



MODELAGEM TENSORIAL DE GCSC E PROJETO DE CONTROLADOR DE POTÊNCIA ATIVA

Sersan Dias Guedes

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Robson Francisco da Silva Dias
Marcos Vicente de Brito
Moreira

Rio de Janeiro
Março de 2018

MODELAGEM TENSORIAL DE GCSC E PROJETO DE CONTROLADOR DE
POTÊNCIA ATIVA

Sersan Dias Guedes

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Robson Francisco da Silva Dias, Ph.D

Prof. Antonio Carlos Siqueira de Lima, D.Sc.

Prof. Sergio Gomes Junior, D.Sc.

Prof. Marcelo Aroca Tomim, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2018

Guedes, Sersan Dias

Modelagem Tensorial de GCSC e Projeto de Controlador de Potência Ativa/Sersan Dias Guedes. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XIII, 132 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Robson Francisco da Silva Dias

Marcos Vicente de Brito Moreira

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 124 – 126.

1. FACTS. 2. Modelagem analítica. 3. Projeto de controlador. I. Dias, Robson Francisco da Silva *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

Agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores, Robson e Marcos, pela disponibilidade, pelas conversas de instrução e incentivo e pela excelente orientação na condução deste trabalho.

Ao professor Sergio Gomes Jr. pela valiosa discussão na etapa inicial desta pesquisa e o auxílio na compreensão de questões fundamentais para o desenvolvimento do tema.

Sou eternamente grato a meus pais, Jakelline e Sérgio, pelo carinho, pela proteção e pelo suporte para me manter na vida acadêmica. Obrigado, pai, pelas aulas de direção!

Agradeço à minha avó Jurema pela importância que tem na minha vida e pela companhia do dia a dia.

À minha irmã Thabata pela cumplicidade e companheirismo.

Ao meu padrinho Tito pelo afeto e por sempre querer o meu bem.

À minha namorada Yasmim por todo o carinho, incentivo e compreensão.

Aos meus amigos e toda minha família por me trazerem felicidade e por torcerem por mim.

Gratidão é fundamental. Muito obrigado a todos vocês!

“Existirmos: a que será que se destina?”

(Cajuína - Caetano Veloso)

“Corra e olhe o céu, que o sol vem trazer bom dia.”

(Corra e olhe o céu - Cartola)

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MODELAGEM TENSORIAL DE GCSC E PROJETO DE CONTROLADOR DE POTÊNCIA ATIVA

Sersan Dias Guedes

Março/2018

Orientadores: Robson Francisco da Silva Dias
Marcos Vicente de Brito Moreira

Programa: Engenharia Elétrica

O presente trabalho consiste no desenvolvimento do modelo analítico de um sistema de potência trifásico balanceado contendo um Capacitor Série Controlado por Chave Autocomutada (GCSC). É realizada a modelagem em regime permanente e em regime transitório. Emprega-se o método de modelagem tensorial, que relaciona os coeficientes dos fasores dinâmicos das variáveis alternadas do sistema. Testes para validação do modelo são realizados, tendo o simulador de transitórios eletromagnéticos PSCAD/EMTDC como referência.

Em seguida, é apresentada a utilização do modelo analítico para o objetivo específico de projetar um controlador de potência ativa para a barra de carga do circuito. Para a aplicação de técnicas de projeto de controladores para sistemas lineares, a relação não linear existente entre o ângulo de corte das chaves autocomutadas e a potência ativa é aproximada a uma função de transferência através do método de mínimos quadrados não linear. O projeto do controlador se desenrola com a apresentação de uma proposta de ajuste inicial utilizando a técnica de Ótimo por Módulo seguida da aplicação de uma metodologia mais sofisticada, baseada no lugar das raízes do sistema em malha aberta e em método numérico, para aprimoramento da calibração.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TENSORIAL ANALYSIS OF GCSC AND ACTIVE POWER CONTROLLER DESIGN

Sersan Dias Guedes

March/2018

Advisors: Robson Francisco da Silva Dias
Marcos Vicente de Brito Moreira

Department: Electrical Engineering

This work presents the development of an analytical model for a balanced three-phase power system containing a Gate-Controlled Series Capacitor (GCSC). The modeling is performed for the steady state and the transient state. The tensorial analysis is applied to relate the coefficients of the dynamic phasors of currents and voltages in a linear way. Validation tests are conducted using the electromagnetic transients program PSCAD/EMTDC as benchmark.

After that, the analytical model is used for the specific purpose of designing a active power controller for the circuit load. The nonlinear relation between the turn-off angle of the valves and the active power is fitted to a transfer function, using non-linear least squares regression, in order to apply controller design techniques of linear control systems. The controller design is developed with an initial adjustment method according to the Modulus Optimum and then a more sophisticated technique, based on the open-loop system's root locus and numerical method, is used to improve the controller's calibration.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Introdução	1
1.2 Organização do texto	2
2 Fundamentos Teóricos	3
2.1 Critérios de Desempenho de Sistemas de Controle	3
2.2 Otimização por Adaptação do Módulo	10
2.2.1 Ótimo por Módulo	13
2.2.2 Ótimo Simétrico	17
2.3 Lugar das Raízes	21
2.4 Modelagem Tensorial de Circuitos Elétricos	23
2.5 Capacitor Série Controlado por Chave Autocomutada (GCSC)	29
2.6 Função de Chaveamento	32
3 Modelagem e Validação do GCSC em Regime Permanente	36
3.1 Modelagem Analítica em Regime Permanente	36
3.2 Validação da Modelagem em Regime Permanente	51
3.2.1 Descrição da Simulação	51
3.2.2 Resultados para Validação	56
4 Modelagem e Validação do GCSC em Regime Transitório	61
4.1 Modelagem Analítica em Regime Transitório	61
4.1.1 Modelagem do Ângulo de Corte	64
4.1.2 Modelagem do Ângulo de Saída do PLL	66
4.1.3 Modelagem do Ângulo de Condução	67
4.1.4 Modelagem do Sistema Principal	72
4.2 Validação da Modelagem em Regime Transitório	76
4.2.1 Descrição da Simulação	76

4.2.2	Resultados para Validação	78
5	Projeto de um Controlador de Potência Ativa para Circuito com GCSC	89
5.1	Identificação da Planta	89
5.2	Projeto de Controlador Utilizando Adaptação do Módulo	108
5.3	Projeto de Controlador Utilizando Lugar das Raízes	112
5.3.1	Primeira Parte da Metodologia	112
5.3.2	Segunda Parte da Metodologia	114
5.3.3	Limitação do Modelo	119
6	Conclusões	122
6.1	Análises e Conclusões	122
6.2	Trabalhos Futuros	123
	Referências Bibliográficas	124
A	Regras para Traçado do Lugar das Raízes	127
B	Polos da equação (5.58)	132

Lista de Figuras

2.1	Critérios de avaliação de resposta no tempo.	5
2.2	Representação cartesiano das componentes do polo complexo.	8
2.3	Diagramas de ganho: (a) Equação (2.35) e (b) Equação (2.42), para os coeficientes $a_0 = 0,5$, $a_1 = 0,2$, $a_2 = 0,04$ e $a_3 = 0,004$	12
2.4	Resposta a um degrau unitário da função de transferência típica (2.46) da técnica Ótimo por Módulo.	14
2.5	Resposta a um degrau unitário da função de transferência típica (2.68) da técnica Ótimo Simétrico.	19
2.6	Diagrama de ganho de $F_{MA}(s)$ e suas parcelas, com o eixo de frequência angular em escala logarítmica.	20
2.7	Diagrama de blocos de sistema em malha fechada com função de realimentação unitária.	22
2.8	Circuito elétrico linear.	25
2.9	Circuito elétrico não linear.	25
2.10	Topologia do GCSC.	29
2.11	Curva característica de chave autocomutada.	30
2.12	(a) Corrente de linha e tensão do capacitor no tempo; (b) Função de chaveamento no tempo; (c) Corrente no capacitor do GCSC.	31
2.13	Reatância equivalente do GCSC.	32
2.14	Função de chaveamento em relação ao ângulo ωt da tensão de referência do sistema.	32
2.15	Função de chaveamento com 51 harmônicos.	34
2.16	Função de chaveamento generalizada.	34
3.1	Diagrama unifilar do sistema a ser modelado.	37
3.2	Representação da posição dos elementos não nulos da matriz jacobiana.	49
3.3	Circuito trifásico de simulação.	51
3.4	Circuitos PLL para correntes de linha.	52
3.5	Circuito PLL para sinal de referência angular.	52
3.6	Cálculo do ângulo estático θ_{pll}	53
3.7	Lógica de chaveamento.	53

3.8	Quadro de variáveis internas para chave $S1$	54
3.9	Sinais lógicos referentes aos instantes de condução do capacitor de cada fase.	54
3.10	Sinal lógico que indica todos os instantes de condução de capacitores.	54
3.11	Lógica de atualização do tempo de condução.	55
3.12	Cálculo do ângulo de condução.	56
3.13	Tensão do gerador.	57
3.14	Corrente de linha.	57
3.15	Tensão do capacitor.	58
3.16	Corrente do capacitor.	58
3.17	Ângulo de corte.	59
3.18	Ângulo da corrente de linha medido pelo PLL	59
3.19	Ângulo de condução.	59
4.1	Diagrama unifilar do sistema indicando variável P_{barra} a ser controlada.	63
4.2	Diagrama de blocos em malha fechada do controle de potência na barra.	64
4.3	Diagrama de blocos para obtenção do ângulo de corte.	65
4.4	Sistema de controle do PLL modelado no PSCAD.	66
4.5	Sistema de controle do modelo simplificado do PLL.	67
4.6	Tensão de capacitor v_c e função e chaveamento q	68
4.7	Algoritmo para cálculo de regime transitório.	76
4.8	Sinais de entrada para fonte de tensão trifásica.	77
4.9	Cálculo da corrente eficaz.	77
4.10	Cálculo do ângulo de corte em malha fechada.	78
4.11	Potência na barra após variações em P_{ref}	80
4.12	Potência na barra - Teste 1.	81
4.13	Tensão do gerador - Teste 1.	81
4.14	Corrente de linha - Teste 1.	81
4.15	Tensão do capacitor - Teste 1.	82
4.16	Corrente do capacitor - Teste 1.	82
4.17	Ângulo de corte - Teste 1.	83
4.18	Ângulo de saída do PLL - Teste 1.	83
4.19	Ângulo de condução - Teste 1.	83
4.20	Potência na barra após variação na tensão de entrada.	84
4.21	Potência na barra - Teste 2.	85
4.22	Tensão do gerador - Teste 2.	85
4.23	Corrente de linha - Teste 2.	85
4.24	Tensão do capacitor - Teste 2.	86
4.25	Corrente do capacitor - Teste 2.	86

4.26	Ângulo de corte - Teste 2.	86
4.27	Ângulo de saída do PLL - Teste 2.	87
4.28	Ângulo de condução - Teste 2.	87
4.29	Amplitudes harmônicas da tensão do capacitor para o Teste 2.	88
5.1	Aproximação da função não linear que relaciona γ a P_{barra} a uma função de transferência.	90
5.2	Resposta ao degrau em malha aberta. (a) Ângulo de corte; (b) Potência na barra.	90
5.3	Tensão do capacitor devido à variação instantânea do ângulo de corte.	91
5.4	Resposta do sistema em malha aberta a uma entrada senoidal de frequência 50Hz. (a) Ângulo de corte; (b) Potência na barra.	91
5.5	Diagrama de blocos em malha fechada do controle de potência na barra.	92
5.6	Resposta ao degrau em malha fechada com variação na potência de referência de 13,5 para 14,1MW. (a) Potência de referência; (b) Potência na barra.	93
5.7	Tensão do capacitor devido à variação instantânea da potência de referência.	94
5.8	Potência na barra em função do ângulo de corte, em regime permanente.	95
5.9	Resposta ao degrau em malha fechada. Variação na potência de referência de 13,5 para 13,7MW.	96
5.10	Resposta do sistema em malha fechada a uma entrada senoidal de frequência 50Hz. (a) Potência de referência; (b) Potência na barra.	97
5.11	Diagrama de ganho do sistema em malha fechada.	97
5.12	Subsinal presente na resposta ao degrau.	98
5.13	Diagrama de ganho do sistema em malha fechada com marcação próxima à posição estimada para o polo dominante.	102
5.14	Comparação entre a resposta ao degrau em malha fechada e o ajuste linear com polos distintos. Áreas destacadas referentes à região de subsinal e de atingimento a 98% do valor final.	103
5.15	Início da resposta ao degrau da Figura 5.14.	104
5.16	Nível de 98% da resposta ao degrau da Figura 5.14.	104
5.17	Diagrama de ganho do sistema em malha fechada com marcação próxima à posição estimada para o par de polos.	106
5.18	Comparação entre a resposta ao degrau em malha fechada e de ambos os ajustes lineares.	107
5.19	Diagrama de blocos em malha fechada com função de realimentação unitária negativa.	108
5.20	Resposta da função de transferência (5.46) a um degrau unitário.	109

5.21	Resposta ao degrau da função de transferência (5.46) com e sem o zero.	110
5.22	Resposta ao degrau do sistema não linear em malha fechada utilizando controlador integrador projetado pelo Ótimo por Módulo.	111
5.23	Lugar das raízes de $-G(s)$ com controlador integrador.	113
5.24	Lugar das raízes de $-G(s)$ com controlador proporcional integral. . .	114
5.25	Resposta ao degrau do sistema linear em malha fechada utilizando controlador PI projetado a partir do lugar das raízes.	117
5.26	Resposta ao degrau do sistema não linear em malha fechada utilizando controlador PI projetado a partir do lugar das raízes.	118
5.27	Resposta ao degrau utilizando controlador PI projetado a partir do lugar das raízes com especificação de $t_s = 30ms$	120
5.28	Resposta ao degrau utilizando controlador PI projetado a partir do lugar das raízes com especificação de $t_{98\%} = 15ms$	121

Lista de Tabelas

3.1	Lista de valores dos parâmetros do sistema.	56
4.1	Lista de valores dos parâmetros do sistema.	78
5.1	Relação entre as frequências das componentes fundamentais de entrada (f_{in}) e saída (f_{out}) da resposta em frequência em malha aberta.	92
5.2	Características de resposta não linear e linear utilizando controlador projetado pelo método Ótimo por Módulo.	111
5.3	Características de resposta não linear e linear utilizando controlador projetado pelo método de Lugar das Raízes.	118
5.4	Características de resposta não linear e linear utilizando controlador projetado pelo método de Lugar das Raízes com restrição $t_s = 30ms$.	120
5.5	Características de resposta não linear e linear utilizando controlador projetado pelo método de Lugar das Raízes com restrição $t_{98\%} = 15ms$.	121

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Os sistemas elétricos de potência estão sempre em busca de soluções para aumentar sua produtividade devido à progressiva demanda por energia, porém a construção de novas estações de geração e transmissão em muitos aspectos se torna uma opção inviável. Um dos benefícios trazidos pela eletrônica de potência é exatamente o de contribuir para um melhor aproveitamento da estrutura já existente, atribuindo maior eficiência ao sistema de produção. Os chamados Sistemas Flexíveis de Transmissão em Corrente Alternada (FACTS) [1] utilizam a tecnologia baseada em elementos semicondutores de potência para criar dispositivos que auxiliam na flexibilidade, confiabilidade, melhoram a qualidade de energia e permitem o adiamento de investimentos na construção de linhas de transmissão [2].

Dentre os equipamentos FACTS, encontra-se o Capacitor Série Controlado por Chave Autocomutada (GCSC) [3], que possui aplicações em controle de fluxo de potência, amortecimento de ressonância subsíncrona, entre outras, e é a topologia de estudo adotada para o presente trabalho. O objetivo inicial torna-se a detalhada modelagem do dispositivo com intuito de dispor de uma representação analítica confiável do comportamento do sistema. O programa de simulação de transitórios eletromagnéticos PSCAD/EMTDC é utilizado como referência.

O modelo analítico é capaz de fornecer informações estruturais sobre a influência do equipamento FACTS na rede elétrica que seriam de difícil acesso em um simulador. Outra vantagem é a possibilidade de ser linearizado, permitindo a aplicação de técnicas de análise linear [4, 5]. Utiliza-se a técnica de modelagem tensorial [6] por oferecer uma representação linear para um sistema que apresenta interação harmônica, isto é feito através dos coeficientes dos fasores das variáveis alternadas. Contudo, o modelo analítico deve ser visto como uma ferramenta complementar à simulação, para que o entendimento sobre o sistema seja o maior possível.

A modelagem do GCSC é utilizada para o projeto de um controlador de potência média da barra de carga do circuito elétrico, em que a saída do controlador fornece o ângulo de corte das chaves autocomutadas.

1.2 Organização do texto

O capítulo 2 apresenta o conjunto de fundamentações teóricas pertinentes ao conteúdo do trabalho. As seções têm o objetivo de introduzir as áreas de estudo que compõem a pesquisa e embasar o desenvolvimento da modelagem e do projeto do controlador.

No capítulo 3 é definido o circuito elétrico a ser modelado. A representação tensorial é descrita para a operação em regime permanente e são apresentadas as principais manipulações algébricas para o tratamento da não linearidade. A simulação utilizada como referência tem sua montagem descrita e seus resultados são comparados aos do modelo analítico visando a validação.

O capítulo 4 é destinado ao desenvolvimento da modelagem do circuito em regime transitório. Realiza-se a descrição do sistema em malha fechada visando o controle de potência, e é dada especial atenção à descrição do comportamento dinâmico dos ângulos de interesse. Diferentes tipos de distúrbios são aplicados ao sistema a fim de testar a resposta transitória do modelo analítico em relação à simulação.

O capítulo 5 utiliza o modelo analítico para realizar o projeto do controlador de potência ativa. É apresentado o processo de identificação da função de transferência que relaciona o ângulo de corte das chaves autocomutadas e a potência ativa da barra de carga. Duas técnicas de projeto de controlador são mostradas, tal que a primeira é considerada para um projeto inicial e a segunda, mais sofisticada, oferece maior qualidade ao controlador.

No capítulo 6 são expostas as principais conclusões acerca do desenvolvimento e dos resultados da pesquisa, assim como as propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

2.1 Critérios de Desempenho de Sistemas de Controle

Em um sistema de controle em malha fechada, deseja-se que o sinal de saída rastreie o sinal de referência de forma que, na ocorrência de uma perturbação ou mudança de valor de referência, o controlador seja capaz de gerar um sinal de controle que rejeite a perturbação e haja o rastreamento do sinal de saída desejado. Devido ao fato do sistema ser dinâmico, o rastreamento do sinal de referência não pode ser instantâneo. Sabendo disto, o comportamento transitório da resposta do sistema deve ser estudado, de maneira que permita um acompanhamento satisfatório do sinal de saída em relação ao sinal de referência. Ações de controle visando respostas muito rápidas, porém, tendem a causar sobressinais exagerados, o que pode ser indesejado em inúmeras situações. Logo, cabe ao projetista modificar a função de transferência do sistema em malha fechada de maneira a balancear o efeito das diferentes características negativas que possam surgir a fim de atender às restrições e especificações de cada projeto.

A resposta no tempo de uma função linear pode ser relacionada à forma como este sistema reage a sinais de diferentes frequências. O retrato completo desta relação é chamado de resposta em frequência e é representado através do diagrama de Bode [7]. Os diversos trechos deste diagrama ajudam a traduzir o comportamento desta função, de modo que, frequências mais altas estão relacionadas às constantes de tempo mais rápidas do sistema e frequências mais baixas às constantes mais lentas. Assim, o desempenho geral do sistema no regime transitório é basicamente dado pela contribuição das frequências menores, que se apresentam de forma dominante em relação à influência das frequências mais altas.

Para avaliar o desempenho de um sistema de controle pode-se analisar o comportamento dinâmico de sua resposta diante da aplicação de sinais conhecidos em

sua entrada. Os sinais de teste mais comuns são do tipo impulso, degrau e rampa. Com isso, a partir da aplicação de tais sinais, é possível estabelecer diversos critérios e características de interesse ao regime transitório com o propósito de classificar a qualidade da resposta controlada obtida.

Os principais critérios de avaliação considerando como entrada um sinal do tipo degrau são:

- Tempo de atraso (t_d).

Tempo necessário para a resposta alcançar a metade do valor final pela primeira vez.

- Tempo de subida (t_r).

Tempo necessário para a resposta passar de 10% a 90%, ou 5% a 95%, ou 0% a 100% do valor final. Para o prosseguimento deste trabalho, assume-se como sendo o tempo gasto entre 10% a 90% do valor final.

- Tempo de pico (t_p).

Tempo necessário para a resposta atingir seu valor máximo.

- Tempo de acomodação (t_s).

Tempo necessário para a resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa de $\pm 2\%$ ou $\pm 5\%$ em torno do valor final. Neste trabalho, assume-se como sendo o tempo gasto para se manter em uma faixa de 2% do valor final.

- Sobressinal máximo (M_p).

Diferença percentual entre o valor máximo atingido pela resposta e seu valor em regime permanente.

A Figura 2.1 mostra a resposta temporal de uma função genérica a um degrau unitário. Os critérios de avaliação são evidenciados.

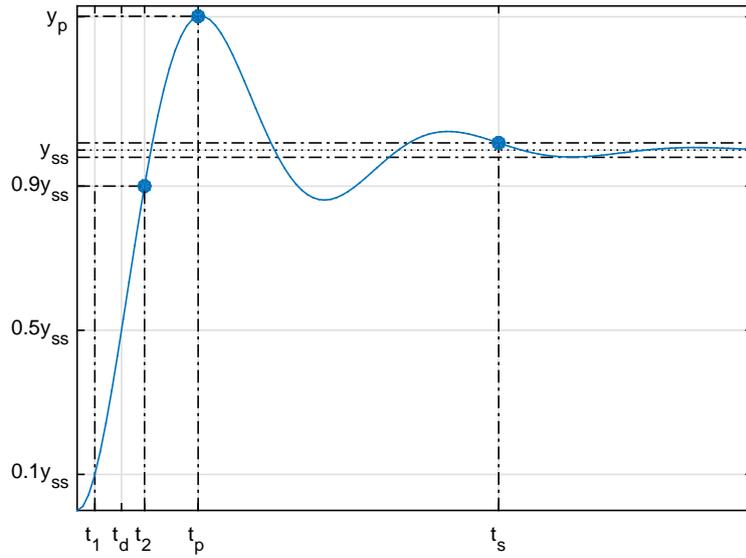


Figura 2.1: Critérios de avaliação de resposta no tempo.

Em que y_{ss} é o valor final da resposta e y_p o valor de pico. Além disso:

$$t_r = t_2 - t_1 \quad (2.1)$$

$$M_p = \frac{(y_p - y_{ss})}{y_{ss}} 100\% \quad (2.2)$$

Muitos fenômenos físicos podem ser aproximados e descritos por funções de transferência de primeira e segunda ordem. Assim, é bastante comum encontrar aplicações industriais com sistemas de controle modelados por funções de transferência dessas ordens, tornando-se interessante um conhecimento mais profundo na avaliação dos critérios de qualidade de suas respostas.

Seja $F(s)$ uma função de transferência de primeira ordem e sem zeros dada por:

$$F(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)} \quad (2.3)$$

Então sua resposta a um degrau de amplitude A no domínio do tempo é definida por:

$$y(t) = KA(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \text{ para } t \geq 0 \quad (2.4)$$

O tempo de pico desta função é calculado como:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \implies KA \frac{e^{-\frac{t_p}{\tau}}}{\tau} &= 0 \\ \implies t_p &= \infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

Logo, em funções de primeira ordem, o valor de pico é também o valor de regime permanente ($y(\infty) = KA$). Isso implica em sobressinal nulo ($M_p = 0$).

Sobre o tempo de assentamento, é possível deduzir que:

$$\begin{aligned} KA(1 - e^{-\frac{t_s}{\tau}}) &= 0,98KA \\ \implies t_s &= -\ln(0,02)\tau = 3,912\tau \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ou seja, o tempo de assentamento é dependente somente da constante de tempo da planta.

É possível, para o caso de uma função de transferência de primeira ordem e sem zeros finitos, obter expressões para o tempo de atraso e de subida mostrados a seguir:

$$t_d = -\ln(0,5)\tau = 0,693\tau \quad (2.7)$$

$$t_r = [-\ln(0,1) + \ln(0,9)]\tau = 2,197\tau \quad (2.8)$$

Suponha, agora, que o sistema seja descrito pela seguinte função de transferência F de segunda ordem e sem zeros finitos:

$$F(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad , \quad (2.9)$$

em que K é o valor de ganho DC, ζ é o coeficiente de amortecimento e ω_n é a frequência angular natural não amortecida.

Os polos de $F(s)$ são:

$$\begin{aligned} s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 &= 0 \\ \implies s &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

A partir da equação (2.10), observa-se que, dependendo do valor do coeficiente de amortecimento, os polos podem possuir parte imaginária nula ou não nula. Assim, é válido analisar os seguintes casos:

- $\zeta > 1$.

Nesse caso, o argumento da raiz quadrada em (2.10) é positivo e os polos de $F(s)$ são puramente reais.

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.11)$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.12)$$

Neste caso, a resposta a um degrau unitário $U(s)$ é descrita por:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \left[\frac{K\omega_n^2}{(s-p_1)(s-p_2)} \right] \left(\frac{1}{s} \right) \quad (2.13)$$

A seguir, em (2.14) a equação (2.13) é expandida em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{K}{s} + \frac{K}{2(\zeta^2 - 1 - \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} \left(\frac{1}{s-p_1} \right) + \frac{K}{2(\zeta^2 - 1 + \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} \left(\frac{1}{s-p_2} \right) \quad (2.14)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação (2.14), obtém-se:

$$y(t) = K \left[1 + \frac{1}{2(\zeta^2 - 1 - \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{p_1 t} + \frac{1}{2(\zeta^2 - 1 + \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{p_2 t} \right], \text{ para } t \geq 0 \quad (2.15)$$

Como esperado, a função $y(t)$ possui apenas componentes exponenciais não oscilantes, e se caracteriza como uma resposta superamortecida.

- $\zeta = 1$.

Com o coeficiente de amortecimento unitário, os polos de $F(s)$ são reais e iguais:

$$p_1 = p_2 = -\omega_n \quad (2.16)$$

Com os polos iguais, a resposta de $F(s)$ ao degrau unitário pode ser expandida como a seguir:

$$Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{K}{(s + \omega_n)} - \frac{K\omega_n}{(s + \omega_n)^2}, \quad (2.17)$$

resultando na seguinte resposta no domínio do tempo:

$$y(t) = K (1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}), \text{ para } t \geq 0 \quad (2.18)$$

Novamente, obtém-se uma resposta sem componentes senoidais, porém, como trata-se de um comportamento limite em relação ao amortecimento, a equação

(2.18) é conhecida como resposta criticamente amortecida.

- $0 < \zeta < 1$.

Este é o caso em que componentes imaginárias não nulas surgem nos polos de $F(s)$.

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.19)$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.20)$$

A Figura 2.2 representa as componentes real e imaginária do polo apresentado em (2.19) no plano cartesiano.

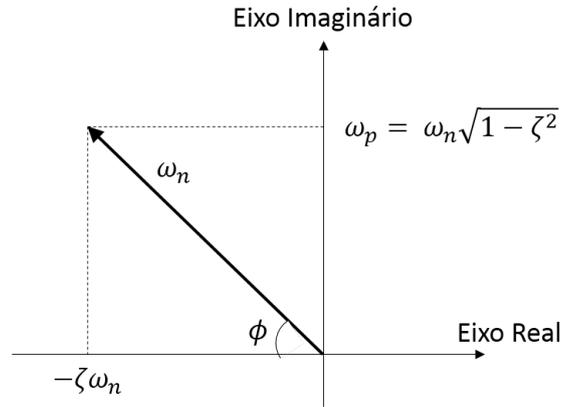


Figura 2.2: Representação cartesiano das componentes do polo complexo.

A partir da Figura 2.2 deduz-se que:

$$\zeta = \cos(\phi) \quad (2.21)$$

Assim, os polos podem ser reescritos como:

$$p_1 = \omega_n e^{j(\pi-\phi)} \quad (2.22)$$

$$p_2 = \omega_n e^{-j(\pi-\phi)} \quad (2.23)$$

A expansão da resposta ao degrau de $F(s)$ em frações parciais é dada por:

$$Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{Ke^{j\phi}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\frac{1}{s-p_1} \right) + \frac{Ke^{-j\phi}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \left(\frac{1}{s-p_2} \right) \quad (2.24)$$

Cuja resposta no tempo corresponde a (2.25).

$$y(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_p t + \phi) \right] \quad (2.25)$$

O sinal de saída $y(t)$ da equação (2.25) é uma resposta oscilante com decaimento exponencial, conhecida como resposta subamortecida. Seu instante de pico é encontrado calculando-se os pontos de derivada temporal nula da equação (2.25) e é dado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_p} \quad (2.26)$$

Utilizando o valor do tempo de pico, obtém-se o seguinte valor de pico:

$$\begin{aligned} y_p &= K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \text{sen}(\omega_p t_p + \phi) \right] \\ \implies y_p &= K \left(1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim, o percentual de ultrapassagem desta resposta ao degrau depende exclusivamente do coeficiente de amortecimento ζ e é dado por:

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} (100\%) \quad (2.28)$$

Para o cálculo do tempo de subida (tempo entre 10% e 90% do valor final) não é possível obter uma expressão analítica em função de ζ e ω_n [7]. Porém, na consideração do tempo de subida entre 0% e 100% do valor de regime permanente ($y_{ss} = K$), é possível encontrar tal expressão.

$$\begin{aligned} y(t_r) &= y_{ss} \\ \implies K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \text{sen}(\omega_p t_r + \phi) \right] &= K \\ \implies y_p &= \frac{\pi - \phi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

O tempo de acomodação também pode ser obtido a partir de (2.25). Após a subida, ao observar esta resposta como uma oscilação em torno do valor final, t_s

pode ser calculado através da amplitude da senoide em decaimento.

$$\begin{aligned} \frac{K}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_s} &= 0,02K \\ \implies t_s &= \frac{-\ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sistemas com ordens maiores não possuem expressões analíticas para os critérios de avaliação mencionados, embora possam se valer das expressões (2.26)-(2.30) para os casos em que suas aproximações a sistemas de segunda ordem sejam possíveis. A presença de zeros em plantas de primeira ou segunda ordem também pode influenciar bastante na validade dos cálculos dos critérios, ficando a depender da proximidade destes zeros em relação aos polos dominantes do sistema. Apesar disso, o conhecimento das expressões apresentadas é importante pois, além de seu uso para avaliar a qualidade de uma resposta controlada, também podem auxiliar no projeto de controladores. Partindo-se de especificações referentes a limites de sobressinal ou tempos de resposta, pode-se deduzir a localização dos polos que atenderiam a tais características.

2.2 Otimização por Adaptação do Módulo

Do ponto de vista da resposta em frequência, existem diversos fatores que influenciam no comportamento dinâmico de um sistema, como a banda passante, picos de ressonância e margens de fase e de ganho. Em muitos casos, a dinâmica de um controle pode ser considerada adequada se o diagrama de Bode da função de transferência em malha fechada apresentar valor de ganho próximo à unidade para uma faixa de frequência tão larga quanto possível e que inclua a frequência do sinal de referência [8]. Devido à característica do método de Otimização por Adaptação de Módulo de garantir ganho DC próximo ao unitário em baixas frequências, assegurando assim rastreamento, e tentar maximizar a banda passante reduzindo tempo de subida e assentamento, esse foi o método escolhido para gerar um controlador para o sistema considerado neste trabalho. É importante ressaltar que este método servirá para uma primeira sintonia dos ganhos do controlador. Após a obtenção dos ganhos, esses serão refinados usando o método do lugar das raízes.

No conceito de adaptação por módulo existem duas funções de transferência características que se deseja obter para o sistema realimentado [8]. A mais simples

é apresentada em (2.31).

$$T(s) = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.31)$$

Com o processo de adaptação sendo aplicado à função de transferência em malha fechada, tem-se que os coeficientes em (2.31) provêm do sistema em malha aberta, logo:

$$b_0 = a_0 \quad (2.32)$$

Substituindo (2.32) em (2.31), calcula-se o módulo desta função aplicada a uma determinada frequência angular ω :

$$|T(j\omega)| = \sqrt{\frac{a_0^2}{a_2^2 \omega^4 + (a_1^2 - 2a_0 a_2) \omega^2 + a_0^2}} \quad (2.33)$$

Para que (2.33) tenda ao valor unitário em baixa frequência, é necessário que:

$$\begin{aligned} a_1^2 - 2a_0 a_2 &= 0 \\ a_1^2 &= 2a_0 a_2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Resultando na seguinte expressão para o módulo:

$$|T(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2 \omega^4 + 1}} \quad (2.35)$$

A segunda função de transferência característica da otimização por adaptação de módulo é dada por (2.36).

$$T(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.36)$$

Assim como (2.31), a equação (2.36) também é originada a partir da função de transferência em malha aberta, com isso, seus coeficientes possuem as relações a seguir:

$$b_0 = a_0 \quad (2.37)$$

$$b_1 = a_1 \quad (2.38)$$

Após a substituição de (2.38) em (2.36), a expressão do módulo é calculada em função de ω .

$$|T(j\omega)| = \sqrt{\frac{a_1^2 \omega^2 + a_0^2}{a_3^2 \omega^6 + (a_2^2 - 2a_1 a_3) \omega^4 + (a_1^2 - 2a_0 a_2) \omega^2 + a_0^2}} \quad (2.39)$$

Em baixas frequências, a equação (2.39) possui ganho próximo ao unitário ao atender às restrições (2.40) e (2.41).

$$\begin{aligned} a_1^2 - 2a_0a_2 &= 0 \\ a_1^2 &= 2a_0a_2 \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} a_2^2 - 2a_1a_3 &= 0 \\ a_2^2 &= 2a_1a_3 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Simplificando a expressão do módulo para:

$$|T(j\omega)| = \sqrt{\frac{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \omega^2 + 1}{\left(\frac{a_3}{a_0}\right)^2 \omega^6 + 1}} \quad (2.42)$$

As expressões finais dos módulos, (2.35) e (2.42), das funções de transferência características só apresentam valor unitário para frequência angular nula, porém, garantem o ganho próximo a este valor para baixas frequências. A Figura 2.3 ilustra um esboço dos diagramas de ganho correspondentes para valores arbitrários de coeficientes.

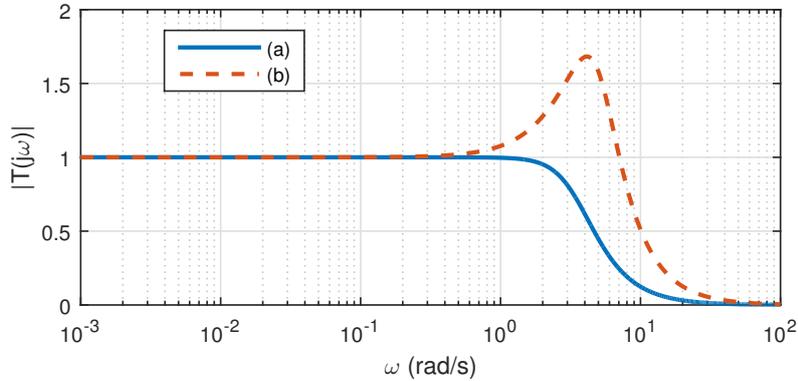


Figura 2.3: Diagramas de ganho: (a) Equação (2.35) e (b) Equação (2.42), para os coeficientes $a_0 = 0,5$, $a_1 = 0,2$, $a_2 = 0,04$ e $a_3 = 0,004$.

Na Figura 2.3, percebe-se que ambas as curvas possuem a mesma capacidade de rastreamento de sinais constantes. A curva (b), por apresentar maior banda passante, possui tempo de subida mais rápido, porém, por apresentar pico de ressonância, possui baixo amortecimento. A presença de um zero em (2.36) contribui para um alto sobressinal em sua resposta.

Dentro da área de estudo da Otimização por Adaptação de Módulo existem

duas principais vertentes, o Ótimo por Módulo e o Ótimo Simétrico, introduzidas na sequência.

2.2.1 Ótimo por Módulo

A técnica de otimização por módulo é aplicada a plantas com características de atraso e que não possuem elemento integrador.

- Controlador Integrador (I)

O controlador integrador é escolhido nos casos em que a planta possui um único elemento de atraso (modelado como um polo estável) e, diferentemente do controlador proporcional, garante erro nulo em regime permanente.

Para uma planta genérica de apenas um polo, $G(s)$, e um controlador integrador, $C(s)$, tem-se a seguinte função de transferência em malha aberta:

$$F_{MA}(s) = C(s)G(s) = \frac{1}{\tau_c s} \frac{K_g}{(\tau_g s + 1)} \quad (2.43)$$

Consequentemente, em malha fechada:

$$F_{MF}(s) = \frac{K_g}{\tau_c \tau_g s^2 + \tau_c s + K_g} \quad (2.44)$$

A expressão (2.44) se enquadra no formato característico de função de transferência apresentado em (2.31).

Logo, para obedecer à restrição (2.34):

$$\begin{aligned} (\tau_c)^2 &= 2(K_g)(\tau_c \tau_g) \\ \tau_c &= 2K_g \tau_g \end{aligned} \quad (2.45)$$

Substituindo (2.45) em (2.44):

$$F_{MF}(s) = \frac{1}{2\tau_g^2 s^2 + 2\tau_g s + 1} \quad (2.46)$$

Nota-se que (2.46) possui coeficientes que dependem apenas da constante de tempo da planta. Esta é a forma típica a se obter através da técnica de Ótimo por Módulo, independentemente do tipo de controlador escolhido, como mostrado no decorrer desta seção. A Figura 2.4 apresenta sua resposta à aplicação de um degrau unitário.

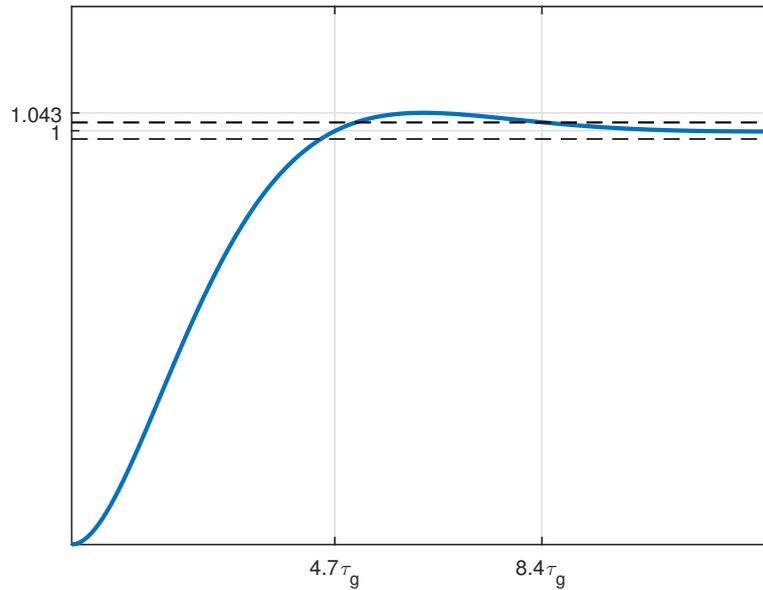


Figura 2.4: Resposta a um degrau unitário da função de transferência típica (2.46) da técnica Ótimo por Módulo.

Portanto, é importante ressaltar que a utilização do Ótimo por Módulo implica em uma resposta ao degrau que possui sobressinal, equivalente a 4,3% do valor de regime permanente, pois o coeficiente de amortecimento é sempre igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ na função de transferência da forma de (2.46). Além disso, o tempo que leva para atingir pela primeira vez o valor final da resposta é igual a 4,7 vezes o valor da constante de tempo da planta e o tempo de assentamento é equivalente a 8,4 vezes este valor.

- Controlador Proporcional Integral (PI)

O controlador PI é aplicado em casos em que a planta possui dois elementos de atraso (modelados como dois polos estáveis) em sua estrutura. A função de transferência em malha aberta deste conjunto controlador-planta é dada por (2.47).

$$F_{MA}(s) = C(s)G(s) = \frac{K_c (\tau_c s + 1)}{\tau_c s} \frac{K_g}{(\tau_{g,1} s + 1) (\tau_{g,2} s + 1)} \quad (2.47)$$

Assim, o numerador do controlador, que corresponde a uma parcela proporcional-derivativa, é projetado de forma a cancelar a parcela do denominador da planta referente ao maior atraso.

Supondo $\tau_{g,1} > \tau_{g,2}$, cria-se a expressão para o primeiro parâmetro do controlador

de forma a originar o compensação do maior atraso existente na planta.

$$\tau_c = \tau_{g,1} \quad (2.48)$$

A função de transferência do conjunto em malha aberta se reduz a:

$$F_{MA}(s) = C(s)G(s) = \frac{K_c}{\tau_{g,1}s} \frac{K_g}{(\tau_{g,2}s + 1)} \quad , \quad (2.49)$$

levando à seguinte expressão em malha fechada:

$$F_{MF}(s) = \frac{K_c K_g}{(\tau_{g,1}\tau_{g,2}s^2 + \tau_{g,1}s + K_c K_g)} \quad (2.50)$$

A função de transferência (2.50) possui a estrutura característica apresentada em (2.31). Logo, atendendo à restrição (2.34):

$$\begin{aligned} (\tau_{g,1})^2 &= 2(K_c K_g)(\tau_{g,1}\tau_{g,2}) \\ K_c &= \frac{\tau_{g,1}}{2K_g\tau_{g,2}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Obtidas as equações que determinam os dois parâmetros do controlador PI, substitui-se (2.48) e (2.51) em (2.50). Isto culmina na função de transferência típica do Ótimo por Módulo, introduzida na equação (2.46), desta vez somente em função da constante de tempo mais rápida da planta, $\tau_{g,2}$.

$$F_{MF}(s) = \frac{1}{2\tau_{g,2}^2 s^2 + 2\tau_{g,2}s + 1} \quad (2.52)$$

- Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)

Este tipo de controlador é aplicado no caso da planta possuir um terceiro elemento de atraso. A função de transferência em malha aberta do controlador PID conectado à entrada de uma planta com três polos pode ser vista em (2.53).

$$F_{MA}(s) = C(s)G(s) = \frac{K_c (\tau_{c,1}s + 1) (\tau_{c,2}s + 1)}{\tau_{c,1}s} \frac{K_g}{(\tau_{g,1}s + 1) (\tau_{g,2}s + 1) (\tau_{g,3}s + 1)} \quad (2.53)$$

Agora com duas parcelas proporcionais-derivativas em seu numerador, o controlador é capaz de anular o efeito das duas constantes de tempo mais lentas da planta.

Supondo $\tau_{g,1} > \tau_{g,2} > \tau_{g,3}$, as constantes de tempo do controlador são dadas por

(2.54) e (2.55), a fim de gerar os devidos cancelamentos.

$$\tau_{c,1} = \tau_{g,1} \quad (2.54)$$

$$\tau_{c,2} = \tau_{g,2} \quad (2.55)$$

Isso gera a simplificação da equação em malha aberta:

$$F_{MA}(s) = C(s)G(s) = \frac{K_c}{\tau_{g,1}s} \frac{K_g}{(\tau_{g,3}s + 1)} \quad (2.56)$$

Esta expressão é análoga à obtida em (2.49). Logo, o ganho K_c do controlador é dado por:

$$K_c = \frac{\tau_{g,1}}{2K_g\tau_{g,3}} \quad (2.57)$$

Assim, a expressão final da função de transferência em malha fechada apresenta a mesma forma vista nos dois casos anteriores, tornando-se dependente somente da constante de tempo mais rápida da planta, $\tau_{g,3}$.

$$F_{MF}(s) = \frac{1}{2\tau_{g,3}^2s^2 + 2\tau_{g,3}s + 1} \quad (2.58)$$

Caso a planta possua mais do que três parcelas de atraso, não se deve acrescentar uma nova parcela proporcional-derivativa ao numerador do controlador, pois isso causaria efeitos equivalentes a uma dupla derivação do sinal de entrada, podendo levar a grandes sobressinais e sérios problemas de estabilidade. Contudo, existe a opção de se aproximar o efeito de várias constantes de tempo menores a um único elemento de atraso. [8] Por exemplo, para uma planta que possui três constantes de tempo, $\tau_{g,1}$, $\tau_{g,2}$ e $\tau_{g,3}$:

$$F(s) = \frac{1}{(\tau_{g,1}s + 1)(\tau_{g,2}s + 1)(\tau_{g,3}s + 1)} \quad (2.59)$$

Seu denominador pode ser expandido da seguinte forma:

$$F(s) = \frac{1}{(\tau_{g,1}s + 1)[\tau_{g,2}\tau_{g,3}s^2 + (\tau_{g,2} + \tau_{g,3})s + 1]} \quad (2.60)$$

Caso $\tau_{g,1}$ seja muito maior que $\tau_{g,2}$ e $\tau_{g,3}$, o coeficiente do segundo grau do polinômio entre colchetes em (2.60) pode ser desprezado, originando a aproximação

(2.61).

$$F(s) \approx \frac{1}{(\tau_{g,1}s + 1) [(\tau_{g,2} + \tau_{g,3})s + 1]} = \frac{1}{(\tau_{g,1}s + 1) (\tau s + 1)} \quad (2.61)$$

Percebe-se que os efeitos de $\tau_{g,2}$ e $\tau_{g,3}$ somados passam a ser vistos como um único atraso de constante de tempo τ .

Quanto menores forem as constantes de tempo agrupadas em relação à maior constante de tempo existente no conjunto controlador-planta em malha aberta, melhor se torna esta aproximação.

2.2.2 Ótimo Simétrico

Quando a planta a ser otimizada possui, além dos fenômenos do tipo atraso, um elemento com característica integradora, o método Ótimo por Módulo não pode mais ser aplicado. Isto se deve ao fato de que, após a compensação do retardo, restaria uma dupla integração, uma do controlador e uma da planta, gerando oscilações permanentes no caso de uma resposta ao degrau deste sistema em malha fechada.

- Controlador Proporcional Integral (PI)

A equação (2.62) apresenta inicialmente a função de transferência de uma planta $G(s)$ contendo um integrador e uma parcela de atraso e um controlador $C(s)$ proporcional integral.

$$F_{MA}(s) = C(s)G(s) = \frac{K_c (\tau_c s + 1)}{\tau_c s} \frac{1}{\tau_{g,1}s} \frac{K_g}{(\tau_{g,2}s + 1)} \quad (2.62)$$

Como visto, não pode haver a compensação direta do polo da planta pelo zero do controlador neste ponto, com isso, prossegue-se à função de transferência em malha fechada em (2.63).

$$F_{MF}(s) = \frac{K_c K_g \tau_c s + K_c K_g}{\tau_c \tau_{g,1} \tau_{g,2} s^3 + \tau_c \tau_{g,1} s^2 + K_c K_g \tau_c s + K_c K_g} \quad (2.63)$$

Percebe-se que (2.63) possui a forma da segunda equação característica dos métodos de otimização por adaptação do módulo, apresentada em (2.36). Logo, deve-se seguir as relações restritivas descritas em (2.40) e (2.41) a fim de adaptar o diagrama de Bode de (2.63) para fornecer ganho próximo ao unitário em baixas

frequências.

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 2a_0a_2 \\ (K_c K_g \tau_c)^2 &= 2(K_c K_g)(\tau_c \tau_{g,1}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} a_2^2 &= 2a_1a_3 \\ (\tau_c \tau_{g,1})^2 &= 2(K_c K_g \tau_c)(\tau_c \tau_{g,1} \tau_{g,2}) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Em (2.65) deduz-se uma expressão para o ganho K_c do controlador somente em função dos parâmetros da planta:

$$K_c = \frac{\tau_{g,1}}{2K_g \tau_{g,2}} \quad (2.66)$$

Vê-se que o ganho do controlador é calculado de forma semelhante ao que foi visto no Ótimo por Módulo (equação (2.51)). A maior mudança no cálculo dos parâmetros entre os dois métodos aparece na expressão da constante de tempo do controlador. Aplicando (2.66) em (2.64) encontra-se:

$$\tau_c = 4\tau_{g,2} \quad (2.67)$$

Substituindo as expressões deduzidas, (2.66) e (2.67), em (2.63) obtém-se:

$$F_{MF}(s) = \frac{4\tau_{g,2}s + 1}{8\tau_{g,2}^3 s^3 + 8\tau_{g,2}^2 s^2 + 4\tau_{g,2}s + 1} \quad (2.68)$$

Esta é a função de transferência típica a ser obtida através da aplicação do método Ótimo Simétrico. Nota-se que, assim como no método anterior, os coeficientes da expressão final para a malha fechada otimizada depende simplesmente da menor constante de tempo da planta, neste caso, $\tau_{g,2}$.

A Figura (2.5) ilustra o comportamento de (2.68) diante da aplicação de um degrau unitário como sinal de entrada.

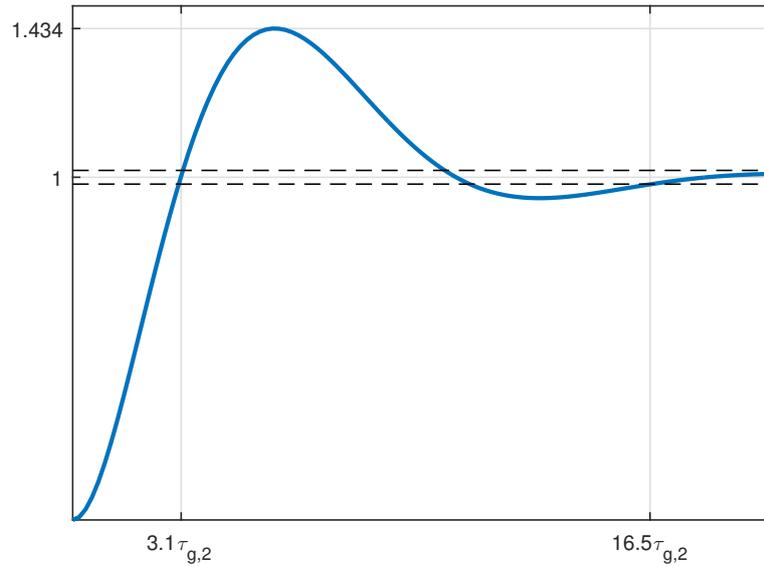


Figura 2.5: Resposta a um degrau unitário da função de transferência típica (2.68) da técnica Ótimo Simétrico.

Portanto, como visto na Figura 2.5, a otimização através do Ótimo Simétrico implica em um sistema que possui um grande sobressinal em sua resposta ao degrau, 43,3% do valor final, assim como um tempo de assentamento de 16,5 vezes o menor atraso da planta. O tempo para atingir pela primeira vez seu valor de regime permanente é de 3,1 vezes a menor constante de tempo modelada. Em [8, 9], sugere-se a utilização de filtro externo à malha fechada para a redução do sobressinal, porém, ao custo de um maior tempo de subida.

Uma vez projetado o controlador PI, é interessante retomar a função de transferência do sistema em malha aberta fazendo as devidas substituições.

$$F_{MA}(s) = \frac{(4\tau_{g,2}s + 1)}{8\tau_{g,2}^2 s} \frac{1}{s(\tau_{g,2}s + 1)} \quad (2.69)$$

A Figura 2.6 evidencia o diagrama de ganho de (2.69), como também de suas parcelas separadamente.

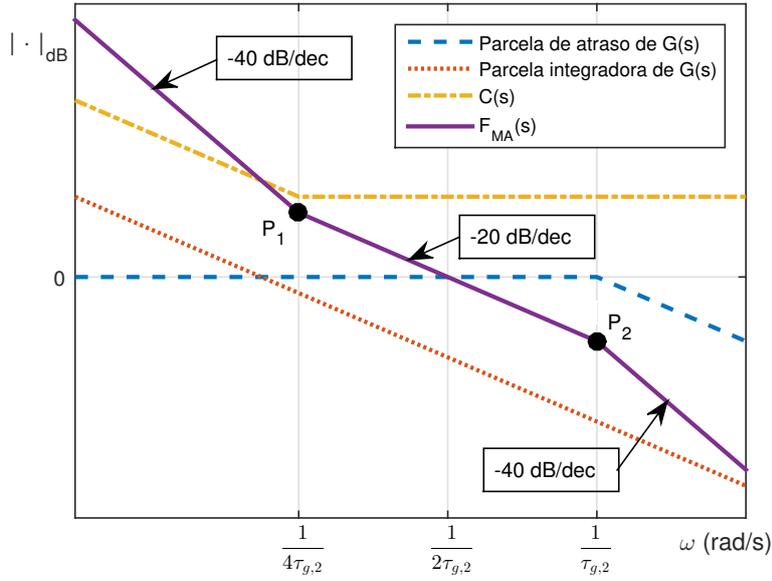


Figura 2.6: Diagrama de ganho de $F_{MA}(s)$ e suas parcelas, com o eixo de frequência angular em escala logarítmica.

Percebe-se a simetria existente no módulo de $F_{MA}(s)$ entre os pontos P_1 e P_2 em torno da frequência angular de cruzamento $\omega = \frac{1}{2\tau_{g,2}}$. A inclinação de -20dB/dec é assegurada entre estes dois pontos. [9] Esta aparência típica do diagrama de ganho da função de transferência em malha aberta atribui o nome à técnica do Ótimo Simétrico.

- Controlador Proporcional Integral Derivativo (PID)

Naturalmente, este controlador é utilizado nos casos em que a planta apresenta um segundo elemento de atraso em sua modelagem. Deste modo, a introdução da nova parcela proporcional-derivativa no controlador vem com o objetivo de anular o efeito do maior elemento de retardo existente na planta.

A partir de uma planta desta natureza e um controlador PID, pode-se escrever a função de transferência do sistema em malha aberta:

$$F_{MA}(s) = \frac{K_c (\tau_{c,1}s + 1) (\tau_{c,2}s + 1)}{\tau_{c,1}s} \frac{1}{\tau_{g,1}s (\tau_{g,2}s + 1) (\tau_{g,3}s + 1)} K_g \quad (2.70)$$

Supondo $\tau_{g,2} > \tau_{g,3}$, verifica-se a relação para o primeiro parâmetro do controlador, a fim de causar o cancelamento:

$$\tau_{c,2} = \tau_{g,2} \quad (2.71)$$

Utilizando este resultado, (2.70) se reduz a:

$$F_{MA}(s) = \frac{K_c (\tau_{c,1}s + 1)}{\tau_{c,1}s} \frac{K_g}{\tau_{g,1}s (\tau_{g,3}s + 1)} \quad (2.72)$$

Esta equação é análoga à do caso anterior, (2.62), em que um controlador PI foi utilizado. Portanto, as expressões para os demais parâmetros do controlador PID podem ser obtidas diretamente de (2.66) e (2.67).

$$K_c = \frac{\tau_{g,1}}{2K_g\tau_{g,3}} \quad (2.73)$$

$$\tau_{c,1} = 4\tau_{g,3} \quad (2.74)$$

Após aplicar (2.73) e (2.74) a (2.72), obtém-se a seguinte função de transferência em malha fechada:

$$F_{MF}(s) = \frac{4\tau_{g,3}s + 1}{8\tau_{g,3}^3s^3 + 8\tau_{g,3}^2s^2 + 4\tau_{g,3}s + 1} \quad (2.75)$$

Esta equação possui a mesma estrutura encontrada no caso anterior, (2.68), e seus coeficientes dependem somente da menor constante de atraso da planta, $\tau_{g,3}$.

Como pôde ser visto nesta seção, as técnicas Ótimo por Módulo e Ótimo Simétrico são de aplicação simples e imediata a partir do conhecimento da planta. Partindo de informações sobre a ordem e a existência de elemento integrador na função de transferência da planta, é possível determinar a técnica a ser escolhida e o tipo de controlador a ser empregado, assim como o ajuste de seus parâmetros. Por serem embasadas na adaptação do módulo da função de transferência do sistema realimentado ao valor unitário, o projeto utilizando estas técnicas asseguram uma operação estável. Com isso, a Otimização por Adaptação de Módulo se mostra como uma boa alternativa para um projeto inicial de controlador.

2.3 Lugar das Raízes

O conhecimento dos polos e zeros de um sistema influi em diversas análises acerca de seu comportamento. Portanto, um estudo sobre o posicionamento desses elementos torna-se uma importante ferramenta no âmbito de projetos de controladores. O lugar das raízes nada mais é do que uma representação gráfica da posição relativa dos polos e zeros de um sistema em malha fechada em função da variação de um determinado parâmetro [7]. Esse diagrama permite uma investigação técnica tanto

sobre a performance no regime transitório quanto sobre a estabilidade do sistema.

Dado o diagrama de blocos da Figura 2.7, em que K é um ganho variável e $F(s)$ é uma função de transferência que possui denominador e numerador mônicos.

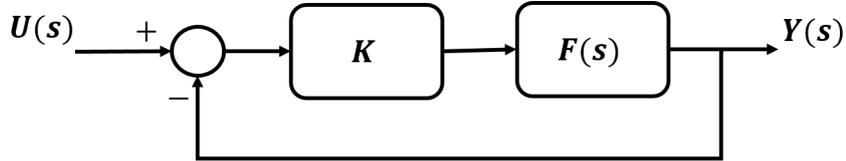


Figura 2.7: Diagrama de blocos de sistema em malha fechada com função de realimentação unitária.

A equação (2.76) apresenta a função de transferência equivalente ao diagrama da Figura 2.7.

$$F_{MF}(s) = \frac{KF(s)}{1 + KF(s)} \quad (2.76)$$

Explicitando $F(s)$ como fração de polinômios, tal que $N_F(s)$ representa o polinômio do numerador e $D_F(s)$ o do denominador, (2.77) apresenta uma nova representação para $F_{MF}(s)$.

$$F_{MF}(s) = \frac{K \left(\frac{N_F(s)}{D_F(s)} \right)}{1 + K \left(\frac{N_F(s)}{D_F(s)} \right)} = \frac{KN_F(s)}{D_F(s) + KN_F(s)} \quad (2.77)$$

As raízes de $D_F(s)$ são os polos finitos de $F(s)$ e as raízes de $N_F(s)$ são os zeros finitos de $F(s)$.

Para funções de transferência que possuem denominador com ordem maior que o numerador, considera-se que uma quantidade de zeros igual a esta diferença de ordem encontra-se alocada no infinito. Isto garante que as funções de transferência de sistemas físicos possuam o mesmo número de polos e zeros.

A partir de (2.77), vê-se que os zeros do sistema realimentado são exatamente os zeros em malha aberta. Já os polos de $F_{MF}(s)$ possuem uma localização mais difícil de ser prevista, pois variam conforme o ganho K é alterado, porém, sabe-se que devem respeitar (2.78).

$$\begin{aligned} 1 + KF(s) &= 0 \\ KF(s) &= -1 \end{aligned} \quad (2.78)$$

A equação (2.78) implica em duas propriedades válidas para todos os polos em

malha fechada:

$$|KF(s)| = 1 \quad (2.79)$$

$$\angle KF(s) = 180^\circ \quad (2.80)$$

Lembrando que, para uma função de transferência $F(s)$ com m zeros finitos e n polos finitos, o módulo e a fase de $KF(s)$ são calculados de acordo com (2.81) e (2.82).

$$|KF(s)| = |K| \frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} \quad (2.81)$$

$$\angle KF(s) = \angle K + \sum_{i=1}^m \angle s - z_i - \sum_{j=1}^n \angle s - p_j \quad (2.82)$$

O lugar das raízes é utilizado para mapear os polos do sistema realimentado, seja em componentes cartesianas (parte real e imaginária) ou em componentes polares (módulo e fase), para diferentes valores de K . Uma representação precisa demanda auxílio de algum programa computacional, contudo, um esboço deste mapeamento pode ser feito sem grandes cálculos, seguindo algumas regras que facilitam sua construção. Algumas destas regras estão exibidas no Apêndice A.

2.4 Modelagem Tensorial de Circuitos Elétricos

Modelagens analíticas de sistemas físicos são peças importantes para seu entendimento e auxiliam na análise de seu comportamento diante de inúmeras situações de interesse. Diversas pesquisas, como [10, 11], utilizam análise linear com formulação no plano complexo a fim de estudar fenômenos elétricos em sistemas de potência, apresentando ótimos resultados em suas modelagens. Entretanto, segundo [6], a formulação complexa pode não ser suficiente na descrição de circuitos lineares rotativos ou circuitos não lineares, e sugere uma metodologia de formulação tensorial para análise linear de redes elétricas.

Importantes contribuições de modelagens tensoriais na área de eletrônica de potência podem ser encontradas neste século. Em [12] é feita a descrição matemática de um conversor CA-CC. Em [13], a formulação tensorial de elementos rotativos e não lineares é apresentada detalhadamente. [4, 5, 14] descrevem dois dispositivos FACTS em regime permanente e transitório: o SVC e o TCSC. Em [2] é apresentada a formulação para o GCSC em regime permanente, e aplicada em [15] para o con-

trole de oscilações eletromecânicas e ressonância subsíncrona. Em [16], o tratamento tensorial é utilizado para investigar o efeito corona em linhas de transmissão. Já em [17], modela-se o funcionamento do Conversor Multinível Modular (MMC) em regime permanente e transitório. Neste trabalho, a modelagem tensorial é aplicada na descrição do comportamento dinâmico do GCSC, visando seu uso em projetos de controladores.

Em um sistema elétrico de corrente alternada, sinais periódicos em regime permanente podem ser escritos como um somatório de senóides de diferentes frequências, amplitudes e fases, de acordo com a Série de Fourier.

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [I_k \cos(k\omega t + \phi_k)] \quad (2.83)$$

Esta equação também pode ser vista da seguinte maneira:

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \quad (2.84)$$

Tal que:

$$I_{Re,k} = I_k \cos(\phi_k) \quad (2.85)$$

$$I_{Im,k} = I_k \text{sen}(\phi_k) \quad (2.86)$$

Ou então:

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{ \Re [(I_{Re,k} + jI_{Im,k}) e^{jk\omega t}] \} \quad (2.87)$$

Logo, o sinal $i(t)$ corresponde a um somatório de projeções de infinitos fasores no eixo real. Cada fasor é descrito por suas componentes complexas ($I_{Re,k}$, $I_{Im,k}$) e sua frequência angular $k\omega t$.

Ao utilizar os fasores na modelagem de um circuito elétrico linear e com sinal de entrada puramente senoidal, como na Figura 2.8, o regime permanente apresenta somente sinais com a frequência fundamental e pode ser representado por uma equação matricial que envolve apenas os parâmetros dos elementos passivos do circuito e as componentes complexas das funções senoidais, como mostra a equação (2.88).

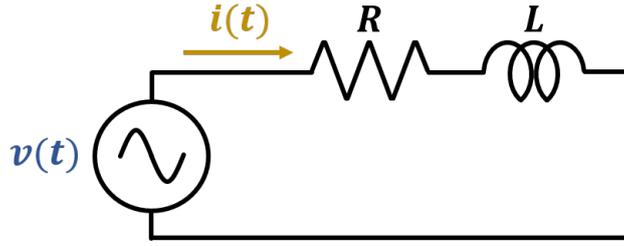


Figura 2.8: Circuito elétrico linear.

$$\begin{bmatrix} V_{Re,1} \\ V_{Im,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & -\omega L \\ \omega L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{Re,1} \\ I_{Im,1} \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Esta relação matricial entre as componentes complexas dos sinais alternados é chamada de tensorial [6]. No caso de circuitos lineares, a correspondência entre as componentes de tensão e corrente também pode ser escrita na forma de multiplicação de números complexos:

$$(V_{Re,1} + jV_{Im,1}) = (R + j\omega L)(I_{Re,1} + jI_{Im,1}) \quad (2.89)$$

Por sua vez, para os casos de circuitos não lineares, Figura 2.9, a relação tensorial também pode ser aplicada, como exibido na equação (2.90).

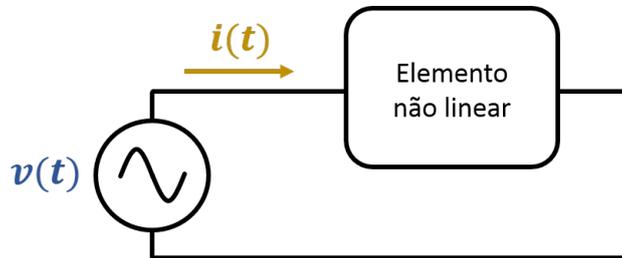


Figura 2.9: Circuito elétrico não linear.

$$\begin{bmatrix} V_{Re} \\ V_{Im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{(I)} & Z_{(II)} \\ Z_{(III)} & Z_{(IV)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{Re} \\ I_{Im} \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Desta vez, mesmo com entrada puramente senoidal, outras frequências podem surgir no sistema em regime permanente. Isto indica que a interação harmônica também pode ter seu comportamento representado tensorialmente de forma incremental. A ordem da equação matricial é dada pelo número de harmônicos considerado. Devido ao fato da matriz de impedâncias não mais garantir a simetria vista no caso linear, isto impossibilita que (2.90) seja escrita como produto de números complexos. [6]

Com certa manipulação, as equações (2.88) e (2.90) também podem ser observadas no domínio do tempo na forma de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) , \quad (2.91)$$

em que $u(t)$ é o vetor relativo ao sinal de entrada e $x(t)$ o vetor das variáveis de estado do sistema. Na abordagem de regime permanente, o vetor de derivadas dos estados é nulo ($\dot{x}(t) = 0$).

Portanto, percebe-se que a representação tensorial é capaz de cobrir uma grande variedade de sistemas elétricos. Apresenta-se abaixo a sequência de passos a serem seguidos para aplicação da modelagem tensorial a um sistema de potência.

- Passo 1: Reunir as equações que descrevem o comportamento físico do sistema.

Por exemplo, o sistema de grandezas genéricas a seguir em regime permanente, em que $x(t)$ representa o sinal de entrada e $y(t)$ e $z(t)$ as variáveis de estado:

$$x(t) = \alpha_1 y(t) + \alpha_2 \frac{dz(t)}{dt} \quad (2.92)$$

$$0 = \alpha_3 \frac{dy(t)}{dt} + \alpha_4 z(t) \quad , \quad (2.93)$$

tal que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\alpha_4 \in \mathbb{R}$.

- Passo 2: Escrever os sinais periódicos na forma descrita por (2.84).

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} [X_{Re,k} \cos(k\omega t) - X_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] &= \alpha_1 \sum_{k=0}^{\infty} [Y_{Re,k} \cos(k\omega t) - Y_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] + \\ &+ \alpha_2 \sum_{k=0}^{\infty} k\omega [-Z_{Re,k} \text{sen}(k\omega t) - Z_{Im,k} \cos(k\omega t)] \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_3 \sum_{k=0}^{\infty} k\omega [-Y_{Re,k} \text{sen}(k\omega t) - Y_{Im,k} \cos(k\omega t)] + \\ &+ \alpha_4 \sum_{k=0}^{\infty} [Z_{Re,k} \cos(k\omega t) - Z_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \end{aligned} \quad (2.95)$$

Observa-se que uma única equação com a soma de parcelas relativas a infinitas frequências diferentes pode ser vista como infinitas equações relativas a

frequências únicas. Assim, para uma determinada frequência $k\omega$:

$$\begin{aligned} [X_{Re,k} \cos(k\omega t) - X_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] &= \alpha_1 [Y_{Re,k} \cos(k\omega t) - Y_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] + \\ &+ \alpha_2 k\omega [-Z_{Re,k} \text{sen}(k\omega t) - Z_{Im,k} \cos(k\omega t)] \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_3 k\omega [-Y_{Re,k} \text{sen}(k\omega t) - Y_{Im,k} \cos(k\omega t)] + \\ &+ \alpha_4 [Z_{Re,k} \cos(k\omega t) - Z_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \end{aligned} \quad (2.97)$$

Por uma perspectiva de álgebra linear, esta forma favorece visualizar o conjunto $\{\cos(k\omega t), -\text{sen}(k\omega t)\}$ de cada frequência $k\omega$ como uma base para um suposto espaço vetorial de senoides nesta frequência. Logo, (2.96) e (2.97) podem ser vistas como combinações lineares dos vetores de sua respectiva base. Isto permite que seja escrito um sistema linear a parte contendo apenas os coeficientes dos vetores da base a fim de solucionar as equações. Além disto, como se trata de vetores linearmente independentes, a resolução de seus coeficientes também pode ser feita em equações independentes.

- Passo 3: Montar sistema linear com os coeficientes das funções senoidais.
 - Equações envolvendo exclusivamente coeficientes da função $\cos(\cdot)$, para uma determinada frequência $k\omega$:

$$X_{Re,k} = \alpha_1 Y_{Re,k} - \alpha_2 k\omega Z_{Im,k} \quad (2.98)$$

$$0 = -\alpha_3 k\omega Y_{Im,k} + \alpha_4 Z_{Re,k} \quad (2.99)$$

- Equações envolvendo exclusivamente coeficientes da função $-\text{sen}(\cdot)$, para uma determinada frequência $k\omega$:

$$X_{Im,k} = \alpha_1 Y_{Im,k} + \alpha_2 k\omega Z_{Re,k} \quad (2.100)$$

$$0 = \alpha_3 k\omega Y_{Re,k} + \alpha_4 Z_{Im,k} \quad (2.101)$$

- Passo 4: Escrever sistema de equações lineares na forma matricial.

Para o exemplo, considera-se $k = 1, 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} Y_{Re,1} \\ Y_{Im,1} \\ Y_{Re,2} \\ Y_{Im,2} \\ Z_{Re,1} \\ Z_{Im,1} \\ Z_{Re,2} \\ Z_{Im,2} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} X_{Re,1} \\ X_{Im,1} \\ X_{Re,2} \\ X_{Im,2} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Tal que:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \omega\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\omega\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 2\omega\alpha_2 & 0 \\ \hline 0 & -\omega\alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \\ \omega\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega\alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{array} \right] \quad (2.103)$$

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array} \right] \quad (2.104)$$

Os passos apresentados podem ser aplicados a sistemas lineares ou não lineares. O exemplo dado corresponde a um sistema linear, logo, a equação (2.102) pode ser solucionada algebricamente. No próximo capítulo tais instruções serão utilizadas na modelagem tensorial de um sistema não linear, cuja resolução das componentes das variáveis de estado dependerá do uso de um processo iterativo.

2.5 Capacitor Série Controlado por Chave Auto-comutada (GCSC)

Em sistemas elétricos de potência, o nicho conceitual denominado FACTS (*Flexible Alternating Current Transmission Systems*) [1] está embasado na utilização de equipamentos eletrônicos ou estáticos para prover aumento da controlabilidade e capacidade de transmissão de potência de um sistema em corrente alternada. O GCSC (*Gate-Controlled Series Capacitor*) é um dispositivo de eletrônica de potência pertencente a este grupo.

O GCSC [18] é de topologia simples, definida como um capacitor em paralelo a um par de chaves autocomutadas em antiparalelo, como exibido na Figura 2.10, e foi criado com a proposta de ser um equipamento dual ao Reator Controlado a Tiristor (TCR) [19].

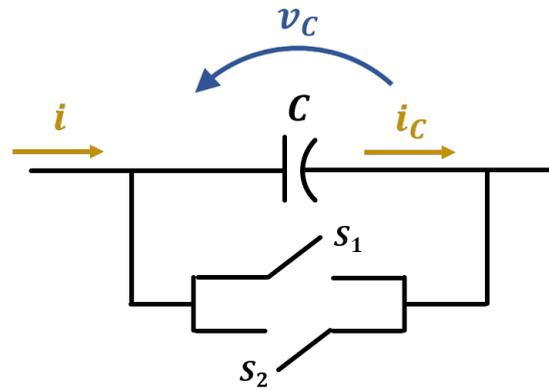


Figura 2.10: Topologia do GCSC.

Este dispositivo é conectado em série com a linha de transmissão e possui um efeito compensador. O controle de disparo das chaves é responsável por gerar uma reatância equivalente variável, tornando o GCSC capaz de auxiliar no balanço do fluxo de potência e no aumento da capacidade de transmissão da linha, assim como no amortecimento de possíveis oscilações de baixa frequência de potência e ressonância subsíncrona [15]. Originalmente, a chave utilizada era o GTO (*Gate Turn-Off Thyristor*), contudo, posteriormente, ampliou-se a possibilidade de uso de outros tipos de semicondutores de potência, como o IGBT (*Insulated Gate Bipolar Transistor*) [3]. Em geral, basta que a chave semicondutora adotada possua a propriedade de autocomutação, a Figura 2.11 exibe a curva característica típica deste tipo de chave [20], em que R_{on} é sua resistência equivalente em condução. Durante o funcionamento do GCSC, as chaves autocomutadas são disparadas e cortadas sempre sob tensão nula, reproduzindo o comportamento de um tiristor dual [21].

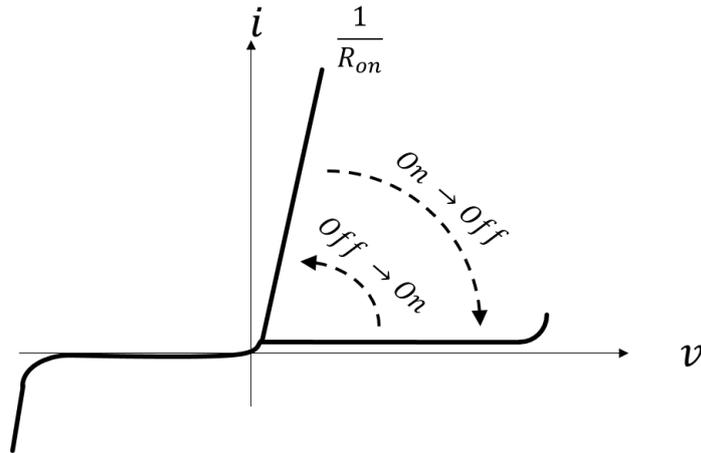


Figura 2.11: Curva característica de chave autocomutada.

Enquanto o GCSC é visto como um compensador de reatância variável, existem equipamentos FACTS de conexão em série que apresentam topologias contendo um conversor tipo fonte de tensão com capacitor conectado em seus terminais, cuja finalidade é sintetizar uma tensão auxiliar variável em série com a linha para agir no controle do fluxo de potência, como o SSSC (*Static Synchronous Series Compensator*). Embora seja uma proposta mais eficiente, esta é uma alternativa mais cara.

Outro dispositivo série do tipo compensador de reatância é o TCSC (*Thyristor Controlled Series Capacitor*), que utiliza o tiristor como semicondutor de potência e é bastante difundido. Em [3], são expostos estudos detalhados que comparam o comportamento entre este dispositivo e o GCSC, revelando que, ao dimensionar os dois equipamentos para uma mesma reatância máxima de operação, o GCSC apresenta corrente de capacitor consideravelmente menor, o que faz com o que a escolha do capacitor do TCSC leve em consideração uma potência reativa mais alta. Além disso, o TCSC necessita de um indutor dimensionado para a mesma corrente de condução do tiristor. No GCSC o uso de indutor é totalmente dispensado, culminando em um equipamento mais compacto.

Para uma corrente de linha (i) puramente senoidal, o gráfico (a) da Figura 2.12 apresenta a curva de tensão no capacitor (v_c) do GCSC:

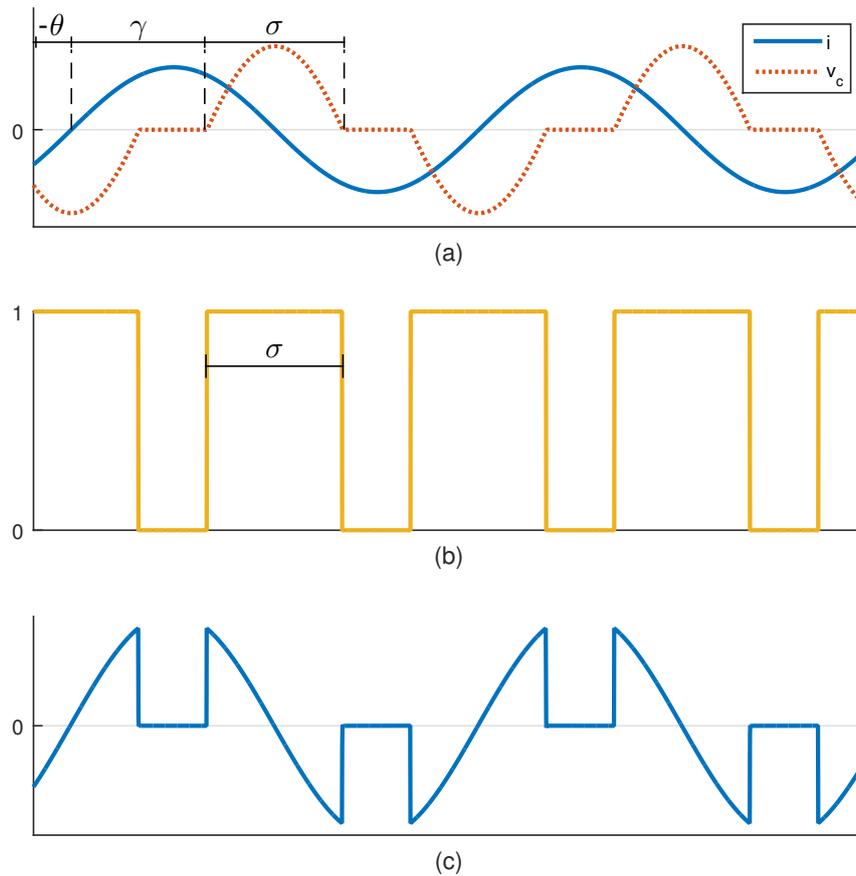


Figura 2.12: (a) Corrente de linha e tensão do capacitor no tempo; (b) Função de chaveamento no tempo; (c) Corrente no capacitor do GCSC.

No gráfico (a) da Figura 2.12, $-\theta$ representa o ângulo entre a corrente de linha e a tensão de referência do sistema; γ é o ângulo de corte das chaves do GCSC e tem como referência o cruzamento da corrente de linha pelo zero; e σ é o ângulo de condução, referente ao tempo em que o capacitor conduz corrente. O gráfico (b) exibe a função de chaveamento que será utilizada na descrição do comportamento do dispositivo. Esta curva possui nível alto nos instantes de passagem de corrente pelo capacitor e nível baixo nos instantes de condução de qualquer uma das duas chaves em antiparalelo. Logo, a corrente do capacitor (i_c) pode ser obtida através do produto entre a corrente de linha e a função de chaveamento (gráfico (c)).

O ângulo de corte γ pode ser variado entre 90° e 180° . Quando igual a 90° , o capacitor encontra-se continuamente inserido no caminho da corrente de linha, caracterizando a situação de contribuição máxima de reatância pelo GCSC, e o ângulo de condução σ é igual a 180° em regime permanente. Quando $\gamma = 180^\circ$, a condução é total pelas chaves, deixando o capacitor em curto circuito a todo tempo.

Esta é uma situação de reatância equivalente nula para o GCSC e o ângulo de condução é zero em regime permanente. Na Figura 2.13 é mostrada a variação da reatância equivalente do dispositivo, para uma frequência fundamental de 60 Hz, em função do ângulo de corte das chaves.

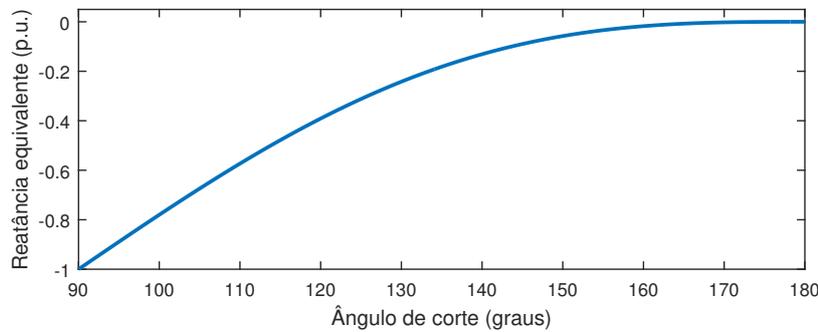


Figura 2.13: Reatância equivalente do GCSC.

2.6 Função de Chaveamento

As funções de chaveamento [22] são relações matemáticas utilizadas para descrever analiticamente o comportamento das chaves em operação e, com isso, auxiliar na modelagem do dispositivo. A função de chaveamento introduzida na seção anterior relaciona a corrente de linha e a corrente que passa pelo capacitor do GCSC. Esta função assume uma operação ideal das chaves semicondutoras, com variações instantâneas entre os níveis alto e baixo, e é dependente dos ângulos $-\theta$, γ e σ , como evidenciado na Figura 2.14. O ângulo $-\theta$ normalmente é obtido através de um circuito de sincronismo PLL (*Phase Locked Loop*) a partir de medições das correntes de linha.

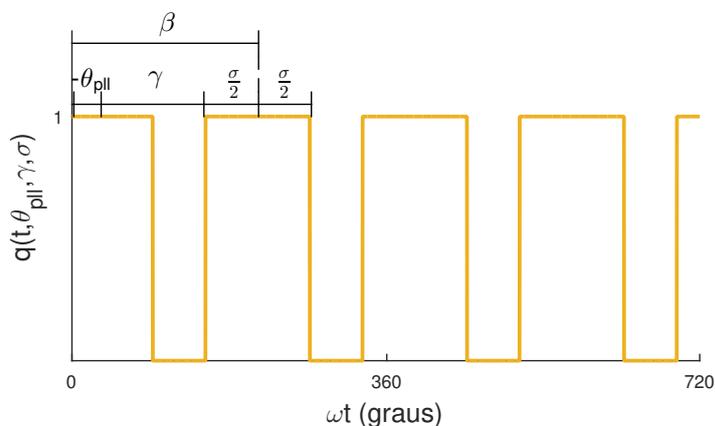


Figura 2.14: Função de chaveamento em relação ao ângulo ωt da tensão de referência do sistema.

Nesta figura, ω é a frequência angular fundamental do sistema e β é um ângulo auxiliar definido como:

$$\beta = -\theta_{pll} + \gamma + \frac{\sigma}{2} \quad (2.105)$$

A função $q(t, \theta_{pll}, \gamma, \sigma)$ compreende os trechos de condução do capacitor nos semiciclos positivo e negativo, portanto, supondo um chaveamento simétrico em um período da frequência angular ω , a função q possuirá exclusivamente componentes harmônicas pares, podendo ser descrita pela seguinte série de Fourier:

$$q = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{q_{(2k)} \cos[2k(\omega t - \beta)]\} \quad (2.106)$$

Tal que:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q \, d(\omega t) \\ \implies q_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} 1 \, d(\omega t) = \frac{\sigma}{\pi} \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} q_{(2k)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q \cos(2k\omega t) \, d(\omega t) \\ \implies q_{(2k)} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} \cos(2k\omega t) \, d(\omega t) = \frac{2\text{sen}(k\sigma)}{k\pi} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Observa-se que o índice $(2k)$ foi utilizado nas amplitudes das componentes senoidais com o intuito de explicitar suas correspondências a oscilações de frequência angular $2k\omega$.

O somatório da função (2.106) deve assumir um valor máximo finito para sua utilização na modelagem do sistema. Como se trata de uma função descontínua, esta aproximação produz o aparecimento de oscilações de alta frequência nos trechos próximos às descontinuidades. Este é um efeito conhecido como fenômeno de Gibbs [23]. A Figura 2.15 ilustra este fato, na consideração de 51 harmônicos no somatório da função q .

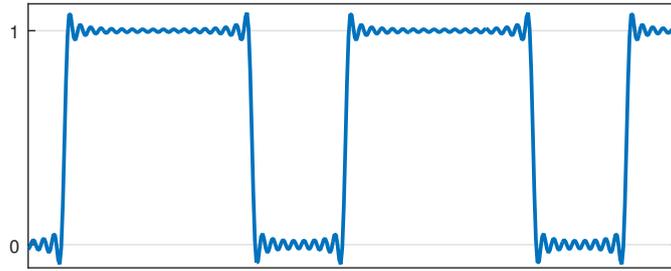


Figura 2.15: Função de chaveamento com 51 harmônicos.

Visando contornar este problema, em [24] é sugerida a substituição das descontinuidades por funções do tipo rampa. A Figura 2.16 mostra este efeito na forma de onda, quanto maior o ângulo ψ , maior a redução das oscilações de alta frequência, porém, menor a qualidade na aproximação da ação de chaveamento original.

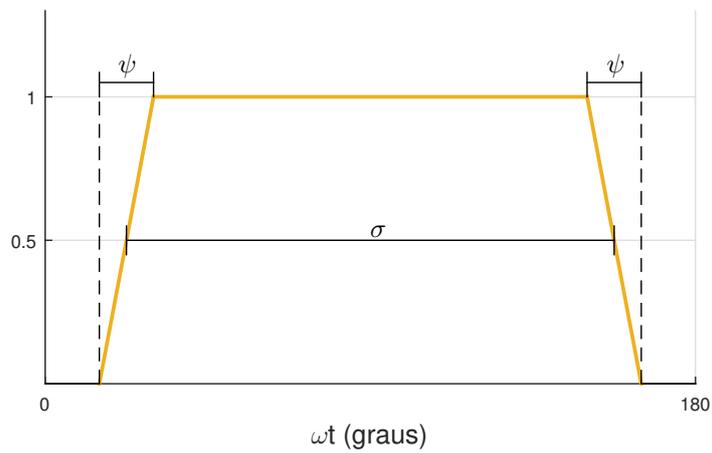


Figura 2.16: Função de chaveamento generalizada.

Para este caso, as componentes da série de Fourier (2.106) são dadas por:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q \, d(\omega t) \\
 \implies q_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} 1 \, d(\omega t) = \frac{\sigma}{\pi}
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\begin{aligned}
 q_{(2k)} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi q \cos(2k\omega t) \, d(\omega t) \\
 \implies q_{(2k)} &= \frac{2}{\pi} \int_{(-\frac{\sigma}{2} + \frac{\psi}{2})}^{(\frac{\sigma}{2} - \frac{\psi}{2})} \cos(2k\omega t) \, d(\omega t) + \\
 &\quad + 2 \left[\frac{2}{\pi} \int_{(-\frac{\sigma}{2} - \frac{\psi}{2})}^{(-\frac{\sigma}{2} + \frac{\psi}{2})} \frac{1}{\psi} \left(\omega t + \frac{\sigma}{2} + \frac{\psi}{2} \right) \cos(2k\omega t) \, d(\omega t) \right] \\
 \implies q_{(2k)} &= \frac{\cos[k(\sigma - \psi)] - \cos[k(\sigma + \psi)]}{\psi k^2 \pi}
 \end{aligned} \tag{2.110}$$

Em (2.110), percebe-se que a amplitude das componentes senoidais é inversamente proporcional à largura ψ da rampa e ao quadrado de sua ordem harmônica k , indicando ser efetivo na redução da amplitude das oscilações de alta frequência.

Em [25], sugere-se um método para a obtenção de uma expressão analítica para a função de chaveamento sem a presença do fenômeno de Gibbs. O método consiste na utilização de funções periódicas auxiliares que possuem singularidades coincidentes com as descontinuidades da função de chaveamento, a fim de cancelar os efeitos das oscilações de alta frequência. Contudo, a expressão analítica resultante não pode ser traduzida no formato de série de Fourier mantendo a eliminação do efeito Gibbs, impossibilitando sua contribuição na modelagem tensorial. Com isso, este método não será aprofundado neste trabalho.

Capítulo 3

Modelagem e Validação do GCSC em Regime Permanente

Neste capítulo é apresentado o desenvolvimento analítico em regime permanente de um sistema elétrico contendo um GCSC, seguindo os fundamentos teóricos de modelagem tensorial introduzidos na Seção 2.4. Após isto, as respostas obtidas com o modelo são comparadas com as obtidas em um programa de análise de transitórios eletromagnéticos de referência a fim de validar seu comportamento.

3.1 Modelagem Analítica em Regime Permanente

O sistema de potência trifásico a ser modelado é exibido na Figura 3.1 em sua forma unifilar. O gerador é representado por uma fonte de tensão (v_G) e uma impedância interna RL em série (R_G e L_G); a linha de transmissão é representada por uma indutância pura (L_T); a carga equivalente é vista como uma impedância RL em série (R_1 e L_1); e o GCSC é composto pelo capacitor (C) e as chaves em antiparalelo (S_1 e S_2).

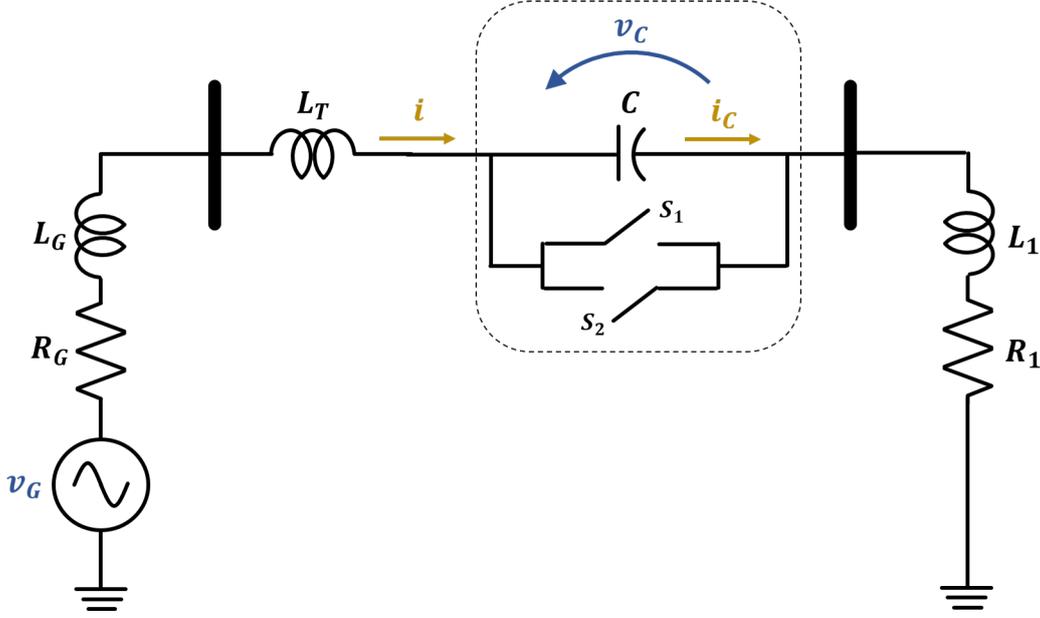


Figura 3.1: Diagrama unifilar do sistema a ser modelado.

De acordo com a Seção 2.4, o primeiro passo para a modelagem consiste em reunir as equações que descrevem o sistema da Figura 3.1. Estas equações são:

$$v_G = Ri + L \frac{di}{dt} + v_C \quad (3.1)$$

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (3.2)$$

$$i_C = q(t, \gamma, \theta_{pl}, \sigma) i \quad (3.3)$$

Tal que $R = (R_G + R_1)$, $L = (L_G + L_T + L_1)$, e $q(t, \gamma, \theta_{pl}, \sigma)$ é a função de chaveamento que relaciona a corrente que passa pelo capacitor do GCSC e a corrente de linha. Esta é uma função variável no tempo e depende dos ângulos de corte γ , de condução σ e de saída do circuito de sincronismo θ_{pl} , introduzidos na Seção 2.5.

Como se trata de um sistema não linear, a solução de suas equações em regime permanente será obtida através de um processo iterativo. O método numérico adotado para esta modelagem é o método de Newton-Raphson. Logo, antes de prosseguir, o conjunto de equações deve ser linearizado. A fim de reduzir a ordem do sistema, as equações (3.2) e (3.3) são combinadas para eliminar a dependência da variável i_C .

$$R\Delta i + L \frac{d\Delta i}{dt} + \Delta v_C = v_G - Ri - L \frac{di}{dt} - v_C \quad (3.4)$$

$$q\Delta i + \frac{\partial q}{\partial \gamma} i \Delta \gamma + \frac{\partial q}{\partial \theta_{pl}} i \Delta \theta_{pl} + \frac{\partial q}{\partial \sigma} i \Delta \sigma - C \frac{d\Delta v_C}{dt} = C \frac{dv_C}{dt} - qi \quad (3.5)$$

Nas equações (3.4) e (3.5), as variáveis com o símbolo Δ representam pequenos desvios em torno do ponto de operação.

Em regime permanente, pode-se considerar o ângulo da corrente de linha (θ) idêntico ao ângulo rastreado pelo circuito PLL (θ_{pll}). Além disso, neste ponto, assume-se a modelagem de um sistema em malha aberta, portanto, o ângulo de corte das chaves do GCSC é fixo. Assim, a equação (3.5) pode ser simplificada da seguinte forma:

$$q\Delta i + \frac{\partial q}{\partial \theta} i \Delta \theta + \frac{\partial q}{\partial \sigma} i \Delta \sigma - C \frac{d\Delta v_C}{dt} = C \frac{dv_C}{dt} - qi \quad (3.6)$$

O próximo passo para a modelagem tensorial é reescrever os sinais periódicos na forma dada pela equação (2.84), tornando-os somatórios de componentes senoidais como exibido a seguir:

$$v_G = \sum_{k=0}^{\infty} [V_{G_{Re,k}} \cos(k\omega t) - V_{G_{Im,k}} \text{sen}(k\omega t)], \quad (3.7)$$

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)], \quad (3.8)$$

$$v_C = \sum_{k=0}^{\infty} [V_{C_{Re,k}} \cos(k\omega t) - V_{C_{Im,k}} \text{sen}(k\omega t)], \quad (3.9)$$

$$q = \sum_{k=0}^{\infty} [Q_{Re,k} \cos(k\omega t) - Q_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)], \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial Q}{\partial \theta}_{Re,k} \cos(k\omega t) - \frac{\partial Q}{\partial \theta}_{Im,k} \text{sen}(k\omega t) \right], \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial Q}{\partial \sigma}_{Re,k} \cos(k\omega t) - \frac{\partial Q}{\partial \sigma}_{Im,k} \text{sen}(k\omega t) \right]. \quad (3.12)$$

Assume-se os desvios de tensão e corrente alternada também escritos desta maneira:

$$\Delta i = \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta I_{Re,k} \cos(k\omega t) - \Delta I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)], \quad (3.13)$$

$$\Delta v_C = \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta V_{C_{Re,k}} \cos(k\omega t) - \Delta V_{C_{Im,k}} \text{sen}(k\omega t)]. \quad (3.14)$$

Considerando q uma função de chaveamento ideal, sua série de Fourier é dada

por (3.15), como introduzido na Seção 2.6.

$$q = \frac{\sigma}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\text{sen}(k\sigma)}{k\pi} \cos[2k(\omega t - \beta)] \right\} \quad (3.15)$$

Tal que:

$$\beta = -\theta + \gamma + \frac{\sigma}{2} \quad (3.16)$$

Comparando as equações (3.10) e (3.15), deduz-se que para valores de k não nulos e ímpares:

$$Q_{Re,k} = 0 \quad (3.17)$$

$$Q_{Im,k} = 0 \quad (3.18)$$

Já para valores de k não nulos e pares:

$$Q_{Re,k} = \frac{2\text{sen}(k\sigma)}{k\pi} \cos(2k\beta) \quad (3.19)$$

$$Q_{Im,k} = -\frac{2\text{sen}(k\sigma)}{k\pi} \text{sen}(2k\beta) \quad (3.20)$$

E para $k = 0$:

$$Q_{Re,k} = \frac{\sigma}{\pi} \quad (3.21)$$

$$Q_{Im,k} = 0 \quad (3.22)$$

Derivando a função de chaveamento em relação a θ e a σ , conseqüentemente, obtém-se para valores de k não nulos e pares:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta}_{Re,k} = \frac{4\text{sen}(k\sigma)}{\pi} \text{sen}(2k\beta) \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta}_{Im,k} = \frac{4\text{sen}(k\sigma)}{\pi} \cos(2k\beta) \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma}_{Re,k} = \frac{2 \cos(k\sigma)}{\pi} \cos(2k\beta) - \frac{4\text{sen}(k\sigma)}{\pi} \text{sen}(2k\beta) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma}_{Im,k} = -\frac{2 \cos(k\sigma)}{\pi} \text{sen}(2k\beta) - \frac{4\text{sen}(k\sigma)}{\pi} \cos(2k\beta) \quad (3.26)$$

Para $k = 0$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_{Re,k}} = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_{Im,k}} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{Re,k}} = \frac{1}{\sigma} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{Im,k}} = 0 \quad (3.30)$$

Para valores de k não nulos e ímpares, todas as componentes de derivadas parciais são iguais a zero, pois as próprias componentes $Q_{Re,k}$ e $Q_{Im,k}$ já são nulas, como visto em (3.17) e (3.18).

Substituindo os somatórios em (3.7)-(3.14) nas equações do sistema (3.4) e (3.6), encontra-se o seguinte:

$$\begin{aligned} & R \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta I_{Re,k} \cos(k\omega t) - \Delta I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] + \\ & + L \sum_{k=0}^{\infty} k\omega [-\Delta I_{Re,k} \text{sen}(k\omega t) - \Delta I_{Im,k} \cos(k\omega t)] + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta V_{C_{Re,k}} \cos(k\omega t) - \Delta V_{C_{Im,k}} \text{sen}(k\omega t)] = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} [V_{G_{Re,k}} \cos(k\omega t) - V_{G_{Im,k}} \text{sen}(k\omega t)] + \\ & - R \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] + \\ & - L \sum_{k=0}^{\infty} k\omega [-I_{Re,k} \text{sen}(k\omega t) - I_{Im,k} \cos(k\omega t)] + \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} [V_{C_{Re,k}} \cos(k\omega t) - V_{C_{Im,k}} \text{sen}(k\omega t)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} [Q_{Re,k} \cos(k\omega t) - Q_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta I_{Re,k} \cos(k\omega t) - \Delta I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial Q}{\partial \theta} \Big|_{Re,k} \cos(k\omega t) - \frac{\partial Q}{\partial \theta} \Big|_{Im,k} \text{sen}(k\omega t) \right] \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \Delta \theta + \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \Big|_{Re,k} \cos(k\omega t) - \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \Big|_{Im,k} \text{sen}(k\omega t) \right] \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \Delta \sigma + \\
& - C \sum_{k=0}^{\infty} k\omega [-\Delta V_{C_{Re,k}} \text{sen}(k\omega t) - \Delta V_{C_{Im,k}} \cos(k\omega t)] = \\
& C \sum_{k=0}^{\infty} k\omega [-V_{C_{Re,k}} \text{sen}(k\omega t) - V_{C_{Im,k}} \cos(k\omega t)] + \\
& - \sum_{k=0}^{\infty} [Q_{Re,k} \cos(k\omega t) - Q_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Contudo, ainda não é possível prosseguir ao passo de montar um sistema formado apenas pelas componentes reais e imaginárias dos sinais, pois (3.32) não se apresenta como uma combinação linear de $\cos(k\omega t)$ e $-\text{sen}(k\omega t)$. Esta equação possui produtos de séries que precisam ser manipulados para permitir a continuação da modelagem. A seguir é mostrado como o produto entre a função de chaveamento e a corrente de linha deve se apresentar após a manipulação:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} [Q_{Re,k} \cos(k\omega t) - Q_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] = \\
& \sum_{k=0}^{\infty} [X_{Re,k} \cos(k\omega t) - X_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Assim, o produto qi passa a ser conhecido como uma variável x que possui a forma dada pela equação (2.84). A fim de deduzir expressões para as componentes $X_{Re,k}$ e $X_{Im,k}$, a função x pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} [& Q_{Re,l} I_{Re,m} \cos(l\omega t) \cos(m\omega t) - Q_{Im,l} I_{Re,m} \text{sen}(l\omega t) \cos(m\omega t) + \\
& - Q_{Re,l} I_{Im,m} \cos(l\omega t) \text{sen}(m\omega t) + Q_{Im,l} I_{Im,m} \text{sen}(l\omega t) \text{sen}(m\omega t)] \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Os produtos de funções trigonométricas em (3.34) podem ser transformados em

somas através de relações conhecidas, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \right. & Q_{Re,l} I_{Re,m} \frac{\cos[(l+m)\omega t] + \cos[(l-m)\omega t]}{2} + \\
& - Q_{Im,l} I_{Re,m} \frac{\text{sen}[(l+m)\omega t] + \text{sen}[(l-m)\omega t]}{2} + \\
& - Q_{Re,l} I_{Im,m} \frac{\text{sen}[(l+m)\omega t] - \text{sen}[(l-m)\omega t]}{2} + \\
& \left. + Q_{Im,l} I_{Im,m} \frac{-\cos[(l+m)\omega t] + \cos[(l-m)\omega t]}{2} \right\} \quad (3.35)
\end{aligned}$$

Agrupando as funções trigonométricas de argumentos semelhantes, encontra-se:

$$\begin{aligned}
x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \right. & \frac{1}{2} (Q_{Re,l} I_{Re,m} - Q_{Im,l} I_{Im,m}) \cos[(l+m)\omega t] + \\
& + \frac{1}{2} (-Q_{Im,l} I_{Re,m} - Q_{Re,l} I_{Im,m}) \text{sen}[(l+m)\omega t] + \\
& + \frac{1}{2} (Q_{Re,l} I_{Re,m} + Q_{Im,l} I_{Im,m}) \cos[(l-m)\omega t] + \\
& \left. + \frac{1}{2} (-Q_{Im,l} I_{Re,m} + Q_{Re,l} I_{Im,m}) \text{sen}[(l-m)\omega t] \right\} \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Na equação (3.34), deve-se analisar os casos em que as frequências angulares $(l+m)\omega$ e $(l-m)\omega$ correspondem a $k\omega$ ou $-k\omega$ a fim de encontrar a forma desejada para a função x . Para isto, o índice l pode ser colocado em função de m e k durante a avaliação de cada caso:

- $(l+m) \geq 0$:

$$l+m = k \implies l = k - m$$

$$l \geq 0 \implies k - m \geq 0 \implies m \leq k$$

$$\implies \cos[(l+m)\omega t] = \cos(k\omega t)$$

$$\implies \text{sen}[(l+m)\omega t] = \text{sen}(k\omega t) \quad (3.37)$$

- $(l - m) \geq 0$:

$$\begin{aligned}
l - m = k &\implies l = k + m \\
l \geq 0 &\implies k + m \geq 0 \implies m \geq -k \implies m \geq 0 \\
\implies \cos[(l - m)\omega t] &= \cos(k\omega t) \\
\implies \text{sen}[(l - m)\omega t] &= \text{sen}(k\omega t)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

- $(l - m) < 0$:

$$\begin{aligned}
l - m = -k &\implies l = m - k \\
l \geq 0 &\implies m - k \geq 0 \implies m \geq k \\
\implies \cos[(l - m)\omega t] &= \cos(-k\omega t) = \cos(k\omega t) \\
\implies \text{sen}[(l - m)\omega t] &= \text{sen}(-k\omega t) = -\text{sen}(k\omega t)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Aplicando-se os resultados dos três casos na equação (3.36), encontram-se as componentes real e imaginária da função x para um determinado valor de k :

$$\begin{aligned}
X_{Re,k} &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^k (Q_{Re,(k-m)} I_{Re,m} - Q_{Im,(k-m)} I_{Im,m}) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (Q_{Re,(k+m)} I_{Re,m} + Q_{Im,(k+m)} I_{Im,m}) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m=k}^{\infty} (Q_{Re,(m-k)} I_{Re,m} + Q_{Im,(m-k)} I_{Im,m})
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
X_{Im,k} &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^k (Q_{Im,(k-m)} I_{Re,m} + Q_{Re,(k-m)} I_{Im,m}) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} (Q_{Im,(k+m)} I_{Re,m} - Q_{Re,(k+m)} I_{Im,m}) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m=k}^{\infty} (-Q_{Im,(m-k)} I_{Re,m} + Q_{Re,(m-k)} I_{Im,m})
\end{aligned} \tag{3.41}$$

O mesmo desenvolvimento pode ser feito para os demais produtos de séries na

equação (3.32). Assim, define-se as seguintes variáveis para tal:

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} [Q_{Re,k} \cos(k\omega t) - Q_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \sum_{k=0}^{\infty} [\Delta I_{Re,k} \cos(k\omega t) - \Delta I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \quad (3.42)$$

$$y_{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial Q}{\partial \theta} \Big|_{Re,k} \cos(k\omega t) - \frac{\partial Q}{\partial \theta} \Big|_{Im,k} \text{sen}(k\omega t) \right] \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \quad (3.43)$$

$$y_{\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \Big|_{Re,k} \cos(k\omega t) - \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \Big|_{Im,k} \text{sen}(k\omega t) \right] \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \quad (3.44)$$

Os coeficientes reais e imaginários de z , y_{θ} e y_{σ} são análogos aos obtidos em (3.40) e (3.41).

Retomando à equação (3.32), é possível reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} [Z_{Re,k} \cos(k\omega t) - Z_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} [Y_{\theta Re,k} \cos(k\omega t) - Y_{\theta Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \Delta \theta + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} [Y_{\sigma Re,k} \cos(k\omega t) - Y_{\sigma Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \Delta \sigma + \\ & - C \sum_{k=0}^{\infty} k\omega [-\Delta V_{C Re,k} \text{sen}(k\omega t) - \Delta V_{C Im,k} \cos(k\omega t)] = \\ & C \sum_{k=0}^{\infty} k\omega [-V_{C Re,k} \text{sen}(k\omega t) - V_{C Im,k} \cos(k\omega t)] + \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} [X_{Re,k} \cos(k\omega t) - X_{Im,k} \text{sen}(k\omega t)] \end{aligned} \quad (3.45)$$

Em (3.45) percebe-se que a segunda equação diferencial do sistema passa a ser vista como uma combinação linear de $\cos(k\omega t)$ e $-\text{sen}(k\omega t)$, assim como já se apresentava a primeira equação descritiva do sistema (3.31).

Com isso, torna-se praticável avançar ao próximo passo da modelagem. Um sistema linear formado apenas pelos coeficientes de (3.31) e (3.45) é apresentado a seguir para um determinado valor de k , tal que (3.46) e (3.48) são referentes às

parcelas ligadas a $\cos(k\omega t)$, (3.47) e (3.49) são relacionadas a parcelas de $-\text{sen}(k\omega t)$.

$$R\Delta I_{Re,k} - k\omega L\Delta I_{Im,k} + \Delta V_{C_{Re,k}} = V_{G_{Re,k}} - RI_{Re,k} + k\omega LI_{Im,k} - V_{C_{Re,k}} \quad (3.46)$$

$$R\Delta I_{Im,k} + k\omega L\Delta I_{Re,k} + \Delta V_{C_{Im,k}} = V_{G_{Im,k}} - RI_{Im,k} - k\omega LI_{Re,k} - V_{C_{Im,k}} \quad (3.47)$$

$$Z_{Re,k} + Y_{\theta_{Re,k}}\Delta\theta + Y_{\sigma_{Re,k}}\Delta\sigma + k\omega C\Delta V_{C_{Im,k}} = -k\omega CV_{C_{Im,k}} - X_{Re,k} \quad (3.48)$$

$$Z_{Im,k} + Y_{\theta_{Im,k}}\Delta\theta + Y_{\sigma_{Im,k}}\Delta\sigma - k\omega C\Delta V_{C_{Re,k}} = k\omega CV_{C_{Re,k}} - X_{Im,k} \quad (3.49)$$

Para a montagem do sistema matricial total deve-se incorporar uma equação relacionada a cada um dos desvios de ângulo, atribuindo ao sistema um número igual de desvios e equações.

Como foi definido na Seção 2.4, a corrente de linha encontra-se atrasada da tensão de referência por um ângulo $-\theta$ (Figura 2.12). No presente trabalho, a detecção desta defasagem é feita através de um circuito PLL que possui característica de um filtro passa baixa. Assim, em regime permanente, é possível estabelecer uma relação para este ângulo utilizando somente os coeficientes de ordem fundamental da corrente de linha. Para isto, a equação (3.50) exhibe a expressão no tempo da componente fundamental i_1 da corrente de linha, de amplitude I_1 .

$$\begin{aligned} i_1 &= I_1 \text{sen}[\omega t - (-\theta)] \\ \implies i_1 &= -I_1 \text{sen}(-\theta) \cos(\omega t) + I_1 \cos(-\theta) \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

A equação (3.51) mostra a corrente i_1 escrita na forma (2.84).

$$i_1 = I_{Re,1} \cos(\omega t) - I_{Im,1} \text{sen}(\omega t) \quad (3.51)$$

Combinando as equações (3.50) e (3.51), pode-se encontrar que:

$$\cos(-\theta)I_{Re,1} - \text{sen}(-\theta)I_{Im,1} = 0 \quad (3.52)$$

A expressão (3.52) define o comportamento do ângulo θ em função dos coeficientes de primeira ordem da corrente de linha. A equação (3.53) apresenta sua linearização a fim de compor o sistema matricial.

$$\begin{aligned} \cos(-\theta)\Delta I_{Re,1} - \text{sen}(-\theta)\Delta I_{Im,1} + [\text{sen}(-\theta)I_{Re,1} + \cos(-\theta)I_{Im,1}]\Delta\theta = \\ - \cos(-\theta)I_{Re,1} + \text{sen}(-\theta)I_{Im,1} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Para a modelagem do ângulo de condução σ , utiliza-se o fato de que, uma vez que o capacitor entra em condução, o ângulo σ está relacionado ao trecho que a

tensão do capacitor leva para alcançar novamente o valor nulo (Figura 2.12). Uma vez que a tensão do capacitor é dada pela integral de sua corrente e, durante cada trecho de condução, a corrente do capacitor é a própria corrente de linha, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} & \int_{-\theta+\gamma}^{-\theta+\gamma+\sigma} i d(\omega t) = 0 \\ \Rightarrow & \int_{-\theta+\gamma}^{-\theta+\gamma+\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k} \cos(k\omega t) - I_{Im,k} \sin(k\omega t)] d(\omega t) = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Resultando em:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left(I_{Re,k} \left\{ \frac{\text{sen}[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\text{sen}[k(-\theta + \gamma)]}{k} \right\} + \right. \\ & \left. + I_{Im,k} \left\{ \frac{\cos[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\cos[k(-\theta + \gamma)]}{k} \right\} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

A linearização da equação (3.55) é dada por:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{\text{sen}[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\text{sen}[k(-\theta + \gamma)]}{k} \right\} \Delta I_{Re,k} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{\cos[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\cos[k(-\theta + \gamma)]}{k} \right\} \Delta I_{Im,k} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(I_{Re,k} \{ -\cos[k(-\theta + \gamma + \sigma)] + \cos[k(-\theta + \gamma)] \} + \right. \\ & \left. + I_{Im,k} \{ \text{sen}[k(-\theta + \gamma + \sigma)] - \text{sen}[k(-\theta + \gamma)] \} \right) \Delta \theta + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(I_{Re,k} \{ \cos[k(-\theta + \gamma + \sigma)] \} - I_{Im,k} \{ \text{sen}[k(-\theta + \gamma + \sigma)] \} \right) \Delta \sigma = \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \left(I_{Re,k} \left\{ \frac{\text{sen}[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\text{sen}[k(-\theta + \gamma)]}{k} \right\} + \right. \\ & \left. + I_{Im,k} \left\{ \frac{\cos[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\cos[k(-\theta + \gamma)]}{k} \right\} \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

A equação (3.56) se torna a última a compor o conjunto de equações. Para a representação matricial deve ser estipulado um valor máximo k_{max} de harmônicos a serem considerados nas equações. De forma que os termos que possuem índice $k + m$ (como em (3.40) e (3.41)) devem ter seus harmônicos calculados até o valor $2k_{max}$. Este conjunto de equações permite a solução de todos os coeficientes do sistema através de um processo iterativo. Supondo o chaveamento simétrico das chaves do GCSC, as variáveis de tensão e corrente possuem apenas harmônicos ímpares. O

Para $m = k$:

$$a_{k,m}^{(1,1)} = \frac{1}{2} (Q_{Re,(2k)} + 2Q_{Re,0}) \quad (3.66)$$

$$a_{k,m}^{(1,2)} = \frac{1}{2} (Q_{Im,(2k)}) \quad (3.67)$$

$$a_{k,m}^{(2,1)} = \frac{1}{2} (Q_{Im,(2k)}) \quad (3.68)$$

$$a_{k,m}^{(2,2)} = \frac{1}{2} (-Q_{Re,(2k)} + 2Q_{Re,0}) \quad (3.69)$$

Além disso, ainda do lado esquerdo de (3.57):

$$b_1^{(1,1)} = \cos(-\theta) \quad (3.70)$$

$$b_1^{(2,1)} = -\text{sen}(-\theta) \quad (3.71)$$

$$c = \text{sen}(-\theta)I_{Re,1} + \cos(-\theta)I_{Im,1} \quad (3.72)$$

$$d_k^{(1,1)} = \frac{\text{sen}[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\text{sen}[k(-\theta + \gamma)]}{k} \quad (3.73)$$

$$d_k^{(1,2)} = \frac{\cos[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\cos[k(-\theta + \gamma)]}{k} \quad (3.74)$$

$$e = \sum_{k=0}^{k_{max}} (I_{Re,k} \{ -\cos[k(-\theta + \gamma + \sigma)] + \cos[k(-\theta + \gamma)] \} + I_{Im,k} \{ \text{sen}[k(-\theta + \gamma + \sigma)] - \text{sen}[k(-\theta + \gamma)] \}) \quad (3.75)$$

$$f = \sum_{k=0}^{k_{max}} (I_{Re,k} \{ \cos[k(-\theta + \gamma + \sigma)] \} - I_{Im,k} \{ \text{sen}[k(-\theta + \gamma + \sigma)] \}) \quad (3.76)$$

E, por fim, do lado direito:

$$g_{Re,k} = V_{G_{Re,k}} - RI_{Re,k} + k\omega LI_{Im,k} - V_{C_{Re,k}} \quad (3.77)$$

$$g_{Im,k} = V_{G_{Im,k}} - RI_{Im,k} - k\omega LI_{Re,k} - V_{C_{Im,k}} \quad (3.78)$$

$$h_{Re,k} = -k\omega CV_{C_{Im,k}} - X_{Re,k} \quad (3.79)$$

$$h_{Im,k} = k\omega CV_{C_{Re,k}} - X_{Im,k} \quad (3.80)$$

$$i = -\cos(-\theta)I_{Re,1} + \sin(-\theta)I_{Im,1} \quad (3.81)$$

$$j = -\sum_{k=1}^{k_{max}} \left(I_{Re,k} \left\{ \frac{\sin[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\sin[k(-\theta + \gamma)]}{k} \right\} + I_{Im,k} \left\{ \frac{\cos[k(-\theta + \gamma + \sigma)]}{k} - \frac{\cos[k(-\theta + \gamma)]}{k} \right\} \right) \quad (3.82)$$

A matriz jacobiana da equação (3.57) possui a seguinte forma:

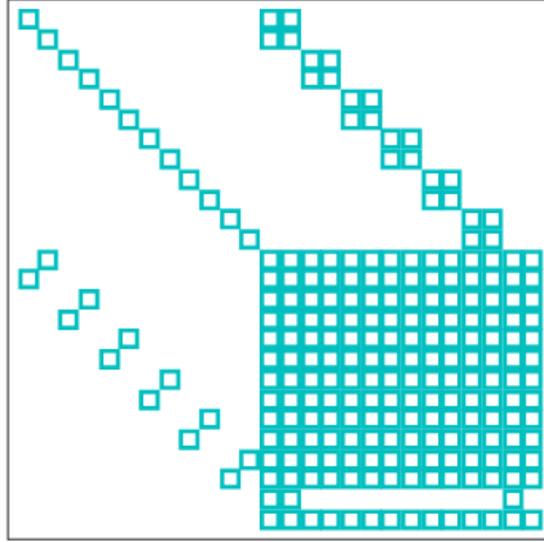


Figura 3.2: Representação da posição dos elementos não nulos da matriz jacobiana.

Na Figura 3.2, a parte cheia da matriz jacobiana (elementos $a_{k,m}$) simboliza a não linearidade da função de chaveamento. Através desta representação matricial, é possível ter maior compreensão sobre o fenômeno da interação harmônica, em que cada elemento $a_{k,m}$ retrata a influência do harmônico m no cálculo dos coeficientes da oscilação harmônica de ordem k . Além do mais, permite um melhor dimensionamento da contribuição individual de cada harmônico na interação total de cada coeficiente de oscilação.

Assim, o método de Newton-Raphson é cumprido ao resolver (3.57) a cada iteração de forma a reduzir todos os desvios a um valor de módulo abaixo de um valor de tolerância. Para isso, a cada iteração deve ser realizada a seguinte atualização:

$$V_{C_{Re,k}}^{(n+1)} = V_{C_{Re,k}}^{(n)} + \Delta V_{C_{Re,k}}^{(n)} \quad (3.83)$$

$$V_{C_{Im,k}}^{(n+1)} = V_{C_{Im,k}}^{(n)} + \Delta V_{C_{Im,k}}^{(n)} \quad (3.84)$$

$$I_{Re,k}^{(n+1)} = I_{Re,k}^{(n)} + \Delta I_{Re,k}^{(n)} \quad (3.85)$$

$$I_{Im,k}^{(n+1)} = I_{Im,k}^{(n)} + \Delta I_{Im,k}^{(n)} \quad (3.86)$$

$$\theta^{(n+1)} = \theta^{(n)} + \Delta\theta^{(n)} \quad (3.87)$$

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} + \Delta\sigma^{(n)} \quad (3.88)$$

Em que o sobrescrito (n) representa as variáveis na iteração atual e o sobrescrito $(n + 1)$ as variáveis a serem utilizadas na iteração seguinte.

A modelagem das fases b e c pode ser feita de maneira análoga, contudo, tratando-se de um sistema balanceado, é possível utilizar os resultados já obtidos com a fase a para os cálculos dos coeficientes das demais fases. A seguir são exibidas relações fasoriais conhecidas para as três fases de uma componente harmônica k de uma variável genérica do sistema, $h(t)$.

$$\tilde{H}_{a_k} = H_{a_{Re,k}} + jH_{a_{Im,k}} \quad (3.89)$$

$$\tilde{H}_{b_k} = (H_{a_{Re,k}} + jH_{a_{Im,k}})e^{j(-120^\circ)} \quad (3.90)$$

$$\tilde{H}_{c_k} = (H_{a_{Re,k}} + jH_{a_{Im,k}})e^{j(+120^\circ)} \quad (3.91)$$

A partir das equações (3.89)-(3.91), deduz-se que:

$$H_{b_{Re,k}} = H_{a_{Re,k}} \cos[k(-120^\circ)] - H_{a_{Im,k}} \text{sen}[k(-120^\circ)] \quad (3.92)$$

$$H_{b_{Im,k}} = H_{a_{Im,k}} \cos[k(-120^\circ)] + H_{a_{Re,k}} \text{sen}[k(-120^\circ)] \quad (3.93)$$

$$H_{c_{Re,k}} = H_{a_{Re,k}} \cos[k(+120^\circ)] - H_{a_{Im,k}} \text{sen}[k(+120^\circ)] \quad (3.94)$$

$$H_{c_{Im,k}} = H_{a_{Im,k}} \cos[k(+120^\circ)] + H_{a_{Re,k}} \text{sen}[k(+120^\circ)] \quad (3.95)$$

As equações (3.92)-(3.95) serão utilizadas no processo de validação de variáveis das fases b e c .

3.2 Validação da Modelagem em Regime Permanente

Para a validação, um programa computacional contendo a modelagem do sistema, como apresentada na seção anterior, foi desenvolvido em MATLAB a fim de ter seus resultados confrontados com o programa de referência, o simulador de transitórios eletromagnéticos PSCAD/EMTDC.

3.2.1 Descrição da Simulação

A seguir são apresentados os detalhes da simulação. A Figura 3.3 exibe o circuito elétrico trifásico contendo o GCSC, em que os elementos de circuito estão dispostos de acordo com o diagrama unifilar da Figura 3.1 para facilitar a verificação.

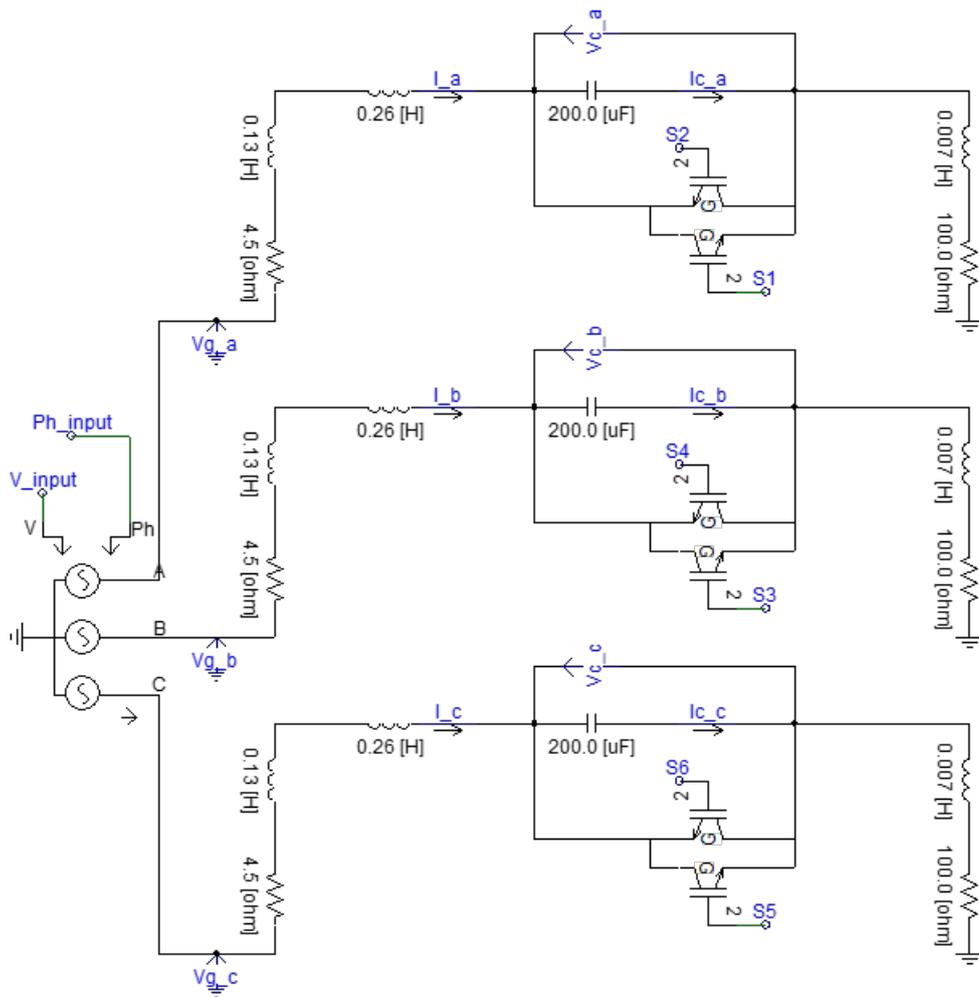


Figura 3.3: Circuito trifásico de simulação.

Para a análise em regime permanente, os dados de amplitude (sinal V_input) e fase (sinal Ph_input) para a fonte controlada de tensão que representa o gerador

são definidos por valores constantes. O sistema de estudo deste trabalho possui frequência igual a 60Hz e tensão fase-neutro eficaz igual a 65kV em operação normal. Contudo, o elemento de fonte trifásica do PSCAD demanda como dado de entrada o módulo da tensão fase-fase eficaz (em quilovolt). Já o dado de entrada de fase (em graus) se refere à tensão fase-neutro da fase a , que é o sinal de referência angular do atual sistema.

Embora a tensão fase-neutro do gerador seja a referência do sistema, o ângulo de corte das chaves do GCSC tem como referência a corrente de linha. Logo, para o conhecimento do ângulo de corrente, utilizou-se o bloco PLL do simulador:

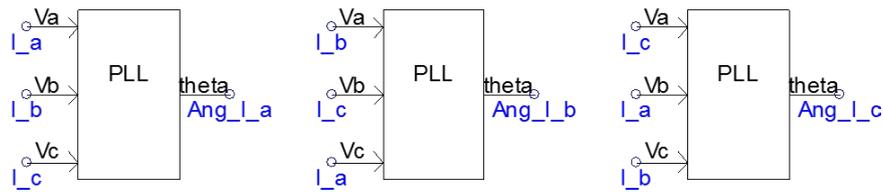


Figura 3.4: Circuitos PLL para correntes de linha.

A saída do bloco PLL fornece o ângulo do sinal de corrente atualizado a cada instante de tempo, tomando a forma de uma onda dente de serra de amplitude igual a 360° . Com o objetivo de computar o ângulo de fase do fasor de corrente em relação à fase de referência do sistema, utiliza-se um bloco PLL também na tensão do gerador:

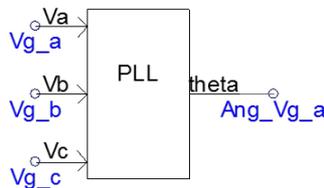


Figura 3.5: Circuito PLL para sinal de referência angular.

A diferença entre o ângulo da corrente de linha e o ângulo de referência fornece o ângulo de fase θ utilizado na modelagem da seção anterior. Para auxiliar no efeito de representação estática, esta diferença ainda recebe um tratamento através de um bloco de código em linguagem C para que seu módulo nunca ultrapasse 180° , como exibido na Figura 3.6.

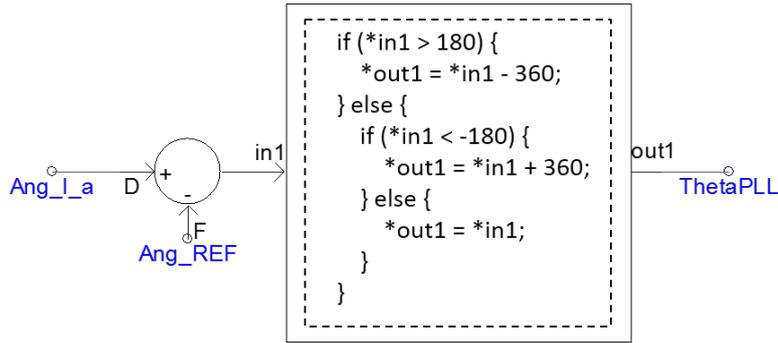


Figura 3.6: Cálculo do ângulo estático θ_{pll} .

Como pode ser percebido na Figura 3.3, o semiconductor de potência adotado é o IGBT, devido à sua característica de autocomutação. Para o teste em regime permanente, optou-se por operar o sistema em malha aberta, portanto, o ângulo de corte γ das chaves é dado por um valor constante.

A lógica de chaveamento, que utiliza γ e os ângulos rastreados das correntes de linha, está mostrada na Figura 3.7 e funciona da seguinte maneira: durante os semiciclos positivos da corrente de linha, os sinais de comando das chaves S_1 , S_3 e S_5 , mostrados na Figura 3.3, recebem nível lógico alto enquanto o ângulo rastreado pelo PLL para a corrente da respectiva fase não ultrapassa o valor de γ ; e, durante os semiciclos negativos, os sinais de comando S_2 , S_4 e S_6 recebem nível lógico alto enquanto o ângulo rastreado de corrente não ultrapassa o valor de $\gamma + 180^\circ$.

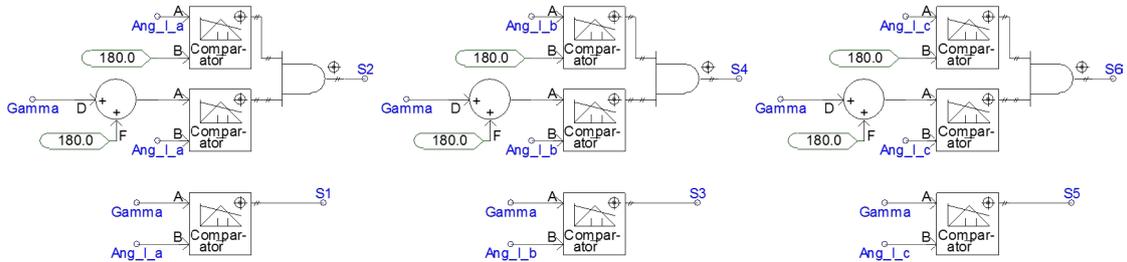


Figura 3.7: Lógica de chaveamento.

Por fim, o ângulo de condução σ é obtido através de uma lógica discreta desenvolvida a partir das medições dos instantes em que as chaves entram em estado de condução (t_{on}) ou estado de bloqueio (t_{off}). Estas medições encontram-se disponíveis entre as variáveis internas dos blocos destes elementos, como mostra a Figura 3.8 para a chave $S1$.

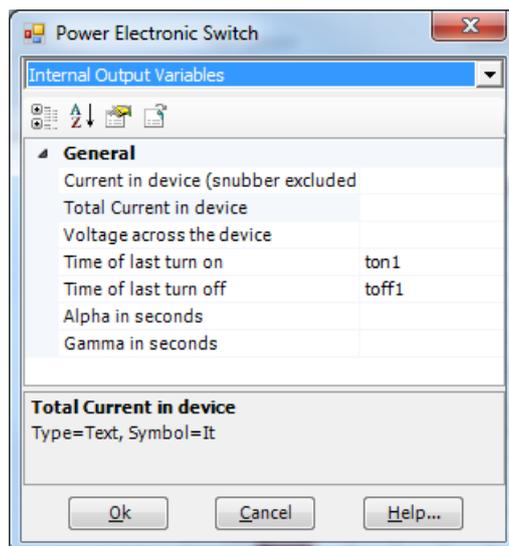


Figura 3.8: Quadro de variáveis internas para chave $S1$.

Analogamente, são coletados os instantes de condução e bloqueio para as demais chaves. Lembrando que o ângulo σ está relacionado ao tempo de condução do capacitor, e isto ocorre entre o corte de uma chave e o início da condução do seu par em antiparalelo, logo, são criados os sinais para indicar os instantes de tempo em que o capacitor de cada fase está conduzindo, de acordo com a ação de seu respectivo par de chaves. A Figura 3.9 mostra a criação desses sinais, em que os blocos comparadores são configurados para fornecer saída do tipo pulso.

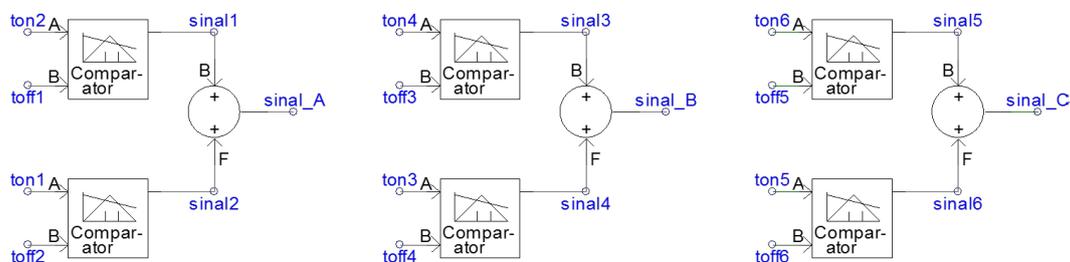


Figura 3.9: Sinais lógicos referentes aos instantes de condução do capacitor de cada fase.

A união dos sinais das três fases fornece um único sinal lógico de tal maneira que seus pulsos são referentes a todos os instantes de tempo em que algum capacitor do sistema sai do estado de condução:

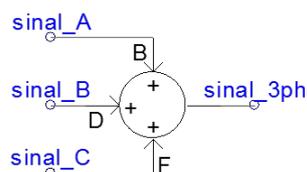


Figura 3.10: Sinal lógico que indica todos os instantes de condução de capacitores.

O sinal de saída na Figura 3.10 servirá como função de disparo para um bloco amostrador de pulsos. Este bloco fará a atualização em modo discreto do intervalo de tempo que o último semiciclo de tensão de capacitor passou conduzindo, sendo auxiliado pelas funções de saída dos blocos comparadores da Figura 3.9 para tal tarefa. A Figura 3.11 ilustra a lógica de amostragem, em que calcula-se a diferença entre o instante de início de condução em uma chave e o instante de corte de sua chave em antiparalelo e toda vez que esta diferença é atualizada se torna o único caminho verdadeiro até o amostrador de pulsos.

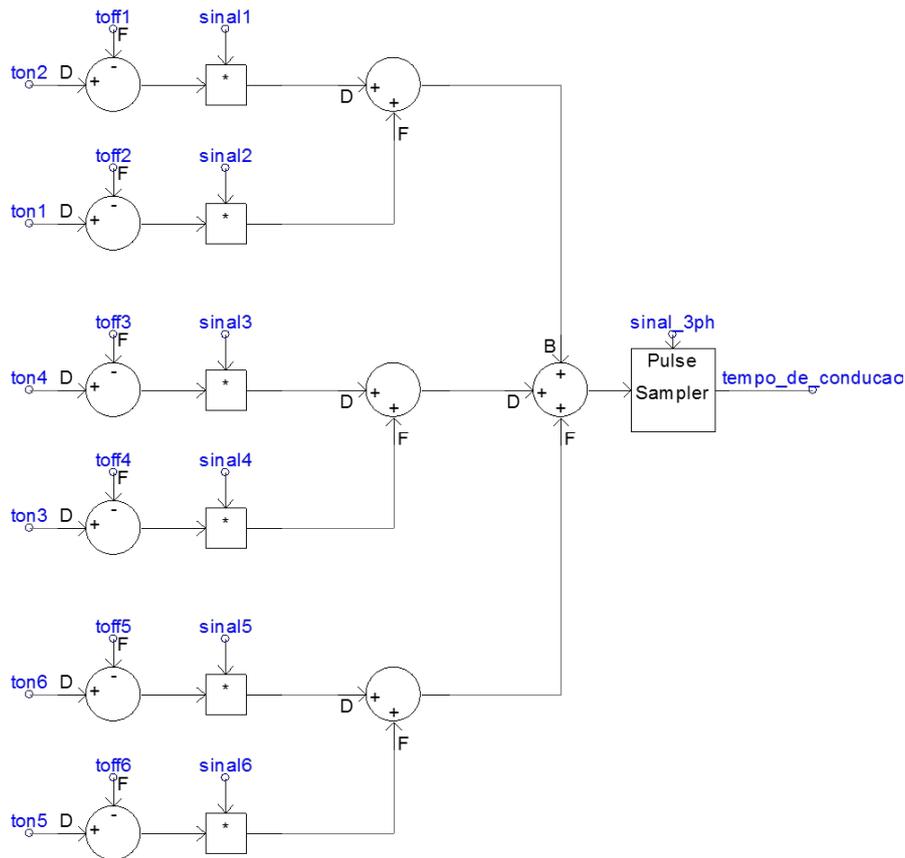


Figura 3.11: Lógica de atualização do tempo de condução.

Assim, como é visto na Figura 3.11, toda vez que uma chave do sistema entra em condução, ou seja, no instante em que algum capacitor entra em curto circuito, o tempo de condução é atualizado e este valor é mantido até a atualização seguinte. Uma vez que esta lógica possui o tempo de condução como sinal de saída, basta converter o valor final para ângulo para extrair a informação de σ , isto é possível através da utilização da frequência angular ω do sistema. A Figura 3.12 apresenta a conversão, tal que ω é dado em graus por segundo.

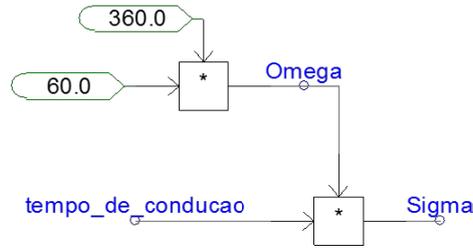


Figura 3.12: Cálculo do ângulo de condução.

Deste modo, todos os componentes necessários para a simulação do sistema em regime permanente foram retratados nesta subseção. Na sequência, é realizado um teste de operação e são feitas as análises dos principais resultados obtidos.

3.2.2 Resultados para Validação

Nesta subseção são apresentados os resultados de operação em regime permanente que confrontam o modelo analítico introduzido na Seção 3.1 e desenvolvido em MATLAB com a simulação do circuito descrita na subseção anterior e desenvolvida no PSCAD. Antes da realização do teste, define-se os valores dos parâmetros necessários para operação do sistema em malha aberta. A escolha dos valores dos elementos de circuito é baseada em [2]. A Tabela 3.1 lista os parâmetros e seus respectivos valores.

Tabela 3.1: Lista de valores dos parâmetros do sistema.

Parâmetro	Valor	Descrição
V_G	65 kV	Tensão eficaz fase-neutro do gerador
f	60 Hz	Frequência da tensão do gerador
L_G	130 mH	Indutância do gerador
R_G	4,5 Ω	Resistência do gerador
L_T	260 mH	Indutância da linha de transmissão
L_1	7 mH	Indutância de carga
R_1	100 Ω	Resistência de carga
C	200 μF	Capacitor do GCSC
$K_{P,PLL}$	50	Ganho proporcional do PLL
$K_{I,PLL}$	900	Ganho integral do PLL
γ	135°	Ângulo de condução
h_{PSCAD}	10 μs	Passo de tempo de simulação
k_{max}	101	Maior grau harmônico considerado

Com 101 harmônicos, o sistema matricial a ser resolvido na modelagem possui

ordem igual a 206. Um número menor de harmônicos poderia ter sido utilizado para representar a evolução dos sinais, porém, em busca de maior detalhamento para a análise de validação e considerando a ocorrência do efeito Gibbs, optou-se por um valor elevado. O conjunto de figuras 3.13 - 3.16 apresenta os resultados comparativos para os principais sinais de tensão e corrente do sistema trifásico.

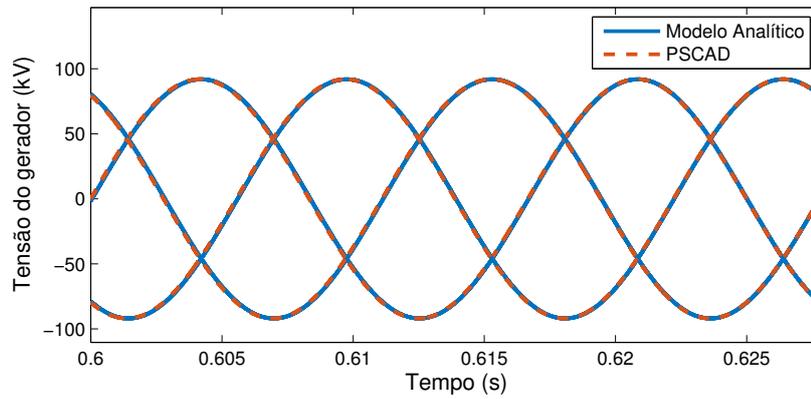


Figura 3.13: Tensão do gerador.

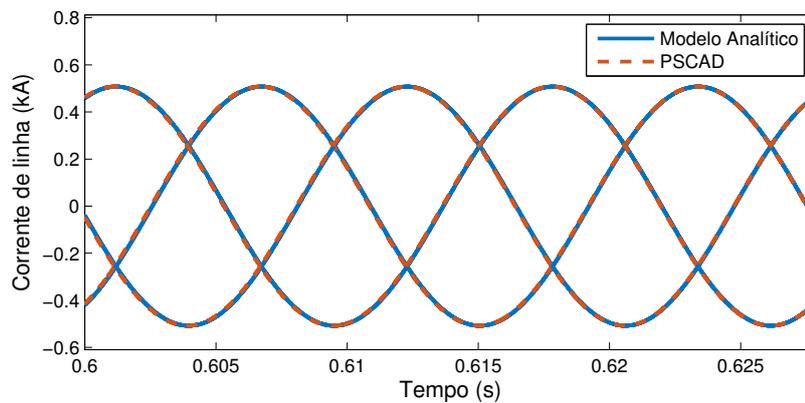


Figura 3.14: Corrente de linha.

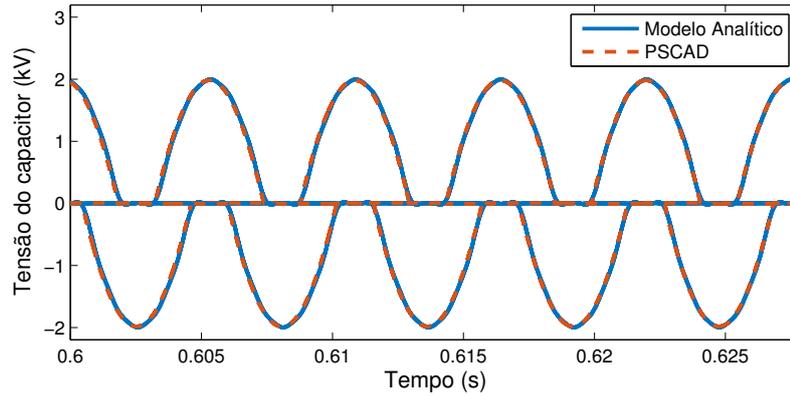


Figura 3.15: Tensão do capacitor.

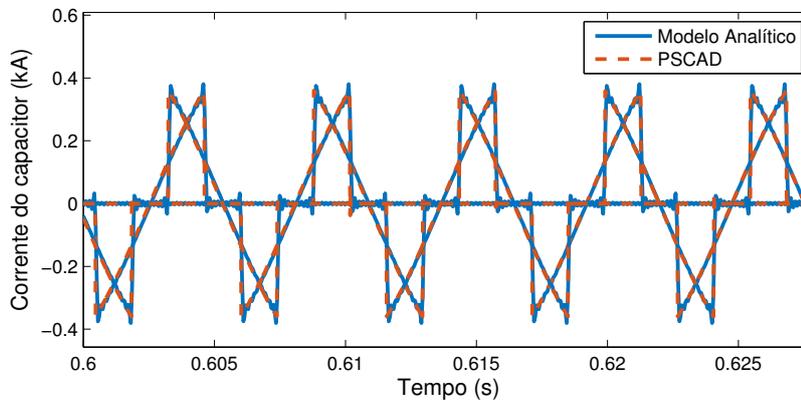


Figura 3.16: Corrente do capacitor.

No modelo analítico, a corrente do capacitor é obtida através do produto entre função de chaveamento e corrente de linha, logo, percebe-se na Figura 3.16 a presença do efeito Gibbs na curva modelada, o que não ocorre na curva produzida pelo PSCAD.

Em seguida são apresentados os ângulos de interesse, todos referentes a fase *a*. O ângulo de condução foi o que apresentou a maior discrepância, porém, esta foi abaixo de $0,3^\circ$, sendo ainda considerado um resultado satisfatório:

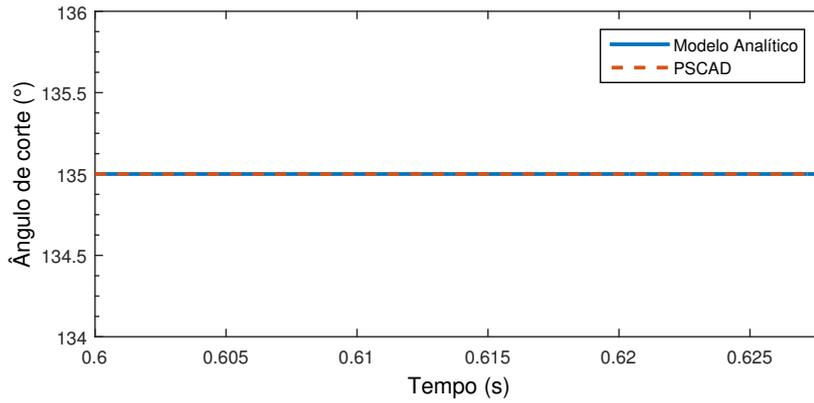


Figura 3.17: Ângulo de corte.

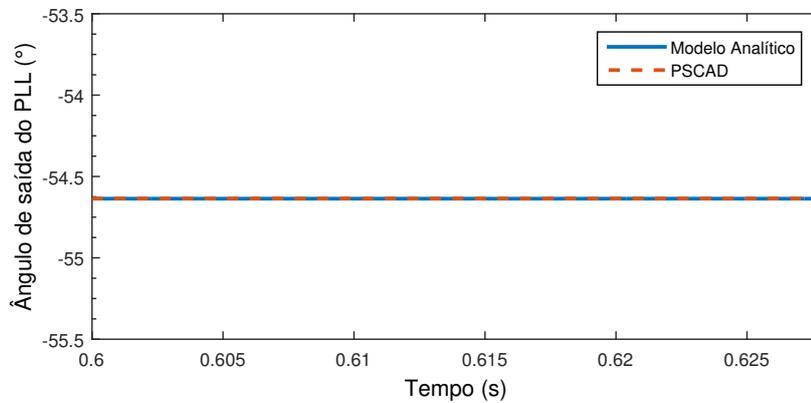


Figura 3.18: Ângulo da corrente de linha medido pelo PLL .

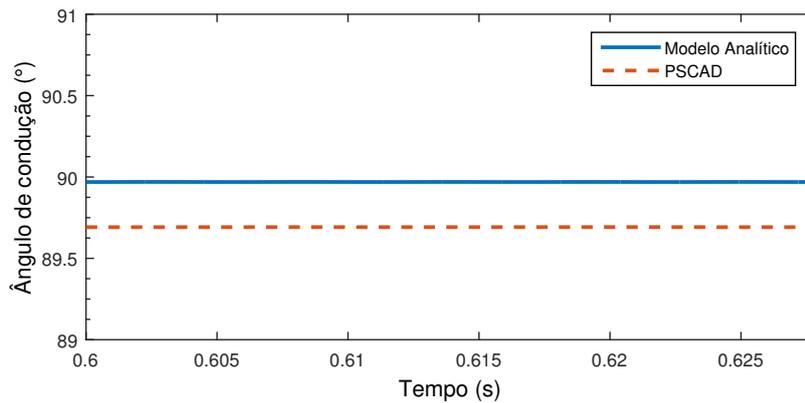


Figura 3.19: Ângulo de condução.

Assim, os sinais de tensão, corrente e ângulo modelados apresentaram boa correspondência com os resultados do simulador de referência. Conclui-se que a modelagem analítica comprovou boa qualidade para representações do sistema em regime permanente. O próximo capítulo lidará com a representação do comportamento

transitório, podendo utilizar a modelagem em regime permanente deste capítulo como método de inicialização.

Capítulo 4

Modelagem e Validação do GCSC em Regime Transitório

A modelagem analítica do regime transitório de um sistema permite um conhecimento mais profundo do seu comportamento diante de alterações em seu sinal de entrada, distúrbios ao longo do processo ou até desvios no sinal de referência, para o caso de operação em malha fechada. O modelo analítico também auxilia em estudos de fenômenos transitórios eletromagnéticos, assim como em projeto de controladores. Na sequência, é realizada a descrição da modelagem do comportamento dinâmico do circuito trifásico da Figura 3.1 e são feitos testes para a validação de seus resultados.

4.1 Modelagem Analítica em Regime Transitório

A descrição analítica do regime transitório pode ser obtida através de diversas técnicas lineares. Em [13], realizou-se um estudo dinâmico no domínio da frequência complexa. Já em [4, 5], optou-se por uma representação no domínio do tempo. Esta última possui características que podem ser consideradas vantajosas, pois a modelagem no domínio da frequência complexa limita-se à análise linear, de forma que as não linearidades só podem ser consideradas no domínio do tempo utilizando métodos iterativos por integrações numéricas. Outras vantagens são a não necessidade do uso de expressões simbólicas na construção do sistema de equações, o que poderia atribuir o aumento da complexidade da modelagem, e a de que o tratamento numérico diminui o esforço computacional, pois, devido à grande ordem que pode ser alcançada pelas matrizes da modelagem tensorial, a descrição simbólica esbarraria em limitações de programas computacionais comerciais.

Assim, adotou-se a abordagem no domínio do tempo para este trabalho, em que o sistema é descrito na forma de espaço de estados. A equação (4.1) exhibe o formato

desta representação, para um vetor de estados $x(t)$ e um vetor de entradas $u(t)$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

Enquanto a modelagem em regime permanente no capítulo anterior buscou a convergência do sistema para um único ponto, neste capítulo procura-se a resolução da equação (4.1) para cada instante de tempo. Com isso, a evolução temporal do sistema é discretizada utilizando a regra trapezoidal, como visto a seguir para um intervalo de tempo h :

$$\frac{x(t) - x(t-h)}{h} = A \frac{x(t) + x(t-h)}{2} + B \frac{u(t) + u(t-h)}{2} \quad (4.2)$$

O vetor de estados no instante atual é, então, calculado de acordo com:

$$x(t) = \left(\frac{2}{h}I - A \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{2}{h}I - A \right) x(t-h) + B[u(t) + u(t-h)] \right\} \quad (4.3)$$

Tal que I é a matriz identidade.

Portanto, a cada instante de tempo, o sistema converge para novos valores de coeficientes de tensão e corrente, assim como novos valores de ângulos. Ou seja, os fasores correspondentes às variáveis alternadas têm seus coeficientes atualizados após cada intervalo de tempo, a equação (4.4) exibe este efeito para um fasor genérico \tilde{H} .

$$\tilde{H}(t) = H_{Re}(t) + jH_{Im}(t) \quad (4.4)$$

Com a equação (4.4), observa-se que os fasores não possuem mais coeficientes invariantes no tempo como acontece em regime permanente, dando a eles a denominação de fasores dinâmicos [26].

Em cada instante de tempo amostrado, a equação (4.2) é solucionada com o auxílio de um método numérico. Adota-se neste capítulo o método de Gauss, que não necessita da linearização do sistema de equações.

Outra mudança em relação à modelagem do capítulo anterior é que as equações referentes aos ângulos não são mais agrupadas às equações principais. Os ângulos γ , θ_{pll} e σ deixam de ser incógnitas do sistema de equações principal, como viu-se em (3.57), e passam a pertencer a sistemas lineares próprios que são resolvidos seguidamente à resolução do sistema linear principal. Isto será melhor descrito no decorrer desta seção e é feito para facilitar a organização da modelagem, visto que, no regime transitório, os comportamentos desses ângulos possuem descrições mais sofisticadas.

Na Seção 2.5 foram introduzidas algumas aplicações para o GCSC em sistemas de potência, uma delas é controlar o fluxo de potência de uma linha de transmissão ou

de alguma barra do sistema. Toma-se, então, a utilização do GCSC para o controle da potência ativa injetada na barra de carga do atual caso de estudo. A variável a ser controlada é evidenciada na Figura 4.1.

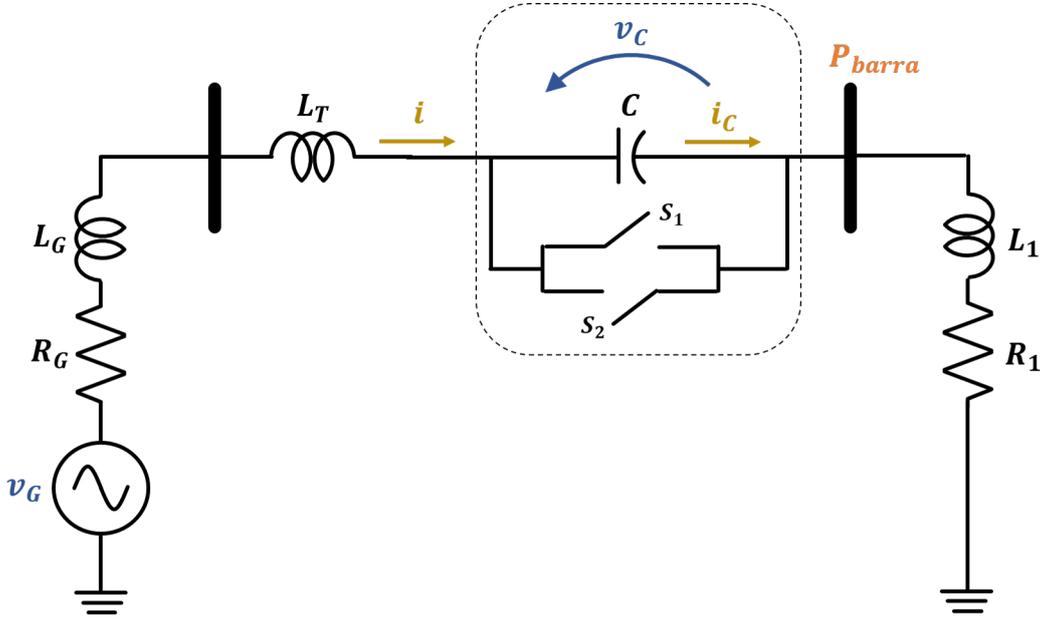


Figura 4.1: Diagrama unifilar do sistema indicando variável P_{barra} a ser controlada.

A potência ativa da barra de carga é função do valor eficaz da corrente de linha:

$$P_{barra} = R_1 I_{rms}^2 \quad (4.5)$$

O valor eficaz I_{rms} é dependente das amplitudes de todas as componentes harmônicas do sinal de corrente, como mostra (4.6) [27].

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} \quad (4.6)$$

Substituindo a equação (4.6) em (4.5) e escrevendo o valor eficaz em função dos coeficientes do fasor dinâmico da corrente de linha, obtém-se:

$$P_{barra} = \frac{R_1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (I_{Re,k}^2 + I_{Im,k}^2) \quad (4.7)$$

Com o objetivo do controle de P_{barra} , a modelagem do comportamento dinâmico neste capítulo é, então, feita em malha fechada e descrita da seguinte maneira: o erro entre a potência da barra e um valor de referência (P_{ref}) serve como sinal de entrada para ação de um controlador linear que gera em sua saída o comando do ângulo de corte das chaves, como mostra o diagrama de blocos da Figura 4.2.

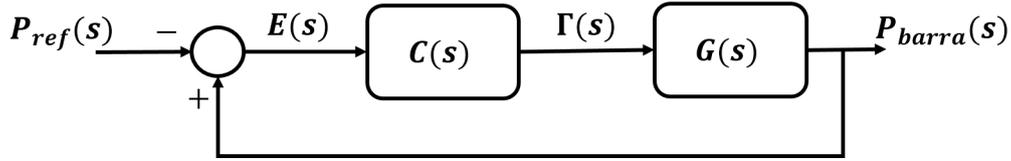


Figura 4.2: Diagrama de blocos em malha fechada do controle de potência na barra.

Na Figura 4.2, $\Gamma(s)$ é a função de transferência que representa o ângulo de corte γ e $G(s)$ representa uma aproximação linear para a função que relaciona γ e P_{barra} . A obtenção da função $G(s)$ é um dos objetivos do próximo capítulo.

Percebe-se na Figura 4.2 que a realimentação do diagrama de blocos é positiva, enquanto que o sinal atribuído ao valor de referência é negativo. Isto se deve ao fato de que, como ilustrado na Figura 2.13, a diminuição do ângulo de corte aumenta a reatância capacitiva equivalente do GCSC, aumentando também o fluxo de potência na linha. Logo, a potência da barra e o ângulo de corte γ crescem em sentidos opostos e isto é capturado pelo diagrama da Figura 4.2. Por exemplo, caso a potência da barra se encontre em um valor acima do valor de referência, o erro de potência será positivo, incrementando o valor de $\Gamma(s)$ que, por sua vez, fará com que a função $G(s)$ reduza o valor da potência de saída.

Admite-se que o controlador $C(s)$ possua a forma de um controlador proporcional integral derivativo com a seguinte função de transferência:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{(T_f s + 1)} \quad (4.8)$$

Na definição do controlador PID, define-se a parcela derivativa com um polo em $\frac{-1}{T_f}$ a fim de atribuir causalidade ao sistema.

4.1.1 Modelagem do Ângulo de Corte

A partir do diagrama de blocos da Figura 4.2 e da equação do controlador em (4.8), constrói-se a seguir o diagrama de blocos que relaciona o erro de potência (e) ao ângulo de corte (γ), em que x_1 e x_2 são variáveis auxiliares:

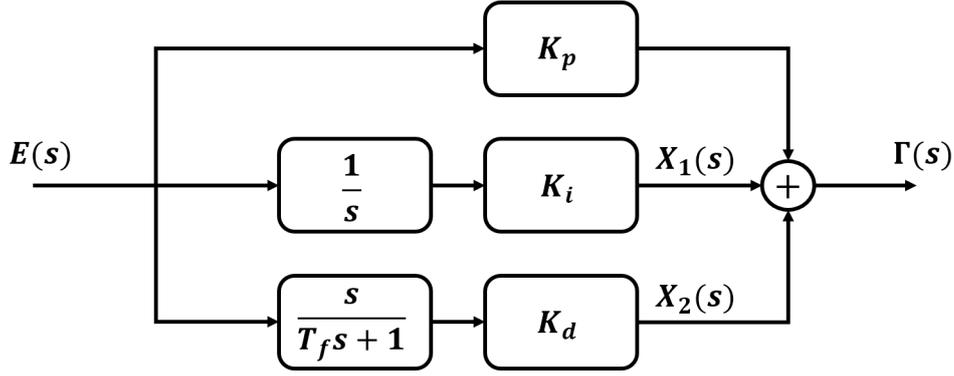


Figura 4.3: Diagrama de blocos para obtenção do ângulo de corte.

A partir da Figura 4.3, extrai-se que:

$$X_1(s) = \frac{K_i}{s} E(s) \quad (4.9)$$

$$X_2(s) = \frac{K_d s}{(T_f s + 1)} E(s) \quad (4.10)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace nas equações (4.9) e (4.10), obtêm-se:

$$\dot{x}_1 = K_i e \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} T_f \dot{x}_2 + x_2 &= K_d \dot{e} \\ \implies \dot{x}_2 &= \frac{-1}{T_f} x_2 + \frac{K_d}{T_f} \dot{e} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Na equação (4.12) percebe-se a dependência entre a derivada de x_2 e a derivada do sinal de entrada devido à parcela derivativa do controlador PID. Com isso, define-se as seguintes variáveis de estado para o sistema:

$$\bar{x}_1 = x_1 \quad (4.13)$$

$$\bar{x}_2 = x_2 - \frac{K_d}{T_f} e \quad (4.14)$$

A representação em espaço de estados do diagrama de blocos da Figura 4.3 é então dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_i \\ -\frac{K_d}{T_f} \end{bmatrix} e \quad (4.15)$$

A equação (4.15) pode ser discretizada de acordo com a equação (4.2) e a solução

das variáveis \bar{x}_1 e \bar{x}_2 a cada instante de tempo amostrado é dada por (4.3).

A partir da Figura 4.3 e das equações (4.13) e (4.14), o ângulo de corte pode ser calculado:

$$\begin{aligned} \gamma &= x_1 + x_2 + K_p e \\ \Rightarrow \gamma &= \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \left(K_p + \frac{K_d}{T_f} \right) e \end{aligned} \quad (4.16)$$

A modelagem do ângulo de corte considerou um controlador PID a fim de atribuir maior generalidade à construção do sistema linear. Caso o controlador utilizado não possua alguma das parcelas de um controlador PID, basta utilizar valor nulo para o ganho correspondente.

4.1.2 Modelagem do Ângulo de Saída do PLL

O PLL é um circuito de sincronismo utilizado para o rastreamento do ângulo e da frequência angular da componente fundamental do sinal de entrada. Este circuito não deve sofrer interferência de componentes de alta frequência, nem ser sensível a variações bruscas no sinal de entrada. No presente trabalho, atribui-se ao PLL a função de detecção do ângulo da corrente de linha, para um correto controle de corte das chaves do GCSC. Em [4, 5], é apresentado o sistema de controle que traduz o bloco de PLL utilizado pelo PSCAD. A Figura 4.4 exibe tal sistema utilizando a corrente de linha como sinal de entrada.

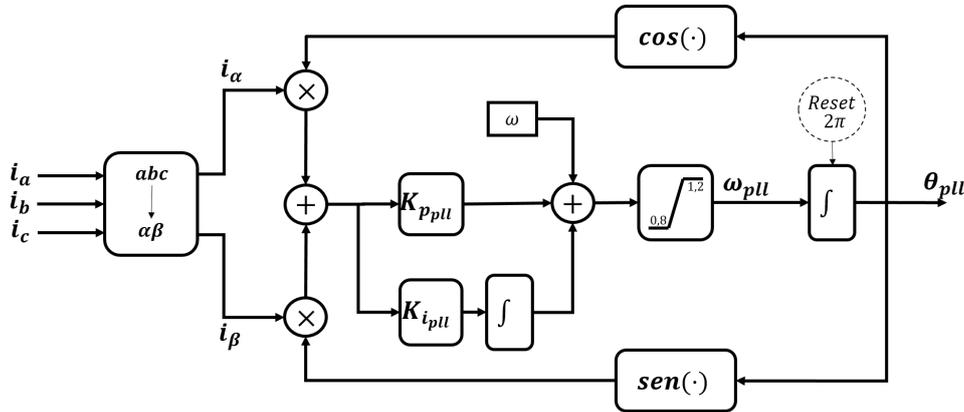


Figura 4.4: Sistema de controle do PLL modelado no PSCAD.

Devido à existência de um filtro passa baixas na composição do PLL, representado por um controlador proporcional integral na Figura 4.4, também é descrito por [4, 5] que este circuito pode ser modelado de forma simplificada, tal que sua linearização para pequenas perturbações leve em consideração apenas a componente fundamental do sinal de corrente de linha, como mostrado na Figura 4.5, sem perda significativa de informação.

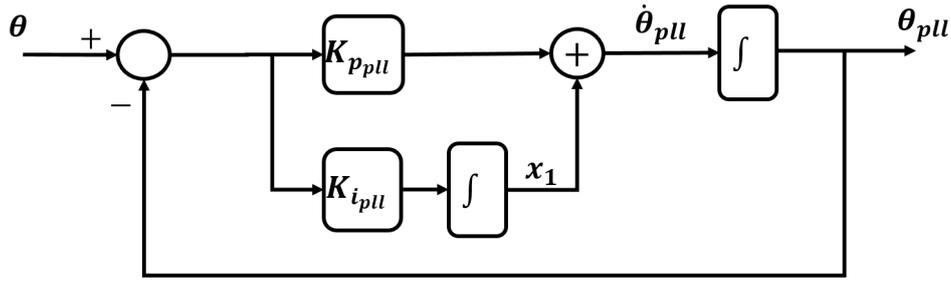


Figura 4.5: Sistema de controle do modelo simplificado do PLL.

Na Figura 4.5, x_1 é um estado do sistema e θ é o ângulo da componente fundamental da corrente de linha e, como deduzido na Seção 3.1, responde à seguinte equação:

$$\cos(-\theta)I_{Re,1} - \text{sen}(-\theta)I_{Im,1} = 0 \quad (4.17)$$

A equação 3.52 foi utilizada na modelagem do ângulo de saída do PLL no capítulo anterior, isto porque, em regime permanente, considera-se que θ_{pll} e θ sejam iguais.

A representação em espaço de estados do diagrama de controle da Figura 4.5 é exibida a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\theta}_{pll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -K_{i_{pll}} \\ 1 & -K_{p_{pll}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_{pll} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{i_{pll}} \\ K_{p_{pll}} \end{bmatrix} \theta \quad (4.18)$$

A equação (4.18) é solucionada a cada instante de tempo amostrado de acordo com a equação 4.3, fornecendo o valor atualizado de θ_{pll} .

4.1.3 Modelagem do Ângulo de Condução

O ângulo de condução é relacionado ao tempo que o GCSC conduz corrente pelo capacitor e possui um comportamento dinâmico de análise delicada. Em [4, 5], são apresentados dois procedimentos para a modelagem desta variável. O primeiro supõe que os sinais de tensão do capacitor e função de chaveamento possuem simetria e estão sempre em fase, como ilustrado a seguir:

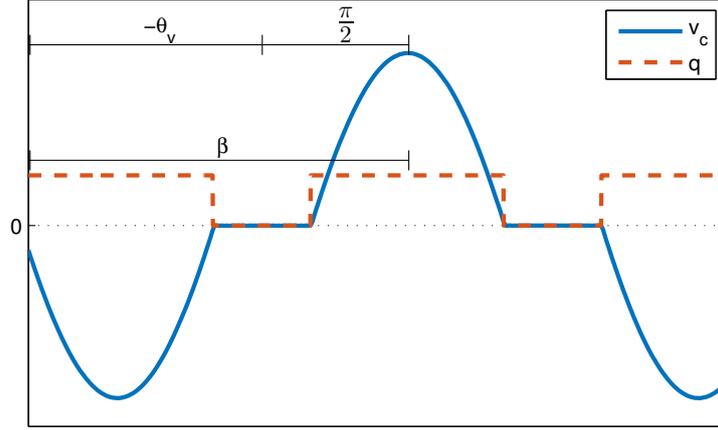


Figura 4.6: Tensão de capacitor v_c e função e chaveamento q .

Na Figura 4.6, θ_v é o ângulo de fase da componente fundamental da tensão do capacitor em relação à tensão de referência do sistema e é dado por:

$$\theta_v = \tan^{-1} \left(\frac{V_{cRe,1}}{-V_{cIm,1}} \right) \quad (4.19)$$

A partir da suposição de que v_c e q encontram-se em fase, pode-se escrever a seguinte relação angular:

$$\beta = -\theta_v + \frac{\pi}{2} \quad (4.20)$$

O ângulo β foi definido na Seção 2.6 como função do ângulo de corte, do ângulo de saída do PLL e do ângulo de condução. Aplicando a equação (2.105) em (4.20), extrai-se que:

$$-\theta_{pll} + \gamma + \frac{\sigma}{2} = -\theta_v + \frac{\pi}{2} \quad (4.21)$$

A partir da equação (4.21), obtém-se uma primeira expressão para o cálculo do ângulo de condução:

$$\sigma = 2 \left(\theta_{pll} - \gamma - \theta_v + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.22)$$

A equação (4.22) é considerada uma solução aproximada pois, diante de distúrbios no sistema, a posição relativa entre v_c e q pode ser alterada. Em [3], é mostrado com detalhe este fenômeno na operação do GCSC.

O segundo procedimento de cálculo é proposto por [4, 5] e possui uma modelagem mais sofisticada e que engloba com mais precisão as alterações dinâmicas do sistema. O método consiste na integração numérica da corrente de linha e, como visto anteriormente, o intervalo de tempo de interesse ocorre entre o instante de corte (t_{off}) de uma chave e o início da condução da chave em antiparalelo (t_{on}), pois é o trecho em que o capacitor não se encontra em curto circuito. A este inter-

valo, relacionamos o ângulo de condução de significado físico σ_d e que responde à expressão:

$$\sigma_d = \omega(t_{on} - t_{off}) \quad (4.23)$$

Assim, em um determinado semiciclo de tensão do capacitor, o instante de tempo t , correspondente ao último instante de condução de corrente pelo capacitor no semiciclo, torna verdadeira a seguinte equação:

$$\int_{-\frac{\sigma_d}{\omega}}^0 i(t + t_0) dt_0 = 0 \quad (4.24)$$

Em que o sinal de corrente é dado por:

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k}(t) \cos(k\omega t) - I_{Im,k}(t) \text{sen}(k\omega t)] \quad (4.25)$$

Considerando a corrente da equação (4.25) proveniente da fase a , a corrente em uma fase qualquer, chamada de fase x , é descrita por:

$$i_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{I_{Re,k}(t) \cos[k(\omega t + \theta_x)] - I_{Im,k}(t) \text{sen}[k(\omega t + \theta_x)]\} \quad (4.26)$$

A princípio, θ_x assume os valores 0 , $-\frac{2\pi}{3}$ e $+\frac{2\pi}{3}$ respectivamente para as fases a , b e c . Com isso, considerando todos os valores possíveis para θ_x , σ_d pode ter seu valor atualizado a cada instante t em que a equação (4.27) for atendida.

$$\int_{-\frac{\sigma_d}{\omega}}^0 i_x(t + t_0) dt_0 = 0 \quad (4.27)$$

Contudo, isto implica que σ_d possuirá uma evolução discreta, visto que, a cada ciclo de uma determinada fase, em apenas dois instantes esta fase torna a integral da equação 4.27 nula.

Buscando uma atualização contínua da variável σ_d , supõe-se a existência de mais fases no sistema. Assim, θ_x cobriria, além das três fases físicas, todas as fases fictícias supostas. Chegando ao ponto em que, a cada instante de tempo, considera-se que esteja ocorrendo o fim da condução de corrente pelo capacitor de alguma fase do sistema.

Desta forma, a equação (4.27) passa a ser atendida a todo instante, podendo ser reescrita da seguinte maneira:

$$\int_{-\frac{\sigma_d}{\omega}}^0 \sum_{k=0}^{\infty} (I_{Re,k}(t + t_0) \cos\{k[\omega(t + t_0) + \theta_x]\} - I_{Im,k}(t + t_0) \text{sen}\{k[\omega(t + t_0) + \theta_x]\}) dt_0 = 0 \quad (4.28)$$

Assim, com o instante t caracterizando o fim da condução de corrente pelo capacitor, o instante do início é definido por:

$$\omega t + \theta_x - \sigma_d = \gamma \left(t - \frac{\sigma_d}{\omega} \right) - \theta_{pll} \left(t - \frac{\sigma_d}{\omega} \right) + 2\pi z \quad (4.29)$$

em que z é um número inteiro.

Manipulando a equação (4.29), encontra-se:

$$\omega t + \theta_x = \theta_f + 2\pi z \quad (4.30)$$

Tal que:

$$\theta_f = \sigma_d + \gamma \left(t - \frac{\sigma_d}{\omega} \right) - \theta_{pll} \left(t - \frac{\sigma_d}{\omega} \right) \quad (4.31)$$

Substituindo (4.30) em (4.28), deduz-se:

$$\int_{-\frac{\sigma_d}{\omega}}^0 \sum_{k=0}^{\infty} \{ I_{Re,k}(t+t_0) \cos[k(\omega t_0 + \theta_f)] - I_{Im,k}(t+t_0) \sin[k(\omega t_0 + \theta_f)] \} dt_0 = 0 \quad (4.32)$$

Na equação (4.29) foi visto que σ_d está relacionado a γ e θ_{pll} de um instante de tempo passado, porém, para a construção da função de chaveamento, deve ser informado o ângulo de condução considerando os desvios ocorridos em γ e θ_{pll} durante o intervalo de condução. A partir disso, define-se o ângulo de condução σ para cumprir tal função:

$$\sigma = \sigma_d - \gamma(t) + \gamma \left(t - \frac{\sigma_d}{\omega} \right) + \theta_{pll}(t) - \theta_{pll} \left(t - \frac{\sigma_d}{\omega} \right) \quad (4.33)$$

Portanto, σ_d é a variável que possui o sentido físico do ângulo de condução e σ é a variável utilizada para a atualização da função de chaveamento.

Aplicando a equação (4.33) em (4.31), encontra-se:

$$\theta_f = \sigma + \gamma(t) - \theta_{pll}(t) \quad (4.34)$$

Assim, θ_f passa a ser escrito somente em função de valores de parâmetros no instante de tempo atual. No entanto, a integral em (4.32) ainda é dependente de σ , σ_d e de coeficientes fasoriais de instantes passados. As equações (4.32) e (4.33) podem ser resolvidas simultaneamente através de um processo iterativo para a obtenção de σ e σ_d . Em [4], as linearizações dessas equações são descritas de forma detalhada, seus resultados são apresentados na sequência.

A equação (4.32) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$g(t_0, i, \gamma, \theta_{pll}, \sigma, \sigma_d) = \int_{-\frac{\sigma_d}{\omega}}^0 G(t_0, i, \gamma, \theta_{pll}, \sigma) dt_0 = 0, \quad (4.35)$$

de forma que:

$$G(t_0, i, \gamma, \theta_{pll}, \sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \{ I_{Re,k}(t+t_0) \cos[k(\omega t_0 + \sigma + \gamma - \theta_{pll})] + \\ - I_{Im,k}(t+t_0) \text{sen}[k(\omega t_0 + \sigma + \gamma - \theta_{pll})] \}. \quad (4.36)$$

Para a resolução numérica da integral em (4.35), o intervalo de integração é dividido em pequenas seções, tal que $t_0^{(i-1)}$ e $t_0^{(i)}$ representam os instantes de tempo de início e fim de cada seção, respectivamente. A linearização de (4.35) é então dada por:

$$\sum_k \sum_i \left[\frac{\partial g}{\partial I_{Re,k}(t+t_0^{(i)})} \Delta I_{Re,k}(t+t_0^{(i)}) + \frac{\partial g}{\partial I_{Im,k}(t+t_0^{(i)})} \Delta I_{Im,k}(t+t_0^{(i)}) \right] + \\ + \frac{\partial g}{\partial \gamma} \Delta \gamma + \frac{\partial g}{\partial \theta_{pll}} \Delta \theta_{pll} + \frac{\partial g}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{\partial g}{\partial \sigma_d} \Delta \sigma_d = 0, \quad (4.37)$$

cujas derivadas parciais são definidas como:

- Para uma variável intermediária do somatório em i

$$\frac{\partial g}{\partial I_{Re,k}(t+t_0^{(i)})} = \frac{-\cos[k(\omega t_0^{(i+1)} + \theta_f)] + \cos[k(\omega t_0^{(i)} + \theta_f)]}{k^2 \omega (t_0^{(i+1)} - t_0^{(i)})} + \\ + \frac{+\cos[k(\omega t_0^{(i)} + \theta_f)] - \cos[k(\omega t_0^{(i-1)} + \theta_f)]}{k^2 \omega (t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)})} \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_{Im,k}(t+t_0^{(i)})} = \frac{+\cos[k(\omega t_0^{(i+1)} + \theta_f)] - \cos[k(\omega t_0^{(i)} + \theta_f)]}{k^2 \omega (t_0^{(i+1)} - t_0^{(i)})} + \\ + \frac{-\cos[k(\omega t_0^{(i)} + \theta_f)] + \cos[k(\omega t_0^{(i-1)} + \theta_f)]}{k^2 \omega (t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)})} \quad (4.39)$$

- Para a primeira variável do somatório em i (tal que $i = 0$ e $t_0^{(0)} = -\frac{\sigma_d}{\omega}$)

$$\frac{\partial g}{\partial I_{Re,k}(t - \frac{\sigma_d}{\omega})} = \frac{-\text{sen}[k(\omega t_0^{(1)} + \theta_f)]}{k} + \frac{-\cos[k(\omega t_0^{(1)} + \theta_f)] + \cos[k(-\sigma_d + \theta_f)]}{k^2 (\omega t_0^{(1)} + \sigma_d)} \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_{Im,k}(t - \frac{\sigma_d}{\omega})} = \frac{-\text{sen}[k(\omega t_0^{(1)} + \theta_f)]}{k} + \frac{+\cos[k(\omega t_0^{(1)} + \theta_f)] - \cos[k(-\sigma_d + \theta_f)]}{k^2 (\omega t_0^{(1)} + \sigma_d)} \quad (4.41)$$

- Para a última variável do somatório em i (tal que $t_0^{(i)} = 0$)

$$\frac{\partial g}{\partial I_{Re,k}(t)} = \frac{\text{sen}[k\theta_f]}{k} + \frac{+\cos[k\theta_f] - \cos[k(\omega t_0^{(i-1)} + \theta_f)]}{k^2(-\omega t_0^{(i-1)})} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_{Im,k}(t)} = \frac{\text{sen}[k\theta_f]}{k} + \frac{-\cos[k\theta_f] + \cos[k(\omega t_0^{(i-1)} + \theta_f)]}{k^2(-\omega t_0^{(i-1)})} \quad (4.43)$$

As demais derivadas parciais em (4.37) são:

$$\frac{\partial g}{\partial \gamma} = \int_{-\frac{\sigma_d}{\omega}}^0 \sum_k \{ -kI_{Re,k}(t+t_0)\text{sen}[k(\omega t_0 + \gamma(t) - \theta_{pl}(t) + \sigma)] + \\ -kI_{Im,k}(t+t_0)\cos[k(\omega t_0 + \gamma(t) - \theta_{pl}(t) + \sigma)] \} dt_0 \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_{pl}} = -\frac{\partial g}{\partial \gamma} \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = \frac{\partial g}{\partial \gamma} \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_d} = \sum_k \{ I_{Re,k}(t - \frac{\sigma_d}{\omega})\cos[k(-\sigma_d + \gamma(t) - \theta_{pl}(t) + \sigma)] + \\ -I_{Im,k}(t - \frac{\sigma_d}{\omega})\text{sen}[k(-\sigma_d + \gamma(t) - \theta_{pl}(t) + \sigma)] \} \quad (4.47)$$

A linearização de (4.33) é dada por:

$$\Delta\sigma - \Delta\sigma_d + \Delta\gamma(t) - \Delta\gamma\left(t - \frac{\sigma_d}{\omega}\right) - \Delta\theta_{pl}(t) + \Delta\theta_{pl}\left(t - \frac{\sigma_d}{\omega}\right) = 0 \quad (4.48)$$

4.1.4 Modelagem do Sistema Principal

Como mencionado anteriormente, os coeficientes fasoriais de tensão e corrente serão resolvidos em um sistema diferente aos dos ângulos, caracterizando o sistema de equações principal. Como descrito na Seção 2.4, o primeiro passo para a modelagem é separar as equações diferenciais que descrevem o sistema. Se trata das mesmas equações utilizadas na modelagem em regime permanente e são apresentadas a se-

guir:

$$v_G - Ri - L \frac{di}{dt} - v_C = 0 \quad (4.49)$$

$$q(t, \gamma, \theta_{pll}, \sigma)i - C \frac{dv_C}{dt} = 0 \quad (4.50)$$

O próximo passo consiste em escrever as variáveis alternadas na forma de séries, porém, desta vez, deve-se atentar ao fato de que os coeficientes passam a ser variantes no tempo, como mostrado na sequência para a corrente de linha:

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [I_{Re,k}(t) \cos(k\omega t) - I_{Im,k}(t) \text{sen}(k\omega t)] \quad (4.51)$$

Com isso, a derivada de tal sinal torna-se:

$$\frac{di(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{dI_{Re,k}(t)}{dt} \cos(k\omega t) - k\omega I_{Re,k}(t) \text{sen}(k\omega t) + \right. \\ \left. - \frac{dI_{Im,k}(t)}{dt} \text{sen}(k\omega t) - k\omega I_{Im,k}(t) \cos(k\omega t) \right] \quad (4.52)$$

Com todos os sinais das equações (4.49) e (4.50) escritos na forma de séries, é possível criar um sistema linear que envolva apenas os coeficientes fasoriais das oscilações, em que metade das equações deste sistema está relacionada a coeficientes de termos com a função $\cos(k\omega t)$ e a outra metade a coeficientes ligados aos termos com a função $-\sin(k\omega t)$. A seguir são exibidas as expressões referentes à equação (4.49) para uma determinada frequência angular $k\omega$:

$$V_{G_{Re,k}}(t) - RI_{Re,k}(t) - L \frac{dI_{Re,k}(t)}{dt} + k\omega LI_{Im,k}(t) - V_{C_{Re,k}}(t) = 0 \quad (4.53)$$

$$V_{G_{Im,k}}(t) - RI_{Im,k}(t) - L \frac{dI_{Im,k}(t)}{dt} - k\omega LI_{Re,k}(t) - V_{C_{Im,k}}(t) = 0 \quad (4.54)$$

Em seguida, são expostas as expressões referentes à equação (4.50), tal que o produto entre a função de chaveamento e a corrente de linha é escrito como uma série única, através dos resultados deduzidos na modelagem em regime permanente, representado pela variável x .

$$X_{Re,k}(t) - C \frac{dV_{C_{Re,k}}(t)}{dt} + k\omega CV_{C_{Im,k}}(t) = 0 \quad (4.55)$$

$$X_{Im,k}(t) - C \frac{dV_{C_{Im,k}}(t)}{dt} - k\omega CV_{C_{Re,k}}(t) = 0 \quad (4.56)$$

$X_{Re,k}$ e $X_{Im,k}$ encontram-se definidos em (3.40) e (3.41), respectivamente.

Os coeficientes $I_{Re,k}$, $I_{Im,k}$, $V_{C_{Re,k}}$ e $V_{C_{Im,k}}$ são as variáveis de estado do sistema

principal. Observa-se que as equações (4.53)-(4.56) definem expressões envolvendo suas derivadas. Desse modo, torna-se direta a construção do espaço de estados desse sistema linear, apresentado na equação (4.57). A ordem do sistema é igual a $2(k_{max} + 1)$, em que k_{max} é o número de harmônicos considerados.

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C_{Re,1}} \\ \dot{V}_{C_{Im,1}} \\ \dot{V}_{C_{Re,3}} \\ \dot{V}_{C_{Im,3}} \\ \dot{V}_{C_{Re,5}} \\ \dot{V}_{C_{Im,5}} \\ \vdots \\ \dot{I}_{Re,1} \\ \dot{I}_{Im,1} \\ \dot{I}_{Re,3} \\ \dot{I}_{Im,3} \\ \dot{I}_{Re,5} \\ \dot{I}_{Im,5} \\ \vdots \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V_{C_{Re,1}} \\ V_{C_{Im,1}} \\ V_{C_{Re,3}} \\ V_{C_{Im,3}} \\ V_{C_{Re,5}} \\ V_{C_{Im,5}} \\ \vdots \\ I_{Re,1} \\ I_{Im,1} \\ I_{Re,3} \\ I_{Im,3} \\ I_{Re,5} \\ I_{Im,5} \\ \vdots \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} V_{G_{Re,1}} \\ V_{G_{Im,1}} \\ V_{G_{Re,3}} \\ V_{G_{Im,3}} \\ V_{G_{Re,5}} \\ V_{G_{Im,5}} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Tal que as matrizes A e B são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_{1,1}^{(1,1)}}{C} & \frac{a_{1,1}^{(1,2)}}{C} & \frac{a_{1,3}^{(1,1)}}{C} & \frac{a_{1,3}^{(1,2)}}{C} & \frac{a_{1,5}^{(1,1)}}{C} & \frac{a_{1,5}^{(1,2)}}{C} \\ -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_{1,1}^{(2,1)}}{C} & \frac{a_{1,1}^{(2,2)}}{C} & \frac{a_{1,3}^{(2,1)}}{C} & \frac{a_{1,3}^{(2,2)}}{C} & \frac{a_{1,5}^{(2,1)}}{C} & \frac{a_{1,5}^{(2,2)}}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 3\omega & 0 & 0 & \frac{a_{3,1}^{(1,1)}}{C} & \frac{a_{3,1}^{(1,2)}}{C} & \frac{a_{3,3}^{(1,1)}}{C} & \frac{a_{3,3}^{(1,2)}}{C} & \frac{a_{3,5}^{(1,1)}}{C} & \frac{a_{3,5}^{(1,2)}}{C} \\ 0 & 0 & -3\omega & 0 & 0 & 0 & \frac{a_{3,1}^{(2,1)}}{C} & \frac{a_{3,1}^{(2,2)}}{C} & \frac{a_{3,3}^{(2,1)}}{C} & \frac{a_{3,3}^{(2,2)}}{C} & \frac{a_{3,5}^{(2,1)}}{C} & \frac{a_{3,5}^{(2,2)}}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\omega & \frac{a_{5,1}^{(1,1)}}{C} & \frac{a_{5,1}^{(1,2)}}{C} & \frac{a_{5,3}^{(1,1)}}{C} & \frac{a_{5,3}^{(1,2)}}{C} & \frac{a_{5,5}^{(1,1)}}{C} & \frac{a_{5,5}^{(1,2)}}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\omega & 0 & \frac{a_{5,1}^{(2,1)}}{C} & \frac{a_{5,1}^{(2,2)}}{C} & \frac{a_{5,3}^{(2,1)}}{C} & \frac{a_{5,3}^{(2,2)}}{C} & \frac{a_{5,5}^{(2,1)}}{C} & \frac{a_{5,5}^{(2,2)}}{C} \\ & & & & & \ddots & & & & & & \ddots \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R}{L} & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega & -\frac{R}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R}{L} & 3\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\omega & -\frac{R}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R}{L} & 5\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -5\omega & -\frac{R}{L} \\ & & & & & \ddots & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|c} \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & \\ \hline & & & & & & \ddots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & & \ddots \end{array} \right] \quad (4.59)$$

Os elementos da parte cheia da matriz A , que representam a interação entre componentes harmônicas, são dados pelas equações (3.58)-(3.69).

O sistema linear em (4.57) é solucionado numericamente de acordo com a equação (4.3).

Todas as etapas para a modelagem do regime transitório do circuito com GCSC foram apresentadas neste capítulo. A Figura 4.7 simboliza os principais passos do algoritmo desenvolvido em MATLAB para a resolução do comportamento dinâmico. O laço externo é do tipo *for* e fornece a informação do tempo atual. Os instantes de tempo amostrados são separados por um intervalo de tempo constante preestabelecido, e a evolução temporal se dá até um valor de tempo limite, também predefinido. Assim, durante cada instante de tempo considerado, é resolvido um laço de convergência a fim de obter o valor das variáveis do sistema naquele tempo específico. Este laço interno é do tipo *while* e é solucionado de forma iterativa, respondendo ao método de Gauss. A cada iteração, calcula-se primeiramente os valores dos coeficientes fasoriais de tensão e corrente (equação (4.57)); depois, utiliza-se os coeficientes atualizados de corrente para obter a potência na barra e então calcular um novo ângulo de corte (equações (4.15) e (4.16)); em seguida, renova-se o valor do ângulo de saída do PLL (equação (4.18)); e, então, atualiza-se o valor do ângulo de condução utilizando o primeiro (equação (4.22)) ou o segundo método de cálculo (equações (4.32) e (4.33)). Por fim, é calculada a diferença entre os valores obtidos para os ângulos na iteração atual n e os valores armazenados da iteração anterior $n - 1$, caso os erros para os três ângulos estejam abaixo de um valor de tolerância estipulado, considera-se que o sistema convergiu e encerra-se o laço interno para o

tempo atual. Em seguida, o laço externo avança ao próximo instante de tempo e o processo todo se repete.

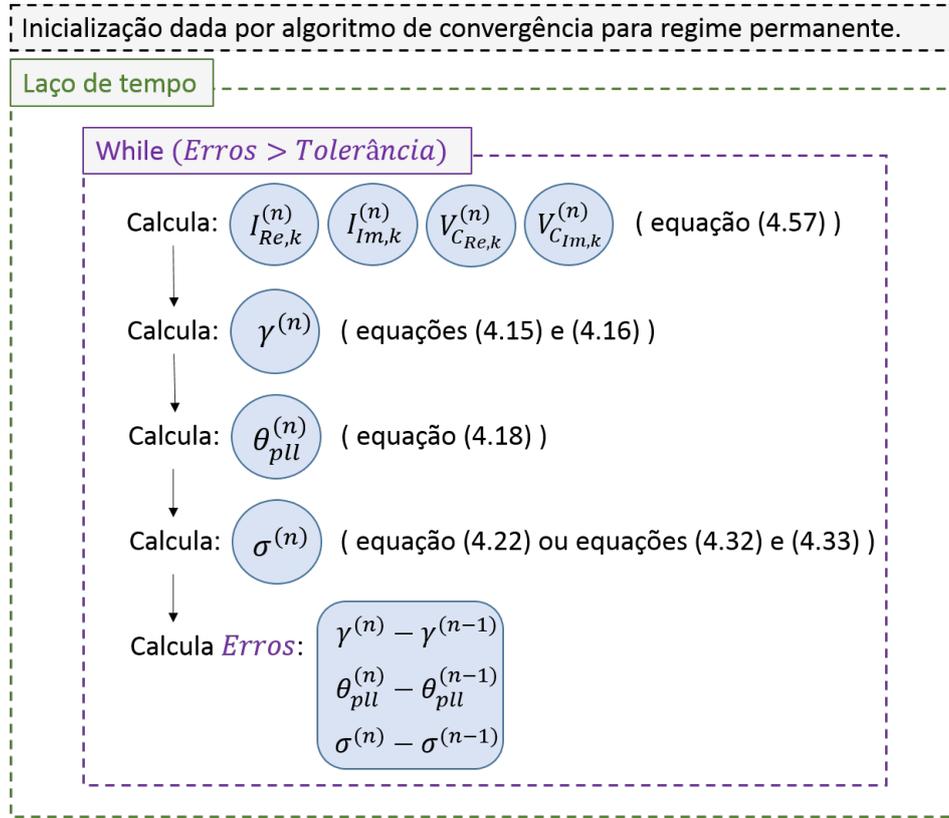


Figura 4.7: Algoritmo para cálculo de regime transitório.

4.2 Validação da Modelagem em Regime Transitório

A validação confronta os resultados do programa computacional desenvolvido em MATLAB que contém a modelagem do sistema em regime transitório, como descrita na seção anterior, com o programa de referência, o simulador de transitórios eletromagnéticos PSCAD/EMTDC.

4.2.1 Descrição da Simulação

Grande parte da simulação montada para análise do comportamento dinâmico é reaproveitada da simulação realizada para análise de regime permanente, descrita na Subseção 3.2.1. Portanto, na atual subseção, será apresentado apenas o que foi adicionado ou modificado em relação à simulação anterior.

A começar pelos sinais de entrada da fonte de tensão que representa o gerador. Em regime permanente, os sinais de módulo e fase da tensão eram valores constantes,

porém, em regime transitório, admite-se a possibilidade de distúrbios durante a operação. Com isso, a Figura (4.8) exibe a nova estrutura de simulação para a criação de tais sinais.

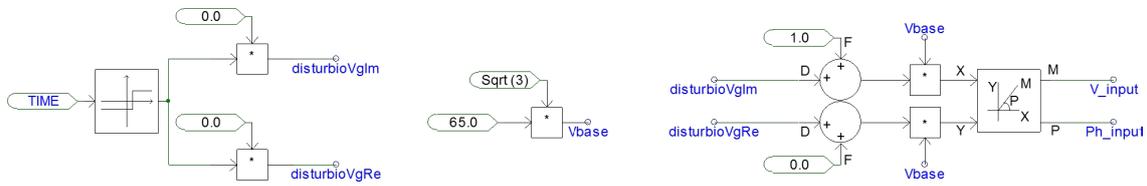


Figura 4.8: Sinais de entrada para fonte de tensão trifásica.

Na Figura (4.8), vê-se que, em um determinado instante de tempo, podem ser aplicados distúrbios de amplitude normalizada nos coeficientes fasoriais da tensão do gerador. Esses distúrbios são somados aos valores originais dos coeficientes e multiplicados pela base de tensão eficaz fase-neutro 65kV. Após isso, é realizada uma mudança de coordenadas, os coeficientes cartesianos são transformados em polares para a obtenção dos sinais de módulo e fase da tensão da fonte.

Uma vez que a tensão da fonte pode ser alvo de distúrbios, sua fase pode sofrer alteração durante a simulação, com isso, a referência angular do sistema passa a ser provida por uma fonte auxiliar puramente senoidal.

Para o controle em malha fechada, calcula-se a potência ativa monofásica na barra de carga através do valor eficaz da corrente de linha. Na simulação, o valor eficaz é obtido por uma aproximação que utiliza medições das correntes das três fases [4, 5], como exibido na Figura 4.9.

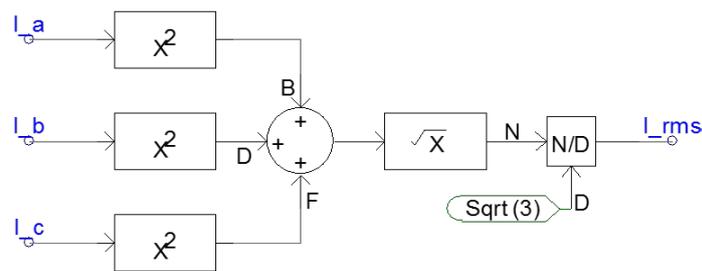


Figura 4.9: Cálculo da corrente eficaz.

Com o sinal de saída da Figura 4.9 elevado ao quadrado e multiplicando pelo valor da resistência de carga, obtém-se o valor de P_{barra} .

A potência de referência é dada por um valor constante e admite distúrbios na forma de degraus.

Em regime permanente, optou-se por realizar modelagem em malha aberta, em que o ângulo de corte das chaves era dado por um valor constante. Para o regime

transitório, assumiu-se a modelagem do controle de potência em malha fechada utilizando um controlador PID, assim, o ângulo de corte passa a ser provido da seguinte maneira:

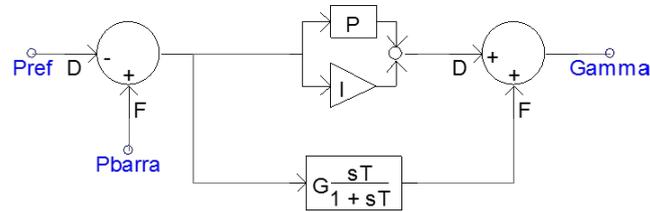


Figura 4.10: Cálculo do ângulo de corte em malha fechada.

Todas as modificações embutidas na simulação de regime permanente foram apresentadas nesta subseção. Neste ponto, é possível prosseguir para a realização de testes para a análise do comportamento dinâmico do circuito estudado.

4.2.2 Resultados para Validação

Nesta subseção serão analisadas e comparadas as respostas do sistema modelado e simulado diante de situações em que ocorram distúrbios durante a operação, com o intuito de testar a dinâmica de reação do circuito com GCSC. Os valores dos parâmetros utilizados se mantêm como exibidos na Tabela 3.1, com exceção do ângulo de corte que não aparece mais como um valor constante. As demais definições de valores de parâmetros necessários para a operação em malha fechada encontram-se na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Lista de valores dos parâmetros do sistema.

Parâmetro	Valor	Descrição
$K_{p,\gamma}$	0	Ganho proporcional do controlador PID
$K_{i,\gamma}$	8,5225	Ganho integral do controlador PID
$K_{d,\gamma}$	0	Ganho derivativo do controlador PID
ϵ	10^{-12}	Tolerância para laço de convergência do programa em MATLAB
h_{MATLAB}	46,3 μ s	Tempo de amostragem para laço de tempo do programa em MATLAB

Com a determinação dos valores da Tabela 4.1, destaca-se que o controlador a ser utilizado nos testes é caracterizado como um integrador. Fez-se assim por se tratar da topologia mais simples testada a atender o objetivo de rastreamento do valor de referência e por não haver pretensão de um projeto para tal durante a validação.

Outra informação a destacar é o passo de tempo estipulado para o programa em MATLAB, igual ao tempo de um ciclo em 60Hz dividido por 360.

O número de harmônicos considerados para a validação foi mantido em relação ao adotado em regime permanente, 101 harmônicos. Logo, o sistema de equações principal do modelo analítico possui ordem igual a 204.

Dois testes são conduzidos na sequência. O primeiro consiste na mudança em degrau do valor da potência de referência. Já o segundo mantém fixo o valor de P_{ref} porém compreende uma variação instantânea de módulo e fase da tensão do gerador.

- TESTE 1

Para formular a variação de potência de referência para a primeiro teste, é preciso conhecer a faixa de potência disponível na operação do circuito com o GCSC. Lembrando que os valores limites para o ângulo de corte são 90° e 180° , são mostrados a seguir os valores correspondentes de potência ativa na barra de carga em regime permanente:

$$\gamma = 90^\circ \quad \implies \quad P_{barra} = 14,3MW \quad (4.60)$$

$$\gamma = 180^\circ \quad \implies \quad P_{barra} = 12,7MW \quad (4.61)$$

Ou seja, o GCSC aumenta em 1,6MW, ou 12,6%, a capacidade de transmissão de potência da linha de transmissão do sistema.

Conhecida a faixa de potência, determina-se que o teste consistirá em duas alterações no valor de referência da malha de controle. O procedimento é iniciado em regime permanente com 14MW de potência na barra de carga. Em $t = (0,60 + \frac{1}{60}) s$, a potência de referência é variada para 13MW e, em $t = 1,2s$, é modificada novamente para 13,5MW.

O primeiro gráfico a ser apresentado exhibe um retrato completo da evolução da potência na barra com o intuito de mostrar a competência da ação do controlador.

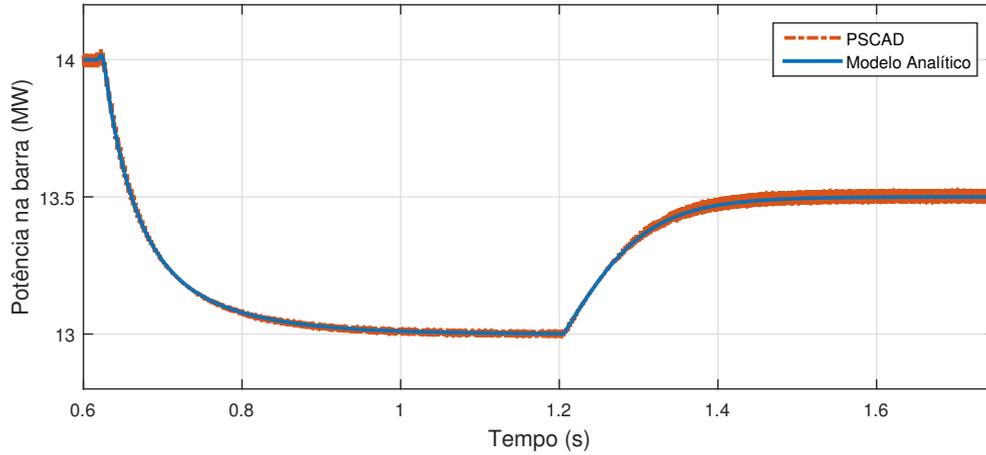


Figura 4.11: Potência na barra após variações em P_{ref} .

Percebe-se na Figura 4.11 que tanto a resposta de simulação quanto a de modelagem atenderam o objetivo de rastreamento da potência de referência e que, além disso, ambas as curvas apresentam comportamentos dinâmicos semelhantes, com inclinação e assentamento bastante coincidentes. Um ponto de nítida discrepância é a presença de oscilação de alta frequência em torno do valor médio na resposta simulada, o que não é visto na curva do modelo analítico. Isto se deve às diferentes maneiras utilizadas para se obter o valor eficaz de corrente de linha, enquanto a modelagem possui um cálculo exato (equação (4.6)), na simulação foi realizado um cálculo aproximado (Figura 4.9), impactando diretamente no valor da potência ativa.

Sendo assim, incorporou-se ao modelo analítico a forma de cálculo aproximado do valor eficaz, equivalente ao de simulação. A Figura 4.12 exibe a nova comparação, apresentando em detalhe o início da resposta, que se caracteriza como o trecho mais crítico para a validação do modelo. Com isso, a imagem a seguir corresponde a quatro ciclos de 60Hz, um anterior ao primeiro distúrbio e três posteriores. Todos os gráficos até o fim deste teste apresentarão esta janela de tempo.

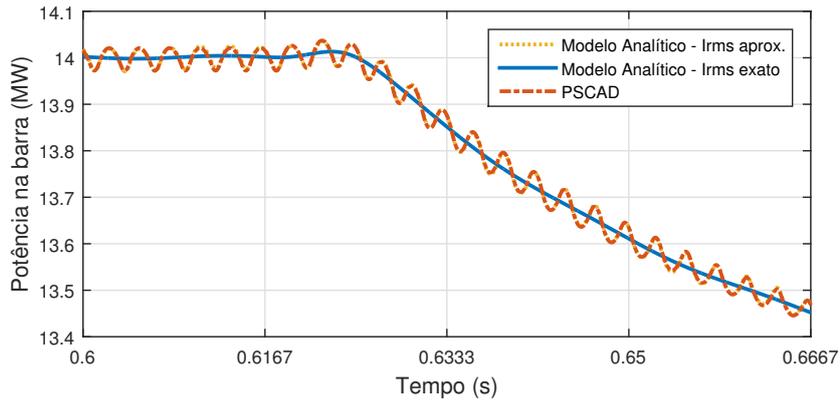


Figura 4.12: Potência na barra - Teste 1.

A Figura 4.12 mostrou que, com o uso do cálculo aproximado de corrente eficaz, a resposta da potência modelada acompanhou a obtida com o PSCAD.

As Figuras 4.13 - 4.16 expõem os gráficos dos principais sinais de tensão e corrente do circuito.

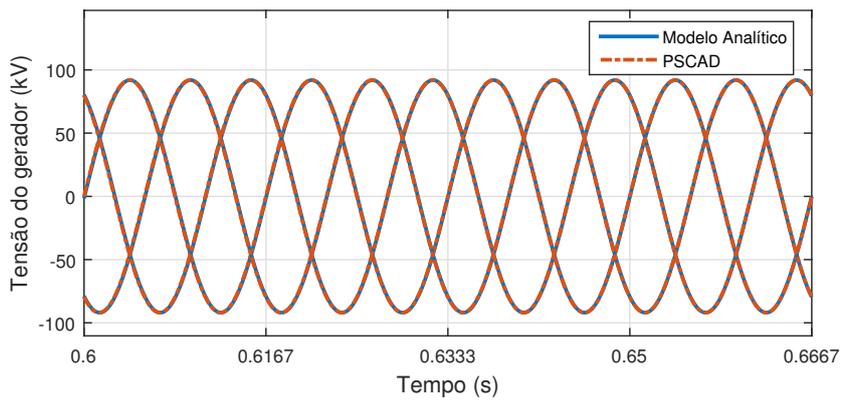


Figura 4.13: Tensão do gerador - Teste 1.

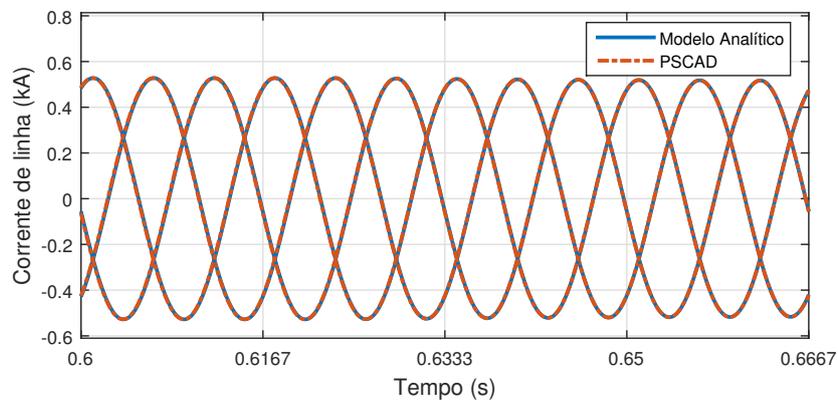


Figura 4.14: Corrente de linha - Teste 1.

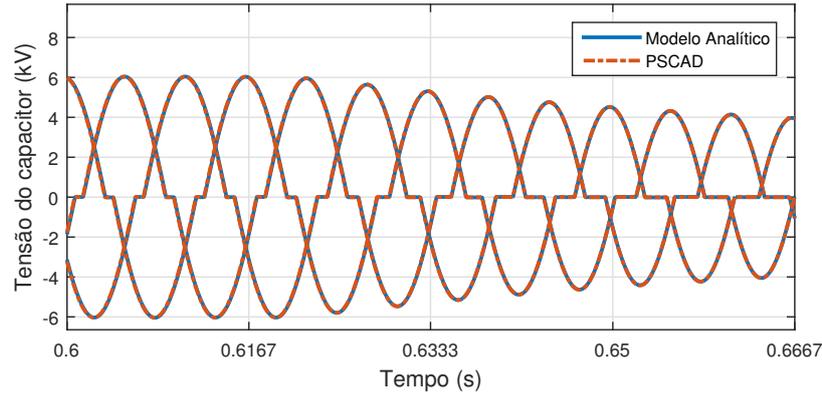


Figura 4.15: Tensão do capacitor - Teste 1.

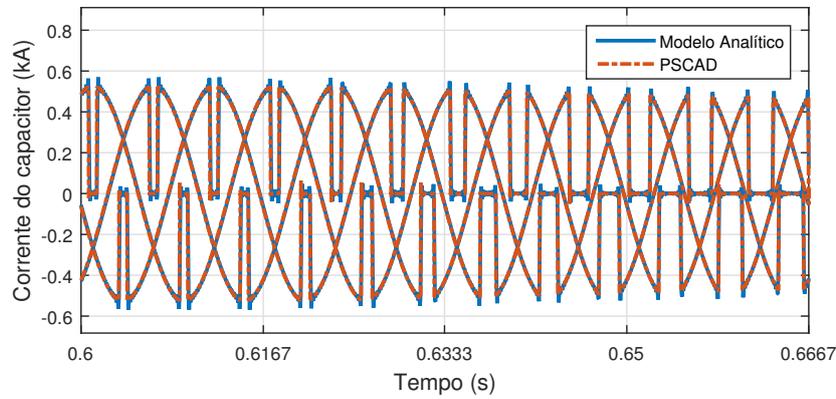


Figura 4.16: Corrente do capacitor - Teste 1.

Na Figura 4.16 é visto que, após a ocorrência do primeiro distúrbio, a corrente do capacitor passa a apresentar maiores trechos em valor nulo em ambas as curvas, isto porque a redução de P_{ref} implica na redução do tempo de condução de corrente pelo capacitor do GCSC. O efeito Gibbs pode ser percebido na curva modelada.

Por fim, as Figuras 4.17 - 4.19 apresentam as curvas dos principais ângulos. Embora todas as curvas que se referem ao modelo apresentadas neste teste tenham sido produzidas utilizando o segundo método de cálculo do ângulo de condução, baseado na integral da corrente de linha, a Figura 4.19 também exibe, para efeito de comparação, qual teria sido a resposta de σ caso se optasse pelo primeiro método.

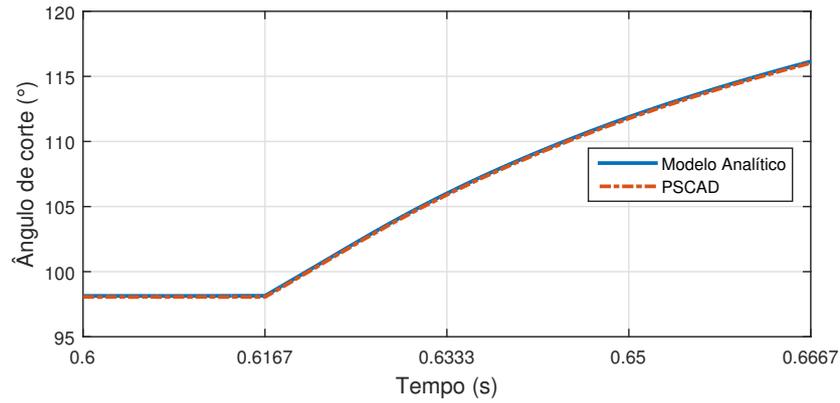


Figura 4.17: Ângulo de corte - Teste 1.

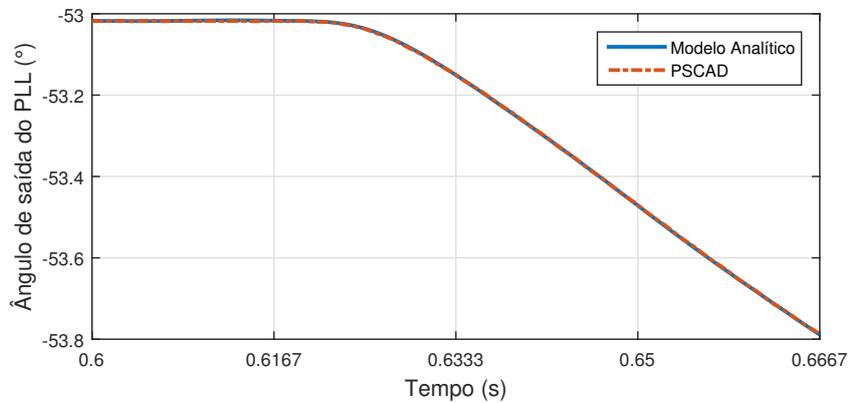


Figura 4.18: Ângulo de saída do PLL - Teste 1.

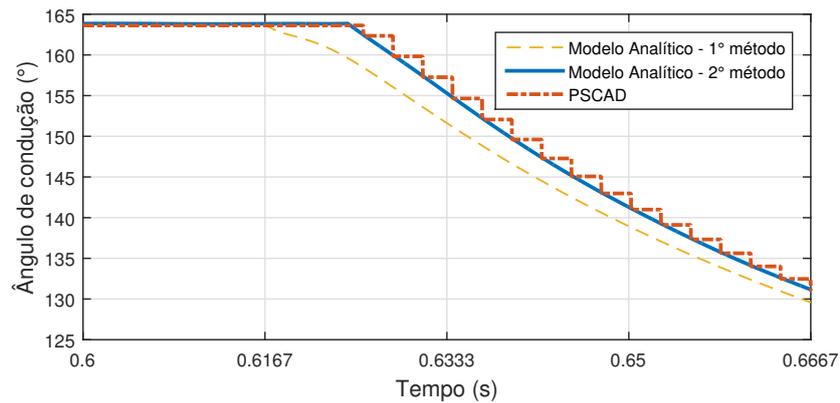


Figura 4.19: Ângulo de condução - Teste 1.

A Figura 4.19 mostra que o segundo método de cálculo de σ revela grande coincidência com a curva simulada nos instantes de atualização do valor de ângulo no PSCAD. Ademais, vê-se a superioridade em relação ao primeiro método, que forneceria valores com erros de até 4° .

Em todas as figuras observou-se boa concordância entre modelo analítico e simulação para esse primeiro teste.

- TESTE 2

O segundo teste consiste na alteração do sinal de entrada do sistema, a tensão do gerador. As mudanças instantâneas de módulo e fase da tensão são obtidas através de variações em degrau de seus coeficientes fasoriais. Durante todo o teste, o valor da potência de referência é mantido constante em 13MW. O valor eficaz inicial de v_G é 65kV, sendo adotado como valor base (V_{base}). Assim, em $t = (0,60 + \frac{1}{60})$ s, adiciona-se ao fasor de tensão um distúrbio de $(0,1 + j0,05)$ pu. Como, inicialmente, a tensão do gerador é uma senoide pura, a equação (4.62) apresenta a nova função de oscilação para a fase a após a ocorrência do distúrbio.

$$v_G = \sqrt{2}V_{base}[0,1 \cos(\omega t) + 0,95 \text{sen}(\omega t)]$$

$$\implies v_G = \sqrt{2}V_{base}[0,9552 \text{sen}(\omega t + 6,009^\circ)] \quad (4.62)$$

A primeira figura para a validação apresenta o regime transitório da potência na barra até atingir novamente a condição de operação estável:

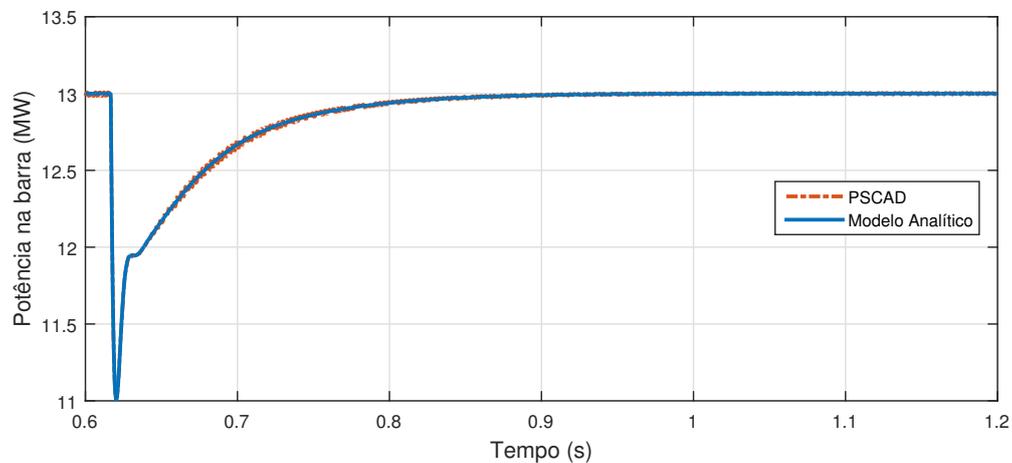


Figura 4.20: Potência na barra após variação na tensão de entrada.

Na Figura 4.20 é visto que, após a aplicação do distúrbio, a potência na barra sofre grande queda, porém, com a ação do controlador retorna ao valor de referência. Em relação ao primeiro teste, nota-se que, desta vez, não há grande presença de oscilações de alta frequência na curva simulada, ainda assim, adiciona-se para a Figura 4.21 a curva modelada com o cálculo aproximado da corrente eficaz, para melhor verificação do desempenho da resposta dinâmica.

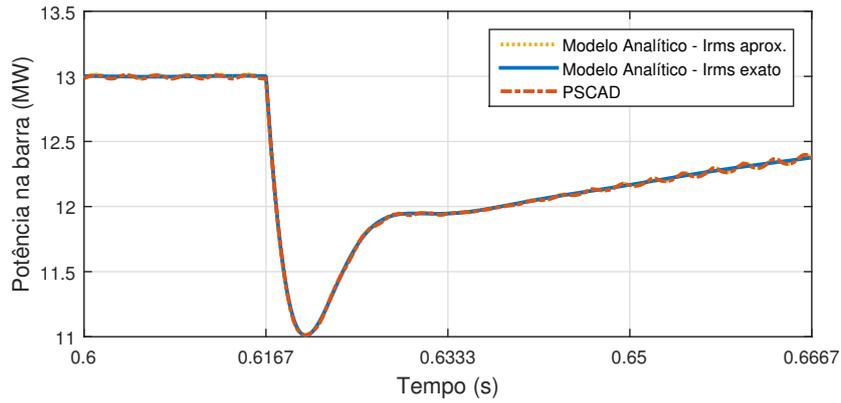


Figura 4.21: Potência na barra - Teste 2.

As Figuras 4.22 - 4.25 apresentam os gráficos dos principais sinais de tensão e corrente do circuito. Na Figura 4.22 é possível ver a descontinuidade sofrida pela tensão do gerador, que instantaneamente passou a ser representada por uma oscilação de menor amplitude e adiantada em 6° .

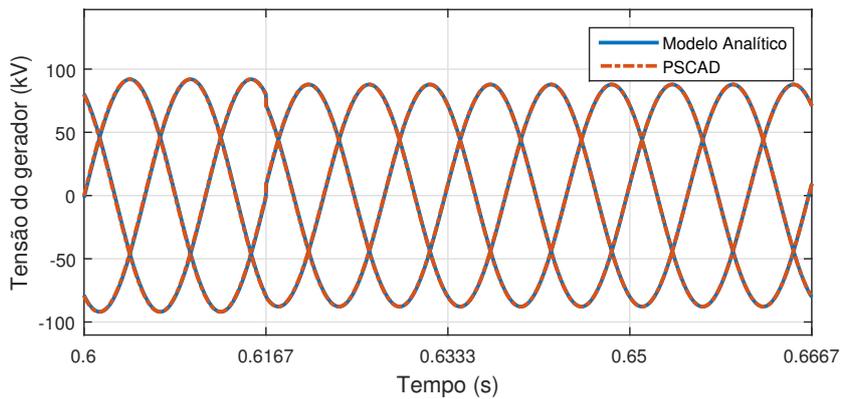


Figura 4.22: Tensão do gerador - Teste 2.

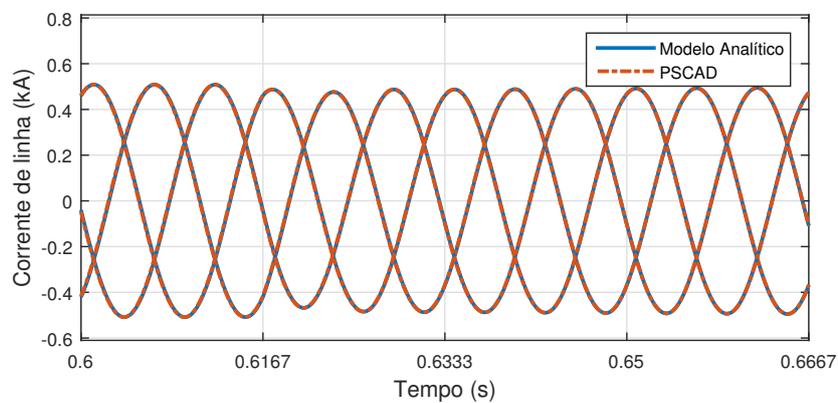


Figura 4.23: Corrente de linha - Teste 2.

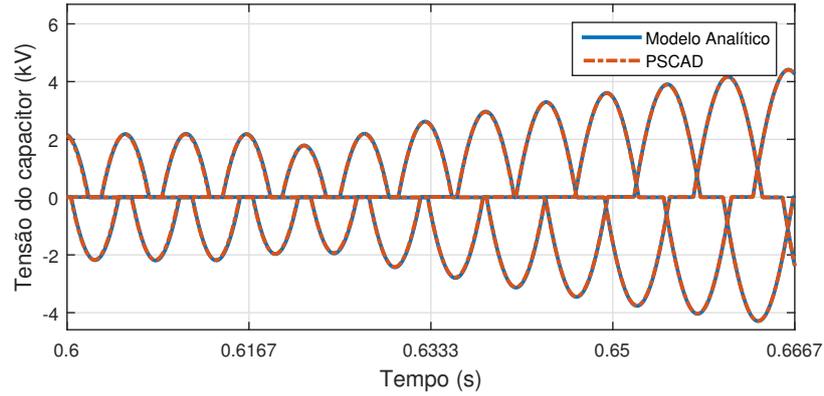


Figura 4.24: Tensão do capacitor - Teste 2.

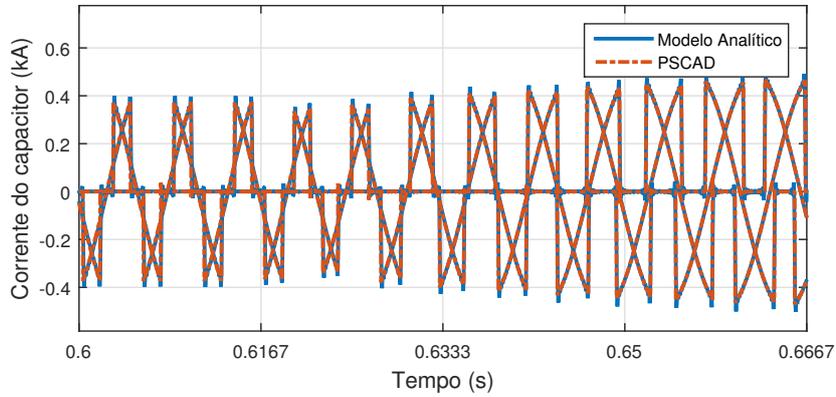


Figura 4.25: Corrente do capacitor - Teste 2.

Na sequência, são apresentadas as curvas dos principais ângulos. Como feito no teste anterior, a Figura 4.28 inclui a evolução que possuiria o ângulo de condução caso fosse utilizado o primeiro método de cálculo.

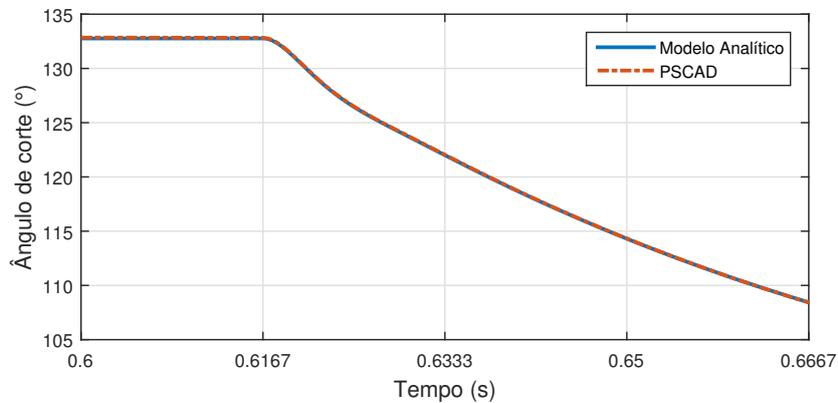


Figura 4.26: Ângulo de corte - Teste 2.

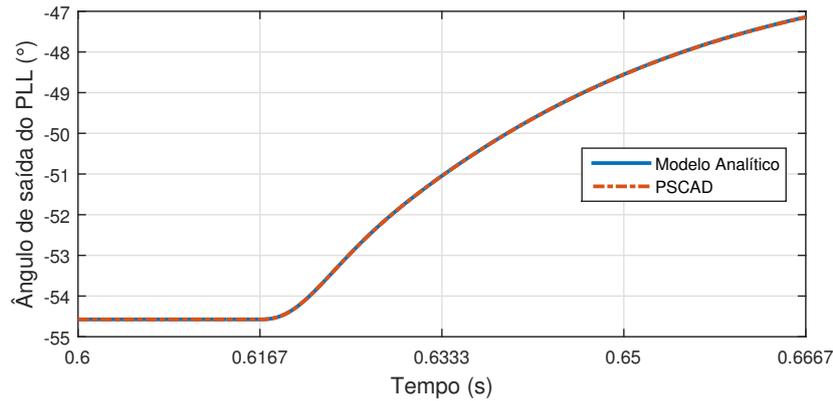


Figura 4.27: Ângulo de saída do PLL - Teste 2.

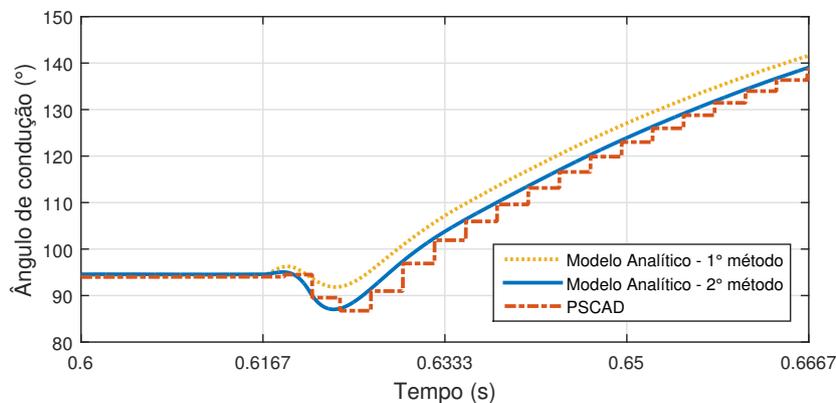


Figura 4.28: Ângulo de condução - Teste 2.

A Figura 4.28 mostra, mais uma vez, o melhor desempenho do segundo método de cálculo do ângulo de condução em relação ao método mais simples.

Assim como no primeiro teste, todos os gráficos atestaram grande concordância entre os sinais do modelo analítico e da simulação.

Após a realização dos dois testes, verifica-se que a modelagem feita apresenta um bom retrato do comportamento transitório do circuito mediante distúrbios de diferentes naturezas. Isto oferece autonomia para a utilização do modelo analítico no desenvolvimento de estudos referentes ao sistema com garantia de validade dos resultados a serem obtidos.

Como expressado anteriormente, o modelo analítico é capaz de facilitar o acesso a determinadas informações acerca do sistema. Para exemplificar, a Figura 4.29 ilustra a evolução temporal da amplitude de alguns harmônicos da tensão de capacitor com a aplicação Teste 2.

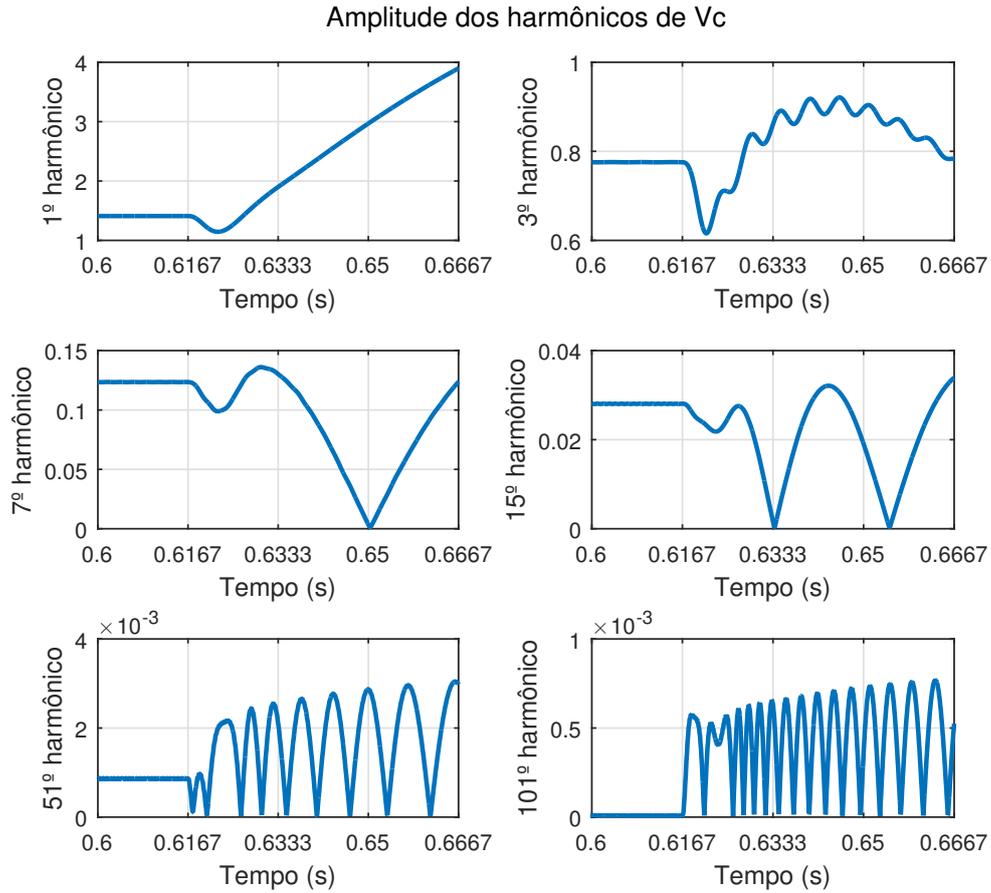


Figura 4.29: Amplitudes harmônicas da tensão do capacitor para o Teste 2.

Percebe-se na Figura 4.28 a variação das amplitudes após a aplicação do distúrbio e os níveis de aumento ou redução alcançados. Tais informações podem auxiliar em estudos de sensibilidade de parâmetros e ressonância do sistema.

Capítulo 5

Projeto de um Controlador de Potência Ativa para Circuito com GCSC

Com a validação do modelo analítico realizada, é possível dar prosseguimento ao objetivo de projetar um controlador para o GCSC sem qualquer dependência do uso de um simulador de análise de transitórios eletromagnéticos. É sabido que a utilização do modelo analítico para a realização de um projeto de controlador trata-se de uma aplicação simples em vista de todo o potencial que o modelo oferece, contudo, este é considerado um objetivo bastante útil para evitar o uso de heurística na calibração de controladores de dispositivos FACTS.

O controlador de potência ativa média na barra de carga do sistema simplificado deverá atender a determinadas especificações em sua resposta em malha fechada. Para realizar tal projeto é necessário que os elementos desta malha de controle possam ser escritos ou aproximados por funções lineares para que permitam a manipulação e o desenvolvimento de acordo com técnicas de projeto de controladores para sistemas lineares. Logo, torna-se indispensável a obtenção de uma aproximação linear que relacione a variável de controle do nosso sistema em malha aberta (o ângulo de corte γ dos IGBTs) com a variável a ser controlada (a potência média na barra de carga).

5.1 Identificação da Planta

Deseja-se aproximar a função não linear que relaciona γ à potência média na barra a uma função de transferência, como mostra a Figura 5.1. A principal estratégia para iniciar o processo de identificação é aplicar um sinal de entrada conhecido na planta não linear e observar sua resposta, procurando relacionar as características

do sinal de saída com as características de respostas lineares padrão.

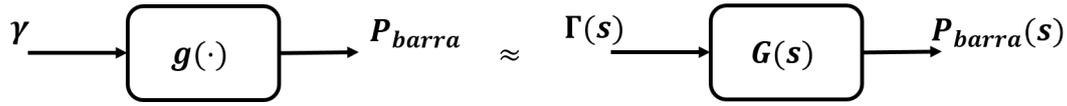


Figura 5.1: Aproximação da função não linear que relaciona γ a P_{barra} a uma função de transferência.

Seguindo essa estratégia, a primeira abordagem realizada para identificação foi a resposta da planta a um degrau em sua entrada. Após o sistema alcançar o regime permanente, uma descontinuidade foi aplicada ao ângulo γ no instante $t = (0,6 + \frac{1}{60})$ s, passando a corresponder a um novo patamar constante. As evoluções temporais das variáveis de entrada e saída podem ser vistas na Figura 5.2. Utiliza-se durante todo o capítulo o cálculo da potência na barra baseado no valor exato de corrente eficaz, dado pela equação (4.7).

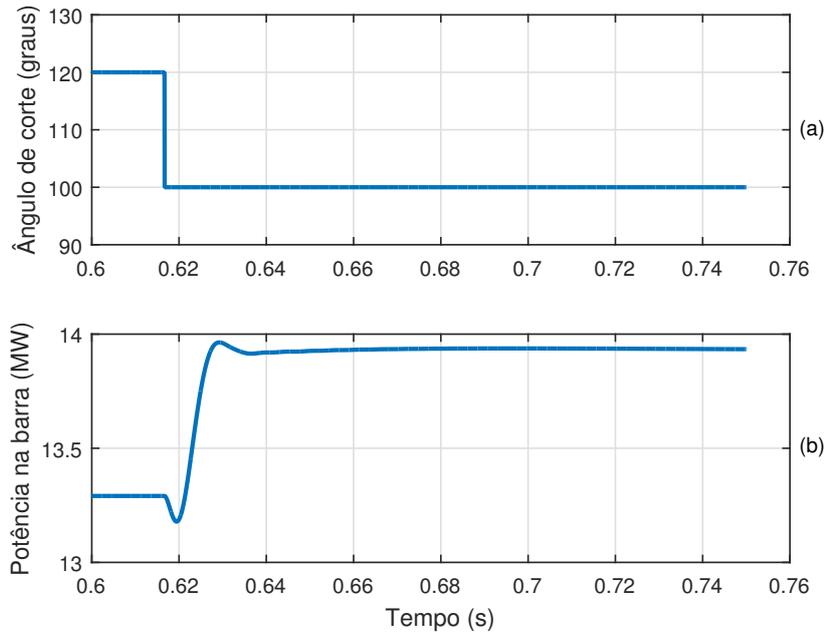


Figura 5.2: Resposta ao degrau em malha aberta. (a) Ângulo de corte; (b) Potência na barra.

Contudo, a resposta da Figura 5.2 não pôde ser levada em consideração, pois, na observação dos sinais elétricos do sistema, verificou-se um comportamento fisicamente irregular na tensão do capacitor do GCSC. Na Figura 5.3 é visto que a variação repentina da variável de entrada faz com que ocorra uma rápida elevação da tensão do capacitor, deixando de ser nula nos instantes de condução dos IGBTs, caracterizando assim uma inconsistência física e o descrédito à resposta ao degrau da Figura 5.2.

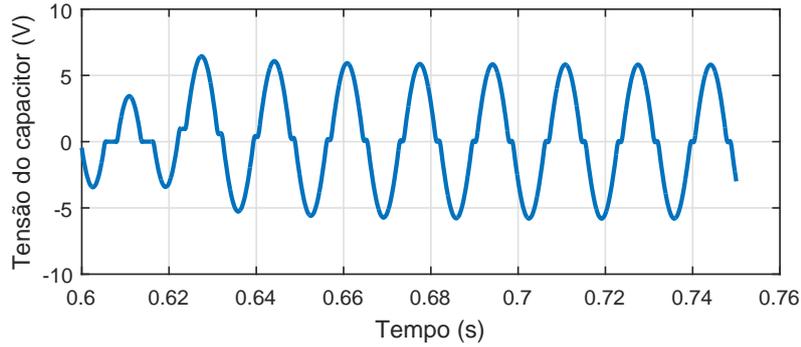


Figura 5.3: Tensão do capacitor devido à variação instantânea do ângulo de corte.

A partir da Figura 5.3, observa-se que a variação descontínua do ângulo de corte das chaves do GCSC deve ser evitada na atual modelagem, pois pode resultar na convergência do sistema a uma configuração imprópria.

A fim de contornar este problema, utilizou-se a resposta em frequência. Assim, a entrada aplicada passa a ser uma função senoidal e não mais uma função descontínua. Neste caso, porém, verificaram-se respostas altamente não lineares. A Figura 5.4 ilustra um destes casos. Para uma entrada senoidal de frequência 50Hz e amplitude de 10° obteve-se uma saída composta por alta contribuição de senoides de diversas frequências, em que a componente predominante da resposta se caracteriza como uma subfrequência do sinal de entrada, neste caso, 10Hz.

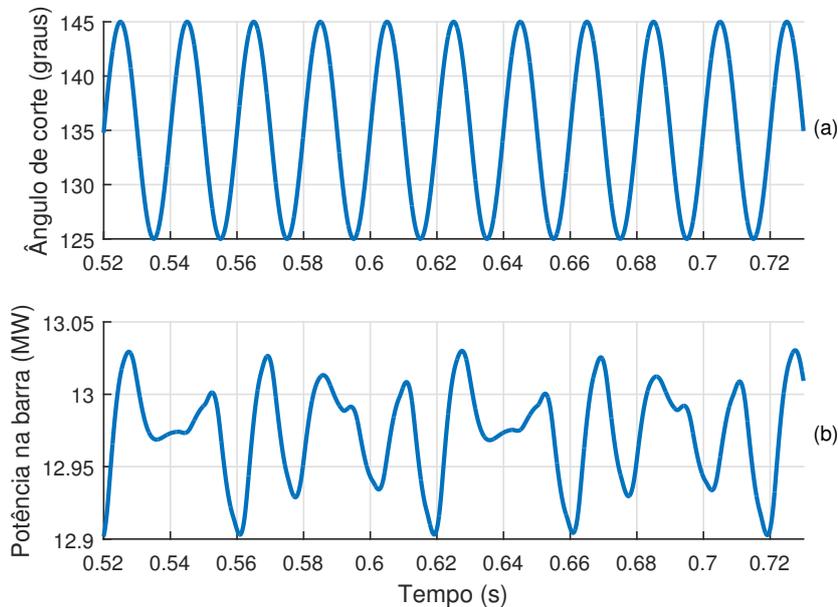


Figura 5.4: Resposta do sistema em malha aberta a uma entrada senoidal de frequência 50Hz. (a) Ângulo de corte; (b) Potência na barra.

A Tabela 5.1 apresenta a correspondência não linear entre as frequências das

componentes fundamentais dos sinais de entrada e saída obtidas com a resposta em frequência em malha aberta.

Tabela 5.1: Relação entre as frequências das componentes fundamentais de entrada (f_{in}) e saída (f_{out}) da resposta em frequência em malha aberta.

f_{in} (Hz)	f_{out} (Hz)	f_{in} (Hz)	f_{out} (Hz)	f_{in} (Hz)	f_{out} (Hz)
5	5	57	3	100	20
10	10	58	2	105	15
15	15	59	1	110	10
20	20	60	0	115	5
25	5	61	1	116	4
30	30	62	2	117	3
32	8	63	3	118	2
35	5	64	8	119	1
40	40	65	5	120	0
44	4	70	10	121	1
45	15	75	15	122	2
50	10	80	40	123	3
51	3	85	5	124	4
55	5	90	30	125	5
56	8	95	5	130	10

Como a aproximação linear da planta será utilizada para o controle de potência em malha fechada, como mostra a Figura 5.5, optou-se por identificar a função de transferência correspondente à malha fechada [28, 29] e, com este resultado, deduzir a função de transferência da planta.

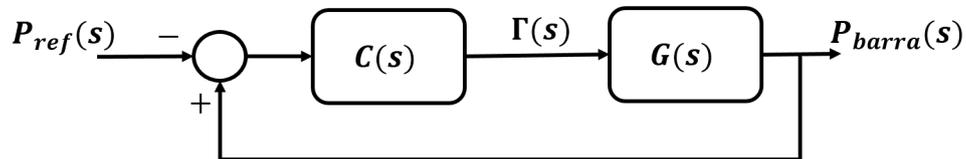


Figura 5.5: Diagrama de blocos em malha fechada do controle de potência na barra.

A função de transferência da malha fechada pode ser escrita em função de $G(s)$ e $C(s)$ da seguinte forma:

$$T(s) = \frac{P_{barra}(s)}{P_{ref}(s)} = \frac{-C(s)G(s)}{1 - C(s)G(s)} \quad (5.1)$$

Uma vez conhecidos $T(s)$ e $C(s)$, pode-se encontrar a expressão da função de transferência da planta:

$$G(s) = \frac{T(s)}{T(s)C(s) - C(s)} \quad (5.2)$$

Sem qualquer projeto, o controlador foi escolhido de forma que fosse o mais simples possível e não instabilizasse a resposta. Selecionou-se, então, um integrador, por garantir erro nulo em regime permanente e por auxiliar na filtragem do sinal de entrada da planta, a fim de amenizar os efeitos da não linearidade.

$$C(s) = \frac{8,5225}{s} \quad (5.3)$$

Com o controlador especificado, aplicou-se uma variação em degrau no valor da referência de potência da malha fechada. Em $t = (0,6 + \frac{1}{60}) s$, a referência passa de 13,5MW para 14,1MW. A Figura 5.6 mostra os sinais de entrada e saída desta resposta ao degrau.

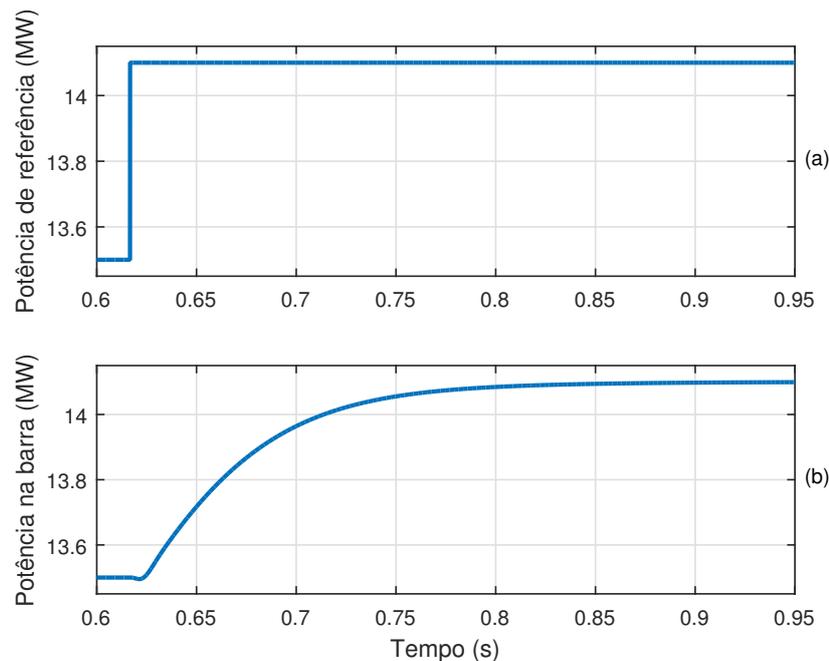


Figura 5.6: Resposta ao degrau em malha fechada com variação na potência de referência de 13,5 para 14,1MW. (a) Potência de referência; (b) Potência na barra.

A resposta ao degrau da malha fechada atendeu à expectativa e não causou qualquer inconsistência aos sinais elétricos. A Figura 5.7 ilustra a dinâmica da tensão do capacitor atendendo ao comportamento físico esperado.

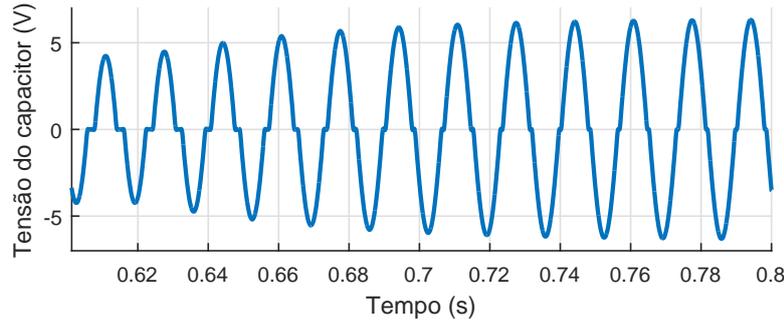


Figura 5.7: Tensão do capacitor devido à variação instantânea da potência de referência.

Deve-se ressaltar neste ponto a importância da escolha do degrau aplicado para o processo de identificação. Diferentemente de uma função linear, nosso sistema apresenta diferentes tempos de resposta dependendo de diversos fatores relativos ao degrau no sinal de entrada. Basicamente, os fatores são: o ponto de partida do degrau, a amplitude do degrau e o sentido de variação da descontinuidade.

Alguns testes foram feitos para uma melhor percepção deste fenômeno e da influência de cada característica. Em todos os testes, o tempo de subida (t_r) da resposta foi medido.

- Teste 1 - Pontos de partida iguais, Amplitudes iguais, Sentidos diferentes.

P_{ref} inicial (MW)	P_{ref} final (MW)	t_r (s)
13,5	13,7	0,118
13,5	13,3	0,142

Degaus positivos apresentam tempos de subida menores do que para os degraus negativos.

- Teste 2 - Pontos de partida iguais, Amplitudes diferentes, Sentidos iguais.

- Degrau positivo:

P_{ref} inicial (MW)	P_{ref} final (MW)	t_r (s)
13,5	13,7	0,118
13,5	13,9	0,111
13,5	14,1	0,106

- Degrau negativo:

P_{ref} inicial (MW)	P_{ref} final (MW)	t_r (s)
13,5	13,3	0,142
13,5	13,1	0,161
13,5	12,9	0,194

Para degraus positivos, quanto maior o degrau, menor é o tempo de subida. Para os degraus negativos é o inverso, quanto maior o degrau, maior o tempo de subida.

- Teste 3 - Pontos de partida diferentes, Amplitudes iguais, Sentidos iguais.

P_{ref} inicial (MW)	P_{ref} final (MW)	t_r (s)
13,3	13,5	0,136
13,5	13,7	0,118
13,7	13,9	0,107
13,9	14,1	0,098

Em degraus positivos, quanto maior o ponto de partida, menor é o tempo de subida.

A Figura 5.8 apresenta a relação entre o ângulo de corte e a potência na barra em regime permanente. Lembrando que o ângulo de corte das chaves é caracterizado como o sinal de saída do controlador no sistema em malha fechada (Figura 5.5), esta curva auxilia na análise dos resultados dos testes feitos acima. Sua derivada apresenta boa correspondência com os desvios vistos nos tempos de subida.

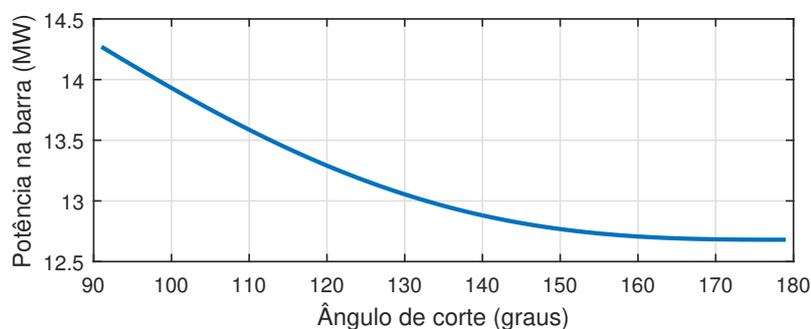


Figura 5.8: Potência na barra em função do ângulo de corte, em regime permanente.

Percebe-se na Figura 5.8 o aumento do módulo da derivada da curva conforme o aumento da potência na barra, isto caracteriza um menor esforço do controlador

em atingir patamares superiores de potência, corroborando com os menores tempos de subida neste sentido de variação. Já para a redução da potência, quanto mais à direita da curva, maior precisa ser a variação imposta à variável manipulada pelo controlador, o ângulo de corte, requisitando maior esforço para o rastreamento da potência de referência e aumentando os tempos de resposta.

Baseado nas observações feitas e com o objetivo de projetar um controlador para a planta, torna-se uma questão fundamental a escolha do degrau a se aplicar para o processo de identificação, visto que algumas das especificações mais utilizadas para projetos de controladores são exatamente os tempos de resposta.

Optou-se, então, por um degrau de amplitude menor à considerada anteriormente na Figura 5.6, e o degrau de potência de 13,5 para 13,7MW foi estipulado. Desta forma, um controlador projetado para atender determinado tempo de resposta a partir deste menor degrau em sua entrada atenderá também, e de forma mais rápida, degraus de amplitudes maiores.

Consequentemente, na eventual aplicação de degraus com amplitudes ainda menores, com variação no sentido oposto ou partindo de níveis mais baixos de potência é esperada uma resposta mais lenta à conquistada com o degrau escolhido.

A Figura 5.9 apresenta a nova resposta ao degrau a ser considerada.

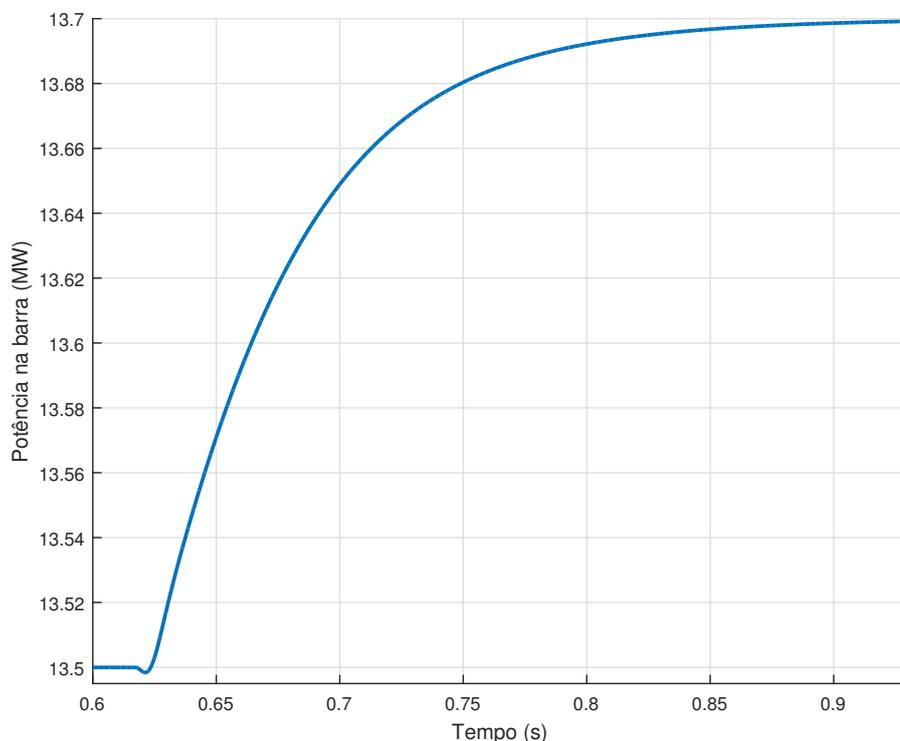


Figura 5.9: Resposta ao degrau em malha fechada. Variação na potência de referência de 13,5 para 13,7MW.

Sobre a resposta a sinais senoidais, esta também apresenta um comportamento satisfatório em malha fechada. Na Figura 5.10 é mostrada a reação do sistema a um sinal de entrada oscilando em 50Hz.

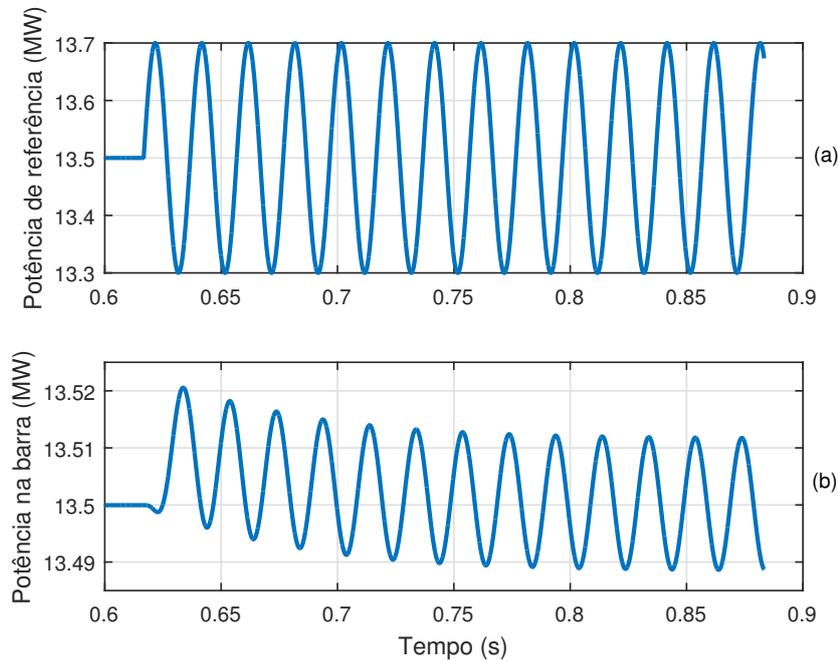


Figura 5.10: Resposta do sistema em malha fechada a uma entrada senoidal de frequência 50Hz. (a) Potência de referência; (b) Potência na barra.

Percebe-se que, diferentemente do obtido para o sistema em malha aberta, a potência na barra em regime permanente torna-se uma oscilação em 50Hz, assim como o sinal de entrada.

A Figura 5.11 apresenta o diagrama de ganho da resposta em frequência do sistema em malha fechada.

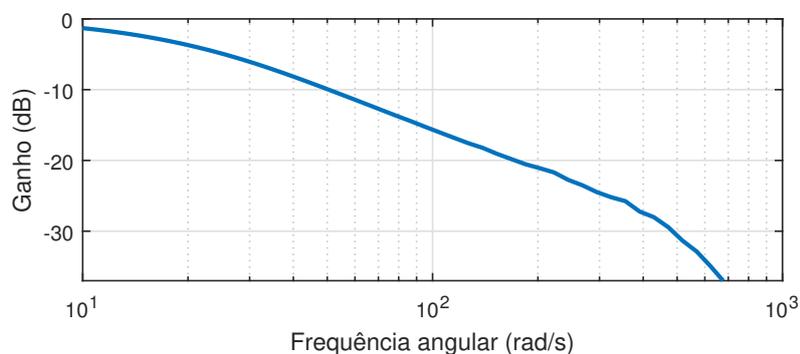


Figura 5.11: Diagrama de ganho do sistema em malha fechada.

Destaca-se que a produção desta varredura em frequência no sistema é bem mais simples de ser realizada através do código da modelagem analítica do que através

de um simulador de transitórios eletromagnéticos.

Dando prosseguimento à identificação da função de transferência a partir da resposta ao degrau, analisando a curva da Figura 5.9, ressaltam-se algumas características desta resposta e suas implicações:

1. Presença de subsinal: indica existência de zero de fase não-mínima, como mostrado na Figura 5.12.
2. Subsinal iniciado sem descontinuidade: indica maior número de polos do que zeros na planta.

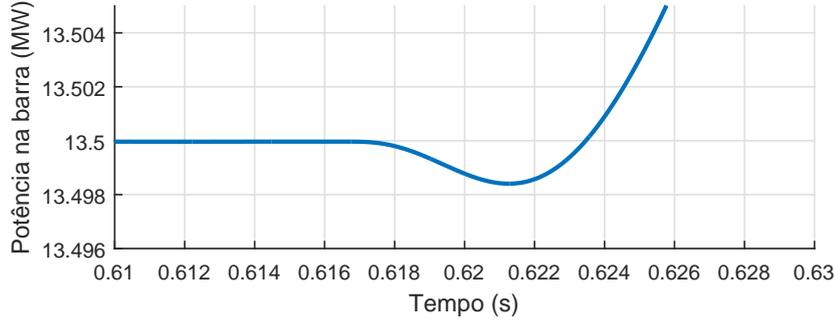


Figura 5.12: Subsinal presente na resposta ao degrau.

A função de transferência mais simples que atende a essas características é a de segunda ordem e fase não mínima. Também deve possuir ganho unitário, a fim de que o valor de referência seja rastreado em regime permanente. Logo, no domínio da frequência, esta resposta ao degrau pode ser descrita pela equação (5.4).

$$P_{barra}(s) = T(s)P_{ref}(s) = \frac{(\tau_z s + 1)}{(\tau_{p1} s + 1)(\tau_{p2} s + 1)} \frac{1}{s} \quad (5.4)$$

em que τ_z é um número negativo.

Para escrever a equação (5.4) no domínio do tempo ainda podem haver duas possibilidades, os polos de $T(s)$ podem ser iguais ou diferentes.

Caso sejam iguais:

$$P_{barra}(t) = 1 - e^{-t/\tau_{p1}} - \frac{t(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^2} e^{-t/\tau_{p1}} \quad (5.5)$$

Caso sejam diferentes:

$$P_{barra}(t) = 1 - \frac{(\tau_{p1} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{-t/\tau_{p1}} + \frac{(\tau_{p2} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{-t/\tau_{p2}} \quad (5.6)$$

É possível encontrar na literatura diversos métodos para a identificação dos parâmetros de uma função de transferência de segunda ordem contendo um zero

a partir de sua resposta ao degrau. Em [30], alguns pontos da resposta são selecionados, de forma que todos os pontos sejam referentes a instantes de tempo múltiplos do instante de tempo do primeiro ponto, com isso, as equações exponenciais aplicadas a estes instantes podem ser combinadas e manipuladas de maneira a formar um sistema linear de fácil resolução algébrica. Já em [31], enfatiza-se o caso de fase não-mínima e inclui-se a possibilidade do atraso no tempo de resposta. Pontos relacionados ao valor mínimo, à subida e ao instante de cruzamento da resposta por zero são selecionados para compor um sistema de equações resolvido iterativamente através de um software de alta capacidade de resolução numérica (*solver*).

Ambos os métodos apresentam bons resultados diante de respostas ao degrau de funções verdadeiramente lineares, porém, são bastante sensíveis a desvios existentes em respostas aproximadamente lineares, fazendo com que não forneçam aproximações satisfatórias ao nosso caso.

Com isso, partiu-se à utilização de um método que leva em consideração todos os pontos da curva da Figura 5.6 e busca iterativamente o conjunto de parâmetros que melhor ajusta esta curva a uma resposta linear, o Método dos Mínimos Quadrados Não Linear [28, 32, 33].

Este método consiste em minimizar a soma do erro quadrático existente entre a resposta não linear e uma resposta de características desejadas.

O erro entre as funções é expresso de acordo com (5.7).

$$\epsilon = P_{barra} - P_{ajuste} \quad (5.7)$$

sendo P_{barra} um vetor de comprimento N contendo todos os valores de saída da Figura 5.6 e P_{ajuste} um vetor formado aplicando-se os mesmos instantes de tempo utilizados na Figura 5.6 na equação (5.5), para o caso de polos iguais, ou na equação (5.6), para o caso de polos distintos.

A função a ser minimizada é, então, calculada por (5.8).

$$f(\tau_{p1}, \tau_{p2}, \tau_z) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (P_{barra,i} - P_{ajuste,i})^2 \quad (5.8)$$

Esta equação pode ser facilmente resolvida com o auxílio de um *solver*, porém, optou-se por apresentar uma alternativa para a não necessidade de utilização de tal recurso. Para isto, altera-se a função a ser minimizada.

Primeiramente, lineariza-se a equação (5.8) em função dos parâmetros desconhecidos.

$$f + \frac{\partial f}{\partial \tau_{p1}} \Delta \tau_{p1} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{p2}} \Delta \tau_{p2} + \frac{\partial f}{\partial \tau_z} \Delta \tau_z = 0 \quad (5.9)$$

As derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{p1}} = 2 \sum_{i=1}^N \epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \tau_{p1}} = -2 \sum_{i=1}^N (P_{barra,i} - P_{ajuste,i}) \frac{\partial P_{ajuste,i}}{\partial \tau_{p1}} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{p2}} = 2 \sum_{i=1}^N \epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \tau_{p2}} = -2 \sum_{i=1}^N (P_{barra,i} - P_{ajuste,i}) \frac{\partial P_{ajuste,i}}{\partial \tau_{p2}} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_z} = 2 \sum_{i=1}^N \epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \tau_z} = -2 \sum_{i=1}^N (P_{barra,i} - P_{ajuste,i}) \frac{\partial P_{ajuste,i}}{\partial \tau_z} \quad (5.12)$$

O objetivo passa a ser minimizar as funções (5.10)-(5.12), como resumido em (5.13).

$$F(\tau_{p1}, \tau_{p2}, \tau_z) = \begin{bmatrix} f_1(\tau_{p1}, \tau_{p2}, \tau_z) \\ f_2(\tau_{p1}, \tau_{p2}, \tau_z) \\ f_3(\tau_{p1}, \tau_{p2}, \tau_z) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} (P_{barra,i} - P_{ajuste,i}) \frac{\partial P_{ajuste,i}}{\partial \tau_{p1}} \\ (P_{barra,i} - P_{ajuste,i}) \frac{\partial P_{ajuste,i}}{\partial \tau_{p2}} \\ (P_{barra,i} - P_{ajuste,i}) \frac{\partial P_{ajuste,i}}{\partial \tau_z} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Exemplificando para o caso de diferentes polos, P_{ajuste} é dado por (5.6), logo:

$$\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} = -\frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \frac{(\tau_{p1} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{t(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{(\tau_{p2} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p2}} = -\frac{(\tau_{p1} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} + \frac{(\tau_{p2} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} + \frac{t(\tau_{p2} - \tau_z)}{\tau_{p2}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_z} = \frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} \quad (5.16)$$

O método numérico de Newton-Raphson foi adotado para o desenvolvimento do ajuste. O sistema montado a cada iteração é apresentado em (5.17).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial \tau_{p1}^{(k)}} & \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial \tau_{p2}^{(k)}} & \frac{\partial f_1^{(k)}}{\partial \tau_z^{(k)}} \\ \frac{\partial f_2^{(k)}}{\partial \tau_{p1}^{(k)}} & \frac{\partial f_2^{(k)}}{\partial \tau_{p2}^{(k)}} & \frac{\partial f_2^{(k)}}{\partial \tau_z^{(k)}} \\ \frac{\partial f_3^{(k)}}{\partial \tau_{p1}^{(k)}} & \frac{\partial f_3^{(k)}}{\partial \tau_{p2}^{(k)}} & \frac{\partial f_3^{(k)}}{\partial \tau_z^{(k)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tau_{p1}^{(k)} \\ \Delta \tau_{p2}^{(k)} \\ \Delta \tau_z^{(k)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ f_3^{(k)} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

As derivadas parciais da matriz deste sistema são obtidas através de (5.14)-(5.16) juntamente a (5.18)-(5.26).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau_{p1}} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} \right) &= \frac{2}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{2(\tau_{p1} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^3} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{2t}{\tau_{p1}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \\
&+ \frac{2t(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \frac{2t(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^3 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{t^2(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^4 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \\
&+ \frac{2(\tau_{p2} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^3} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} \tag{5.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau_{p2}} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} \right) &= -\frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \frac{2(\tau_{p1} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^3} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{t(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \\
&- \frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} - \frac{2(\tau_{p2} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^3} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} - \frac{t(\tau_{p2} - \tau_z)}{\tau_{p2}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} \tag{5.19}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_z} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} \right) = -\frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \frac{t}{\tau_{p1}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{p1}} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p2}} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau_{p2}} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} \right) \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau_{p2}} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p2}} \right) &= -\frac{2(\tau_{p1} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^3} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \frac{2}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} + \frac{2(\tau_{p2} - \tau_z)}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^3} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} + \\
&+ \frac{2t}{\tau_{p1}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} + \frac{2t(\tau_{p2} - \tau_z)}{\tau_{p2}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} - \frac{2t(\tau_{p2} - \tau_z)}{\tau_{p2}^3 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} + \\
&+ \frac{t^2(\tau_{p2} - \tau_z)}{\tau_{p2}^4 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} \tag{5.22}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_z} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p2}} \right) = \frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{1}{(\tau_{p1} - \tau_{p2})^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} - \frac{t}{\tau_{p2}^2 (\tau_{p1} - \tau_{p2})} e^{\frac{-t}{\tau_{p2}}} \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{p1}} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_z} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau_z} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} \right) \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{p2}} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_z} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau_z} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p2}} \right) \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_z} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_z} \right) = 0 \tag{5.26}$$

Com as equações totalmente descritas, percebeu-se que o processo de con-

vergência é altamente dependente dos valores iniciais dos parâmetros [33]. Utiliza-se, então, a resposta em frequência do sistema em malha fechada (Figura 5.11) a fim de estimar o polo dominante e auxiliar nas condições iniciais do processo iterativo.

Tratando-se de uma aproximação para a posição do polo dominante (p_1), pode-se supor inicialmente que este possui módulo bem menor aos módulos do segundo polo (p_2) e do zero (z). Assim, o valor do ganho referente à frequência do polo dominante é calculado em (5.27) e possui o valor de $-3dB$ [7].

$$\begin{aligned} |T(s)|_{dB} &= \left| \left(\left(\frac{-1}{z} \right) s + 1 \right) \right|_{dB} - \left| \left(\left(\frac{-1}{p_1} \right) s + 1 \right) \right|_{dB} - \left| \left(\left(\frac{-1}{p_2} \right) s + 1 \right) \right|_{dB} \\ |T(s \rightarrow p_1)|_{dB} &\approx - \left| \left(\left(\frac{-1}{p_1} \right) (s) + 1 \right) \right|_{dB} = - \left| \sqrt{\left(\left(\frac{-1}{p_1} \right) s \right)^2 + 1} \right|_{dB} \\ |T(p_1)|_{dB} &\approx - \left| \sqrt{2} \right|_{dB} = -3dB \end{aligned} \quad (5.27)$$

Na Figura 5.13 é evidenciado o ponto amostrado mais próximo a este valor de ganho. O valor exato de $-3dB$ está relacionado a $\omega = 17,1 rad/s$.

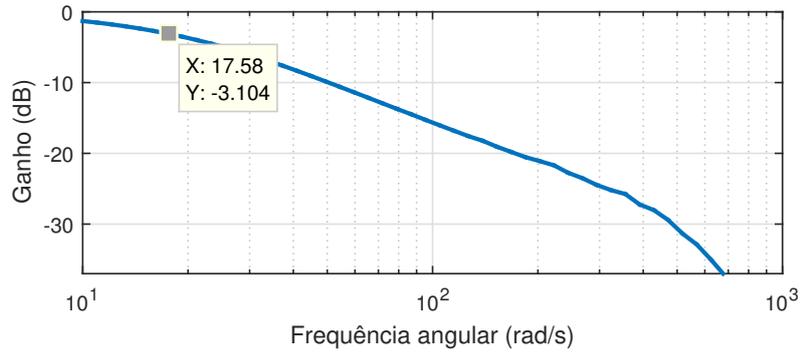


Figura 5.13: Diagrama de ganho do sistema em malha fechada com marcação próxima à posição estimada para o polo dominante.

Considera-se que uma boa inicialização para o valor do polo dominante seja suficiente para se obter uma convergência satisfatória. Com isso, o segundo polo será inicializado como dez vezes o valor do polo dominante e o zero como dez vezes o negativo do polo dominante. As constantes de tempo correspondentes são apresentadas em (5.28).

$$\tau_{p1} = 0,0585 \quad , \quad \tau_{p2} = 0,0059 \quad , \quad \tau_z = -0,0059 \quad (5.28)$$

Com estes valores iniciais, o processo iterativo converge para os seguintes parâmetros:

$$\tau_{p1} = 0,0530 \quad , \quad \tau_{p2} = 0,0068 \quad , \quad \tau_z = -0,0030 \quad (5.29)$$

Implicando no conjunto de polos e zeros:

$$p_1 = -18,86 \quad , \quad p_2 = -147,63 \quad , \quad z = 333,68 \quad (5.30)$$

A Figura 5.14 compara a resposta ao degrau da função original não linear com a resposta ao degrau linear ajustada pelo método.

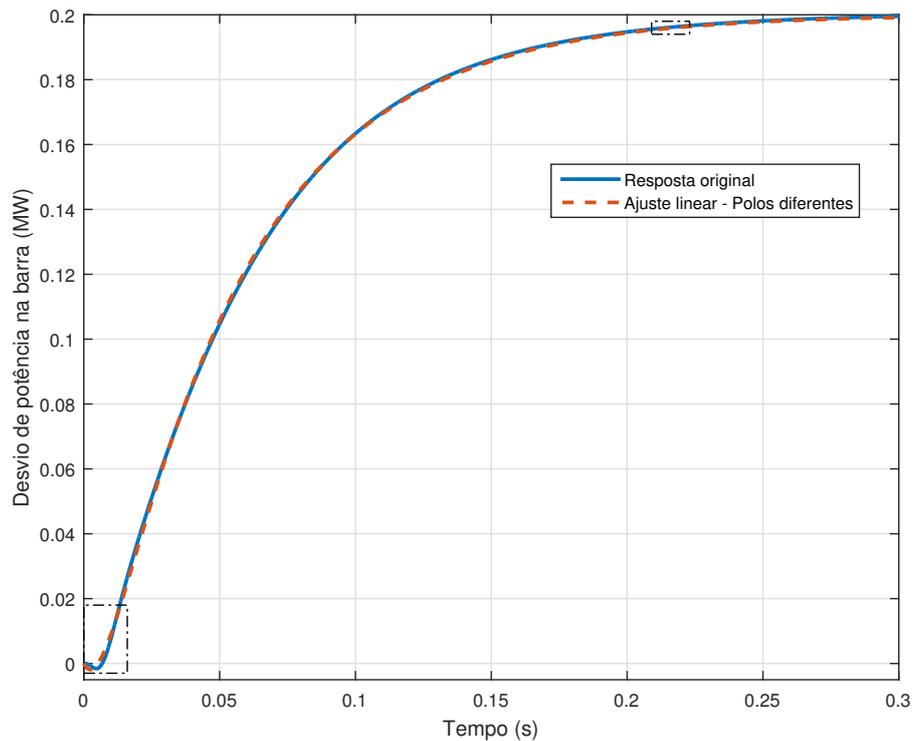


Figura 5.14: Comparação entre a resposta ao degrau em malha fechada e o ajuste linear com polos distintos. Áreas destacadas referentes à região de subsinal e de atingimento a 98% do valor final.

Graficamente atesta-se a qualidade do ajuste obtido, visivelmente próximo durante todo o intervalo dinâmico. A seguir são mostradas em detalhe as duas regiões destacadas na Figura 5.14. A Figura 5.15 evidencia o início da resposta e a região de subsinal e a Figura 5.16 ressalta a área em que as curvas atingem 98% do valor final do desvio aplicado.

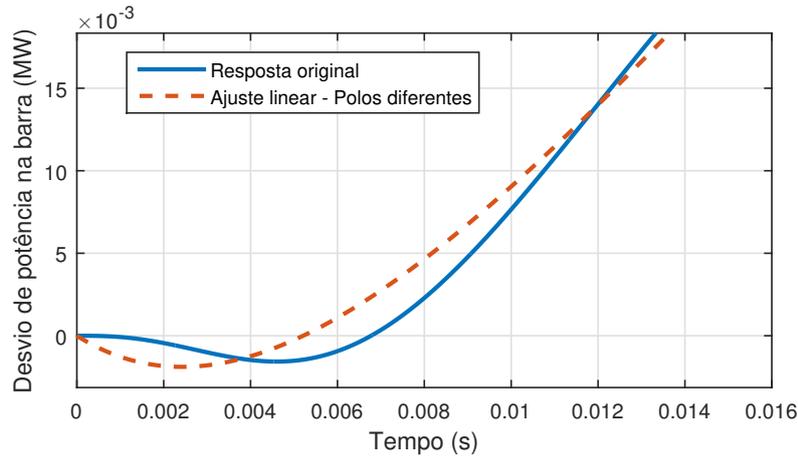


Figura 5.15: Início da resposta ao degrau da Figura 5.14.

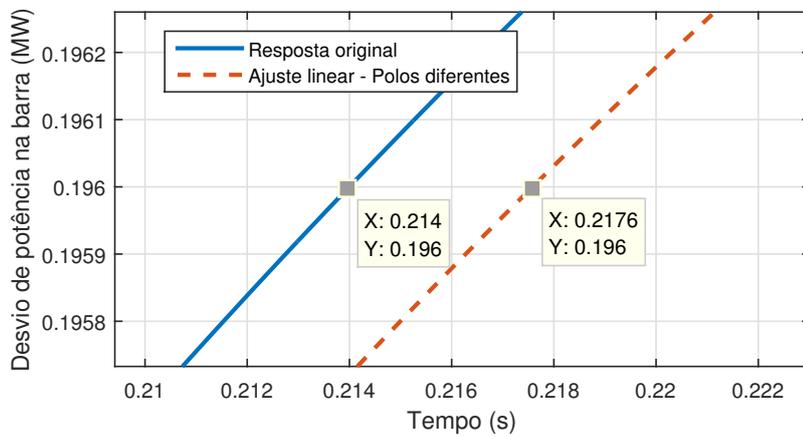


Figura 5.16: Nível de 98% da resposta ao degrau da Figura 5.14.

Na Figura 5.15 é observado que, enquanto o ajuste linear inicia o subsinal com uma curva de derivada decrescente em módulo, a função não linear responde inicialmente com derivada crescente em módulo e depois sofre a inflexão, apresentando uma aparência mais suave em relação à resposta linear nesta região. Já na Figura 5.16, nota-se que a curva de ajuste alcança 98% do valor final 3,6ms após a curva da função original.

Seguindo com a identificação, o mesmo raciocínio aplicado à possibilidade de polos distintos pode ser aplicado à de polos iguais. Neste caso, P_{barra} é dado por (5.5) e as equações que compõem o processo iterativo são apresentadas em (5.31)-(5.36).

$$\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} = -\frac{2t}{\tau_{p1}^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \frac{2t(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^3} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{t^2(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^4} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_z} = \frac{t}{\tau_{p1}^2} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_{p1}} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} \right) &= \frac{6t}{\tau_{p1}^3} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{6t(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^4} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{3t^2}{\tau_{p1}^4} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \\ &+ \frac{6t^2(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^5} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} - \frac{t^3(\tau_{p1} - \tau_z)}{\tau_{p1}^6} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_z} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} \right) = -\frac{2t}{\tau_{p1}^3} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} + \frac{t^2}{\tau_{p1}^4} e^{\frac{-t}{\tau_{p1}}} \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{p1}} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_z} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau_z} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_{p1}} \right) \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_z} \left(\frac{\partial P_{ajuste}}{\partial \tau_z} \right) = 0 \quad (5.36)$$

Para o caso de polos iguais, e com aproximação análoga à feita para polos distintos, estima-se inicialmente que a posição destes polos corresponde a um ganho de valor $-6dB$, como deduzido em (5.37).

$$\begin{aligned} |T(s)|_{dB} &= \left| \left(\left(\frac{-1}{z} \right) s + 1 \right) \right|_{dB} - 2 \left| \left(\left(\frac{-1}{p1} \right) s + 1 \right) \right|_{dB} \\ |T(s \rightarrow p1)|_{dB} &\approx -2 \left| \left(\left(\frac{-1}{p1} \right) (s) + 1 \right) \right|_{dB} = -2 \left| \sqrt{\left(\left(\frac{-1}{p1} \right) s \right)^2 + 1} \right|_{dB} \\ |T(p1)|_{dB} &\approx -2 \left| \sqrt{2} \right|_{dB} = -6dB \end{aligned} \quad (5.37)$$

A Figura 5.17 evidencia o ponto amostrado mais próximo. O ganho exato $-6dB$ está relacionado a $\omega = 29,7rad/s$.

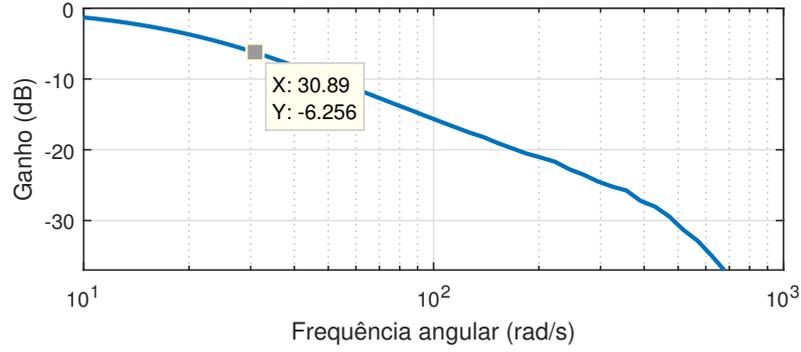


Figura 5.17: Diagrama de ganho do sistema em malha fechada com marcação próxima à posição estimada para o par de polos.

Assim, os polos devem ser inicializados com o valor $-29,7$. O zero é inicializado como dez vezes o negativo deste valor. As constantes de tempo correspondentes são apresentadas em (5.38).

$$\tau_{p1} = 0,0337 \quad , \quad \tau_{p2} = 0,0337 \quad , \quad \tau_z = -0,0034 \quad (5.38)$$

O que faz o método iterativo convergir para os seguintes parâmetros:

$$\tau_{p1} = \tau_{p2} = 0,0354 \quad , \quad \tau_z = 0,0099 \quad (5.39)$$

O conjunto de polos e zeros correspondentes é apresentado em (5.40).

$$p_1 = p_2 = -28,21 \quad , \quad z = -100,84 \quad (5.40)$$

A Figura 5.18 apresenta a comparação da função original não linear e de ambos os ajustes feitos, para o caso de polos iguais e polos distintos.

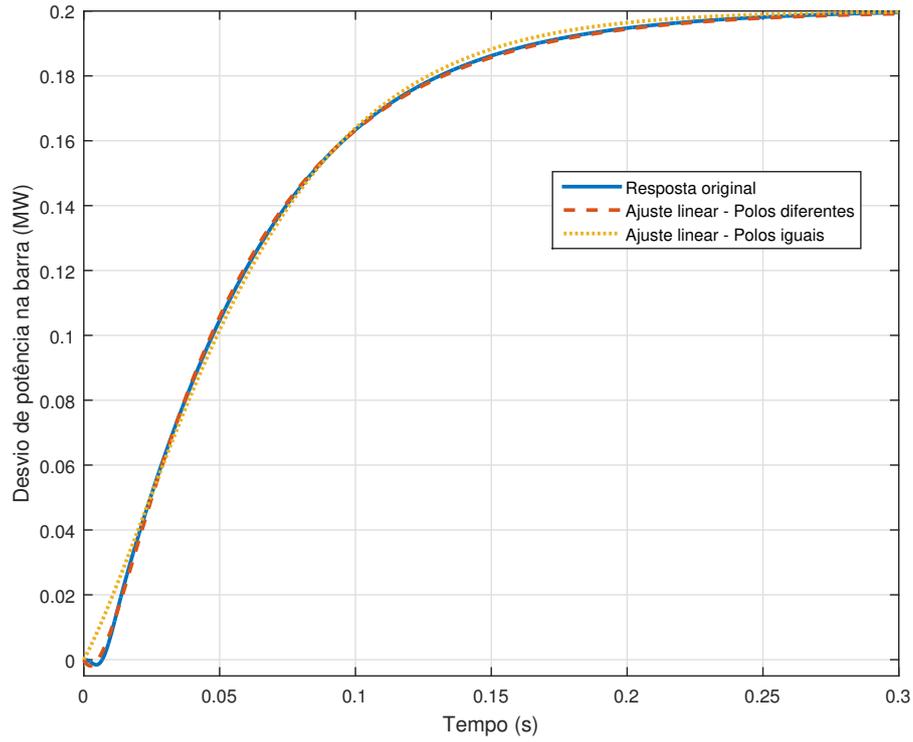


Figura 5.18: Comparação entre a resposta ao degrau em malha fechada e de ambos os ajustes lineares.

Como é notado na Figura 5.18 e evidenciado em (5.40), a consideração de polos idênticos converge a um ajuste linear de fase mínima. Com isto, para o prosseguimento do trabalho, adotou-se a primeira aproximação por representar mais fielmente a dinâmica do sistema, tornando a função não linear do sistema em malha fechada aproximada à função de transferência em (5.41).

$$T(s) = \frac{P_{barra}(s)}{P_{ref}(s)} = \frac{(-0,003s + 1)}{(0,053s + 1)(0,0068s + 1)} \quad (5.41)$$

Conseqüentemente, através de (5.2), obtém-se finalmente a função de transferência que relaciona o ângulo de corte à potência na barra, e que será utilizada em todo o restante deste capítulo.

$$G(s) = \frac{P_{barra}(s)}{\Gamma(s)} = -1,8691 \frac{(-0,003s + 1)}{(0,0057s + 1)} \quad (5.42)$$

5.2 Projeto de Controlador Utilizando Adaptação do Módulo

A primeira proposta de projeto a ser realizada a partir da aproximação linear da planta utiliza os conceitos da otimização por adaptação do módulo, introduzidos na Seção 2.2. Esta seção fornece instruções sobre o tipo de método e o tipo de controlador a serem escolhidos em virtude da estrutura da planta a ser controlada.

A planta, descrita na equação (5.42), possui um único elemento de atraso e ausência de ação integradora. Assim, o método Ótimo por Módulo deve ser adotado, e com a aplicação de um controlador integrador.

Contudo, na subseção 2.2.1 foram deduzidas equações para os parâmetros do controlador supondo uma função de realimentação unitária negativa para a malha fechada. Porém, nossa malha de controle de potência foi definida com função de realimentação unitária positiva, como exposto na Figura 5.5, devido à relação de crescimento inverso existente entre o ângulo de corte e a potência na barra.

Visto isso, para simplificar os projetos de controlador, uma manipulação foi feita no diagrama de blocos do sistema em malha fechada a fim de criar uma função de realimentação unitária negativa sem que haja alteração da função de transferência total equivalente, como mostra a Figura 5.19.

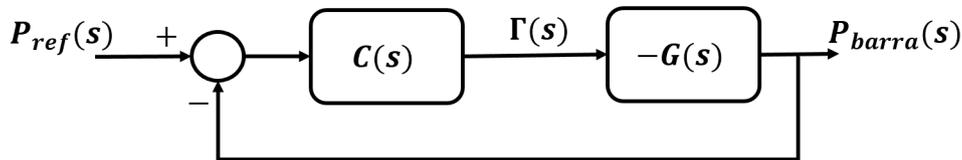


Figura 5.19: Diagrama de blocos em malha fechada com função de realimentação unitária negativa.

O diagrama de blocos da Figura 5.19 associa a entrada $P_{ref}(s)$ e a saída $P_{barra}(s)$ de maneira idêntica ao diagrama anterior.

$$T(s) = \frac{P_{barra}(s)}{P_{ref}(s)} = \frac{-C(s)G(s)}{1 - C(s)G(s)} \quad (5.43)$$

Assim, ao longo dos projetos, a planta passa a ser suposta como $-G(s)$ e seu valor de ganho como $K_g = +1,8691$. Logo, a função de transferência em malha aberta do conjunto controlador-planta é exposta em (5.44).

$$F_{MA}(s) = -C(s)G(s) = \left(\frac{1}{\tau_c s} \right) \left[1,8691 \frac{(-0,003s + 1)}{(0,0057s + 1)} \right] \quad (5.44)$$

De acordo com (2.45), a constante de tempo do controlador é calculada da se-

guinte maneira:

$$\begin{aligned}\tau_c &= 2K_g\tau_{p,g} \\ \tau_c &= 2(1,8691)(0,0057) = 0,0213\end{aligned}\quad (5.45)$$

Utilizando este resultado, obtém-se função de transferência em malha fechada em (5.46).

$$F_{MF}(s) = \frac{(-0,003s + 1)}{0,000065s^2 + 0,0084s + 1}\quad (5.46)$$

A resposta da função linear (5.46) a um degrau unitário pode ser vista na Figura 5.20.

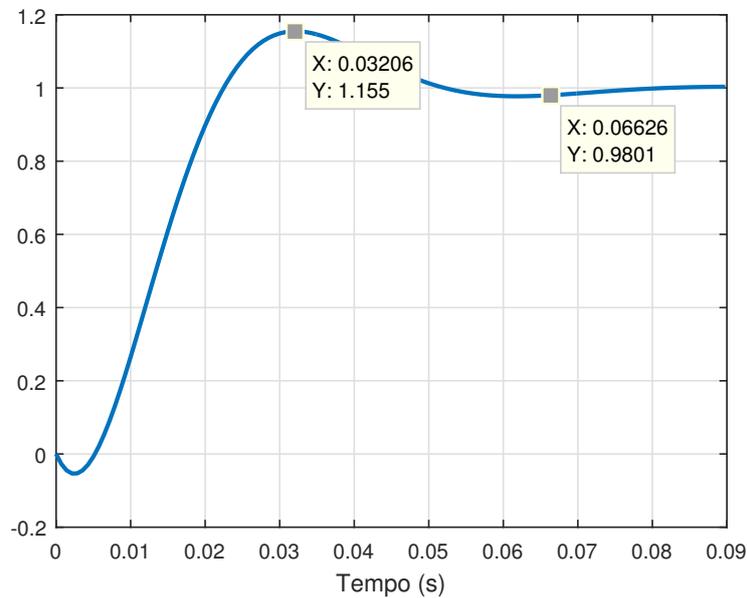


Figura 5.20: Resposta da função de transferência (5.46) a um degrau unitário.

Esta resposta ao degrau evidencia um sobressinal de 15,5%, bem diferente do esperado para uma otimização baseada no Ótimo por Módulo, 4,3%. Esta discrepância se deve basicamente à presença de um zero em $-G(s)$. As considerações explanadas em toda a Seção 2.2 supõem uma planta sem zeros finitos.

Diferentemente da forma típica esperada para a função de transferência em malha fechada, (2.58), a equação (5.47) possui ligeira mudança em função dos parâmetros de malha aberta:

$$F_{MF}(s) = \frac{(\tau_{z,g}s + 1)}{2\tau_{p,g}^2s^2 + (2\tau_{p,g} + \tau_{z,g})s + 1}\quad (5.47)$$

Portanto, os polos em malha fechada não mais dependem exclusivamente da constante de atraso $\tau_{p,g}$ da planta mas também da constante de tempo $\tau_{z,g}$ associada ao zero.

Uma aproximação para o coeficiente de amortecimento (ζ) de (5.47) é obtida comparando seu denominador ao polinômio em (5.48), em que ω_n representa a frequência natural de amortecimento.

$$den(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (5.48)$$

implicando em:

$$\zeta = \frac{(2\tau_{p,g} + \tau_{z,g})}{2\sqrt{2}\tau_{p,g}} = 0,521 \quad (5.49)$$

Como visto na Seção 2.1, o coeficiente de amortecimento de uma planta de segunda ordem sem zeros está diretamente ligado ao valor de pico de sua resposta ao degrau. Aplicando o coeficiente de amortecimento acima obtido e amplitude unitária na equação (2.27), encontra-se:

$$y_p = 1,1469 \quad (5.50)$$

O sobressinal calculado (14,69%) é bem próximo ao encontrado na Figura (5.21) (15,5%). A discrepância entre os dois valores se deve à pequena influência causada pelo zero em malha fechada. O valor de pico calculado em (5.50) considerou a influência de $\tau_{z,g}$ apenas nos polos de malha fechada. A Figura 5.20 evidencia a pequena diferença nos valores de pico ao desprezar ou incluir o zero de malha fechada.

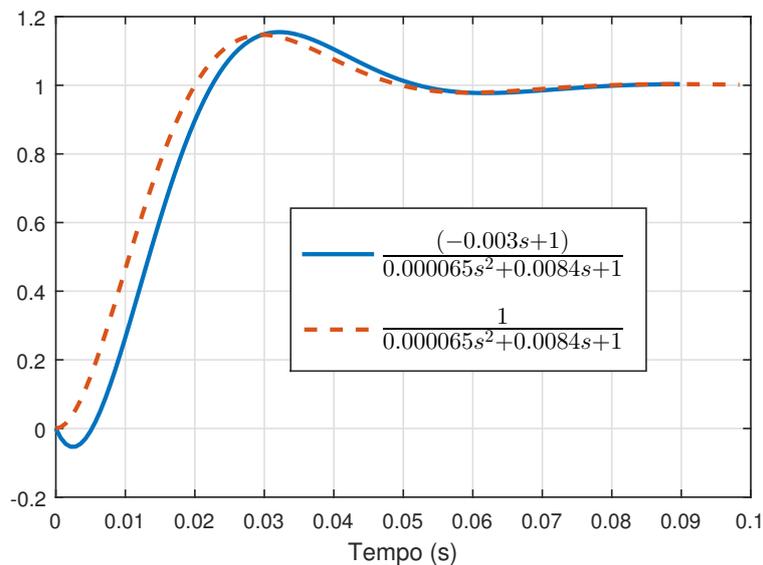


Figura 5.21: Resposta ao degrau da função de transferência (5.46) com e sem o zero.

Uma vez justificado o sobressinal excessivo, aplicou-se o integrador projetado no modelo não linear. A Figura 5.22 ilustra a resposta a um degrau na potência de

referência de 13,5 a 13,7MW no instante $t = (0,6 + \frac{1}{60}) s$. A resposta do modelo linear a um degrau de mesma amplitude também foi adicionada a esta figura a fim de melhorar a comparação, além disto, a curva foi transladada para ter o mesmo ponto inicial da curva não linear no instante da mudança do valor de referência.

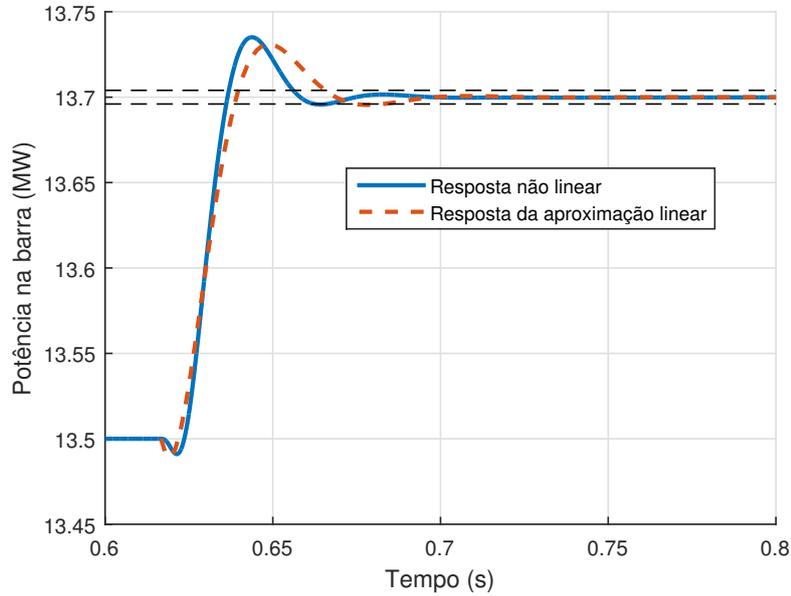


Figura 5.22: Resposta ao degrau do sistema não linear em malha fechada utilizando controlador integrador projetado pelo Ótimo por Módulo.

Tabela 5.2: Características de resposta não linear e linear utilizando controlador projetado pelo método Ótimo por Módulo.

Característica	Resposta não linear	Resposta linear
Sobressinal	17,5%	15,5%
Subsinal	4,5%	5,5%
Tempo de assentamento (t_s)	49,5 ms	66,0 ms

Embora a resposta não linear tenha apresentado subida e assentamento mais velozes que os da resposta linear, os valores extremos de subsinal e sobressinal foram próximos, indicando a razoabilidade do ajuste linear realizado para a planta. A discrepância existente entre as curvas será explicada no final deste capítulo.

É importante observar que a técnica de projeto Ótimo por Módulo é bastante influenciada pela presença de zeros na planta a ser otimizada. Além disso, esta técnica não oferece flexibilidade para estipular o tempo de assentamento desejado, sendo esperado sempre que seja igual a 8,4 vezes a menor constante de tempo modelada da planta.

O resultado obtido com o Ótimo por Módulo serve como ponto de partida para o projeto do controlador, devendo ser refinado com o auxílio de uma segunda técnica. A próxima seção apresenta a continuação do projeto utilizando uma metodologia mais precisa e tem por objetivo fornecer um maior domínio do controlador sobre a resposta, para que possa ser capaz de atender a especificações de tempo de assentamento e valor de pico.

5.3 Projeto de Controlador Utilizando Lugar das Raízes

A proposta para o prosseguimento do projeto utiliza os conceitos apresentados na Seção 2.3. Com isso, o comportamento dinâmico do sistema passa a ser analisado a partir do seu lugar das raízes. A metodologia completa exposta nesta seção pode ser dividida em duas partes. A primeira é baseada na alocação dos polos e zeros do controlador, a segunda é responsável por especificar critérios para a resposta e apresentar uma forma de atendê-los.

A seguir, é descrita a sequência de raciocínio para a realização da primeira parte. Seu objetivo é ter uma noção simples e rápida do caminho dos polos do sistema realimentado e manipular isto sem uso de grandes cálculos.

5.3.1 Primeira Parte da Metodologia

Partindo do resultado obtido com a seção anterior, onde foi projetado um controlador integrador para a planta, reescreve-se a função de transferência do sistema em malha aberta na forma de polinômios mônicos a fim de permitir a aplicação dos preceitos da Seção 2.3 e do Apêndice A.

$$-C(s)G(s) = \left(\frac{1}{0,0213s} \right) \left[1,8691 \frac{(-0,003s + 1)}{(0,0057s + 1)} \right] = -46,1848 \frac{(s - 333,3)}{(s^2 + 175,4s)} \quad (5.51)$$

Assim, com um controlador do tipo integrador, o respectivo lugar das raízes do conjunto controlador-planta é apresentado na Figura 5.23.

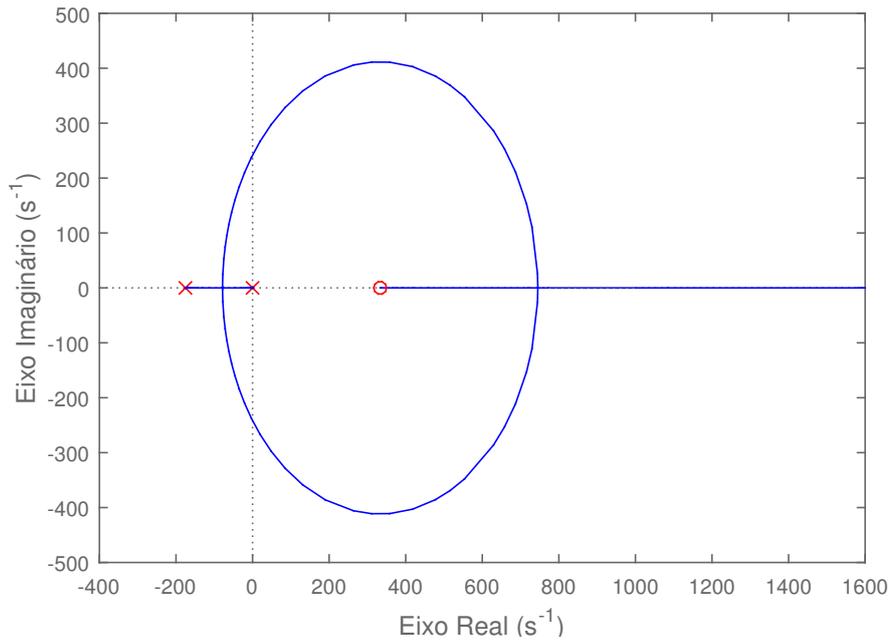


Figura 5.23: Lugar das raízes de $-G(s)$ com controlador integrador.

Na Figura 5.23, os polos de malha aberta são representados pelo símbolo “x” e os zeros pelo símbolo “o”. Como o ganho equivalente do sistema em malha aberta na forma de razão de polinômios mônicos é negativo, percebe-se que os trechos do eixo real que pertencem ao lugar das raízes se localizam à esquerda de um número par de polos e zeros de malha aberta. O lugar das raízes deste sistema evidencia que, com o aumento do ganho do controlador, rapidamente os ramos cruzam o eixo imaginário rumo aos zeros de malha aberta. Visando atribuir maior estabilidade e maior amortecimento ao sistema, inclui-se um zero no semiplano esquerdo a fim de atrair o trajeto dos ramos, bastando apenas que este se localize a uma distância mais próxima dos polos de malha aberta do que o zero de fase não mínima da planta.

A inclusão de um zero no sistema associada à existência de um integrador possuem o efeito equivalente de um controlador do tipo proporcional integral, cuja função de transferência pode ser descrita por:

$$C(s) = K_c \frac{(\tau_c s + 1)}{\tau_c s} \quad (5.52)$$

A Figura 5.24 apresenta o lugar das raízes do sistema com o novo tipo de controlador.

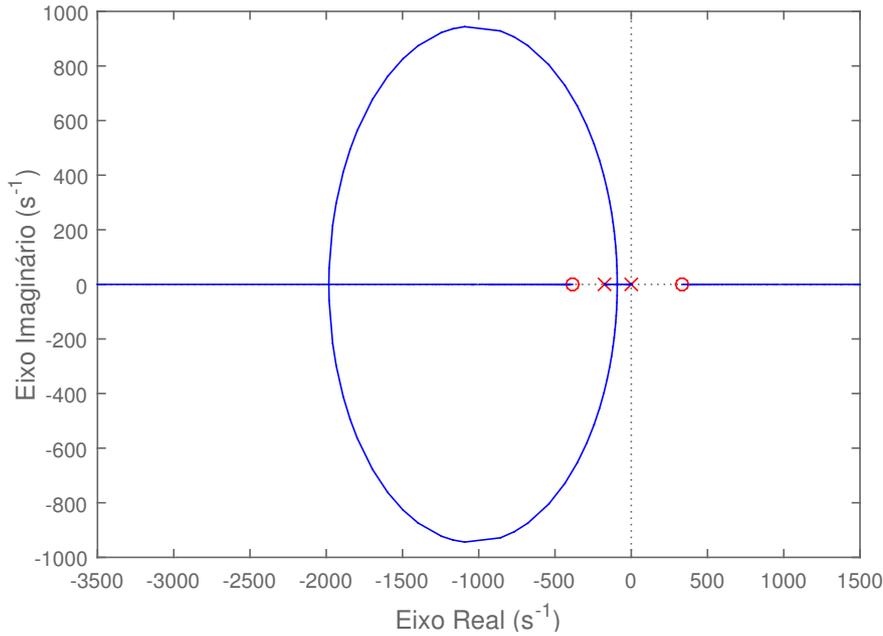


Figura 5.24: Lugar das raízes de $-G(s)$ com controlador proporcional integral.

A Figura 5.24 mostra o efeito de adicionar um zero no semiplano esquerda mais perto dos polos do que o zero da planta. Grande parte do lugar característico passa a estar contida no semiplano esquerdo, atribuindo maior liberdade na variação do ganho do sistema.

O zero do controlador $C(s)$ é escolhido como:

$$z_c = -385 \quad (5.53)$$

Este posicionamento acarreta na definição do parâmetro τ_c da equação (5.52).

$$\tau_c = \frac{-1}{z_c} = 0.0026 \quad (5.54)$$

É importante ressaltar que o zero selecionado em (5.53) não é a única escolha admissível para a alocação, sendo possível selecionar qualquer outro valor de zero que gere um lugar das raízes que diminua a presença dos ramos no semiplano direito.

5.3.2 Segunda Parte da Metodologia

Na segunda parte do projeto, especifica-se as características desejadas para a dinâmica do sistema. A fim de direcionar a definição dos critérios, recorda-se que durante o processo de identificação da planta, utilizou-se um controlador integrador não projetado que originou uma resposta com tempo de assentamento de 222ms (Figura 5.9). Sendo assim, anseia-se por reduzir este tempo para 100ms. No projeto

inicial de otimização por módulo, foi obtido $t_s = 49,5ms$ para a planta não linear, porém, com presença de alto valor de pico. Logo, busca-se também um sobressinal máximo de 2%, de forma a não infringir o limite máximo da região de assentamento. A seguir é apresentado o equacionamento proposto para o atendimento das especificações.

A função de transferência do sistema em malha aberta é apresentada em (5.55) com os parâmetros em sua forma genérica.

$$-C(s)G(s) = \frac{K_c K_g (\tau_c s + 1)(\tau_{z,g} s + 1)}{\tau_c s (\tau_{p,g} s + 1)} \quad (5.55)$$

E em malha fechada:

$$T(s) = \frac{-C(s)G(s)}{1 - C(s)G(s)} = \frac{K(\tau_c s + 1)(\tau_{z,g} s + 1)}{s(\tau_{p,g} s + 1) + K(\tau_c s + 1)(\tau_{z,g} s + 1)} \quad (5.56)$$

Tal que:

$$K = \frac{K_c K_g}{\tau_c} \quad (5.57)$$

Na equação (5.56), a constante de tempo do controlador (τ_c) assim como as da planta ($\tau_{z,g}$, $\tau_{p,g}$) já são conhecidas, restando apenas conhecer o parâmetro K .

Reescrevendo o denominador de $T(s)$, tem-se que:

$$T(s) = \frac{(\tau_c s + 1)(\tau_{z,g} s + 1)}{(\tau_{p1,t} s + 1)(\tau_{p2,t} s + 1)} \quad (5.58)$$

Em que $\tau_{p1,t}$ e $\tau_{p2,t}$ são as constantes de tempo equivalentes dos polos de malha fechada. Percebe-se que (5.58) apresenta ganho unitário em regime permanente.

$\tau_{p1,t}$ e $\tau_{p2,t}$ são funções do parâmetro K e suas expressões estão apresentadas no Apêndice B. Os zeros de $T(s)$ são iguais aos zeros do sistema em malha aberta.

A resposta de $T(s)$ a um degrau unitário é dada por:

$$Y(s) = \frac{(\tau_c s + 1)(\tau_{z,g} s + 1)}{(\tau_{p1,t} s + 1)(\tau_{p2,t} s + 1)} \frac{1}{s} \quad (5.59)$$

Já no domínio do tempo:

$$y(t) = 1 + \alpha_1 e^{\frac{-t}{\tau_{p1,t}}} + \alpha_2 e^{\frac{-t}{\tau_{p2,t}}} \quad (5.60)$$

Em que:

$$\alpha_1 = -\frac{\tau_c \tau_{z,g} - \tau_c \tau_{p1,t} - \tau_{z,g} \tau_{p1,t} + \tau_{p1,t}^2}{\tau_{p1,t}(\tau_{p1,t} - \tau_{p2,t})} \quad (5.61)$$

$$\alpha_2 = -\frac{\tau_c \tau_{z,g} - \tau_c \tau_{p2,t} - \tau_{z,g} \tau_{p2,t} + \tau_{p2,t}^2}{\tau_{p2,t}(\tau_{p2,t} - \tau_{p1,t})} \quad (5.62)$$

Para atender à restrição de tempo de assentamento é necessário que:

$$y_{(t=0,1)} = 0,98 \quad (5.63)$$

Aplicando esta especificação a (5.60), a única variável desconhecida desta equação passa a ser o valor do ganho K . Através de um processo iterativo, esta incógnita é resolvida como:

$$K = 32,2617 \quad (5.64)$$

Com este valor de ganho, os polos de $T(s)$ se tornam:

$$p_{1,t} = -42,8 \quad (5.65)$$

$$p_{2,t} = -138,3 \quad (5.66)$$

O ganho do controlador PI é calculado conforme (5.67).

$$K_c = \frac{\tau_c K}{K_g} = \frac{(0,0026)(32,2617)}{(1,8691)} = 0,0448 \quad (5.67)$$

A função de transferência $T(s)$ final é explicitada em (5.68).

$$T(s) = \frac{(0,0026s + 1)(-0,003s + 1)}{(0,0234s + 1)(0,0072s + 1)} = \frac{-0,0000078s^2 - 0,0004029s + 1}{0,00017s^2 + 0,03059s + 1} \quad (5.68)$$

Como ambos os polos são reais, espera-se uma resposta sem a presença de sobressinal.

A Figura 5.25 exibe a resposta ao degrau unitário de $T(s)$.

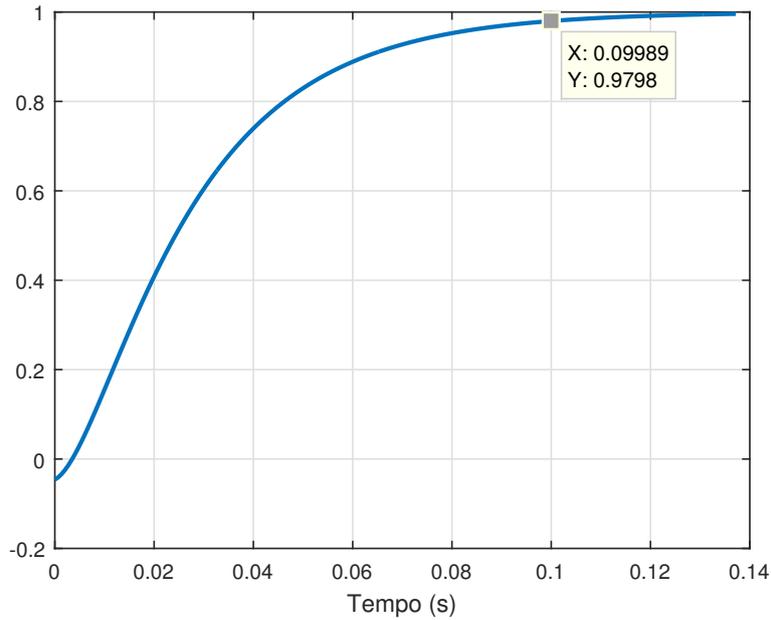


Figura 5.25: Resposta ao degrau do sistema linear em malha fechada utilizando controlador PI projetado a partir do lugar das raízes.

A resposta ao degrau da Figura 5.25 atendeu bem às expectativas, uma vez que não possui sobressinal e seu tempo de assentamento é igual a $100,1ms$. As características encontradas se mostraram satisfatórias pois, diferentemente do projeto de Ótimo por Módulo, os zeros do sistema em malha fechada foram levados em consideração para a obtenção do ganho do controlador. No projeto da seção anterior apenas a presença dos polos havia sido considerada.

Em seguida, o controlador PI foi incorporado ao sistema não linear. Aplicou-se um degrau de 13,5 a 13,7MW no instante $t = (0,6 + \frac{1}{60})s$. A resposta do sistema linear a um degrau de mesma amplitude também é apresentada, de forma transladada, para fins comparativos.

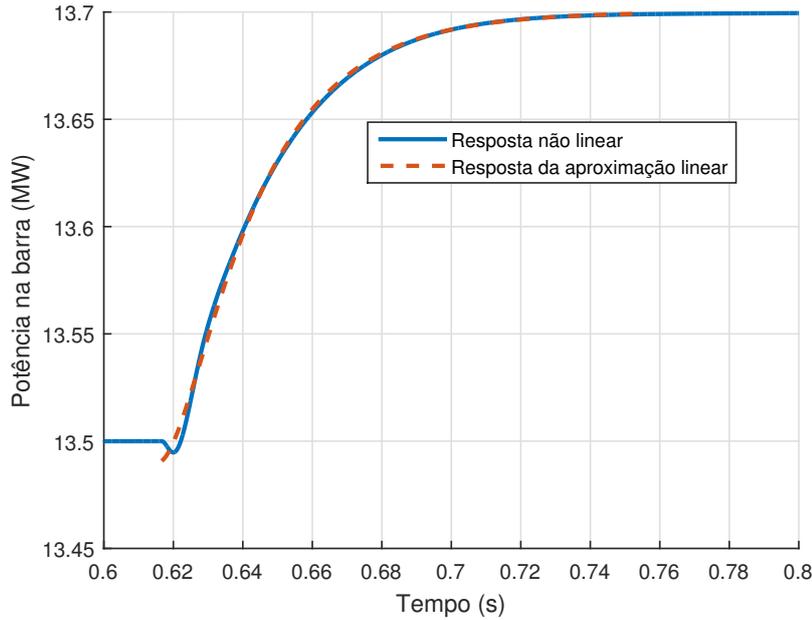


Figura 5.26: Resposta ao degrau do sistema não linear em malha fechada utilizando controlador PI projetado a partir do lugar das raízes.

A Figura 5.26 apresenta um resultado positivo, evidenciando grande semelhança entre as curvas não linear e linear. Entretanto, percebe-se que a curva não linear parte sem a descontinuidade que é esperada de uma função de transferência com mesmo número de polos e zeros. Tal comportamento já havia se manifestado de forma coerente a esta durante a identificação da planta na Seção 5.1. Na Figura 5.15 foi visto que, embora a aproximação a uma planta de segunda ordem tenha sido boa no aspecto geral, na região de formação do subsinal a curva não linear apresenta um efeito de maior “inércia” e de variação bem mais suave em relação à curva de ajuste linear. Portanto, torna-se esperado que uma variação brusca, como a descontinuidade na Figura 5.26, sofra um efeito de arraste que não foi modelado pela função linear, constituindo-se como uma característica de inconsonância entre a função não linear e seu ajuste, porém, que não influencia negativamente nos objetivos de atender às especificações definidas para o projeto. A Tabela 5.3 resume as características das curvas da Figura 5.26 ligadas às restrições impostas ao projeto do controlador.

Tabela 5.3: Características de resposta não linear e linear utilizando controlador projetado pelo método de Lugar das Raízes.

Característica	Resposta não linear	Resposta linear
Sobressinal	0%	0%
Tempo de assentamento (t_s)	99,4 ms	100,1 ms

Na Tabela 5.3 é atestada a grande proximidade entre as características dinâmicas de interesse das curvas, com a resposta não linear assentando um pouco mais rápido que a linear, menos de um milésimo de segundo, e sem existência de sobressinal em ambas as respostas.

Ao longo desta seção, acompanhou-se o desenvolvimento de um projeto consistente em duas etapas. Na primeira, adotou-se uma proposta de alocação de polos e zeros do controlador. Nesta proposta apenas o conhecimento básico de traçado de lugar das raízes foi exigido, não havendo necessidade de se determinar uma posição otimizada dos polos e zeros do controlador.

A segunda etapa do projeto possui essencialmente a ideia oposta à primeira etapa. A metodologia criada serve justamente para que esta etapa compense sem problemas a exatidão que possa ter faltado na anterior. É na segunda etapa que aplicamos as especificações ao projeto e que desenvolvemos as equações do sistema a fim de atendê-las de forma satisfatória.

Para atingir o objetivo, o desenvolvimento foi feito de forma que se precisasse convergir uma única variável, o que acelera a solução pelo método numérico. Esta abordagem também permite aumentar a ordem do controlador sem implicar em grandes modificações à resolução do problema.

5.3.3 Limitação do Modelo

Após alcançado o objetivo de projetar um controlador de potência ativa que atenda às especificações de desempenho, é importante ressaltar uma limitação observada no modelo utilizado.

A restrição encontrada fica por conta da especificação do tempo de assentamento desejado. Foi visto que quanto mais rápida for a resposta exigida no projeto do controlador, mais se acentua a não linearidade do sistema, passando a apresentar comportamentos imprevistos e cada vez mais distantes da resposta de sua aproximação linear.

A Figura 5.27 exhibe este fenômeno ao se realizar um projeto estipulando um tempo de assentamento igual a $30ms$. A Tabela 5.4 resume as principais características.

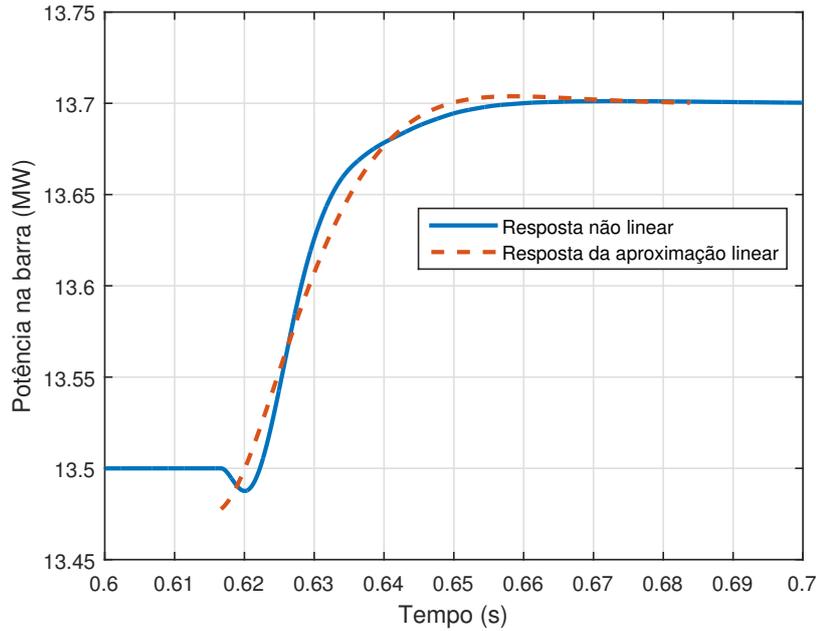


Figura 5.27: Resposta ao degrau utilizando controlador PI projetado a partir do lugar das raízes com especificação de $t_s = 30ms$.

Tabela 5.4: Características de resposta não linear e linear utilizando controlador projetado pelo método de Lugar das Raízes com restrição $t_s = 30ms$.

Característica	Resposta não linear	Resposta linear
Sobressinal	0,6%	1,9%
Tempo de assentamento (t_s)	34,9 ms	30,0 ms

Na Figura 5.27 já é possível notar diferenças entre as duas curvas em diversos trechos da subida, sugerindo que o comportamento dinâmico não está mais sendo bem representado. A Tabela 5.4 apresenta divergências consideráveis tanto no tempo de assentamento quanto no percentual de ultrapassagem das respostas.

Para $t_s = 30ms$, é visto que a resposta linear já se encontra próxima ao limite máximo de sobressinal tolerado (2%). Portanto, para subidas mais rápidas, não é mais possível atender às especificações de projeto com a aproximação linear. Contudo, bastaria a realocação dos polos e zeros do sistema em malha aberta, como, por exemplo, reposicionar o zero do controlador PI entre os polos atuais.

Como o intuito desta seção é a verificação de limitação na modelagem, passa-se a comparar o tempo em que as curvas atingem 98% de seus valores finais pela primeira vez ($t_{98\%}$). A Figura 5.28 apresenta os resultados para uma especificação de $t_{98\%} = 15ms$ e a Tabela 5.5 exhibe as características de resposta.

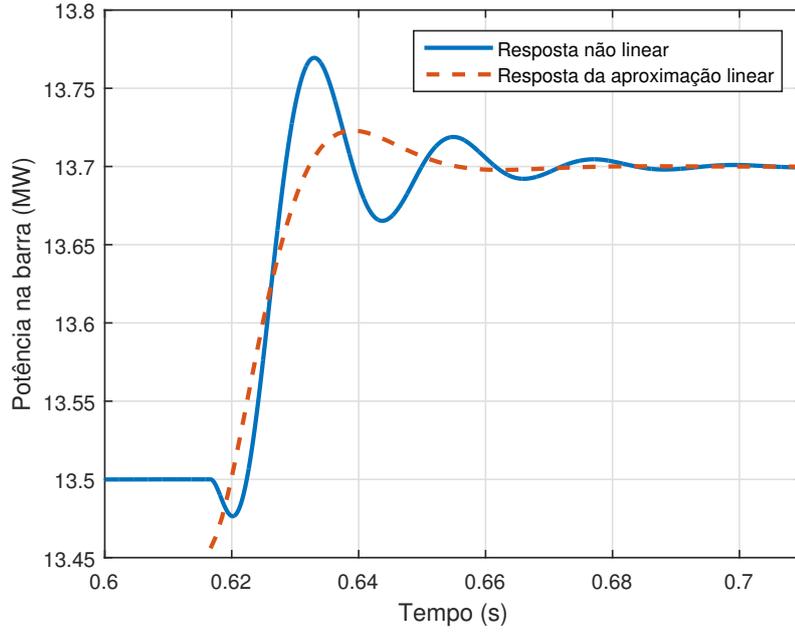


Figura 5.28: Resposta ao degrau utilizando controlador PI projetado a partir do lugar das raízes com especificação de $t_{98\%} = 15ms$.

Tabela 5.5: Características de resposta não linear e linear utilizando controlador projetado pelo método de Lugar das Raízes com restrição $t_{98\%} = 15ms$.

Característica	Resposta não linear	Resposta linear
Sobressinal	34,7%	11,5%
$t_{98\%}$	11,6 ms	15,0 ms

A Figura 5.28 exibe curvas completamente distintas, com o surgimento de uma grande oscilação na resposta do modelo analítico. A Tabela 5.5 mostra que a curva não linear atinge o triplo de sobressinal da curva linear.

A constatação desta limitação também explica o gráfico da Figura 5.22, com a comparação das respostas linear e não linear obtidas a partir do projeto que utilizou Ótimo por Módulo. Mesmo com características de sobressinal e tempo de assentamento diferentes das esperadas pela técnica de projeto, a dinâmica das curvas deveria apresentar comportamento condizente, porém, como a utilização do controlador projetado causou uma subida muito rápida ($t_{98\%} = 22ms$), a não linearidade foi acentuada, originando a discrepância entre as respostas.

Capítulo 6

Conclusões

6.1 Análises e Conclusões

Um estudo descritivo sobre a modelagem de um circuito elétrico contendo um GCSC foi apresentado neste trabalho, objetivando o uso do modelo analítico no projeto de um controlador linear para o sistema. Investigou-se inicialmente o comportamento do circuito em regime permanente, que acabou se tornando o método de inicialização do sistema para a análise do comportamento dinâmico. Foi visto que no regime transitório as variáveis de ângulos são as que apresentam as maiores mudanças na modelagem em relação ao regime permanente, necessitando de descrições mais sofisticadas.

Os testes de validação mostraram resultados satisfatórios que atestaram a qualidade do modelo analítico. Observou-se a melhor correspondência com os resultados de simulação ao se utilizar o cálculo aproximado de corrente eficaz e o ângulo de condução baseado na integral da corrente de linha.

Após a validação, o modelo foi destinado ao projeto de um controlador de potência ativa para a barra de carga do circuito, com a aplicação de técnicas de controle linear ao objetivo de rastreamento do valor da potência de referência.

Para isto, necessitou-se aproximar a relação de natureza não linear existente entre o ângulo de corte dos semicondutores do GCSC e a potência entregue à barra controlada. A identificação foi feita com base na resposta ao degrau do sistema realimentado. Utilizou-se Mínimos Quadrados Não Linear a fim de encontrar os parâmetros de uma função linear que melhor se ajustavam à curva não linear, auxiliado pela resposta em frequência do sistema em malha fechada para a determinação dos valores iniciais do processo de convergência.

A partir da aproximação linear da planta, aplicou-se a técnica de Ótimo por Módulo a fim de obter um projeto inicial para seu controlador. Em seguida, uma metodologia baseada no lugar das raízes do sistema foi utilizada como complementação

para melhorar a qualidade do controle. Vantagens e limitações das duas técnicas foram expostas.

O Ótimo por Módulo se mostra como um método simples de ser aplicado, porém não permite grande flexibilidade nas características dinâmicas de sua resposta. Já a proposta com Lugar das Raízes oferece grande liberdade na especificação da velocidade desejada para a resposta, além de apresentar uma boa visão sobre as possibilidades de alocação dos polos e zeros do controlador e suas influências no comportamento dinâmico e na estabilidade do sistema.

Observou-se a importância das especificações para o sucesso dos projetos. Exigências de respostas muito rápidas não são atendidas por esbarrarem nas limitações da aproximação linear, independentemente do tipo de controlador utilizado.

6.2 Trabalhos Futuros

Sugere-se como possíveis pontos a serem investigados na continuação dessa pesquisa:

- Permitir a aplicação de descontinuidade no ângulo de corte mantendo a validade do comportamento dinâmico da tensão do capacitor do GCSC. Poder-se-ia considerar a inclusão de novas equações durante a modelagem de forma a auxiliar o processo de convergência numérica a atingir resultados que representem de maneira adequada o comportamento físico do sistema.
- Utilizar modelo linearizado completo na análise linear, permitindo a identificação de problemas de interação dinâmica adversa com outros equipamentos ou rede e ajuste coordenado.
- Incorporar a descrição de sistemas desbalanceados à modelagem.
- Contemplar outros tipos de perturbações durante a validação do regime transitório, como variações na frequência da rede e ocorrência de faltas, visando o projeto de controladores com maior robustez.
- Desenvolver modelo analítico para outros dispositivos FACTS.

Referências Bibliográficas

- [1] HINGORANI, N. G., GYUGYI, L., EL-HAWARY, M. *Understanding FACTS: concepts and technology of flexible AC transmission systems*, v. 1. Wiley Online Library, 2000.
- [2] DIAS, R. F. S., JESUS, F. D., AREDES, M., et al. “Modelagem Tensorial do Capacitor Série Controlado A GTO (GCSC)”, *CBA 2004 - XV Congresso Brasileiro de Automática*, 2004.
- [3] SOUZA, L. F. W. *Modelagem Analítica de um GCSC - Capacitor Série Controlado por Chave Autocomutada*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.
- [4] GOMES JR., S., STANKOVIC, A. “Modeling of SVC and TCSC using Dynamic Phasors”, *DSE-CEPEL, Rio de Janeiro, RJ, Tech. Rep. DP/DSE-32962/04*, 2004.
- [5] GOMES JR., S., MARTINS, N., STANKOVIC, A. “Improved Controller Design Using New Dynamic Phasor Models of SVC’s Suitable for High Frequency Analysis”, *IEEE Transmission and Distribution Conference and Exposition, Dallas, May 2006*.
- [6] PORTELA, C. M. *Análise de Redes Elétricas—Algumas Aplicações*. Edição subsidiada pelo Instituto de Alta Cultura, Lisboa, Portugal, 1970.
- [7] NISE, N. S. *Control systems engineering*. Benjamin-Cummings Publishing Co., Inc., 1991.
- [8] FROHR, F., ORTTENBURGER, F. *Técnicas de controle eletrônico: controle automático para acionamentos reguláveis de corrente contínua*. Tradução Harald Kreidel. São Paulo: Nobel, 1990.
- [9] VODA, A. A., LANDAU, I. D. “A method for the auto-calibration of PID controllers”, *Automatica*, v. 31, n. 1, pp. 41–53, 1995.
- [10] KUNDUR, P., BALU, N. J., LAUBY, M. G. *Power system stability and control*, v. 7. McGraw-hill New York, 1994.

- [11] LIMA, L. T. G. *Aplicação de Sistemas Descritores na Análise de Transitórios em Redes Elétricas de Grande Porte*. Tese de Doutorado, COPPE–UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [12] OSAUSKAS, C. M., HUME, D. J., WOOD, A. R. “Small signal frequency domain model of an HVDC converter”, *IEEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, v. 148, n. 6, pp. 573–578, 2001.
- [13] GOMES JR., S. *Modelagem e Métodos Numéricos para a Análise Linear de Estabilidade Eletromecânica, Ressonância Subsíncrona, Transitórios Eletromagnéticos e Desempenho Harmônico de Sistemas de Potência*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.
- [14] LIRIO, F. L. *Modelagem Tensorial de SVC e TCSC no Domínio s para Análise Linear de Transitórios Eletromagnéticos e Harmônicos*. Tese de Doutorado, COPPE–UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- [15] JESUS, F. D. *Modelagem e Análise do Capacitor Série Controlado por Chave Autocomutada (GCSC) para Controle de Oscilações Eletromecânicas e Ressonância Subsíncrona*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.
- [16] TELES, A. *Análise de Redes Elétricas Utilizando o Domínio Harmônico Modificado*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- [17] WANG, Q., YE, H., ZHANG, G. “Improved Dynamic Phasor-based Modeling and Simulation of Modular Multilevel Converter”, *2017 IEEE Conference on Energy Internet and Energy System Integration (EI2)*, pp. 1–6, 2017.
- [18] SOUZA, L. F. W. *Capacitor Série Controlado a GTO*. Tese de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 1998.
- [19] KARADY, G. G., ORTMEYER, T. H., PILVELAIT, B. R., et al. “Continuously regulated series capacitor”, *IEEE transactions on power delivery*, v. 8, n. 3, pp. 1348–1355, 1993.
- [20] MOHAN, N., UNDELAND, T. M. *Power electronics: converters, applications, and design*. John Wiley & Sons, 2007.
- [21] WATANABE, E. H., BARBOSA, P. G., ALMEIDA, K. C., et al. “Tecnologia FACTS-tutorial”, *SBA Controle & Automação*, v. 9, n. 1, pp. 39–55, 1998.
- [22] GYUGYI, L., PELLY, B. R. *Static power frequency changers: theory, performance, and application*. John Wiley & Sons, 1976.

- [23] OPPENHEIM, A. V. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [24] PILOTTO, L. A. S. *Modelagem Avançada de Sistemas CA/CC*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1994.
- [25] GEER, J., BANERJEE, N. S. “Exponentially accurate approximations to piece-wise smooth periodic functions”, *Journal of scientific computing*, v. 12, n. 3, pp. 253–287, 1997.
- [26] MATTAVELLI, P., VERGHESE, G. C., STANKOVIC, A. M. “Phasor dynamics of thyristor-controlled series capacitor systems”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, n. 3, pp. 1259–1267, 1997.
- [27] STEPHAN, R. M. *Acionamento, comando e controle de máquinas elétricas*. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2008.
- [28] FORSELL, U., LJUNG, L. *Closed-loop Identification Revisited: Updated Version*. Linköping University Electronic Press, 1998.
- [29] VAN DEN HOF, P. “Closed-loop issues in system identification”, *IFAC Proceedings Volumes*, v. 30, n. 11, pp. 1547–1560, 1997.
- [30] CHEN, L., LI, J., DING, R. “Identification for the second-order systems based on the step response”, *Mathematical and computer modelling*, v. 53, n. 5-6, pp. 1074–1083, 2011.
- [31] GARCIA-GABIN, W. “Step response method for second-order non-minimum phase model identification”, *Conference Reglermote 2014*, 2014.
- [32] LJUNG, L. *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall, 1987.
- [33] LJUNG, L. “Experiments with identification of continuous time models”, *IFAC Proceedings Volumes*, v. 42, n. 10, pp. 1175–1180, 2009.

Apêndice A

Regras para Traçado do Lugar das Raízes

A seguir são apresentadas algumas das regras de construção do lugar das raízes:

- Regra 1: Número de ramos.

Conforme o ganho é alterado, cada polo de $F_{MF}(s)$ é atualizado. A sequência de atualizações cria um trajeto no gráfico, chamado de ramo. Logo, o número de ramos no lugar das raízes é igual ao número de polos em malha fechada.

- Regra 2: Simetria.

Supondo $F_{MF}(s)$ a função de transferência de um sistema fisicamente realizável, seu denominador é definido como um polinômio que possui somente coeficientes reais. Assim, a única maneira de $F_{MF}(s)$ possuir um polo com parte imaginária não nula é se o seu complexo conjugado também for polo do sistema realimentado. Caso contrário, coeficientes com parte imaginária surgiriam no denominador de $F_{MF}(s)$. Logo, o lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real.

- Regra 3: Segmentos do eixo real.

Tendo em mente a maneira como a fase é calculada, em (2.82), tem-se que, para qualquer ponto do eixo real do lugar das raízes, a contribuição dos polos e zeros de malha aberta que são pares complexos conjugados sempre totaliza em fase nula.

Além disso, para um determinado ponto do eixo real, polos e zeros reais situados à esquerda deste ponto também contribuem sempre com fase nula. Logo, resta apenas conhecer a contribuição dos polos e zeros reais existentes à direita de tal ponto. Caso o número de polos e zeros reais à direita do ponto

seja ímpar, a fase equivalente de suas parcelas é totalizada em 180° , caso esse número seja par, a fase total destas parcelas é nula.

De acordo com a propriedade de fase em (2.80), para $K > 0$, todos os segmentos de eixo real que possuem um número ímpar de polos e zeros reais de malha aberta à sua direita fazem parte do lugar das raízes do sistema. Já para $K < 0$, os segmentos precisam possuir um número par de polos e zeros reais de malha aberta à sua direita para compor o lugar das raízes.

- Regra 4: Início e término dos ramos.

O caminho percorrido por cada polo de $F_{MF}(s)$ à medida que o ganho avança do valor nulo a infinito possui importantes características em relação a suas extremidades. Conforme a equação (2.77), para ganho nulo, deduz-se que os polos de malha fechada são as raízes da parcela $D_F(s)$, que se trata dos polos de malha aberta. Por outro lado, para ganho tendendo a infinito, a parcela que prevalece no denominador de $F_{MF}(s)$ é $KN_F(s)$, cujas raízes são os zeros de malha aberta.

Visto isso, cada ramo do lugar das raízes do sistema é iniciado nos polos finitos de malha aberta e terminado nos zeros finitos ou infinitos de malha aberta.

- Regra 5: Assíntotas.

Uma vez existentes zeros infinitos, é possível conhecer as direções de suas localizações. Estes sentidos são verificados na forma de assíntotas, que orientam o traçado dos ramos do lugar das raízes que vão para o infinito.

Cada zero no infinito possui uma assíntota correspondente, e cada assíntota é definida por sua interseção com o eixo real σ_a e por um ângulo θ_a , dados em (A.1)-(A.2), tal que p_i ($i = 1, \dots, n$) representa os polos finitos e z_j ($j = 1, \dots, m$) os zeros finitos.

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n - m} \quad (\text{A.1})$$

$$\theta_a = \frac{(2k + 1)\pi}{n - m}, \quad \text{tal que } k = 0, \dots, (n - m - 1) \quad (\text{A.2})$$

O valor de σ_a é o mesmo para todas as assíntotas, mas cada uma possui um valor de θ_a exclusivo. Estes ângulos têm como referência o semieixo real positivo. Caso o ganho K seja negativo, deve-se somar 180° aos valores de θ_a .

Outras regras também podem ser utilizadas a fim de refinar o traçado do lugar das raízes, porém, podendo exigir maior esforço de cálculo do que o praticado nas cinco primeiras regras.

- Regra 6: Cruzamento com o eixo imaginário.

Partindo do semiplano esquerdo do lugar das raízes, o eixo imaginário é caracterizado como o início da região de instabilidade para a alocação de polos de um sistema. Assim sendo, o ponto de cruzamento de um ramo com este eixo representa um valor limite para o ganho. Caso este segmento venha do semiplano esquerdo, trata-se de um limite máximo de K e caso venha do semiplano direito, um limite mínimo. Para o caso de múltiplos cruzamentos, o ganho K deve atender simultaneamente a todos os limites impostos para garantir a ocorrência de todos os polos no semiplano esquerdo e, conseqüentemente, a estabilidade do sistema.

Os pontos do eixo imaginário que atendem à propriedade de fase (2.80) correspondem a pontos de cruzamento. Outra maneira de encontrá-los é com a aplicação de critérios de estabilidade, como o critério de Routh-Hurwitz, em que inequações são solucionadas a fim de conhecer os valores limites de ganho e, então, calcular as respectivas posições no eixo.

- Regra 7: Ângulos de partida de polos e chegada de zeros.

Visando uma representação mais precisa, é possível conhecer o ângulo com que um ramo é iniciado ao partir de um polo de malha aberta, assim como, o ângulo que um ramo é concluído ao alcançar um zero de malha aberta.

Para realizar o cálculo, deve-se adotar um ponto s_0 do gráfico que seja suficientemente próximo ao polo ou zero em questão. Assumindo uma função de transferência em malha aberta $F(s)$ contendo n polos finitos e m zeros finitos, a equação (A.3) mostra o cálculo da fase de $F(s)$ aplicada ao ponto $s = s_0$.

$$\angle F(s_0) = \sum_{j=1}^m \angle(s_0 - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s_0 - p_i) \quad (\text{A.3})$$

Considerando que se queira conhecer o ângulo de partida do polo p_1 , o ponto s_0 é escolhido de forma a estar a uma distância de p_1 tão pequena que é válida a aproximação de que $s_0 \approx p_1$. Com isso, a fase dos demais polos e zeros em relação a s_0 é basicamente a mesma fase destes polos e zeros em relação a p_1 . Logo, s_0 é aproximadamente um ponto pertencente ao lugar das raízes do sistema e deve respeitar a propriedade de fase (2.80). Supondo $K > 0$:

$$\sum_{j=1}^m \angle(p_1 - z_j) - \theta_1 - \sum_{i=2}^n \angle(p_1 - p_i) = (2k + 1)180^\circ \quad , \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (\text{A.4})$$

$$\theta_1 = \sum_{j=1}^m \angle(p_1 - z_j) - \sum_{i=2}^n \angle(p_1 - p_i) - (2k + 1)180^\circ \quad , \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (\text{A.5})$$

θ_1 é a fase entre s_0 e p_1 e representa o ângulo com que o ramo parte deste polo. Cálculos análogos podem ser feitos para os demais polos.

Seguindo o mesmo método, deduz-se para um ponto s_0 próximo de um determinado zero z_1 :

$$\sum_{j=2}^m \angle(z_1 - z_j) + \phi_1 - \sum_{i=1}^n \angle(z_1 - p_i) = (2k + 1)180^\circ \quad , \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (\text{A.6})$$

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^n \angle(z_1 - p_i) - \sum_{j=2}^m \angle(z_1 - z_j) + (2k + 1)180^\circ \quad , \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (\text{A.7})$$

ϕ_1 é o ângulo entre s_0 e z_1 e se caracteriza como o ângulo de chegada do ramo a este zero. Os ângulos de chegada dos demais zeros podem ser encontrados de forma análoga.

Para $K < 0$, deve-se adicionar 180° aos ângulos calculados.

- Regra 8: Encontro entre ramos.

Quando dois ou mais ramos se chocam em algum ponto do gráfico, seus segmentos formam ângulos de $\pm \frac{180^\circ}{h}$ com o eixo real, tal que h é o número de ramos envolvidos.

Assim, no caso de dois segmentos que avançam sobre o eixo real um em direção ao outro, após atingirem um ponto de encontro, continuariam seus trajetos com ângulos de $+90^\circ$ e -90° em relação a este eixo.

Além disso, uma vez que os dois ramos partiram de polos de malha aberta e prosseguiram conforme o aumento de ganho, pode-se afirmar que o ponto de colisão é associado ao maior valor de ganho K capaz de gerar polos puramente reais neste trecho do eixo real. A partir de (2.78), tem-se que:

$$K = \frac{-1}{F(s)} \quad (\text{A.8})$$

Em (A.8), o ganho K pode ser visto como uma função da variável s . Considerando que esta variável assumira somente valores puramente reais, o ponto de encontro entre os ramos é solução de (A.9).

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{-1}{F(s)} \right) = 0 \quad , \quad (s \in \mathbb{R}) \quad (\text{A.9})$$

De maneira similar, no caso em que dois ramos que não pertencem ao eixo real se chocam em algum ponto deste eixo e prosseguem em sentidos opostos ao longo do eixo, é possível encontrar o valor exato deste ponto de encontro. Isto se deve ao fato de que, após o choque, estes segmentos seguem caminho em direção aos zeros de malha aberta, conforme o aumento do ganho K . Logo, o ponto de cruzamento com o eixo real está relacionado ao menor valor de K que gera polos puramente reais no trecho do eixo real compreendido entre os zeros de malha aberta para onde avançam estes ramos. Como se trata de um valor local mínimo, o ponto de chegada dos ramos ao eixo real também se apresenta como uma solução de (A.9).

- Regra 9: Soma de polos.

Sempre que uma função de transferência em malha aberta $F(s)$ possui dois ou mais zeros infinitos, a soma dos polos de malha fechada é um valor constante. A partir de (2.77), isto é equivalente a afirmar que o polinômio $D_F(s)$ possui, no mínimo, dois graus a mais que o polinômio $N_F(s)$.

Assumindo o grau de $D_F(s)$ igual a n e o grau de $N_F(s)$ igual a m , os coeficientes do polinômio do denominador da função de transferência em malha fechada $F_{MF}(s)$ possuem influência do ganho K somente até a componente s^m . Ou seja, existem $(n - m)$ coeficientes independentes da variação de K .

Em um polinômio com a seguinte forma:

$$s^n + a_1s^{(n-1)} + a_2s^{(n-2)} + \dots + a_n \quad , \quad (\text{A.10})$$

sabe-se que o coeficiente a_1 é igual a soma de todas as raízes do polinômio. Portanto, quando o $F_{MF}(s)$ possui a propriedade de que $(n - m) \geq 2$, descobre-se que a soma dos polos em malha fechada não é afetada com a alteração do valor de ganho K , sendo sempre diretamente igual à soma dos polos de malha aberta.

Além destas regras, existem outras que podem ser deduzidas para uma construção mais exata do lugar das raízes, porém, existem inúmeros programas computacionais capazes de executar esta tarefa. Sendo assim, o maior objetivo deste capítulo é dar a noção básica de traçado e das possibilidades gráficas a se encontrar em um diagrama como este.

Apêndice B

Polos da equação (5.58)

Na subseção 5.3.2, a partir da equação (5.56), tem-se que a função de transferência do sistema em malha fechada utilizando um controlador PI é dada por:

$$T(s) = \frac{(\tau_c s + 1)(\tau_{z,g} s + 1)}{\frac{1}{K} s(\tau_{p,g} s + 1) + (\tau_c s + 1)(\tau_{z,g} s + 1)} \quad (\text{B.1})$$

Os polos de (B.1) são apresentados a seguir, em função dos parâmetros K , τ_c , $\tau_{p,g}$ e $\tau_{z,g}$:

$$p_{1,t} = -\frac{K\tau_c + K\tau_{z,g} + 1}{2(\tau_{p,g} + K\tau_c\tau_{z,g})} + \frac{\sqrt{K^2\tau_c^2 - 2K^2\tau_c\tau_{z,g} + K^2\tau_{z,g}^2 + 2K\tau_c + 2K\tau_{z,g} - 4K\tau_{p,g} + 1}}{2(\tau_{p,g} + K\tau_c\tau_{z,g})} \quad (\text{B.2})$$

$$p_{2,t} = -\frac{K\tau_c + K\tau_{z,g} + 1}{2(\tau_{p,g} + K\tau_c\tau_{z,g})} + \frac{\sqrt{K^2\tau_c^2 - 2K^2\tau_c\tau_{z,g} + K^2\tau_{z,g}^2 + 2K\tau_c + 2K\tau_{z,g} - 4K\tau_{p,g} + 1}}{2(\tau_{p,g} + K\tau_c\tau_{z,g})} \quad (\text{B.3})$$

As constantes de tempo dos polos de $T(s)$ são então calculadas como:

$$\tau_{p1,t} = \frac{-1}{p_{1,t}} \quad (\text{B.4})$$

$$\tau_{p2,t} = \frac{-1}{p_{2,t}} \quad (\text{B.5})$$

Tornando-se possível reescrever $T(s)$ no seguinte formato:

$$T(s) = \frac{(\tau_c s + 1)(\tau_{z,g} s + 1)}{(\tau_{p1,t} s + 1)(\tau_{p2,t} s + 1)} \quad (\text{B.6})$$