(t_0)\|$$

onde $\lambda_0 > 0$ é a margem de estabilidade da matriz A . Note que $\gamma_0 = \lambda_0$ para realizações mínimas $\{A, B, C\}$.

Demonstração. ver [16], Lema 1. □

Baseado neste Lema e na Hipótese (A8) é possível obter um limitante superior para a norma de $e_1(t)$ pelo seguinte filtro de aproximação

$$\dot{\hat{e}}_1(t) = -\lambda_f \hat{e}_1(t) + c_f \rho_d(e_1, \sigma_d, t) \quad (4.18)$$

como as matrizes do sistema (4.1) são plenamente conhecidas, λ_f pode ser definido como a margem de estabilidade de A_{11} e $c_f = \|D_1\| + \kappa_f$, onde κ_f é uma constante positiva arbitrária. Considerando o Lema 4.1, a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\|e_1(t)\| \leq \hat{e}_1(t) + |\pi_{e_1}(t)|, \quad |\pi_{e_1}(t)| = c_{e_1} \|x_{e_1}(t_0)\| e^{-\lambda_{e_1}(t - t_0)}$$

onde $c_{e_1}, \lambda_{e_1} > 0 \in \mathbb{R}$ e $x_{e_1} = [e_1^T \hat{e}_1^T]^T \in \mathbb{R}^{n-p+1}$. Logo, infere-se que após um determinado tempo finito baseado nas condições iniciais de $e_1(t_0)$ e $\hat{e}_1(t_0)$, um limitante superior para $\frac{d}{dt} [g_2(e_1, \sigma_d, t)]$ pode ser obtido de (4.18), (4.14), e (4.15)

$$\left\| \frac{d}{dt} [g_2(e_1, t)] \right\| \leq \|A_{21} A_{11}\| \hat{e}_1(t) + \|A_{21} D_1\| \rho_d + \|B\| \rho_2 + \|D_2\| \bar{\rho}_d \quad (4.19)$$

4.2.1 Super-Twisting com Ganhos Variáveis Multivariável por Realimentação de Saída

Com o conhecimento dos limitantes superiores (4.16) e (4.19), é possível definir o monitor de ataques proposto em (4.6) baseado em técnicas de modos deslizantes de ordem superior. Neste trabalho, a estratégia proposta em [16] é considerada. Vale frisar que a mesma já considera o uso do filtro de aproximação de primeira ordem (FOAF) em sua análise, permitindo assim a aplicação direta da mesma para a classe de sistemas ciber-físicos estudada aqui.

Considere o seguinte monitor de ataques

$$\hat{f}(\hat{e}_1, \sigma_d, t) = -B^{-1} \left(-k_1(\hat{e}_1, \sigma_d, t)\phi_1(\sigma_d) - \int_{t_0}^t k_2(\hat{e}_1, \sigma_d, t)\phi_2(\sigma_d)dt \right), \quad (4.20)$$

onde

$$\phi_1(\sigma_d) = \frac{\sigma_d}{\|\sigma_d\|^{\frac{1}{2}}} + k_3\sigma_d, \quad \phi_2(\sigma_d) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_d}{\|\sigma_d\|} + \frac{3k_3}{2} \frac{\sigma_d}{\|\sigma_d\|^{\frac{1}{2}}} + k_3^2\sigma_d \quad (4.21)$$

com $k_3 > 0 \in \mathbb{R}$. Substituindo (4.20) em (4.8), é possível descrever o sistema completo em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_1(t) &= -\lambda_f \hat{e}_1(t) + c_f \rho_d(e_1, \sigma_d, t) \\ \dot{e}_1(t) &= A_{11}e_1(t) + D_1d(x, t) \\ \dot{\sigma}_d(t) &= -k_1(\hat{e}_1, \sigma_d, t)\phi_1(\sigma_d) + z(t) + g_1(e_1, \sigma_d, t) \\ \dot{z}(t) &= -k_2(\hat{e}_1, \sigma_d, t)\phi_2(\sigma_d) + \frac{d}{dt} [g_2(e_1, t)] \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $z = -\int_{t_0}^t k_2(\hat{e}_1, \sigma_d, t)\phi_2(\sigma_d)dt + g_2(e_1, t)$, $\phi_1(\sigma_d)$ e $\phi_2(\sigma_d)$ são definidos em (4.21) enquanto $g_1(e_1, \sigma_d, t)$ e $\frac{d}{dt} [g_2(e_1, t)]$ são definidos em (4.12) e (4.13), respectivamente.

Para o sistema em malha fechada descrito em (4.22), o seguinte teorema apresentado em [16], é adaptado

Teorema 4.1. *Considere o sistema em malha-fechada (4.22), com vetor de estado $X_e = [\hat{e}_1(t)^T \ e_1(t)^T \ \sigma_d(t)^T \ z(t)^T]^T$. Assuma que as Hipóteses (A1)-(A5) são satisfeitas. Além disso, os limitantes superiores (4.16) e (4.19) são conhecidos e satisfazem as seguintes desigualdades*

$$\begin{aligned} \|g_1(e_1, \sigma_d, t)\| &\leq \{\varrho_1(\hat{e}_1, \sigma_d, t) + |\pi_1(t)|\} \|\phi_1(\sigma_d)\| \\ \left\| \frac{d}{dt} [g_2(e_1, t)] \right\| &\leq \{\varrho_2(\hat{e}_1, \sigma_d, t) + |\pi_2(t)|\} \|\phi_2(\sigma_d)\| \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $\varrho_1(\hat{e}_1, \sigma_d, t)$, $\varrho_2(\hat{e}_1, \sigma_d, t) \geq 0$ são funções contínuas conhecidas, enquanto $|\pi_1(t)|$

e $|\pi_2(t)|$ são termos exponencialmente decrescentes com intuito de representar a presença do FOAF na análise de estabilidade. Neste caso, o sistema é globalmente uniformemente assintoticamente estável, e suas trajetórias são atraídas globalmente e em tempo finito para a superfície de deslizamento $\dot{\sigma}_d = \sigma_d = 0$, se os ganhos variáveis forem escolhidos como

$$\begin{aligned} k_1(\hat{e}_1, \sigma_d, t) &= \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [4\epsilon\rho_1 + \rho_2]^2 + 2\epsilon\rho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \rho_1] (\beta + 4\epsilon^2) \right\} \\ k_2(\hat{e}_1, \sigma_d, t) &= \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(\hat{e}_1, \sigma_d, t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde β , δ e ϵ são constantes positivas arbitrárias.

Demonstração. ver [16], Teorema 4.2. □

É válido frisar que as funções $\rho_1(\hat{e}_1, \sigma_d, t)$ e $\rho_2(\hat{e}_1, \sigma_d, t)$ devem ser definidas de acordo com os limitantes superiores (4.16) e (4.19), de modo que as desigualdades apresentadas em (4.23) sejam satisfeitas. Desta forma garante-se que as propriedades do Teorema 4.1 para o sistema em malha fechada (4.22) serão válidas, e, conseqüentemente, um modo deslizante de segunda ordem $\dot{\sigma}_d = \sigma_d = 0$ é alcançado em tempo finito.

Note que durante o deslizamento segue de (4.8) que o monitor de ataques reconstruirá o seguinte sinal

$$\hat{f}(\hat{e}_1, \sigma_d, t) = B^{-1} (A_{21}e_1(t) + D_2d(e_1, \sigma_d, t)) + f(e_1, \sigma_d, t) \quad (4.25)$$

Conseqüentemente, é possível mostrar que o erro de estimação possui um limitante superior dado por

$$\|f(e_1, \sigma_d, t) - \hat{f}(\hat{e}_1, \sigma_d, t)\| \leq \|B^{-1}\| (\|A_{21}\| \|e_1(t)\| + \|D_2\| \|d(e_1, \sigma_d, t)\|) \quad (4.26)$$

como por (4.15) e (4.17) sabe-se que $d(e_1, \sigma_d, t)$ e $e_1(t)$ são sinais limitados, pode-se concluir que $\|f(e_1, \sigma_d, t) - \hat{f}(\hat{e}_1, \sigma_d, t)\|$ também será limitado. Adicionalmente, note que para os casos onde $d(e_1, \sigma_d, t) := 0$, garante-se a convergência exponencial de $\|f(e_1, \sigma_d, t) - \hat{f}(\hat{e}_1, \sigma_d, t)\|$, uma vez que (4.8) assegura que $e_1(t)$ converge exponencialmente.

4.2.2 Algoritmo Super-Twisting com Ganhos Adaptativos Multivariável Generalizado

Visando a ilustrar o comportamento da estratégia adaptativa generalizada proposta na Seção 3.2 para o problema de detecção e reconstrução de ataques cibernéticos, o

seguinte monitor de ataques é proposto.

$$\hat{f}(\sigma_d, t) = -B^{-1} \left(-\alpha(t)\phi_1(\sigma_d) + \Phi(\sigma_d, t) - \int_{t_0}^t \beta(t)\phi_2(\sigma_d)dt \right), \quad (4.27)$$

onde as funções ϕ_1 e ϕ_2 são definidas em (3.48), os ganhos adaptativos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ em (3.26) e o termo $\Phi(\sigma, t)$ em (3.27). Substituindo (4.27) em (4.8), pode-se reescrever o sistema completo em malha fechada como

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= A_{11}e_1(t) + D_1d(x, t) \\ \dot{\sigma}_d(t) &= -\alpha(t)\phi_1(\sigma_d) + z(t) + \Phi(\sigma_d, t) + g_1(e_1, \sigma_d, t) \\ \dot{z}(t) &= -\beta(t)\phi_2(\sigma_d) + \frac{d}{dt} [g_2(e_1, t)] \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $z = -\int_{t_0}^t \beta(t)\phi_2(\sigma_d)dt + g_2(e_1, t)$ enquanto $g_1(e_1, \sigma_d, t)$ e $\frac{d}{dt} [g_2(e_1, t)]$ são definidos em (4.12) e (4.13), respectivamente. Note que para casos onde $g_1(e_1, \sigma_d, t) \equiv 0$ e $\frac{d^2}{dt^2} [g_2(e_1, t)] < g_2^*$, sendo g_2^* um limitante superior constante possivelmente desconhecido, a estratégia adaptativa generalizada proposta no Capítulo 3 pode ser aplicada ao problema de monitoramento de ataques. É possível concluir de (4.11) que, caso $g_1(e_1, \sigma_d, t) \equiv 0$, então $\Delta(e_1, \sigma_d(t), t) = g_2(e_1, t)$. Logo, de (4.13), segue que

$$\frac{d^2}{dt^2} [g_2(e_1, t)] = r_1e_1(t) + r_2d(x, t) + r_3\frac{d}{dt} [d(e_1, 0, t)] + r_4\frac{d^2}{dt^2} [f(e_1, 0, t)] + r_5\frac{d^2}{dt^2} [d(e_1, 0, t)] \quad (4.29)$$

onde $r_1 = A_{21}A_{11}^2$, $r_2 = A_{21}A_{11}D_1$, $r_3 = A_{21}D_1$, $r_4 = B$, e $r_5 = D_2$. Como pela Hipótese (A8), $d(x, t)$ é um sinal limitado, conclui-se de (4.17), que $e_1(t)$ também é. Logo, a limitação de $\frac{d^2}{dt^2} [g_2(e_1, t)]$ é dependente exclusivamente das derivadas temporais de $d(x, t)$ e $f(x, t)$. Para que a técnica proposta nesta dissertação possa ser comparada com o algoritmo VGSTA apresentado na Subseção 4.2.1, uma Hipótese adicional é considerada

(A9) Os sinais $\frac{d}{dt} [d(x, t)]$, $\frac{d^2}{dt^2} [d(x, t)]$, e $\frac{d^2}{dt^2} [f(x, t)]$ são limitados.

É válido frisar que como esta estratégia não depende do conhecimento a priori de limitantes superiores para as perturbações externas/ incertezas no modelo, a Hipótese (A7) não é necessária, assim como os majorantes apresentados na Hipótese (A8). Logo, a estratégia proposta abrange uma nova classe de problemas envolvendo o monitoramento de ciber-ataques.

Assumindo que as Hipóteses (A1)-(A6) e (A8)-(A9) são satisfeitas, verifica-se que as propriedades apresentadas no Teorema 3.3 podem ser aplicadas ao sistema em malha fechada (4.28). Portanto, pode-se assegurar por (4.8) que após o deslizamento ser alcançado em tempo finito, o sinal apresentado em (4.25) será recons-

truído pelo monitor de ataques proposto. Além disso, pode-se concluir por (4.26) que na ausência de distúrbios externos, isto é $d(x, t) \equiv 0$, o vetor de ataques será reconstruído exponencialmente.

Exemplo 4.1: Sistema de potência WECC

Considere o sistema de potência americano WECC apresentado em [33] que, após o processo de redução de Kron [62] assume a seguinte formal simplificada, extraída de [29]

$$\begin{aligned}\dot{\delta}(t) &= \omega(t) \\ M_g \dot{\omega}(t) &= (L_{gl} L_{ll}^{-1} L_{lg} - L_{gg}) \delta(t) - D_g \omega(t) - L_{gl} L_{ll}^{-1} P_\theta + P_\omega\end{aligned}$$

onde δ e $\omega \in \mathbb{R}^3$ são os ângulos e as frequências dos rotores do gerador, respectivamente, P_θ e P_ω são entradas conhecidas, M_g e D_g são matriz diagonais com os coeficientes de inércia e de amortecimento, enquanto as matrizes L_{gl} , L_{ll} , L_{lg} e L_{gg} são submatrizes de uma matriz de Laplace de dimensões apropriadas. Como mencionado anteriormente, um dos objetivos deste capítulo é ilustrar a superioridade das técnicas propostas com relação aos resultados obtidos em [29]. Dessa forma, para fins de implementação, os mesmos valores numéricos considerados na referência citada serão usado neste exemplo. A matriz de saída é dada por

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez que $p = 2$, sabe-se que até dois ataques podem ser detectados/reconstruídos simultaneamente. Para este estudo de caso, o primeiro e o quarto canal serão monitorados, portanto $\bar{B}_f = \bar{C}^T$. Note que, diferente do método apresentado em [29], o estimador aqui proposto reconstrói todos os ataques com um único observador. Usando a seguinte matriz de transformação, o sistema é escrito em sua forma normal (4.3)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As condições iniciais para a planta (4.3) e para o estimador (4.6) são definidas de acordo com [29]:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}^T$$

Para esta simulação, considera-se que o primeiro e o quarto estado são corrompidos por ataques ilimitados dados por

$$f(t) = \left[\frac{1}{2}t^2 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (4.30)$$

respectivamente. Uma vez que, por essência, ciber-ataques são sinais cujo o perfil não é naturalmente conhecido, será considerado somente o conhecimento sobre a limitação de sua segunda derivada temporal, embora nenhum limitante superior seja conhecido a respeito de suas derivadas ou do próprio ataque. Sobre estas condições, percebe-se que a estratégia proposta em [29] e o VGSTA apresentado na Subseção 4.2.1 não podem ser aplicados. Posteriormente outros cenários serão considerados nos quais essas técnicas poderão ser utilizadas. Por sua vez, note que como para esse caso, $d(x, t) \equiv 0$ e $\frac{d^2}{dt^2} [f(t)]$ é um sinal limitado, percebe-se que a Hipótese (A9) é satisfeita. Além disso, como $f(t)$ não depende da variável de deslizamento, de (4.11) segue que $g_1(e_1, \sigma_d, t) \equiv 0$. Portanto, conclui-se que a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada proposta na Seção 3.2 pode ser aplicada ao problema considerado. O sistema em malha fechada (4.28) pode então ser reescrito na seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= A_{11}e_1(t) + D_1d(x, t) \\ \dot{\sigma}_d(t) &= -\alpha(t)\phi_1(\sigma_d) + z(t) + \Phi(\sigma_d, t) \\ \dot{z}(t) &= -\beta(t)\phi_2(\sigma_d) + \dot{f}(t) \end{aligned}$$

onde as funções ϕ_1 e ϕ_2 são definidas em (3.48) e os parâmetros usados em (3.35) para os ganhos fixos do algoritmo são definidos como $\alpha_0 = 2$ e $\beta_0 = 3.5$. Por sua vez, os parâmetros usados na adaptação dos ganhos foram $\gamma = 5$, $l_0 = r_0 = \epsilon = 0.1$, $\tau = 0.01$, $b = c = 2$ e $a = 0.54$. O desempenho da técnica proposta é apresentado a seguir

Como pode-se ver na Figura 4.1, verifica-se que $e_1(t)$ converge exponencialmente para a origem, enquanto, como esperado, comprova-se a convergência em tempo finito de $e_y(t)$. Além disso, verifica-se por (4.26) que o ataque ilimitado é reconstruído exponencialmente através da estratégia adaptativa proposta, como pode ser observado na figura 4.1.

Por sua vez, verifica-se na Figura 4.2 o crescimento dos ganhos α e β , com o intuito de rejeitar a perturbação ilimitada considerada em (4.30). É válido frisar que mesmo em casos onde o algoritmo deva rejeitar perturbações ilimitadas, o modo deslizante de segunda ordem é garantido. Além disso, pode-se observar que, conforme o Teorema 3.4, a partir de um tempo finito $t = 2$ s, o ganho adaptativo $L(t)$ se torna um limitante superior não-conservador da norma de $\dot{f}(t)$.

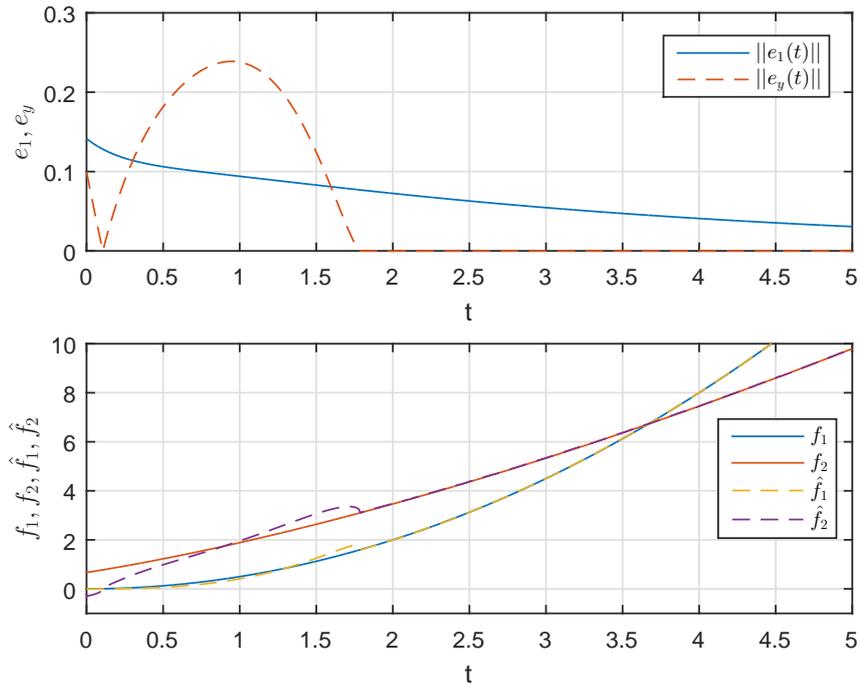


Figura 4.1: Normas dos erros de observação e reconstrução de ataques aos estados com a aplicação do algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável generalizado.

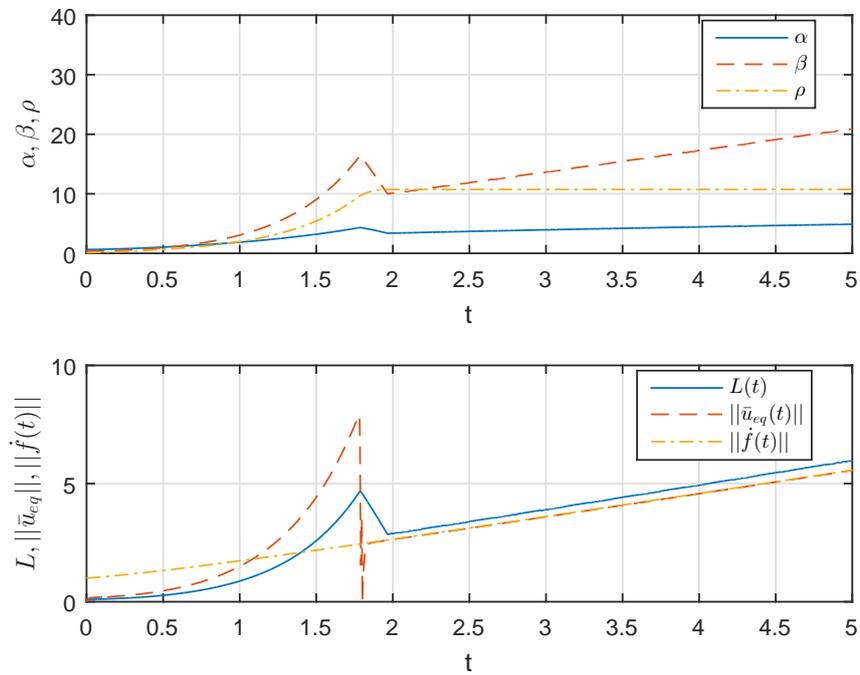


Figura 4.2: Evolução das variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada.

4.3 Detecção e reconstrução de ataques às saídas

Satisfazendo a Hipótese (A6), define-se $\bar{B}_f = 0$. Reescrevendo (4.3) e (4.4), segue que

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t) &= \bar{A}\zeta(t) + \bar{B}_u u(t) + \bar{D}_d d(\zeta, t) \\ y(t) &= \bar{C}\zeta(t) + D_u u(t) + D_f f(\zeta, t),\end{aligned}\tag{4.31}$$

Como neste caso a saída do sistema está contaminada pelo ciber-ataque, propõe-se o seguinte filtro estável de saída [28]

$$\begin{aligned}\dot{x}_f(t) &= A_f x_f(t) + y(t) \\ y_f(t) &= x_f(t)\end{aligned}\tag{4.32}$$

onde $A_f \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é uma matriz Hurwitz de projeto e $x_f(t) \in \mathbb{R}^p$ é um novo estado introduzido no sentido de “ampliar” o sistema. Esta representação estendida é apresentada a seguir

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1(t) &= \bar{A}\omega_1(t) + \bar{B}_u u(t) + \bar{D}_d d(\omega_1, t) \\ \dot{\omega}_2(t) &= \bar{C}\omega_1(t) + A_f \omega_2(t) + D_u u(t) + D_f f(\omega_1, t) \\ y_f(t) &= \omega_2(t)\end{aligned}\tag{4.33}$$

onde $\omega_1(t) = \zeta(t)$ e $\omega_2(t) = x_f(t)$. Para esta nova representação, propõe-se o seguinte estimador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\omega}}_1(t) &= \bar{A}\hat{\omega}_1(t) + \bar{B}_u u(t) \\ \dot{\hat{\omega}}_2(t) &= \bar{C}\hat{\omega}_1(t) + A_f \hat{\omega}_2(t) + D_u u(t) + D_f \hat{f} \\ \hat{y}_f(t) &= \hat{\omega}_2(t),\end{aligned}\tag{4.34}$$

Definindo os erros de estimação como

$$\begin{aligned}e_{\omega_1}(t) &= \omega_1(t) - \hat{\omega}_1(t) \\ e_{\omega_2}(t) &= \omega_2(t) - \hat{\omega}_2(t) \\ e_{y_f}(t) &= y_f(t) - \hat{y}_f(t)\end{aligned}\tag{4.35}$$

sabe-se por (4.33) e (4.34) que a dinâmica dos erros é dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\omega_1}(t) &= \bar{A}e_{\omega_1}(t) + \bar{D}_d d(\omega_1, t) \\ \dot{e}_{\omega_2}(t) &= \bar{C}e_{\omega_1}(t) + D_f \left(f(\omega_1, t) - \hat{f} \right) \\ e_{y_f}(t) &= e_{\omega_2}(t),\end{aligned}\tag{4.36}$$

Comparando (4.36) à (4.8), nota-se que embora a Hipótese (A8) garanta a limitação de $d(\omega_1, t)$, percebe-se que a limitação de $e_{\omega_1}(t)$ depende dos autovalores da matriz \bar{A} .

Uma estratégia semelhante à proposta para o caso de ataques aos estados pode ser obtida caso a seguinte hipótese para ataques à saída, extraída de [28], seja satisfeita

(A10) A matriz \bar{A} , definida em (4.1), é Hurwitz.

Sobre esta hipótese adicional, nota-se que uma dedução semelhante à feita em (4.17) pode ser obtida. Porém, como os limitantes superiores obtidos desta dedução são desconhecidos, os mesmos não serão considerados na estratégia de monitoramento dos ciber-ataques.

Considere agora a variável de deslizamento $\sigma_s(t) = e_{y_f}(t)$. Logo, por (4.36) sabe-se que a dinâmica de $\sigma_s(t)$ é dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_{\omega_1}(t) &= \bar{A}e_{\omega_1}(t) + \bar{D}_d d(\omega_1, t) \\ \dot{\sigma}_s(t) &= -\bar{D}_f \hat{f} + \bar{\Delta}(e_{\omega_1}, t)\end{aligned}\tag{4.37}$$

com

$$\bar{\Delta}(e_{\omega_1}, t) = \bar{C}e_{\omega_1}(t) + D_f f(\omega_1, t)\tag{4.38}$$

Assim como em (4.10), $\bar{\Delta}(e_{\omega_1}, t)$ será interpretado como uma perturbação não-linear, embora possa conter ciber-ataques. Da mesma forma, note que (4.38) pode ser reescrito como

$$\bar{\Delta}(e_{\omega_1}, t) = \bar{g}_1(e_{\omega_1}, \sigma_s, t) + \bar{g}_2(e_{\omega_1}, t)$$

onde

$$\bar{g}_1(e_{\omega_1}, \sigma_s, t) = 0 \quad \text{e} \quad \bar{g}_2(e_{\omega_1}, t) = \bar{\Delta}(e_{\omega_1}, t)\tag{4.39}$$

Note que o uso do sinal filtrado da saída garante que os ciber-ataques e as possíveis perturbações externas não tenham acesso à este sinal. Logo, o vetor $\bar{\Delta}(e_{\omega_1}, t)$ se torna independente da variável de deslizamento, como pode-se verificar em (4.39). Note ainda que a derivada temporal de $\bar{g}_2(e_{\omega_1}, t) = \bar{\Delta}(e_{\omega_1}, t)$ é dada por

$$\frac{d}{dt} [\bar{g}_2(e_{\omega_1}, t)] = \bar{C}\bar{A}e_{\omega_1} + \bar{C}\bar{D}_d d(\omega_1, t) + D_f \frac{d}{dt} [f(\omega_1, t)]\tag{4.40}$$

Assim como em (4.13), note que um limitante superior para (4.40) requer algum conhecimento sobre um limitante superior de $e_{\omega_1}(t)$. Como \bar{A} e \bar{D}_d são matrizes conhecidas, neste trabalho propõe-se a aplicação do Filtro de Aproximação de Primeira Ordem apresentado a partir do Lema 4.1

$$\dot{\hat{e}}_{\omega_1}(t) = -\bar{\lambda}_f \hat{e}_{\omega_1}(t) + \bar{c}_f \rho_d(\omega_1, t)\tag{4.41}$$

onde $\rho_d(\omega_1, t)$ é um limitante superior de $d(\omega_1, t)$ obtido pela Hipótese (A8). Por sua vez, como a Hipótese (A10) é satisfeita, $\bar{\lambda}_f$ pode ser definida como a margem de estabilidade de \bar{A} , enquanto \bar{c}_f pode ser projetado como $\|\bar{D}_d\| + \kappa_f$, onde κ_f é uma constante positiva arbitrária. Baseado no Lema 4.1, sabe-se que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\|e_{\omega_1}(t)\| \leq \hat{e}_{\omega_1}(t) + |\pi_{\omega_1}(t)|, \quad |\pi_{\omega_1}(t)| = c_{\omega_1} \|x_{\omega_1}(t_0)\| e^{-\lambda_{\omega_1}(t-t_0)}$$

com $c_{\omega_1}, \lambda_{\omega_1} > 0 \in \mathbb{R}$ e $x_{\omega_1} = [e_{\omega_1}(t)^T \hat{e}_{\omega_1}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. Portanto, garante-se que após um determinado tempo finito t_{fin} associado às condições iniciais de $e_{\omega_1}(t_0)$ e $\hat{e}_{\omega_1}(t_0)$, $\hat{e}_{\omega_1}(t) \geq \|e_{\omega_1}(t)\|$, $\forall t \geq t_{fin}$. Logo, por (4.40) e pelas Hipóteses (A7) e (A8) sabe-se que um limitante superior para $\dot{\Delta}(\omega_1, t) \forall t \geq t_{fin}$ é dado por

$$\left\| \frac{d}{dt} [\bar{g}_2(e_{\omega_1}, t)] \right\| \leq \|\bar{C}\bar{A}\| \hat{e}_{\omega_1}(t) + \|\bar{C}\bar{D}_d\| \rho_d(\omega_1, t) + \|D_f\| \rho_2(\omega_1, t) \quad (4.42)$$

Assim como na Subseção 4.2.1, note que como $\bar{g}_1(e_{\omega_1}, \sigma_s, t) = 0$ e $\frac{d}{dt} [\bar{g}_2(e_{\omega_1}, t)]$ possui um limitante superior conhecido, o esquema de monitoramento para ataques ao estado proposto em (4.20) pode ser ajustado para atender ao problema em questão. Para tal, considere o seguinte monitor de ataques à saída

$$\hat{f}(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) = -D_f^{-1} \left(-k_1(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) \phi_1(\sigma_s) - \int_{t_0}^t k_2(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) \phi_2(\sigma_s) dt \right), \quad (4.43)$$

onde $\phi_1(\sigma_s)$ e $\phi_2(\sigma_s)$ são definidos em (4.21). Substituindo (4.43) em (4.37), é possível descrever o sistema completo em malha fechada como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_{\omega_1}(t) &= -\bar{\lambda}_f \hat{e}_{\omega_1}(t) + \bar{c}_f \rho_d(\omega_1, t) \\ \dot{e}_{\omega_1}(t) &= \bar{A} e_{\omega_1}(t) + \bar{D}_d d(\omega_1, t) \\ \dot{\sigma}_s(t) &= -k_1(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) \phi_1(\sigma_s) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= -k_2(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) \phi_2(\sigma_s) + \frac{d}{dt} [\bar{g}_2(\omega_1, t)] \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde $z(t) = -\int_{t_0}^t k_2(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) \phi_2(\sigma_s) dt + \bar{g}_2(e_{\omega_1}, t)$.

Note que definindo $\varrho_1(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) = 0$ e $\varrho_2(\hat{e}_{\omega_1}, t)$ de acordo com a relação imposta em (4.23), as propriedades do Teorema 4.1 se tornam válidas para o sistema em malha fechada (4.44).

Por sua vez, baseando-se no monitor de ataques ao estado baseado na estratégia adaptativa de camada dupla generalizada (4.27), percebe-se que uma das condições necessárias para a sua implementação neste caso é satisfeita naturalmente, uma vez que de (4.39), segue que $\bar{g}_1(e_{\omega_1}, \sigma_s, t) \equiv 0$. Além disso, como a Hipótese (A8) garante que $d(\omega_1, t)$ é um sinal limitado, pode-se mostrar de (4.37) que e_{ω_1} também

é limitado. Portanto, considerando a Hipótese (A9) e a igualdade (4.40), conclui-se que o sinal $\frac{d^2}{dt^2} [\bar{g}_2(e_{\omega_1}, t)]$ é limitado e conseqüentemente a estratégia adaptativa proposta pode ser aplicada ao problema de monitoramento de ataques à saída. Para tal, considere o seguinte monitor, baseado na estratégia adaptativa de camada dupla generalizada

$$\hat{f}(\sigma_s, t) = -D_f^{-1} \left(-\alpha(t)\phi_1(\sigma_s) + \Phi(\sigma_s, t) - \int_{t_0}^t \beta(t)\phi_2(\sigma_s)dt \right), \quad (4.45)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são definidos em (3.48), os ganhos $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ em (3.26) e o termo Φ em (3.27). Substituindo (4.45) em (4.37), o sistema em malha fechada pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\omega_1}(t) &= \bar{A}e_{\omega_1}(t) + \bar{D}_d d(\omega_1, t) \\ \dot{\sigma}_s(t) &= -\alpha(t)\phi_1(\sigma_s) + z(t) + \Phi(\sigma_s, t) \\ \dot{z}(t) &= -\beta(t)\phi_2(\sigma_s) + \frac{d}{dt} [\bar{g}_2(\omega_1, t)] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Logo, pelo Teorema 3.3 conclui-se que um modo deslizante de segunda ordem $\sigma_s(t) = \dot{\sigma}_s(t) = 0$ é alcançado em tempo finito. Além disso, baseando-se na estratégia adaptativa de camada dupla uma escolha não conservadora dos ganhos é obtida.

Quando o modo deslizante é alcançado, nota-se por (4.37) que $\hat{f}(e_{\omega_1}, \sigma_s, t)$ reconstrói o seguinte sinal

$$\hat{f}(e_{\omega_1}, \sigma_s, t) = f(\omega_1, t) + D_f^{-1} \bar{C} e_{\omega_1}(t)$$

Conseqüentemente, infere-se que o erro de monitoramento possui um limitante superior dado por

$$\left\| f(e_{\omega_1, \sigma_s, t}) - \hat{f}(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) \right\| \leq \|D_f^{-1} \bar{C}\| \|e_{\omega_1}(t)\| \quad (4.47)$$

Como por (4.37) sabe-se que $e_{\omega_1}(t)$ é um sinal limitado, garante-se por (4.47) que o erro de monitoramento é limitado. Note ainda que para $d(\omega_1, t) := 0$, a Hipótese (A10) garante a convergência exponencial de $e_{\omega_1}(t)$ e, conseqüentemente, da norma do erro de monitoramento $\left\| f(e_{\omega_1}, \sigma_s, t) - \hat{f}(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) \right\|$.

É válido observar que, diferente de [29], a abordagem apresentada neste capítulo baseada no VGSTA para o monitoramento de ataques à saída não requer nenhum conhecimento sobre limitantes superiores para os estados não medidos, $\omega_1(t)$, e para os ciber-ataques. Além disso, nota-se que a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada proposta na Seção 3.2 requer ainda menos informações, visto que os limitantes superiores dos distúrbios não são necessários. Logo, ambas as estratégias

permitem abranger uma classe mais ampla de problemas de monitoramento de ataques em sistemas ciber-físicos. Outra diferença em desempenho está relacionada ao erro de monitoramento em (4.47), visto que a abordagem proposta em [29] garante apenas sua limitação, apesar da ausência de perturbações externas.

Visando a tornar a apresentação desta técnica didática, a simulação referente ao monitoramento de ataque à saída será apresentado junto ao compensador para essa classe de ataques, proposto na Seção 4.5. Entretanto, é importante frisar que a técnica apresentada em [29] não poderá ser comparada com as estratégias propostas nesta Subseção, uma vez que além do trabalho citado não ter proposto um compensador de ataques à saída, o estimador de estados apresentado possui erros em sua formulação que impossibilitam o monitoramento dessa classe de ataques.

4.4 Compensação de ataques aos estados

Uma vez que o ciber-ataque foi reconstruído pelos monitores propostos na Seção (4.2), sua estimação pode ser aplicada no problema de rastreamento de saída, de modo a rejeitar o seu efeito no desempenho do sistema. Para este fim, neste trabalho serão propostos controladores baseados no super-twisting multivariável com ganhos variáveis, proposto em [16] e no super-twisting multivariável generalizado com ganhos adaptativos, proposto na Seção 3.2.

É importante frisar, no entanto, que a técnica escolhida requer que o sistema possua, no mínimo, grau relativo $n^* = 1$. Isto é, a matriz de transferência direta em (4.1), D_u , deve ser igual a zero. Note que esta é uma condição necessária apenas para a compensação dos ataques, sendo explorada em outros trabalhos [28, 29].

Sobre esta condição, (4.5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u + D_1d(x, t) \\ \dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u + Bf(x, t) + D_2d(x, t) \\ y(t) &= x_2(t),\end{aligned}\tag{4.48}$$

Note que com esta modificação, o sistema passa a possuir grau relativo unitário. Considere agora o seguinte erro de rastreamento

$$e_d(t) = y(t) - y_d(t)\tag{4.49}$$

sendo $y_d(t) \in \mathbb{R}^p$ um sinal de referência gerado pelo seguinte modelo

$$\dot{y}_d(t) = A_m y_d(t) + K_m r(t)\tag{4.50}$$

onde A_m é uma matriz de projeto Hurwitz e $r(t)$ é uma entrada de referência limitada

e contínua por partes. Baseado em (4.7), note que (4.49) pode ser reescrito como

$$e_d(t) = \sigma_d(t) + \epsilon_t(t) \quad (4.51)$$

onde $\epsilon_t = \hat{y}(t) - y_d(t)$. Uma vez que para ambas as técnicas utilizadas no monitoramento de ataques aos estados a convergência em tempo finito de $\sigma_d(t)$ é garantida, note que a convergência de $e_d(t)$ passa a ser definida por $\epsilon_t(t)$. Sua dinâmica é dada por

$$\dot{\epsilon}_t(t) = A_{21}\hat{x}_1(t) + B_2u + B\hat{f}(x, t) + A_{22}y(t) - \dot{y}_d(t) \quad (4.52)$$

É válido frisar que o sistema apresentado em (4.1) não possui necessariamente um número de entradas igual ou superior ao de saídas, isto é $m \geq p$. No entanto, verifica-se pela Hipótese (A3) que B_2 possui todas as colunas linearmente independentes. Portanto, considere a seguinte variável de deslizamento

$$\sigma_c(t) = G\epsilon_t(t) \quad (4.53)$$

onde a matriz $G \in \mathbb{R}^{m \times p}$ é escolhida de tal modo que a matriz $GB_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ possua posto completo. Logo, sabe-se de (4.52) que a dinâmica de $\sigma_c(t)$ é dada por

$$\dot{\sigma}_c(t) = \Psi(t) + GB_2u \quad (4.54)$$

sendo $\Psi(t) = G \left(A_{21}\hat{x}_1(t) + B\hat{f}(x, t) + A_{22}y(t) - \dot{y}_d(t) \right)$. Como o sinal $\Psi(t)$ é composto apenas por sinais conhecidos, considere o seguinte sinal de controle

$$u(t) = (GB_2)^{-1} (-\Psi(t) + \bar{u}) \quad (4.55)$$

Substituindo (4.55) em (4.54), segue que a dinâmica de $\sigma_c(t)$ passa a ser dada por

$$\dot{\sigma}_c(t) = \bar{u}$$

Definindo

$$\bar{u}(\sigma_c, t) = -k_1(\sigma_c, t)\phi_1(\sigma_c) - \int_{t_0}^t k_2(\sigma_c, t)\phi_2(\sigma_c)dt, \quad (4.56)$$

nota-se que a dinâmica em malha fechada de $\sigma_c(t)$ é similar a dinâmica de $\sigma_d(t)$ apresentada em (4.22), com $g_1(\sigma_c, t) = g_2(\sigma_c, t) = 0$. Portanto, pelo Teorema 4.1, garante-se que a superfície $\sigma_c(t) = \dot{\sigma}_c(t) = 0$ é alcançada em tempo finito se os ganhos forem projetados de acordo com (4.24), com $\varrho_1(\sigma_c, t) = \varrho_2(\sigma_c, t) = 0$. De modo similar, pode-se concluir que a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada,

proposta no Capítulo 3 também pode ser aplicada através da seguinte lei de controle

$$\bar{u}(\sigma_c, t) = -\alpha(t)\phi_1(\sigma_c) + \Phi(\sigma_c, t) - \int_{t_0}^t \beta(t)\phi_2(\sigma_c)dt$$

Neste caso, embora o sistema não apresente distúrbios, a técnica adaptativa proposta se destaca por ajustar os ganhos do controlador de modo a obter um sinal de controle menos conservador, enquanto garante o deslizamento de segunda ordem em tempo finito.

Por sua vez, o Método 3 extraído de [29] considera um controlador baseado em modos deslizantes de primeira ordem, dado por

$$\bar{u}(\sigma_c, t) = -\rho_f \frac{\sigma_c(t)}{\|\sigma_c(t)\|}, \quad (4.57)$$

onde $\rho_f > 0 \in \mathbb{R}$.

É válido frisar que caso G seja definido com posto completo, a aplicação dos controladores apresentados acima em sistemas quadrados, isto é, $m = p$, garante por (4.53) que $\epsilon_t(t) = 0$ sempre que $\sigma_c(t) = 0$. Note, no entanto, que embora o controlador (4.57) garanta a convergência em tempo finito de $\sigma_c(t)$ para zero, o erro de rastreamento (4.51) pode não convergir para zero, visto que o monitor de ataques apresentado em [29] garante somente a limitação de σ_d . Logo, o rastreamento em tempo finito de $y_d(t)$ só é alcançado com os controladores baseados no VGSTA e na estratégia adaptativa de camada dupla generalizada. O esquema de estimação e compensação de ataques aos estados apresentado acima é representado no diagrama de blocos descrito na Figura 4.3.

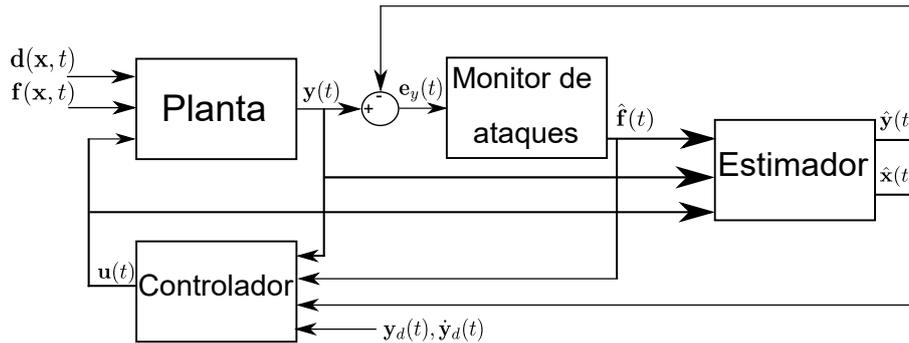


Figura 4.3: Diagrama de blocos com a reconstrução e compensação de ataques aos estados.

Exemplo 4.2: IEEE 39 bus power system

Considere o sistema de potência IEEE 39 bus power system apresentado em [63], [64] com dez geradores. Através da redução de Kron [62], uma representação linear no espaço de estados pode ser obtida. Neste exemplo, as simplificações adicionais

e os valores numéricos adotados em [29] são considerados. Além disso, a matriz \bar{B}_f em (4.1) é definida como $\bar{B}_f = [0_{10} \quad I_{10}]^T$. O sistema pode ser expresso na forma (4.1) com

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0_{10} & I_{10} \\ -0.1 \cdot I_{10} & -I_{10} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_u = \begin{bmatrix} 0_{10} \\ 10 \cdot I_{10} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [I_{10} \quad I_{10}]$$

Note que neste caso a matriz B_2 é quadrada e não singular. Portanto, verifica-se por (4.53) que a matriz G pode ser definida como a matriz identidade.

Assim como em [29], considera-se que o primeiro estado de (4.5) é corrompido por um ataque na forma $f(x, t) = \frac{1}{2} \text{sen}(0.2\pi t)(|x_{11}| + 1)$, iniciando-se em $t = 2$ s. O objetivo da lei de controle será, portanto, rastrear o sinal de referência $y_d = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 0_{1 \times 7}]^T$ enquanto rejeita o efeito do ataque considerado.

Em relação à reconstrução do ataque, três técnicas foram consideradas para o monitoramento do mesmo: a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada proposta no Capítulo 3, o VGSTA apresentado neste capítulo e a estratégia proposta em [29], que será denominada deste ponto em diante como Método 3. Os limitantes superiores apresentados em (4.17) e (4.14) são definidos como

$$\rho = 2.5 \quad \rho_1(x, t) = 1.75 \quad \rho_2(x, t) = 2$$

Note que a estratégia adaptativa proposta não requer o conhecimento a priori desses limitantes, visto que depende somente do conhecimento sobre a limitação de suas derivadas, conforme apresentado na Hipótese (A9).

Por sua vez, as condições iniciais para a planta (4.3) e o estimador (4.6) são escolhidas de acordo com [29]

$$x(0) = \begin{bmatrix} -0.5 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 5} & 0.25 \cdot \mathbf{1}_{1 \times 5} \end{bmatrix}^T, \quad \hat{x}(0) = \mathbf{0}_{10 \times 1}$$

Os parâmetros usados para a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada foram os mesmo usados no Exemplo 4.1, enquanto os parâmetros do VGSTA foram definidos como $\beta = \delta = \epsilon = 2$, e

$$\varrho_1(\hat{e}_1, \sigma_d, t) \equiv 0, \quad \varrho_2(\hat{e}_1, \sigma_d, t) = 2 (\|A_{21}A_{11}\|\hat{e}_1(t) + \|B\|\rho_2)$$

Por sua vez, os parâmetros para o Método 3 foram $k = 1.1$, $\gamma = 1.1$, $\eta = 0.2$ e $\epsilon = 0.1$. Os resultados referentes aos erros de estimação e de monitoramento para as técnicas em comparação são apresentados nas figuras 4.4 e 4.5.

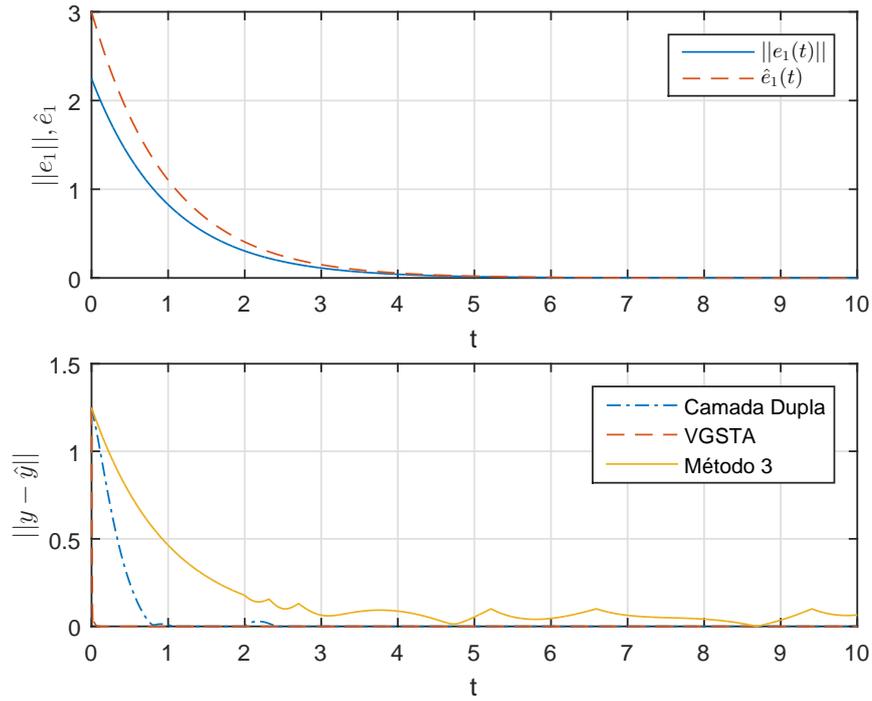


Figura 4.4: Desempenho do FOAF e as normas dos erros de observação $e_1(t)$ e $e_2(t)$.

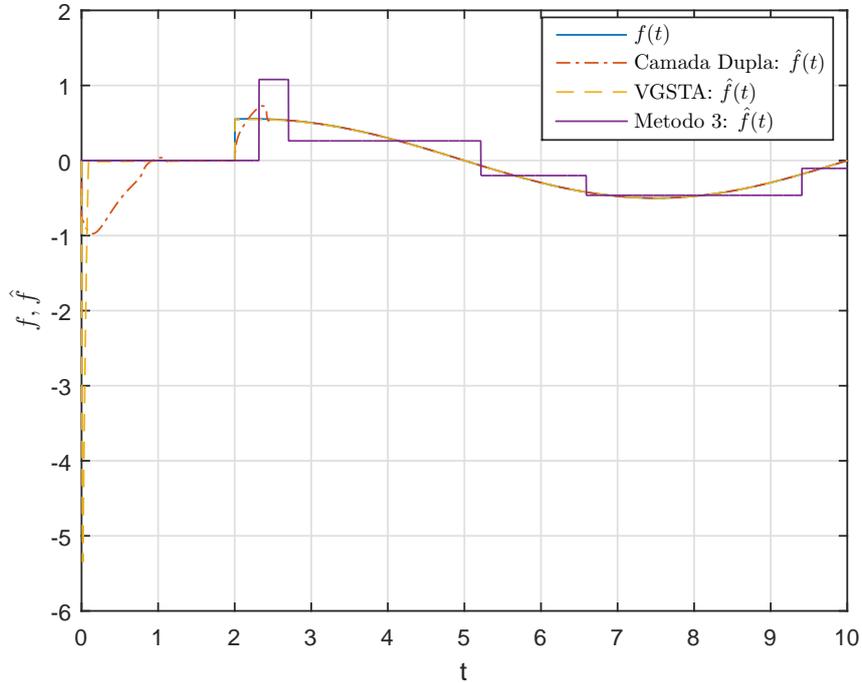


Figura 4.5: Reconstrução dos ataques aos estados através das técnicas em comparação.

Pode-se observar através da Figura [4.4](#) que a convergência em tempo finito para $e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ é obtida com a adoção da estratégia adaptativa proposta e com

o VGSTA, enquanto o Método 3 garante apenas sua limitação. Após este tempo finito, observa-se na Figura 4.5 que o erro de monitoramento converge exponencialmente para zero somente para a estratégia adaptativa e para o VGSTA. Os ganhos adaptativos usados no esquema de camada dupla são apresentados na Figura 4.6.

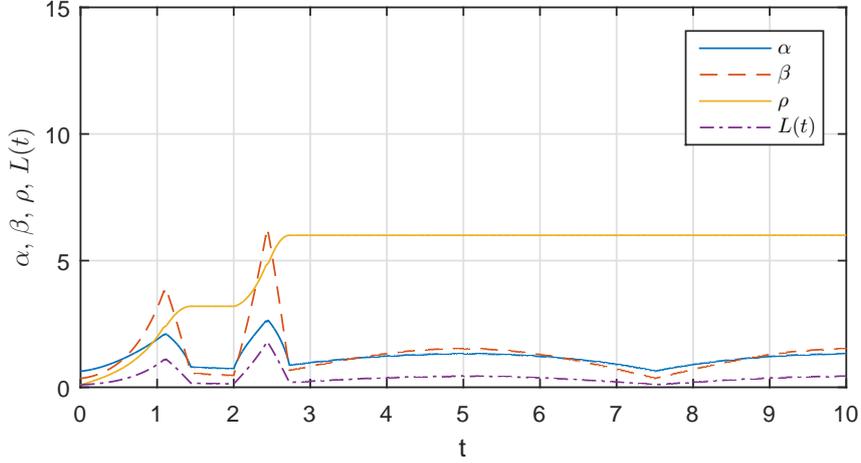


Figura 4.6: Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada para o problema de reconstrução de ataques aos estados.

Para este exemplo, a compensação ao ataque reconstruído por cada um dos três métodos será baseado na mesma técnica usada para a estimação, isto é, a compensação ao ataque reconstruído pelo VGSTA será feita pelo controlador baseado em VGSTA proposto em (4.56) e assim por diante.

Os parâmetros para o controlador baseado na estratégia adaptativa proposta são definidos como $\alpha_0 = 2$ e $\beta_0 = 3.5$, com os parâmetros da estratégia adaptativa dados por $\gamma = 5$, $l_0 = r_0 = \epsilon = 0.1$, $\tau = 0.01$, $b = c = 2$ e $a = 0.54$. Por sua vez, os parâmetros do controlador VGSTA são definidos de acordo com o Teorema 4.1, com $\beta = \delta = \epsilon = 2$, enquanto a modulação do controlador (4.57) para o Método 3 foi definido como $\rho_f = 1$. Os resultados são apresentados nas Figuras 4.7 e 4.8.

Pode-se observar através da Figura 4.7 que ambos os controladores baseados no Super-Twisting produzem um sinal de controle contínuo, e, portanto, menos propenso ao *chattering*. No entanto, fica visível o efeito conservador que o uso de limitantes superiores para os distúrbios provocam sobre a ação de controle. O uso da estratégia adaptativa permitiu que um sinal de controle de amplitude significativamente menor garantisse um desempenho similar no problema de rastreamento de saída, como pode-se ver na Figura 4.8.

Comparando as Figuras 4.7 e 4.8, nota-se que o sinal de controle gerado pelo Método 3 é descontínuo, visto que se baseia em técnicas de modo deslizante convencional. Embora os sinais de controle baseados na estratégia adaptativa e no Método

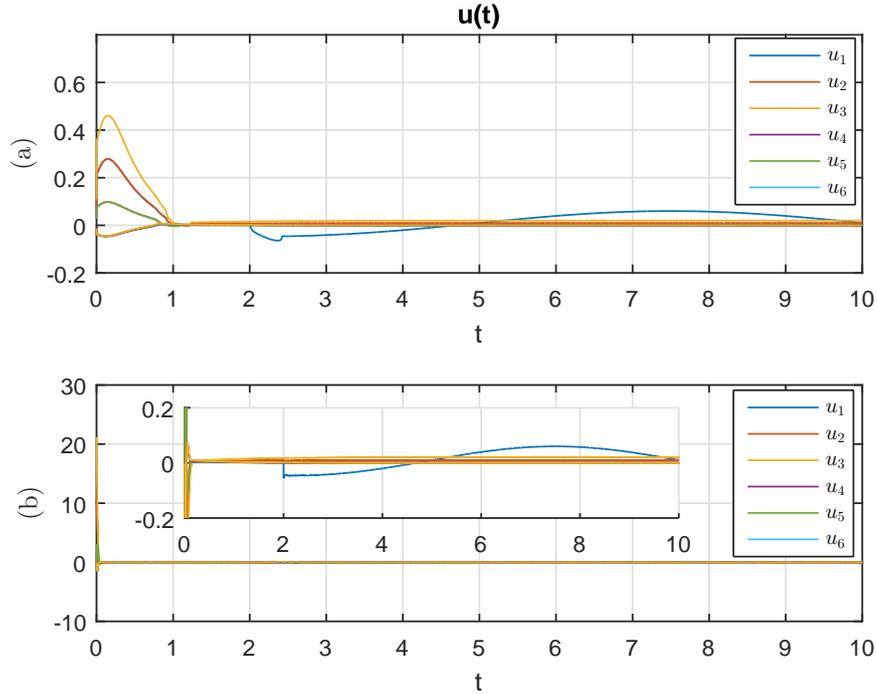


Figura 4.7: Sinais de controle contínuos projetados de acordo com: (a) Algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável; (b) VGSTA.

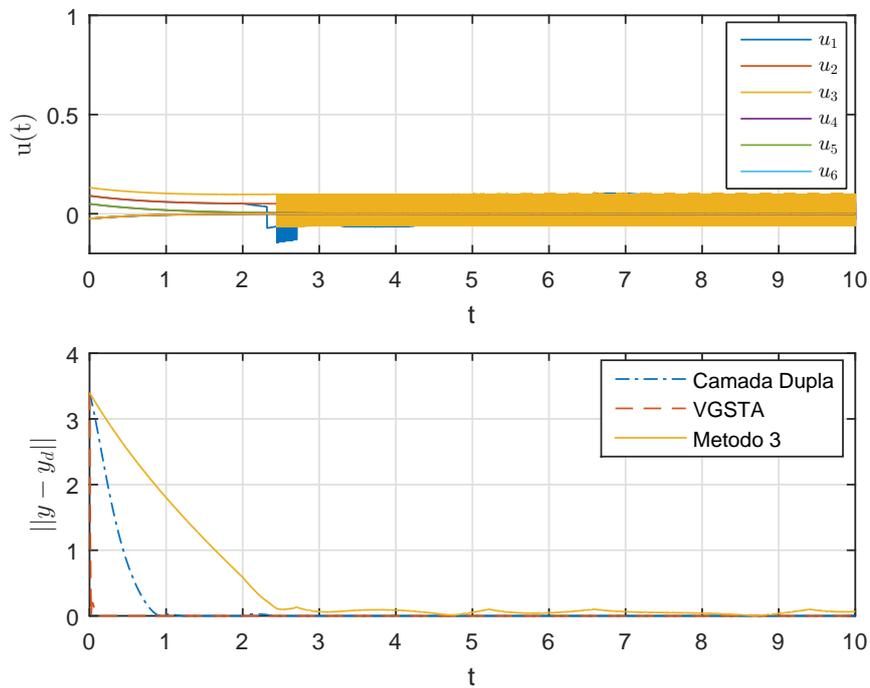


Figura 4.8: Sinal de controle baseado no Método 3 e a norma do erro de rastreamento para cada técnica.

3 apresentem amplitude similares, os efeitos do uso de um sinal descontínuo podem ser prejudiciais ao desempenho do sistema, como já discutido no Capítulo 2. Por

fim pode-se observar que embora o Método 3 possa garantir que ϵ_t convirja para zero em tempo finito, por (4.51) segue que e_d pode não convergir para a origem, uma vez o monitor de ataques proposto em [29] garante somente a limitação de $e_y(t)$. Por sua vez, infere-se que ambos os controladores propostos neste Capítulo garantem o rastreamento em tempo finito do sinal de referência y_d , bem como do erro de estimação e_y .

É válido destacar que a presença de perturbações externas foi desconsiderada no exemplo apresentado para que a reconstrução exponencial do ataque fosse observada. Seus efeitos para fins de estimação e compensação serão apresentados em exemplos posteriores.

4.5 Compensação de ataques à saída

O objetivo proposto na seção anterior será aqui estudado para ataques à saída. Como neste caso a saída está contaminada pelo ciber-ataque, usá-la diretamente na definição do erro de rastreamento, como foi feito em (4.49), exigirá o conhecimento a priori da segunda derivada temporal do ataque em questão. Para contornar esta restrição, considere o seguinte erro, baseado na saída do sistema filtrada por (4.32)

$$e_s(t) = y_f(t) - y_{f_d}(t) \quad (4.58)$$

sendo $y_{f_d}(t) \in \mathbb{R}^p$ um sinal de referência para $y_f(t)$ cuja dinâmica é dada por

$$\dot{y}_{f_d}(t) = A_f y_f(t) + y_d(t) \quad (4.59)$$

onde $y_d(t) \in \mathbb{R}^p$ é um sinal de referência para a saída real do sistema, $y(t)$. Por sua vez, nota-se por (4.50) e (4.59) que a dinâmica de $e_s(t)$ pode ser escrita como

$$\dot{e}_s(t) = y(t) - y_d(t)$$

Portanto, infere-se que uma estratégia de controle capaz de garantir que a superfície $e_s(t) = \dot{e}_s(t) = 0$ seja alcançada, garantirá o rastreamento da saída do sistema para um determinado sinal de referência. Para tal, note que (4.58) pode ser reescrito como

$$e_s(t) = \sigma_s(t) + \epsilon_f(t) \quad (4.60)$$

onde $\epsilon_f(t) = \hat{y}_f(t) - y_{f_d}(t)$. Como o monitor proposto em (4.43) garante que a superfície $\sigma_s(t) = \dot{\sigma}_s(t) = 0$ é alcançada em tempo finito, observa-se que após este tempo, a convergência de $e_s(t)$ será exclusivamente dependente de $\epsilon_f(t)$, cuja

dinâmica é dada por

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_f(t) &= \bar{C}\hat{\omega}_1(t) + A_f y_f(t) + D_u u + D_f \hat{f}(e_{\omega_1}, \sigma_s, t) - \dot{y}_d(t) \\ &= \bar{C}\hat{\omega}_1(t) + D_f \hat{f}(e_{\omega_1}, \sigma_s, t) - y_d(t) + D_u u\end{aligned}\quad (4.61)$$

Note que a variável de controle está associada à matriz de transferência direta do sistema original, D_u . Como não há garantia de que suas colunas são linearmente independentes, a seguinte hipótese é considerada para o projeto do controlador para ataques à saída.

(A11) A matriz de transferência direta, $D_u \in \mathbb{R}^{p \times m}$ descrita em (4.1), possui colunas linearmente independentes.

Baseado nessa hipótese, considere a seguinte variável de deslizamento

$$\sigma_f(t) = H\epsilon_f(t) \quad (4.62)$$

onde a matriz $H \in \mathbb{R}^{m \times p}$ é definida tal que $HD_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seja não singular. Portanto, por (4.61), sabe-se que a dinâmica de $\sigma_f(t)$ é dada por

$$\dot{\sigma}_f(t) = \Xi(t) + HD_u u \quad (4.63)$$

sendo $\Xi(t) = H \left(\bar{C}\hat{\omega}_1(t) + D_f \hat{f}(e_{\omega_1}, \sigma_s, t) - y_d(t) \right)$. Uma vez que $\Xi(t)$ é um sinal conhecido, considere o seguinte sinal de controle

$$u(t) = (HD_u)^{-1} (-\Xi(t) + \bar{u}) \quad (4.64)$$

Substituindo (4.64) em (4.63) segue que

$$\dot{\sigma}_f(t) = \bar{u}$$

Definindo

$$\bar{u}(\sigma_f, t) = -k_1(\sigma_f, t)\phi_1(\sigma_f) - \int_{t_0}^t k_2(\sigma_f, t)\phi_2(\sigma_f)dt \quad (4.65)$$

nota-se que a dinâmica em malha fechada de $\sigma_f(t)$ é igual a dinâmica de $\sigma_c(t)$. Portanto, pelo Teorema 4.1, garante-se que a superfície $\sigma_f(t) = \dot{\sigma}_f(t) = 0$ é alcançada em tempo finito se os ganhos forem definidos como em (4.24), com $\varrho_1(\sigma_f, t) = \varrho_2(\sigma_f, t) = 0$. De modo similar ao proposto em (4.4), um compensador baseado na estratégia adaptativa de camada dupla generalizada também pode ser proposto

$$\bar{u}(\sigma_f, t) = -\alpha(t)\phi_1(\sigma_f) + \Phi(\sigma_f, t) - \int_{t_0}^t \beta(t)\phi_2(\sigma_f)dt \quad (4.66)$$

onde, como a dinâmica de $\sigma_f(t)$ e $\sigma_c(t)$ são iguais, garante-se pelo Teorema 3.3 que um modo deslizante de segunda ordem $\sigma_f(t) = \dot{\sigma}_f(t) = 0$ surge em tempo finito, com uma escolha dos ganhos baseadas na estratégia adaptativa de camada dupla generalizada, apresentada no Teorema 3.4.

Note ainda que a aplicação de ambas as estratégias em sistemas quadrados, isto é $m = p$, garante por (4.62) que a superfície $\epsilon_f = \dot{\epsilon}_f = 0$ seja alcançada em tempo finito com o deslizamento de $\sigma_f(t)$. Portanto, pelos resultados acima obtidos, infere-se que a superfície $e_s(t) = \dot{e}_s(t) = 0$ é alcançada em tempo finito, garantindo assim o rastreamento da saída do sistema (4.1) para ataques à saída. A estratégia descrita acima é representada no diagrama de blocos presente na Figura 4.9

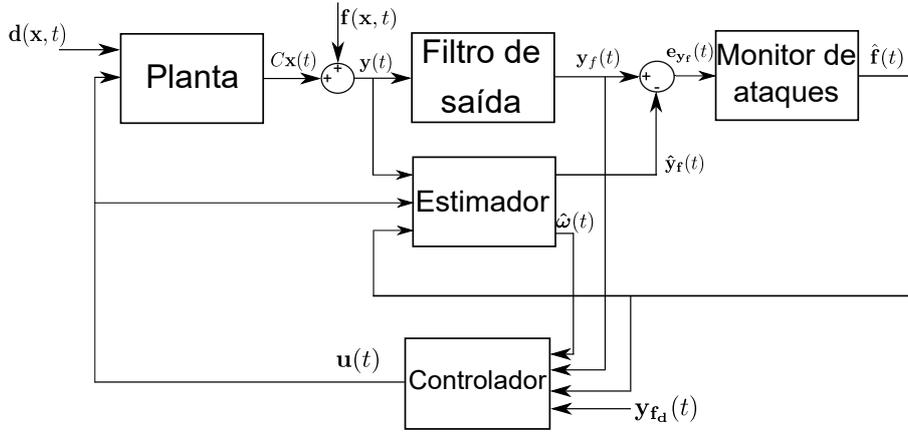


Figura 4.9: Diagrama de blocos com a reconstrução e compensação de ataques à saída.

Exemplo 4.3. Considere o seguinte sistema ciber-físico multivariável sujeito à ataques de saída representado na forma (4.1) com

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_u = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad D_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Visando a detectar ataques em ambos os canais de saída, a matriz D_f será definida como $D_f = I_2$. Aplicando o filtro estável proposto em (4.32), obtém-se o sistema aumentado (4.33), com a dinâmica do filtro definida por

$$\dot{x}_f = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}}_{A_f} x_f + y(t), \quad y_f = x_f$$

Como D_u é uma matriz quadrada de posto completo, conclui-se por (4.62) que a

matriz H pode ser definida como sua inversa, isto é, a própria matriz identidade para este caso.

Será considerado que ambos os canais da saída são corrompidos por ataques senoidais começando em $t = 0$ s. O vetor de ataque é dado por $f(t) = [\sin(t) \cos(t)]^T$. Além disso, considera-se a presença de uma perturbação limitada $\bar{d}(t) = [e^{-t} s(t) 0 0]^T$, onde $s(t)$ é um sinal com o formato "dente de serra", conforme apresentado na Figura 4.10. Note que embora sua derivada temporal seja uma função descontínua, ainda é limitada, e, portanto satisfaz a Hipótese (A8). Quanto à aplicação do monitor baseado na estratégia adaptativa, proposta na Seção 4.3, note que a limitação de $\frac{d^2}{dt^2}[\bar{g}_2(e_{\omega_1}, t)]$ também é assegurada.

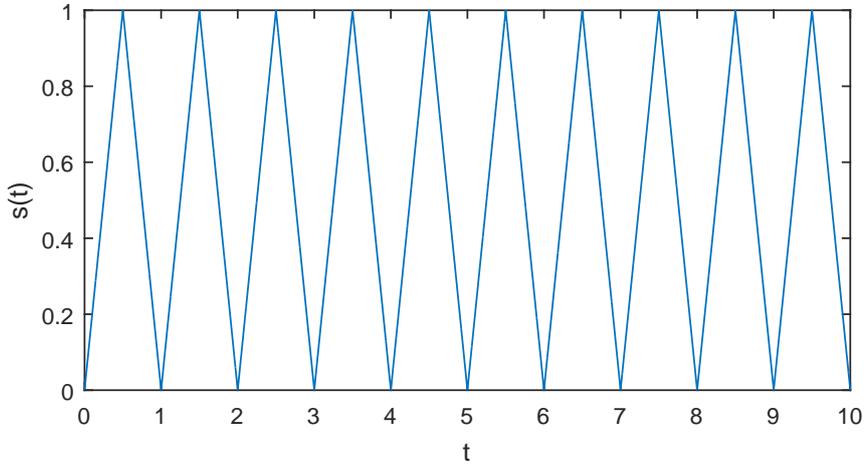


Figura 4.10: Perturbação com o formato “dente de serra”.

O objetivo da lei de controle será rejeitar o ataque considerado enquanto garante o rastreamento do sinal de referência y_{f_d} apresentado em (4.59), com $y_d(t) = [2\cos(t) \sin(3t)]^T$

Em relação à reconstrução do ataque serão comparadas somente as técnicas baseadas na estratégia adaptativa de camada dupla e no VGSTA, visto que o estimador proposto em [29] apresenta erros de formulação que inviabilizam sua aplicação.

Como para este caso, a perturbação externa é um sinal não-nulo, a implementação do monitor de ataques à saída baseado no VGSTA requer o conhecimento de limitantes superiores para a derivada do ataque, e para o distúrbio, apresentados nas Hipóteses (A7) e (A8), respectivamente. Para esta simulação considera-se que $\rho_2(\omega_1, t) = 2$ e $\rho_d(t) = 2 + e^{-t}$, com $\bar{D}_d = I_6$. Por sua vez, note que a estratégia adaptativa proposta não requer o conhecimento a priori de nenhum majorante, dependendo somente do conhecimento da limitação dos sinais apresentados na Hipótese (A9) e da perturbação externa. As condições iniciais para o sistema aumentado e o

estimador são dadas por

$$\omega(0) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T, \quad \hat{\omega}(0) = 0_{6 \times 1}$$

Os parâmetros usados para o projeto do monitor de ataques baseado na estratégia adaptativa proposta são os mesmos utilizados para o monitores de ataques aos estados proposto no Exemplo 4.1, enquanto os parâmetros do monitor de ataques baseado no VGSTA (4.43) são definidos como $\beta = \delta = \epsilon = 2$ e

$$\varrho_1(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) \equiv 0, \quad \varrho_2(\hat{e}_{\omega_1}, \sigma_s, t) = 2 (\|\bar{C}\bar{A}\|\hat{e}_{\omega_1}(t) + \|\bar{C}\|\rho_d(t) + \|D_f\|\rho_2(\omega_1, t)).$$

Os resultados são apresentados nas Figuras 4.11 e 4.12.

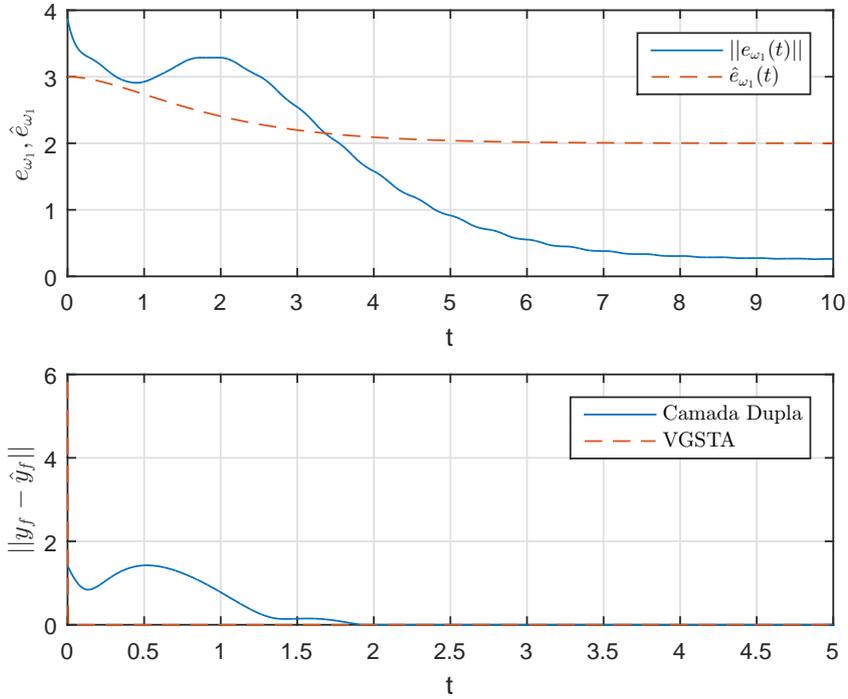


Figura 4.11: Desempenho do FOAF e as normas dos erros de observação e_{ω_1} e $e_{y_f}(t)$.

Pode-se observar pela Figura 4.11 que, após um tempo finito, o filtro de aproximação de primeira ordem proposto em (4.41) age como um limitante superior da norma de $e_{\omega_1}(t)$, que neste caso não converge para zero, visto que a perturbação externa é não-nula. Além disso, verifica-se que independente de perturbações externas, a convergência para zero da variável de deslizamento $\sigma_s = e_{y_f}$ em tempo finito é garantida para ambas as estratégias em comparação.

Por sua vez, verifica-se na Figura 4.12 que embora o erro de monitoramento seja limitado, a reconstrução não ocorre, uma vez que $d(t) \neq 0$. Além disso observa-se,

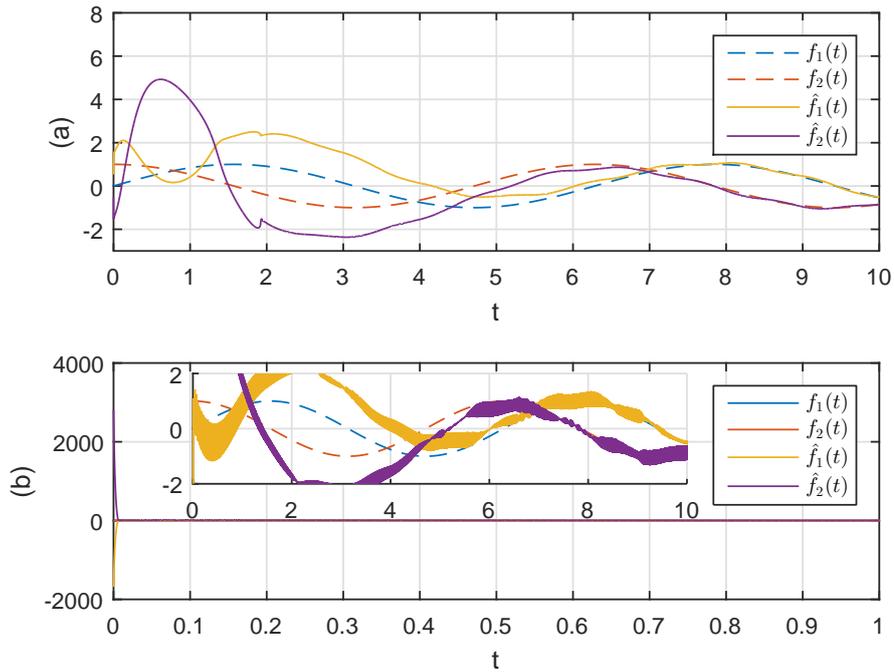


Figura 4.12: Reconstrução dos ataques às saídas através do (a) Algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável; (b) VGSTA.

um erro de monitoramento considerável durante o transitório para a reconstrução baseada no VGSTA, enquanto a estratégia adaptativa de camada dupla apresenta um erro significativamente inferior. Os parâmetros adaptativos utilizados na estratégia de camada dupla generalizada proposta são apresentados na Figura 4.13.

Com relação à compensação dos ataques, ambas as técnicas serão novamente comparadas, sendo o ataque reconstruído pelo VGSTA compensado pelo controlador (4.65) e o ataque reconstruído pela estratégia adaptativa proposta pelo controlador (4.66). Mais uma vez, o método apresentado em [29] não pode ser utilizado, visto que um compensador de ataques à saída não foi proposto.

Os parâmetros usado para o projeto do controlador baseado na estratégia adaptativa proposta e no VGSTA são os mesmos aplicados nos controladores do Exemplo 4.1. Os resultados são apresentados nas Figuras 4.14 e 4.15.

Assim como no problema de compensação de ataques aos estados, verifica-se pela Figura 4.14 que embora ambos os sinais sejam contínuos, o uso de limitantes superiores no projeto dos ganhos do algoritmo Super-Twisting introduz conservadorismo no projeto da ação de controle. Observe ainda na Figura 4.15 que a estratégia adaptativa de camada dupla garante desempenho similar ao obtido utilizando o controlador VGSTA, exigindo um sinal de controle inferior em amplitude. É válido destacar que mesmo na presença de perturbações externas, o erro de rastreamento converge para zero em tempo finito com o uso de ambos os compensadores propostos

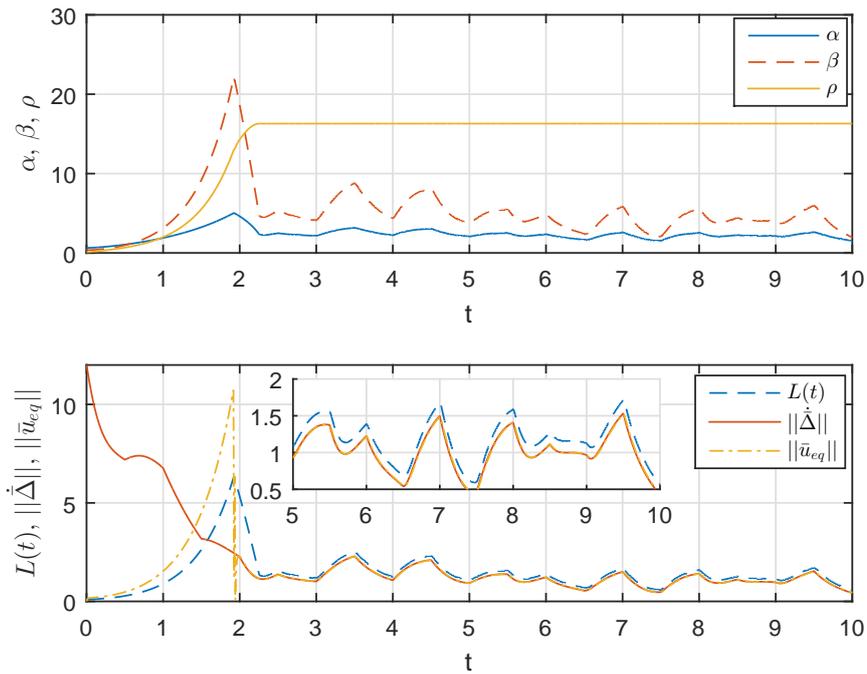


Figura 4.13: Variáveis associadas à estratégia adaptativa de camada dupla generalizada para o problema de reconstrução de ataques às saídas.

aqui.

Pelos resultados acima apresentados, verifica-se que a aplicação da estratégia adaptativa generalizada de camada dupla permite que uma nova classe de problemas relacionados à detecção e reconstrução de ataques em sistemas ciber-físicos seja considerada, visto que um número menor de informações sobre os ataques e as perturbações externas ao sistema são requeridas.

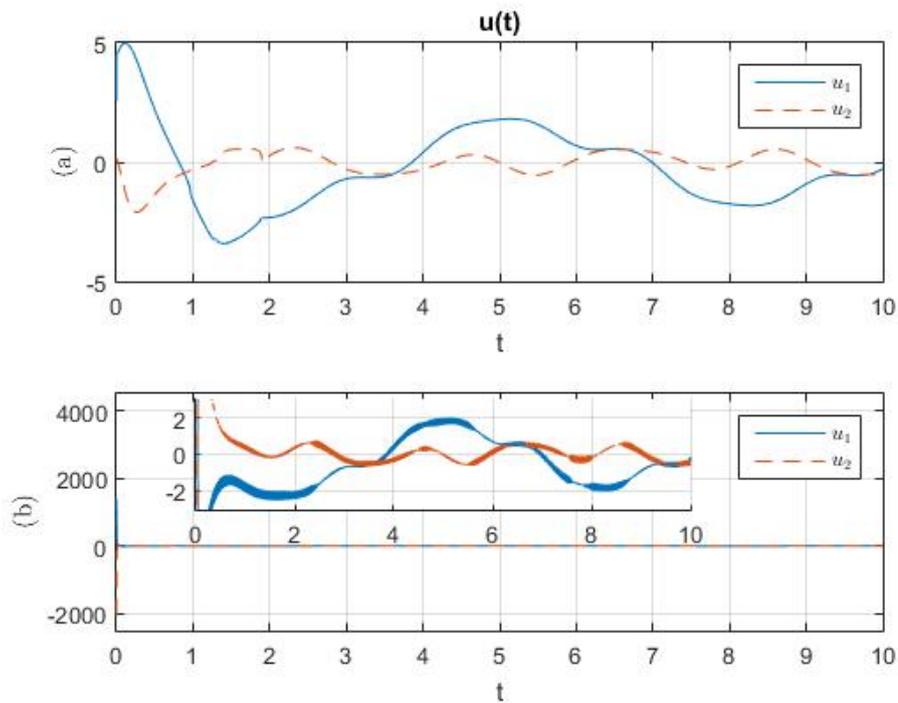


Figura 4.14: Sinais de controle contínuos projetados de acordo com: (a) Algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável; (b) VGSTA.

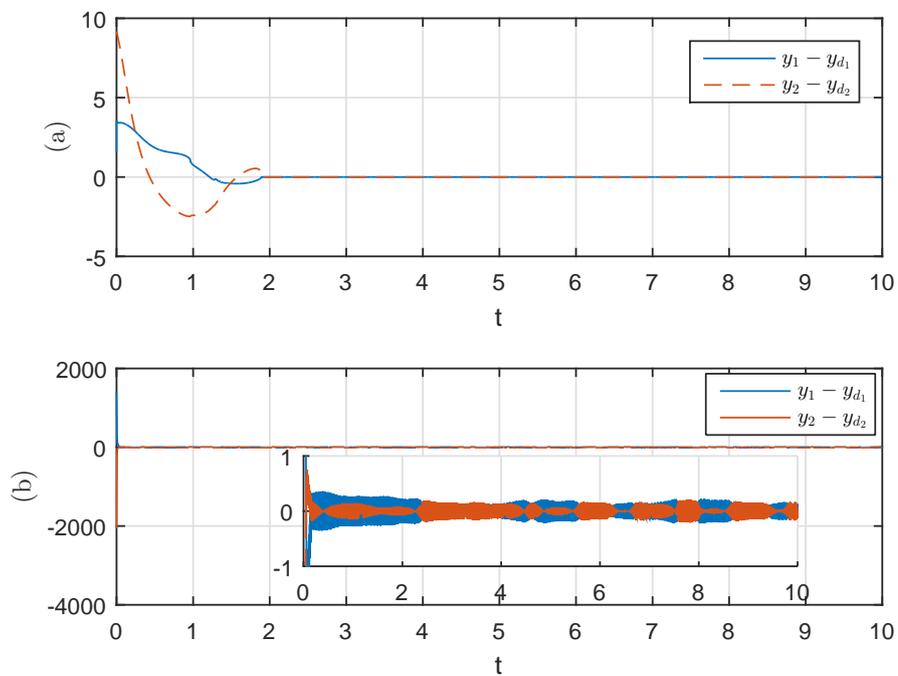


Figura 4.15: Erros de rastreamento obtidos de acordo com: (a) Algoritmo super-twisting com ganhos adaptativos multivariável (b) VGSTA.

Capítulo 5

Conclusão e Trabalhos Futuros

No Capítulo [3](#), uma estratégia adaptativa do controle super-twisting para sistemas incertos foi proposta. Esta técnica consiste em adaptar os ganhos de uma família de algoritmos multivariáveis baseados no super-twisting através da generalização da estratégia adaptativa de camada dupla [\[25\]](#). A partir de uma análise generalizada por função de Lyapunov, pode-se demonstrar propriedades globais de convergência em tempo finito para o algoritmo proposto, apesar de perturbações/incertezas presentes no sistema cujos limitantes superiores são desconhecidos a priori. Além disso, baseado no conceito de controle equivalente, demonstrou-se formalmente que a estratégia de adaptação utilizada garante uma escolha não-conservadora dos ganhos para a família de algoritmos considerada, reduzindo possíveis efeitos desvantajosos, como sinais de controle desnecessariamente elevados e o *chattering*. As simulações numéricas comprovaram os resultados teóricos obtidos, mostrando que o algoritmo proposto é capaz de rejeitar uma classe de perturbações/incertezas mais ampla, incluindo distúrbios com limitantes desconhecidos limitados e ilimitados.

No Capítulo [4](#), a reconstrução e compensação de ciber-ataques para a classe de sistemas ciber-físicos multivariáveis incertos apresentada em [\[29\]](#) foi considerada. Mostrou-se que as duas estratégias propostas baseadas no algoritmo Super-Twisting possibilitaram o desenvolvimento de monitores e compensadores com desempenhos superiores aos apresentados em [\[29\]](#). Visando a comparar os efeitos da sintonia dos ganhos do super-twisting por estratégias adaptativas e baseadas em majorantes, o projeto de monitores e compensadores de ataque, foram feitos considerando o *Variable Gain Super-Twisting* multivariável [\[16\]](#) e a estratégia adaptativa de camada dupla generalizada proposta na Seção [3.2](#).

Com o intuito de detectar e reconstruir os ataques cibernéticos, foram propostos nas Seções [4.2](#) e [4.3](#), monitores para ataques aos estados e às saídas, respectivamente. Observou-se que a aplicação de ambas as técnicas garante limitação no erro de monitoramento e convergência exponencial para casos livres de distúrbios externos.

Após a detecção e reconstrução dos mesmos, o problema de rastreamento de

saída foi apresentado. Para tal tarefa, compensadores baseados nos algoritmos citados acima foram projetados, assegurando convergência do erro de rastreamento em tempo finito e rejeição dos ciber-ataques aos estados e à saída. Simulações numéricas comprovaram os resultados teóricos, que garantem desempenho superior na reconstrução e compensação dos ataques para as técnicas propostas quando comparadas a trabalhos recentes [28, 29] de controle de sistemas ciber-físicos usando técnicas baseadas em modos deslizantes.

Proposta de Trabalhos Futuros

São propostos os seguintes tópicos de pesquisa para continuação dos trabalhos apresentados nesta dissertação de mestrado:

- **Escolha ótima dos ganhos fixos α_0 e β_0 :**

Embora a escolha de α_0 e β_0 em (3.35) garanta as propriedades apresentadas no Teorema 3.3, uma escolha ótima de tais parâmetros permitiria uma implementação ainda menos conservadora do algoritmo proposto, satisfazendo os princípios da abordagem adaptativa apresentada.

- **Extensão da classe de sistemas ciber-físicos considerada:**

A classe de sistemas estudada no Capítulo 4 tem relação direta com as hipóteses consideradas. O uso de novas estratégias de controle por modos deslizantes pode permitir que tais hipóteses sejam ajustadas ou até mesmo reduzidas, estendendo, assim, a classe de sistemas ciber-físicos abordados.

- **Aplicação Prática:**

Uma aplicação prática do controle em uma planta real com todas as suas incertezas, imperfeições de modelagem, não-linearidades e ruídos poderia confirmar o desempenho satisfatório das técnicas aqui apresentadas, verificado apenas por meio de simulações.

Referências Bibliográficas

- [1] SHTESEL, Y., EDWARDS, C., FRIDMAN, L., et al. *Sliding mode control and observation*. New York, Springer, 2014.
- [2] CHEN, C.-T. *Linear system theory and design*. Oxford University Press, Inc., 1998.
- [3] EDWARDS, C., SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Series in Systems and Control. Taylor & Francis, 1998.
- [4] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [5] HUNG, J. Y., GAO, W., HUNG, J. C. “Variable structure control: a survey”, *IEEE Trans. on Ind. Electronics*, v. 40, n. 1, pp. 2–22, 1993.
- [6] LEVANT, A. “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control”, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, v. 58, n. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [7] LEVANT, A. “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control”, *Int. J. Contr.*, v. 76, n. 9, pp. 924–941, 2003.
- [8] UTKIN, V. I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. Moscow, MIR, 1978.
- [9] FRIDMAN, L., LEVANT, A. “Higher Order Sliding Modes”, *Sliding mode control in engineering*, v. 11, pp. 53–102, 2002.
- [10] LEVANT, A. “Homogeneity approach to high-order sliding mode design”, *Automatica*, v. 41, n. 5, pp. 823–830, 2005.
- [11] MORENO, J., OSORIO, M. “A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers”. In: *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pp. 2856–2861, 2008.
- [12] MORENO, J., OSORIO, M. “Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 57, n. 4, pp. 1035–1040, 2012.

- [13] DÁVILA, A., MORENO, J., FRIDMAN, L. “Variable gains super-twisting algorithm: A Lyapunov based design”. In: *Proc. American Contr. Conf.*, Baltimore, MD, 2010.
- [14] GONZALEZ, T., MORENO, J. A., FRIDMAN, L. “Variable Gain Super-Twisting Sliding Mode Control”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 57, n. 8, pp. 2100–2105, 2012.
- [15] NAGESH, I., EDWARDS, C. “A multivariable super-twisting sliding mode approach”, *Automatica*, v. 50, n. 3, pp. 984–988, 2014.
- [16] VIDAL, P. V. N. M., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Output-Feedback Multivariable Global Variable Gain Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 62, n. 6, pp. 2999–3005, 2017.
- [17] OLIVEIRA, T. R., LEITE, A. C., PEIXOTO, A. J., et al. “Overcoming limitations of uncalibrated robotics visual servoing by means of sliding mode control and switching monitoring scheme”, *Asian Journal of Control*, v. 16, n. 3, pp. 752–764, 2014.
- [18] HSU, L., OLIVEIRA, T. R., CUNHA, J. P. V., et al. “Adaptive unit vector control of multivariable systems using monitoring functions”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 29, n. 3, pp. 583–600, 2019.
- [19] OLIVEIRA, T. R., RODRIGUES, V. H. P., ESTRADA, A., et al. “Output-feedback variable gain super-twisting algorithm for arbitrary relative degree systems”, *International Journal of Control*, v. 91, n. 9, pp. 2043–2059, 2018.
- [20] SHTESSEL, Y. B., MORENO, J. A., PLESTAN, F., et al. “Super-twisting adaptive sliding mode control: A Lyapunov design”. In: *49th IEEE conference on decision and control (CDC)*, pp. 5109–5113. IEEE, 2010.
- [21] SHTESSEL, Y., TALEB, M., PLESTAN, F. “A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application”, *Automatica*, v. 48, n. 5, pp. 759–769, 2012.
- [22] NEGRETE-CHÁVEZ, D. Y., MORENO, J. A. “Second-order sliding mode output feedback controller with adaptation”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 30, n. 8-10, pp. 1523–1543, 2016.

- [23] UTKIN, V. I., POZNYAK, A. S. “Adaptive sliding mode control with application to super-twist algorithm: Equivalent control method”, *Automatica*, v. 49, n. 1, pp. 39–47, 2013.
- [24] EDWARDS, C., SHTESSEL, Y. “Dual-layer adaptive sliding mode control”. In: *2014 American control conference*, pp. 4524–4529. IEEE, 2014.
- [25] EDWARDS, C., SHTESSEL, Y. “Adaptive dual-layer super-twisting control and observation”, *International Journal of Control*, v. 89, n. 9, pp. 1759–1766, 2016.
- [26] ZHAO, X., ZONG, Q., TIAN, B., et al. “Adaptive multivariable finite-time continuous fault-tolerant control of rigid spacecraft”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 29, n. 10, pp. 2927–2940, 2019.
- [27] ALWI, H., EDWARDS, C. “Fault tolerant control using sliding modes with on-line control allocation”, *Automatica*, v. 44, n. 7, pp. 1859–1866, 2008.
- [28] AO, W., SONG, Y., WEN, C. “Adaptive cyber-physical system attack detection and reconstruction with application to power systems”, *IET Control Theory & Applications*, v. 10, n. 12, pp. 1458–1468, 2016.
- [29] CORRADINI, M. L., CRISTOFARO, A. “Robust detection and reconstruction of state and sensor attacks for cyber-physical systems using sliding modes”, *IET Control Theory & Applications*, v. 11, n. 11, pp. 1756–1766, 2017.
- [30] CONTI, J. P. “The day the samba stopped [power blackouts]”, *IET Engineering & Technology*, v. 5, n. 4, pp. 46–47, 2010.
- [31] LANGNER, R. “Stuxnet: Dissecting a cyberwarfare weapon”, *IEEE Security & Privacy*, v. 9, n. 3, pp. 49–51, 2011.
- [32] POOVENDRAN, R., SAMPIGETHAYA, K., GUPTA, S. K. S., et al. “Special issue on cyber-physical systems [scanning the issue]”, *Proceedings of the IEEE*, v. 100, n. 1, pp. 6–12, 2011.
- [33] PASQUALETTI, F., DORFLER, F., BULLO, F. “Control-theoretic methods for cyberphysical security: Geometric principles for optimal cross-layer resilient control systems”, *IEEE Control Systems Magazine*, v. 35, n. 1, pp. 110–127, 2015.
- [34] AZEVEDO FILHO, J. L., NUNES, E. V. L. “Multivariable Adaptive Dual Layer Super-Twisting”. In: *21th International Federation of Automatic Control (IFAC)*, Berlin, Germany, 2020. To appear.

- [35] AZEVEDO FILHO, J. L., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Sliding mode strategies for monitoring and compensation of cyber-attacks to Cyber-Physical Systems”. In: *21th International Federation of Automatic Control (IFAC)*, Berlin, Germany, 2020. To appear.
- [36] FILIPPOV, A. F. “Differential equations with discontinuous right-hand side”, *American Math. Soc. Translations*, v. 42, n. 2, pp. 199–231, 1964.
- [37] BERNSTEIN, D. S. *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas*. Princeton university press, 2009.
- [38] ESTRADA, A., PLESTAN, F., ALLOUCHE, B. “An adaptive version of a second order sliding mode output feedback controller”. In: *2013 European Control Conference (ECC)*, pp. 3228–3233. IEEE, 2013.
- [39] KHALIL, H. K., GRIZZLE, J. W. *Nonlinear systems*, v. 3. Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 2002.
- [40] FILIPPOV, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [41] LEVANT, A. “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control”, *Int. J. Contr.*, v. 76, n. 9, pp. 924–941, 2003.
- [42] SLOTINE, J., LI, W. *Applied nonlinear control*, v. 199. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1991.
- [43] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering. New York, Springer, 1995.
- [44] LEVANT, A. “Robust exact differentiation via sliding mode technique”, *automatica*, v. 34, n. 3, pp. 379–384, 1998.
- [45] KUNUSCH, C., PULESTON, P. F., MAYOSKY, M. A., et al. “Sliding Mode Strategy for PEM Fuel Cells Stacks Breathing Control Using a Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 17, n. 1, pp. 167–174, 2009.
- [46] DERAFA, L., BENALLEGUE, A., FRIDMAN, L. “Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 349, n. 2, pp. 685–699, 2012.
- [47] EVANGELISTA, C., PULESTON, P., VALENCIAGA, F., et al. “Lyapunov-Designed Super-Twisting Sliding Mode Control for Wind Energy Conversion Optimization”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 60, n. 2, pp. 538–545, 2013.

- [48] LÓPEZ-CAAMAL, F., MORENO, J. A. “Generalised multivariable supertwisting algorithm”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 29, n. 3, pp. 634–660, 2019.
- [49] DEIMLING, K. *Multivalued Differential Equations*. De Gruyter Series in Non-linear Analysis and Applications. De Gruyter, 1992.
- [50] LEVANT, A. “Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique”, *Automatica*, v. 34, n. 3, pp. 379–384, 1998.
- [51] BOYD, S., EL GHAOUI, L., FERON, E., et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, v. 15. Siam, 1994.
- [52] TIAN, B., LIU, L., LU, H., et al. “Multivariable finite time attitude control for quadrotor UAV: Theory and experimentation”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 65, n. 3, pp. 2567–2577, 2017.
- [53] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [54] LEVANT, A. “Introduction to high-order sliding modes”, *School of Mathematical Sciences, Israel*, v. 58, n. 6, pp. 1–55, 2003.
- [55] SIDI, M. J. *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*, v. 7. Cambridge University Press, 1997.
- [56] SANDBERG, H., AMIN, S., JOHANSSON, K. H. “Cyberphysical security in networked control systems: An introduction to the issue”, *IEEE Control Systems Magazine*, v. 35, n. 1, pp. 20–23, 2015.
- [57] NATEGHI, S., SHTESEL, Y., BARBOT, J.-P., et al. “Cyber-Attack Reconstruction via Sliding Mode Differentiation and Sparse Recovery Algorithm: Electrical Power Networks Application”. In: *2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, pp. 285–290. IEEE, 2018.
- [58] HUANG, X., ZHAI, D., DONG, J. “Adaptive integral sliding-mode control strategy of data-driven cyber-physical systems against a class of actuator attacks”, *IET Control Theory & Applications*, v. 12, n. 10, pp. 1440–1447, 2018.
- [59] AMIN, S., CÁRDENAS, A. A., SASTRY, S. S. “Safe and secure networked control systems under denial-of-service attacks”. In: *International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control*, pp. 31–45. Springer, 2009.

- [60] FAWZI, H., TABUADA, P., DIGGAVI, S. “Secure estimation and control for cyber-physical systems under adversarial attacks”, *IEEE Transactions on Automatic control*, v. 59, n. 6, pp. 1454–1467, 2014.
- [61] HSU, L., COSTA, R. R., CUNHA, J. P. V. S. “Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems”, *Asian Journal of Control*, v. 5, n. 4, pp. 543–556, 2003.
- [62] DORFLER, F., BULLO, F. “Kron reduction of graphs with applications to electrical networks”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 60, n. 1, pp. 150–163, 2012.
- [63] MEI, S., ZHANG, X., CAO, M. *Power grid complexity*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [64] ZIMMERMAN, R. D., MURILLO-SÁNCHEZ, C. E., THOMAS, R. J. “MAT-POWER: Steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education”, *IEEE Transactions on power systems*, v. 26, n. 1, pp. 12–19, 2010.

Apêndice A

Produto de Kronecker

A.1 Propriedades

Considere quatro matrizes de dimensões arbitrárias A , B , C , e D . As seguintes propriedades são sempre satisfeitas

A.1.1 Bilinearidade

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C \quad \text{e} \quad (C + D) \otimes A = C \otimes A + D \otimes A$$

A.1.2 Produto misto

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

A.1.3 Transposição

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$$

A.1.4 Autovalores da matriz de blocos

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ duas matrizes quadradas arbitrárias, cujos autovalores são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$, respectivamente. Logo, os autovalores de $A \otimes B$ e $B \otimes A$ são dados por

$$\eta_i = \lambda_j \mu_k,$$

onde $i = 1, \dots, mn$, $j = 1, \dots, n$, e $k = 1, \dots, m$.

Apêndice B

Algoritmo Super-Twisting

B.1 Demonstração do Teorema 2.1

Demonstração. Considere a seguinte função de Lyapunov

$$V(\sigma, z) = 2k_3|\sigma| + k_4\sigma^2 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2} \left(k_1|\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + k_2\sigma - z \right)^2 \quad (\text{B.1})$$

Note que está é uma função positiva, contínua, porém não diferenciável em $\sigma = 0$. Definindo

$$\xi = \begin{bmatrix} |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) \\ \sigma \\ z \end{bmatrix}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (4k_3 + k_1^2) & k_1k_2 & -k_1 \\ k_1k_2 & (2k_4 + k_2^2) & -k_2 \\ -k_1 & -k_2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

note que (B.1) pode ser reescrito como

$$V(\sigma, z) = \xi^T \Pi \xi, \quad (\text{B.3})$$

cuja derivada temporal é dada por

$$\dot{V} = -\frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \xi^T \Omega_1 \xi - \xi^T \Omega_2 \xi + \omega_1^T \xi + \frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \omega_2^T \xi \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\Omega_1 = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} (2k_3 + k_1^2) & 0 & -k_1 \\ 0 & (2k_4 + 5k_2^2) & -3k_2 \\ -k_1 & -3k_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = k_2 \begin{bmatrix} (k_3 + 2k_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & (k_4 + k_2^2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \left[k_1 \left(\frac{3k_2}{2} d_1 - d_2 \right) \quad (k_2^2 + 2k_4)d_1 - k_2 d_2 \quad -k_2 d_1 \right]^T \\ \omega_2 &= d_1 \left[\left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \right) \quad 0 \quad -\frac{k_1}{2} \right]^T\end{aligned}$$

Uma vez que os termos de perturbação são limitados por (2.59), segue que

$$\omega_1^T \xi \leq \frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \xi^T \Delta_2 \xi + \xi^T \Delta_3 \xi, \quad \frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \omega_2^T \xi \leq \left(\frac{\delta_1}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} + \delta_3 \right) \xi^T \Delta_1 \xi$$

onde

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \begin{bmatrix} \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \right) & 0 & \frac{k_1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \delta_2 k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 \left(\frac{3k_3}{2} \delta_3 + \delta_4 \right) + \delta_1 (k_2^2 + 2k_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Delta_3 &= \begin{bmatrix} k_2 \left(\delta_2 + \frac{3}{2} k_1 \delta_1 \right) & 0 & \frac{1}{2} k_2 \delta_1 \\ 0 & \delta_3 (k_2^2 + 2k_4) + k_2 \delta_4 & \frac{1}{2} k_2 \delta_3 \\ \frac{1}{2} k_2 \delta_1 & \frac{1}{2} k_2 \delta_3 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Logo, (B.4) pode ser reescrita como

$$\dot{V} = -\frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \xi^T \bar{\Omega}_1 \xi - \xi^T \bar{\Omega}_2 \xi \quad (\text{B.5})$$

onde $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 - \Delta_2 - \delta_1 \Delta_1$ e $\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 - \Delta_3 - \delta_3 \Delta_1$. Note que $\dot{V} < 0$ se $\bar{\Omega}_1 > 0$ e $\bar{\Omega}_2 > 0$. A condição $\bar{\Omega}_1 > 0$ é garantida se

$$\begin{aligned}k_1 &> 2 \max(\delta_1, \sqrt{\delta_2}) \\ k_2 &> \frac{3}{8} \delta_3 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{9}{4} \delta_3^2 + 8 \delta_4} \\ k_3 &> k_1 \frac{\delta_1 k_1 + \frac{1}{8} \delta_1^2 + \delta_2}{2 \left(\frac{1}{2} k_1 - \delta_1 \right)} \\ k_4 &> \frac{k_1 \left[\frac{1}{2} k_1 \left(k_1 + \frac{1}{2} \delta_1 \right)^2 \left(2k_2^2 - \frac{3}{2} \delta_3 k_2 - \delta_4 \right) + \left(\frac{5}{2} k_2^2 + \frac{3}{2} \delta_3 k_2 + \delta_4 \right) p_1 \right]}{2 \left(p_1 - \frac{1}{2} k_1 \left(k_1 + \frac{1}{2} \delta_1 \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} k_1 - \delta_1 \right)}\end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

onde

$$p_1 \triangleq k_1 \left(\frac{1}{4} k_1^2 - \delta_2 \right) + \left(\frac{1}{2} k_1 - \delta_1 \right) \left(2k_3 + \frac{1}{2} k_1^2 \right)$$

Por sua vez, a condição $\bar{\Omega}_2 > 0$ é satisfeita se

$$\begin{aligned} k_2 &> 2\delta_3 \\ k_3 &> \frac{(k_2\delta_1 + \frac{1}{2}k_1\delta_3)^2}{2k_2(k_2 - 2\delta_3)} + \frac{(\delta_2 + \frac{3}{2}\delta_1k_1)k_2 - 2(k_2 - \frac{1}{4}\delta_3)k_1^2}{(k_2 - 2\delta_3)} \\ k_4 &> k_2 \frac{k_2(k_2 + 3\delta_3) + \frac{1}{2}\delta_3^2 + \delta_4}{k_2 - \delta_3} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Note que (B.6) e (B.7) podem sempre ser atendidas simultaneamente $\forall \delta_i > 0, i = 1, \dots, 4$.

Atendendo à ambas as condições, segue que

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \xi^T \bar{\Omega}_1 \xi \quad (\text{B.8})$$

Como por (B.6), sabe-se que $\bar{\Omega}_1 > 0$ e pela desigualdade de Rayleigh

$$\lambda_{\min}(\bar{\Omega}_1) \|\xi\|^2 \leq \xi^T \bar{\Omega}_1 \xi \leq \lambda_{\max}(\bar{\Omega}_1) \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{B.9})$$

(B.8) possui um limitante superior dado por

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \lambda_{\min}(\bar{\Omega}_1) \|\xi\|^2 \quad (\text{B.10})$$

Como, por (B.9), tem-se que

$$|\sigma|^{\frac{1}{2}} \leq \|\xi\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}(\sigma, z)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(\Pi)},$$

Uma vez que, pela desigualdade de Rayleigh,

$$\|\xi\|^2 \leq \frac{V}{\lambda_{\min}(\Pi)},$$

(B.10) pode ser reescrito como

$$\dot{V} \leq -\gamma V^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.11})$$

onde $\gamma = \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}(\Pi) \lambda_{\min}(\bar{\Omega}_1)}{\lambda_{\max}(\Pi)}$.

Considere agora a seguinte equação diferencial

$$\dot{v}(t) = -\gamma \sqrt{v(t)} \quad (\text{B.12})$$

cuja solução é dada por

$$v(t) = \left(v(0) - \frac{\gamma}{2} t \right)^2$$

onde $v(0) = v_0 > 0$. Logo, pelo lema da comparação, $V(\sigma, z)$ converge em tempo finito para zero após um tempo T limitado por

$$T \leq \frac{2V^{\frac{1}{2}}(\sigma(0), z(0))}{\gamma}$$

Note que $V(\sigma, z)$ é uma função contínua e diferenciável exceto no conjunto $S = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(t) = 0\}$. Além disso, as trajetórias de (2.58) não podem se manter em $S \setminus 0$, uma vez que $\dot{\sigma} \neq 0$. Logo, a partir do Teorema de Lyapunov para Inclusões Diferenciais [49], conclui-se que $V(\sigma, z)$ é uma função de Lyapunov para (2.58). Além disso, garante-se por (B.11) a convergência em tempo finito para a superfície $\sigma = \dot{\sigma} = 0$.

□

B.2 Demonstração do Teorema 2.2

Demonstração. Considere a seguinte função candidata de Lyapunov [13, 14]

$$V(\sigma, z) = \zeta^T P \zeta, \quad (\text{B.13})$$

com

$$\zeta = \begin{bmatrix} |\sigma|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma) + k_3 \sigma \\ z \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \beta + 4\epsilon^2 & -2\epsilon \\ -2\epsilon & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

onde β, ϵ são constantes positivas arbitrárias. Logo, infere-se que a função candidata (B.13) é positiva, contínua em todo ponto e diferenciável $\forall (\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$, onde $\mathcal{S} = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = 0\}$. Sua derivada temporal é dada por

$$\dot{V} = \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \quad (\text{B.15})$$

Para tornar a análise mais concisa, a dinâmica de ζ será estudada separadamente. Por (B.14) e (2.74), segue que

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \phi'_1(\sigma) \dot{\sigma} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi'_1(-k_1(x, t)\phi_1(\sigma) + z + g_1(x, \sigma, t)) \\ -k_2(x, t)\phi_2 + \frac{d}{dt}[g_2(x, t)] \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

onde $\phi'_1 = \frac{d\phi_1}{d\sigma}$. Sem perda de generalidade, note que os termos relacionados aos distúrbios do sistema, $g_1(x, \sigma, t)$ e $\frac{d}{dt}[g_2(x, t)]$ podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} g_1(x, \sigma, t) &= \alpha_1(x, t)\phi_1(\sigma) \\ \frac{d}{dt}[g_2(x, t)] &= \alpha_2(x, t)\phi_2(\sigma) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

onde $\alpha_1(x, t)$ e $\alpha_2(x, t)$ são funções desconhecidas limitadas por

$$|\alpha_1(x, t)| \leq \varrho_1(x, t), \quad |\alpha_2(x, t)| \leq \varrho_2(x, t). \quad (\text{B.18})$$

Note que as desigualdades apresentadas em (2.73) continuam sendo satisfeitas. Além disso, as funções $\phi_1(\sigma)$ e $\phi_2(\sigma)$ apresentadas em (2.71) possuem uma importante relação que será explorada

$$\phi_2(\sigma) = \phi_1'(\sigma)\phi_1(\sigma) = \left(\frac{1}{2|\sigma|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \phi_1(\sigma), \quad \forall (\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S} \quad (\text{B.19})$$

Substituindo (B.17) e (B.19) em (B.16), segue que

$$\dot{\zeta} = \phi_1'(\sigma)\mathcal{M}(x, t)\zeta, \quad \mathcal{M}(x, t) = \begin{bmatrix} -(k_1(x, t) - \alpha_1(x, t)) & 1 \\ -(k_2(x, t) - \alpha_2(x, t)) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

para todo ponto $(\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$. Substituindo (B.20) em (B.15), note que a derivada temporal de $V(\sigma, z)$ pode ser reescrita como

$$\dot{V} = -\phi_1'(\sigma)\zeta^T Q(x, t)\zeta, \quad (\text{B.21})$$

com $Q(x, t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dada por

$$Q(x, t) = -(\mathcal{M}^T(x, t)P + P\mathcal{M}(x, t)) = \begin{bmatrix} 2[(\beta + 4\epsilon^2)(k_1 - \alpha_1) - 2\epsilon(k_2 - \alpha_2)] & \star \\ -(\beta + 4\epsilon^2) - 2\epsilon(k_1 - \alpha_1) + (k_2 - \alpha_2) & 4\epsilon \end{bmatrix}$$

Como P é uma matriz simétrica, nota-se que $Q(x, t)$ é simétrica. Logo por questões visuais, o termo na diagonal secundária de $Q(x, t)$ foi omitido. Definindo $k_2(x, t)$ de acordo com (2.76), nota-se que $Q(x, t)$ assume a seguinte forma

$$Q(x, t) = \begin{bmatrix} 2[\beta k_1 + 2\epsilon\alpha_2 - (2\epsilon + \alpha_1)(\beta + 4\epsilon^2)] & 2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2 \\ 2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2 & 4\epsilon \end{bmatrix}$$

Deste modo, caso $k_1(x, t)$ seja escolhido de acordo com (2.76), a matriz simétrica

$$Q - 2\epsilon I = \begin{bmatrix} 2\left[\beta\delta + \frac{1}{4\epsilon}(2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2)^2 + 2\epsilon(\varrho_2 + \alpha_2) + (\varrho_1 - \alpha_1)(\beta + 4\epsilon^2)\right] & \star \\ 2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2 & 2\epsilon \end{bmatrix}$$

será positiva definida, dado que, por definição, as desigualdades apresentadas em (B.18) são satisfeitas. Logo, (B.21) possui um limitante superior dado por

$$\dot{V} \leq -2\epsilon\phi_1'(\sigma)\zeta^T\zeta = -2\epsilon\left(\frac{1}{2|\sigma|^{\frac{1}{2}}} + k_3\right)\|\zeta\|^2, \quad \forall (\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S} \quad (\text{B.22})$$

onde a norma Euclidiana de ζ é dada por

$$\|\zeta\| = \sqrt{\phi_1^2 + z^2} = \sqrt{|\sigma| + 2k_3|\sigma|^{\frac{3}{2}} + k_3^2\sigma^2 + z^2}$$

Como, pela desigualdade de Rayleigh,

$$\lambda_{\min}(P)\|\zeta\|^2 \leq V(\sigma, z) \leq \lambda_{\max}(P)\|\zeta\|^2,$$

onde $\lambda_{\min}(P)$ e $\lambda_{\max}(P)$ representam o menor e o maior autovalor da matriz P respectivamente, as seguintes relações podem ser deduzidas

$$\|\zeta\|^2 \geq \frac{V}{\lambda_{\max}(P)}, \quad |\sigma|^{\frac{1}{2}} \leq \|\zeta\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \quad (\text{B.23})$$

Incluindo (B.23) em (B.22), obtém-se a seguinte desigualdade $\forall(\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$

$$\dot{V} \leq -\gamma_1 V^{\frac{1}{2}}(\sigma, z) - \gamma_2 V(\sigma, z), \quad (\text{B.24})$$

com

$$\gamma_1 = \frac{\epsilon\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}{\lambda_{\max}(P)}, \quad \gamma_2 = \frac{2\epsilon k_3}{\lambda_{\max}(P)}$$

Verifica-se, portanto, que além de $V(\sigma, z)$ ser uma função decrescente no subespaço $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$, as trajetórias do sistema (2.74) não podem permanecer em $\mathcal{S} \setminus \{0\}$ visto que $\dot{\sigma} = z \neq 0$. Logo, conclui-se pelo Teorema de Lyapunov generalizado para inclusões diferenciais [49] que $V(\sigma, z)$ é uma função de Lyapunov para o subsistema (σ, z) . Note que esta conclusão é possível pois embora a função de Lyapunov escolhida não seja diferenciável em todo ponto ela é contínua em todos os pontos. Note ainda que, uma vez que a solução da equação de comparação

$$\dot{v}(t) = -\gamma_1 \sqrt{v(t)} - \gamma_2 v(t) \quad (\text{B.25})$$

é dada por

$$v(t) = e^{-\gamma_2 t} \left[v_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left(1 - e^{\frac{\gamma_2}{2} t} \right) \right]^2, \quad \forall t \geq 0$$

com $v(0) = v_0 > 0$, pode-se estimar um tempo limite para a ocorrência do modo deslizante de segunda ordem

$$T \leq \frac{2}{\gamma_2} \ln \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} V^{\frac{1}{2}}(\sigma(0), z(0)) \right)$$

□

Apêndice C

Algoritmo Super-Twisting com esquema adaptativo de Camada Dupla

C.1 Demonstração do Teorema 3.1

Demonstração. Seja a seguinte função candidata de Lyapunov para o sistema (3.1)

$$V(t, \sigma, z) = p_1 L(t) |\sigma| + 2p_2 \sqrt{L(t)} \text{sign}(\sigma) |\sigma|^{\frac{1}{2}} z + p_3 z^2 \quad (\text{C.1})$$

onde p_1 , p_2 , e p_3 são defindos em (3.5). Considere a seguinte notação

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \zeta_1(t)^T & \zeta_2(t)^T \end{bmatrix}^T := \begin{bmatrix} \sqrt{L} \text{sign}(\sigma) |\sigma|^{\frac{1}{2}} & z \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Note que esta notação permite reescrever (C.1) como $V = \zeta^T P \zeta$, com $P > 0$ dado por (3.5). Uma vez que a Hipótese (A1) garante que $L(t) > 0$ é um sinal limitado, infere-se que $V(t, \sigma, z)$ é uma função positiva definida com respeito a (σ, z) , contínua e radialmente ilimitada. A derivada temporal de $V(t, \sigma, z)$ é dada por

$$\dot{V} = \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \quad (\text{C.3})$$

Portanto, a expressão para \dot{V} pode ser deduzida em função de $\dot{\zeta}_1$ e $\dot{\zeta}_2$. Note de (3.1) que $\forall \sigma(t) \neq 0$, $\dot{\zeta}_1$ é dado por

$$\dot{\zeta}_1(t) = \frac{\dot{L}(t)}{2\sqrt{L(t)}} \text{sign}(\sigma) |\sigma|^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{L(t)}}{2|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \left(-\alpha(t) \text{sign}(\sigma) |\sigma|^{\frac{1}{2}} + z + \Phi \right) \quad (\text{C.4})$$

Definindo $\Phi(t, \sigma)$ como em (3.3) e $\alpha(t)$ como em (3.2), note que (C.4) pode ser reescrito em função da notação proposta em (C.2)

$$\dot{\zeta}_1(t) = \frac{\sqrt{L(t)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{\alpha_0}{2} \zeta_1 + \frac{1}{2} \zeta_2 \right) \quad (\text{C.5})$$

Como $\zeta_2(t) = z(t)$, sabe-se por (3.1) que

$$\dot{\zeta}_2(t) = \beta(t) \text{sign}(\sigma) + d(t) \quad (\text{C.6})$$

Definindo $\beta(t)$ como em (3.2), note que $\forall \sigma(t) \neq 0$, (C.6) pode ser reescrito como

$$\dot{\zeta}_2(t) = \frac{\sqrt{L(t)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \left(-\beta_0 \sqrt{L(t)} \text{sign}(\sigma) |\sigma|^{\frac{1}{2}} + \frac{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{L(t)}} d(t) \right)$$

Definindo $\Delta(t, \sigma) = \frac{|\sigma|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{L(t)}} d(t)$ e usando a notação proposta em (C.2) tem-se que

$$\dot{\zeta}_2(t) = \frac{\sqrt{L(t)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} (-\beta_0 \zeta_1 + \Delta(t, \sigma)) \quad (\text{C.7})$$

Agrupando (C.5) e (C.7), $\dot{\zeta}(t)$ pode ser escrito como

$$\dot{\zeta}(t) = \frac{\sqrt{L(t)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} (A_0 \zeta(t) + B_0 \Delta(t, \sigma)), \quad \forall \sigma(t) \neq 0 \quad (\text{C.8})$$

onde A_0 e B_0 são dados por (3.4). Reescrevendo (C.3) em função de (C.8) obtém-se a seguinte expressão

$$\dot{V} = \frac{\sqrt{L(t)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} (\zeta^T (PA_0 + A_0^T P) \zeta + 2\zeta^T PB_0 \Delta) \quad (\text{C.9})$$

Uma vez que pela desigualdade de Young, $2\zeta^T PB_0 \Delta \leq |B_0^T P \zeta|^2 + |\Delta(t, \sigma)|^2$, (C.9) pode ser reescrito como

$$\dot{V} \leq \frac{\sqrt{L(t)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} (\zeta^T (PA_0 + A_0^T P + PB_0 B_0^T P) \zeta + |\Delta(t, \sigma)|^2) \quad (\text{C.10})$$

De acordo com a definição de $\Delta(t, \sigma)$, como $|\zeta_1|^2 = L(t)|\sigma|$ sabe-se que

$$|\Delta(t, \sigma)|^2 = \frac{|\sigma|}{L(t)} |d(t)|^2 = \left(\frac{d(t)}{L(t)} \right)^2 |\zeta_1|^2$$

Como a Hipótese (A1) garante que $|d(t)| < L(t) \forall t \geq 0$, observa-se que um limitante superior para $|\Delta(t, \sigma)|^2$ é dado por

$$|\Delta(t, \sigma)|^2 < |\zeta_1|^2 = \zeta^T C_0^T C_0 \zeta \quad (\text{C.11})$$

onde C_0 é definido em (3.4). Logo, substituindo (C.11) em (C.10) segue que

$$\dot{V} \leq \frac{\sqrt{L(t)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \zeta^T (PA_0 + A_0^T P + PB_0 B_0^T P + C_0^T C_0) \zeta \quad (\text{C.12})$$

Usando a desigualdade apresentada em (3.6), infere-se que \dot{V} pode ser reescrito como

$$\dot{V} \leq -\epsilon_0 \frac{\sqrt{L(t)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} \zeta^T P \zeta = -\epsilon_0 \frac{\sqrt{L(t)}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} V \quad (\text{C.13})$$

Pela desigualdade de Rayleigh, sabe-se que $V \geq \lambda_{\min}(P) \|\zeta\|^2 \geq \lambda_{\min}(P) |\zeta_1|^2$. Consequentemente, $\sqrt{V} \geq \sqrt{\lambda_{\min}(P)} |\zeta_1| = \sqrt{\lambda_{\min}(P)} \sqrt{L(t)} |\sigma|^{\frac{1}{2}}$, permitindo que (C.13) possua um limitante superior $\forall \sigma(t) \neq 0$ dado por

$$\dot{V} \leq -\epsilon_0 L(t) \sqrt{\lambda_{\min}(P)} \sqrt{V} < -\epsilon_0 l_0 \sqrt{\lambda_{\min}(P)} \sqrt{V} = -\eta \sqrt{V} \quad (\text{C.14})$$

uma vez que, pela Hipótese (A1), $L(t) > l_0 \forall t \geq 0$. É válido frisar que o resultado apresentado acima é satisfeito sempre que $\sigma(t) \neq 0$. Logo, a função $V(t)$ descrita em (C.1) é contínua e diferenciável exceto no conjunto $S = \{(\sigma, z) : \sigma(t) = 0\}$. Note ainda que sempre que $\sigma(t) = 0$, $\dot{\sigma}(t) = z(t)$. Portanto, as trajetórias de (3.1) não podem permanecer em $S \setminus \{0\}$, uma vez que $\dot{\sigma}(t) \neq 0$. Logo, a partir do Teorema de Lyapunov para Inclusões Diferenciais [49], conclui-se que $V(t, \sigma, z)$ é uma função de Lyapunov para o sistema (σ, z) . Além disso, garante-se por (C.14) a convergência em tempo finito para a superfície $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. Finalmente, durante o deslizamento, note que $z(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$. \square

C.2 Demonstração do Teorema 3.2

Demonstração. Considere a seguinte variável auxiliar

$$e(t) = \frac{qa_1}{a\beta_0} - r(t) \quad (\text{C.15})$$

onde $q > 1$ é uma margem de segurança constante e desconhecida responsável por garantir que $|\frac{d}{dt} |\bar{u}_{eq}|| < qa_1$, com $a_1 > 0 \in \mathbb{R}$ sendo um limitante superior de $\dot{d}(t)$, conforme apresentado no Teorema 3.2. Baseado em (3.14), a dinâmica de (C.15) é

dada por

$$\dot{e}(t) = -\dot{r}(t) = -\gamma|\delta(t)| \quad (\text{C.16})$$

Por sua vez, a dinâmica de $\delta(t)$ pode ser obtida por [\(3.10\)](#)

$$\dot{\delta}(t) = \dot{l}(t) - \frac{1}{a\beta_0} \frac{d}{dt} |\bar{u}_{eq}(t)| \quad (\text{C.17})$$

O subsistema (δ, e) será agora analisado de acordo com a seguinte função candidata de Lyapunov

$$V(\delta, e) = \frac{\delta^2}{2} + \frac{e^2}{2\gamma} \quad (\text{C.18})$$

Note que esta função é positiva definida, contínua e radialmente ilimitada com respeito a (δ, e) . Sua derivada temporal é dada por

$$\dot{V} = \delta(t)\dot{\delta}(t) + \frac{1}{\gamma}e(t)\dot{e}(t) \quad (\text{C.19})$$

Para fins didáticos, os termos $\delta(t)\dot{\delta}(t)$ e $e(t)\dot{e}(t)$ serão estudados separadamente. Por [\(C.17\)](#), note que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\delta(t)\dot{\delta}(t) = \delta(t)\dot{l}(t) - \frac{\delta(t)}{a\beta_0} \frac{d}{dt} |\bar{u}_{eq}(t)| \leq \delta(t)\dot{l}(t) + \frac{1}{a\beta_0} \left| \frac{d}{dt} |\bar{u}_{eq}(t)| \right| |\delta(t)| \quad (\text{C.20})$$

Como por definição, $\left| \frac{d}{dt} |\bar{u}_{eq}(t)| \right| < qa_1$, [\(C.20\)](#) pode ser reescrito como

$$\delta(t)\dot{\delta}(t) = \delta(t)\dot{l}(t) + \frac{qa_1}{a\beta_0} |\delta(t)| \quad (\text{C.21})$$

Reescrevendo $\dot{l}(t)$ como em [\(3.13\)](#) e usando a definição de $e(t)$ dada por [\(C.15\)](#), tem-se que

$$\delta(t)\dot{\delta}(t) \leq -\rho(t)|\delta(t)| + \frac{qa_1}{a\beta_0} |\delta(t)| = -r_0|\delta(t)| + e(t)|\delta(t)| \quad (\text{C.22})$$

uma vez que $\rho(t) = r_0 + r(t)$. Por sua vez, note que $\frac{1}{\gamma}e(t)\dot{e}(t)$ pode ser escrito em função de [\(C.16\)](#)

$$\frac{1}{\gamma}e(t)\dot{e}(t) = -e(t)|\delta(t)| \quad (\text{C.23})$$

Finalmente reescrevendo [\(C.19\)](#) em função de [\(C.22\)](#) e [\(C.23\)](#), tem-se que

$$\dot{V} = -r_0|\delta(t)| \quad (\text{C.24})$$

Como $\dot{V} \leq 0$ e $V(\delta, e)$ é uma função radialmente ilimitada, infere-se que ambas as variáveis do subsistema $(\delta(t), e(t))$ são limitadas. Além disso, note de [\(C.15\)](#) que a limitação de $e(t)$ implica que $r(t)$ também é um sinal limitado. De modo

semelhante, por (3.10), um limitante superior para $L(t)$ pode ser obtido baseando-se nas restrições impostas no Teorema 3.2

$$|L(t)| \leq |\delta(t)| + \frac{qa_0}{a\beta_0} + \epsilon$$

onde $q > 1 \in \mathbb{R}$ novamente é definido como uma margem de segurança desconhecida capaz de garantir que $|\bar{u}_{eq}(t)| < qa_0$. Como $\delta(t)$ é um sinal limitado, $L(t)$ permanece limitado. Similarmente é possível inferir por (C.17) que $\dot{\delta}(t)$ também é um sinal limitado

$$|\dot{\delta}(t)| \leq |\dot{i}(t)| + \left| \frac{d}{dt} \bar{u}_{eq}(t) \right| \leq |\rho(t)| + \frac{qa_1}{a\beta_0}$$

Uma vez que $r(t)$ é limitado, $\rho(t)$ também será, portanto $|\dot{\delta}(t)|$ é um sinal limitado. Esta condição garante que $\delta(t)$ é um sinal absolutamente contínuo, logo por (C.24) sabe-se que

$$\begin{aligned} -r_0 \int_0^t |\delta(t)| dt &\geq V(t) - V(0) \\ r_0 \int_0^t |\delta(t)| dt &\leq V(0) - V(t) \leq V(0) \end{aligned} \tag{C.25}$$

Portanto, garante-se através do Lemma de Barbalat que, conforme $t \rightarrow \infty$, $\delta(t) \rightarrow 0$ [39]. Logo, há um tempo t_1 no qual $|\delta(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$, $\forall t \geq t_1$. Por sua vez, pode ser inferido de (3.10) que a seguinte desigualdade é satisfeita, para todo $t \geq t_1$

$$\left| L(t) - \frac{1}{a\beta_0} |\bar{u}_{eq}(t)| - \epsilon \right| = |\delta(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Então

$$L(t) - \frac{1}{a\beta_0} |\bar{u}_{eq}(t)| - \epsilon > -\frac{\epsilon}{2}$$

Como a e ϵ são margens de segurança definidas de acordo com (3.11), sabe-se que

$$L(t) > \frac{1}{a\beta_0} |\bar{u}_{eq}(t)| + \frac{\epsilon}{2} > |u_{eq}(t)| = |d(t)|$$

Concluindo, desta forma a demonstração. \square

C.3 Demonstração do Teorema 3.3

Demonstração. Seja a seguinte função candidata de Lyapunov para o sistema (3.25):

$$V(t, \sigma, z) = p_1 \|\phi_1(\sigma)\|^2 L(t) - 2p_2 \phi_1(\sigma)^T z L(t)^{\frac{1}{2}} + p_3 \|z\|^2 \tag{C.26}$$

onde p_1 , p_2 , e p_3 são constantes positivas que garantem a positividade da matriz simétrica

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & -p_2 \\ -p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{C.27})$$

Considere a seguinte notação:

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L(t)}\phi_1(\sigma) \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{C.28})$$

Note que, com esta nova notação, a função de Lyapunov [\(C.26\)](#) pode ser reescrita como

$$V = \zeta^T P_n \zeta, \quad P_n = P \otimes I_n \quad (\text{C.29})$$

Uma vez que $P = P^T > 0$, pode-se verificar por [A.1.3](#) e [A.1.4](#) que P_n é uma matriz positiva definida. Por sua vez, a Hipótese (A6) garante que $L(t) > 0$. Logo, $V(\sigma, z, t)$ é uma função positiva definida, contínua e radialmente ilimitada com respeito a $(\sigma(t), z(t))$. Note ainda que $V(\sigma, z, t)$ é diferenciável em todo ponto, exceto, possivelmente, no conjunto S descrito na Hipótese (A1). Neste caso, segue de [\(3.25\)](#) que a derivada no tempo de $\zeta(t)$ é dada por:

$$\dot{\zeta}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1(t) \\ \dot{\zeta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{L(t)}\dot{\phi}_1(\sigma) + \frac{d\sqrt{L(t)}}{dt}\phi_1(\sigma) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

Por simplicidade, $\dot{\zeta}_1(t)$ e $\dot{\zeta}_2(t)$ serão estudados separadamente. Utilizando a regra da cadeia, note que

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{\dot{L}(t)}{2\sqrt{L(t)}}\phi_1(\sigma) + \sqrt{L(t)}\phi_1'(\sigma)\dot{\sigma}(t)$$

Baseado em [\(3.25\)](#), temos que

$$\dot{\zeta}_1(t) = \frac{\dot{L}(t)}{2\sqrt{L(t)}}\phi_1(\sigma) + \sqrt{L(t)}\phi_1'(\sigma) (-\alpha(t)\phi_1(\sigma) + z(t) + \Phi(t, \phi_1))$$

É válido frisar que a Hipótese (A6) garante que $L(t) > \|d(\sigma, t)\|$ após um tempo finito t_s pois assume que uma lei de adaptação apropriada para este ganho já foi definida. Como essa lei ainda não é conhecida, o termo $\dot{L}(t)$ não pode ser expandido e, conseqüentemente, incorporado na análise. Por este motivo, o termo $\frac{\dot{L}(t)}{2\sqrt{L(t)}}\phi_1(\sigma)$ será cancelado com uma escolha apropriada de $\Phi(t, \phi_1)$, apresentada em [\(3.27\)](#).

Definindo $\alpha(t)$ como em [\(3.26\)](#) e usando a notação proposta em [\(C.28\)](#), $\dot{\zeta}_1(t)$

pode ser reescrito como

$$\dot{\zeta}_1(t) = \sqrt{L(t)} (-\alpha_0 \phi'_1(\sigma) \zeta_1(t) + \phi'_1(\sigma) \zeta_2(t)) \quad (\text{C.30})$$

Como $\dot{\zeta}_2(t) = \dot{z}(t)$, definindo $\beta(t)$ como em (3.26) e aplicando em (3.25), tem-se que

$$\dot{\zeta}_2(t) = -\beta_0 L(t) \phi_2(\sigma) + d(\sigma, t)$$

Isolando o termo $\sqrt{L(t)}$ e usando a Hipótese (A3), pode-se verificar que

$$\dot{\zeta}_2(t) = \sqrt{L(t)} \left(-\beta_0 \phi'_1(\sigma) \phi_1(\sigma) \sqrt{L(t)} + \frac{d(\sigma, t)}{\sqrt{L(t)}} \right)$$

Considerando a notação apresentada em (C.28), $\dot{\zeta}_2(t)$ pode ser reescrito como

$$\dot{\zeta}_2 = \sqrt{L} (-\beta_0 \phi'_1(\sigma) \zeta_1(t) + \Delta(\sigma, t)) \quad (\text{C.31})$$

onde

$$\Delta(\sigma, t) = \frac{d(\sigma, t)}{\sqrt{L(t)}} \quad (\text{C.32})$$

Reescrevendo (C.30) e (C.31) em uma forma compacta, temos que $\forall \sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$, $\dot{\zeta}(t)$ é dado por

$$\dot{\zeta}(t) = \sqrt{L(t)} (\bar{A}_0 \zeta(t) + \bar{B}_0 \Delta(\sigma, t)), \quad (\text{C.33})$$

onde

$$\bar{A}_0 = A_0 \otimes \phi'_1(\sigma), \quad A_0 = \begin{bmatrix} -\alpha_0 & 1 \\ -\beta_0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \bar{B}_0 = B_0 \otimes I_n, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

Portanto, a derivada temporal de $V(\sigma, z, t)$ para todo $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$ é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \zeta^T P_n \dot{\zeta} + \dot{\zeta}^T P_n \zeta \\ &= \sqrt{L(t)} (\zeta^T (P_n \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T P_n) \zeta + 2 \zeta^T P_n \bar{B}_0 \Delta) \\ &= \sqrt{L(t)} (\zeta^T \bar{Q} \zeta + 2 \zeta^T P_n \bar{B}_0 \Delta), \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

onde $\bar{Q} = P_n \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T P_n$. Note que usando as propriedades do produto de Kronecker

[A.1.1](#), [A.1.2](#), e [A.1.3](#) pode-se reescrever \bar{Q} como

$$\begin{aligned}
\bar{Q} &= (P \otimes I_n)(A_0 \otimes \phi'_1(\sigma)) + (A_0 \otimes \phi'_1(\sigma))^T(P \otimes I_n) \\
&= (PA_0 \otimes \phi'_1(\sigma)) + (A_0^T \otimes \phi'_1(\sigma)^T)(P \otimes I_n) \\
&= (PA_0 \otimes \phi'_1(\sigma)) + (A_0^T P \otimes \phi'_1(\sigma)) \\
&= (PA_0 + A_0^T P) \otimes \phi'_1(\sigma) \\
&= Q \otimes \phi'_1(\sigma)
\end{aligned} \tag{C.36}$$

onde, de acordo com [\(C.27\)](#) e [\(C.34\)](#) sabe-se que

$$Q = PA_0 + A_0^T P = \begin{bmatrix} 2(\beta_0 p_2 - \alpha_0 p_1) & p_1 + \alpha_0 p_2 - \beta_0 p_3 \\ p_1 + \alpha_0 p_2 - \beta_0 p_3 & -2p_2 \end{bmatrix}$$

Definindo, por simplicidade, $p_1 = \beta_0 p_3 - \alpha_0 p_2$, a matriz Q pode ser escrita como

$$Q = \begin{bmatrix} 2((\beta_0 + \alpha_0^2)p_2 - \alpha_0 \beta_0 p_3) & 0 \\ 0 & -2p_2 \end{bmatrix}$$

Note que se p_3 for definido tal que

$$p_3 > \frac{\beta_0 + \alpha_0^2}{\alpha_0 \beta_0}, \tag{C.37}$$

então, a matriz Q se torna negativa definida. Neste caso, note que a Propriedade (P1) garante que o termo quadrático $\zeta(t)^T \bar{Q} \zeta(t)$ possui um limitante superior dado por

$$\begin{aligned}
\zeta(t)^T \bar{Q} \zeta(t) &= \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2((\beta_0 + \alpha_0^2)p_2 - \alpha_0 \beta_0 p_3) \phi'_1(\sigma) & 0 \\ 0 & -2p_2 \phi'_1(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} \\
&= 2((\beta_0 + \alpha_0^2)p_2 - \alpha_0 \beta_0 p_3) \zeta_1^T \phi'_1(\sigma) \zeta_1 - 2p_2 \zeta_2^T \phi'_1(\sigma) \zeta_2 \\
&\leq \lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) (2((\beta_0 + \alpha_0^2)p_2 - \alpha_0 \beta_0 p_3) \|\zeta_1\|^2 - 2p_2 \|\zeta_2\|^2) \\
&= \lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) \bar{\zeta}^T Q \bar{\zeta}
\end{aligned} \tag{C.38}$$

onde $\bar{\zeta}(t) = \left[\|\zeta_1(t)\| \quad \|\zeta_2(t)\| \right]^T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $Q = Q^T < 0$.

Por sua vez, o termo $2\zeta^T P_n \bar{B}_0 \Delta(\sigma, t)$ pode ser expandido através da propriedade

do produto de Kronecker (A.1.2) como

$$\begin{aligned}
2\zeta^T P_n \bar{B}_0 \Delta(\sigma, t) &= 2\zeta^T (P \otimes I_n)(B_0 \otimes I_n) \Delta \\
&= 2\zeta^T (P B_0 \otimes I_n) \Delta \\
&= 2(-p_2 \zeta_1^T \Delta + p_3 \zeta_2^T \Delta) \\
&\leq 2(p_2 |\zeta_1^T \Delta| + p_3 |\zeta_2^T \Delta|)
\end{aligned} \tag{C.39}$$

Uma vez que, pela desigualdade de Schwarz, $|x^T y| \leq \|x\| \|y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, substituindo $\Delta(\sigma, t)$ por (C.32), (C.39) possui um limitante superior dado por

$$2\zeta^T P_n \bar{B}_0 \Delta \leq \frac{1}{\|\phi_1\|} (2p_2 \|\zeta_1\| + 2p_3 \|\zeta_2\|) \frac{\|\phi_1\| \|d\|}{\sqrt{L}}, \forall \sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S \tag{C.40}$$

C.3.1 Forward Completeness

Para que as propriedades uniformes globais de estabilidade e convergência para a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ sejam asseguradas, deve-se antes garantir que as trajetórias do sistema (3.25) não podem escapar em tempo finito. Portanto, considere as desigualdade (C.40). Note que (C.35) possui um limitante superior dado por

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq (2p_2 \|\zeta_1\| + 2p_3 \|\zeta_2\|) \|d\| \\
&\leq (2p_2 \|\zeta_1\| + 2p_2 \|\zeta_2\| + 2p_3 \|\zeta_1\| + 2p_3 \|\zeta_2\|) \|d\| \\
&= (2p_2 + 2p_3) (\|\zeta_1\| + \|\zeta_2\|) \|d\| \\
&\leq (4p_2 + 4p_3) \|\zeta\| \|d\|
\end{aligned} \tag{C.41}$$

De acordo com o Teorema 3.3, sabe-se que $\|\dot{d}(\sigma, t)\| \leq a_1$, onde a_1 é uma constante positiva limitada porém desconhecida. Logo, infere-se que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [\|d(\sigma, t)\|] &\leq \|\dot{d}(\sigma, t)\| \leq a_1 \\
\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \|d(\sigma, t)\| dt &\leq \int_{t_0}^t a_1 dt \\
\|d(\sigma, t)\| - \|d(\sigma(t_0), t_0)\| &\leq a_1(t - t_0) \leq a_1 t, \forall t_0 \geq 0 \\
\|d(\sigma, t)\| &\leq a_1 t + d_0, \forall t \geq t_0
\end{aligned}$$

onde $d_0 \geq \|d(\sigma(t_0), t_0)\| > 0$ é uma constante desconhecida. Substituindo esta desigualdade em (C.41), segue que

$$\dot{V} \leq (4p_2 + 4p_3) (a_1 t + d_0) \|\zeta\| \tag{C.42}$$

Uma vez que pela desigualdade de Rayleigh, $\sqrt{V} \geq \sqrt{\lambda_{\min}(P_n)} \|\zeta\|$, é possível reescrever (C.42) em função do seguinte limitante superior

$$\dot{V} \leq k^* \sqrt{V} (a_1 t + d_0) \quad (\text{C.43})$$

onde $k^* = \frac{4p_2 + 4p_3}{\sqrt{\lambda_{\min}(P_n)}} > 0$. Resolvendo a equação de comparação

$$\dot{v} = k^* \sqrt{v} (a_1 t + d_0), \quad v(t_0) = v_0 \geq 0$$

tem-se que

$$v(t) = \frac{1}{16} (\kappa_1^2 t^4 + 4\kappa_1 \kappa_2 t^3 + \kappa_3 t^2 + \kappa_4 t + \kappa_5), \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{C.44})$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= k^* a_1, \\ \kappa_2 &= k^* d_0, \\ \kappa_3 &= 4\kappa_2^2 - 4\kappa_1 \kappa_2 t_0 + 2\kappa_1^2 t_0^2 + 8\kappa_1 v_0^{\frac{1}{2}} \\ \kappa_4 &= -8\kappa_2^2 t_0 - 4\kappa_1 \kappa_2 t_0^2 + 16\kappa_2 v_0^{\frac{1}{2}} \\ \kappa_5 &= 4\kappa_2^2 t_0^2 + 4\kappa_1 \kappa_2 t_0^3 + \kappa_1^2 t_0^4 - 16\kappa_2 t_0 v_0^{\frac{1}{2}} - 8\kappa_1 t_0^2 v_0^{\frac{1}{2}} + 16v_0 \end{aligned}$$

Nota-se que $v(t)$ não diverge em tempo finito. Portanto, através do princípio da comparação, verifica-se que a função candidata em questão é limitada por

$$V(\sigma, z, t) \leq v(t), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (\text{C.45})$$

Portanto, garante-se que as variáveis de estado $\sigma(t)$ e $z(t)$ não divergem em tempo finito.

C.3.2 Convergência Global em Tempo Finito

Visando demonstrar a convergência global em tempo finito das trajetórias do sistema (3.25) para a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$, considere novamente a relação (C.40). De acordo com (C.28), $\|\zeta_1(t)\| = \sqrt{L(t)} \|\phi_1(\sigma)\|$. Logo, como a Hipótese (A6) garante que $L(t) > \|d(\sigma, t)\| \forall t \geq t_s$, sabe-se que

$$2\zeta^T P_n \bar{B}_0 \Delta \leq \frac{1}{\|\phi_1\|} (2p_2 \|\zeta_1\|^2 + 2p_3 \|\zeta_2\| \|\zeta_1\|) \quad (\text{C.46})$$

Por sua vez, note que a Hipótese (A5) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &\leq \|\phi_2(\sigma)\| = \lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) \|\phi_1(\sigma)\| \\ \frac{1}{\|\phi_1\|} &\leq c\lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Substituindo (C.47) em (C.46) tem-se

$$\begin{aligned} 2\zeta^T P_n \bar{B}_0 \Delta &\leq \lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) (2cp_2 \|\zeta_1\|^2 + 2cp_3 \|\zeta_2\| \|\zeta_1\|) \\ &= \lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) \bar{\zeta}^T \begin{bmatrix} 2cp_2 & cp_3 \\ cp_3 & 0 \end{bmatrix} \bar{\zeta} \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

Reescrevendo $\dot{V}(\sigma, z, t)$ em função de (C.38) e (C.48), segue que

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\sqrt{L}\lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) \bar{\zeta}^T \begin{bmatrix} 2(\alpha_0\beta_0 p_3 - p_2(\alpha_0^2 + \beta_0 + c)) & -cp_3 \\ -cp_3 & 2p_2 \end{bmatrix} \bar{\zeta} \\ &= -\sqrt{L}\lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) \bar{\zeta}^T W \bar{\zeta} \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Note que definindo α_0 e β_0 de acordo com a desigualdade apresentada em (3.35) e p_3 como

$$p_3 = \frac{\kappa p_2}{\alpha_0 \beta_0} (\alpha_0^2 + \beta_0 + c), \quad \kappa > 1 \quad (\text{C.50})$$

então W se torna positiva definida. Note que a escolha de p_3 feita em (C.50) satisfaz (C.37). Portanto, no subespaço $\{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S\}$, $\dot{V}(\sigma, z, t)$ é uma função negativa definida, garantindo a limitação das trajetórias de (3.25).

Pela desigualdade de Rayleigh, sabe-se que $\forall \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_{\min}(W) \|\bar{\zeta}\|^2 \leq \bar{\zeta}^T W \bar{\zeta}$ e

$$\lambda_{\min}(P_n) \|\zeta\|^2 \leq V(\sigma, z, t) = \zeta^T P_n \zeta \leq \lambda_{\max}(P_n) \|\zeta\|^2 \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (\text{C.51})$$

Como $\|\bar{\zeta}(t)\| = \|\zeta(t)\|$, (C.49) possui um limitante superior dado por

$$\dot{V} \leq -\sqrt{L}\lambda_{\min}(\phi'_1(\sigma)) \frac{\lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\max}(P_n)} V \quad (\text{C.52})$$

Note de (C.47) que, $\forall \sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$, (C.52) pode ser reescrito como

$$\dot{V} \leq -\frac{\sqrt{L}}{c\|\phi_1\|} \frac{\lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\max}(P_n)} V \quad (\text{C.53})$$

Uma vez que $\|\zeta\| \geq \|\zeta_1\| = \sqrt{L}\|\phi_1(\sigma)\|$, sabe-se por (C.51), que $\sqrt{V} \geq$

$\sqrt{\lambda_{\min}(P_n)}\sqrt{L(t)}\|\phi_1(\sigma)\|$. Portanto, (C.52) satisfaz a seguinte desigualdade

$$\dot{V} \leq -\frac{L}{c} \frac{\lambda_{\min}(W)\sqrt{\lambda_{\min}(P_n)}}{\lambda_{\max}(P_n)}\sqrt{V} \quad (\text{C.54})$$

Como a Hipótese (A6) garante que $L(t) > l_0 \forall t < t_s$ e por (3.44) sabe-se que $L(t) > \frac{\epsilon}{2} \forall t \geq t_s$, tem-se que $\dot{V} \leq -\bar{\kappa}\sqrt{V} \forall t \geq 0$, onde $\bar{\kappa}$ é uma constante positiva dada por

$$\bar{\kappa} = \frac{\min(l_0, \frac{\epsilon}{2})}{c} \frac{\lambda_{\min}(W)\sqrt{\lambda_{\min}(P_n)}}{\lambda_{\max}(P_n)}$$

Note que a função candidata de Lyapunov definida em (C.26) é contínua e diferenciável em todo $\sigma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Como a Hipótese (A1) garante que as trajetórias de (3.25) não podem permanecer em $S \setminus \{0\}$, $V(\sigma, z, t)$ é uma função continuamente decrescente. Por sua vez, o Teorema de Lyapunov generalizado para inclusões diferenciais [49] garante que as trajetórias do sistema são atraídas globalmente para a superfície $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$ em tempo finito. Este resultado é alcançado pois o Teorema de Lyapunov generalizado exige apenas a continuidade e não a diferenciabilidade da função $V(\sigma, z, t)$. Adicionalmente, a solução da equação de comparação

$$\dot{v} = -\bar{\kappa}\sqrt{v}, \quad \forall t \geq t_k$$

onde $v(t_k) = v_k > 0$ é dada por

$$v(t) = \left(v(t_k) - \frac{\bar{\kappa}}{2}(t - t_k)\right)^2$$

Logo $V(\sigma, z, t)$ converge em tempo finito para zero após um tempo T limitado por

$$T \leq t_k + \frac{2V^{\frac{1}{2}}(\sigma(t_k), z(t_k), t_k)}{\bar{\kappa}}$$

Finalmente, note que uma vez que a Hipótese (A6) garante que $L(t) > 0 \forall t \geq 0$, $V(\sigma, z, t) = 0$ implica $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$. Portanto, as trajetórias do sistema são atraídas globalmente em tempo finito para a superfície de deslizamento $\sigma(t) = \dot{\sigma}(t) = 0$. \square

C.4 Demonstração do Teorema 3.4

Demonstração. Esta demonstração segue os passos da prova proposta em [25], com os devidos ajustes para o caso generalizado.

Considere a seguinte variável auxiliar

$$e(t) = \frac{bqa_1}{a\beta_0} - r(t), \quad (\text{C.55})$$

onde $q > 1$ representa uma margem de segurança usada para garantir que

$$\left| \frac{d}{dt} \|\bar{u}_{eq}(t)\| \right| \leq \|\dot{\bar{u}}_{eq}(t)\| < qa_1.$$

Sabe-se, por (3.42), que a derivada no tempo de (C.55) é dada por

$$\dot{e}(t) = -\gamma|\delta(t)| \quad (\text{C.56})$$

Por sua vez, pode ser constatado por (3.38) que

$$\dot{\delta}(t) = \dot{l}(t) - \frac{b}{a\beta_0} \frac{d}{dt} \|\bar{u}_{eq}(t)\|. \quad (\text{C.57})$$

Conhecida as dinâmicas de $\delta(t)$ e $e(t)$, considera-se a seguinte função candidata de Lyapunov para a análise de estabilidade e convergência destas variáveis.

$$V(\delta, e) = \frac{\delta^2(t)}{2} + \frac{e^2(t)}{2\gamma} \quad (\text{C.58})$$

Note que a função adotada em (C.58) é positiva definida e radialmente ilimitada com respeito a $\delta(t)$ e $e(t)$. Sua derivada temporal é dada por

$$\dot{V}(\delta, e) = \delta(t)\dot{\delta}(t) + \frac{1}{\gamma}e(t)\dot{e}(t) \quad (\text{C.59})$$

Baseado em (3.41) e (C.57), tem-se que

$$\begin{aligned} \delta(t)\dot{\delta}(t) &= -\rho(t)|\delta(t)| - \frac{b\delta(t)}{a\beta_0} \frac{d}{dt} \|\bar{u}_{eq}(t)\| \\ &\leq -\rho(t)|\delta(t)| + \frac{b|\delta(t)|}{a\beta_0} \left| \frac{d}{dt} \|\bar{u}_{eq}(t)\| \right| \\ &\leq -\rho(t)|\delta(t)| + \frac{bqa_1}{a\beta_0} |\delta(t)| \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Como $\rho(t) = r_0 + r(t)$, baseado na definição de $e(t)$, (C.60) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \delta\dot{\delta} &\leq -r_0|\delta| + \left(\frac{bqa_1}{a\beta_0} - r(t) \right) |\delta| \\ &= -r_0|\delta| + e(t)|\delta| \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

Por sua vez, de (C.56), note que

$$\frac{e\dot{e}}{\gamma} = -e(t)|\delta| \quad (\text{C.62})$$

Então, substituindo (C.61) e (C.62) em (C.59), obtém-se um limitante superior para $\dot{V}(\delta, e)$ dado por

$$\dot{V} \leq -r_0|\delta(t)| \quad (\text{C.63})$$

Baseado nos resultados acima, segue que $\dot{V}(\delta, e) \leq 0$, o que garante a limitação dos sinais $\delta(t)$ e $e(t)$. Note ainda que uma vez que $e(t)$ é limitado, por (C.55) infere-se que $r(t)$ também é limitado.

Observe que um limitante superior para $\dot{\delta}(t)$ pode ser obtido de (C.57)

$$|\dot{\delta}(t)| \leq |\dot{i}(t)| + \frac{b}{a\beta_0} \left| \frac{d}{dt} \|\bar{u}_{eq}(t)\| \right| \leq \rho(t) + \frac{bqa_1}{a\beta_0}$$

Como $r(t)$ é um sinal limitado, conseqüentemente $\rho(t)$ também é. Logo, $|\dot{\delta}(t)|$ é um sinal limitado, garantindo que $\delta(t)$ seja absolutamente contínuo.

Como $V(\delta(t), e(t)) \geq 0 \forall t$, por (C.63), a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\begin{aligned} -r_0 \int_0^t |\delta(t)| dt &\geq V(t) - V(0) \\ r_0 \int_0^t |\delta(t)| dt &\leq V(0) - V(t) \leq V(0) \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

Uma vez que $|\delta(t)|$ é absolutamente contínuo, o Lema de Barbalat garante que $\delta(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$ [39]. Portanto, há um tempo finito t_k apresentado na Hipótese (A6) onde $|\delta(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \forall t \geq t_k$. Usando (3.38) pode-se concluir que o ganho adaptativo $L(t)$ satisfaz a seguinte desigualdade, para todo $t \geq t_k$

$$\left| L(t) - \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| - \epsilon \right| = |\delta| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Logo,

$$L(t) - \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| - \epsilon \geq -\frac{\epsilon}{2} \quad (\text{C.65})$$

Como, por definição, $\frac{b}{a\beta_0} > 1$, pode-se inferir de (3.39), que

$$L(t) \geq \frac{b}{a\beta_0} \|\bar{u}_{eq}(t)\| + \frac{\epsilon}{2} > \|u_{eq}(t)\| = \|d(\sigma, t)\| \quad (\text{C.66})$$

concluindo, assim, a demonstração. \square