



ALGORITMO *SUPER-TWISTING* MULTIVARIÁVEL PARA SISTEMAS COM
MATRIZ DE ENTRADA INCERTA SEM EXIGÊNCIA DE SIMETRIA

Timon Asch Keijock

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Eduardo Vieira Leão Nunes
Liu Hsu

Rio de Janeiro
Março de 2019

ALGORITMO *SUPER-TWISTING* MULTIVARIÁVEL PARA SISTEMAS COM
MATRIZ DE ENTRADA INCERTA SEM EXIGÊNCIA DE SIMETRIA

Timon Asch Keijock

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Eduardo Vieira Leão Nunes, D.Sc.

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Prof. Amit Bhaya, Ph.D

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MARÇO DE 2019

Keijock, Timon Asch

Algoritmo *Super-Twisting* Multivariável para Sistemas com Matriz de Entrada Incerta Sem Exigência de Simetria/Timon Asch Keijock. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XI, 109 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Eduardo Vieira Leão Nunes

Liu Hsu

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 89 – 93.

1. Sistemas Incertos. 2. Controle por modos deslizantes. 3. Controle a Estrutura Variável. 4. Controle *Super-Twisting*. I. Nunes, Eduardo Vieira Leão *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Aos meus pais, Bahime e Thirza,
pelo incentivo.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais, Thirza Christiane Asch e Bahime Velasques Keijock, que me deram a visão de que estudo é prazeroso e que sempre fizeram o melhor para que eu pudesse estudar e progredir na vida.

Ao meu orientador Eduardo Vieira Leão Nunes, pela compreensão, suporte e ensinamentos diante das dificuldades da vida.

Ao meu orientador Liu Hsu, pela criteriosa e valiosa avaliação, e comentários que enriqueceram minha percepção sobre como descrever melhor uma ideia.

Por fim, meus agradecimentos ao CNPq/CAPES pelo suporte financeiro, e à COPPE pela oportunidade de realizar o mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ALGORITMO *SUPER-TWISTING* MULTIVARIÁVEL PARA SISTEMAS COM
MATRIZ DE ENTRADA INCERTA SEM EXIGÊNCIA DE SIMETRIA

Timon Asch Keijock

Março/2019

Orientadores: Eduardo Vieira Leão Nunes

Liu Hsu

Programa: Engenharia Elétrica

Nesta dissertação, propõe-se um controlador multivariável por modos deslizantes de ordem superior para sistemas com matriz de entrada incerta e sem exigência de simetria. O esquema de controle é baseado no algoritmo *Super-Twisting* multivariável, e contorna as hipóteses bastante restritivas de simetria ou do total conhecimento da matriz de entrada, anteriormente consideradas na literatura. Nesse contexto, a teoria de estabilidade de Lyapunov é utilizada para mostrar que o controlador proposto é capaz de assegurar propriedades globais de estabilidade e convergência em tempo finito. Resultados de simulação ilustram a efetividade da técnica proposta considerando aplicações práticas. Adicionalmente, é feita uma comparação com outra estratégia recentemente proposta na literatura, que também é baseada no algoritmo *Super-Twisting*, mas que considera que a matriz de entrada é simétrica.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

MULTIVARIABLE SUPER-TWISTING ALGORITHM FOR SYSTEMS WITH
UNCERTAIN INPUT MATRIX AND WITHOUT SYMMETRY
REQUIREMENTS

Timon Asch Keijock

March/2019

Advisors: Eduardo Vieira Leão Nunes

Liu Hsu

Department: Electrical Engineering

In this dissertation, a higher order sliding mode controller is proposed for systems with uncertain input matrix, without symmetric requirements. The solution is based on the multivariable Super-Twisting algorithm, and mitigate the necessity of the rather restrictive hypotheses of symmetry or the total knowledge of the input matrix of the system previously reported in the literature. In this context, the Lyapunov Stability Theory is used to prove that the proposed controller is able to assure global properties of stability and convergence in finite time. Simulation results illustrate the effectiveness of the proposed technique considering practical applications. Furthermore, the efficiency of the proposed controller is compared with another strategy recently proposed in the literature, which is also based on the Super-Twisting algorithm but considers a symmetric input matrix.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Contribuições	3
1.2 Conceitos Básicos	4
1.2.1 Grau Relativo	4
1.3 Organização da dissertação	4
2 Sistemas a Estrutura Variável	6
2.1 Conceitos Básicos	7
2.1.1 Controle por estrutura variável	8
2.1.2 Existência de Modo Deslizante	12
2.1.3 Modos deslizante convencional - SMC	14
2.2 Controle equivalente	15
2.3 Controle por modos deslizante multivariável	18
2.4 Controle vetorial unitário	20
2.5 Atenuação do <i>Chattering</i> no SMC	22
2.6 Controle por modo deslizante de ordem superior - HOSM	24
2.7 <i>Super-Twisting</i>	27
2.7.1 Controle <i>Super-Twisting</i> - STC	28
2.7.2 Controle <i>Super-Twisting</i> por Lyapunov	30
2.7.3 Controle <i>Super-Twisting</i> multivariável	32
2.8 Controle <i>Super-Twisting</i> para matriz de entrada simétrica	36
3 Super-Twisting Multivariável em Sistemas com Matriz de Entrada sem Simetria e Incerta	39
3.1 Definição do problema	40
3.2 Controle <i>Super-Twisting</i>	41
3.3 Análise de estabilidade - Lyapunov	42
3.4 Análise numérica das condições de estabilidade	67
3.4.1 Estrutura de <i>Benchmark</i>	67

3.4.2	Ajuste dos ganhos de controle para simulação	68
3.4.3	Varição do menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, pelo ganho k_3	70
3.4.4	Varição do menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, pelo ganho k_4	70
3.4.5	Varredura do menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, pelo ganho k_4 e por μ	71
3.4.6	Análise da função de Lyapunov	73
3.5	Estudo de caso: Servovisão de um Manipulador Robótico	75
3.5.1	Estrutura do sistema	75
3.5.2	Ganhos de simulação	77
3.5.3	Varredura do menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, pelo ganho k_4 e por $\Delta\theta$	77
3.5.4	Análise da função de Lyapunov para a servovisão	79
3.6	Estudo de caso: Estabilização de um Satélite	82
4	Conclusão e Trabalhos Futuros	87
	Referências Bibliográficas	89
A	Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior	94
A.1	Análise das Trajetórias do Controlador Super Twisting	94
A.2	Prova dos teoremas do Controlador Super Twisting	98
A.2.1	Prova do teorema 2.2	98
A.2.2	Prova do teorema 2.3	99
B	Proposições e Propriedades	100
B.1	Obtenção de \dot{V}	100
B.2	Majorante de \dot{V}_s	104
B.3	Proposição 1	106
B.4	Propriedades da derivada vetorial	107
B.4.1	Derivada da norma	107
B.4.2	Derivada da norma ao quadrado	107
B.4.3	Derivada do quociente envolvendo norma	107
B.4.4	Derivada com termos cruzados	107
B.4.5	Derivada do quociente com termos cruzados envolvendo norma	108
B.5	Propriedades da matriz de rotação e relações trigonométricas	108

Lista de Figuras

2.1	SMC - Plano de fase com controle positivo	9
2.2	SMC - Plano de fase com controle negativo	9
2.3	SMC - Variação no atraso do chaveamento	10
2.4	SMC - Plano de fase geral do sistema	11
2.5	SMC - Desempenho da lei de controle vetorial unitário.	22
2.6	SMC - Controle por saturação	23
2.7	HOSM - Modo Deslizante de Segunda Ordem	26
2.8	STC - Exemplo de trajetória no espaço de estados	27
3.1	STA MIMO - Otimização do ganho k_4 pela variação de k_2	69
3.2	STA MIMO - Menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$ pela variação de k_3	70
3.3	STA MIMO - Menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$ pela variação de k_4	71
3.4	STA MIMO - Superfície do menor autovalor de $\bar{\Omega}$ pela variação de k_4 e μ	71
3.5	STA MIMO - Superfície do menor autovalor de $\bar{\Psi}$ pela variação de k_4 e μ	72
3.6	STA MIMO - Função de Lyapunov no tempo para valores k_{i_b}	73
3.7	STA MIMO - Limite de estabilidade da função de Lyapunov no tempo	74
3.8	STA MIMO - Variável de deslizamento para diferentes valores de μ	74
3.9	Representação do esquema do sistema câmera-robô	75
3.10	STA MIMO - Menor autovalor de K_{ps} e μ em função de $\Delta\theta$	76
3.11	STA MIMO - Superfície do menor autovalor de $\bar{\Omega}$ gerada pela variação de k_4 e $\Delta\theta$, considerando a matriz de entrada como a matriz de rotação	78
3.12	STA MIMO - Superfície do menor autovalor de $\bar{\Psi}$ gerada pela va- riação de k_4 e $\Delta\theta$, considerando a matriz de entrada como a matriz de rotação	78
3.13	STA MIMO - Função de Lyapunov no tempo do problema de servo visão	79
3.14	STA MIMO - Função de Lyapunov no tempo para diferentes valores de μ	80
3.15	STA MIMO - Variável de deslizamento para diferentes valores de μ	81

3.16 STA MIMO - Desempenho do algoritmo <i>Super-Twisting</i> proposto, aplicado em um satélite	85
3.17 STA MIMO - Desempenho do algoritmo <i>Super-Twisting</i> para matri- zes de entrada simétricas, aplicado em um satélite	86
A.1 (--) Trajetória no espaço de estados do controlador <i>Super-Twisting</i> . (-) Curvas majorantes: C1, C2 e C3.	95

Capítulo 1

Introdução

Em casos práticos, os sistemas podem apresentar incertezas na modelagem matemática e possuírem perturbações externas, o que geralmente dificulta o desenvolvimento do projeto do controlador e impacta negativamente no desempenho do sistema em malha fechada. Assim, um dos desafios da engenharia de controle é projetar um controlador capaz de assegurar que o desempenho do sistema seja independente das perturbações e incertezas. Motivado por esse desafio, o desenvolvimento de métodos de controle robusto vem se intensificando cada vez mais, e gerando diferentes formas de abordagens. Em particular, uma das principais abordagens de desenvolvimento de controle robusto é a técnica de controle por modos deslizantes [1].

O controle a estrutura variável por modo deslizante (*Sliding Mode Control* - SMC) apresenta um bom desempenho no controle de sistemas incertos por possuir um bom comportamento no transiente, estabilidade exponencial global, insensibilidade a perturbações e incertezas casadas, além de ser robusto quanto a estabilidade e desempenho, [2], [3], [4], [5]. Essa técnica consiste de uma lei de controle descontínua que resulta em um sistema em malha-fechada capaz de alternar entre estruturas diferentes, gerando um novo movimento no espaço de estado, o modo deslizante, [4], [5],[6].

Uma das principais características dos sistemas de controle a estrutura variável é a de apresentar equações diferenciais com lado direito descontínuo. Assim, as teorias convencionais de existência e unicidade de soluções não podem ser aplicadas para esse caso. Portanto, a definição de Filippov para a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo é assumida [7] nessa dissertação.

Um dos objetivos do SMC é fazer com que as trajetórias do sistema alcancem e se mantenham em uma superfície do espaço de estado projetada conforme o comportamento dinâmico desejado, denominada superfície de deslizamento.

Devido a sua estrutura de controle descontínua, o SMC apresenta um chaveamento do sinal de controle em alta frequência, que idealmente deveria tender para o infinito. Na prática, sistemas de SMC apresentam características, como atrasos e

histereses, que limitam a frequência de chaveamento. O chaveamento com frequência limitada recebe o nome de *chattering* [8], e é considerado indesejável pois pode excitar dinâmicas ignoradas durante a modelagem, podendo levar a instabilidade do sistema.

Buscando superar as dificuldades do *chattering* apresentadas no SMC, foi desenvolvida uma generalização dessa estratégia de controle, chamada de modos deslizantes de ordem superior (*Higher Order Sliding Mode* - HOSM) [9]. Essa generalização faz o controle atuar nas derivadas temporais de mais alta ordem do desvio sobre a superfície de deslizamento, causando um aumento artificial do grau relativo do sistema. Assim, esse controle é capaz de preservar as principais características do SMC convencional com uma acurácia ainda maior [10]. Além disso, o HOSM também é capaz de utilizar uma lei de controle contínua para gerar um sinal de controle suave, o que implica na redução do *chattering* [11], e retira a necessidade de modificações como: observadores [12], filtros passa-baixas [13], malhas de predição [14] ou zonas lineares [15].

Considerando as diferentes técnicas baseadas em HOSM desenvolvidas, o Algoritmo *Super-Twisting* (*Super-Twisting Algorithm* - STA) vem despertando bastante interesse da comunidade de controle a estrutura variável, [1]. O STA foi desenvolvido com o objetivo de remover o problema do *chattering* em sistemas com grau relativo unitário, e gera um sinal de controle contínuo. A principal vantagem desse algoritmo com relação aos demais é o fato dele não necessitar de nenhuma informação sobre a derivada temporal da variável de deslizamento para sua implementação. Essa característica aumentou sua relevância no contexto de sistemas a estrutura variável e em importantes aplicações, como o problema da diferenciação robusta e exata em tempo real, [16].

Inicialmente o desenvolvimento das provas de convergência em tempo finito e estabilidade eram baseadas em métodos geométricos [9], em que a ideia era majorar as trajetórias do sistema por curvas limites, e na teoria de sistemas homogêneos [17], sendo a convergência válida em apenas uma determinada vizinhança em torno do ponto de equilíbrio [18].

Recentemente, a utilização da teoria de estabilidade de Lyapunov possibilitou novos desenvolvimentos no STA e auxiliou na ampliação da abrangência do algoritmo, propiciando uma abordagem global da convergência do sistema [19],[20]. No entanto, o desenvolvimento inicial restringia-se a sistemas monovariáveis e um grande conhecimento da planta. Considerando uma abordagem desacoplada, os algoritmos desenvolvidos para o caso monovariável podem ser aplicados para o caso multivariável, ao decompor o sistema em malhas escalares apropriadas. No entanto, essa abordagem pode não ser bem sucedida se o sistema possuir uma interação forte entre as variáveis do sistema e possuir um acoplamento significativo. Para resolver

esse problema, foi proposta em [21] uma extensão multivariável para o STA baseada em um conceito similar ao do controle vetorial unitário, permitindo compensar incertezas/perturbações não-desacopladas com respeito às variáveis de estado. Contudo, essa extensão necessita do conhecimento exato da matriz de entrada do sistema. Tentando contornar essa restrição, um novo projeto para o STA multivariável, baseado na extensão de [21], foi proposto em [22] considerando matrizes de entrada simétricas e positivas definidas incertas. Nesse contexto, mostrou-se que apenas o conhecimento de limitantes inferior e superior dos autovalores da matriz de entrada era necessário para a implementação a lei de controle.

Nesta dissertação, será abordado o problema de controle de sistemas incertos de interesse prático, onde existe a necessidade de se utilizar uma abordagem não-linear ou multivariável no projeto de controle ou na modelagem do sistema. Assim, o presente trabalho tem como objetivo desenvolver um esquema de controle por modos deslizantes de segunda ordem baseados no algoritmo *Super-Twisting*, visando ampliar a sua aplicabilidade.

1.1 Contribuições

Essa dissertação amplia a aplicabilidade do STA multivariável ao considerar novas classes de sistemas com matrizes de entrada incertas com características não antes abordadas, principalmente matrizes de entrada não simétricas. Tal abordagem é expressa no Teorema 3.1, que concentra o principal resultado desse trabalho.

Recentemente, em [22], o STA multivariável foi empregado em sistemas cuja a matriz de entrada deveria ser, por hipótese, ao mesmo tempo simétrica e positiva definida. Aqui, o problema abordado faz uma generalização desse caso, ao relaxar essa hipótese, e considerar sistemas com matriz de entrada incerta sem exigência de simetria. Para tanto, é proposto um esquema de controle STA multivariável similar aos apresentados em [22], e, para obter um resultado mais geral, é considerada uma matriz simetrizante. A introdução da matriz simetrizante proposta neste trabalho toma como base o valor real da matriz de entrada do sistema, implicando numa matriz resultante predominantemente simétrica e positiva definida com uma pequena parte antissimétrica.

Por meio de uma abordagem de Lyapunov mostra-se nesta dissertação que o controlador proposto é capaz de assegurar propriedades globais de estabilidade e convergência em tempo finito, usando apenas o conhecimento dos limitantes inferior e superior dos autovalores da parte simétrica da matriz de entrada efetiva e do limitante superior da norma de sua parte antissimétrica para que a lei de controle seja implementada. Esta contribuição resultou no artigo apresentado no *XXII Congresso Brasileiro de Automática 2018 - CBA 2018* [23].

1.2 Conceitos Básicos

Esta seção resume alguns conceitos que servirão de base para esta dissertação, tais conceitos são detalhados e apresentados nos livros (Isidori 1995 [24], Khalil 2002 [25], Utkin 1992 [8]).

1.2.1 Grau Relativo

Ao considerar uma função de transferência escalar, o grau relativo do sistema é a diferença entre o número de pólos e de zeros. Em termos de entrada e saída, representa o número de vezes que a expressão da saída $y(t)$ precisa ser diferenciada em relação ao tempo até que o termo $u(t)$ da entrada apareça explicitamente. Considerando o caso multivariável, com uma representação de espaço de estado (A,B,C) de um sistema com função de transferência estritamente própria, o grau relativo ρ pode ser obtido através dos parâmetros de Markov associados.

A descrição dos parâmetros Markov seguem a definição apresentada em (Kailath 1980 [26]). Os parâmetros de markov são definidos de forma única pela matriz de transferência associada ao sistema, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, sendo descritos por

$$g_i := CA^{i-1}B,$$

sendo obtidos pela expansão de $G(s)$:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i s^{-i}$$

Assim, se $CB \neq 0$ então $\rho = 1$, se $CB = 0$ e $CAB \neq 0$ então $\rho = 2$, etc.

1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação é organizada da seguinte forma:

- No capítulo 2, são apresentadas as teorias, os principais conceitos, propriedades do controle a estrutura variável por modos deslizantes, SMC, e modos deslizantes de ordem superior, com enfoque no algoritmo *Super-Twisting*. São ainda apresentadas algumas das recentes modificações do STA propostas na literatura. As técnicas apresentadas são exemplificadas por meio de simulações numéricas.
- No capítulo 3, é mostrado detalhadamente o desenvolvimento do novo esquema STA proposto nesta dissertação. A estabilidade global com convergência exponencial é garantida por uma abordagem por Lyapunov, considerando sistemas

incertos com matrizes de entrada não necessariamente simétricas. São ainda apresentadas simulações numéricas e práticas com o intuito avaliar o desempenho do STA proposto, em que também é feita uma comparação de desempenho entre o novo esquema proposto e outro STA proposto na literatura.

- As conclusões gerais sobre o desenvolvimento apresentado, juntamente com perspectivas futuras, são apresentadas no Capítulo 4.
- O Apêndice A apresenta uma análise sobre a convergência do controlador STC.
- Por fim, o Apêndice B apresenta as algumas proposições e propriedades vetoriais que são utilizados neste trabalho.

Capítulo 2

Sistemas a Estrutura Variável

O controle por modos deslizante (SMC) é projetado com o objetivo de levar as trajetórias do sistema para uma determinada superfície no espaço de estado, chamada de superfície de deslizamento, em um tempo finito, e garantir que nela permaneçam. O projeto de controle SMC, normalmente é dividido em duas partes, o projeto da superfície de deslizamento, que deve garantir as especificações de desempenho, e a elaboração da lei de controle, que deve garantir que a superfície de deslizamento seja capaz de atrair as trajetórias do sistema [27].

Uma das características do SMC é a utilização de uma lei de controle descontínua, gerada pelo chaveamento entre um conjunto de funções das variáveis de estado da planta. Esse tipo de controle permite alternar entre estruturas contínuas da planta, baseado na posição das variáveis de estado no espaço de estado.

Assim, o controle em malha fechada consegue alternar entre um conjunto de estruturas projetadas. Além das trajetórias características dos sistemas chaveados, sob determinadas condições, o controle também é capaz de gerar um novo movimento no espaço de estado capaz de seguir um comportamento desejado, denominado **modo deslizante**[4-6].

É interessante notar que embora o modo deslizante seja construído a partir de um conjunto de estruturas relativas ao sistema, seu movimento no espaço de estado não tem relação direta com o movimento das trajetórias dos estados das estruturas isoladas, mas sim com a regra de chaveamento projetada. Além disso, essa abordagem permite muitas vezes combinar propriedades vantajosas das estruturas do sistema, ou gerar novas propriedades que não pertencem a nenhuma das estruturas chaveadas.

O projeto da regra de chaveamento deve garantir que as trajetórias do sistema sempre alcancem e, depois de um tempo, permaneçam na *superfície de deslizamento*, que é especificada conforme um comportamento dinâmico desejado [6].

Ao se estabelecer o modo deslizante, a trajetória fica confinada na superfície de deslizamento, e o sistema passa a ser governado pela dinâmica da superfície,

adquirindo a propriedade da invariância, que garante insensibilidade a incertezas da planta e a perturbações externas de algumas classes.

Idealmente, o SMC deve garantir que as trajetórias do sistema alcancem a superfície de deslizamento, e nela permaneçam, mas como o controle não é capaz de chavear com frequência infinita ocorre o problema de *chattering*, uma oscilação em alta frequência em torno do ponto de equilíbrio desejado [8]. Na prática, atrasos de controle e limitações físicas dos atuadores não permitem a realização do controle chaveado em alta frequência. O *chattering* implica em baixa acurácia, desgastes na parte mecânica e superaquecimento na parte elétrica de sistemas. Em alguns casos, o *chattering* também pode acabar excitando dinâmicas não modeladas de alta frequência, levando a perda de desempenho possivelmente levando a instabilidade [3].

Com o intuito de reduzir o *chattering* em sistemas a estrutura variável, foi introduzido o conceito de modos deslizantes de ordem superior (Higher Order Sliding Modes – HOSM) em [9]. Essa generalização do SMC convencional atua não somente na primeira derivada do desvio sobre a superfície de deslizamento, mas também nas derivadas de mais alta ordem. Com isso, o HOSM é capaz de preservar as principais vantagens do SMC convencional, e apresentar uma acurácia ainda maior e a possibilidade de utilizar uma lei de controle contínua, reduzindo o *chattering* [10].

Dentre os algoritmos de HOSM, vem se destacando nos últimos anos um algoritmo de controle baseado em modos deslizantes de segunda ordem, o algoritmo *Super-Twisting* (*Super-Twisting Algorithm*- STA) [9]. Esse algoritmo foi desenvolvido com o objetivo de atenuar o *chattering* em sistemas com grau relativo unitário, e possui a vantagem única de não necessitar de nenhuma informação sobre a derivada temporal do desvio sobre a superfície de deslizamento para sua implementação.

2.1 Conceitos Básicos

Neste capítulo, primeiro são apresentadas as noções básicas de controle a estrutura variável e sua relação com o controle por modo deslizante convencional. Nesse contexto, são ainda apresentados os conceitos de superfície de deslizamento, e a condição de alcançabilidade- η do SMC para o caso escalar.

Em seguida, nas próximas seções, são apresentados os conceitos de controle equivalente [5] e controle vetorial unitário [28],[29], que dão base para a formulação do SMC para o caso multivariável.

Posteriormente é formalizada a ideia de modos deslizante de ordem superior, tendo enfoque no algoritmo *Super-Twisting*. Além disso, também é apresentada a extensão multivariável do *Super-Twisting* para sistemas incertos. Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar a base teórica necessária, em relação ao controle por

modos deslizantes, para o entendimento da proposta de modificação do projeto do controlador *Super-Twisting* considerado nessa dissertação, que será detalhado no capítulo 3.

2.1.1 Controle por estrutura variável

Nessa seção as principais propriedades e conceitos de controle a estrutura variável serão apresentados por meio de um exemplo simples e ilustrativo. O objetivo é auxiliar o leitor a se familiarizar com tais conceitos, para posteriormente defini-los de forma mais rigorosa [5].

Considere o exemplo de um sistema representado pela seguinte equação de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + u + d(t, x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde x_1 e x_2 são os estados, u é a entrada de controle e $d(t, x_1, x_2)$ é uma perturbação limitada e tal que $|d(t, x_1, x_2)| \leq L$, e L é uma constante positiva. O problema reside em projetar uma lei de controle $u(x_1, x_2)$ de modo que x_1 e x_2 sejam levados para zero pelo menos assintoticamente, apesar da presença da perturbação limitada $d(t, x_1, x_2)$.

Considere o sistema de controle a estrutura variável definido por (2.1) e pela seguinte lei de controle descontínua:

$$\begin{cases} u &= -\rho \operatorname{sgn}(s) \\ s(x_1, x_2) &= x_1 + \kappa x_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde κ e ρ são constantes positivas a serem escolhidas no projeto do controlador.

Por simplicidade, inicialmente será considerado o caso em que $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$. Note que ao utilizar a função sinal de s no controle, o sinal de controle fica sendo expresso por duas regiões, podendo chavear o sistema entre duas estruturas diferentes, dependendo da região do plano de fase em que os estados se encontram.

Na região $s(x_1, x_2) < 0$, o sistema possui a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= +x_1 - 2x_2 + \rho \end{cases} \quad (2.3)$$

Na região $s(x_1, x_2) > 0$, o sistema possui a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= +x_1 - 2x_2 - \rho \end{cases} \quad (2.4)$$

Os planos de fase das duas estruturas isoladas são ilustrados nas Figuras 2.1 e 2.2, para $\rho = \kappa = 1$.

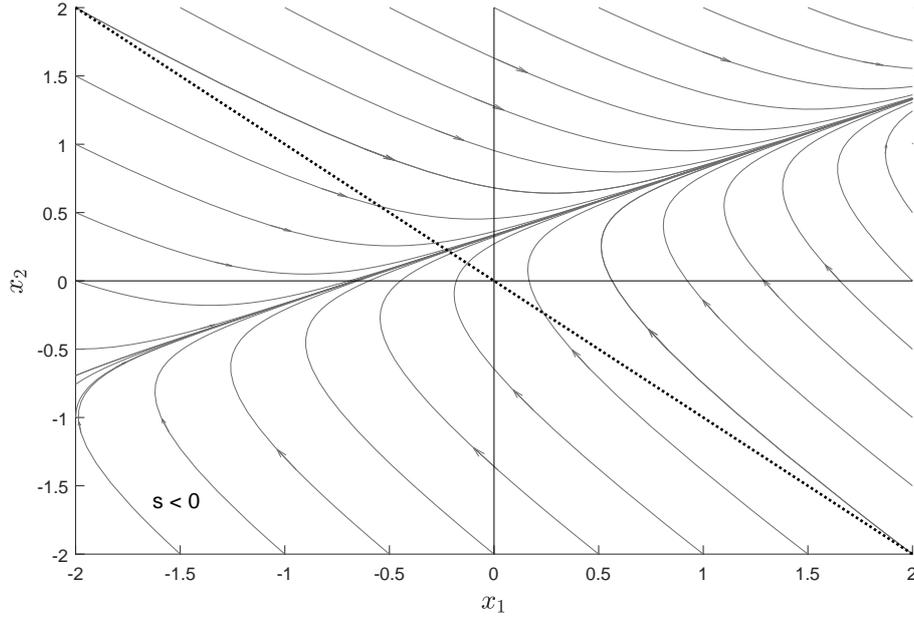


Figura 2.1: Plano de fase para o sistema (2.3), com $\kappa = \rho = 1$.

As Figuras 2.1 e 2.2 representam o comportamento das estruturas (2.3) e (2.4), respectivamente, com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$, $\kappa = \rho = 1$ e sem considerar o controle (2.2). Note que considerar controle (2.2), resulta em três regiões, $s < 0$, $s > 0$ e $s = 0$. Para $\kappa = 1$, a região $s < 0$ pode ser vista na Figura 2.1 como a região abaixo da reta pontilhada, enquanto a região $s > 0$ pode ser vista na Figura 2.2 como a região acima da reta pontilhada.

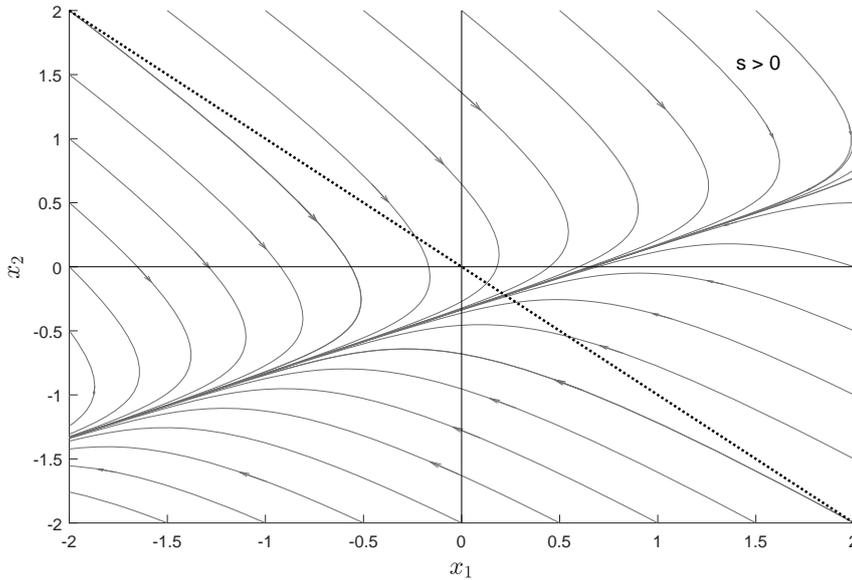


Figura 2.2: Plano de fase para o sistema (2.4), com $\kappa = \rho = 1$.

Ambas as estruturas (2.3) e (2.4) são instáveis quando consideradas isoladamente. Entretanto, ao se considerar o sistema (2.1) com o controle chaveado (2.2), as trajetórias dos sistemas (2.3) e (2.4) são combinadas e, considerando a região de validade considerada para cada sistema, todas as trajetórias apontam em direção à

superfície de chaveamento definida como $s(x) = x_1 + \kappa x_2$, representada pela linha pontilhada em ambas as Figuras 2.1 e 2.2 .

Contudo, para obter o plano de fase completo do sistema de controle a estrutura variável ainda é necessário saber o comportamento do sistema na superfície definida por $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | s(x_1, x_2) = 0\}$, que define a reta de chaveamento.

Como o sinal de controle $u(x)$ não é definido em $s(x) = 0$, serão considerados diferentes valores de atrasos no chaveamento, de modo que a mudança do sinal de controle não seja instantânea, mas ocorra um tempo depois de a trajetória do sistema ultrapassar a reta de chaveamento. Com isso, quanto menor o atraso considerado, mais próximo o comportamento do sistema estará do caso ideal sem atraso, demonstrando o comportamento do sistema no em torno da superfície chaveada.

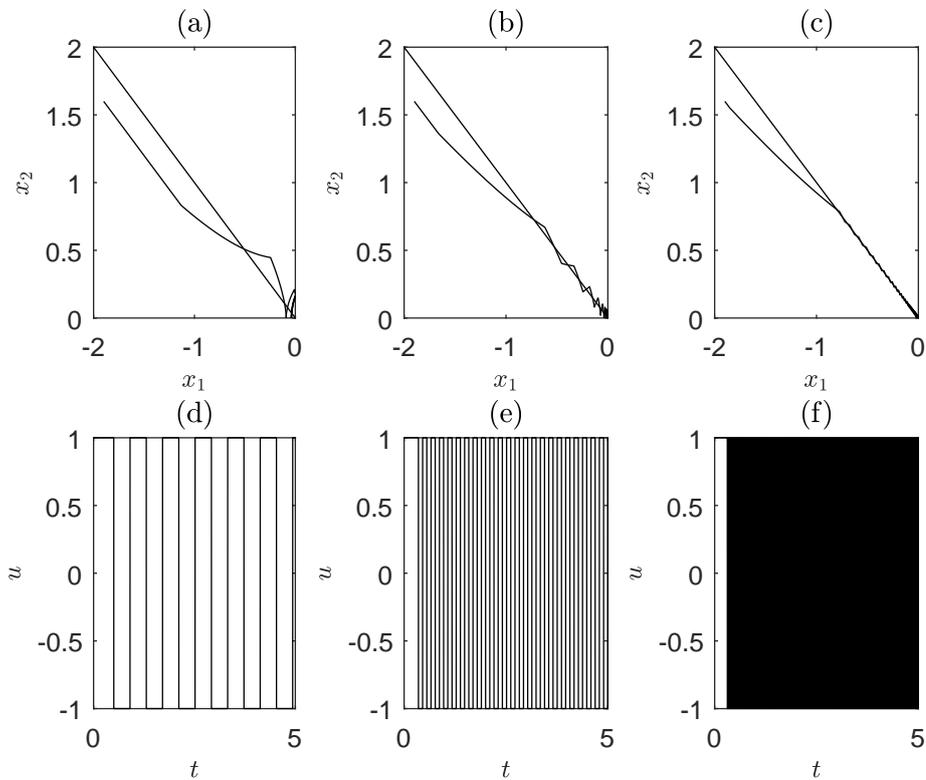


Figura 2.3: Trajetórias de estado do sistema (2.1) e sinal de controle (2.2), com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$, $\kappa = \rho = 1$, para os seguintes atrasos: (a),(d) atraso de 0,050s; (b),(e) atraso de 0,025s; (c),(f) atraso de 0,010s.

A Figura 2.3 mostra as trajetórias de estado para condições iniciais próximas de \mathcal{S} considerando atrasos de 0,050s, 0,025s e 0,010s, para ilustrar o efeito do *chattering*. Note que conforme o atraso é diminuído, maior é a frequência de chaveamento do sinal de controle, e a trajetória do sistema fica cada vez mais semelhante com a reta de chaveamento. Considerando o caso ideal em que não ocorre atraso no chaveamento, é intuitivo notar que o movimento da trajetória do sistema fica confinada à superfície \mathcal{S} .

Nas prática, um chaveamento instantâneo em sistemas reais é impossível, ocorrendo na verdade um chaveamento em frequência alta e finita do sinal de controle, gerando o problema de chattering no SMC. O chattering é considerado indesejável, pois pode levar o sistema à instabilidade ao excitar modos rápidos ignorados durante sua modelagem.

Logo, após um intervalo de tempo finito $T > 0$, o sistema passa a ser regido pela dinâmica da superfície de deslizamento. Nesta fase, também chamada de deslizamento, o sistema fica com ordem reduzida em relação à sua dinâmica original do sistema em malha fechada, e é descrita pela seguinte equação diferencial:

$$s(x) = 0 \Rightarrow x_1 + \kappa x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 + \left(\frac{\kappa + 2}{\kappa}\right)x_1 = 0, \quad t \geq T$$

Cuja a solução é dada por

$$\begin{cases} x_1 = x_1(T)e^{-\left(\frac{\kappa+2}{\kappa}\right)(t-T)}, \\ x_2 = x_2(T)e^{-(\kappa+2)(t-T)}, \end{cases} \quad t \geq T \quad (2.5)$$

Como κ é por construção uma constante positiva, o estado do sistema converge exponencialmente para zero. Assim, conclui-se que este controle é capaz de gerar um novo tipo de movimento no plano de fase que não pertence a nenhuma das duas estruturas consideradas, mas que tem relação direta com a superfície projetada para o chaveamento do controle. A superfície \mathcal{S} , projetada para o chaveamento, é denominada **superfície de deslizamento**, o movimento dos estados sobre ela recebe o nome de **modo deslizante**, e a função $s(x_1, x_2)$, que define \mathcal{S} , é conhecida como variável de deslizamento. Assim o plano de fase geral é apresentado na Figura 2.4.

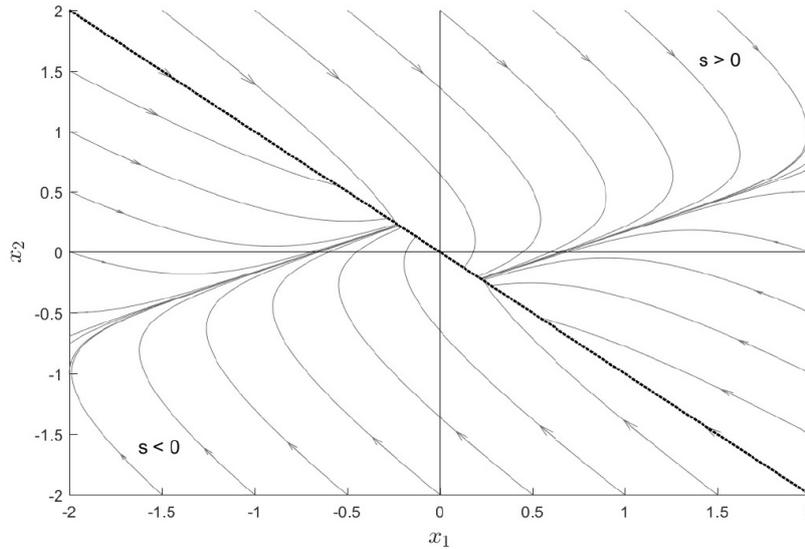


Figura 2.4: Plano de fase para o sistema (2.1) e (2.2), sem atraso no chaveamento e com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$, $\kappa = \rho = 1$.

2.1.2 Existência de Modo Deslizante

Para que o sistema entre em modo deslizante, as trajetórias do sistema chaveado devem apontar na direção da superfície de deslizamento para assegurar que esta seja pelo menos localmente atrativa para uma determinada vizinhança.

Um critério matemático sucinto para expressar este fato é dado por:

$$\dot{s}s < 0 \quad (2.6)$$

A condição (2.6), denominada de **condição de alcançabilidade**, apenas garante que a superfície de deslizamento seja alcançada assintoticamente, o que não é suficiente para assegurar que o sistema entre em modo deslizante.

Para que o sistema de controle por modos deslizantes seja globalmente exponencialmente estável, é necessário que a lei de controle u seja projetada de modo que a superfície de deslizamento \mathcal{S} seja globalmente atrativa, com as trajetórias de estado do sistema convergindo em tempo finito para esta superfície. Para garantir que a superfície de deslizamento seja alcançada em tempo finito e tenha atratividade global, é considerada uma condição mais restritiva muito utilizada na literatura, conhecida como a condição de alcançabilidade em tempo finito ou ainda **condição de alcançabilidade- η** [1]. Esta condição é dada por:

$$\dot{s}s \leq -\eta|s| \quad (2.7)$$

onde η é uma constante positiva.

A desigualdade (2.7) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt} \leq -\eta|s|$$

ou ainda:

$$\frac{d(|s|^2)}{2\sqrt{(|s|^2)}} \leq -\eta dt$$

Integrando de 0 a t_s , tem-se:

$$\sqrt{|s(t_s)|^2} - \sqrt{|s(0)|^2} \leq -\eta t_s$$

que pode ser reescrito como:

$$|s(t_s)| - |s(0)| \leq -\eta t_s$$

Sendo assim, o tempo t_s necessário para se alcançar a superfície de deslizamento $\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}$ satisfaz:

$$t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \quad (2.8)$$

o que assegura uma convergência em tempo finito para a superfície de deslizamento.

Considerando novamente o exemplo do sistema (2.1), com controle (2.2), será considerado agora o caso mais geral onde agora $d(t, x_1, x_2) \neq 0$. Na fase de aproximação o sistema certamente sofre influência da perturbação $d(t, x_1, x_2)$, mas na fase de deslizamento, o sistema passa a ser insensível a incertezas paramétricas da planta e a algumas classes de perturbações externas, devido à uma redução de ordem da dinâmica do sistema.

Assim, deve-se garantir no projeto da superfície de deslizamento, que esta tenha pelo menos atratividade local e convergência das trajetórias de estado em tempo finito.

Deseja-se mostrar que se o ganho ρ for apropriadamente escolhido, e se a superfície for globalmente atrativa o sistema em malha fechada resultante pode ser globalmente exponencialmente estável. Considere a seguinte função positiva definida:

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2,$$

cujas derivada temporal é:

$$\dot{V}(s) = s\dot{s} = s\{x_1(\kappa - 1) + 2x_2(1 - \kappa) - \kappa\rho \operatorname{sgn}(s) + \kappa d(t, x_1, x_2)\},$$

Considerando $\kappa = 1$ tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}(s) &= s\{-\rho \operatorname{sgn}(s) + d(t, x_1, x_2)\}, \\ &= -|s|\{\rho \operatorname{sgn}(s) - d(t, x_1, x_2) \operatorname{sgn}(s)\}. \end{aligned}$$

Como a perturbação é limitada por $d(t, x_1, x_2) \leq L$, então:

$$\dot{V} \leq -(\rho - L)|s| = -\eta\sqrt{2V},$$

onde $\eta > 0$, e o ganho do controlador é escolhido como $\rho = \eta + L$. Com isso, o tempo de convergência será finito, como demonstrado em (2.8).

Uma vez que o modo deslizante tenha sido alcançado, o desempenho do sistema torna-se insensível a a perturbação $d(t, x_1, x_2)$, devido ao sistema estar sendo regido somente pela dinâmica da superfície de deslizamento. Além disso, as trajetórias do sistema ficam confinadas à superfície \mathcal{S} , com os estados x_1, x_2 convergindo exponencialmente para zero.

2.1.3 Modos deslizante convencional - SMC

O projeto de um controlador por modos deslizantes pode ser entendido como um projeto composto por duas etapas [1], [2]. A primeira é definir uma superfície \mathcal{S} de modo que a variável de deslizamento tenha grau relativo uniforme e unitário com respeito à lei de controle, e que a dinâmica em modo deslizante corresponda à dinâmica desejada para o sistema em malha-fechada. A segunda é projetar uma lei de controle descontínua de modo a tornar \mathcal{S} ao menos localmente atrativa, seguindo uma determinada condição de alcançabilidade em tempo finito.

Assim, nesta subseção será apresentado a formalização de alguns conceitos vistos na subseção 2.1.1, para descrever o controle por modos deslizantes para uma classe de sistemas.

Seja um sistema escalar de controle dado por:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \quad (2.9)$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do sistema, $f(t, x)$ e $g(t, x)$ são funções suaves e $u \in \mathbb{R}$ é uma lei de controle descontínua.

Considera-se que $s(x)$ é continuamente diferenciável e que a superfície \mathcal{S} definida por

$$\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}, \quad (2.10)$$

é contínua em x , satisfazendo a seguinte condição de regularidade:

$$\nabla_x s(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathcal{S}$$

A superfície de deslizamento deve ser projetada de forma a atender a uma dinâmica desejada, ou seja, ao projetar a superfície deve-se observar o comportamento do sistema quando restrito a \mathcal{S} .

O controle descontínuo permite alternar entre sistemas de estruturas diferentes. O sinal de controle descontínuo é dado por:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x), & \text{se } s(x) > 0 \\ u^-(x), & \text{se } s(x) < 0 \end{cases}$$

Onde $u^+(x)$ e $u^-(x)$ são funções contínuas. Note ainda que $u(x)$ não é definido em $s(x) = 0$. Porém, na prática é necessário definir como é o comportamento de $u(x)$ quando $s(x) = 0$, e conseqüentemente definir o comportamento geral do sistema 2.9.

Nessa dissertação, optou-se por definir que $u(x) = 0$, quando $s(x) = 0$. No entanto, deve-se ressaltar que qualquer escolha para o valor da função sinal no intervalo $[-1, 1]$ seria apropriada e não afetaria os resultados obtidos.

2.2 Controle equivalente

Para analisar a dinâmica na superfície de deslizamento em sistemas a estrutura variável o conceito de controle equivalente, atribuído a Utkin [5], geralmente é utilizado por apresentar uma abordagem simplificada. O controle equivalente é definido como a ação de controle contínua necessária para manter o modo deslizante ideal sobre a superfície de deslizamento. Assim, esse conceito deve ser interpretado como uma ação de controle abstrata para auxiliar a análise de estabilidade do sistema em malha-fechada. Além disso, o controle equivalente facilita a obtenção de uma expressão para a dinâmica em modo deslizante por explorar fato de que durante o modos deslizante convencional ambos $\sigma = \dot{\sigma} = 0$.

Considere o seguinte sistema:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u + \varphi(t, x) \quad (2.11)$$

sujeito a uma ação de controle descontínua $u \in \mathbb{R}^m$ capaz de garantir que o modo deslizante seja alcançado na superfície de deslizamento $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | \sigma(x) = 0\}$, onde $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função continuamente diferenciável, as funções $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são suaves, e $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma perturbação limitada desconhecida.

O controle equivalente é a ação de controle contínua que mantém a trajetória do sistema sobre a superfície \mathcal{S} . Assim, durante o deslizamento, a restrição $\dot{\sigma} = 0$ pode ser escrita como:

$$\dot{\sigma}(x, u) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = 0, \quad (2.12)$$

e o controle equivalente equivalente é, por definição, a solução dessa equação algébrica. Assim, expandindo \dot{x} , tem-se

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x)u_{eq} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \varphi(t, x) = 0, \quad (2.13)$$

resultando em

$$u_{eq} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \{f(t, x) + \varphi(t, x)\},$$

e assumindo que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x)$ é não singular. Assim, a dinâmica de malha fechada pode ser obtida substituindo o controle equivalente u_{eq} , na dinâmica do sistema, resultando em

$$\dot{x} = \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \{f(t, x) + \varphi(t, x)\}. \quad (2.14)$$

Note que pela análise por controle equivalente, u_{eq} foi obtido de forma algébrica sendo uma solução para (2.13). Esta solução não depende da ação de controle que é efetivamente aplicada ao sistema, que pode ser de natureza descontínua. Além disso, u_{eq} não é fisicamente implementável, por depender explicitamente da perturbação desconhecida $\varphi(t, x)$. Por tanto, o controle u_{eq} deve ser interpretado como um conceito que ajuda na criação da expressão de ordem reduzida do sistema, como em (2.14), de onde pode-se fazer uma análise da estabilidade da dinâmica em malha fechada.

Suponha agora que a perturbação de entrada $\varphi(t, x)$ seja casada, e possa ser escrita em função de $g(t, x)$ tal que

$$\varphi(t, x) = g(t, x)d(t, x). \quad (2.15)$$

Neste caso, a dinâmica em malha-fechada durante o deslizamento é reduzida a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \{f(t, x) + g(t, x)d(t, x)\}, \\ &= \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) f(t, x) + (g(t, x) - g(t, x))d(t, x), \\ &= \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) f(t, x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

uma vez que $g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) = g(t, x)$. Note que a dinâmica resultante é independente da perturbação $\varphi(t, x)$. Além disso, durante o de modos deslizante, o sistema adquire a propriedade da invariância, tornando o sistema insensível a perturbações e incertezas casadas. Essa característica bastante desejável foi um dos grandes pontos que impulsionaram a pesquisa de controle por modos deslizante. Outro ponto interessante é que a escolha da superfície definida por $\sigma = 0$ afeta a dinâmica de ordem reduzida em (2.14) e (2.16). Assim, em termos de controle, o projeto da superfície de deslizamento \mathcal{S} é de suma importância.

O exemplo a seguir ilustra a propriedade da invariância.

Exemplo 2.1. Considere o seguinte sistema linear multivariável para $t \geq T$, onde T é o instante de tempo em que a superfície de deslizamento $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \sigma_i(x_1, x_2, x_3) = 0, i = 1, 2\}$ é alcançada. :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 - u_2 + \varphi_1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + 3x_3 + u_1 - u_2 + \varphi_2 \\ \dot{x}_3 &= 5x_1 + x_3 - u_1 + \varphi_3, \end{aligned} \quad (2.17)$$

que pode ser escrito no formato (2.11) considerando :

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} x, \quad g(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \varphi(t, x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t, x) \\ \varphi_2(t, x) \\ \varphi_3(t, x) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

e as superfícies de saída

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -x_1 + x_3 \\ \sigma_2 &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Aplicando o conceito de controle equivalente é possível encontrar a dinâmica de modos deslizante na interseção das superfícies de saída σ_1 e σ_2 , como:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 &= x_1 - 2x_2 - u_1 + u_2 - \varphi_1 + \varphi_3 \\ \dot{\sigma}_2 &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - u_2 + \varphi_2 + \varphi_3 \end{aligned}$$

Pelas condições de invariância $\dot{\sigma}_1 = 0$, $\sigma_1 = 0$ e $\dot{\sigma}_2 = 0$, $\sigma_2 = 0$, tem-se que o controle equivalente é dado por:

$$\begin{aligned} u_{1eq} &= 6x_1 + 4x_3 - \varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3, \\ u_{2eq} &= 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \varphi_2 + \varphi_3. \end{aligned}$$

O controle equivalente obtido fornece a dinâmica reduzida do sistema, que pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3, \\ x_2 &= -x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_3 + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Considerando o caso particular em que $\varphi(t, x)$ pode ser escrito em função de $g(t, x)$, apresentado em (2.15), tem-se

$$\varphi(t, x) = g(t, x) \begin{bmatrix} d_1(t, x) \\ d_2(t, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(t, x) \\ d_2(t, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_2(t, x) \\ d_1(t, x) - d_2(t, x) \\ -d_1(t, x) \end{bmatrix}$$

Considerando $d_1 = \text{sen}(t)$ e $d_2 = \text{cos}(t)$, a perturbação do sistema é dada por :

$$\varphi(t, x) = \begin{bmatrix} -\text{cos}(t) \\ \text{sen}(t) - \text{cos}(t) \\ -\text{sen}(t) \end{bmatrix}$$

Considerando que as perturbações $\varphi_i(t, x)$ do sistema (2.17) são casadas, pelo desenvolvimento apresentado em (2.16) que, assim como esse exemplo, considerou

o fato de (2.15), a dinâmica do sistema (2.19) fica insensível a perturbação após alcançar superfície de deslizamento, para quaisquer perturbações d_1 e d_2 . Assim, a dinâmica reduzida durante o deslizamento é dada por:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_3, \\x_2 &= -x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_3\end{aligned}$$

2.3 Controle por modos deslizante multivariável

Para que o sistema de controle por modos deslizantes multivariável seja globalmente exponencialmente estável, deve-se projetar uma lei de controle u que garanta que a superfície de deslizamento \mathcal{S} seja globalmente atrativa, com as trajetórias de estado do sistema convergindo em tempo finito para esta superfície.

Para tanto, os conceitos de superfície de deslizamento (2.10), e a condição de alcançabilidade- η (2.7), são expandidos nessa seção para o caso multivariável. Além disso, na seção 2.4 será apresentado o conceito de controle vetorial unitário [28],[29] na definição da lei de controle com uma abordagem inerentemente multivariável.

Considere o seguinte sistema incerto multivariável:

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(t, x)] \quad (2.20)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \leq n$ é uma lei de controle descontínua e $d : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função desconhecida e limitada compreendendo todas as não-linearidades, incertezas, e perturbações presentes no sistema. Além disso a matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ possui posto completo, e o par (A, B) é controlável.

Considere o formato da superfície de deslizamento, para o caso multivariável, definida por:

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | \sigma(x) = 0\} \quad (2.21)$$

com $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sendo uma função linear do vetor de estados :

$$\sigma(t) = Sx \quad (2.22)$$

onde $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui posto completo. Considere ainda a lei de controle descontínua dada por:

$$u = -[\rho(t, x) \operatorname{sgn}(\sigma)], \quad (2.23)$$

onde $\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função de modulação positiva a ser escolhida. O objetivo é projetar um controlador por modos deslizantes que assegure que o sistema seja globalmente exponencialmente estável, apesar da presença da perturbação limitada $d(t, x, u)$.

A condição de alcançabilidade- η para o caso multivariável, garante que trajetórias de estado sejam atraídas globalmente e em tempo finito para \mathcal{S} , e lei de controle u pode ser projetada de acordo com essa condição [2], [30]. Podendo ser expressa como :

$$\sigma^T \dot{\sigma} \leq -\eta \|\sigma\| \iff \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|} = \frac{d\|\sigma\|}{dt} \leq -\eta, \quad (2.24)$$

onde $\eta > 0$ é uma constante positiva arbitrária. Integrando a desigualdade, obtêm-se:

$$\|\sigma(t)\| - \|\sigma(0)\| \leq -\eta t,$$

e portanto $\sigma(t)$ converge para zero após um intervalo de tempo T , limitado por

$$T \leq \frac{\|\sigma(0)\|}{\eta}.$$

Ao considerar a condição de alcançabilidade- η (2.24) na lei de controle, o sistema é globalmente exponencialmente estável [1], [2].

Considere o caso em que $1 \leq m \leq n$, e suponha que as componentes $d_i(t, x)$ do vetor de perturbação $d(t, x)$ sejam limitadas por:

$$|d_i(t, x)| \leq \bar{d}_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.25)$$

onde $\bar{d}_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva conhecida. Neste caso a condição (2.24) é reescrita como:

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T \{SAx + SBu + SBd(t, x)\} \leq -\eta \|\sigma\|.$$

A matriz S pode ser escolhida de tal forma que $SB \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seja uma matriz não-singular arbitrária, então assuma que S seja tal que $SB = I$. Com isso o problema de projetar uma lei de controle $u \in \mathbb{R}^m$ pode ser resolvido equivalentemente ao projetar m leis de controle $u_i \in \mathbb{R}$ desacopladas. Define-se então as componentes da lei de controle como:

$$u_i = -[\rho_i(t, x) \operatorname{sgn}(\sigma_i)], \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

onde $\rho_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, é uma função de modulação positiva a ser escolhida. Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_i \dot{\sigma}_i &= \sigma_i \{S_i Ax - \rho_i(t, x) \operatorname{sgn}(\sigma_i) + d_i(t, x)\} \\ &\leq -|\sigma_i| \{\rho_i(t, x) - |S_i Ax| - \bar{d}_i(t, x)\}, \end{aligned}$$

e portanto se a função de modulação for escolhida como

$$\rho_i(t, x) = |S_i Ax| + \bar{d}_i(t, x) + \eta,$$

então as seguintes desigualdades serão válidas

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i \leq -\eta |\sigma_i|, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.26)$$

e a condição (2.24) será satisfeita.

2.4 Controle vetorial unitário

Uma característica fundamental do projeto de controle por modos deslizantes é que ele deve garantir que a superfície de deslizamento seja alcançada globalmente e em tempo finito. Ao considerar um sistema com múltiplas entradas, isso pode ser alcançado ao projetar a parte descontínua das componentes do vetor lei de controle como funções $\text{sgn}(\cdot)$ das componentes correspondentes da variável de deslizamento. Assim, observando as modulações apropriadas, essa lei de controle é capaz de satisfazer as condições de alcançabilidade- η desacopladas (2.26).

No entanto, outro modo de abordar esse problema é utilizando o conceito de controle vetorial unitário [28],[29]. O objetivo desse controle é satisfazer a condição de alcançabilidade- η (2.24), tendo como vantagem uma estrutura inerentemente multivariável. Nesse conceito, a função $\text{sgn}(\sigma) = \frac{\sigma}{|\sigma|}$, do caso escalar, é generalizada para o caso multivariável utilizando uma função vetor unitário do tipo $\frac{\sigma}{\|\sigma\|}$.

Considere o sistema de controle por modos deslizantes definido por (2.20), (2.21) e (2.22), e assuma que a perturbação seja limitada por

$$\|d(t, x)\| \leq \bar{d}(t, x) \quad (2.27)$$

onde $\bar{d} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva conhecida. Note que, neste caso, a perturbação limitada compreende uma classe mais abrangente de perturbações do que o caso desacoplado (2.25), sendo portanto uma generalização. Escolhendo a matriz S de modo que $SB = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$, a condição de alcançabilidade- η (2.24) pode ser reescrita como

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T \{SAx + u + d(t, x)\} \leq -\eta \|\sigma\|.$$

A lei de controle é definida como

$$u = -\rho(t, x) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (2.28)$$

onde $\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de modulação positiva a ser escolhida. Logo pode-se escrever

$$\begin{aligned}\sigma^T \dot{\sigma} &= \sigma^T \left\{ SAx - \rho(t, x) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + d(t, x) \right\} \\ &\leq -\|\sigma\| \{ \rho(t, x) - \|SAx\| - \bar{d}(t, x) \}.\end{aligned}$$

Assim, se função de modulação $\rho(t, x)$ for escolhida como:

$$\rho(t, x) = \|SAx\| + \bar{d}(t, x) + \eta, \quad (2.29)$$

então a condição de alcançabilidade (2.24) será satisfeita.

Exemplo 2.2. Considere o sistema definido por (2.20), (2.21), (2.22), com

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad S = B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

e a perturbação $d(t, x)$ é limitada por (2.27), com

$$d(t, x) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} x + 0,3 \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) \\ \text{sen}(2\pi t) \end{bmatrix}, \quad \bar{d}(t, x) = \|x\| + 0,3. \quad (2.31)$$

Neste caso, o comportamento do sistema em modo deslizante é descrito por

$$\sigma(x) = Sx = 0 \iff x = 0, \quad \forall x \in \mathcal{S}$$

uma vez que a matriz S é quadrada e não-singular.

Projetando a lei de controle como em (2.28), dada por

$$u = -\rho(t, x) \frac{\sigma}{\|\sigma\|}, \quad (2.32)$$

o estado do sistema irá convergir em tempo finito para zero se a superfície de deslizamento \mathcal{S} for alcançada em tempo finito. Para tanto, a função de modulação pode ser projetada como em (2.29) com $\eta = 0,7$, resultando em

$$\rho = \frac{1}{4} \left\| \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x \right\| + \|x\| + 1. \quad (2.33)$$

Assim, a condição de alcançabilidade (2.24) é satisfeita globalmente, e o estado do sistema converge globalmente e em tempo finito para zero.

A Figura 2.5 ilustra os resultados da simulação do sistema de controle por modos deslizantes projetado neste exemplo, segundo a lei de controle vetorial unitário.

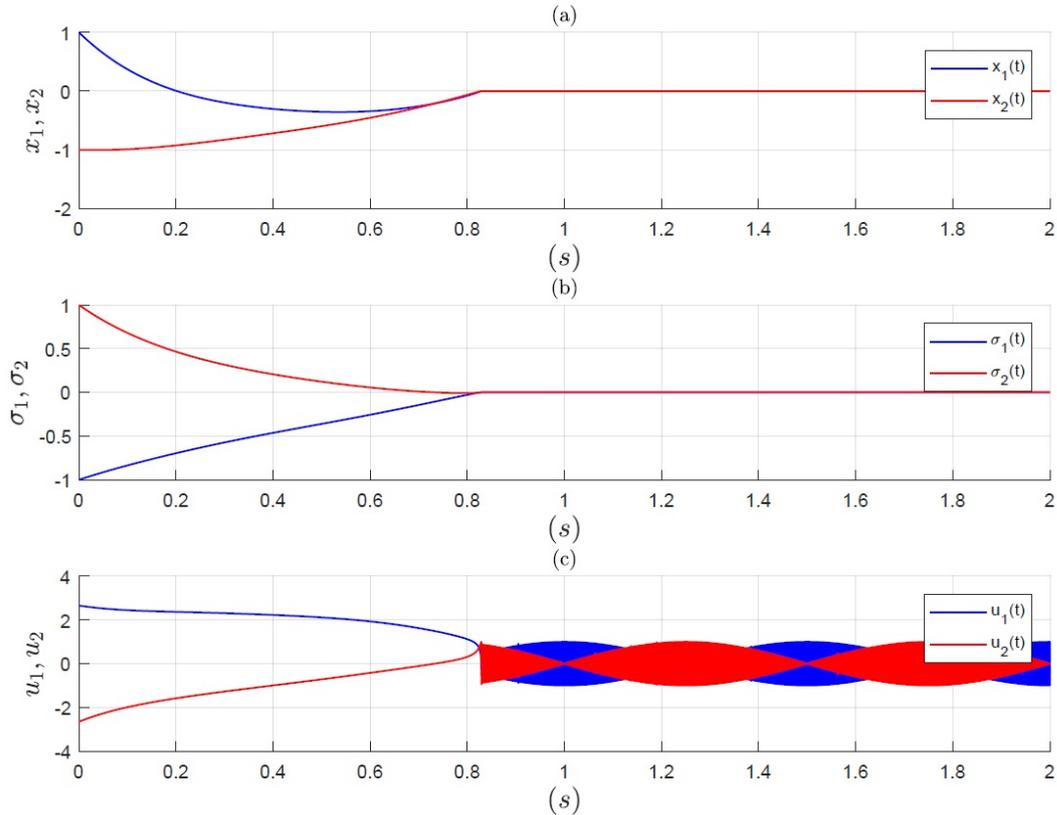


Figura 2.5: Desempenho da lei de controle por modos deslizantes (2.32), com função de modulação (2.33), aplicada ao sistema do Exemplo 2.2 com perturbação(2.31): (a) (●) estado x_1 , (●) estado x_2 ; (b) (●) variável de deslizamento σ_1 , (●) variável de deslizamento σ_2 ; (c) (●) ação de controle u_1 , (●) ação de controle u_2 .

Note que a variável de deslizamento converge para zero após um intervalo de tempo finito $T \approx 0,8s$. Durante o deslizamento, a ação de controle chaveia em alta-frequência para manter o estado do sistema igual a zero. Esse chaveamento em alta-frequência ocorre devido ao fato de a lei de controle (2.32) apresentar uma descontinuidade em $\sigma = 0$.

2.5 Atenuação do *Chattering* no SMC

Anteriormente, foi apresentado como o SMC é capaz de reagir instantaneamente, com um controle suficientemente intenso, para tentar manter o sistema sujeito a restrição $\sigma(x) = 0$, que define a superfície de deslizamento. Assim, utilização de algoritmos de controle por modos deslizantes convencional permite a redução da ordem do sistema na superfície de deslizamento, convergência em tempo finito, e gera uma robustez para perturbações casadas. Porém devido a impossibilidade prática do chaveamento em frequência finita, esse controle se torna sensível ao *chattering* e ruídos. Para contornar esse problema, foram propostas diversas abordagens com base na ideia de suavizar a descontinuidade presente na função sinal, $\text{sgn}(\cdot)$, de modo a obter aproximações arbitrariamente similares, porém contínuas [2],[15].

Os algoritmos SMC buscam fazer um chaveamento o mais próximo de relés ideais, porém, em casos práticos, são considerados a utilização de uma zona linear, simulando um chaveamento em torno de uma região da superfície de deslizamento [31]. Para o caso escalar, a zona linear pode ser implementada trocando a função $\text{sgn}(s)$ por uma saturação ideal, apresentado na Figura 2.6, e descrito pelo controle:

$$u(s) = -K \text{sat}(s), \quad \text{onde} \quad \text{sat}(s) = \begin{cases} +M & , \text{se } s > L \\ \frac{Ms}{L} & , \text{se } |s| \leq L \\ -M & , \text{se } s < -L \end{cases} \quad (2.34)$$

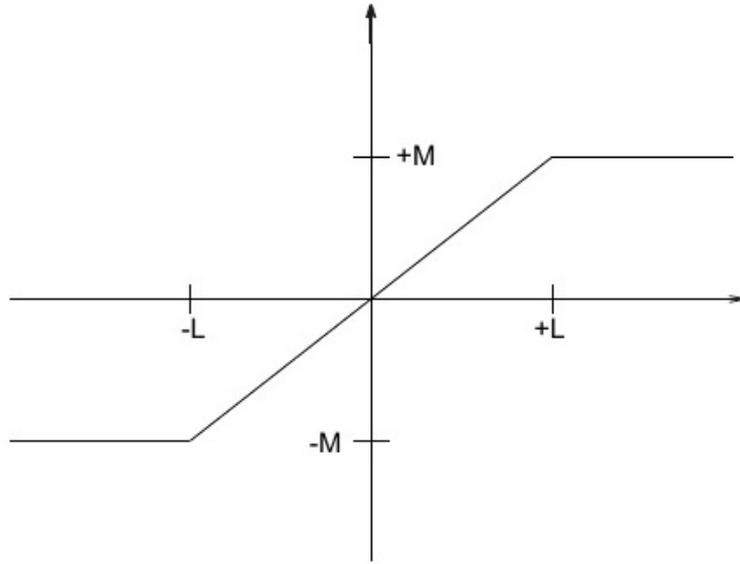


Figura 2.6: Controle por saturação ideal.

O controle por saturação é uma tentativa de solucionar o problema do *chattering*, sendo uma combinação do controle por relé ideal e um controle linear de alto ganho situado entre os dois limitantes.

Para o caso multivariável, pode ser empregada uma estratégia análoga, ao fazer uma substituição da função descontínua $\text{sgn}(\cdot)$ pela função $\frac{\sigma}{\|\sigma\|}$, e em seguida fazer uma aproximação para uma outra função contínua/suave, como por exemplo a função sigmoide [1]. Assim, define-se:

$$\text{sgn}(\sigma) \Rightarrow \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \approx \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \epsilon},$$

onde $\epsilon \in \mathbb{R}$ é uma constante pequena e positiva. Além disso,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \epsilon} = \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (2.35)$$

quando $\sigma \neq 0$.

Considerando as adaptações para o caso escalar quanto para o caso multivariável, as trajetórias dos estados são levadas para a região delimitada no entorno da superfície de deslizamento, sendo forçadas a permanecer nela, porém não são forçadas para a superfície $s = 0$ [3]. Como resultado o modos deslizante não existe dentro da região delimitada.

Assim, o controle por saturação ideal acaba sendo propenso a perder desempenho na presença de dinâmicas não modeladas. Para lidar com esse tipo perturbação esse controle tem que ser cuidadosamente modelado e considerado no projeto de realimentação para evitar instabilidade dentro da região limitada. Quando a região inicial não é capaz de garantir isso, deve-se usar uma região mais abrangente, o que prejudica a propriedade de rejeição de perturbação proveniente do SMC [32]. Assim, pode-se dizer que o uso do controle por saturação é capaz de atenuar o *chattering* para altas frequências, porém perdendo a propriedade da invariância.

Outras estratégias de aproximações contínuas foram desenvolvidas, embora estas também tenham acurácia e robustez parcialmente degradadas [2, Seção 1.4].

2.6 Controle por modo deslizante de ordem superior - HOSM

O controle por modos deslizantes foi generalizado com a introdução do conceito de modos deslizantes de ordem superior [9]. Essa generalização foi motivada pela tentativa de eliminar o efeito de *chattering* no modos deslizante. O HOSM se difere de outras estratégias propostas anteriormente na literatura por ser capaz de preservar principais vantagens do SMC convencional, porém com acurácia ainda maior e a possibilidade de uma lei de controle contínua, o que possibilita a atenuação do *chattering* [10]. Além disso, se o HOSM for adequadamente projetado, sua convergência é assintótica e é capaz de remover totalmente o efeito *chattering*[33].

Nessa abordagem, o controlador atua também em função das derivadas temporais de ordem superior do desvio em relação à restrição da variável de deslizamento, em vez de influenciar apenas a primeira derivada como ocorre no controle por modos deslizantes convencional. Assim, é removida também a restrição de que a saída de controle u deve ser um termo da primeira derivada total de σ .

A seguir é apresentada a definição formal do HOSM:

Definição 2.1. [30, 34] *Considere a equação diferencial descontínua*

$$\dot{x} = f(x),$$

entendida no sentido de Filippov, com função de restrição $\sigma(x)$ suave. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(i) As derivadas temporais $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ são funções contínuas do estado x .

(ii) O conjunto

$$\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\} \quad (2.36)$$

é um conjunto integral não vazio (i.e., consiste em trajetórias de Filippov).

(iii) O conjunto de campos vetoriais admissíveis de Filippov nos pontos pertencentes a (2.36) contém mais de um vetor.

Então, o movimento no conjunto (2.36) é dito existir em um modo deslizante de ordem r , e o conjunto (2.36) é denominado conjunto deslizante de ordem r . O caso não-autônomo é reduzido ao caso considerado acima introduzindo o estado fictício t , com dinâmica dada por $\dot{t} = 1$.

Observando a definição do HOSM, a ordem do deslizamento é dada pelo número total de derivadas contínuas de σ com respeito ao tempo, incluindo a derivada de ordem zero $\sigma^{(0)} = \sigma$, na vizinhança do modo deslizante. O objetivo do HOSM pode ser resumido em manter, além do desvio de $\sigma \equiv 0$, as derivadas temporais de σ até uma determinada ordem, r . Desta forma, o modo deslizante de ordem r é definido pelas igualdades

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0,$$

com dimensão r no espaço de estado.

Note que, para um deslizamento de ordem r , as derivadas de σ de ordem zero até $\sigma^{(r-1)}$ são funções contínuas das variáveis de estado do sistema, enquanto que a derivada σ^r não é uma função contínua. Logo, a ordem do deslizamento caracteriza o grau de suavidade dinâmica na vizinhança do modo deslizante.

O controle por modos deslizante convencional, $r = 1$, é capaz de gerar soluções robustas e de alta acurácia para sistemas com incertezas. Entretanto, é exigido que a restrição de σ a ser satisfeita seja de grau relativo 1, o que implica que o termo de controle deve estar explicitamente presente na expressão da primeira derivada temporal da restrição de σ . Além disso, o chaveamento em alta frequência torna a aplicação prática muitas vezes inaceitável devido aos efeitos de *chattering*.

Suponha que a restrição $\sigma = 0$ deva ser obedecida e que o termo de controle está explicitamente presente na expressão de $\dot{\sigma}$. O modo deslizante convencional pode ser aplicado para resolver esse problema, porém o efeito de *chattering* provavelmente resultaria em uma solução não aceitável. Uma forma de contornar essa dificuldade é considerar as derivadas do sinal de controle como uma nova variável a ser controlada no esquema de controle, mas sem ter efeito diretamente na planta.

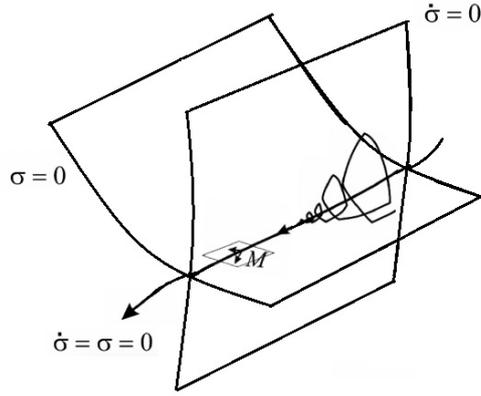


Figura 2.7: Modo Deslizante de Segunda Ordem. Figura extraída de [30].

Assim, utilizando um controle de modo deslizante de segunda ordem, $r = 2$, a restrição $\sigma = 0$ pode ser obedecida de forma exata, em tempo finito, utilizando um controle contínuo.

Outro ponto do modo deslizante convencional é que ele requer que a convergência para a superfície de deslizamento ocorra em tempo finito. No caso dos modo deslizante de ordem superior, todavia, a convergência também pode ser assintótica.

A Figura 2.7 exemplifica um caso em que $r = 2$, onde é apresentado o movimento do modo deslizante no conjunto (2.36). O conjunto de campos vetoriais, mencionado no terceiro item de 2.1, é ilustrado pelos dois vetores de direção em um ponto M da superfície de deslocamento pelo conjunto (2.36).

A principal dificuldade na implementação do HOSM, quando comparado com o modos deslizante convencional é a necessidade da informação das derivadas $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ para que o controle garanta o modos deslizante de ordem r . Inicialmente esse problema foi resolvido de forma teórica com a introdução dos diferenciadores exatos e robustos (*Robust Exact Differentiators* - REDs), apresentados em [33, 35, 36].

Para o caso de segunda ordem, $r = 2$, foram desenvolvidos diferentes controladores, sendo alguns deles reunidos em [37, Bartolini et al.] e [9, Levant]. Dentre eles, o algoritmo *Super-Twisting* (*Super-Twisting Algorithm* – STA) [9] tem tido grande desenvolvimento na teoria de controle por modos deslizante. O STA atenua o *chattering* em sistemas com grau relativo unitário, e se destaca dos demais por ser o único controlador baseado em modos deslizantes de ordem superior que não necessita de nenhuma informação sobre a derivada da variável de deslizamento para ser implementado [11].

Na próxima seção será detalhado o STA em sua forma básica, os principais desdobramentos e avanços na teoria desse controle.

2.7 *Super-Twisting*

Desenvolvido com o objetivo de remover o problema do *chattering* em sistemas com grau relativo unitário, o *Super-twisting* é um controle de modos deslizantes de segunda ordem [9]. Sua principal característica é não necessitar de nenhuma informação sobre a derivada temporal da variável de deslizamento para implementação da lei de controle. Esta particularidade fez com que o *Super-Twisting* atraísse considerável atenção no cenário de sistemas a estrutura variável, tendo sido utilizado com sucesso em importantes aplicações, como o problema da diferenciação robusta e exata em tempo real [16] e o controle de diversos sistemas de interesse prático[38–40].

O objetivo deste esquema de controle é obter uma lei de controle dinâmica em que a ação descontínua do controle esteja presente apenas na derivada temporal do sinal de controle. Assim, utilizando um sinal de controle contínuo, o modo deslizante de segunda ordem é capaz de obter uma convergência em tempo finito. Além disso, o STA também possui robustez para perturbações limitadas.

Seu movimento característico em forma de espiral ao redor da origem do plano de fase $(\sigma, \dot{\sigma})$ pode ser visto na Figura 2.8.

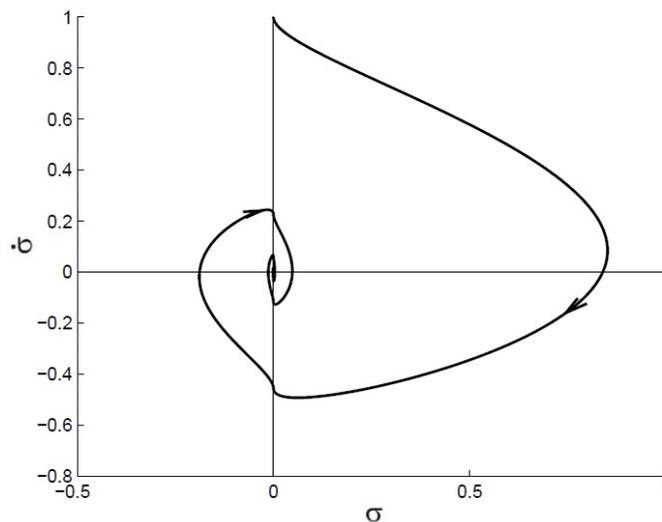


Figura 2.8: Exemplo de trajetória no espaço de estados de um controlador *Super-Twisting*.

Inicialmente o desenvolvimento das provas de convergência em tempo finito e estabilidade do STA foi baseado em métodos geométricos [9], majorar as trajetórias do sistema por curvas limites [18] e teoria de sistemas homogêneos [17]. Porém, tais análises apenas proporcionavam uma convergência válida em uma determinada vizinhança em torno do ponto de equilíbrio.

Recentemente, foi introduzido por MORENO e OSÓRIO [19, 20] uma nova abordagem de análise utilizando da teoria de estabilidade de Lyapunov. Essa nova abor-

dagem auxiliou na ampliação da aplicabilidade do STA ao garantir convergência global para o sistema. Nesses trabalhos, foram formuladas funções de Lyapunov que dependiam dos termos de controle. Assim, ao derivar essas funções candidatas de Lyapunov para provar estabilidade, foi possível obter relações de restrições que garantiam estabilidade e envolviam os termos de controle.

A abordagem por Lyapunov representou um novo impulso nos estudos do *Super-Twisting*, possibilitando desenvolvimentos de modificações no algoritmo de controle e nas funções de Lyapunov associadas. Tais modificações, como a introdução dos novos termos no controle, permitiram considerar classes mais gerais de perturbações e incertezas [41–43]. No entanto, os trabalhos ficaram restritos a sistemas monovariáveis.

Considerando uma abordagem desacoplada, os algoritmos desenvolvidos para o caso monovariável podem ser aplicados para o caso multivariável, ao decompor o sistema em malhas escalares apropriadas. No entanto, essa abordagem pode se mostrar falha caso o sistema caso seja muito acoplado, i.e., tenha uma forte interação entre as variáveis de estado.

Para resolver esse problema, NAGESH e EDWARDS [21] propuseram uma extensão multivariável para o STA baseada em controle vetorial unitário. Essa extensão também utilizou a abordagem por Lyapunov e, embora tenha sido aplicado para uma classe de incertezas/perturbações, necessitava do conhecimento completo da matriz de entrada do sistema para a implementação da lei de controle.

Essa restrição foi então contornada por VIDAL *et al.* [22] ao proporem um novo projeto para o STA multivariável. Nessa abordagem as matrizes de entrada K_p eram, por hipótese, consideradas simétricas e positivas definidas incertas. Considerando esta conjuntura, mostrou-se que apenas o conhecimento de limitantes inferior e superior dos autovalores da matriz de entrada K_p é necessário para implementar a lei de controle.

2.7.1 Controle *Super-Twisting* - STC

Nesta subseção será apresentado a estrutura de controle STC em sua forma mais básica utilizada por LEVANT [18], bem como o principal teorema da análise de convergência.

Considere que dinâmica de um sistema seja do tipo:

$$\dot{x} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad (2.37)$$

com estado $x \in \mathbb{R}^n$, controle $u \in \mathbb{R}$, e assumamos que $a(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sejam funções suaves.

Suponha que para algumas constantes positivas C, K_M, K_m, U_M, q as seguintes desigualdades sejam sempre verificadas:

$$|\dot{a}| + U_M |\dot{b}| \leq C, \quad 0 \leq K_m \leq b(t, x) \leq K_M, \quad |a/b| < qU_M, \quad 0 < q < 1. \quad (2.38)$$

Assim, a lei de controle STC é descrita como:

$$u = -k_1 |x|^{1/2} \operatorname{sgn}(x) + z, \quad \dot{z} = \begin{cases} -u, & |u| > U_M, \\ -k_3 \operatorname{sgn}(x), & |u| \leq U_M. \end{cases}, \quad (2.39)$$

onde os ganhos de controle k_1, k_3 são escalares positivos. O controle (2.39) não necessita de nenhuma informação sobre a derivada temporal \dot{x} para sua implementação. Além disso o algoritmo *Super-Twisting* fornece um sinal de controle contínuo, e portanto menos propenso ao *chattering*[9], [18]. O comportamento do sistema em malha-fechada é enunciado pelo Lema a seguir.

Lema 2.1. [18] *Quando $K_m k_3 > C$ e k_1 são suficientemente grandes o controle assegura o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem, $x = \dot{x} = 0$, que atrai as trajetórias em tempo finito. O controle u entra em tempo finito no segmento $[-U_M, U_M]$ permanecendo nele, e nunca sai do segmento se o valor inicial está contido no segmento desde o início.*

Uma condição suficiente para validar o Lema 2.1 é :

$$k_1 > \sqrt{\frac{2}{K_m k_3 - C}} \frac{(K_m k_3 + C) K_M (1 + q)}{K_m^2 (1 - q)}. \quad (2.40)$$

A trajetória real consiste de um número infinito de segmentos, onde em cada um desses segmentos \dot{x} varia monotonamente. Considerando a variável auxiliar $\xi = a(t, x) + b(t, x)z$, a variação total de ξ é igual a $\sum |\dot{x}_i|$, e pode ser majorada por uma série geométrica e portanto converge com um tempo total de :

$$T \leq \sum \frac{|\dot{x}_i|}{(K_m k_3 - C)}.$$

Demonstração. Ver a prova apresentada em [18] □

Note que as desigualdades (2.40) e (2.38) restringem bastante os valores k_1 e k_3 a serem escolhidos no controlador. Em sistemas reais, algumas variáveis podem ser incertas, o modelo não ser preciso e os parâmetros K_M, K_m, C , a serem estimados, são muito maiores do que o valor real. Na prática, quanto maior os parâmetros do controlador, mais sensível o controlador será a imperfeições no chaveamento e a ruídos de medição. Assim, em algumas implementações pode ser necessário um ajuste dos parâmetros do controlador durante a simulação.

A análise das trajetórias do controlador *Super-Twisting*, mostrando uma propriedade de contração e convergência em tempo finito, são detalhados no apêndice A.1.

Além disso, quando $b(t, x)$ é constante no sistema (2.37), a seguinte modificação da lei de controle (2.39) pode ser feita, ao considerar $U_M \rightarrow \infty$:

$$u = -k_1|x|^{1/2} \operatorname{sgn}(x) + z, \quad \dot{z} = -k_3 \operatorname{sgn}(x). \quad (2.41)$$

Sendo $b(t, x)$ constante, tem-se que $\dot{b}(t, x) = 0$. O que em (2.38), resulta nas condições:

$$|\dot{a}(t, x)| \leq C, \quad 0 \leq K_m \leq b(t, x) \leq K_M. \quad (2.42)$$

para determinadas constantes positivas C, K_m, K_M . Assim, se k_1 e k_3 forem escolhidos adequadamente, então a lei de controle (2.41) também garante a convergência do sistema em malha-fechada para um modo deslizante de segunda ordem $\dot{\sigma} = \sigma = 0$. Esse resultado é enunciado no seguinte Teorema:

Teorema 2.1. [16] *Seja o sistema em malha-fechada definido por (2.37) e (2.41) com $b(t, x)$ constante. Assuma que as desigualdades (2.42) sejam satisfeitas. Se $K_m k_3 > C$ e k_1 for suficientemente grande, então o controlador (2.41) garante o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ atraindo as trajetórias do sistema em tempo finito.*

Demonstração. ver [16]. □

2.7.2 Controle *Super-Twisting* por Lyapunov

Nesta subseção será apresentado o algoritmo *Super-Twisting* considerado por MORENO e OSÓRIO[19]. Nessa abordagem, algoritmo STA garante a estabilidade global do sistema utilizando a teoria de Lyapunov como método de análise.

O algoritmo de controle tem sua forma de inclusão diferencial dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1|x_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_1) + x_2 + d_1(x, t) \\ \dot{x}_2 &= -k_3 \operatorname{sgn}(x_1) + d_2(x, t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde x_i é um escalar representando a variável de estado, k_i são os ganhos a serem projetados e d_i são termos da perturbação. Note que o sistema de interesse para análise é o sistema (2.43), e que este pode ser compreendido como o sistema inicial (2.37), com a lei de controle STA (2.39), quando $a(t, x) = 0$, $b(t, x) = 1$ e $|u| \leq U_M, \forall t$.

A ideia principal é utilizar uma função de Lyapunov para garantir a convergência para zero em tempo finito de todas as trajetórias. Para alcançar isso, a função de

Lyapunov é escrita em função dos ganhos de controle a serem projetados, o que gera um grau de liberdade na manipulação da função. Quando os ganhos são ajustados adequadamente, pode-se obter uma função de Lyapunov forte, isto é, que possui uma derivada temporal negativa definida, para provar as propriedades de estabilidade do sistema. Além disso, utilizando esse resultado, é possível mostrar que para certas classes de perturbações a função de Lyapunov continua tendo uma derivada negativa.

A função de Lyapunov dada por:

$$V(x) = 2k_3|x_1| + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(k_1|x_1|^{1/2} \operatorname{sgn}(x_1) - x_2)^2 \quad (2.44)$$

é contínua em todo lugar mas não diferenciável em $x_1 = 0$. O teorema a seguir mostra que a função de Lyapunov (2.44) é uma função de Lyapunov forte para o sistema (2.43) sem perturbação.

Teorema 2.2. [19] *Suponha que $k_1, k_3 > 0$. Então todas as trajetórias do sistema (2.43) sem perturbação, $d_1 = d_2 = 0$, convergem em tempo finito para origem $x = 0$, em um tempo $t(x_0)$ menor que $T = 2V^{1/2}(x_0)/\gamma$, onde x_0 é o estado inicial e γ é uma constante que depende dos ganhos k_1 e k_3 . Além disso, $V(x)$, definida em 2.44, é uma função de Lyapunov forte e garante essas propriedades.*

Demonstração. A prova apresentada em [19] é também apresentada no Apêndice A.2.1 □

Para os casos com perturbações no sistema (2.43), os ganhos devem ser escolhidos suficientemente grandes para garantir a robustez, e assegurar que o sistema continue globalmente assintoticamente estável e com convergência em tempo finito. O seguinte teorema, apresenta as condições dos ganhos de controle para que isso ocorra.

Teorema 2.3. [19] *Suponha que os termos de perturbação do sistema 2.43, são limitados globalmente por*

$$|d_1| \leq \delta_1|x_1|^{1/2}, \quad |d_2| \leq \delta_2, \quad (2.45)$$

para algumas constantes $\delta_1, \delta_2 \geq 0$. Então a origem $x = 0$ é um ponto de equilíbrio e globalmente assintoticamente estável se os ganhos satisfazem:

$$k_1 > 2\delta_1$$

$$k_3 > k_1 \frac{5\delta_1 k_1 + 6\delta_2 + 4(\delta_1 + \delta_2/k_1)^2}{2(k_1 - 2\delta_1)} \quad (2.46)$$

Além disso, todas as trajetórias convergem em tempo finito para origem, limitado por $\tilde{T} = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\tilde{\gamma}}$, onde x_0 é o estado inicial e $\tilde{\gamma}$ é uma constante que depende dos ganhos k_1, k_3 e dos coeficientes dos limitantes da perturbação δ_1, δ_2 .

Demonstração. A prova é apresentada no apêndice A.2.2 □

Este teorema assegura a convergência em tempo finito e robustez, mesmo diante fortes termos de perturbação. Em [19] é ainda proposto uma variação desse algoritmo de controle que utiliza termos de correção lineares e não lineares visando adquirir as propriedades dos dois tipos de controle. A utilização de uma função de Lyapunov forte permitiu o aprofundamento dos estudos de convergência e robustez desse algoritmo, e a combinação do modos deslizantes de segunda ordem com outros algoritmos [19, 41–43]. No entanto, os trabalhos ficaram restritos a sistemas monovariáveis.

2.7.3 Controle *Super-Twisting* multivariável

Considerando uma abordagem desacoplada, os algoritmos desenvolvidos para o caso monovariável podem ser aplicados para o caso multivariável. Para isso, é necessário decompor o sistema multivariável em malhas escalares apropriadas, i.e., transformar um problema de controle multivariável com m entradas em um problema desacoplado envolvendo m estruturas escalares. No entanto, essa abordagem pode não ser bem sucedida se o sistema for muito acoplado, como consequência de uma interação, suficientemente forte, entre as variáveis de estado do sistema.

Consequentemente, o desenvolvimento de uma estrutura multivariável para o algoritmo *Super-Twisting* foi uma importante contribuição em [21]. Essa estrutura é baseada em um conceito similar ao controle vetorial unitário, apresentada na seção (2.4), e permite ao algoritmo compensar incertezas/perturbações não-desacopladas com respeito às variáveis de estado.

Assim como em [19, 20], a análise de estabilidade e convergência do sistema foi baseada em Lyapunov. Entretanto, as funções de Lyapunov associadas foram estendidas para o caso multivariável.

Para apresentar o STA multivariável proposto por [21], considere o seguinte sistema a estrutura variável:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u, \\ \sigma = \sigma(t, x), \end{cases} \quad (2.47)$$

onde $u \in \mathbb{R}^m$ é a ação de controle, com estado $x \in \mathbb{R}^n$, e variável de deslizamento $\sigma \in \mathbb{R}^m$. Assuma que as funções $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, e $\sigma(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sejam suaves. Além disso, suponha que o sistema possua grau relativo uniforme e unitário, de modo que a dinâmica da variável de deslizamento possa ser representada por

$$\dot{\sigma} = a(t, x) + b(t, x)u + \bar{\gamma}(t, \sigma),$$

com $a(t, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x)$, $b(t, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ não-singular, e $\bar{\gamma}$ representa um incerteza que pode eventualmente ser limitada. A lei de controle é projetada segundo

$$u = [b(t, x)]^{-1}(v - a(t, x)),$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$ é uma variável de controle a ser definida posteriormente. Observe que, para implementação da lei de controle é necessário o conhecimento de $b(t, x)$. Considerando esse controle, a dinâmica da variável de deslizamento pode ser reescrita como

$$\dot{\sigma} = v + \bar{\gamma}(t, \sigma) \quad (2.48)$$

O objetivo é projetar a variável de controle v , tal que as trajetórias do sistema sejam atraídas em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\dot{\sigma} = \sigma = 0$

Ao considerar uma abordagem desacoplada, a variável de controle v pode ser definida em termos de suas componentes $v_i \in \mathbb{R}$. Nesse caso, o algoritmo Super-Twisting convencional, tem a seguinte forma:

$$v_i = -k_{1i} |\sigma_i|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma_i) + \xi_i, \quad \dot{\xi}_i = -k_{2i} \operatorname{sgn}(\sigma_i), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

onde $\sigma_i \in \mathbb{R}$ são as componentes do vetor da variável de deslizamento $\sigma \in \mathbb{R}^m$. Considerando a equação da dinâmica de deslizamento definida em (2.48), tem-se

$$\dot{\sigma}_i = v_i + \bar{\gamma}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

onde $\bar{\gamma}_i(t, x) \in \mathbb{R}$ são as componentes da função vetorial $\bar{\gamma}(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Segundo as desigualdades para a implementação do *Super-Twisting* (2.42), para esta estratégia desacoplada, as seguintes desigualdades devem ser satisfeitas:

$$|\dot{\bar{\gamma}}_i(t, \sigma)| \leq C_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

para determinadas constantes positivas C_i . Portanto, segundo o Teorema 2.1, se os ganhos k_{1i} e k_{2i} forem adequadamente escolhidos, então o modos deslizante de segunda ordem $\sigma_i = \dot{\sigma}_i = 0$, para cada uma das componentes σ_i do vetor variavel de deslizamento σ , é alcançado em tempo finito. Isso implica que o modos deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ é garantido, e as trajetórias do sistema são atraídas em tempo finito.

Em vez de considerar essa estratégia desacoplada para o *Super-Twisting*, em [21] foi considerado uma estrutura inerentemente multivariável e não-desacoplada baseada no STA (2.39).

Para essa abordagem a lei de controle é definida como:

$$v = -k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + \xi, \quad \dot{\xi} = -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma. \quad (2.49)$$

Note que, comparando a lei de controle (2.39) com (2.49), foram introduzidos termos lineares não-homogêneos, e, utilizando o conceito de controle vetorial unitário apresentado na seção 2.4, foi possível generalizar a função $\text{sgn}(\sigma)$ para $\frac{\sigma}{\|\sigma\|}$. [21]. Diante disso, fazendo $m = 1$ e $k_2 = k_4 = 0$ retorna para o algoritmo *Super-Twisting* convencional. Além disso, assuma que seja possível escrever $\bar{\gamma}(t, \sigma)$ na forma

$$\bar{\gamma}(t, x) = \gamma_1(t, \sigma) + \gamma_2(t) \quad (2.50)$$

onde $\gamma_1(t, \sigma)$ e $\gamma_2(t)$ são funções suaves satisfazendo as desigualdades

$$\|\gamma_1(t, \sigma)\| \leq \delta_1 \|\sigma\|, \quad \|\dot{\gamma}_2(t)\| \leq \delta_2, \quad (2.51)$$

para determinadas constantes positivas $\delta_1, \delta_2 > 0$. Note que as condições (2.51) abrangem o caso com incertezas/perturbações não-desacopladas com respeito às variáveis de estado do sistema, representando assim um caso mais geral. Considerando (2.48), (2.49) e (2.50), a dinâmica de malha fechada é dada por

$$\dot{\sigma} = -k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + z + \gamma_1(t, \sigma), \quad \dot{z} = -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma + \phi, \quad (2.52)$$

onde $z = \xi + \gamma_2(t)$, e $\phi = \frac{d}{dt} \gamma_2(t)$. O seguinte teorema apresenta as principais propriedades de estabilidade e convergência do sistema em malha-fechada.

Teorema 2.4. [21] *Considere o sistema em malha-fechada (2.52). Suponha que as desigualdades (2.51) sejam satisfeitas para determinadas constantes positivas conhecidas $\delta_1, \delta_2 > 0$. Então, existem intervalos de valores para os ganhos k_1, k_2, k_3, k_4 tais que as trajetórias do sistema sejam globalmente atraídas em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$.*

Demonstração. ver [21] □

Para o teorema 2.4, foi considerada em [21] a função de Lyapunov:

$$V(\sigma, z) = 2k_3 \|\sigma\| + k_4 \sigma^T \sigma + \frac{1}{2} z^T z + \zeta^T \zeta \quad (2.53)$$

onde $\zeta := k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2 \sigma - z$. Definindo o subespaço $\mathcal{S} = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^{2m} : \sigma = 0\}$, é possível ver que $V(\sigma, z)$ em 2.53 é contínua e diferenciável exceto para o subespaço \mathcal{S} .

Em [21] é apresentado ainda o desenvolvimento de \dot{V} , onde o resultado final é apresentado aqui para deixar a dissertação mais auto-contida :

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & - \left(k_1 k_3 + \frac{k_1^3}{2} \right) \frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{3/2}} + \frac{3}{2} k_1 k_2 \frac{\sigma^T \gamma}{\|\sigma\|^{1/2}} \\
& - (k_2 k_4 + k_2^3) \|\sigma\|^2 - \left(k_1 k_4 + \frac{5}{2} k_1 k_2^2 \right) \frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{1/2}} \\
& + k_1^2 \frac{\sigma^T z}{\|\sigma\|} + 2k_2^2 \sigma^T z + 3k_1 k_2 \frac{\sigma^T z}{\|\sigma\|^{1/2}} \\
& - k_2 \|z\|^2 + \frac{k_1}{2} \frac{(\sigma^T z)(z^T \sigma)}{\|\sigma\|^{5/2}} - k_1 \frac{z^T z}{\|\sigma\|^{1/2}} \\
& + \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \right) \frac{\sigma^T \gamma}{\|\sigma\|} + (2k_4 + k_2^2) \sigma^T \gamma \\
& - (k_2 k_3 + 2k_1^2 k_2) \frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|} - k_2 \gamma^T z + \frac{k_1}{2} \frac{\sigma^T \gamma z^T \sigma}{\|\sigma\|^{5/2}} \\
& - k_1 \frac{z^T \gamma}{\|\sigma\|^{1/2}} - 2z^T \phi - k_2 \sigma^T \phi - k_1 \frac{\phi^T \sigma}{\|\sigma\|^{1/2}}
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Alem disso, definido o vetor $\chi = \left[\|\sigma\|^{1/2} \quad \|\sigma\| \quad \|z\| \right]^T$, o majorante de \dot{V} na forma matricial apresentado em [21] é dado por:

$$\dot{V} \leq - \frac{1}{\|\sigma\|^{1/2}} \chi^T \Omega \chi - \chi^T \Psi \chi, \tag{2.55}$$

onde o conjunto de matrizes simétricas (Ω , Ψ) tem a forma:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & \Omega_{13} \\ 0 & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{13} & \Omega_{23} & \Omega_{33} \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & \Psi_{13} \\ 0 & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{13} & \Psi_{23} & \Psi_{33} \end{bmatrix}, \tag{2.56}$$

e são compostos dos elementos

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= \frac{1}{2} k_1^3 + k_1 k_3 - k_1 \delta_2, & \Psi_{11} &= k_2 k_3 + 2k_1^2 k_2 - k_2 \delta_2 - \left(2k_3 + \frac{1}{2} k_1^2 \right) \delta_1, \\
\Omega_{13} &= -\frac{1}{2} k_1^2 - \delta_2, & \Psi_{13} &= -\frac{3}{4} k_1 \delta_1, \\
\Omega_{22} &= k_1 k_4 + \frac{5}{2} k_1 k_2^2 - \frac{3}{2} k_1 k_2 \delta_1, & \Psi_{22} &= k_2 k_4 + k_2^3 - (k_2^2 + 2k_4) \delta_1 \\
\Omega_{23} &= -\frac{3}{2} k_1 k_2, & \Psi_{23} &= -k_2^2 - \frac{1}{2} k_2 \delta_1, \\
\Omega_{33} &= \frac{1}{2} k_1, & \Psi_{33} &= k_2,
\end{aligned}$$

Note que o vetor χ possui entradas correlacionadas, o que eventualmente pode gerar um conservadorismo.

Considerando que as desigualdades (2.51) sejam satisfeitas para determinadas constantes positivas δ_1, δ_2 , um intervalo de valores para os ganhos do algoritmo *Super-Twisting* multivariável (2.49) que satisfaz o Teorema 2.4 é definido por [21].

$$k_1 > \sqrt{2\delta_2}, \quad k_2 > 2\delta_1, \quad k_3 > \max \{k_3^\Omega, k_3^\Psi\}, \quad k_4 > \max \{k_4^\Omega, k_4^\Psi\}, \quad (2.57)$$

onde

$$\begin{aligned} k_3^\Omega &= 3\delta_2 + \frac{2\delta_2^2}{k_1^2}, & k_3^\Psi &= \frac{\frac{9}{16}(k_1\delta_1)^2}{k_2(k_2 - 2\delta_1)} + \frac{\frac{1}{2}k_1^2\delta_1 - 2k_1^2k_2 + k_2\delta_2}{(k_2 - 2\delta_1)} \\ k_4^\Omega &= \frac{\beta_1}{\beta_2} + 2k_2^2 + \frac{3}{2}k_2\delta_1, & k_4^\Psi &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2(k_2 - 2\delta_1)} + \frac{2k_2^2\delta_1 + \frac{1}{4}k_2\delta_1^2}{k_2 - 2\delta_1} \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{9(k_1\delta_1)^2}{16k_2^2} \left(k_2 + \frac{1}{2}\delta_1 \right)^2, & \beta_1 &= \left(\frac{3}{2}k_1^2k_2 + 3\delta_2k_2 \right)^2, \\ \alpha_2 &= k_2(k_3 + 2k_1^2 - \delta_2) - \left(2k_3 + \frac{1}{2}k_1^2 \right) \delta_1 - \frac{9(k_1\delta_1)^2}{16k_2}, & \beta_2 &= k_3k_1^2 - 2\delta_2^2 - 3\delta_2k_1^2. \end{aligned}$$

Assim, ajustando os ganhos do algoritmo de acordo com (2.57), garante-se o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ atraindo, em tempo finito, as trajetórias do sistema em malha-fechada (2.52).

2.8 Controle *Super-Twisting* para matriz de entrada simétrica

O esquema de controle STA multivariável [21] apresentado na seção 2.7.3, necessita do conhecimento total da matriz de entrada para implementação. Para contornar essa restrição, um novo projeto para o STA multivariável foi proposto em [22] considerando matrizes de entrada simétricas e positivas definidas incertas. Nessa abordagem, é suposto o conhecimento dos limitante superiores, denotado por λ_M e inferiores, denotado por λ_m , dos autovalores da matriz de entrada.

O esquema STA de [22] considerou uma análise de convergência e estabilidade baseada em uma função de Lyapunov similar a de [21], apresentada nessa dissertação em 2.53.

A função de Lyapunov de [22] é descrita como:

$$\begin{aligned}
V(\sigma, z) = & \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right) \|\sigma\| + \left(k_4 + \frac{k_2^2}{2}\lambda_M\right) \sigma^T \sigma + z^T K_p z \\
& + k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma^T K_p z - k_1 \frac{z^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Considerando a variável $\zeta = k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{1/2}} + k_2 \sigma - z$, é fácil verificar que (2.58) é positiva definida e radialmente ilimitada, pois:

$$V \geq 2k_3 \|\sigma\| + k_4 \sigma^T \sigma + \frac{1}{2} z^T K_p z + \frac{1}{2} \zeta^T K_p \zeta$$

A derivada da função de Lyapunov (2.58), de [22], pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} \left(k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right) \sigma^T K_p \sigma - \frac{k_2}{\|\sigma\|} \left(k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right) \sigma^T K_p \sigma \\
& + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \frac{\sigma^T (K_p) z}{\|\sigma\|} + \frac{\sigma^T (K_p) \gamma}{\|\sigma\|} \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right) \\
& - \frac{k_1 k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 k_4 \sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2^3 \lambda_M \sigma^T K_p \sigma \\
& - k_2 k_4 \sigma^T K_p \sigma + k_2^2 \lambda_M \sigma^T (K_p) z + (2k_4 + k_2^2 \lambda_M) \sigma^T K_p \gamma + 2z^T K_p \phi(t) \\
& - \frac{3}{2} k_1^2 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|} - \frac{3}{2} k_1 k_2^2 \lambda_M \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T K_p \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_1 k_2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2 z^T K_p^2 \sigma - k_2 z^T K_p^2 z \\
& - k_2 z^T K_p^2 \gamma - k_2 \sigma^T K_p \phi(t) + \frac{k_1^2 z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|} \\
& + \frac{k_1 k_2 z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 z^T K_p^2 \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 \sigma^T K_p \phi}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{k_1^2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^3} - \frac{k_1 k_2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)[\sigma^T K_p z]}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)[\sigma^T K_p \gamma]}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

A forma matricial para o majorante da função de Lyapunov (2.59), pode ser escrita seguindo um formato semelhante ao formato utilizando as matrizes Ω e Ψ , apresentado em (2.55) e (2.56). Porém com ganhos:

$$\begin{aligned}
\Omega_{11} &= \lambda_m \left(k_1 k_3 + \frac{k_1^3}{2} \lambda_M \right) - k_1 \lambda_M \delta_2, & \Psi_{11} &= \lambda_m (k_2 k_3 + 2k_1^2 k_2 \lambda_M) \\
\Omega_{13} &= -k_1^2 \lambda_M^2 - \lambda_M \delta_2, & & - \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \lambda_M \delta_1 - k_2 \lambda_M \delta_2 \\
\Omega_{22} &= \lambda_m \left(k_1 k_4 + \frac{5}{2} k_1 k_2^2 \lambda_M \right) - \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M^2 \delta_1, & \Psi_{13} &= -\frac{3}{4} k_1 \lambda_M^2 \delta_1, \\
\Omega_{23} &= -2k_1 k_2 \lambda_M^2, & \Psi_{22} &= \lambda_m (k_2 k_4 + k_2^3 \lambda_M) \\
\Omega_{33} &= \frac{k_1}{2} \lambda_m^2, & & - (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \lambda_M \delta_1 \\
& & \Psi_{23} &= -k_2^2 \lambda_M^2 - \frac{k_2}{2} \lambda_M^2 \delta_1, \quad \Psi_{33} = k_2 \lambda_m^2,
\end{aligned}$$

Com isso uma nova versão do Teorema 2.4 pode ser atribuída a [22], ao considerar as seguintes desigualdades para os ganhos k_1, k_2, k_3, k_4 :

$$\begin{aligned}
k_1 &> \max \left\{ \sqrt{\frac{2\delta_2}{\lambda_m}}, 0 \right\}, & k_2 &> \max \left\{ 2\delta_1 \frac{\lambda_M}{\lambda_m}, 0.75\delta_1 \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}} \right\} \\
k_3 &> \max \left\{ 4k_1^2 \frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3} + 8 \frac{\lambda_M^3}{\lambda_m^3} \delta_2 + 4 \frac{\lambda_M^2}{\lambda_m^3} \frac{\delta_2^2}{k_1^2}, \frac{k_2 \lambda_M \delta_2}{k_2 \lambda_m - 2\lambda_M \delta_1} \right\} & (2.60) \\
k_4 &> \max \left\{ 16k_2^2 \frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3}, \frac{3k_2^2 \lambda_M^4 \delta_1 + \frac{1}{2} k_2 \lambda_M^4 \delta_1^2 + k_2^3 \lambda_M (2\lambda_M^3 - \lambda_m^3)}{\lambda_m^2 (k_2 \lambda_m - 2\lambda_M \delta_1)} \right\}
\end{aligned}$$

Assim, se os valores para os ganhos k_1, k_2, k_3 e k_4 forem escolhidos de acordo com (2.60), o Teorema 2.4 garante que as trajetórias do sistema sejam globalmente atraídas em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem em $\sigma = \dot{\sigma} = 0$.

Capítulo 3

Super-Twisting Multivariável em Sistemas com Matriz de Entrada sem Simetria e Incerta

Como mostrado no Capítulo 2, o desenvolvimento da estrutura multivariável para o STA teve grande importância para a teoria do *Super-Twisting*. O algoritmo MIMO STA apresentado em [21], baseado em um conceito similar ao controle vetorial unitário, permitiu ao algoritmo compensar incertezas/perturbações não-desacopladas com respeito às variáveis de estado. Além disso sua análise de estabilidade e convergência foi baseada em funções de Lyapunov introduzidas para o *Super-Twisting* em [19],[20].

No entanto, essa estratégia de controle necessita do conhecimento completo da matriz de entrada do sistema para que lei de controle possa ser implementada e consiga compensar uma classe de incertezas/perturbações que podem ser dependentes do estado. Tentando contornar essa restrição, foi proposto um projeto para o STA multivariável [22] considerando matrizes de entrada simétricas e positivas definidas incertas, onde mostrou-se que somente o conhecimento de limitantes inferior e superior dos autovalores da matriz de entrada era necessário para implementar a lei de controle.

Este capítulo tem como objetivo contornar a necessidade do conhecimento exato da matriz de entrada do sistema para a implementação do *Super-Twisting* multivariável [21]. Para tanto, é considerado uma nova versão do STA relaxando-se a hipótese da matriz de entrada ser simétrica e positiva definida assumida em [22]. Assim, o problema abordado considera sistemas com matriz de entrada incerta sem fazer a exigência de simetria, o que representa uma generalização capaz de incluir novas classes de sistemas.

Ao considerar a classe de sistemas incertos, a condição de simetria pode se mos-

trar frágil. Assim, é considerado o conhecimento de uma matriz simetrizante para o valor nominal da matriz de entrada. Dessa forma, admite-se que a matriz de entrada efetiva, i.e., após a aplicação da matriz simetrizante, seja predominantemente simétrica e positiva definida com uma pequena norma na parte antissimétrica. Usando uma abordagem de Lyapunov, será mostrado que o projeto do STA multivariável pode ser feito utilizando apenas o conhecimento dos limitantes inferior e superior dos autovalores da parte simétrica da matriz efetiva e do limitante superior da norma da parte antissimétrica da matriz de entrada efetiva.

A viabilidade da estratégia proposta é investigada ao considerar um exemplo numérico de *benchmark*, em que o limite de estabilidade do sistema é testado ao se considerar variações nos ganhos de controle. A partir disso, é considerada a simulação de um caso prático de servovisão de um manipulador robótico para avaliar como o esquema proposto se comporta em um cenário real. Além disso, o desempenho de controle é comparado com outro esquema STA MIMO[22], ao considerar um caso de simulação para estabilização de um satélite.

3.1 Definição do problema

Considere o sistema MIMO incerto descrito por::

$$\dot{\sigma} = K_p[\bar{u} + \bar{\gamma}(\sigma, t)] + f(t), \quad (3.1)$$

onde $\dot{\sigma} \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de estados, $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ é a entrada do sistema, $\bar{\gamma} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ representa incertezas e perturbações, e $f \in \mathbb{R}^m$ é uma incerteza absolutamente contínua e variante no tempo.

É considerada uma transformação do controle para que a matriz de entrada resultante seja o mais próxima possível de uma matriz simétrica. Para tanto, são feitas as seguintes hipóteses:

(A1) Existe uma matriz S_p conhecida tal que

$$K_p S_p = \bar{K}_p = K_{ps} + \mu K_{pa},$$

onde $K_{ps} = K_{ps}^T > 0$, $\|K_{pa}\| = 1$, e $\mu > 0$ é um parâmetro suficientemente pequeno. Isso significa que a parte antissimétrica de \bar{K}_p , denotada por K_{pa} , é assumida com norma μ .

(A2) A matriz de entrada resultante \bar{K}_p continua incerta, porém são conhecidos os limitantes superior (λ_M) e inferior (λ_m) do maior e menor autovalor da parte simétrica K_{ps} e $\bar{\mu}$ é um limitante superior de μ , ou, equivalentemente, para a norma-2 (euclidiana) do termo μK_{pa} .

(A3) As perturbações/incertezas satisfazem as seguintes desigualdades:

$$\|\gamma(t, \sigma)\| \leq \delta_1 \|\sigma\| \quad , \quad \|\phi(t)\| \leq \delta_2,$$

onde $\phi(t) = K_p^{-1} \frac{df(t)}{dt}$ e $\delta_1, \delta_2 \geq 0$, e $\bar{\gamma} = S_p \gamma$.

A transformação para a entrada do controle é dada por

$$\bar{u} = S_p u.$$

Em [22], foi considerado, por hipótese, que a matriz de entrada fosse positiva definida e simétrica, i.e., $K_p = K_p^T > 0$. Para abranger casos mais gerais, neste trabalho a matriz de entrada inicial, K_p , será considerada como uma matriz qualquer, que é pós multiplicada por uma matriz de ajuste, S_p . Note que a matriz S_p não é única, e esta apenas deve satisfazer a hipótese **(A1)**. Assim, a matriz de entrada do sistema a ser estudada se aproxima de uma matriz simétrica, podendo porém apresentar uma parcela antissimétrica residual. Além disso, de acordo com a Hipótese **(A3)**, a função $f(t)$ possui derivada uniformemente limitada e $\gamma(t, 0) = 0$. Com isso, o sistema (3.1), segundo as hipóteses **(A1)**-**(A3)**, pode ser escrito como:

$$\dot{\sigma} = (K_{ps} + \mu K_{pa})[u + \gamma(\sigma, t)] + f(t), \quad (3.2)$$

O objetivo é determinar uma lei de controle $u(t)$ para que o estado $\sigma(t)$ convirja para zero em um tempo finito.

3.2 Controle *Super-Twisting*

Para alcançar esse objetivo, foi considerada a extensão multivariável proposta em [21], e dada pela lei de controle:

$$\begin{aligned} u &= \left[-k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + \xi \right], \\ \dot{\xi} &= \left[-k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

Essa extensão se sobressai em relação ao *Super-Twisting* convencional pela sua maior robustez e aplicabilidade para diferentes classes de sistemas incertos, sendo capaz de lidar com incertezas não desacopláveis e perturbações dependentes dos estados.

Assim, utilizando esse controle no sistema (3.2), obtemos a dinâmica dos estados descrita por:

$$\dot{\sigma} = (K_{ps} + \mu K_{pa}) \left[-k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + \gamma(\sigma, t) + \xi \right] + f(t). \quad (3.4)$$

Assim, a dinâmica do sistema em malha fechada pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= (K_{ps} + \mu K_{pa}) \left[-k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + z \right] + (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma(\sigma, t), \\ \dot{z} &= \left[-k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma \right] + \phi(t), \end{aligned} \quad (3.5)$$

Onde a variável auxiliar $z = \xi + (K_{ps} + \mu K_{pa})^{-1} f(t)$ e a função $\phi = \frac{d}{dt} [(K_{ps} + \mu K_{pa})^{-1} f(t)] = [(K_{ps} + \mu K_{pa})^{-1} \dot{f}(t)]$. Note que, sendo a matriz de entrada K_p incerta, então o controlador não é capaz de cancelá-la. Além disso, o sistema (3.5) possui equações diferenciais com lado direito descontínuo.

3.3 Análise de estabilidade - Lyapunov

Tendo em vista a evolução das técnicas de controle por modos deslizante previamente descritas, a seguir é proposta a seguinte função de Lyapunov, associada a dinâmica de malha fechada (3.5).

$$\begin{aligned} V(\sigma, z) &= \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \|\sigma\| + \left(k_4 + \frac{k_2^2}{2} \lambda_M \right) \sigma^T \sigma \\ &\quad + z^T (K_{ps}) z + k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma^T (K_{ps}) z \\ &\quad - k_1 \frac{z^T (K_{ps}) \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Considerando as dimensões de $u \in \mathbb{R}^m$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$ e $z \in \mathbb{R}^m$, a análise a seguir se aplica a sistemas de ordem arbitrária.

Note que, no caso em que $K_p = K_{ps} + \mu K_{pa} = I$, onde I é a matriz identidade, implicando em $\lambda_m = \lambda_M = 1$, a função candidata (3.6) é equivalente à proposta em [21]. Além disso, se a matriz K_p for simétrica, $S_p = I$ e $K_{ps} = K_p$, a função candidata (3.6) seria equivalente à proposta em [22], apresentada em (2.58). Dessa forma, pode-se dizer que a função proposta nesse trabalho é de fato uma generalização das funções propostas anteriormente na literatura.

Pela equação(3.6) observa-se que $V(\sigma, z)$ é positiva definida e radialmente não limitada pois:

$$V \geq 2k_3 \|\sigma\| + k_4 \sigma^T \sigma + \frac{1}{2} z^T K_{ps} z + \frac{1}{2} \zeta^T K_{ps} \zeta,$$

onde $\zeta = \left[k_1 \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \quad k_2 \sigma^T \quad -z^T \right]^T$. Além disso, a função é contínua em todo ponto, e diferenciável em todo ponto exceto no subespaço $\mathcal{S} = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^{2m} | \sigma = 0\}$.

A derivada de (3.6) pode ser obtida observando algumas propriedades de derivada relacionadas a norma e vetores, apresentadas no Apêndice, subseção (B.4). Além disso, os detalhes dos passos matemáticos da derivada de (3.6), foram explicitados no apêndice B.1.

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} \left(k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \sigma^T K_{ps} \sigma - \frac{k_2}{\|\sigma\|} \left(k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \sigma^T K_{ps} \sigma \\
& + \frac{2k_3 \sigma^T (\mu K_{pa}) z}{\|\sigma\|} + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \frac{\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) z}{\|\sigma\|} \\
& + \frac{\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma}{\|\sigma\|} \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) - \frac{k_1 k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{k_1 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2^3 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma - k_2 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma + k_2^2 \lambda_M \sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) z \\
& + 2k_4 \sigma^T (\mu K_{pa}) z + (2k_4 + k_2^2 \lambda_M) \sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma + 2z^T K_{ps} \phi(t) \\
& - \frac{3}{2} k_1^2 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|} - \frac{3}{2} k_1 k_2^2 \lambda_M \frac{\sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_1 k_2 \frac{z^T K_{ps} (K_{ps} + \mu K_{pa}) \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \tag{3.7} \\
& + k_2^2 z^T K_{ps} (K_{ps} + \mu K_{pa}) \sigma - k_2 z^T K_{ps} (K_{ps} + \mu K_{pa}) z \\
& - k_2 z^T K_{ps} (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma - k_2 \sigma^T K_{ps} \phi(t) + \frac{k_1^2 z^T K_{ps} (K_{ps} + \mu K_{pa}) \sigma}{\|\sigma\|} \\
& + \frac{k_1 k_2 z^T K_{ps} (K_{ps} + \mu K_{pa}) \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 z^T K_{ps} (K_{ps} + \mu K_{pa}) z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{k_1 z^T K_{ps} (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 \sigma^T K_{ps} \phi}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1^2 (z^T K_{ps} \sigma) (\sigma^T K_{ps} \sigma)}{2 \|\sigma\|^3} \\
& - \frac{k_1 k_2 (z^T K_{ps} \sigma) (\sigma^T K_{ps} \sigma)}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \frac{k_1 (z^T K_{ps} \sigma) [\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) z]}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \frac{k_1 (z^T K_{ps} \sigma) [\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma]}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

Ao analisar a equação de \dot{V} , em (3.7), é possível notar que sua expressão é formada por dois tipos de termos diferentes. O primeiro tipo se refere a termos que dependem de alguma forma de K_{ps} e que ao mesmo tempo não estão relacionados de nenhuma forma com o termo μK_{pa} . O segundo tipo se refere a termos que dependem de alguma forma de μK_{pa} . Assim, é possível separar os termos de (3.7) a fim de dividir \dot{V} em duas equações distintas, uma referente ao primeiro tipo, denotado

por \dot{V}_s , relativo a parte simétrica e contendo os termos isolados de K_{ps} , e a outra referente ao segundo tipo, denotada por \dot{V}_a , contendo os termos relacionados a K_{pa} . Com isso, tem-se que:

$$\dot{V} = \dot{V}_s + \dot{V}_a, \quad (3.8)$$

onde \dot{V}_s é dado por

$$\begin{aligned} \dot{V}_s = & -k_1 \left(k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2} \right) \frac{\sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_2 \left(k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2} \right) \frac{\sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|} + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_{ps} z}{\|\sigma\|} \\ & - \frac{k_1 k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2^3 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma - k_2 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma \\ & + k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_{ps} z - \frac{3k_1^2 k_2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|} - \frac{3k_1 k_2^2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_{ps} z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1 k_2 z^T K_{ps}^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2 z^T K_{ps}^2 \sigma - k_2 z^T K_{ps}^2 z \\ & + \frac{k_1^2 z^T K_{ps}^2 \sigma}{\|\sigma\|} + \frac{k_1 k_2 z^T K_{ps}^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 z^T K_{ps}^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1^2 (z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T K_{ps} \sigma)}{2 \|\sigma\|^3} \\ & - \frac{k_1 k_2 (z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T K_{ps} \sigma)}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \frac{k_1 (z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T K_{ps} z)}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\ & + \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \frac{\sigma^T K_{ps} \gamma}{\|\sigma\|} + 2z^T K_{ps} \phi(t) \\ & + (2k_4 + k_2^2 \lambda_M) \sigma^T K_{ps} \gamma - k_2 \sigma^T K_{ps} \phi(t) \\ & + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_{ps} \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 \sigma^T K_{ps} \phi}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ & - \frac{k_1 z^T K_{ps}^2 \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 z^T K_{ps}^2 \gamma + \frac{k_1 (z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T K_{ps} \gamma)}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

e \dot{V}_a é dado por

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = & \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \left(\frac{\sigma^T \mu K_{pa} z}{\|\sigma\|} + \frac{\sigma^T \mu K_{pa} \gamma}{\|\sigma\|} \right) + (2k_4 + k_2^2 \lambda_M) (\sigma^T \mu K_{pa} z + \sigma^T \mu K_{pa} \gamma) \\ & + \left(\frac{3k_1 k_2 \lambda_M}{2} \right) \left(\frac{\sigma^T \mu K_{pa} z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sigma^T \mu K_{pa} \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \right) + k_1 k_2 \frac{z^T (K_{ps} \mu K_{pa}) \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2 z^T (K_{ps} \mu K_{pa}) \sigma \\ & - k_2 z^T (K_{ps} \mu K_{pa}) z - k_2 z^T (K_{ps} \mu K_{pa}) \gamma + \frac{k_1^2 z^T (K_{ps} \mu K_{pa}) \sigma}{\|\sigma\|} + \frac{k_1 k_2 z^T (K_{ps} \mu K_{pa}) \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ & - \frac{k_1 z^T (K_{ps} \mu K_{pa}) z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 z^T (K_{ps} \mu K_{pa}) \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1 (z^T K_{ps} \sigma)}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} (\sigma^T \mu K_{pa} z + \sigma^T \mu K_{pa} \gamma). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note que, para o caso em que a matriz de entrada da planta, \overline{K}_p , ser totalmente simétrica, i.e., $\mu = 0$, a expressão $\dot{V} = \dot{V}_s + \dot{V}_a$ se reduz para $\dot{V} = \dot{V}_s$. Além disso, a equação de \dot{V}_s , (3.9), fica idêntica a \dot{V} do caso considerado em [22], em que a matriz

de entrada, K_p , é, por hipótese, simétrica e $S_p = I$. Assim, o caso considerado neste trabalho leva em conta os termos adicionais referentes a parcela antissimétrica, \dot{V}_a , na análise de Lyapunov.

O majorante para a função \dot{V}_s pode ser obtido seguindo os mesmos passos apresentados em [22]. A fim de apresentar o resultado mais abrangente e auto-contido possível, o apêndice B.2 a apresenta o desenvolvimento para majorar a parcela \dot{V}_s .

A seguir será apresentado o desenvolvimento para a parcela \dot{V}_a .

A seguir será apresentado o desenvolvimento do majorante de \dot{V}_a , (3.10), considerando os limitantes superiores para as perturbações, $\|\gamma(t, \sigma)\| \leq \delta_1 \|\sigma\|$ e $\|\phi(t)\| \leq \delta_2$, propostos na Hipótese **(A3)**. Além disso, observe que em \dot{V}_a o parâmetro μ sempre acompanha a matriz K_{pa} , e que, pela Hipótese **(A2)**, é conhecido o limitante superior da norma de μK_{pa} . Assim, o majorante de \dot{V}_a é obtido em função de $\bar{\mu}$ tal que: $\|\mu K_{pa}\| \leq \bar{\mu}$. Resultando em:

$$\begin{aligned} \dot{V}_a \leq & \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right) \left[\frac{\bar{\mu}\|\sigma\|\|z\|}{\|\sigma\|} + \frac{\bar{\mu}\delta_1\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|}\right] + (2k_4 + k_2^2\lambda_M) \left[\bar{\mu}\|\sigma\|\|z\| + \bar{\mu}\delta_1\|\sigma\|^2\right] \\ & + \left(\frac{3}{2}k_1k_2\lambda_M\right) \left[\frac{\bar{\mu}\|\sigma\|\|z\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{\bar{\mu}\delta_1\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\right] + k_1k_2\lambda_M\bar{\mu}\frac{\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2\lambda_M\bar{\mu}\|z\|\|\sigma\| \\ & + k_2\lambda_M\bar{\mu}\|z\|^2 + k_2\lambda_M\bar{\mu}\delta_1\|z\|\|\sigma\| + \frac{k_1^2\lambda_M\bar{\mu}\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|} + \frac{k_1k_2\lambda_M\bar{\mu}\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ & + \frac{k_1\lambda_M\bar{\mu}\|z\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1\lambda_M\bar{\mu}\delta_1\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1\lambda_M\bar{\mu}\|z\|^2\|\sigma\|^2}{2\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \frac{k_1\lambda_M\bar{\mu}\delta_1\|z\|\|\sigma\|^3}{2\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Após obter majorantes para \dot{V}_s , (B.13), e \dot{V}_a , (3.11), e equação de \dot{V} , (3.7), pode ser totalmente majorada. Definindo o vetor $\chi = \left[\|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \quad \|\sigma\| \quad \|z\|\right]^T$, onde σ e z são sistemas de ordem arbitrária, o majorante de \dot{V} na forma matricial pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\chi^T(\Omega - \Omega_a)\chi - \chi^T(\Psi - \Psi_a)\chi, \\ \dot{V} & \leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\chi^T\bar{\Omega}\chi - \chi^T\bar{\Psi}\chi, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde o conjunto de matrizes (Ω, Ψ) contem os elementos de \dot{V}_s , referente a (B.13), e o conjunto (Ω_a, Ψ_a) contem os elementos de \dot{V}_a , referente a (3.11).

Além disso, $\bar{\Omega} = \Omega - \Omega_a$ e $\bar{\Psi} = \Psi - \Psi_a$ tem a forma

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & 0 & \bar{\Omega}_{13} \\ 0 & \bar{\Omega}_{22} & \bar{\Omega}_{23} \\ \bar{\Omega}_{13} & \bar{\Omega}_{23} & \bar{\Omega}_{33} \end{bmatrix} \quad \bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{11} & 0 & \bar{\Psi}_{13} \\ 0 & \bar{\Psi}_{22} & \bar{\Psi}_{23} \\ \bar{\Psi}_{13} & \bar{\Psi}_{23} & \bar{\Psi}_{33} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

e são compostos por

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_{11} &= \lambda_m \left(k_1 k_3 + \frac{k_1^3}{2} \lambda_M \right) - k_1 \lambda_M \delta_2, \\ \bar{\Omega}_{13} &= -k_1^2 \lambda_M^2 - \lambda_M \delta_2 - \bar{\mu} \left(k_3 + \frac{3k_1^2}{4} \lambda_M \right), \\ \bar{\Omega}_{22} &= \lambda_m \left(k_1 k_4 + \frac{5}{2} k_1 k_2^2 \lambda_M \right) - \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu}), \\ \bar{\Omega}_{23} &= -2k_1 k_2 \lambda_M^2 - \bar{\mu} \left(\frac{7k_1 k_2 + 3k_1 \delta_1}{4} \right) \lambda_M, \\ \bar{\Omega}_{33} &= \frac{k_1}{2} (\lambda_m^2 - 3\bar{\mu} \lambda_M),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{11} &= \lambda_m (k_2 k_3 + 2k_1^2 k_2 \lambda_M) - k_2 \lambda_M \delta_2 \\ &\quad - 2k_3 \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu}) - \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu}),\end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}_{13} = -\frac{3}{4} k_1 \lambda_M^2 \delta_1,$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{22} &= \lambda_m (k_2 k_4 + k_2^3 \lambda_M) - k_2^2 \lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu}) \\ &\quad - 2k_4 \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu}),\end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}_{23} = -k_2^2 \lambda_M (\lambda_M + \bar{\mu}) - \frac{k_2}{2} \lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu}) - k_4 \bar{\mu},$$

$$\bar{\Psi}_{33} = k_2 (\lambda_m^2 - \bar{\mu} \lambda_M),$$

Observando a desigualdade de \dot{V} , (3.12), e o critério de estabilidade de Lyapunov, pretende-se provar que para certos valores de $(k_1, k_2, k_3, k_4, \mu)$ as matrizes $(\bar{\Omega}, \bar{\Psi})$ sempre atendem a condição $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^T > 0$ e $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^T > 0$, resultando em \dot{V} estritamente negativa.

Para assegurar que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^T > 0$ e $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^T > 0$, neste Teorema, 3.1, adota-se o critério de Sylvester, que assegura a positividade de uma matriz Hermitiana se e somente se seus menores líderes principais são positivos.

Observando o formato das matrizes (3.13), i.e, seus elementos nulos, essa condição se reduz em obter condições para que os elementos das diagonais e o determinante sejam positivos. O critério de Sylvester foi escolhido a fim de obter relações mais diretas do que as encontradas em [21].

Além disso, uma possível forma de lidar com os novos termos provenientes da parte antissimétrica, que são prejudiciais, seria considerar que o parâmetro $\bar{\mu}$ fosse suficientemente pequeno, de modo que esses termos pudessem ser dominados pelos termos de sinal positivo favoráveis. Porém, essa abordagem poderia acarretar em

um valor de $\bar{\mu}$ excessivamente pequeno, o que na prática restringiria a aplicabilidade da técnica. Por esse motivo, a solução adotada foi, sempre que possível, utilizar os próprios ganhos do algoritmo para dominar os termos da parte antissimétrica.

Dessa forma, as relações a serem obtidas aqui para os ganhos podem ser mais conservadoras que as obtidas em [22]. Todavia, esse problema pode ser contornado por meio do uso da matriz S_p introduzida nesse trabalho, descrita na hipótese (A1).

Obtendo as relações de ganho que tornam as matrizes $(\bar{\Omega}, \bar{\Psi})$ positivas definidas

A seguir será apresentada a análise de como foram obtidas as relações que garantem os elementos da diagonal e determinantes positivos das matrizes $(\bar{\Omega}, \bar{\Psi})$. Este desenvolvimento será apresentado na seguinte ordem:

- Condições para os elementos da diagonal de $\bar{\Omega} > 0$, (3.17).
- Condições para o determinante de $\bar{\Omega} > 0$, (3.29).
- Condições para os elementos da diagonal de $\bar{\Psi} > 0$ (3.37).
- Condições para o determinante de $\bar{\Psi} > 0$. (3.54).

Condições para os elementos da diagonal de $\bar{\Omega} > 0$

Para $\bar{\Omega}_{11} > 0$ deve-se ter:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{11} = \Omega_{11} &= \lambda_m(k_1k_3 + \frac{k_1^3}{2}\lambda_M) - k_1\lambda_M\delta_2 > 0 \\ k_1k_3\lambda_m + \frac{k_1^3}{2}\lambda_m\lambda_M &> k_1\lambda_M\delta_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Considerando uma abordagem conservadora, onde apenas um dos termos da soma do lado esquerdo da desigualdade (3.14) é suficiente para garantir que a desigualdade seja satisfeita, é considerado que:

$$\begin{aligned} k_1k_3\lambda_m &> k_1\lambda_M\delta_2, \\ k_3 &> \frac{\lambda_M\delta_2}{\lambda_m}, \end{aligned}$$

é suficiente para garantir $\bar{\Omega}_{11} > 0$.

Para a condição $\bar{\Omega}_{22} > 0$ deve-se ter:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{22} &= \Omega_{22} - \mu\Omega_{a22} > 0 \\ \lambda_m \left(k_1k_4 + \frac{5}{2}k_1k_2^2\lambda_M \right) - \frac{3}{2}k_1k_2\lambda_M^2\delta_1 - \mu \left(\frac{3}{2}k_1k_2\lambda_M\delta_1 \right) &> 0 \\ k_1k_4\lambda_m + \frac{5}{2}k_1k_2^2\lambda_m\lambda_M - \left[\frac{3}{2}k_1k_2\lambda_M\delta_1(\lambda_M + \mu) \right] &> 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considerando novamente uma abordagem conservadora, o primeiro termo garante que a desigualdade seja satisfeita:

$$\begin{aligned} k_1 k_4 \lambda_m &> \left[\frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \mu) \right] \\ k_4 &> \frac{3 k_2 \lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \mu)}{2 \lambda_m}. \end{aligned}$$

Para a condição $\bar{\Omega}_{33} > 0$ deve-se ter:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{33} &= \Omega_{33} - \mu \Omega_{a33} > 0 \\ \frac{k_1}{2} \lambda_m^2 - \mu \left(\frac{3k_1}{2} \lambda_M \right) &> 0 \\ \frac{k_1}{2} \lambda_m^2 &> \mu \left(\frac{3k_1}{2} \lambda_M \right) \\ \mu &< \frac{\lambda_m^2}{3\lambda_M}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Para facilitar a visualização são repetidas as condições para os elementos da diagonal de $\bar{\Omega} > 0$:

$$k_3 > \frac{\lambda_M \delta_2}{\lambda_m}, \quad k_4 > \frac{3k_2 \lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \mu)}{2 \lambda_m}, \quad \mu < \frac{\lambda_m^2}{3\lambda_M}. \tag{3.17}$$

Condições para o determinante de $\bar{\Omega} > 0$

O determinante de $\bar{\Omega}$ pode ser calculado por seus cofatores:

$$\begin{aligned} \det(\bar{\Omega}) &= \bar{\Omega}_{11} \left[\bar{\Omega}_{22} \bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{23}^2 \right] + \bar{\Omega}_{13} \left[-\bar{\Omega}_{13} \bar{\Omega}_{22} \right] \\ \det(\bar{\Omega}) &= \bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{22} \bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{23}^2 - \bar{\Omega}_{13}^2 \bar{\Omega}_{22} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Para ter $\det(\bar{\Omega}) > 0$, o termo $\bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{22} \bar{\Omega}_{33}$ deve ser positivo, o que é garantido pelos elementos da diagonal positivos, ao considerar (3.17). Além disso, esse termo deve ser capaz de majorar os termos negativos em (3.18). Para tanto, foi considerado a divisão do termo positivo em duas partes, dando origem ao conjunto com as desigualdades (3.19) e (3.20):

$$\begin{aligned} \det(\bar{\Omega}) &= \bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{22} \bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{23}^2 - \bar{\Omega}_{13}^2 \bar{\Omega}_{22} > 0 \\ &= \frac{1}{2} \bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{22} \bar{\Omega}_{33} + \frac{1}{2} \bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{22} \bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{23}^2 - \bar{\Omega}_{13}^2 \bar{\Omega}_{22} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{22}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{23}^2 > 0 & (3.19) \\ \frac{1}{2}\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{22}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{13}^2\bar{\Omega}_{22} > 0 & (3.20) \end{cases}$$

Resolvendo primeiro a desigualdade (3.19), podemos reescreve-la como:

$$\bar{\Omega}_{11} \left[\frac{1}{2}\bar{\Omega}_{22}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{23}^2 \right] > 0,$$

e observar que ela é satisfeita se $\frac{1}{2}\bar{\Omega}_{22}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{23}^2 > 0$.

Assim, $\frac{1}{2}\bar{\Omega}_{22}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{23}^2$ pode ser expandida para:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{\Omega}_{22}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{23}^2 &= \frac{k_1^2}{4}k_4\lambda_m^3 - \frac{3}{4}\mu k_1^2k_4\lambda_m\lambda_M \\ &+ \left(\frac{5}{8}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \left(\frac{15}{8}\right)\mu k_1^2k_2^2\lambda_m\lambda_M^2 \\ &- \left(\frac{3}{8}\right)k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M^2\delta_1 - \left(\frac{3}{8}\right)\mu k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 \\ &+ \left(\frac{9}{8}\right)\mu k_1^2k_2\lambda_M^3\delta_1 + \left(\frac{9}{8}\right)\mu^2k_1^2k_2\lambda_M^2\delta_1 \\ &- 4k_1^2k_2^2\lambda_M^4 - \mu k_1^2k_2\lambda_M^3(7k_2 + 3\delta_1) \\ &- \frac{\mu^2}{16}k_1^2\lambda_M^2(7k_2 + 3\delta_1)^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Considerando que os sinais $\gamma(t, \sigma)$ e $\phi(t)$ são dependente do tempo e podem ser negativos em determinados momentos, os termos dependentes de δ_1 e δ_2 foram considerados em seu pior caso, i.e., com sinal negativo. Além disso, os termos positivos foram particionados com o intuito de garantir que esses possam majorar os todos termos negativos em todos os casos.

Para o particionamento dos termos positivos poderiam ser considerados dois tipos de conjuntos para determinar o peso de cada parcela do particionamento. O conjunto $[(1 - p_1), p_1]$, de dois elementos, poderia ser utilizado para particionar o termo positivo em dois pedaços, e o conjunto $[(1 - p_2), \frac{p_2}{2}, \frac{p_2}{2}]$, de 3 elementos, para particionar o termo positivo em três pedaços, onde p_1 e p_2 são escalares arbitrários positivos menores que 1, i.e., $0 < p_1, p_2 < 1$. Os valores $p_1 = \frac{1}{2}$ e $p_2 = \frac{1}{3}$ foram escolhidos para que o particionamento dos termos positivos fiquem com o mesmo peso, i.e., ao particionar em dois pedaços o termo positivo é dividido por $(1/2)$ para cada parcela, e ao particionar em 3 pedaços o termo positivo é dividido por $(1/3)$ para cada parcela. Note que esse particionamento não é único, e que foi feita essa escolha de particionamento para facilitar o desenvolvimento matemático.

Assim, considerando os termos dependentes de delta como negativos, o particionamento dos termos positivos restantes, e uma reorganizaçã dos termos positivos, deixando-os perto de termos negativos semelhantes, a equaçã (3.21) é reescrita como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overline{\Omega}_{22}\overline{\Omega}_{33} - \overline{\Omega}_{23}^2 = & + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{k_1^2}{4}k_4\lambda_m^3 - 4k_1^2k_2^2\lambda_M^4 \\
& + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{k_1^2}{4}k_4\lambda_m^3 - \frac{3}{4}\mu k_1^2k_4\lambda_m\lambda_M \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{5}{8}k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{3}{8}k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M^2\delta_1 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{5}{8}k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{15}{8}\mu k_1^2k_2^2\lambda_m\lambda_M^2 \\
& - \frac{3}{8}\mu k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 - \frac{9}{8}\mu k_1^2k_2\lambda_M^3\delta_1 \\
& - \mu k_1^2k_2\lambda_M^3(7k_2 + 3\delta_1) \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{5}{8}k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{9}{8}\mu^2k_1^2k_2\lambda_M^2\delta_1 \\
& - \frac{\mu^2}{16}k_1^2\lambda_M^2(7k_2 + 3\delta_1)^2
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Assim, observando o particionamento feito, a desigualdade (3.19) é satisfeita se as seguintes condições sã obedecidas:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)\frac{k_1^2}{4}k_4\lambda_m^3 - 4k_1^2k_2^2\lambda_M^4 & > 0, \\
\left(\frac{1}{2}\right)\frac{k_1^2}{4}k_4\lambda_m^3 - \frac{3}{4}\mu k_1^2k_4\lambda_m\lambda_M & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{5}{8}k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{3}{8}k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M^2\delta_1 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{5}{8}k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{15}{8}\mu k_1^2k_2^2\lambda_m\lambda_M^2 - \frac{3}{8}\mu k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 \\
- \frac{9}{8}\mu k_1^2k_2\lambda_M^3\delta_1 - \mu k_1^2k_2\lambda_M^3(7k_2 + 3\delta_1) & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{5}{8}k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{9}{8}\mu^2k_1^2k_2\lambda_M^2\delta_1 - \frac{\mu^2}{16}k_1^2\lambda_M^2(7k_2 + 3\delta_1)^2 & > 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

O conjunto de desigualdades (3.23) pode ser resumido em:

$$\begin{aligned}
k_2 &> \frac{9\lambda_M\delta_1}{5\lambda_m}, & k_4 &> 32k_2^2\frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3}, & \mu &< \frac{\lambda_m^2}{6\lambda_M}, \\
\mu &< \frac{5k_2\lambda_m^3}{3[15k_2\lambda_m\lambda_M + 3\lambda_m^2\delta_1 + 9\lambda_M^2\delta_1 + 8\lambda_M^2(7k_2 + 3\delta_1)]}, \\
\mu^2 &< \frac{5k_2^2\lambda_m^3}{3\lambda_M[9k_2\delta_1 + 0.5(7k_2 + 3\delta_1)^2]}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Observando a segunda desigualdade que garante $\det(\bar{\Omega}) > 0$, (3.19), temos que:

$$\bar{\Omega}_{22} \left[\frac{1}{2}\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{13}^2 \right] > 0,$$

é satisfeita se $\frac{1}{2}\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{13}^2 > 0$.

Expandindo seus termos essa condição, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{13}^2 &= + \frac{1}{4}k_1^2k_3\lambda_m^3 - \frac{3}{4}\mu k_1^2k_3\lambda_m\lambda_M \\
&+ \frac{1}{8}k_1^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{3}{8}\mu k_1^4\lambda_m\lambda_M^2 \\
&- \frac{1}{4}k_1^2\lambda_m^2\lambda_M\delta_2 + \frac{3}{4}\mu k_1^2\lambda_M^2\delta_2 \\
&- k_1^4\lambda_M^4 - 2k_1^2\lambda_M^3\delta_2 - \lambda_M^2\delta_2^2 \\
&- 2\mu\lambda_M \left(k_1^2k_3\lambda_M + \frac{3}{4}k_1^4\lambda_M^2 + k_3\delta_2 + \frac{3}{4}k_1^2\lambda_M\delta_2 \right) \\
&- \mu^2 \left(k_3^2 + \frac{3}{2}k_1^2k_3\lambda_M + \frac{9}{16}k_1^4\lambda_M^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Novamente é considerado o pior caso, i.e., sinais dependentes do tempo e que foram majorados por delta são considerados com sinal negativo.

Reorganizando a equação (3.25), e considerando os termos dependentes de delta como negativos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overline{\Omega}_{11}\overline{\Omega}_{33} - \overline{\Omega}_{13}^2 = & + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}k_1^2k_3\lambda_m^3 - k_1^4\lambda_M^4 - 2k_1^2\lambda_M^3\delta_2 - \lambda_M^2\delta_2^2 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}k_1^2k_3\lambda_m^3 - \frac{3}{4}\mu k_1^2k_3\lambda_m\lambda_M - \frac{9}{4}\mu k_1^2\lambda_M^2\delta_2 \\
& - 2\mu k_1^2k_3\lambda_M^2 - 2\mu k_3\lambda_M\delta_2 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}k_1^2k_3\lambda_m^3 - \mu^2k_3^2 - \frac{3}{2}\mu^2k_1^2k_3\lambda_M \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{8}k_1^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{4}k_1^2\lambda_m^2\lambda_M\delta_2 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{8}k_1^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{3}{8}\mu k_1^4\lambda_m\lambda_M^2 - \frac{3}{2}\mu k_1^4\lambda_M^3 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{8}k_1^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{9}{16}\mu^2k_1^4\lambda_M^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

A desigualdade (3.20) é satisfeita se as seguintes condições são obedecidas:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}k_1^2k_3\lambda_m^3 - k_1^4\lambda_M^4 - 2k_1^2\lambda_M^3\delta_2 - \lambda_M^2\delta_2^2 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}k_1^2k_3\lambda_m^3 - \frac{3}{4}\mu k_1^2k_3\lambda_m\lambda_M - \frac{9}{4}\mu k_1^2\lambda_M^2\delta_2 \\
- 2\mu k_1^2k_3\lambda_M^2 - 2\mu k_3\lambda_M\delta_2 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}k_1^2k_3\lambda_m^3 - \mu^2k_3^2 - \frac{3}{2}\mu^2k_1^2k_3\lambda_M & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{8}k_1^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{4}k_1^2\lambda_m^2\lambda_M\delta_2 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{8}k_1^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{3}{8}\mu k_1^4\lambda_m\lambda_M^2 - \frac{3}{2}\mu k_1^4\lambda_M^3 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{8}k_1^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{9}{16}\mu^2k_1^4\lambda_M^2 & > 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Sendo resumidas em:

$$\begin{aligned}
k_1 &> \sqrt{\left(\frac{3}{1}\right) \frac{2\delta_2}{\lambda_m}}, & k_3 &> \left(\frac{3}{1}\right) \left(4 \frac{k_1^2 \lambda_M^4}{\lambda_m^3} + 8 \frac{\lambda_M^3 \delta_2}{\lambda_m^3} + 4 \frac{\lambda_M^2 \delta_2^2}{k_1^2 \lambda_m^3}\right), \\
\mu &< \left(\frac{1}{3}\right) \frac{k_1^2 k_3 \lambda_m^3}{\lambda_M [3k_1^2 k_3 \lambda_m + 9k_1^2 \lambda_M \delta_2 + 8k_1^2 k_3 \lambda_M + 8k_3 \delta_2]}, \\
\mu &< \left(\frac{1}{3}\right) \frac{\lambda_m^3}{3\lambda_M (\lambda_m + 4\lambda_M)}, \\
\mu^2 &< \left(\frac{1}{3}\right) \frac{k_1^2 \lambda_m^3}{(4k_3 + 6k_1^2 \lambda_M)}, & \mu^2 &< \left(\frac{1}{3}\right) \frac{2\lambda_m^3}{9\lambda_M}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Assim, considerando as desigualdades (3.24) e (3.28), as condições para que $\det(\bar{\Omega}) > 0$ são:

$$\begin{aligned}
k_1 &> \sqrt{\left(\frac{3}{1}\right) \frac{2\delta_2}{\lambda_m}}, & k_2 &> \frac{9\lambda_M \delta_1}{5\lambda_m}, & k_3 &> \left(\frac{3}{1}\right) \left(4 \frac{k_1^2 \lambda_M^4}{\lambda_m^3} + 8 \frac{\lambda_M^3 \delta_2}{\lambda_m^3} + 4 \frac{\lambda_M^2 \delta_2^2}{k_1^2 \lambda_m^3}\right), \\
k_4 &> 32k_2^2 \frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3}, & \mu &< \frac{\lambda_m^2}{6\lambda_M}, & \mu &< \left(\frac{1}{3}\right) \frac{\lambda_m^3}{3\lambda_M (\lambda_m + 4\lambda_M)}, \\
\mu &< \frac{5k_2 \lambda_m^3}{3[15k_2 \lambda_m \lambda_M + 3\lambda_m^2 \delta_1 + 9\lambda_M^2 \delta_1 + 8\lambda_M^2 (7k_2 + 3\delta_1)]}, \\
\mu &< \left(\frac{1}{3}\right) \frac{k_1^2 k_3 \lambda_m^3}{\lambda_M [3k_1^2 k_3 \lambda_m + 9k_1^2 \lambda_M \delta_2 + 8k_1^2 k_3 \lambda_M + 8k_3 \delta_2]}, \\
\mu^2 &< \left(\frac{1}{3}\right) \frac{k_1^2 \lambda_m^3}{(4k_3 + 6k_1^2 \lambda_M)}, \\
\mu^2 &< \left(\frac{1}{3}\right) \frac{2\lambda_m^3}{9\lambda_M}, & \mu^2 &< \frac{5k_2^2 \lambda_m^3}{3\lambda_M [9k_2 \delta_1 + 0.5(7k_2 + 3\delta_1)^2]}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

A união das desigualdades (3.17) e (3.29) resulta nas desigualdades que garantem $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^T > 0$:

$$\begin{aligned}
k_1 &> \sqrt{\frac{6\delta_2}{\lambda_m}}, & k_2 &> \frac{9\lambda_M \delta_1}{5\lambda_m}, \\
k_3 &> \max \left\{ \frac{\lambda_M \delta_2}{\lambda_m}, 12 \frac{k_1^2 \lambda_M^4}{\lambda_m^3} + 24 \frac{\lambda_M^3 \delta_2}{\lambda_m^3} + 12 \frac{\lambda_M^2 \delta_2^2}{k_1^2 \lambda_m^3} \right\}, \\
k_4 &> \max \left\{ \frac{3k_2 \lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu})}{2\lambda_m}, 32k_2^2 \frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3} \right\}, \\
\bar{\mu} &< \min \left\{ \frac{\lambda_m^2}{6\lambda_M}, \frac{5k_2 \lambda_m^3}{3[15k_2 \lambda_m \lambda_M + 3\lambda_m^2 \delta_1 + 9\lambda_M^2 \delta_1 + 8\lambda_M^2 (7k_2 + 3\delta_1)]}, \right. \\
&\quad \frac{\lambda_m^3}{9\lambda_M (\lambda_m + 4\lambda_M)}, \frac{k_1^2 k_3 \lambda_m^3}{3\lambda_M [3k_1^2 k_3 \lambda_m + 9k_1^2 \lambda_M \delta_2 + 8k_1^2 k_3 \lambda_M + 8k_3 \delta_2]}, \\
&\quad \left. \sqrt{\frac{5k_2^2 \lambda_m^3}{3\lambda_M [9k_2 \delta_1 + 0.5(7k_2 + 3\delta_1)^2]}}, \sqrt{\frac{k_1^2 \lambda_m^3}{12k_3 + 18k_1^2 \lambda_M}}, \sqrt{\frac{2\lambda_m^3}{27\lambda_M}} \right\}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Condições para os elementos da diagonal de $\bar{\Psi} > 0$

Para que $\bar{\Psi}_{11} > 0$ devemos ter:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_{11} &= \Psi_{11} - \mu\Psi_{a11} > 0 \\
\bar{\Psi}_{11} &= k_2k_3\lambda_m + 2k_1^2k_2\lambda_m\lambda_M - 2k_3\lambda_M\delta_1 - \frac{k_1^2}{2}\lambda_M^2\delta_1 - k_2\lambda_M\delta_2 \\
&\quad - 2\mu k_3\delta_1 - \mu\frac{k_1^2}{2}\lambda_M\delta_1 > 0 \\
\bar{\Psi}_{11} &= k_2k_3\lambda_m + 2k_1^2k_2\lambda_m\lambda_M \\
&\quad - 2k_3\delta_1(\lambda_M + \mu) - \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\delta_1(\lambda_M + \mu) - k_2\lambda_M\delta_2 > 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Considerando uma abordagem conservadora, onde apenas um dos termos positivos da desigualdade (3.31) é suficiente para majorar um grupo de termos negativos, são consideradas as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
k_2k_3\lambda_m - 2k_3\delta_1(\lambda_M + \mu) &> 0 \\
\left(\frac{1}{2}\right) 2k_1^2k_2\lambda_m\lambda_M - \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\delta_1(\lambda_M + \mu) &> 0 \\
\left(\frac{1}{2}\right) 2k_1^2k_2\lambda_m\lambda_M - k_2\lambda_M\delta_2 &> 0
\end{aligned} \tag{3.32}$$

resumidas em:

$$k_1 > \sqrt{\frac{\delta_2}{\lambda_m}}, \quad k_2 > \frac{2\delta_1(\lambda_M + \mu)}{\lambda_m}, \quad k_2 > \frac{\delta_1(\lambda_M + \mu)}{2\lambda_m}. \tag{3.33}$$

Note que a divisão escolhida em (3.32) não é única, mas, para essa escolha, a desigualdade de k_1 em (3.33) tem formato semelhante a desigualdade de k_1 em (3.29) porem é menos restritiva. Na prática, considerar essas duas condições é o mesmo que considerar apenas a condição mais restritiva, o que reduz o numero total de condições a serem a serem obedecidas.

O segundo elemento da diagonal de $\bar{\Psi}$ deve obedecer $\bar{\Psi}_{22} > 0$, deve-se ter:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_{22} &= \Psi_{22} - \mu\Psi_{a22} > 0 \\
\bar{\Psi}_{22} &= [k_2k_4\lambda_m + k_2^3\lambda_m\lambda_M - k_2^2\lambda_M^2\delta_1 - 2k_4\lambda_M\delta_1 \\
&\quad - 2\mu k_4\delta_1 - \mu k_2^2\lambda_M\delta_1] > 0 \\
\bar{\Psi}_{22} &= [k_2k_4\lambda_m + k_2^3\lambda_m\lambda_M \\
&\quad - k_2^2\lambda_M\delta_1(\lambda_M + \mu) - 2k_4\delta_1(\lambda_M + \mu)] > 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Considerando uma abordagem conservadora, onde apenas um termo positivo da desigualdade (3.34) é suficiente para majorar um termo negativo, temos:

$$k_2 k_4 \lambda_m - 2k_4 \delta_1 (\lambda_M + \mu) > 0, \quad k_2^3 \lambda_m \lambda_M - k_2^2 \lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \mu) > 0$$

resumidas em:

$$k_2 > \frac{2\delta_1 (\lambda_M + \mu)}{\lambda_m}, \quad k_2 > \frac{\delta_1 (\lambda_M + \mu)}{\lambda_m}.$$

Note que são condições semelhantes, e que apenas a mais restritiva, i.e., a primeira, é considerada nas restrições dos ganhos de controle.

Para a condição do terceiro elemento da diagonal $\bar{\Psi}_{33} > 0$ deve-se ter:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{33} &= \Psi_{33} - \mu \Psi_{a33} > 0, \\ \bar{\Psi}_{33} &= k_2 \lambda_m^2 - \mu k_2 \lambda_M > 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Resumida em :

$$\mu < \frac{\lambda_m^2}{\lambda_M} \tag{3.36}$$

Para facilitar a visualização são repetidas as condições para os elementos da diagonal de $\bar{\Psi} > 0$:

$$k_1 > \sqrt{\frac{\delta_2}{\lambda_m}}, \quad k_2 > \frac{2\delta_1 (\lambda_M + \mu)}{\lambda_m}, \quad \mu < \frac{\lambda_m^2}{\lambda_M} \tag{3.37}$$

Condições para o determinante de $\bar{\Psi} > 0$

Observando os elementos nulos da matriz $\bar{\Psi}$, temos que seu determinante pode ser calculado por seus cofatores:

$$\begin{aligned} \det(\bar{\Psi}) &= \bar{\Psi}_{11} \left[\bar{\Psi}_{22} \bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{23}^2 \right] + \bar{\Psi}_{13} \left[-\bar{\Psi}_{13} \bar{\Psi}_{22} \right] \\ \det(\bar{\Psi}) &= \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{22} \bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{23}^2 - \bar{\Psi}_{13}^2 \bar{\Psi}_{22} \end{aligned} \tag{3.38}$$

Para $\det(\bar{\Psi}) > 0$, o termo $\bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{22} \bar{\Psi}_{33}$ deve ser positivo, o que é garantido pelos elementos da diagonal positivos, ao considerar (3.37). Além disso, esse termo deve ser capaz de majorar os termos negativos em (3.38). Assim, a análise foi feita dividindo o termo positivo em duas partes, dando origem as desigualdades (3.39) e (3.40):

$$\begin{aligned} \det(\bar{\Psi}) &= \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{22} \bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{23}^2 - \bar{\Psi}_{13}^2 \bar{\Psi}_{22} > 0 \\ &= \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{22} \bar{\Psi}_{33} + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{22} \bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{23}^2 - \bar{\Psi}_{13}^2 \bar{\Psi}_{22} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{11}\bar{\Psi}_{22}\bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{11}\bar{\Psi}_{23}^2 > 0 & (3.39) \\ \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{11}\bar{\Psi}_{22}\bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{13}^2\bar{\Psi}_{22} > 0 & (3.40) \end{cases}$$

Resolvendo primeiro a desigualdade (3.39), podemos reescreve-la como:

$$\bar{\Psi}_{11} \left[\frac{1}{2}\bar{\Psi}_{22}\bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{23}^2 \right] > 0,$$

e observar que é satisfeita se $\frac{1}{2}\bar{\Psi}_{22}\bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{23}^2 > 0$.

Expandir os termos dessa desigualdade resulta em :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{22}\bar{\Psi}_{33} - (\bar{\Psi}_{23})^2 = & + \frac{1}{2}k_2^2k_4\lambda_m^3 - \frac{1}{2}\mu k_2^2k_4\lambda_m\lambda_M + \frac{1}{2}k_2^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{2}\mu k_2^4\lambda_m\lambda_M^2 \\ & - \frac{1}{2}k_2^3\lambda_m^2\lambda_M^2\delta_1 - \frac{1}{2}\mu k_2^3\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 - k_2k_4\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 - \mu k_2k_4\lambda_m^2\delta_1 \\ & + \frac{1}{2}\mu k_2^3\lambda_M^3\delta_1 + \frac{1}{2}\mu^2k_2^3\lambda_M^2\delta_1 + \mu k_2k_4\lambda_M^2\delta_1 + \mu^2k_2k_4\lambda_M\delta_1 \\ & - k_2^4\lambda_M^4 - 2\mu k_2^4\lambda_M^3 - \mu^2k_2^4\lambda_M^2 - k_2^3\lambda_M^4\delta_1 - 2\mu k_2^3\lambda_M^3\delta_1 \\ & - \mu^2k_2^3\lambda_M^2\delta_1 - \frac{k_2^2}{4}\lambda_M^4\delta_1^2 - \mu\frac{k_2^2}{2}\lambda_M^3\delta_1^2 - \mu^2\frac{k_2^2}{4}\lambda_M^2\delta_1^2 \\ & - 2\mu k_2^2k_4\lambda_M^2 - \mu k_2k_4\lambda_M^2\delta_1 - 2\mu^2k_2^2k_4\lambda_M - \mu^2k_2k_4\lambda_M\delta_1 - \mu^2k_4^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Novamente os sinais dos termos majorados por delta são considerados em seu pior caso, i.e., é considerado que os termos dependentes de delta em (3.41) devem todos apresentar sinal negativo. Considerando isso:

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \frac{1}{2}\bar{\Psi}_{22}\bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{23}^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^2k_4\lambda_m^3 - k_2k_4\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 - k_2^4\lambda_M^4 - k_2^3\lambda_M^4\delta_1 - \frac{k_2^2}{4}\lambda_M^4\delta_1^2 \\ & + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^2k_4\lambda_m^3 - \frac{1}{2}\mu k_2^2k_4\lambda_m\lambda_M - \mu k_2k_4\lambda_m^2\delta_1 - 2\mu k_2k_4\lambda_M^2\delta_1 - 2\mu k_2^2k_4\lambda_M^2 \\ & + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^2k_4\lambda_m^3 - 2\mu^2k_2k_4\lambda_M\delta_1 - \mu^2\frac{k_2^2}{4}\lambda_M^2\delta_1^2 - 2\mu^2k_2^2k_4\lambda_M - \mu^2k_4^2 \\ & + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{2}k_2^3\lambda_m^2\lambda_M^2\delta_1 \\ & + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^4\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{2}\mu k_2^4\lambda_m\lambda_M^2 - \frac{1}{2}\mu k_2^3\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 \\ & - \frac{5}{2}\mu k_2^3\lambda_M^3\delta_1 - 2\mu k_2^4\lambda_M^3 - \mu\frac{k_2^2}{2}\lambda_M^3\delta_1^2 \\ & + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^4\lambda_m^3\lambda_M - \mu^2k_2^3\lambda_M^2\delta_1 - \frac{1}{2}\mu^2k_2^3\lambda_M^2\delta_1 - \mu^2k_2^4\lambda_M^2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Note que esse particionamento não é único, e que foi escolhida a razão (1/3) a fim de auxiliar no desenvolvimento matemático. Observando a equação (3.42), é possível ver que a desigualdade (3.39) é satisfeita se as seguintes condições são obedecidas:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} k_2^2 k_4 \lambda_m^3 - k_2 k_4 \lambda_m^2 \lambda_M \delta_1 - k_2^4 \lambda_M^4 - k_2^3 \lambda_M^4 \delta_1 - \frac{k_2^2}{4} \lambda_M^4 \delta_1^2 > 0, \\
& \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} k_2^2 k_4 \lambda_m^3 - \frac{1}{2} \mu k_2^2 k_4 \lambda_m \lambda_M - \mu k_2 k_4 \lambda_m^2 \delta_1 \\
& - 2\mu k_2 k_4 \lambda_M^2 \delta_1 - 2\mu k_2^2 k_4 \lambda_M^2 > 0, \\
& \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} k_2^2 k_4 \lambda_m^3 - 2\mu^2 k_2 k_4 \lambda_M \delta_1 - \mu^2 \frac{k_2^2}{4} \lambda_M^2 \delta_1^2 \\
& - 2\mu^2 k_2^2 k_4 \lambda_M - \mu^2 k_4^2 > 0, \\
& \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} k_2^4 \lambda_m^3 \lambda_M - \frac{1}{2} k_2^3 \lambda_m^2 \lambda_M^2 \delta_1 > 0, \\
& \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} k_2^4 \lambda_m^3 \lambda_M - \frac{1}{2} \mu k_2^4 \lambda_m \lambda_M^2 - \frac{1}{2} \mu k_2^3 \lambda_m^2 \lambda_M \delta_1 \\
& - \frac{5}{2} \mu k_2^3 \lambda_M^3 \delta_1 - 2\mu k_2^4 \lambda_M^3 - \mu \frac{k_2^2}{2} \lambda_M^3 \delta_1^2 > 0, \\
& \left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} k_2^4 \lambda_m^3 \lambda_M - \frac{3}{2} \mu^2 k_2^3 \lambda_M^2 \delta_1 - \mu^2 k_2^4 \lambda_M^2 > 0.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Resumidas em :

$$\begin{aligned}
k_4 &> \frac{2k_2^2 \lambda_M^4 \delta_1 + \left(\frac{1}{2}\right) k_2 \lambda_M^4 \delta_1^2 + 2k_2^3 \lambda_M^4}{\lambda_m^2 \left[\frac{1}{3} k_2 \lambda_m - 2\lambda_M \delta_1\right]}, \\
\mu &< \frac{1}{3} \frac{k_2 \lambda_m^3}{\left[k_2 \lambda_m \lambda_M + 2\lambda_m^2 \delta_1 + 4\lambda_M^2 \delta_1 + 4k_2 \lambda_M^2\right]}, \\
\mu^2 &< \frac{1}{3} \frac{k_2^2 k_4 \lambda_m^3}{\left[4k_2 k_4 \lambda_M \delta_1 + \frac{1}{2} k_2^2 \lambda_M^2 \delta_1^2 + 4k_2^2 k_4 \lambda_M + 2k_4^2\right]}, \\
k_2 &> \frac{3}{1} \frac{\lambda_M \delta_1}{\lambda_m}, \\
\mu &< \frac{1}{3} \frac{k_2^2 \lambda_m^3}{\left[k_2^2 \lambda_m \lambda_M + k_2 \lambda_m^2 \delta_1 + 5k_2 \lambda_M^2 \delta_1 + 4k_2^2 \lambda_M^2 + \lambda_M^2 \delta_1^2\right]}, \\
\mu^2 &< \frac{1}{3} \frac{k_2 \lambda_m^3}{\lambda_M [3\delta_1 + 2k_2]}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Note que, para garantir que o denominador da fração da desigualdade de k_4 em (3.44) seja positivo, deve-se considerar ainda outra condição:

$$\frac{1}{3}k_2\lambda_m - 2\lambda_M\delta_1 > 0 \Rightarrow k_2 > \frac{6\lambda_M\delta_1}{\lambda_m}.$$

Com isso, as condições (3.44), em seu caso mais restritivo, são apresentadas como:

$$\begin{aligned} k_2 &> \frac{6\lambda_M\delta_1}{\lambda_m}, & k_4 &> \frac{2k_2^2\lambda_M^4\delta_1 + (\frac{1}{2})k_2\lambda_M^4\delta_1^2 + 2k_2^3\lambda_M^4}{\lambda_m^2[\frac{1}{3}k_2\lambda_m - 2\lambda_M\delta_1]}, \\ \mu &< \frac{1}{3} \frac{k_2\lambda_m^3}{[k_2\lambda_m\lambda_M + 2\lambda_m^2\delta_1 + 4\lambda_M^2\delta_1 + 4k_2\lambda_M^2]}, \\ \mu &< \frac{1}{3} \frac{k_2^2\lambda_m^3}{[k_2^2\lambda_m\lambda_M + k_2\lambda_m^2\delta_1 + 5k_2\lambda_M^2\delta_1 + 4k_2^2\lambda_M^2 + \lambda_M^2\delta_1^2]}, \\ \mu^2 &< \frac{1}{3} \frac{k_2^2k_4\lambda_m^3}{[4k_2k_4\lambda_M\delta_1 + \frac{1}{2}k_2^2\lambda_M^2\delta_1^2 + 4k_2^2k_4\lambda_M + 2k_4^2]}, \\ \mu^2 &< \frac{1}{3} \frac{k_2\lambda_m^3}{\lambda_M[3\delta_1 + 2k_2]}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

A segunda desigualdade para garantir $\det(\bar{\Psi}) > 0$, (3.40), é reescrita como:

$$\bar{\Psi}_{22} \left[\frac{1}{2} \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{13}^2 \right] > 0,$$

e satisfeita se $\frac{1}{2} \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{13}^2 > 0$.

Expandindo seus termos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{\Psi}_{11} \bar{\Psi}_{33} - \bar{\Psi}_{13}^2 &= + \frac{1}{2} k_2^2 k_3 \lambda_m^3 - \frac{1}{2} \mu k_2^2 k_3 \lambda_m \lambda_M \\ &+ k_1^2 k_2^2 \lambda_m^3 \lambda_M - \mu k_1^2 k_2^2 \lambda_m \lambda_M^2 \\ &- k_2 k_3 \lambda_m^2 \lambda_M \delta_1 + \mu k_2 k_3 \lambda_M^2 \delta_1 - \mu k_2 k_3 \lambda_m^2 \delta_1 \\ &+ \mu^2 k_2 k_3 \lambda_M \delta_1 \\ &- \frac{1}{4} k_1^2 k_2 \lambda_m^2 \lambda_M^2 \delta_1 + \frac{1}{4} \mu k_1^2 k_2 \lambda_M^3 \delta_1 - \frac{1}{4} \mu k_1^2 k_2 \lambda_m^2 \lambda_M \delta_1 \\ &+ \frac{1}{4} \mu^2 k_1^2 k_2 \lambda_M^2 \delta_1 \\ &- \frac{1}{2} k_2^2 \lambda_m^2 \lambda_M \delta_2 + \frac{1}{2} \mu k_2^2 \lambda_M^2 \delta_2 - \frac{9}{16} k_1^2 \lambda_M^4 \delta_1^2 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Novamente os sinais majorados por delta são considerados em seu pior caso, i.e., é considerado que os termos dependentes de delta em (3.46) devem todos apresentar sinal negativo.

Considerando isso:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overline{\Psi}_{11}\overline{\Psi}_{33} - \overline{\Psi}_{13}^2 = & + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^2k_3\lambda_m^3 - k_2k_3\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 - \frac{1}{2}k_2^2\lambda_m^2\lambda_M\delta_2 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^2k_3\lambda_m^3 - \frac{1}{2}\mu k_2^2k_3\lambda_m\lambda_M \\
& - \mu k_2k_3\lambda_M^2\delta_1 - \mu k_2k_3\lambda_m^2\delta_1 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^2k_3\lambda_m^3 - \mu^2k_2k_3\lambda_M\delta_1 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{4}k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M^2\delta_1 - \frac{9}{16}k_1^2\lambda_M^4\delta_1^2 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \mu k_1^2k_2^2\lambda_m\lambda_M^2 - \frac{1}{4}\mu k_1^2k_2\lambda_M^3\delta_1 \\
& - \frac{1}{4}\mu k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 - \frac{1}{2}\mu k_2^2\lambda_M^2\delta_2 \\
& + \left(\frac{1}{3}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{4}\mu^2k_1^2k_2\lambda_M^2\delta_1
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Novamente foi escolhido um particionamento a fim de auxiliar no desenvolvimento matemático. Observando a equação (3.47), é possível ver que a desigualdade (3.40) é satisfeita se as seguintes condições são obedecidas:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^2k_3\lambda_m^3 - k_2k_3\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 - \frac{1}{2}k_2^2\lambda_m^2\lambda_M\delta_2 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^2k_3\lambda_m^3 - \frac{1}{2}\mu k_2^2k_3\lambda_m\lambda_M \\
- \mu k_2k_3\lambda_M^2\delta_1 - \mu k_2k_3\lambda_m^2\delta_1 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2}k_2^2k_3\lambda_m^3 - \mu^2k_2k_3\lambda_M\delta_1 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{4}k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M^2\delta_1 - \frac{9}{16}k_1^2\lambda_M^4\delta_1^2 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \mu k_1^2k_2^2\lambda_m\lambda_M^2 - \frac{1}{4}\mu k_1^2k_2\lambda_M^3\delta_1 \\
- \frac{1}{4}\mu k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M\delta_1 - \frac{1}{2}\mu k_2^2\lambda_M^2\delta_2 & > 0, \\
\left(\frac{1}{3}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{4}\mu^2k_1^2k_2\lambda_M^2\delta_1 & > 0.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Neste caso, a desigualdade

$$\left(\frac{1}{3}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{4}k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M^2\delta_1 - \frac{9}{16}k_1^2\lambda_M^4\delta_1^2 > 0, \quad (3.49)$$

foi abordada de forma diferente. Considerando que em (3.49) existem termos negativos dependentes de $(k_1^2k_2)$ e (k_1^2) , e assim não existe um fator comum que divida essa desigualdade de forma a obter uma relação direta de apenas um dos ganhos de controle, o seu termo positivo foi particionado em dois termos com peso $[(1-p_3), p_3]$, com escalar $0 < p_3 < 1$ sendo escolhido como $p_3 = 1/2$. Note que o fator de peso p_3 pode ser escolhido arbitrariamente entre $[0, 1]$. Essa escolha resulta em:

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{1}{4}k_1^2k_2\lambda_m^2\lambda_M^2\delta_1 > 0 & (3.50) \\ \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)k_1^2k_2^2\lambda_m^3\lambda_M - \frac{9}{16}k_1^2\lambda_M^4\delta_1^2 > 0 & (3.51) \end{cases}$$

Assim, as desigualdades (3.50) e (3.51) são garantidas se:

$$k_2 > \max \left\{ \frac{6}{4} \frac{\lambda_M \delta_1}{\lambda_m}, \sqrt{\frac{27}{8} \frac{\lambda_M^3 \delta_1^2}{\lambda_m^3}} \right\} \quad (3.52)$$

As desigualdades (3.48) e (3.52) são resumidas a seguir:

$$\begin{aligned} k_3 &> \frac{k_2\lambda_M\delta_2}{\left(\frac{1}{3}k_2\lambda_m - 2\lambda_M\delta_1\right)} \\ \mu &< \frac{1}{3} \frac{k_2\lambda_m^3}{(k_2\lambda_m\lambda_M + 2\lambda_M^2\delta_1 + 2\lambda_m^2\delta_1)} \\ \mu^2 &< \frac{1}{3} \frac{k_2\lambda_m^3}{2\lambda_M\delta_1} \\ k_2 &> \max \left\{ \frac{6}{4} \frac{\lambda_M \delta_1}{\lambda_m}, \sqrt{\frac{27}{8} \frac{\lambda_M^3 \delta_1^2}{\lambda_m^3}} \right\} \\ \mu &< \frac{1}{3} \frac{k_1^2k_2\lambda_m^3}{[k_1^2k_2\lambda_m\lambda_M + \frac{1}{4}k_1^2\lambda_M^2\delta_1 + \frac{1}{4}k_1^2\lambda_m^2\delta_1 + \frac{1}{2}k_2\lambda_M\delta_2]} \\ \mu^2 &< \frac{1}{3} \frac{4k_2\lambda_m^3}{\lambda_M\delta_1} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Assim, considerando as desigualdades (3.45) e (3.53), as condições para que $\det(\bar{\Psi}) > 0$ são:

$$\begin{aligned}
k_2 &> \max \left\{ \frac{6\lambda_M\delta_1}{\lambda_m}, \sqrt{\frac{27}{8} \frac{\lambda_M^3\delta_1^2}{\lambda_m^3}} \right\}, & k_3 &> \frac{k_2\lambda_M\delta_2}{\left(\frac{1}{3}k_2\lambda_m - 2\lambda_M\delta_1\right)} \\
k_4 &> \frac{2k_2^2\lambda_M^4\delta_1 + \left(\frac{1}{2}\right)k_2\lambda_M^4\delta_1^2 + 2k_2^3\lambda_M^4}{\lambda_m^2\left[\frac{1}{3}k_2\lambda_m - 2\lambda_M\delta_1\right]}, \\
\mu &< \frac{k_2\lambda_m^3}{3\left[k_2\lambda_m\lambda_M + 2\lambda_m^2\delta_1 + 4\lambda_M^2\delta_1 + 4k_2\lambda_M^2\right]}, \\
\mu &< \frac{k_2^2\lambda_m^3}{3\left[k_2^2\lambda_m\lambda_M + k_2\lambda_m^2\delta_1 + 5k_2\lambda_M^2\delta_1 + 4k_2^2\lambda_M^2 + \lambda_M^2\delta_1^2\right]}, \\
\mu &< \frac{k_1^2k_2\lambda_m^3}{3\left[k_1^2k_2\lambda_m\lambda_M + \frac{1}{4}k_1^2\lambda_M^2\delta_1 + \frac{1}{4}k_1^2\lambda_m^2\delta_1 + \frac{1}{2}k_2\lambda_M\delta_2\right]}, \\
\mu^2 &< \frac{k_2^2k_4\lambda_m^3}{3\left[4k_2k_4\lambda_M\delta_1 + \frac{1}{2}k_2^2\lambda_M^2\delta_1^2 + 4k_2^2k_4\lambda_M + 2k_4^2\right]}, \\
\mu^2 &< \frac{1}{3} \frac{k_2\lambda_m^3}{\lambda_M\left[3\delta_1 + 2k_2\right]}, \\
\mu^2 &< \frac{k_2\lambda_m^3}{6\lambda_M\delta_1}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

A união das desigualdades (3.37), (3.54) resulta nas desigualdades que garantem $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^T > 0$:

$$\begin{aligned}
k_1 &> \sqrt{\frac{\delta_2}{\lambda_m}}, & k_2 &> \max \left\{ \frac{2\delta_1(\lambda_M + \bar{\mu})}{\lambda_m}, \frac{6\lambda_M\delta_1}{\lambda_m}, \sqrt{\frac{27}{8} \frac{\lambda_M^3\delta_1^2}{\lambda_m^3}} \right\}, \\
k_3 &> \frac{k_2\lambda_M\delta_2}{\left(\frac{1}{3}k_2\lambda_m - 2\lambda_M\delta_1\right)}, & k_4 &> \frac{2k_2^2\lambda_M^4\delta_1 + \left(\frac{1}{2}\right)k_2\lambda_M^4\delta_1^2 + 2k_2^3\lambda_M^4}{\lambda_m^2\left[\frac{1}{3}k_2\lambda_m - 2\lambda_M\delta_1\right]}, \\
\bar{\mu} &< \min \left\{ \frac{\lambda_m^2}{\lambda_M}, \frac{k_2\lambda_m^3}{\left[3k_2\lambda_m\lambda_M + 6\lambda_m^2\delta_1 + 12\lambda_M^2\delta_1 + 12k_2\lambda_M^2\right]}, \right. \\
&& \frac{k_2^2\lambda_m^3}{\left[3k_2^2\lambda_m\lambda_M + 3k_2\lambda_m^2\delta_1 + 15k_2\lambda_M^2\delta_1 + 12k_2^2\lambda_M^2 + 3\lambda_M^2\delta_1^2\right]}, \\
&& \frac{k_1^2k_2\lambda_m^3}{\left[3k_1^2k_2\lambda_m\lambda_M + \frac{3}{4}k_1^2\lambda_M^2\delta_1 + \frac{3}{4}k_1^2\lambda_m^2\delta_1 + \frac{3}{2}k_2\lambda_M\delta_2\right]}, \\
&& \sqrt{\frac{k_2^2k_4\lambda_m^3}{\left[12k_2k_4\lambda_M\delta_1 + \frac{3}{2}k_2^2\lambda_M^2\delta_1^2 + 12k_2^2k_4\lambda_M + 6k_4^2\right]}}, \\
&& \left. \sqrt{\frac{k_2\lambda_m^3}{3\lambda_M\left[3\delta_1 + 2k_2\right]}}, \sqrt{\frac{k_2\lambda_m^3}{6\lambda_M\delta_1}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Considerando a união das condições que garantem a positividade das matrizes $(\bar{\Omega}, \bar{\Psi})$, apresentadas em (3.17), (3.29), (3.37), (3.54), é possível notar que algumas dessas condições tem estrutura semelhante, porem são menos restritivas.

Quando as versões mais restritivas dessas desigualdades são obedecidas, algumas das outras condições já são naturalmente satisfeitas. Assim, todas as condições podem ser resumidas nas condições:

$$\begin{aligned}
k_1 &> \sqrt{\frac{6\delta_2}{\lambda_m}}, & k_2 &> \max \left\{ \frac{2\delta_1(\lambda_M + \bar{\mu})}{\lambda_m}, \frac{6\lambda_M\delta_1}{\lambda_m}, \frac{1.84\lambda_M\delta_1}{\lambda_m} \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}} \right\}, \\
k_3 &> \max \left\{ \frac{\lambda_M\delta_2}{\lambda_m}, 12 \frac{k_1^2\lambda_M^4}{\lambda_m^3} + 24 \frac{\lambda_M^3\delta_2}{\lambda_m^3} + 12 \frac{\lambda_M^2\delta_2^2}{k_1^2\lambda_m^3}, \frac{k_2\lambda_M\delta_2}{(\frac{1}{3}k_2\lambda_m - 2\lambda_M\delta_1)} \right\} \\
k_4 &> \max \left\{ \frac{3k_2\lambda_M\delta_1(\lambda_M + \bar{\mu})}{2\lambda_m}, 32k_2^2 \frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3}, \frac{2k_2^2\lambda_M^4\delta_1 + 0.5k_2\lambda_M^4\delta_1^2 + 2k_2^3\lambda_M^4}{\lambda_m^2[\frac{1}{3}k_2\lambda_m - 2\lambda_M\delta_1]} \right\}, \\
\bar{\mu} &< \min \left\{ \frac{\lambda_m^2}{6\lambda_M}, \frac{5k_2\lambda_m^3}{3[15k_2\lambda_m\lambda_M + 3\lambda_m^2\delta_1 + 9\lambda_M^2\delta_1 + 8\lambda_M^2(7k_2 + 3\delta_1)]}, \right. \\
&\frac{k_2\lambda_m^3}{[3k_2\lambda_m\lambda_M + 6\lambda_m^2\delta_1 + 12\lambda_M^2\delta_1 + 12k_2\lambda_M^2]}, \frac{\lambda_m^3}{9\lambda_M(\lambda_m + 4\lambda_M)}, \\
&\frac{k_2^2\lambda_m^3}{[3k_2^2\lambda_m\lambda_M + 3k_2\lambda_m^2\delta_1 + 15k_2\lambda_M^2\delta_1 + 12k_2^2\lambda_M^2 + 3\lambda_M^2\delta_1^2]}, \\
&\frac{k_1^2k_2\lambda_m^3}{[3k_1^2k_2\lambda_m\lambda_M + \frac{3}{4}k_1^2\lambda_M^2\delta_1 + \frac{3}{4}k_1^2\lambda_m^2\delta_1 + \frac{3}{2}k_2\lambda_M\delta_2]}, \\
&\frac{k_1^2k_3\lambda_m^3}{3\lambda_M[3k_1^2k_3\lambda_m + 9k_1^2\lambda_M\delta_2 + 8k_1^2k_3\lambda_M + 8k_3\delta_2]}, \sqrt{\frac{k_2\lambda_m^3}{6\lambda_M\delta_1}}, \\
&\sqrt{\frac{5k_2^2\lambda_m^3}{3\lambda_M[9k_2\delta_1 + 0.5(7k_2 + 3\delta_1)^2]}}, \sqrt{\frac{k_1^2\lambda_m^3}{12k_3 + 18k_1^2\lambda_M}}, \sqrt{\frac{2\lambda_m^3}{27\lambda_M}} \\
&\left. \sqrt{\frac{k_2^2k_4\lambda_m^3}{[12k_2k_4\lambda_M\delta_1 + \frac{3}{2}k_2^2\lambda_M^2\delta_1^2 + 12k_2^2k_4\lambda_M + 6k_4^2]}}, \sqrt{\frac{k_2\lambda_m^3}{3\lambda_M[3\delta_1 + 2k_2]}} \right\}, \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Assim, verifica-se que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^T > 0$ e $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}^T > 0$ são satisfeitas se as desigualdades (3.56). Como consequência \dot{V} , definida em na desigualdade 3.12, para os ganhos de controle obedecendo 3.56.

Neste Capítulo 3, foi apresentada uma nova proposta de implementação para o STA multivariável para lidar com uma classe de sistemas incertos mais abrangente, i.e., que não requer conhecimento total da matriz de entrada, e que não exige simetria da matriz de entrada.

O resultado da obtenção de uma função de Lyapunov com derivada negativa, quando os ganhos de controle obedecem algumas condições, embasou o desenvolvimento do seguinte teorema que enuncia a principal contribuição do desenvolvimento dessa dissertação:

Teorema 3.1. *Considere a planta (3.1) com a lei de controle dada por (3.3) e suponha que as hipóteses (A1)-(A3) sejam satisfeitas. Se os ganhos $k_1, k_2, k_3,$ e k_4 forem escolhidos de acordo com (3.56), então o sistema em malha fechada descrito por (3.5) é globalmente estável e a superfície de deslizamento $\dot{\sigma} = \sigma = 0$ é alcançada em tempo finito para quaisquer condições iniciais $[\sigma_0^T, z_0^T]$*

Demonstração. Considere que os ganhos k_1, k_2, k_3, k_4 são escolhidos obedecendo (3.56), então as matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, são positivas definidas. A desigualdade para o majorante de \dot{V} (3.12), é rerepresentada como:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\chi^T\bar{\Omega}\chi - \chi^T\bar{\Psi}\chi, \\ \dot{V} &\leq -\frac{\lambda_{\min}(\bar{\Omega})}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\|\chi\|^2 - \lambda_{\min}(\bar{\Psi})\|\chi\|^2,\end{aligned}\tag{3.57}$$

onde $\lambda_{\min}(\bar{\Omega}), \lambda_{\min}(\bar{\Psi}) > 0$ são os menores autovalores das matrizes simétricas e positivas definidas $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$. A função de Lyapunov apresentada em (3.6) pode ser reescrita em um novo formato ao agruparmos seus termos em matrizes auxiliares.

Assim, $V(\sigma, z) = \bar{\chi}^T P \bar{\chi}$, onde $\bar{\chi} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} & \sigma^T & z^T \end{bmatrix}^T$ e $P = P^T > 0$, tem-se

$$\lambda_{\min}(P)\|\bar{\chi}\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P)\|\bar{\chi}\|^2,$$

onde $\|\bar{\chi}\| = \|\chi\|$ e $\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P) > 0$ são respectivamente o menor e maior autovalores da matriz P . Considerando a desigualdade (3.57) e a seguinte relação

$$\|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \leq \|\chi\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}},$$

segue que

$$\dot{V} \leq -\alpha_1 V^{\frac{1}{2}} - \alpha_2 V,\tag{3.58}$$

$\forall(\sigma(t), z(t)) \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \mathcal{S}$, onde

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}\lambda_{\min}(\bar{\Omega})}{\lambda_{\max}(P)}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_{\min}(\bar{\Psi})}{\lambda_{\max}(P)}.$$

Observando a relação (3.58), juntamente com o fato de que as trajetórias do sistema em malha-fechada não podem permanecer em $\mathcal{S} \setminus \{0\}$, conclui-se que $V(\sigma, z)$ é uma função continuamente decrescente. Assim, considerando a generalização do Teorema de Lyapunov para inclusões diferenciais feita em [44, Proposição 14.1], o ponto de equilíbrio da origem $(\sigma, z) = 0$ e a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ são alcançados em tempo finito partindo de qualquer condição inicial.

Adicionalmente, pela equação de comparação

$$\dot{v} = -\alpha_1 v^{\frac{1}{2}} - \alpha_2 v, \quad v(t_0) \geq 0,$$

verifica-se que (σ, z) converge para zero após um intervalo de tempo

$$T_f = \frac{2}{\alpha_2} \ln \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} V^{\frac{1}{2}}(\sigma(t_0), z(t_0)) + 1 \right).$$

□

O modo como os termos positivos das equações (3.22), (3.26), (3.42) e (3.47) foram escolhidos para majorar seus termos negativos não é único. Por tanto, dependendo dessa escolha, o resultado final das condições para que os ganhos de controle forneçam matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$ positivas pode variar, se tornando mais, ou menos, conservador. Assim, os valores limites das desigualdades (3.30) e (3.55) não representam de fato o limite real exato de estabilidade do sistema, mas servem como uma boa referência para a escolha dos valores dos ganhos a serem utilizados na prática, pois garantidamente resultarão em um sistema estável.

Além disso, outros métodos podem ser considerados para obter relações dos ganhos de controle que resultam em matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$ (3.13) positivas definidas. Particularmente Nagesh e Edwards, em [21], utilizaram uma metodologia de análise para matrizes positivas definidas simétricas, gerando condições um pouco menos restritivas para os ganhos mas que são definidas de forma menos direta e intuitiva em termos de aplicação.

Método de análise Nagesh-Edwards [21]

No caso de sistemas com matrizes de entrada com parte antissimétrica significativa, considerado neste trabalho, a análise apresentada em [21] não é favorável, pois considera que o parâmetro $\bar{\mu}$ deve ser suficientemente pequeno de modo que os termos da parte antissimétrica podem ser dominados pelos termos de sinal positivo favoráveis. Assim, essa abordagem poderia acarretar em um valor de $\bar{\mu}$ excessivamente pequeno, o que na prática restringiria a aplicabilidade da técnica desenvolvida nesta dissertação.

A seguir o método de análise, utilizado por Nagesh e Edwards em [21], para obtenção das relações dos ganhos de controle que garantem que a matriz relacionada seja positiva definida será brevemente apresentado. Essa análise também segue o critério de Sylvester, e objetivo aqui é formalizar os detalhes dos passos utilizados, possibilitando a aplicação dessa análise para casos futuros.

Considere a matriz $\bar{\Omega}$ apresentada em (3.13), reapresentada aqui por con-

veniência:

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & 0 & \bar{\Omega}_{13} \\ 0 & \bar{\Omega}_{22} & \bar{\Omega}_{23} \\ \bar{\Omega}_{13} & \bar{\Omega}_{23} & \bar{\Omega}_{33} \end{bmatrix}$$

composta por

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{11} &= \lambda_m \left(k_1 k_3 + \frac{k_1^3}{2} \lambda_M \right) - k_1 \lambda_M \delta_2, \\ \bar{\Omega}_{13} &= -k_1^2 \lambda_M^2 - \lambda_M \delta_2 - \bar{\mu} \left(k_3 + \frac{3k_1^2}{4} \lambda_M \right), \\ \bar{\Omega}_{22} &= \lambda_m \left(k_1 k_4 + \frac{5}{2} k_1 k_2^2 \lambda_M \right) - \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M^2 \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu}), \\ \bar{\Omega}_{23} &= -2k_1 k_2 \lambda_M^2 - \bar{\mu} \left(\frac{7k_1 k_2 + 3k_1 \delta_1}{4} \right) \lambda_M, \\ \bar{\Omega}_{33} &= \frac{k_1}{2} (\lambda_m^2 - 3\bar{\mu} \lambda_M). \end{aligned}$$

O objetivo é obter relações diretas para os ganhos de controle (k_1, k_2, k_3, k_4) de forma que estes possam ser escritos em função dos ganhos de menor índice. Assim, k_1 não deve depender dos outros ganhos, $k_2(k_1)$, $k_3(k_1, k_2)$, e $k_4(k_1, k_2, k_3)$.

Para obtenção de k_1 é considerado que um termo positivo é capaz de majorar o termo negativo em $\bar{\Omega}_{11} > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{k_1^3}{2} \lambda_m \lambda_M - k_1 \lambda_M \delta_2 &> 0 \\ k_1 &> \sqrt{\frac{2\delta_2}{\lambda_m}} \end{aligned}$$

Para obtenção de k_2 é considerada que a condição $\bar{\Omega}_{22} > 0$ é satisfeita se:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} k_1 k_2^2 \lambda_m \lambda_M - \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M^2 \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu}) &> 0 \\ 5k_2 \lambda_m - 3\lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu}) &> 0 \\ k_2 &> \frac{3\lambda_M \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu})}{5\lambda_m} \end{aligned}$$

Para obtenção de k_3 é utilizado o fato que o determinante de $\bar{\Omega} > 0$:

$$\det(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{22} \bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{23}^2 - \bar{\Omega}_{13}^2 \bar{\Omega}_{22} > 0.$$

O teorema 3.1, desenvolvido nesse trabalho, considera um particionamento do termo positivo, resultando em novas condições mais diretas para os ganhos de controle. Porém a abordagem de Nagesh e Edwards [21] considera que o termo positivo $\bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{22} \bar{\Omega}_{33}$ é suficientemente grande para majorar os dois termos negativos, $(-\bar{\Omega}_{11} \bar{\Omega}_{23}^2)$ e $(-\bar{\Omega}_{13}^2 \bar{\Omega}_{22})$.

Assim, é considerado que $\det(\bar{\Omega})$ resulta em:

$$\det(\bar{\Omega}) = \bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{22}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{23}^2 - \bar{\Omega}_{13}^2\bar{\Omega}_{22} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\Omega}_{11}[\bar{\Omega}_{22}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{23}^2] > 0 & (3.59) \\ \bar{\Omega}_{22}[\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{13}^2] > 0 & (3.60) \end{cases}$$

A relação do ganho k_3 é obtida em (3.60) observando os termos dependentes de k_3 em $[\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{13}^2]$. Neste caso somente os termos $\bar{\Omega}_{11}$ e $\bar{\Omega}_{33}$ possuem termos dependentes de k_3 . Assim, foram identificados e isolados os termos dependentes de k_3 :

$$\begin{aligned} \left(k_1 k_3 \lambda_m + \frac{k_1^3}{2} \lambda_m \lambda_M - k_1 \lambda_M \delta_2\right) \bar{\Omega}_{33} - \left(-k_1^2 \lambda_M^2 - \lambda_M \delta_2 + \bar{\mu} \frac{3k_1^2}{4} \lambda_M - \bar{\mu} k_3\right)^2 &> 0, \\ k_3(k_1 \lambda_m) \bar{\Omega}_{33} + \alpha_1 \bar{\Omega}_{33} - (\alpha_2^2 - 2\alpha_2 \bar{\mu} k_3 + \bar{\mu}^2 k_3^2) &> 0, \\ -\bar{\mu}^2 k_3^2 + k_3(k_1 \lambda_m \bar{\Omega}_{33} + 2\alpha_2 \bar{\mu}) + (\alpha_1 \bar{\Omega}_{33} - \alpha_2^2) &> 0, \\ -\bar{\mu}^2 k_3^2 + k_3(\alpha_3) + (\alpha_4) &> 0, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{k_1^3}{2} \lambda_m \lambda_M - k_1 \lambda_M \delta_2, & \alpha_2 &= -k_1^2 \lambda_M^2 - \lambda_M \delta_2 + \bar{\mu} \frac{3k_1^2}{4} \lambda_M, \\ \alpha_3 &= (k_1 \lambda_m \bar{\Omega}_{33} + 2\alpha_2 \bar{\mu}), & \alpha_4 &= \alpha_1 \bar{\Omega}_{33} - \alpha_2^2. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade (3.61) é possível encontrar a condição de k_3 . Note que se a matriz de entrada fosse totalmente simétrica, caso abordado por Nagesh e Edwards [21], o valor de μ seria zero e k_3 seria facilmente obtido. Porém, ao considerar o termo quadrático de k_3 , juntamente com μ^2 , este problema se torna mais complexo, por representar uma equação de duas variáveis, $f(k_3, \mu) = 0$. A solução deste problema pode então ser alcançada por uma minimização desta função $f = 0$.

Para k_4 é considerado $\det(\bar{\Omega})$ em sua forma completa. O objetivo é tentar isolar k_4 em termos dos outros fatores. Nesse caso somente $\bar{\Omega}_{22}$ possui termos de k_4 :

$$\begin{aligned} \det(\bar{\Omega}) &= \bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{22}\bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{23}^2 - \bar{\Omega}_{13}^2\bar{\Omega}_{22} > 0, \\ \bar{\Omega}_{11}(k_1 k_4 \lambda_m + \beta_1) \bar{\Omega}_{33} - \bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{23}^2 - \bar{\Omega}_{13}^2\bar{\Omega}_{22} &> 0, \\ (k_1 k_4 \lambda_m + \beta_1) &> \frac{\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{23}^2 + \bar{\Omega}_{13}^2\bar{\Omega}_{22}}{\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{33}}, \Rightarrow k_1 k_4 \lambda_m > -\beta_1 + \frac{\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{23}^2 + \bar{\Omega}_{13}^2\bar{\Omega}_{22}}{\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{33}}, \\ k_4 &> \frac{1}{k_1 \lambda_m} \left(-\beta_1 + \frac{\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{23}^2 + \bar{\Omega}_{13}^2\bar{\Omega}_{22}}{\bar{\Omega}_{11}\bar{\Omega}_{33}} \right) \end{aligned}$$

onde $\beta_1 = \frac{5}{2} k_1 k_2^2 \lambda_m \lambda_M - \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M^2 \delta_1 (\lambda_M + \bar{\mu})$.

Passos similares podem ser utilizados na matriz $\bar{\Psi}$ para obter a relação dos ganhos referente a essa matriz.

3.4 Análise numérica das condições de estabilidade

Nesta seção será mostrado, por simulações numéricas, que os valores limites das desigualdades dos ganhos de controle (3.30) e (3.55), do Teorema 3.1, para o controle (3.3), garantem a estabilidade do sistema (3.1) definido no início do Capítulo 3. Além disso, também são investigados alguns casos em que os ganhos de controle não satisfazem as desigualdades do Teorema 3.1, mas que são próximos dos limites de validade dessas desigualdades. Essa consideração tem como objetivo investigar se eventualmente alguns desses ganhos podem resultar um sistema estável.

Considerando o critério de estabilidade de Lyapunov, uma das condições necessárias para a estabilidade é $\dot{V} < 0$. Mais especificamente, no Teorema 3.1, isso se traduz em garantir que as matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$ sejam positivas definidas, ou ainda, garantir que o menor autovalor de cada matriz seja positivo. Assim, inicialmente, a análise numérica desta seção irá relacionar estabilidade do sistema diretamente com o autovalor mínimo. Portanto, será considerado como critério de análise a positividade do menor autovalor dessas matrizes.

3.4.1 Estrutura de *Benchmark*

Considere o sistema (3.1), segundo as hipóteses (A1)-(A3), com o controle *Super-Twisting* (3.3), e a matriz de entrada dada por:

$$K_p S_p = \bar{K}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

A parte simétrica da matriz \bar{K}_p foi escolhida como a identidade para representar a possível escolha de uma matriz simetrizante, S_p , que seja próxima da inversa da matriz K_p do sistema original, implicando em $\lambda_M = \lambda_m = 1$.

Para que esse exemplo não deixasse de representar o caso geral, alguns dos termos das desigualdades (3.56) não fossem anulados, e o resultado apresentado a seguir se adequasse melhor a realidade das possíveis perturbações, foram considerados δ_1 e δ_2 não nulos. Para facilitar o acompanhamento dos cálculos das desigualdades foram escolhidos $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

Note que algumas das desigualdades de k_2 e k_4 , em (3.56), são dependentes de $\bar{\mu}$, ao mesmo tempo que algumas das desigualdades de $\bar{\mu}$ dependem desses ganhos. Uma forma de contornar isso é considerar uma primeira estimativa de $\bar{\mu}$, denotada por $\bar{\mu}_{e1}$, para calcular a primeira estimativa dos ganhos k_i , denotada por k_{ie1} .

Considerando isso, e observando que os valores, no caso desse exemplo, são $\lambda_M = \lambda_m = \delta_1 = \delta_2 = 1$, as desigualdades dos ganhos k_i , $i = 1 \dots 4$, em (3.56), podem ser simplificadas ao serem reescritas como:

$$\begin{aligned} k_{1_{e1}} &> \sqrt{6} = 2,4495, \\ k_{2_{e1}} &> \max \left\{ 2(1 + \bar{\mu}_{e1}) ; 6 ; 1,84 \right\}, \\ k_{3_{e1}} &> \max \left\{ 1 ; 12k_1^2 + 24 + \frac{12}{k_1^2} ; \frac{k_2}{\left(\frac{1}{3}k_2 - 2\right)} \right\} \\ k_{4_{e1}} &> \max \left\{ \frac{3k_2(1 + \bar{\mu}_{e1})}{2} ; 32k_2^2 ; \frac{2k_2^2 + 0,5k_2 + 2k_2^3}{\left(\frac{1}{3}k_2 - 2\right)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

Assim, os ganhos k_{ie1} podem ser obtidos por (3.63), ao especificar algum valor para $\bar{\mu}_{e1}$. Considerando uma hipótese *ad hoc* de que $\bar{\mu}_{e1} = \lambda_M = 1$, as desigualdades (3.63), para esse exemplo, independem de $\bar{\mu}_{e1}$, pois claramente $2(1 + \bar{\mu}_{e1}) = 4 < 6$, e $\frac{3k_2(1 + \bar{\mu}_{e1})}{2} = 3k_2 < 32k_2^2$. Os valores de simulação para os ganhos k_i , denotados por k_{ib} , podem ser escolhidos, para esse exemplo, de acordo com (3.63), ao considerar $\bar{\mu}_{e1} = \lambda_M = 1$.

3.4.2 Ajuste dos ganhos de controle para simulação

Os ganhos de controle para simulação foram escolhidos de forma a serem os menores possíveis, porém ainda considerando que satisfazem (3.63) em seus limites. O valor de k_{1_b} pode ser diretamente considerado como seu limite $k_{1_b} = 2,4495$. Note que na maximização de k_4 , em (3.63), o terceiro termo, $\frac{2k_2^2 + 0,5k_2 + 2k_2^3}{\left(\frac{1}{3}k_2 - 2\right)}$, possui valores altos para k_2 próximos de 6, e que ele diminui conforme k_2 aumenta. Porém, o segundo termo, $32k_2^2$, cresce conforme k_2 aumenta. Esses dois fatos indicam que a minimização do ganho k_4 pode ser considerada em termos de k_2 .

A Figura 3.1 mostra o gráfico de k_4 em função da variação percentual de k_{2_b} . Note que essa curva é composta de dois ramos, correspondentes aos dois termos da maximização que define k_{4_b} , onde o valor $(1,2706)k_2$, i.e., um aumento aproximado de 27% de k_2 , minimiza k_4 para 1859,5.

Considerando as desigualdades (3.63), foi primeiro calculado o ganho k_{1_b} como o valor limite de validade dessa desigualdade. Em seguida k_{2_b} foi calculado como sendo o valor limite de validade da desigualdade $k_{2_{e1}}$ multiplicado por 1,2706. O ganho k_{3_b} é obtido aplicando k_{1_b} e k_{2_b} na desigualdade de $k_{3_{e1}}$ apresentada em 3.63, e considerando o valor limite de validade dessa desigualdade. k_{4_b} obtido aplicando k_{2_b} na desigualdade de $k_{4_{e1}}$, e considerando o valor limite de validade dessa desigualdade.

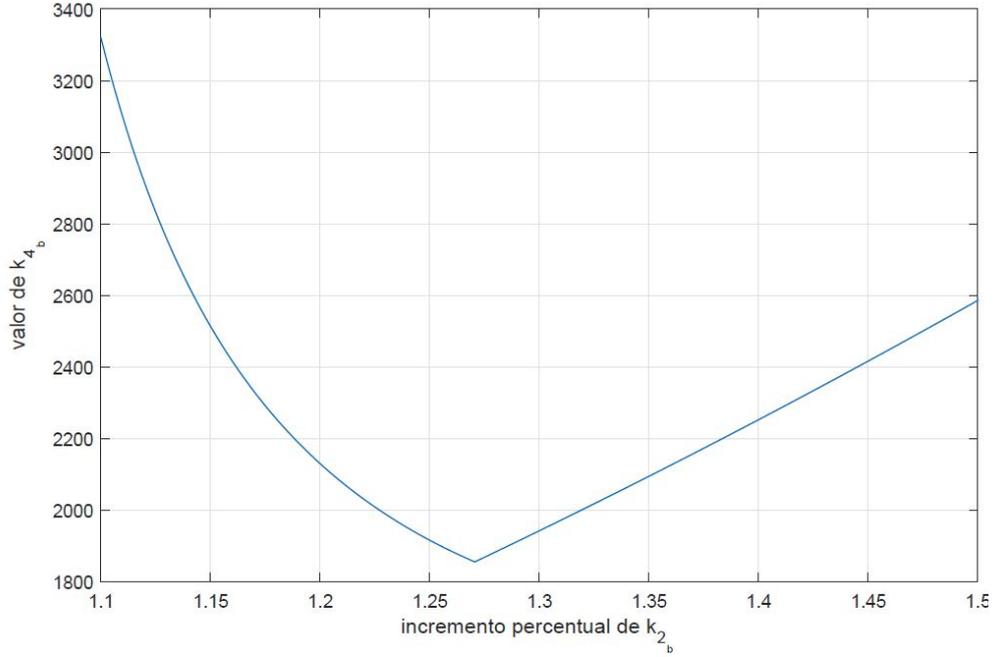


Figura 3.1: Gráfico de k_{4e1} , em função da variação percentual do ganho k_{2_b} no intervalo de $[1,1 ; 1,5]$

Assim, os ganhos k_{i_b} podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
 k_{1_b} &= 2,4495, \\
 k_{2_b} &= (1,2706) \times 6 = 7,623, \\
 k_{3_b} &= 12k_1^2 + 24 + \frac{12}{k_1^2} = 98, \\
 k_{4_b} &= 32k_2^2 = 1859,5.
 \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando esses valores de k_{i_b} na desigualdade de $\bar{\mu}$ (3.56), resulta em $\bar{\mu} < 0,0220$. Assim, o valor de μ considerado para a simulação, denotado por μ_b , pode ser escolhido como $\mu_b = 0,02$.

Estabelecidos os valores k_{i_b} e μ_b , primeiramente foram feitas simulações para avaliar e entender o comportamento do autovalor mínimo das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, e do μ , conforme alguns ganhos são alterados em torno dos valores k_{i_b} . Em seguida, foi simulada a função de Lyapunov (3.6), apresentada no teorema 3.1, referente ao sistema (3.2) com matriz de entrada do formato apresentado em (3.62), para diferentes valores de μ . As simulações foram feitas utilizando o método de integração de Euler com passo fixo de $10^{-6}s$.

3.4.3 Variação do menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, pelo ganho k_3

Para a análise dos parâmetros de controle, primeiro foi considerado o valor do menor autovalor de $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, pela variação de k_3 em torno do seu valor base, k_{3b} , considerando os outros parâmetros fixos. A Figura 3.2 apresenta o resultado para matriz $\bar{\Omega}$ e para matriz $\bar{\Psi}$. Ao comparar os valores do autovalor mínimo de cada matriz, é possível ver que em ambas o autovalor tende a crescer conforme k_3 aumenta, mas que a matriz $\bar{\Omega}$ apresenta valores mais próximo de zero do que a matriz $\bar{\Psi}$.

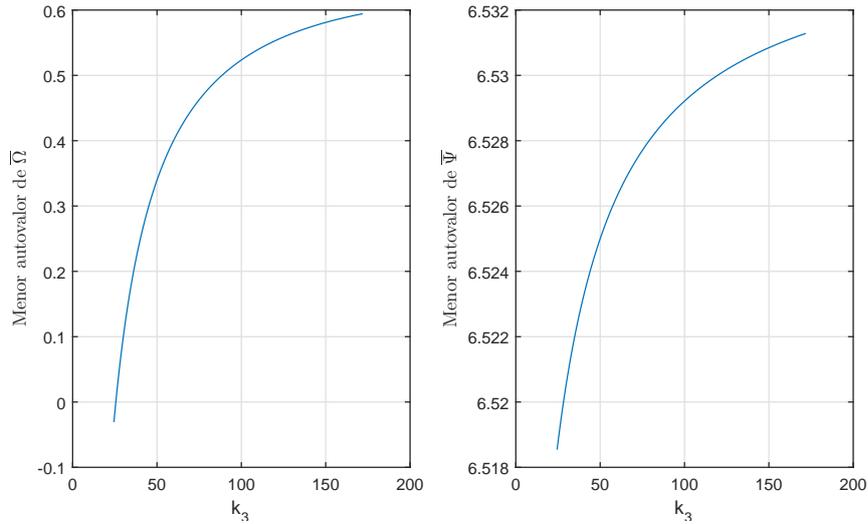


Figura 3.2: Menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$ considerando uma variação de 75% de $k_{3b} = 98$. Considerando fixos k_{1b} , k_{2b} , k_{4b} , $\mu_b = 0,02$, $\lambda_M = \lambda_m = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

É interessante notar que existem valores de k_3 menor do que o valor k_{3b} que ainda apresentam um autovalor mínimo positivo. Além disso, o autovalor mínimo na matriz $\bar{\Omega}$ possui uma variação mais acentuada para valores de k_3 próximo de 25, quando comparada com a variação para valores de k_3 próximo a 100. Essa informação corrobora a ideia de que os valores k_{ib} , obtidos pelas condições apresentadas teorema 3.1, são boas referências para a escolha dos valores dos ganhos.

3.4.4 Variação do menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, pelo ganho k_4

A seguir foi feita a simulação variando k_4 em torno de k_{4b} , mantendo os outros parâmetros constantes. Os resultados obtidos para esse caso, são apresentados na Figura 3.3. Como as desigualdades para k_4 (3.56) foram formuladas de modo a k_4 ficar em função de k_3 , o valor de k_4 tem a tendência de ser maior do que o valor de k_3 . Embora semelhante ao caso de k_3 , a Figura 3.3 mostra que k_4 possui um impacto um pouco maior nos autovalores mínimos das matrizes $(\bar{\Omega}, \bar{\Psi})$.

Isso ocorre pelo fato de k_4 possuir um valor absoluto maior do que k_3 , e a simulação considerar uma variação percentual.

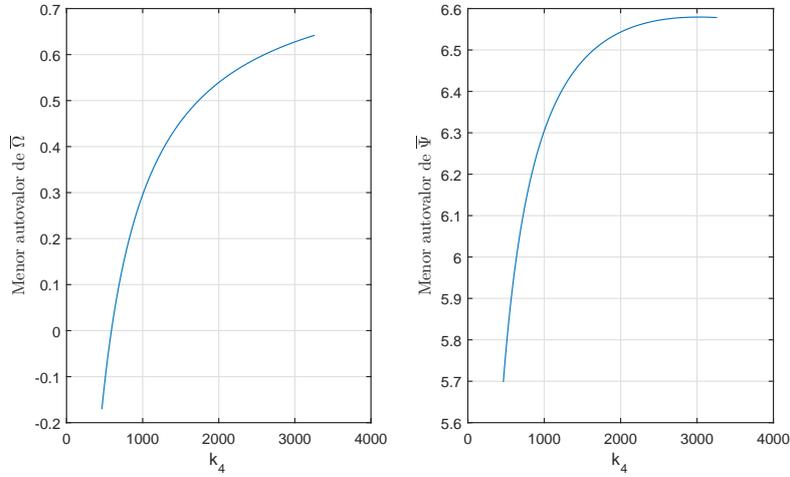


Figura 3.3: Menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, considerando uma variação de 75% de $k_{4b} = 1859,5$. Considerando fixos k_{1b} , k_{2b} , k_{3b} , $\mu_b = 0,02$, $\lambda_M = \lambda_m = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

3.4.5 Varredura do menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, pelo ganho k_4 e por μ

Devido a variação de k_4 apresentar um impacto maior no menor autovalor das matrizes, a próxima simulação priorizou o ganho k_4 no lugar do ganho do ganho k_3 . Assim, foi investigado como o autovalor mínimo é afetado ao variar k_4 e μ . Esse resultado é apresentado pela superfície nas Figuras 3.4, para $\bar{\Omega}$, e (3.5), para $\bar{\Psi}$.

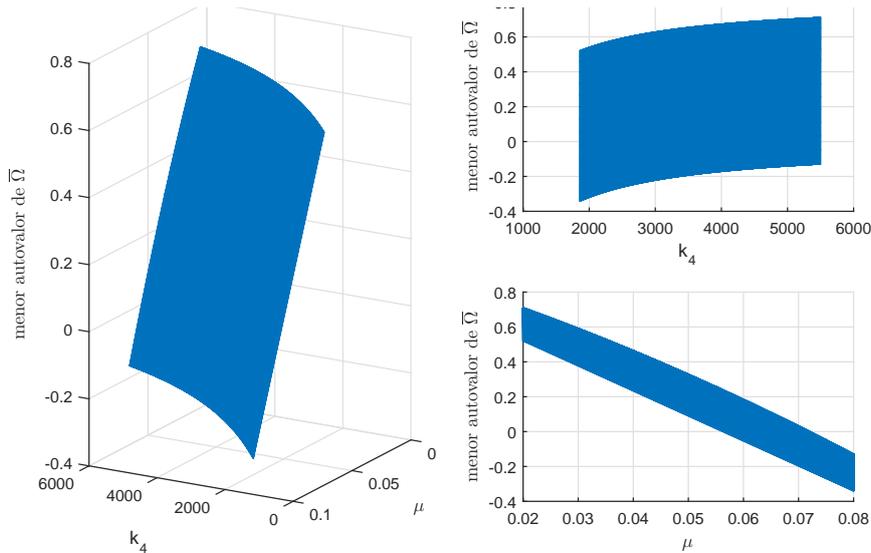


Figura 3.4: Superfície do menor autovalor de $\bar{\Omega}$ gerada pela variação de k_4 e μ , considerando fixos k_{1b} , k_{2b} , k_{3b} , $\lambda_M = \lambda_m = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$

A Figura 3.4 apresenta diferentes vistas da superfície do autovalor mínimo de $\bar{\Omega}$, em função do aumento de k_4 e μ , e considerando uma variação de $[k_{4b}, 2k_{4b}]$ para k_4 . Conforme o valor de μ aumenta, o autovalor mínimo tende a decrescer, começando a apresentar valores negativos quando μ está próximo de 0,055, se k_4 está próximo de k_{4b} . Entretanto, para μ próximo de 0,07, ainda é possível manter o autovalor mínimo positivo fazendo k_4 próximo de $2k_{4b}$.

A Figura 3.5 apresenta diferentes vistas do gráfico da superfície autovalor mínimo de $\bar{\Psi}$, gerada ao variar k_4 e μ , para o intervalo de variação de $[k_{4b}, 2k_{4b}]$ para k_4 .

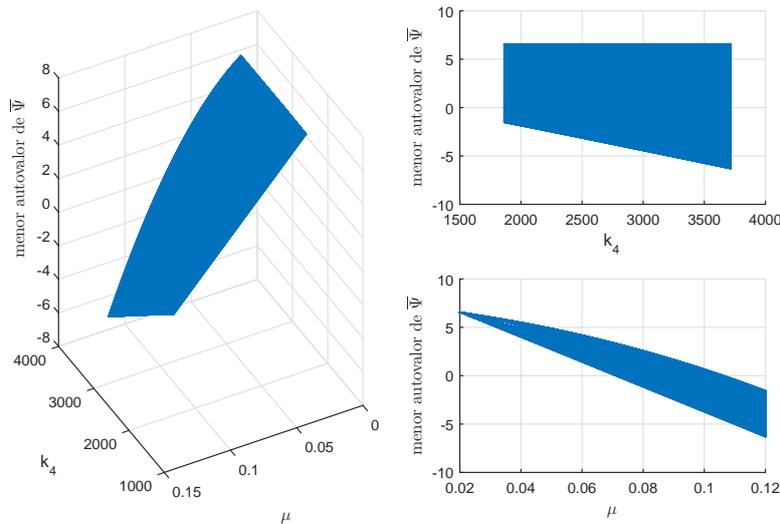


Figura 3.5: Superfície do menor autovalor de $\bar{\Psi}$ gerada pela variação de k_4 e μ , considerando fixos $k_{1b}, k_{2b}, k_{3b}, \lambda_M = \lambda_m = 1, \delta_1 = \delta_2 = 1$

Note que a superfície do autovalor mínimo de $\bar{\Psi}$ apresenta um comportamento diferente do apresentado pela matriz $\bar{\Omega}$. Embora um aumento no valor de μ implique em um aumento no autovalor mínimo de $\bar{\Psi}$, o ganho k_4 é inversamente proporcional ao autovalor mínimo. Assim, é interessante apontar que, para k_4 próximo de k_{4b} , o autovalor mínimo se torna negativo em aproximadamente $\mu = 0,10$, porem ao considerar k_4 próximo de $2k_{4b}$, o autovalor mínimo se torna negativo em aproximadamente $\mu = 0,07$.

Considerando os casos apresentados, é possível ver que a matriz $\bar{\Omega}$ tende a limitar μ , tanto para valores de k_4 próximo de k_{4b} ou $2k_{4b}$. Um alto limite do valor de μ , significa que o sistema associado pode ter uma incerteza maior.

Na prática, isso representa que o conhecimento do valor nominal da matriz de entrada pode ter uma variação maior em relação ao valor real, e a matriz simetrizante S_p pode ser escolhida de forma mais ampla e favorável. Considerando isso, em seguida foi simulado o sistema de controle, segundo as condições do teorema 3.1, para a analisar o comportamento da função de Lyapunov associada e o comportamento dos estados.

A Figura 3.6 mostra que função de Lyapunov associada ao sistema é continuamente decrescente, com o ponto de equilíbrio da origem $(\sigma, z) = 0$, e atinge o equilíbrio em tempo finito, comprovando assim que os valores k_{i_b} escolhidos para os ganhos garantem estabilidade.

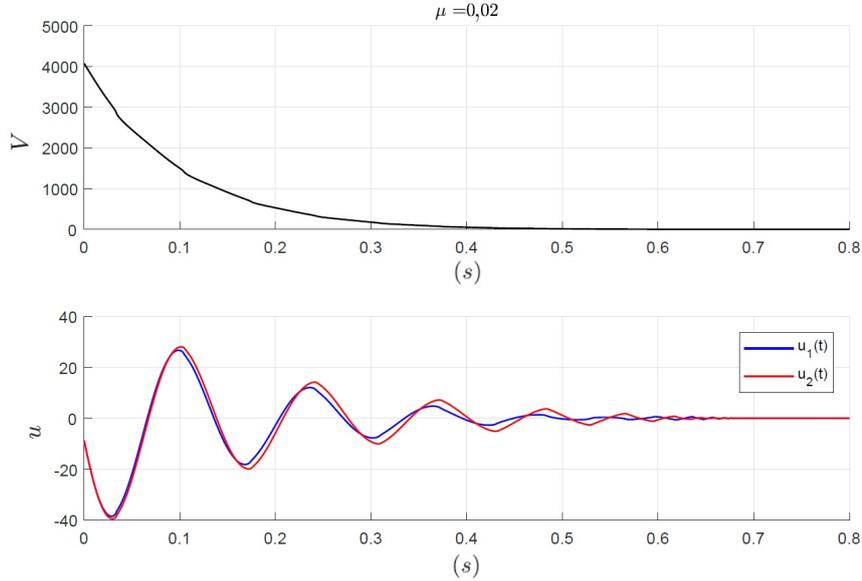


Figura 3.6: Função de Lyapunov no tempo com condições iniciais $\sigma_0 = 1$, $z_0 = 1$. Considerando $k_{1_b}, k_{2_b}, k_{3_b}, k_{4_b}$, $\mu_b = 0,02$, $\lambda_M = \lambda_m = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

3.4.6 Análise da função de Lyapunov

A Figura 3.7 apresenta o comportamento da função de Lyapunov para valores mais elevados de μ . É interessante notar que um valor de $\mu = 0,20$, dez vezes maior do que o valor μ_b considerado na matriz de entrada (3.62), ainda implica em uma Lyapunov decrescente. Além disso, valores próximos de $\mu = 0,2415$ tornam a Lyapunov não decrescente. Note que, pela teoria de Lyapunov, quando a função candidata decresce para zero em tempo finito a estabilidade do sistema é garantida, mas, nos casos que isso não ocorre, apenas é possível inferir que a função candidata não é capaz de garantir estabilidade na região considerada. Assim, é investigado também o comportamento dos estados.

A Figura 3.8 apresenta os estados e o sinal de controle para valores de μ maiores do que o limite previsto no teorema 3.1, mas ainda considerando $(k_{1_b}, k_{2_b}, k_{3_b}, k_{4_b})$. Para um valor de $\mu = 0,20$ o sistema ainda converge para zero, e com sinal de controle limitado entre $[-40; +40]$. O valor máximo e mínimo desse limite é satisfatório quando comparado com o valor máximo e mínimo do sinal de controle para o caso $\mu = \mu_b = 0,02$, em que o valor do sinal de controle é limitado entre $[-40; +25]$, como pode ser visto na Figura 3.6.

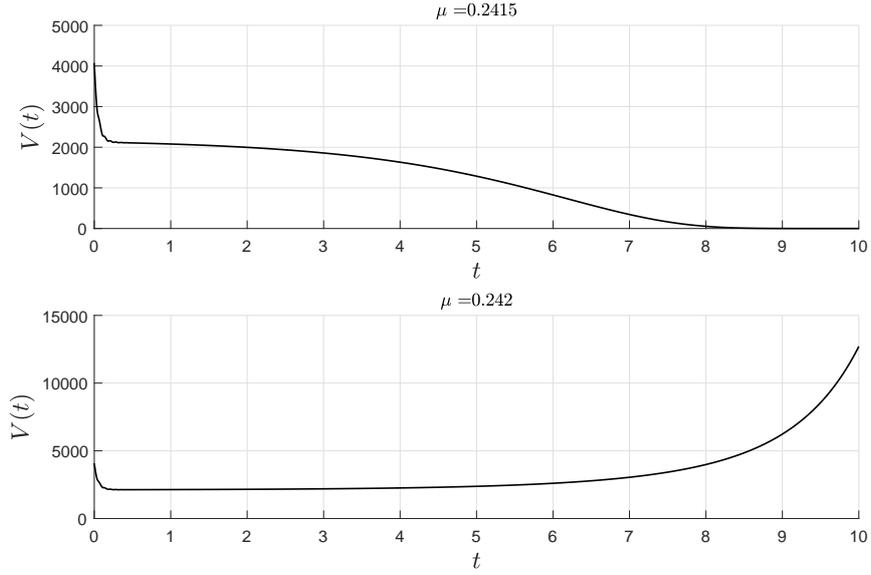


Figura 3.7: Limite de estabilidade da função de Lyapunov no tempo, com condições iniciais $\sigma_0 = 1$, $z_0 = 1$. Considerando k_{1_b} , k_{2_b} , k_{3_b}, k_{4_b} , $\lambda_M = \lambda_m = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, para os casos $\mu_b = 0,2415$ e $\mu_b = 0,2420$.

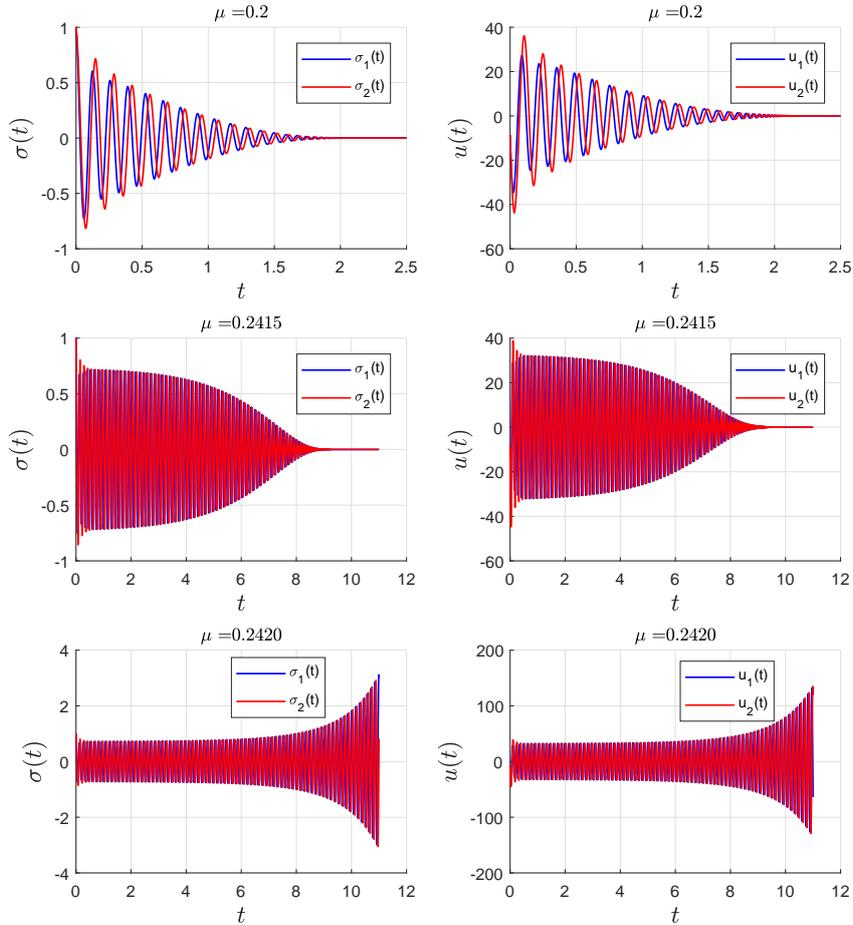


Figura 3.8: Simulação do sistema de controle STA-MIMO em (3.1) e (3.3), com matriz de entrada (3.62), para diferentes valores de μ .

3.5 Estudo de caso: Servovisão de um Manipulador Robótico

Visando validar o estudo numérico da seção anterior para um ambiente mais aplicado, esta seção considera o problema de servo visão de manipuladores planares usando uma câmera fixa(planta) com eixo ótico ortogonal ao espaço de trabalho do robô quando a orientação da câmera é incerta com respeito às coordenadas no espaço de trabalho do robô [45], [46], [47].

O objetivo é controlar o robô para conseguir que a imagem do efetuador consiga ser estável em relação ao plano imagem. A motivação para escolher este exemplo é que a matriz de entrada do sistema é essencialmente uma matriz de rotação, que não é simétrica, com exceção dos casos triviais, e que naturalmente se enquadra no formato da hipótese **(A1)** do Teorema 3.1.

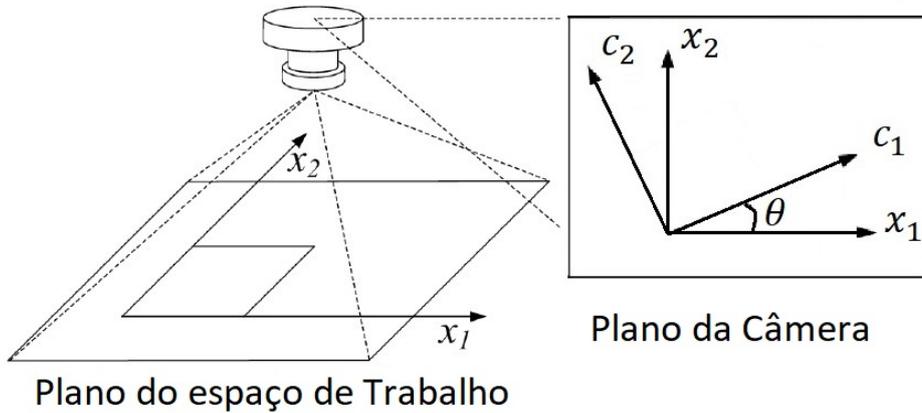


Figura 3.9: Representação do esquema do sistema câmera-robô. Figura extraída de [48]

3.5.1 Estrutura do sistema

O problema de controle cartesiano nas coordenadas da imagem da câmera é descrito por:

$$\dot{\sigma} = K_p \bar{u}, \quad \bar{u} = S_p u, \quad K_p = \cos(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \text{sen}(\theta) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

onde a matriz K_p é incerta, porém é conhecido seu valor nominal. A matriz de entrada nominal é dada pela mesma matriz de rotação porém com uma variação do ângulo de rotação, $\Delta\theta$ que pode ser positiva ou negativa em relação ao ângulo real:

$$K_{pn} = \cos(\theta + \Delta\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \text{sen}(\theta + \Delta\theta) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

Assim, pela hipótese (A1) do teorema 3.1, podemos escolher uma matriz simetrizante com base no valor nominal da matriz de entrada, $S_p = K_{pn}^{-1}$, para a matriz de entrada efetiva:

$$\begin{aligned} K_p S_p &= K_{ps} + \mu K_{pa} \\ \bar{K}_p &= K_p K_{pn}^{-1} = K_{ps} + \mu K_{pa} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Considerando $0^\circ < \Delta\theta < 90^\circ$, e algumas propriedades da matriz de rotação e relações trigonométricas, apresentadas no apêndice B.5, tem-se

$$\bar{K}_p = \cos(\Delta\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin(\Delta\theta) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

resultando em $\lambda_M = \lambda_m = \cos(\Delta\theta)$. Além disso, também foi considerado $\delta_1 = \delta_2 = 1$. A Figura 3.10 apresenta a relação entre $\Delta\theta$, μ e λ_m , para $0^\circ < \Delta\theta < 90^\circ$.

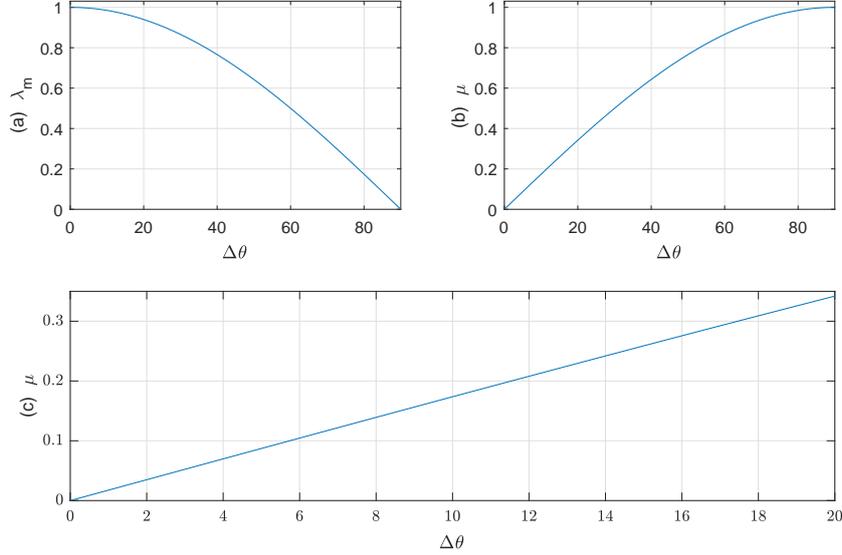


Figura 3.10: (a) Menor autovalor de K_{ps} e (b) μ , em função do erro do ângulo de posicionamento $\Delta\theta$. (c) Trecho de (b) para $0^\circ < \Delta\theta < 20^\circ$.

Note que a matriz resultante \bar{K}_p não depende do ângulo real θ , mas somente a da variação $\Delta\theta$. Assim, a matriz de entrada efetiva depende apenas do erro de ângulo $\Delta\theta$. Esse erro de estimação, $\Delta\theta$, pode ser associado a incerteza do sistema μ , por $\mu = \sin \Delta\theta$. Assim, o limitante da incerteza, dado por $\bar{\mu}$, é o limite da norma de $\sin \Delta\theta$. Portanto, é possível relacionar o erro de rotação em graus com μ por $\Delta\theta = \arcsin(\mu) \frac{180}{\pi}$.

3.5.2 Ganhos de simulação

Considerando o caso numérico da seção anterior, mais especificamente a subseção 3.4.1, as desigualdades (3.56) permitiram escolhas de valores k_{i_b} que fossem apropriados para os ganhos de controle. Assim, nesta seção, é considerada uma metodologia similar a adotada na seção anterior para a obtenção dos valores k_{i_b} . Porém, neste caso, os limitantes dos autovalores são $\lambda_M = \lambda_m = \cos(\Delta\theta)$ e o limitante de μ é dado por $\bar{\mu} = \bar{\mu}_{e1}$ nos cálculos dos ganhos:

$$\begin{aligned} k_1 &> \sqrt{\frac{6}{\cos(\Delta\theta)}}, & k_2 &> \max \left\{ \frac{2\delta_1(\cos(\Delta\theta) + \bar{\mu}_{e1})}{\cos(\Delta\theta)} ; 6 ; 1,84 \right\}, \\ k_3 &> \max \left\{ 1 ; 12k_1^2 \cos(\Delta\theta) + 24 + \frac{12}{k_1^2 \cos(\Delta\theta)} ; \frac{k_2}{\left(\frac{k_2}{3} - 2\right)} \right\} \\ k_4 &> \max \left\{ \frac{3k_2(\cos(\Delta\theta) + \bar{\mu}_{e1})}{2} ; 32k_2^2 \cos(\Delta\theta) ; \right. \\ &\quad \left. \frac{2k_2^2 \cos(\Delta\theta) + 0,5k_2 \cos(\Delta\theta) + 2k_2^3 \cos(\Delta\theta)}{\left[\frac{k_2}{3} - 2\right]} \right\}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

As desigualdades (3.68), dependem de $\Delta\theta$ e μ , mas como $\Delta\theta = \arcsin(\mu)\frac{180}{\pi}$, então pode ser entendido como somente depende de μ . Além disso, como $\lambda_M = \cos(\Delta\theta) < 1$, este caso acaba sendo similar ao caso anterior, em que inicialmente foi suposto $\bar{\mu}_{e1} = \lambda_M = 1$. Note que nas desigualdades (3.68) alguns dos termos $\cos(\Delta\theta)$ estão no denominador. Por tanto, quanto maior for $\Delta\theta$, maior será o limitante inferior dos ganhos para esses termos.

Assim os ganhos para simulação k_{i_b} podem ser escolhidos de acordo com (3.68), ao adotar que $\bar{\mu}_{e1} = \lambda_M = \cos(\Delta\theta)$, e considerar um valor fixo de $\Delta\theta$. As simulações a seguir consideram diferentes valores de $\Delta\theta$.

3.5.3 Varredura do menor autovalor das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, pelo ganho k_4 e por $\Delta\theta$

Escolhidos os valores de simulação, foi investigado o comportamento do menor autovalor das matrizes $(\bar{\Omega}, \bar{\Psi})$ em função de k_4 e $\Delta\theta$. Em seguida, foi considerada a simulação da função de Lyapunov (3.6) associada ao sistema (3.64) para diferentes valores de $\Delta\theta$. As simulações foram feitas utilizando o método de integração de Euler com passo fixo de 10^{-6} .

A Figura 3.11 apresenta diferentes vistas da superfície do autovalor mínimo de $\bar{\Omega}$, em função do aumento de k_4 e $\Delta\theta$, considerando uma variação de $[k_{4_b}, 2k_{4_b}]$ para k_4 . Note que para $\Delta\theta < 3^\circ$ os autovalores são garantidamente positivos, e, considerando a variação de k_4 , é possível obter autovalores positivos para $\Delta\theta < 4^\circ$.

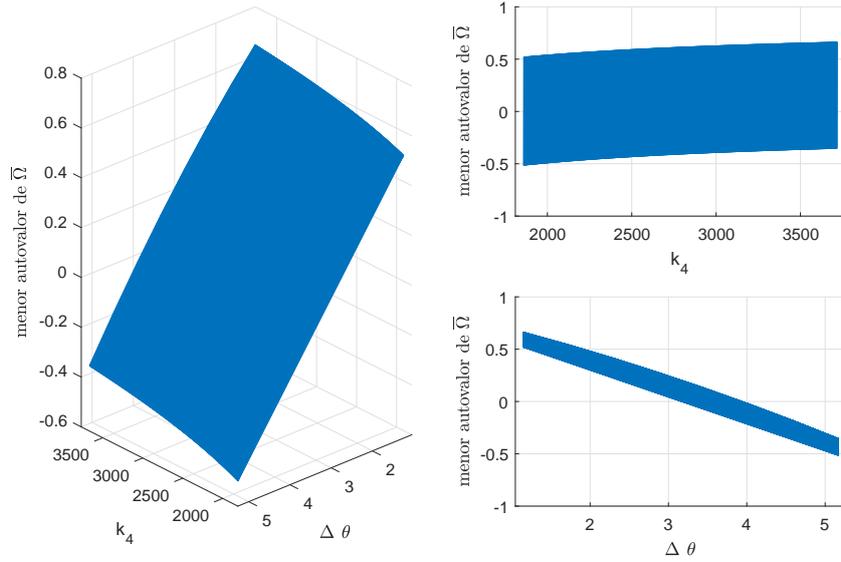


Figura 3.11: Superfície do menor autovalor de $\bar{\Omega}$ gerada pela variação de k_4 e $\Delta\theta$, considerando fixos $k_{1b}, k_{2b}, k_{3b}, \lambda_M = \lambda_m = 1, \delta_1 = \delta_2 = 1$

A Figura 3.12 apresenta diferentes vistas da superfície do autovalor mínimo de $\bar{\Psi}$, em função do aumento de k_4 e $\Delta\theta$, considerando uma variação de $[k_{4b}, 2k_{4b}]$ para k_4 . Como visto na seção anterior, a matriz $\bar{\Psi}$ tem seu auto valor inversamente proporcional ao ganho k_4 . Assim, para valores de k_4 próximos de k_{4b} , os autovalores são positivos para $\Delta\theta < 6^\circ$. Quando k_4 assume valor próximo de $2k_{4b}$, os autovalores são positivos para $\Delta\theta < 4^\circ$.

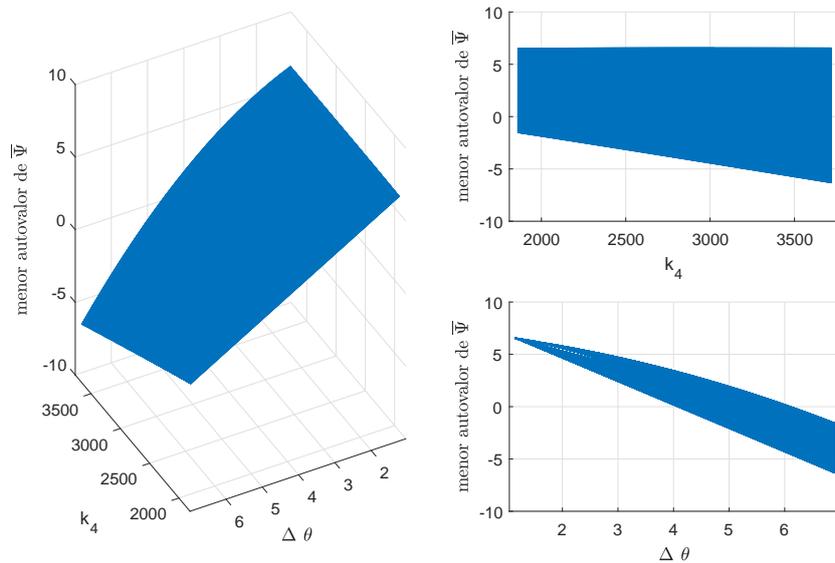


Figura 3.12: Superfície do menor autovalor de $\bar{\Psi}$ gerada pela variação de k_4 e $\Delta\theta$, considerando fixos $k_{1b}, k_{2b}, k_{3b}, \lambda_M = \lambda_m = 1, \delta_1 = \delta_2 = 1$

3.5.4 Análise da função de Lyapunov para a servovisão

Para o problema da servovisão considerado, a incerteza do sistema está associada a variação angular entre o eixo do plano do robô e o eixo do plano da câmera. Assim, se um controle é capaz de estabilizar o sistema para grandes incertezas, esse controle suporta uma grande variação angular entre valor nominal e o valor real do ângulo de posicionamento. Por tanto, foi simulado o sistema de controle, segundo as condições do teorema 3.1, para analisar o comportamento da função de Lyapunov associada e o comportamento dos estados.

A figura 3.13 mostra que função de Lyapunov associada ao sistema é continuamente decrescente, com o ponto de equilíbrio da origem $(\sigma, z) = 0$, e atinge o equilíbrio em tempo finito, comprovando assim que os valores bases assumidos garantem estabilidade para $\Delta\theta < 1,2^\circ$.

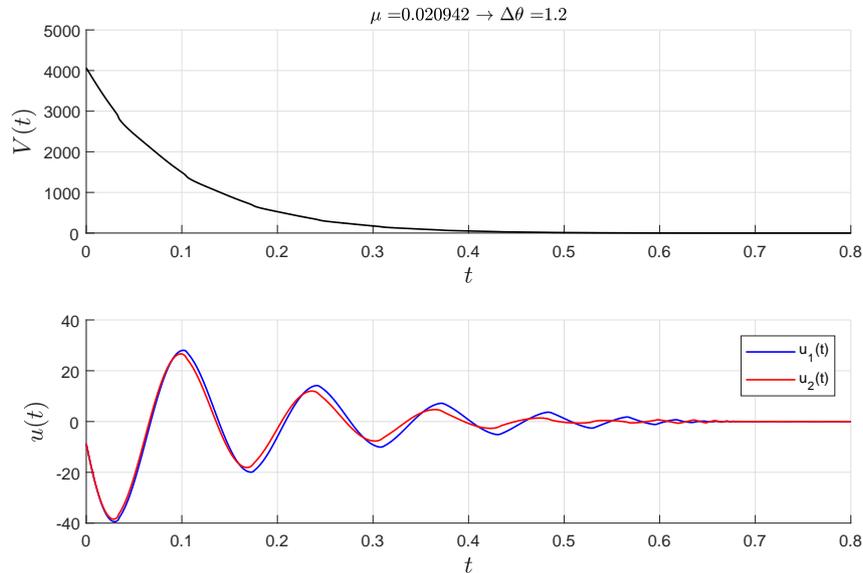


Figura 3.13: Função de Lyapunov no tempo para a matriz de rotação 3.67 com condições iniciais $\sigma_0 = 1$, $z_0 = 1$. Considerando $k_{1_b}, k_{2_b}, k_{3_b}, k_{4_b}$, $\mu_b = 0,02$, $\lambda_M = \lambda_m = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$.

Na prática, um posicionamento que gere um erro de ângulo $\Delta\theta < 1,2^\circ$ pode ser muito difícil de ser alcançado. Assim, são considerados valores limites maiores para $\Delta\theta$.

A Figura 3.14 apresenta o comportamento da função de Lyapunov com $\Delta\theta = 13,42^\circ$ sendo decrescente, e $\Delta\theta = 13,45^\circ$ sendo não decrescente, indicando o limite de estabilidade do sistema. Novamente, pela teoria de estabilidade de Lyapunov, a estabilidade do sistema é garantida somente para a função de Lyapunov associada estritamente decrescente, não sendo possível afirmar instabilidade na região em que isso não ocorre. Assim, é investigado também o comportamento dos estados na região em que a função de Lyapunov não é decrescente.

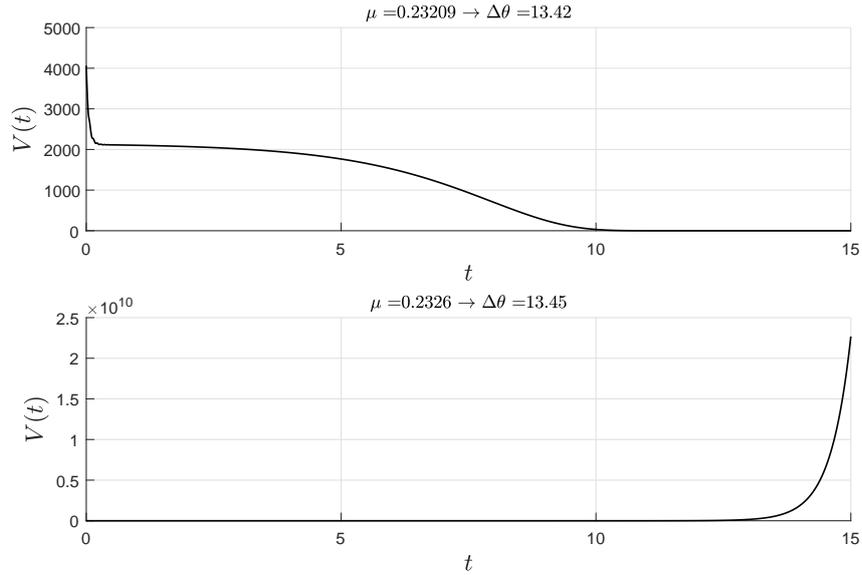


Figura 3.14: Função de Lyapunov no tempo com condições iniciais $\sigma_0 = 1$, $z_0 = 1$. Considerando $k_{1_b}, k_{2_b}, k_{3_b}, k_{4_b}$, $\lambda_M = \lambda_m = 1$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, para os casos $\Delta\theta = 13, 42$ e $\Delta\theta = 13, 45$.

A Figura 3.15 apresenta os estados e o sinal de controle para valores de μ maiores do que o limite previsto no teorema 3.1, mas ainda considerando $(k_{1_b}, k_{2_b}, k_{3_b}, k_{4_b})$, e esses valores de μ podem ser convertidos para $\Delta\theta$.

Note que, para $\Delta\theta = 12$ o sistema estabiliza em aproximadamente 2,5 segundos, enquanto para $\Delta\theta = 1, 2$, apresentado na figura 3.13, o sistema estabiliza em aproximadamente 0,5 segundos. Isso demonstra que o tempo de estabilização é significativamente impactado pelo erro $\Delta\theta$. Assim, caso a aplicação final de manipulação do robô requiera um pequeno tempo de estabilização, o erro angular da câmera é um fator importante a ser considerado. Ainda na Figura 3.15, também é possível avaliar que o limite máximo de $\Delta\theta$ suportado pelo sistema de controle é próximo de $\Delta\theta = 13, 4^\circ$.

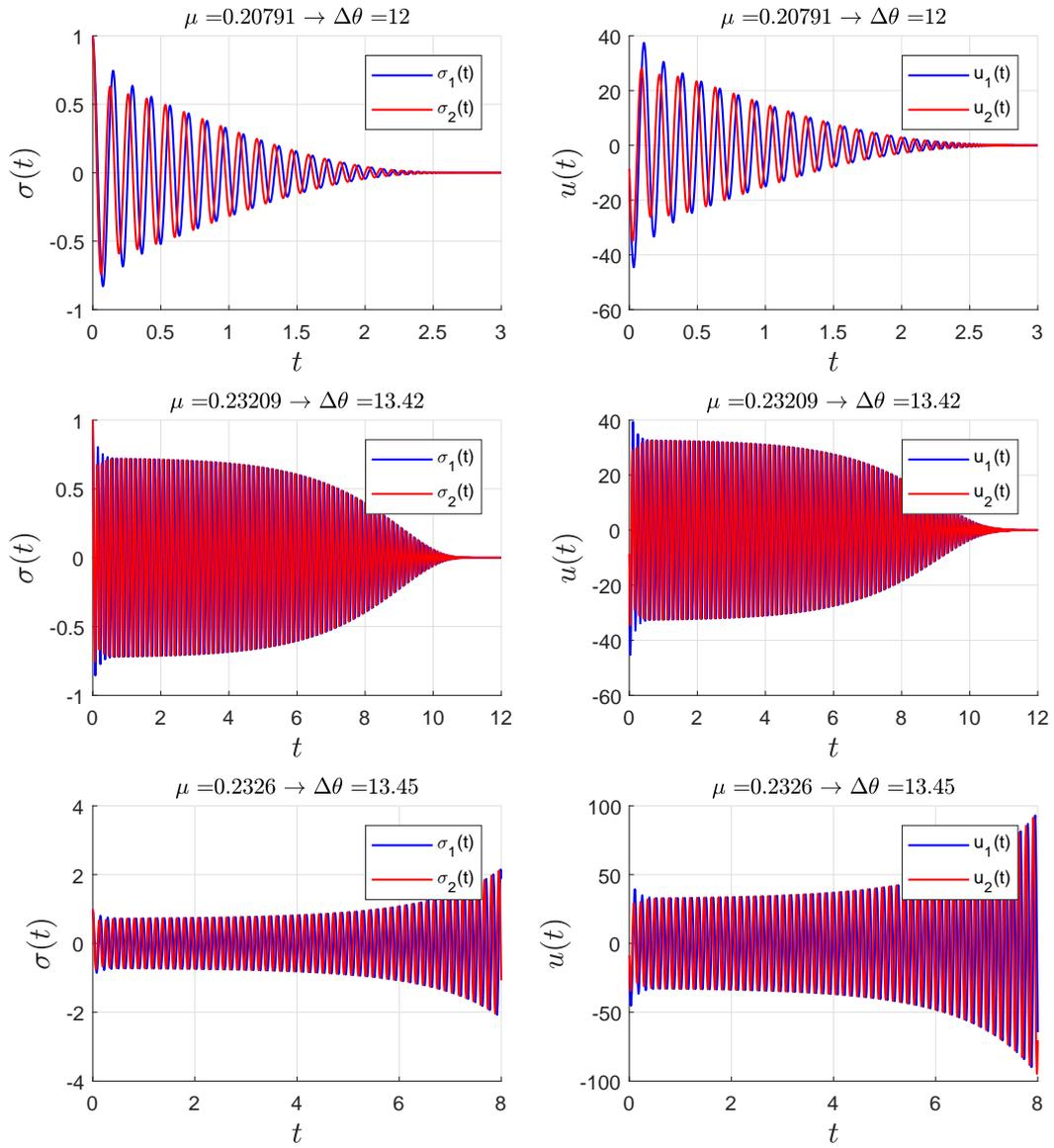


Figura 3.15: Sistema de controle STA-MIMO em (3.1) e (3.3), com matriz de entrada (3.62), para diferentes valores de μ .

3.6 Estudo de caso: Estabilização de um Satélite

Visando validar o algoritmo *Super-Twisting* multivariável proposto nessa dissertação, delimitado pelo do Teorema 3.1, esta seção considera o problema de estabilização de um satélite, apresentado em [21],[49]. Além disso, pretende-se também comparar o desempenho da técnica aqui proposta com o esquema STA de VIDAL *et al.*[22], que considerou, por hipótese, uma matriz de entrada incerta, positiva definida e simétrica. O problema considerado consiste em controlar os propulsores de um satélite para estabiliza-lo.

Este problema possui naturalmente uma matriz de entrada simétrica. Desta forma, a implementação da lei de controle STA, proposta em [22], pode ser feita utilizando somente o conhecimento de limitantes para os autovalores da matriz de entrada.

O algoritmo STA desenvolvido nessa dissertação considera, pela hipótese (A1) do Teorema 3.1, que, multiplicando por uma matriz S_p , a matriz de entrada do sistema pode ser escrita em uma parte simétrica e outra residual. Utilizando-se desse fato, a matriz de entrada do satélite pode ser modificada pela introdução da matriz S_p , resultando em uma matriz simétrica e uma matriz residual com pequena norma. Tendo em vista a fragilidade da condição de simetria, especialmente num cenário incerto, considera-se que a matriz simetrizante é conhecida para um valor nominal da matriz de entrada. Assim, o problema que antes era puramente simétrico pode ser reformulado para o caso do Teorema 3.1.

A dinâmica do sistema é descrita pelas seguintes equações de corpo rígido não lineares :

$$\dot{w} = J^{-1}[\bar{T}(t, w) + \bar{\gamma}(t, w) - S_p(w \times Jw)], \quad \bar{T}(t, w) = S_p T(t, w) \quad (3.69)$$

sendo que $\bar{T}(t, w) \in \mathbb{R}^3$ é o torque fornecido pelos propulsores, $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é uma matriz de inércia simétrica e positiva definida, $w(t) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular inercial do satélite, $S_p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz que relaciona a saída do controlador com a entrada do sistema, $\bar{\gamma} = S_p \|w\| Jw$ é uma perturbação não-linear dependente do estado, e o símbolo \times denota o produto vetorial.

Utilizando a estrutura STA multivariável (3.3), pretende-se projetar um controle de torque T de modo que a superfície de deslizamento $w = \dot{w} = 0$ seja alcançada em tempo finito para estabilizar o movimento do satélite. O controle pode ser então definido como:

$$T = -k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + \xi, \quad \dot{\xi} = -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w, \quad (3.70)$$

e a dinâmica em malha-fechada pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{w} &= -k_1 J^{-1} \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 J^{-1} w + J^{-1} z + J^{-1} \gamma(t, w), \\ \dot{z} &= -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w,\end{aligned}\tag{3.71}$$

onde $\gamma(t, w) = \bar{\gamma} - w \times Jw$ e $z = \xi$. Como a perturbação considerada depende quadraticamente da norma de w , a hipótese **(A3)** do teorema 3.1 não é válida globalmente. Porém, a seguinte relação local é satisfeita para o caso em que $\|w\| \leq 1$

$$\|\gamma(t, w)\| \leq \frac{2}{\lambda_m} \|w\|^2 \leq \frac{2}{\lambda_m} \|w\|, \quad (\|w\| \leq 1),\tag{3.72}$$

em que λ_m é o autovalor mínimo de J^{-1} . Dessa forma, para $\|w\| \leq 1$ a hipótese **(A3)** é válida localmente com $\delta_1 = \frac{2}{\lambda_m}$ e $\delta_2 = 0$. A partir desse fato, da função (3.6), e de que $V(w, z)$ é uma função continuamente decrescente do tempo, tem-se que $2k_3 \|w(t)\| \leq V(w, z) \leq V(w_0, z_0), \forall t$. Assim, a validade local da hipótese **(A3)**, para essa perturbação, é estendida $\forall t$ se as condições iniciais w_0 e z_0 satisfizerem $V(w_0, z_0) \leq 2k_3$.

A matriz de inercia a ser utilizada na simulação é referente ao satélite descrito por [50]:

$$J = J_n + \kappa D,\tag{3.73}$$

onde

$$J_n = \begin{bmatrix} 2,7388 & -0,0031 & -0,0269 \\ -0,0031 & 2,7924 & 0,0136 \\ -0,0269 & 0,0136 & 2,1741 \end{bmatrix},$$

é a matriz de inércia nominal, e

$$D = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,04 & 0,04 \\ 0,04 & 0,05 & 0,04 \\ 0,04 & 0,04 & 0,05 \end{bmatrix}.$$

O termo κD representa a incerteza, com $\kappa \in [-3, 3]$.

Considerando a dinâmica do sistema 3.69 e a hipótese **(A1)** do teorema 3.1, a matriz de entrada, dada por $K_p = J^{-1}$, pode ser multiplicada por uma matriz S_p . Para implementar a estratégia de controle a matriz S_p é escolhida como sendo a inversa do valor nominal da matriz de entrada, $S_p = J_n$.

Por tanto, a matriz de entrada efetiva em termos de controle é dada por:

$$\begin{aligned}\bar{J} &= J^{-1}J_n, \\ \bar{J} &= (J_n + \kappa D)^{-1}J_n,\end{aligned}\tag{3.74}$$

$$\bar{J} = \bar{J}_s + \bar{J}_a\tag{3.75}$$

sendo \bar{J}_s a parte simétrica, obtida ao fazer $\bar{J}_s = (\bar{J} + \bar{J}^T)/2$, e \bar{J}_a a parte antissimétrica, obtida ao fazer $\bar{J}_a = (\bar{J} - \bar{J}^T)/2$, utilizando \bar{J} de (3.74).

A escolha proposta para a matriz S_p representa uma prática comum da literatura que busca cancelar a matriz de entrada do sistema. Essa abordagem permite reduzir o valor de λ_M e também melhorar o condicionamento da parte simétrica, reduzindo a relação de λ_M/λ_m . Essas reduções são importantes pois possibilitam a escolha de ganhos menores, diminuindo o esforço de controle necessário. Nesse exemplo, $\kappa = -3$ resulta no maior valor da relação $\lambda_M/\lambda_m = 1,1708$, para o intervalo considerado $\kappa \in [-3, 3]$.

Note que, as matrizes J_n e D são simétricas, porem, ao considerar a matriz S_p como uma aproximação da inversa de J^{-1} , a matriz \bar{J} pode ser decomposta em uma matriz simétrica mais uma matriz residual antissimétrica 3.75. Além disso, para adequar a matriz \bar{J}_a para hipótese **(A1)** do teorema 3.1, que diz que $\|K_{pa}\| = 1$, basta fazer $\mu K_{pa} = \frac{\bar{J}_a}{\|\bar{J}_a\|}$. Considerando $\kappa = -3$ resulta em $\mu = 0,0102$.

Dessa forma, é interessante notar que uma importante vantagem da abordagem proposta nessa dissertação, é também a possibilidade de tratar matrizes com parte antissimétricas incertas, principalmente porque as técnicas de controle por modos deslizantes foram desenvolvidas para lidar com incertezas e também porque esse caso é mais comum na prática.

Assim, foram calculados os limitantes $\lambda_m = 1,0109$ e $\lambda_M = 1,1836$ para os autovalores da parte simétrica da nova matriz de entrada do sistema, \bar{J} , denotado por sendo válidos para todas as matrizes de inércia obtidas variando κ no intervalo considerado.

Seguindo as desigualdades (3.56), a metodologia de cálculo apresentada na seção 3.4, e lembrando que $\delta_1 = \frac{2}{\lambda_m}$ e $\delta_2 = 0$, foram considerados os seguintes ganhos no controlador: $k_1 = 1$, $k_2 = 8,8$, $k_3 = 22,8$, e $k_4 = 4707,5$. Além disso, a desigualdade 3.56 fornece $\bar{\mu} < 0,0169$. Note que, $\kappa = -3$ resulta em $\mu = 0,0102$, sendo este o maior valor para todo intervalo de $\kappa \in [-3, 3]$. Assim é possível dizer que, para toda a região de incerteza considerada, as desigualdades 3.56 são obedecidas, e pelo Teorema 3.1, o sistema em malha fechada é globalmente estável e em tempo finito.

O método de Euler com passo 10^{-6} foi utilizado para integração numérica.

Seguindo o objetivo de comparar o desempenho do esquema de controle desenvolvido nessa dissertação com o esquema de VIDAL *et al.*[22], foram considerados os mesmos parâmetros de simulação e as seguintes condições iniciais $w(0) = [-0,002, -0,007, 0,03]^T$, e $z(0) = \xi(0) = 0$. Onde os ganhos do STA de [22], denotados por k_{iv} com $i = 1 \dots 4$, são apresentados em [22] com os valores $k_{1v} = 1$; $k_{2v} = 13,3222$; $k_{3v} = 9,2593$; $k_{4v} = 6573,4$.

O controle STA baseado no Teorema 3.1 é apresentado na Figura 3.16, enquanto o resultado apresentado pela proposta de [22], é apresentado na Figura 3.17.

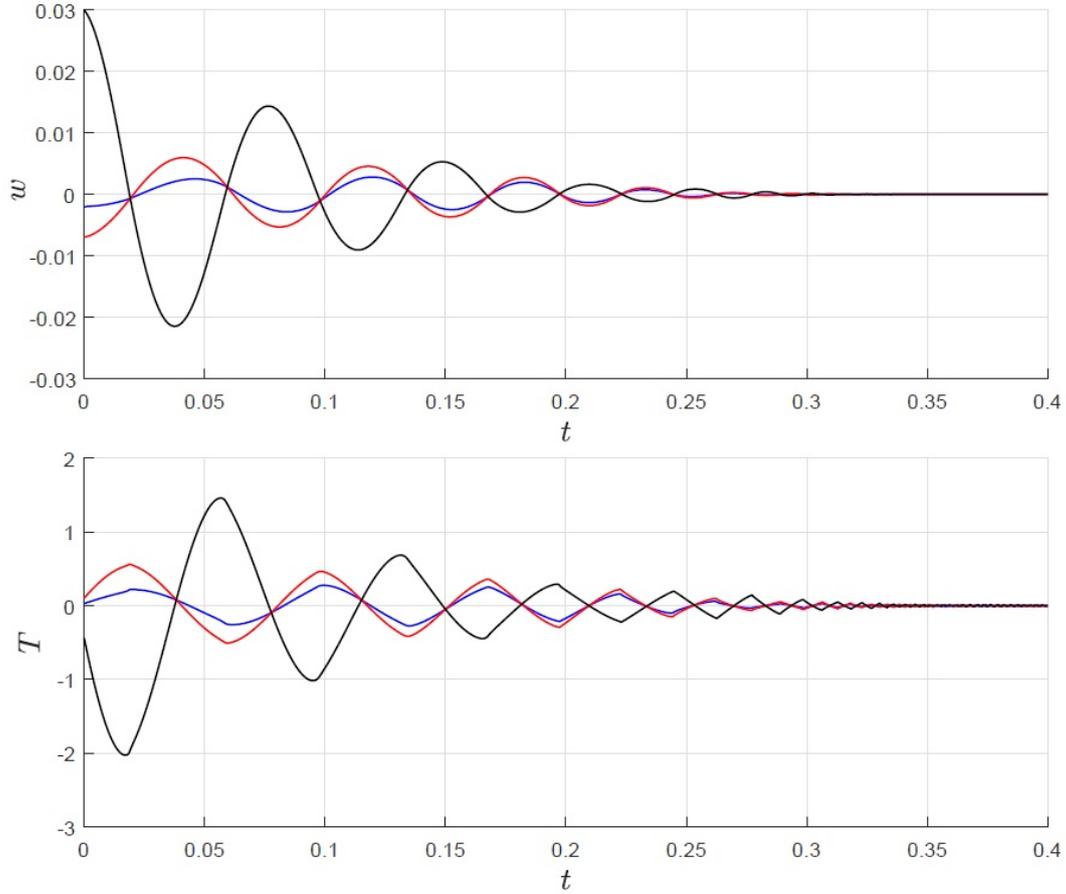


Figura 3.16: Desempenho do STA multivariável no controle de um satélite com matriz de inércia incerta e $w(0) = [-0,002 \ -0,007 \ 0,03]^T$: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 ; (b) componentes do vetor de torque (●) T_1 , (●) T_2 , (●) T_3 .

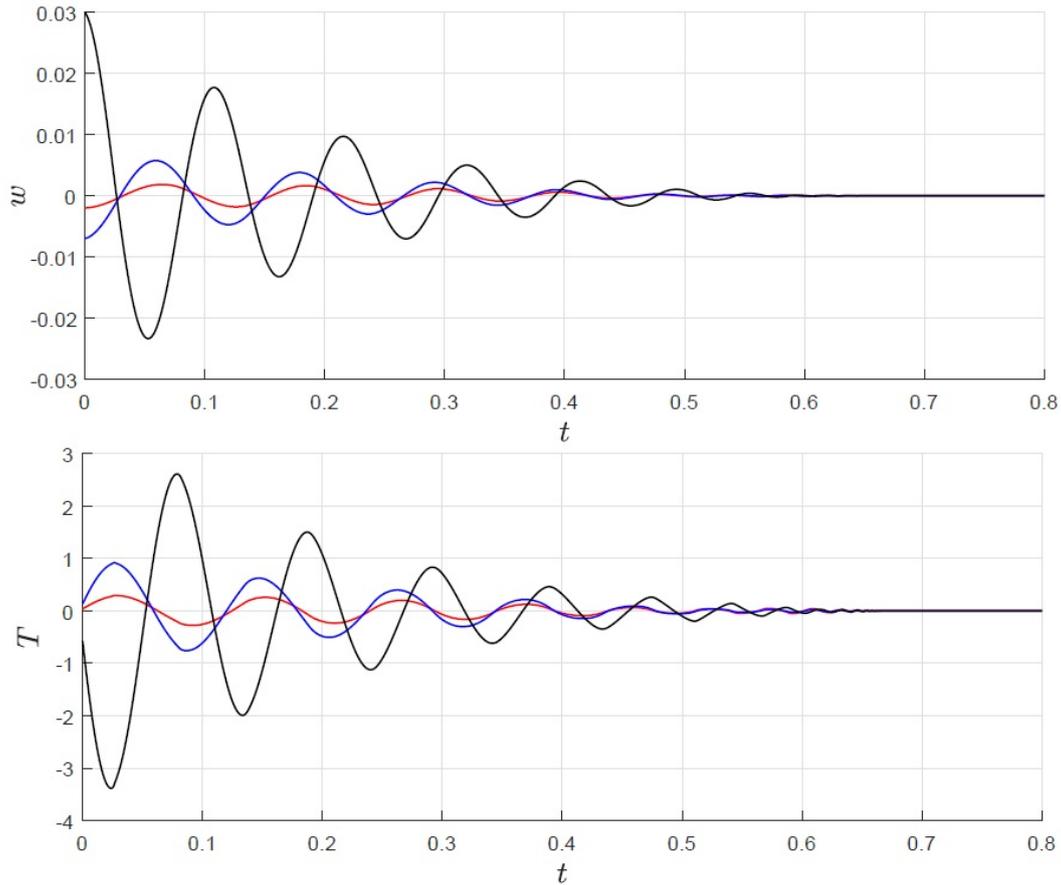


Figura 3.17: Desempenho do STA multivariável apresentada em [22] , para $w(0) = [-0,002 \ -0,007 \ 0,03]^T$: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 ; (b) componentes do vetor de torque (●) T_1 , (●) T_2 , (●) T_3 .

Em ambos os casos as estratégias de controle garantem convergência em tempo finito para zero, porém o esquema baseado no teorema 3.1 estabiliza em aproximadamente 0,3 segundos, enquanto o STA de [22] estabiliza em aproximadamente 0,6 segundos. Considerando isso, o fato de que os ganhos k_i , aqui obtidos, foram menores do que k_{iv} se traduz em um esforço de controle significativamente menor do que o apresentado em [22].

Esse resultado demonstra que a utilização da matriz simetrizante escolhida realmente beneficia o esquema STA proposto, atribuído ao fato de reduzir a relação entre os limitantes máximos e mínimos dos autovalores para próximo de 1, sendo, no pior caso, $\frac{\lambda_M}{\lambda_m} = 1,1708$. Sem considerar a matriz simetrizante S_p , a matriz de entrada $J = J_n + \kappa D$, com κ no intervalo $[-3, 3]$, apresenta o pior condicionamento com $\kappa = -3$, onde $\frac{\lambda_M}{\lambda_m} = 1,3975$.

Capítulo 4

Conclusão e Trabalhos Futuros

Conclusão

A Dissertação apresentada abordou o tema de controle por estrutura variável, mais especificamente controle por modos deslizantes. Nesse contexto, foi considerado uma nova extensão multivariável para o algoritmo *Super-Twisting* para sistemas com matriz de entrada incerta sem exigência de simetria.

Fazendo uso de uma matriz simetrizante no controle para tentar de simetrizar a matriz de entrada, a nova matriz de entrada do sistema pôde ser dividida em uma parte simétrica e uma parte antissimétrica residual. Pelo desenvolvimento do teorema 3.1, foi mostrado que, apenas utilizando um limitante inferior e superior dos autovalores da parte simétrica da matriz de entrada e um limitante para a norma da matriz residual, o esquema STA proposto é capaz de garantir estabilidade global em um tempo finito para classe de sistemas incertos com matriz de entrada mais geral do que anteriormente abordado na literatura [21].

Os resultados teóricos foram avaliados por meio de simulações numéricas, mostrando que a região de validade das condições obtidas no Teorema 3.1, podem eventualmente se mostrar conservadoras. Entretanto, para regiões fora do limite de validade do teorema, foi observado que o controle proposto ainda pode estabilizar o sistema para valores maiores de incerteza. Além disso, as condições de estabilização foram desenvolvidas de maneira a terem formato mais simples e direto do que as desenvolvidas para outros esquemas STA propostos na literatura [21].

Os resultados de simulação mostraram que STA MIMO desenvolvido pode se mostrar frágil ao lidar com incertezas na matriz de entrada. Todavia, o estudo de caso de um satélite apresentou bons resultados, com convergência mais rápida e com um esforço de controle menor do que o obtido em [22].

Publicações

O desenvolvimento do novo esquema STA, apresentado no Capítulo 3, e o Teorema 3.1, que enuncia o principal resultado dessa dissertação, deram base para a publicação do artigo apresentado no *XXII Congresso Brasileiro de Automática 2018 - CBA 2018*[23].

Trabalhos Futuros

São propostos os seguintes tópicos de pesquisa para continuação dos trabalhos apresentados nesta dissertação de mestrado:

- **Aplicação Prática:**

Uma aplicação prática do controle em uma planta real com todas as suas incertezas, imperfeições de modelagem, não-linearidades e ruídos poderia confirmar seu bom desempenho, verificado apenas por meio de simulação.

- **Desenvolvimento de algoritmos robustos**

Considerando a fragilidade com respeito a incertezas/perturbações elevadas na matriz de entrada, o desenvolvimento de um algoritmo mais robusto se torna interessante para ampliar a viabilidade da técnica desenvolvida.

- **Estudo aprofundado das matrizes $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$**

A forma do fracionamento dos majorantes para garantir a positividade de $\bar{\Omega}$ e $\bar{\Psi}$, do teorema 3.1, não é única. Assim, um estudo de variação dessas frações torna-se interessante para a otimização das condições dos ganhos de controle que estabilizam o sistema.

- **Desenvolvimento de uma Análise Compacta** Um estudo a ser considerado é o desenvolvimento de uma análise mais compacta e elegante, com o objetivo de sistematizar a metodologia de otimização dos parâmetros do sistema.

Referências Bibliográficas

- [1] SHTESEL, Y., EDWARDS, C., FRIDMAN, L., et al. *Sliding Mode Control and Observation*. Springer, 2014.
- [2] EDWARDS, C., SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control - Theory and Applications*. Taylor and Francis, 1998.
- [3] HUNG, J. Y., GAO, W., HUNG, J. C. “Variable structure control: a survey”, *IEEE Trans. on Ind. Electronics*, v. 40, n. 1, pp. 2–22, 1993.
- [4] ITKIS, U. *Control Systems of Variable Structure*. John Wiley, 1976.
- [5] UTKIN, V. I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. MIR, 1978.
- [6] EMEL'YANOV, S. V. *Theory of variable structure systems*. Nauka, 1970.
- [7] FILIPPOV, A. F. “Differential equations with discontinuous right-hand side”, *American Math. Soc. Translations*, v. 42, n. 2, pp. 199–231, 1964.
- [8] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [9] LEVANT, A. “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control”, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, v. 58, n. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [10] FRIDMAN, L., LEVANT, A. “Higher Order Sliding Modes”. In: Perruquetti, W., Barbot, J. (Eds.), *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker Inc., pp. 53–101, 2002.
- [11] LEVANT, A. “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control”, *Int. J. Contr.*, v. 76, n. 9, pp. 924–941, 2003.
- [12] EMEL'YANOV, S., KOROVIN, S., NERSISIAN, A., et al. “Output feedback stabilization of uncertain plants: a variable structure systems approach”, *Int. J. Contr.*, v. 55, n. 1, pp. 61–82, 1992.

- [13] KACHROO, P., TOMIZUKA, M. “Chattering reduction and error convergence in the sliding-mode control of a class of nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 7, pp. 1063–1068, July 1996. ISSN: 0018-9286. doi: 10.1109/9.508917.
- [14] HSU, L. “Smooth Sliding Control of uncertain systems based on a prediction error”, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, v. 7, pp. 353–372, 1997.
- [15] SLOTINE, J., LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [16] LEVANT, A. “Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique”, *Automatica*, v. 34, n. 3, pp. 379–384, 1998.
- [17] LEVANT, A. “Homogeneity approach to high-order sliding mode design”, *Automatica*, v. 41, n. 5, pp. 823–830, 2005.
- [18] LEVANT, A. “Introduction to high-order sliding modes”, *School of Mathematical Sciences, Israel*, v. 58, n. 6, pp. 1–55, 2002.
- [19] MORENO, J. A., OSÓRIO, M. “A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers”. In: *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pp. 2856–2861, Cancun, Mexico, 2008.
- [20] MORENO, J. A., OSÓRIO, M. “Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 4, pp. 1035–1040, 2012.
- [21] NAGESH, I., EDWARDS, C. “A multivariable super-twisting sliding mode approach”, *Automatica*, v. 50, n. 3, pp. 984–988, 2014.
- [22] VIDAL, P. V. N. M., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Multivariable Super-Twisting Algorithm for a Class of Systems with Uncertain Input Matrix”. In: *Proc. American Contr. Conf.*, pp. 7201–7206, Boston, 2016.
- [23] KEIJOCK, T. A., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Algoritmo Super-Twisting Multivariável sem simetria da matriz de entrada incerta”. João Pessoa, Paraíba, Brasil, setembro, 2018. Disponível em: <<https://ss14799.websiteseuro.com/swge5/PROCEEDINGS/PDF/CBA2018-1277.pdf>>.
- [24] ISIDORI, A. *Nonlinear Control System*. Springer, 1995.
- [25] KHALIL, H. *Nonlinear Systems*. Upsaddle River, New Jersey, Prentice-Hall, 2002.
- [26] KAILATH, T. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.

- [27] UTKIN, V. I. “Survey Paper: Variable Structure Systems with Sliding Modes”, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 22, n. 2, pp. 212–222, 1977.
- [28] GUTMANN, S., LEITMANN, G. “Stabilizing control for linear systems with bounded parameters and input uncertainty”. In: *IFIC conference on Optimization Techniques*, pp. 8–14, Nice, France, 1975.
- [29] GUTMANN, S. “Uncertain dynamical systems, a Lyapunov min-max approach”, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 24, n. 3, pp. 437–443, 1979.
- [30] SHITESH, Y., EDWARDS, C., FRIDMAN, L., et al. *Sliding Mode Control and Observation*. Springer, New York, 2014.
- [31] SLOTTINE, J. J., SASTRY, S. S. “Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators†”, *International Journal of Control*, v. 38, n. 2, pp. 465–492, 1983. doi: 10.1080/00207178308933088. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207178308933088>>.
- [32] YOUNG, K. D., UTKIN, V. I., ÖZGÜNER, . “A control engineer’s guide to sliding mode control”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 7, n. 3, pp. 328–342, 1999.
- [33] LEVANT, A. “Universal single-input-single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 9, pp. 1447–1451, Sep 2001. ISSN: 0018-9286. doi: 10.1109/9.948475.
- [34] FRIDMAN, L., LEVANT, A. “Higher Order Sliding Modes”. In: Perruquetti, W., Barbot, J. (Eds.), *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker Inc., pp. 53–101, 2002.
- [35] LEVANT, A. “Controlling output variables via higher order sliding modes”. In: *1999 European Control Conference (ECC)*, pp. 3798–3803, Aug 1999.
- [36] LEVANT, A. “Higher order sliding modes and arbitrary-order exact robust differentiation”. In: *2001 European Control Conference (ECC)*, pp. 996–1001, Sept 2001.
- [37] BARTOLINI, G., PISANO, A., PUNTA, E. AND USAI, E. “A survey of applications of second order sliding mode control to mechanical systems”, *International Journal of Control*, v. 76(9-10), n. 10, pp. 875–892, 2003.

- [38] KUNUSCH, C., PULESTON, P. F., MAYOSKY, M. A., et al. “Sliding Mode Strategy for PEM Fuel Cells Stacks Breathing Control Using a Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 17, n. 1, pp. 167–174, Janeiro 2009.
- [39] DERAFA, L., BENALLEGUE, A., FRIDMAN, L. “Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 349, n. 2, pp. 685–699, 2012.
- [40] EVANGELISTA, C., PULESTON, P., VALENCIAGA, F., et al. “Lyapunov-Designed Super-Twisting Sliding Mode Control for Wind Energy Conversion Optimization”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 60, n. 2, pp. 538–545, Fevereiro 2013.
- [41] SHTESSEL, Y., J.A.MORENO, PLESTAN, F. “Super-twisting adaptative sliding mode control: A Lyapunov design”. In: *IEEE Conference on Decision and Control CDC’10*.
- [42] SHTESSEL, Y., TALEB, M., PLESTAN, F. “A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller: Methodology and application”, *Automatica*, v. 48, pp. 759–769, 05 2012. doi: 10.1016/j.automatica.2012.02.024.
- [43] GONZALEZ, T., MORENO, J. A., FRIDMAN, L. “Variable Gain Super-Twisting Sliding Mode Control”, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 57, n. 8, pp. 2100–2105, 2012.
- [44] DEIMLING, K. *Multivalued Differential Equations*. De Gruyter Series in Non-linear Analysis and Applications. De Gruyter, 1992.
- [45] HSU, L., TEIXEIRA, M. C. M., COSTA, R. R., et al. “Necessary and sufficient condition for generalized passivity, passification and application to multivariable adaptive systems”. In: *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, p. 3433–3438, Milan, Italy, 2011.
- [46] HSU, L., LIZARRALDE, F. “Robust adaptive visual tracking control: Analysis and experiments.” In: *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 874 – 879, Anchorage, Alaska, USA, 2000.
- [47] ZERGEROGLU, E., DAWSON, D., QUEIROZ, M., et al. “Vision-based nonlinear tracking controllers with uncertain robot-camera parameters”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 6, n. 3, pp. 322–337, Sept 2001.

- [48] TOMASEVICH, I. Y. Y. *Controlador Adaptativo Binário de Sistemas Multivariáveis*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro UFRJ, COPPE, PEE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2012.
- [49] SIDI, M. J. *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*. Cambridge University Press, 1997.
- [50] GOEREE, B., FASSE, E. “Sliding mode attitude control of a small satellite for ground tracking maneuvers”. In: *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, v. 2, pp. 1134–1138, 2000.

Apêndice A

Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior

A.1 Análise das Trajetórias do Controlador Super Twisting

Considera-se o seguinte sistema dinâmico de grau relativo unitário:

$$\dot{s} = u + \tilde{f}(t) \quad (\text{A.1})$$

onde $s \in \mathbb{R}$ é a variável de deslizamento, $u \in \mathbb{R}$ é a lei de controle, e $\tilde{f}(t)$ é uma função incerta suficientemente suave, cuja derivada temporal obedece à condição:

$$\left| \dot{\tilde{f}}(t) \right| \leq C \quad (\text{A.2})$$

Sendo assim, o controlador Super Twisting é definido como:

$$\begin{cases} u = -k_1 |s|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(s) + k_2 z \\ \dot{z} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(s) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Teorema A.1. *Seja o sistema (A.1). Considere que a condição (A.2) seja satisfeita. Se $k_2 > 2C$ e se k_1 for suficientemente grande, então o controlador STC (A.3) garante, para quaisquer condições iniciais, uma convergência em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $s = \dot{s} = 0$.*

Demonstração. ver [16]. □

De modo a analisar as trajetórias do controlador (A.3) com respeito ao plano de fase $(s-\dot{s})$, deriva-se a equação (A.1). Sabendo que $\frac{d}{dt}|s| = \dot{s} \operatorname{sgn}(s)$, tem-se o seguinte sistema dinâmico:

$$\ddot{s} = \dot{f}(t) - \frac{k_1}{2} \frac{\dot{s}}{|s|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_2}{2} \text{sgn}(s) \quad (\text{A.4})$$

Considera-se que, em um instante inicial t_0 , o sistema possua as condições iniciais dadas por $s(t_0) = 0$ e $\dot{s}(t_0) = \dot{s}_0 > 0$. Nessas condições, como a derivada \dot{s}_0 é positiva, a variável de deslizamento s tende a crescer, levando a trajetória no espaço de estado do sistema para primeiro quadrante do plano de fase, como mostra a figura A.1.

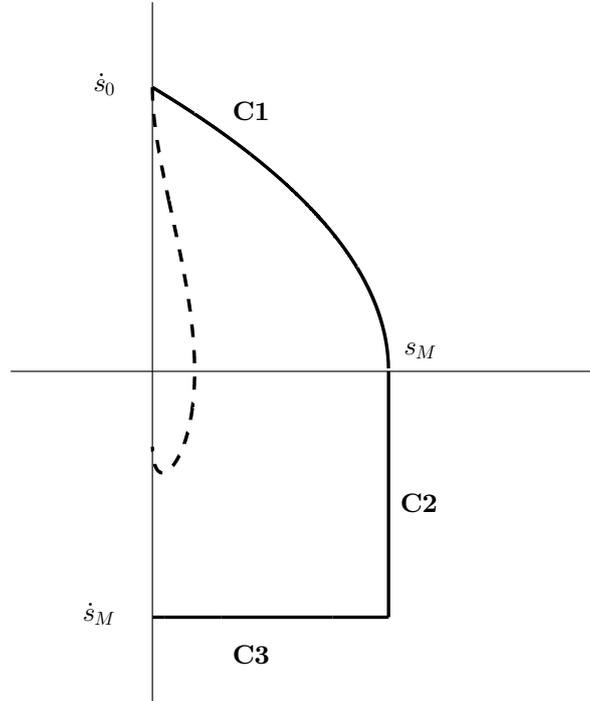


Figura A.1: (---) Trajetória no espaço de estados do controlador *Super-Twisting*. (—) Curvas majorantes: C1, C2 e C3.

No primeiro quadrante, uma vez que a condição $k_2 > 2C$ seja satisfeita e sabendo que s e \dot{s} são positivos, pode-se concluir pela equação (A.4) que \ddot{s} será negativo. Desta forma, o módulo de \dot{s} irá decrescer, levando o sistema ao quarto quadrante. Ao mesmo tempo, o módulo de s crescerá até que alcance seu valor máximo quando $\dot{s} = 0$. Uma curva majorante para a trajetória real do sistema no primeiro quadrante pode ser obtida considerando a inequação:

$$\ddot{s} \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right)$$

Multiplicando por \dot{s} e reescrevendo:

$$\dot{s}\ddot{s} \leq -\left(\frac{k_2}{2} - C\right)\dot{s} \quad \Rightarrow \quad \dot{s}\frac{d\dot{s}}{dt} \leq -\left(\frac{k_2}{2} - C\right)\frac{ds}{dt}$$

Integrando de t_0 até t :

$$\frac{\dot{s}^2(t)}{2} - \frac{\dot{s}_0^2}{2} \leq -\left(\frac{k_2}{2} - C\right)s(t)$$

Sabendo que o valor máximo de $s(t)$ ocorre quando $\dot{s}(t) = 0$, define-se:

$$s_M = \frac{\dot{s}_0^2}{(k_2 - 2C)} \geq s(t)$$

Desta forma, uma curva majorante C1 para a trajetória real do sistema no primeiro quadrante pode ser definida como:

$$\dot{s}^2 = (k_2 - 2C)(s_M - s)$$

Ao passar ao quarto quadrante, uma vez que a derivada $\dot{s} < 0$, a variável de deslizamento s irá decrescer até que se torne nula. Além disso, observando a equação (A.4), nota-se que a derivada \ddot{s} inicia o quarto quadrante com o valor negativo igual a $-\left(\frac{k_2}{2} - \dot{f}(t)\right)$, o que fará \dot{s} decrescer até que \ddot{s} se iguale a zero, situação em que \dot{s} terá o seu valor máximo.

De modo a facilitar a análise no quarto quadrante, para $\dot{s} < 0$ e $s > 0$, a equação (A.4) pode ser reescrita como:

$$\ddot{s} = \frac{k_1}{2} \frac{|\dot{s}|}{s^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{k_2}{2} - \dot{f}(t)\right)$$

Igualando \ddot{s} a zero:

$$|\dot{s}| = \frac{1}{k_1} \left(k_2 - 2\dot{f}(t)\right) s^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{k_1} (k_2 + 2C) s_M^{\frac{1}{2}}$$

Pode-se então definir um limitante inferior \dot{s}_M para \dot{s} no quarto quadrante, sendo este limitante dado por:

$$\dot{s}_M = -\frac{1}{k_1} (k_2 + 2C) s_M^{\frac{1}{2}}$$

Portanto, uma curva majorante que envolve a trajetória real do sistema no primeiro e quarto quadrantes pode ser definida a partir dos seguintes segmentos:

$$\begin{aligned} \text{Segmento C1: } & \dot{s}^2 = (k_2 - 2C)(s_M - s), & \text{para } \dot{s} > 0 \\ \text{Segmento C2: } & s = s_M, & \text{para } \dot{s}_M < \dot{s} < 0 \\ \text{Segmento C3: } & \dot{s} = \dot{s}_M, & \text{para } 0 < s < s_M \end{aligned}$$

Um exemplo de trajetória de estados de um controlador Super Twisting, com suas respectivas curvas majorantes é ilustrado na figura A.1. Note que a trajetória

real é envolvida pelas curvas C1, C2 e C3, que funcionam como limitantes para essa trajetória.

Uma vez que a análise para a trajetória no terceiro e segundo quadrantes é análoga à feita anteriormente, uma condição suficiente para que haja convergência do algoritmo é que $|\dot{s}_M/\dot{s}_0| < 1$. Essa condição implica que:

$$\left| \frac{\dot{s}_M}{\dot{s}_0} \right| = \frac{(k_2 + 2C)}{k_1 \sqrt{(k_2 - 2C)}} < 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 > \frac{(k_2 + 2C)}{\sqrt{(k_2 - 2C)}}$$

Analisando no domínio do tempo, considera-se novamente a equação (A.4). A partir dessa equação e da condição (A.2), considerando que a análise é feita no primeiro e quarto quadrantes ($s > 0$), chega-se à seguinte inequação:

$$\ddot{s} \leq C - \frac{k_1}{2} \frac{\dot{s}}{s^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_2}{2}$$

Reescrevendo:

$$\frac{d\dot{s}}{dt} + k_1 \frac{1}{2s^{\frac{1}{2}}} \frac{ds}{dt} \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right)$$

Integrando do instante inicial t_0 até o instante t_1 , em que a trajetória volta a cruzar o eixo \dot{s} :

$$\dot{s}(t_1) - \dot{s}_0 \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right) T_0$$

onde $T_0 = t_1 - t_0$ é o tempo que a trajetória leva para percorrer o primeiro e quarto quadrantes. Sabendo que $\dot{s}_M \leq \dot{s}(t_1)$, tem-se:

$$\dot{s}_M - \dot{s}_0 \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right) T_0$$

Considerando que $|\dot{s}_M| < |\dot{s}_0|$, ou seja, que $-\dot{s}_0 < \dot{s}_M$, tem-se:

$$-2\dot{s}_0 \leq - \left(\frac{k_2}{2} - C \right) T_0$$

Reescrevendo em termos de T_0 :

$$T_0 \leq \frac{4\dot{s}_0}{(k_2 - 2C)}$$

O tempo total de convergência do STC é então dado pela soma dos tempos de cada meia volta sobre a origem e é limitado pela inequação:

$$T \leq \frac{4}{(k_2 - 2C)} \sum_{i=0}^{\infty} |\dot{s}_i|$$

onde os termos \dot{s}_i correspondem às intersecções da trajetória real com o eixo \dot{s} . Considerando a condição $|\dot{s}_M/\dot{s}_0| \leq K < 1$, onde K é uma constante positiva, conclui-se que esses termos decrescem em módulo. Sendo assim, a soma desses termos é limitada pela soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, cuja razão é menor do que 1. Sabe-se que tal soma possui um valor finito, o que implica que o tempo de convergência T também deve ser finito.

A.2 Prova dos teoremas do Controlador Super Twisting

A.2.1 Prova do teorema 2.2

Como 2.43 é uma equação diferencial descontínua, suas soluções são interpretadas como as de uma inclusão diferencial $\dot{x} \in f(x)$ obtidas quando $\text{sgn}(z)$ assume o intervalo $[-1, 1]$ para $z = 0$. Como $0 \in f(0)$, então consequentemente $x = 0$ é um ponto de equilíbrio. A função de Lyapunov proposta pode ser escrita em sua forma quadrática $V(x) = \zeta^T P \zeta$, onde

$$\zeta = [|x_1|^{1/2} \text{sgn}(x_1), x_2],$$

$$P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (4k_3 + k_1^2) & -k_1 \\ -k_1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que $V(x)$ é contínua mas não diferenciável em $x_1 = 0$. É positiva definida e radialmente não limitada se $k_3 > 0$, i.e.

$$\lambda_{\min}\{P\}\|\zeta\|_2^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}\{P\}\|\zeta\|_2^2, \quad (\text{A.5})$$

onde $\|\zeta\|_2^2 = |x_1| + x_2^2$ é a norma euclidiana de ζ . Sua derivada temporal em relação a solução do sistema é

$$\dot{V} = -\frac{1}{|x_1|^{1/2}} \zeta^T Q \zeta \leq -\frac{1}{|x_1|^{1/2}} \lambda_{\min}\{Q\}\|\zeta\|_2^2, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$Q = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} (2k_3 + k_1^2) & -k_1 \\ -k_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

\dot{V} is negativa definida se $Q > 0$, que acontece se $k_1, k_3 > 0$. Usando A.5 e A.6 e o fato de que

$$|x_1|^{1/2} \leq \|\zeta\|_2 \leq \frac{V^{1/2}(x)}{\lambda_{\min}^{1/2}\{P\}},$$

então pode-se concluir que

$$\dot{V} \leq -\gamma V^{1/2}(x),$$

onde

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}^{1/2}\{P\}\lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\{P\}}.$$

Como a solução da equação diferencial

$$\dot{v} = -\gamma v^{1/2}, \quad v(0) = v_0 \geq 0$$

é dada por

$$v(t) = \left(v_0^{1/2} - \frac{\gamma}{2}t \right)^2, \quad (\text{A.7})$$

pelo princípio de comparação [25], tem-se que $V(x) \leq v(t)$ quando $V(x_0) \leq v_0$. Por A.7 obtém-se que $V(x(t))$, e conseqüentemente $x(t)$, convergem para zero em tempo finito e que alcança esse valor em no máximo $T = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\gamma}$ unidades de tempo.

A.2.2 Prova do teorema 2.3

Usando 2.44 como a função candidata de Lyapunov para o sistema com perturbação 2.43, a derivada temporal em relação a solução é:

$$\dot{V} = -\frac{1}{|x_1|^{1/2}}\zeta^T Q \zeta + \frac{\varrho_1}{|x_1|^{1/2}}q_1^T \zeta + \varrho_2 q_2^T \zeta,$$

onde

$$q_1^T = \left[\left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \right) \quad -\frac{k_1}{2} \right], \quad q_2^T = \left[-k_1 \quad 2 \right].$$

Usando os limitantes da perturbação 2.45, é possível mostrar que:

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{|x_1|^{1/2}}\zeta^T \tilde{Q} \zeta,$$

onde

$$\tilde{Q} = \frac{k_1}{2} \begin{bmatrix} 2k_3 + k_1^2 - \left(\frac{4k_3}{k_1} + k_1 \right) \delta_1 - \delta_2 & \star \\ - \left(k_1 + 2\delta_1 + \frac{2\delta_2}{k_1} \right) & 1 \end{bmatrix}.$$

\dot{V} é negativa definida se $\tilde{Q} > 0$, o que ocorre quando os ganhos são como em 2.46. Pelos mesmos argumentos utilizados no caso sem a perturbação, o estado também converge para zero em tempo finito e no máximo em $\tilde{T} = \frac{2V^{1/2}(x_0)}{\tilde{\gamma}}$ unidades de tempo onde $\tilde{\gamma} = \frac{\lambda_{\min}^{1/2}\{P\}\lambda_{\min}\{\tilde{Q}\}}{\lambda_{\max}\{P\}}$.

Apêndice B

Proposições e Propriedades

B.1 Obtenção de \dot{V}

Esta seção apresenta os detalhes dos passos matemáticos para obtenção da derivada da função de Lyapunov definida em 3.6. Observando algumas propriedades de derivada vetorial, descritas no apêndice B, seção B.4, a derivada de 3.6, pode ser calculada como:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right) \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|} + (2k_4 + k_2^2\lambda_M)\sigma^T \dot{\sigma} \\ &\quad + 2z^T K_{ps} \dot{z} + \frac{3}{2} \frac{k_1 k_2 \lambda_M \sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad - k_2(z^T K_{ps} \dot{\sigma} + \sigma^T K_{ps} \dot{z}) \\ &\quad - k_1 \frac{[\dot{z}^T K_{ps} \sigma + z^T K_{ps} \dot{\sigma}]}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T \dot{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Para que \dot{V} dependa apenas das variáveis z e σ , assim como $V(z, \sigma)$, as equações de $\dot{\sigma}$ e \dot{z} obtidas em (3.5), descritas por:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= (K_{ps} + \mu K_{pa}) \left[-k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + z \right] + (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma(\sigma, t), \\ \dot{z} &= \left[-k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma \right] + \phi(t),\end{aligned}$$

são utilizadas para substituição em \dot{V} de (B.1).

Identifica-se na equação (B.1), a existência de uma soma com nove termos. Para facilitar a visualização da substituição mencionada, serão apresentados separadamente o resultado da substituição de cada termo dessa soma.

Nos cálculos a seguir alguns termos são marcados por caixas pois serão cancelados por soma e/ou subtração, com outros termos, também marcados por caixas, que

surgem na substituição de $\dot{\sigma}$ e \dot{z} em \dot{V} .

Substituição de \dot{V} analisando os nove termos separadamente

Primeiro termo de \dot{V}

O primeiro termo da soma de \dot{V} , (B.1) é substituído da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right) \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|} &= - \frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} \left(k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right) \sigma^T K_{ps} \sigma \boxed{\frac{k_1 k_3 \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}}} \\
&\quad - \frac{k_2}{\|\sigma\|} \left(k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right) \sigma^T K_{ps} \sigma \boxed{\frac{k_2 k_3 \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|}} \\
&\quad + \boxed{\frac{2k_3 \sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) z}{\|\sigma\|}} + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \frac{\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) z}{\|\sigma\|} \\
&\quad + \frac{\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma}{\|\sigma\|} \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M\right).
\end{aligned} \tag{B.2}$$

Segundo termo de \dot{V}

Segundo termo da soma de \dot{V} , (B.1),

$$\begin{aligned}
(2k_4 + k_2^2 \lambda_M) \sigma^T \dot{\sigma} &= - \frac{k_1 k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \boxed{\frac{k_1 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}} \\
&\quad - k_2^3 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma - k_2 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma \boxed{-k_2 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma} \\
&\quad + k_2^2 \lambda_M \sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) z \boxed{+2k_4 \sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) z} \\
&\quad + (2k_4 + k_2^2 \lambda_M) \sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa}) \gamma.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Terceiro termo de \dot{V}

Terceiro termo da soma de \dot{V} , (B.1),

$$\begin{aligned}
2z^T (K_{ps}) \dot{z} &= 2z^T (K_{ps}) \left[-k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma + \phi(t) \right] \\
&= \boxed{-\frac{2k_3 z^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|}} \boxed{-2k_4 z^T K_{ps} \sigma} + 2z^T K_{ps} \phi(t).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Quarto termo de \dot{V}

Quarto termo da soma de \dot{V} , (B.1),

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}k_1k_2\lambda_M\frac{\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} &= -\frac{3}{2}k_1^2k_2\lambda_M\frac{\sigma^TK_{ps}\sigma}{\|\sigma\|} - \frac{3}{2}k_1k_2^2\lambda_M\frac{\sigma^TK_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \frac{3}{2}k_1k_2\lambda_M\frac{\sigma^T(K_{ps} + \mu K_{pa})z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \frac{3}{2}k_1k_2\lambda_M\frac{\sigma^T(K_{ps} + \mu K_{pa})\gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Quinto termo de \dot{V}

Quinto termo da soma de \dot{V} , (B.1),

$$\begin{aligned}
-k_2z^TK_{ps}\dot{\sigma} &= +k_1k_2\frac{z^TK_{ps}(K_{ps} + \mu K_{pa})\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2z^TK_{ps}(K_{ps} + \mu K_{pa})\sigma \\
&- k_2z^TK_{ps}(K_{ps} + \mu K_{pa})z - k_2z^TK_{ps}(K_{ps} + \mu K_{pa})\gamma.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Sexto termo de \dot{V}

Sexto termo da soma de \dot{V} , (B.1),

$$\begin{aligned}
-k_2\sigma^TK_{ps}\dot{z} &= -k_2\sigma^TK_{ps}\left[-k_3\frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4\sigma + \phi(t)\right] \\
&= \boxed{+\frac{k_2k_3\sigma^TK_{ps}\sigma}{\|\sigma\|}} \quad \boxed{+k_2k_4\sigma^TK_{ps}\sigma} - k_2\sigma^TK_{ps}\phi(t).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Sétimo termo de \dot{V}

Sétimo termo da soma de \dot{V} , (B.1),

$$\begin{aligned}
-\frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}z^TK_{ps}\dot{\sigma} &= +\frac{k_1^2z^TK_{ps}(K_{ps} + \mu K_{pa})\sigma}{\|\sigma\|} + \frac{k_1k_2z^TK_{ps}(K_{ps} + \mu K_{pa})\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
&- \frac{k_1z^TK_{ps}(K_{ps} + \mu K_{pa})z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1z^TK_{ps}(K_{ps} + \mu K_{pa})\gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Oitavo termo de \dot{V}

Oitavo termo da soma de \dot{V} , (B.1),

$$\begin{aligned}
-\frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\sigma^TK_{ps}\dot{z} &= -\frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\sigma^TK_{ps}\left[-k_3\frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4\sigma + \phi(t)\right] \\
&= \boxed{+\frac{k_1k_3\sigma^TK_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}}} \quad \boxed{+\frac{k_1k_4\sigma^TK_{ps}\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}} - \frac{k_1\sigma^TK_{ps}\phi}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Nono termo de \dot{V}

Nono termo da soma de \dot{V} , (B.1),

$$\begin{aligned}
+\frac{k_1}{2} \frac{[z^T(K_{ps})\sigma](\sigma^T \dot{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} &= -\frac{k_1^2}{2} \frac{(z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T K_{ps} \sigma)}{\|\sigma\|^3} - \frac{k_1 k_2}{2} \frac{(z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T K_{ps} \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
&+ \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_{ps} \sigma)[\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa})z]}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
&+ \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_{ps} \sigma)[\sigma^T (K_{ps} + \mu K_{pa})\gamma]}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Note que somente a parte simétrica de $\boxed{+\frac{2k_3\sigma^T(K_{ps} + \mu K_{pa})z}{\|\sigma\|}}$, da equação

(B.2), é cancelado pelo termo $\boxed{-\frac{2k_3 z^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|}}$ da equação (B.4), e que o mesmo ocorre

para o termo $\boxed{+2k_4\sigma^T(K_{ps} + \mu K_{pa})z}$, da equação (B.3), com o termo $\boxed{-2k_4 z^T K_{ps} \sigma}$ da equação(B.4). Além disso, os outros termos marcados por caixas são cancelados totalmente entre si.

Ao considerar a substituição dos termos referentes as equações (B.2)-(B.10), e os devidos cancelamentos, \dot{V} pode ser escrita como em 3.7

B.2 Majorante de \dot{V}_s

O majorante para a função \dot{V}_s é apresentado em [22]. Assim, essa seção somente pretende deixar o resultado mais abrangente e auto-contido possível.

Considerando os limitantes superiores da Hipótese **(A3)** do teorema 3.1 para as perturbações $\|\gamma(t, \sigma)\| \leq \delta_1 \|\sigma\|$ e $\|\phi(t)\| \leq \delta_2$, os termos referentes a γ e σ podem ser majorados:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_s \leq & -k_1 \left(k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2} \right) \frac{\sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} - k_2 \left(k_3 + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2} \right) \frac{\sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|} + \frac{k_1^2 \lambda_M}{2} \frac{\sigma^T K_{ps} z}{\|\sigma\|} \\
& - \frac{k_1 k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2^3 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma - k_2 k_4 \sigma^T K_{ps} \sigma \\
& + k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_{ps} z - \frac{3k_1^2 k_2 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma}{2 \|\sigma\|} - \frac{3k_1 k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_{ps} \sigma}{2 \|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M \sigma^T K_{ps} z}{2 \|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1 k_2 z^T K_{ps}^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2 z^T K_{ps}^2 \sigma - k_2 z^T K_{ps}^2 z \\
& + \frac{k_1^2 z^T K_{ps}^2 \sigma}{\|\sigma\|} + \frac{k_1 k_2 z^T K_{ps}^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1 z^T K_{ps}^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1^2 (z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T K_{ps} \sigma)}{2 \|\sigma\|^3} \\
& - \frac{k_1 k_2 (z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T K_{ps} \sigma)}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \frac{k_1 (z^T K_{ps} \sigma)(\sigma^T K_{ps} z)}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \lambda_M \delta_1 \|\sigma\| + 2\lambda_M \delta_2 \|z\| \\
& + (2k_4 + k_2^2 \lambda_M) \|\sigma\|^2 \lambda_M \delta_1 + k_2 \lambda_M \delta_2 \|\sigma\| \\
& + \frac{3k_1 k_2 \lambda_M^2 \delta_1 \|\sigma\|^2}{2 \|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1 \lambda_M \delta_2 \|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{k_1 \lambda_M^2 \delta_1 \|z\| \|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2 \lambda_M^2 \delta_1 \|z\| \|\sigma\| + \frac{k_1 \lambda_M^2 \delta_1 \|z\| \|\sigma\|}{2 \|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Em seguida é considera a proposição B.1, que é detalhada no apêndice (B.3), para majorar os termos referentes a K_{ps} :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_s \leq & -k_1\lambda_m \left(k_3 + \frac{k_1^2\lambda_M}{2} \right) \frac{\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2\lambda_m \left(k_3 + \frac{k_1^2\lambda_M}{2} \right) \|\sigma\| + \frac{k_1^2\lambda_M^2}{2} \frac{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}\|z\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{k_1k_2^2\lambda_m\lambda_M\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1k_4\lambda_m\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2^3\lambda_m\lambda_M\|\sigma\|^2 - k_2k_4\lambda_m\|\sigma\|^2 \\
& + k_2^2\lambda_M^2\|\sigma\|\|z\| - \frac{3k_1^2k_2\lambda_M\lambda_m\|\sigma\|}{2} - \frac{3k_1k_2^2\lambda_M}{2} \frac{\lambda_m\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{3k_1k_2\lambda_M^2}{2} \frac{\|\sigma\|\|z\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1k_2\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2^2\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\| - k_2\lambda_m^2\|z\|^2 \\
& + \frac{k_1^2\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1k_2\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1\lambda_m^2\|z\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1^2}{2} \frac{\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{k_1k_2}{2} \frac{\lambda_M^2\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{\lambda_m^2\|z\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2}\lambda_M \right) \lambda_M\delta_1\|\sigma\| + 2\lambda_M\delta_2\|z\| \\
& + (2k_4 + k_2^2\lambda_M)\|\sigma\|^2\lambda_M\delta_1 + k_2\lambda_M\delta_2\|\sigma\| \\
& + \frac{3k_1k_2\lambda_M^2}{2} \frac{\delta_1\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1\lambda_M\delta_2\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{k_1\lambda_M^2\delta_1\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2\lambda_M^2\delta_1\|z\|\|\sigma\| + \frac{k_1}{2} \frac{\lambda_M^2\delta_1\|z\|\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Após considerar os majorantes dos termos γ , σ , e K_{ps} , a equação de \dot{V}_s , (B.12) apresenta alguns termos que podem ser agrupados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_s \leq & -k_1\lambda_m \left(k_3 + \frac{k_1^2\lambda_M}{2} \right) \frac{\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \lambda_m (k_2k_3 + 2\lambda_M k_1^2 k_2) \|\sigma\| + 2k_1^2\lambda_M^2 \frac{\|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \lambda_m \left(\frac{5k_1k_2^2\lambda_M}{2} + k_1k_4 \right) \frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \lambda_m (k_2k_4 + k_2^3\lambda_M) \|\sigma\|^2 \\
& + 2k_2^2\lambda_M^2 \|\sigma\| \|z\| + 4k_1k_2\lambda_M^2 \frac{\|\sigma\| \|z\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2\lambda_m^2 \|z\|^2 \\
& - \frac{k_1\lambda_m^2}{2} \frac{\|z\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \lambda_M \left(2k_3 + \frac{k_1^2\lambda_M}{2} \right) \delta_1 \|\sigma\| \\
& + \lambda_M (k_2^2\lambda_M + 2k_4) \delta_1 \|\sigma\|^2 + 2\lambda_M\delta_2 \frac{\|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + \frac{3k_1k_2\lambda_M^2\delta_1}{2} \frac{\|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2\lambda_M^2\delta_1 \|z\| \|\sigma\| + k_2\lambda_M\delta_2 \|\sigma\| \\
& + \frac{3k_1\lambda_M^2\delta_1}{2} \|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} + k_1\lambda_M\delta_2 \frac{\|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Assim, a parcela \dot{V}_s , (3.9), seguiu uma análise similar a apresentada em [22].

B.3 Proposição 1

Proposição inicialmente apresentada em [22], e utilizada em [23]. Neste trabalho esta proposição é utilizada para majorar equação \dot{V}_s em (3.9), resultando em (B.12).

Proposição B.1.

$$\frac{(z^T K_{ps}\sigma)(z^T K_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{z^T K_{ps}^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}},$$

onde $\sigma, z \in \mathbb{R}^m$.

Demonstração. Seja $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$ um vetor unitário. Então

$$z^T K_{ps}\bar{\sigma} \leq \|z^T K_{ps}\| = \sqrt{z^T K_{ps}^2 z},$$

onde a desigualdade é consequência da Desigualdade de Cauchy-Schwarz para produtos internos. Portanto, segue que

$$\frac{(z^T K_{ps}\sigma)(z^T K_{ps}\sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} = \frac{(z^T K_{ps}\bar{\sigma})(z^T K_{ps}\bar{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{z^T K_{ps}^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.$$

□

B.4 Propriedades da derivada vetorial

A seguir serão relembradas apresentadas algumas propriedades de derivadas para norma e vetores. A apresentação dessas propriedades tem como objetivo ajudar no entendimento do cálculo de \dot{V} , feito pela equação de V (3.6).

Considere o vetor $\sigma = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T$ com norma $\|\sigma\| = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{\frac{1}{2}}$

B.4.1 Derivada da norma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\sigma\|) &= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{-\frac{1}{2}}(2a_1\dot{a}_1 + 2a_2\dot{a}_2 + 2a_3\dot{a}_3) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(\sigma^T\sigma)^{-\frac{1}{2}}(2\sigma^T\dot{\sigma}) \\ &= \frac{\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|} \end{aligned} \tag{B.14}$$

B.4.2 Derivada da norma ao quadrado

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\sigma\|^2) &= \frac{d}{dt}(\sigma^T\sigma) = \dot{\sigma}^T\sigma + \sigma^T\dot{\sigma} \\ &= (\dot{a}_1a_1 + \dot{a}_2a_2 + \dot{a}_3a_3) + (a_1\dot{a}_1 + a_2\dot{a}_2 + a_3\dot{a}_3) \\ &= 2\sigma^T\dot{\sigma} = 2\dot{\sigma}^T\sigma \end{aligned} \tag{B.15}$$

B.4.3 Derivada do quociente envolvendo norma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma^T\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\right) &= \frac{(2\sigma^T\dot{\sigma})\|\sigma\|^{\frac{1}{2}} - (\sigma^T\sigma)\left(\frac{1}{2}\right)(\|\sigma\|^{-\frac{1}{2}})\left(\frac{\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|}\right)}{\|\sigma\|} \\ &= \frac{2\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{\|\sigma\|^2\left(\frac{1}{2}\right)(\|\sigma\|^{-\frac{1}{2}})}{\|\sigma\|}\left(\frac{\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|}\right) \\ &= \frac{2\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)\frac{\sigma^T\dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \tag{B.16}$$

B.4.4 Derivada com termos cruzados

$$\frac{d}{dt}(z^TK_p\sigma) = \dot{z}^TK_p\sigma + z^TK_p\dot{\sigma} \tag{B.17}$$

B.4.5 Derivada do quociente com termos cruzados envolvendo norma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{z^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \right) &= \frac{(\dot{z}^T K_p \sigma + z^T K_p \dot{\sigma}) \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} - (z^T K_p \sigma) \left(\frac{1}{2}\right) (\|\sigma\|^{-\frac{1}{2}}) \left(\frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|}\right)}{\|\sigma\|} \\ &= \frac{(\dot{z}^T K_p \sigma + z^T K_p \dot{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T \dot{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

B.5 Propriedades da matriz de rotação e relações trigonométricas

A inversa da matriz de rotação M é dada por sua transposta :

$$MM^{-1} = MM^T = I$$

Considerando a matriz de entrada efetiva \bar{K}_p apresentada em (3.66) composta por:

$$\bar{K}_p = K_p K_{p_n}^{-1},$$

onde

$$K_p = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad K_{p_n} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \Delta\theta) & \text{sen}(\theta + \Delta\theta) \\ -\text{sen}(\theta + \Delta\theta) & \cos(\theta + \Delta\theta) \end{bmatrix}.$$

Considerando a notação: $c_1 = \cos \theta$, $s_1 = \text{sen } \theta$, $c_2 = \cos(\theta + \Delta\theta)$, $s_2 = \text{sen}(\theta + \Delta\theta)$.

Então, tem-se

$$\bar{K}_p = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 \\ -s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 + s_1 s_2 & c_2 s_1 - c_1 s_2 \\ -(c_2 s_1 - c_1 s_2) & c_1 c_2 + s_1 s_2 \end{bmatrix}$$

Considerando as seguintes relações trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \text{sen } x \text{sen } y, \\ \text{sen}(x - y) &= \text{sen } x \cos y - \text{sen } y \cos x, \end{aligned}$$

e $0^\circ < \Delta\theta < 90^\circ$, \overline{K}_p pode ser reescrito como

$$\overline{K}_p = \begin{bmatrix} \cos[\theta - (\theta + \Delta\theta)] & \text{sen}[\theta - (\theta + \Delta\theta)] \\ -\text{sen}[\theta - (\theta + \Delta\theta)] & \cos[\theta - (\theta + \Delta\theta)] \end{bmatrix}$$

$$\overline{K}_p = \begin{bmatrix} \cos(-\Delta\theta) & \text{sen}(-\Delta\theta) \\ -\text{sen}(-\Delta\theta) & \cos(-\Delta\theta) \end{bmatrix}$$

$$\overline{K}_p = \begin{bmatrix} \cos(\Delta\theta) & -\text{sen}(\Delta\theta) \\ \text{sen}(\Delta\theta) & \cos(\Delta\theta) \end{bmatrix}$$