



CONTROLE DE SISTEMAS INCERTOS BASEADO NO ALGORITMO
SUPER-TWISTING PARA RASTREAMENTO GLOBAL E EXATO DE
TRAJETÓRIAS

Paulo Victor Nunes Monteiro Vidal

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-graduação em Engenharia
Elétrica, COPPE, da Universidade Federal
do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do título de Mestre
em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Eduardo Vieira Leão Nunes
Liu Hsu

Rio de Janeiro
Outubro de 2016

CONTROLE DE SISTEMAS INCERTOS BASEADO NO ALGORITMO
SUPER-TWISTING PARA RASTREAMENTO GLOBAL E EXATO DE
TRAJETÓRIAS

Paulo Victor Nunes Monteiro Vidal

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Eduardo Vieira Leão Nunes, D.Sc.

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
OUTUBRO DE 2016

Vidal, Paulo Victor Nunes Monteiro

Controle de Sistemas Incertos Baseado no Algoritmo Super-Twisting para Rastreamento Global e Exato de Trajetórias/Paulo Victor Nunes Monteiro Vidal. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XIV, 105 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Eduardo Vieira Leão Nunes

Liu Hsu

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 81 – 84.

1. Super-Twisting. 2. Controle Multivariável. 3. Realimentação de Saída. I. Nunes, Eduardo Vieira Leão *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Aos meus pais, Paulo César e
Margareth, com muito carinho e
gratidão.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela oportunidade de existir, e por me dar forças para seguir em frente e não desanimar diante das dificuldades.

Também agradeço aos meus pais, Paulo César e Margareth, por todo carinho, dedicação e apoio. Sem eles, nada disso seria possível.

À minha irmã, Nathália, pela amizade e companheirismo.

Aos meus familiares e amigos, pelo incentivo e pelos momentos de alegria.

Aos meus orientadores e amigos, Eduardo Vieira Leão Nunes e Liu Hsu, por todos os ensinamentos e ajuda durante estes últimos anos.

Aos professores José Paulo Vilela Soares da Cunha e Tiago Roux de Oliveira, por terem aceitado participar da banca examinadora desta dissertação.

Por fim, meus agradecimentos à CAPES e à FAPERJ pelo suporte financeiro, e à COPPE pela oportunidade de realizar o mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE DE SISTEMAS INCERTOS BASEADO NO ALGORITMO
SUPER-TWISTING PARA RASTREAMENTO GLOBAL E EXATO DE
TRAJETÓRIAS

Paulo Victor Nunes Monteiro Vidal

Outubro/2016

Orientadores: Eduardo Vieira Leão Nunes

Liu Hsu

Programa: Engenharia Elétrica

Nesta dissertação, são desenvolvidas técnicas de controle super-twisting para sistemas incertos na presença de incertezas/perturbações não-lineares e dependentes do estado. Uma nova implementação para um algoritmo super-twisting multi-variável recentemente proposto é introduzida, permitindo lidar com sistemas multi-variáveis com matriz de entrada incerta, simétrica, e positiva definida. Utilizando uma análise por função de Lyapunov, são demonstradas teoricamente propriedades de convergência global em tempo finito para esta nova implementação. Além disso, motivado pelo problema de estabilização do movimento de um satélite, uma mudança de escala de tempo não-linear e dependente do estado é utilizada para obter um algoritmo com ganhos variáveis capaz de apresentar propriedades de convergência global em tempo finito na presença de uma classe mais abrangente de perturbações. Outra importante contribuição desta dissertação é propor estratégias de controle monovariável e multivariável por realimentação de saída com base no algoritmo Variable Gain Super-Twisting. Para isso, é introduzida uma extensão multivariável não-desacoplada para este algoritmo. De modo a alcançar uma solução por realimentação de saída, um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida é estimado utilizando filtros de aproximação de primeira ordem. Propriedades globais e uniformes de estabilidade assintótica e convergência em tempo finito são provadas por meio de uma análise Lyapunov. Resultados de simulação ilustram a efetividade das estratégias de controle propostas nesta dissertação em problemas de interesse prático.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

UNCERTAIN SYSTEMS CONTROL BASED ON THE SUPER-TWISTING ALGORITHM FOR GLOBAL EXACT TRACKING

Paulo Victor Nunes Monteiro Vidal

October/2016

Advisors: Eduardo Vieira Leão Nunes

Liu Hsu

Department: Electrical Engineering

In this dissertation, super-twisting control techniques are designed for uncertain systems in the presence of nonlinear state-dependent uncertainties/disturbances. A new design for a recently proposed multivariable super-twisting algorithm is introduced, allowing to deal with multivariable systems with uncertain symmetric positive definite input matrix. Using a Lyapunov function approach, properties of global finite-time convergence for this new design are demonstrated. In addition, motivated by a satellite motion stabilization problem, a nonlinear state-dependent time scaling is used in order to obtain a variable gains algorithm which is able to present global finite-time convergence properties in the presence of a broader class of disturbances. Another important contribution of this dissertation is to propose monovariate and multivariable output-feedback control strategies based on the Variable Gain Super-Twisting Algorithm. To this end, a multivariable non-decoupled extension for this algorithm is introduced. In order to obtain an output-feedback solution, a norm bound for the unmeasured state variable is estimated using first order approximation filters. Global uniform asymptotic stability and finite-time convergence properties are proved by means of a Lyapunov function approach. Simulation results illustrate the effectiveness of the control strategies proposed in this dissertation for systems of practical interest.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Abreviaturas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Tema: Controle por Modos Deslizantes	2
1.2 Objetivos	3
1.3 Contribuições	3
1.4 Organização da Dissertação	4
2 Controle por Modos Deslizantes	6
2.1 Conceitos Básicos	7
2.2 Solução de Filippov	12
2.3 Controle Equivalente	17
2.4 Controle Por Modos Deslizantes	19
2.4.1 Superfície de Deslizamento	19
2.4.2 Controle a Relé	21
2.4.3 Controle Vetorial Unitário	24
2.5 Aproximações Contínuas	28
2.6 Modos Deslizantes de Ordem Superior	29
2.6.1 Super-Twisting	33
2.6.2 Variable Gain Super-Twisting	36
2.6.3 Super-Twisting Multivariável	41
3 Super-Twisting Multivariável para uma Classe de Sistemas com Matriz de Entrada Incerta	47
3.1 Definição do Problema	48
3.2 Super-Twisting Multivariável	48
3.3 Estudo de Caso: Estabilização do Movimento de um Satélite	54
3.3.1 Mudança de Escala de Tempo para Resultado Global	55

4	Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída	58
4.1	Preliminares	59
4.2	Definição do Problema	59
4.3	Filtros de Aproximação de Primeira Ordem	61
4.4	Variable Gain Super-Twisting Monovariável por Realimentação de Saída	62
4.5	Variable Gain Super-Twisting Multivariável por Realimentação de Saída	66
4.5.1	Estudo de Caso: Estabilização de um Satélite	70
4.5.2	Estudo de Caso: Controle de uma Cadeia de Trailers	74
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	79
	Referências Bibliográficas	81
A	Super-Twisting	85
A.1	Super-Twisting – Análise das Trajetórias	85
A.2	Variable Gain Super-Twisting – Análise por Função de Lyapunov	89
B	Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída	92
B.1	Demonstração do Teorema 4.1	92
B.2	Demonstração do Teorema 4.2	96
C	Lemas Auxiliares	104

Lista de Figuras

2.1	Desempenho da lei de controle via realimentação linear de estado (2.2) aplicada à dinâmica do movimento de uma massa unitária (2.1): (●) posição x_1 , (●) velocidade x_2	8
2.2	Plano de fase do sistema (2.4), para $\rho = \kappa = 1$. (●) trajetórias na região de validade do plano de fase, (●) trajetórias fora da região de validade do plano de fase, (- -) reta de chaveamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$	9
2.3	Plano de fase do sistema (2.5), para $\rho = \kappa = 1$. (●) trajetórias na região de validade do plano de fase, (●) trajetórias fora da região de validade do plano de fase, (- -) reta de chaveamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$	10
2.4	Trajetoórias de estado e sinais de controle do sistema definido por (2.1) e (2.3), com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$, $\kappa = \rho = 1$, e os seguintes atrasos no chaveamento: (a,b) 0.2 s; (c,d) 0.1 s; (e,f) 0.01 s.	11
2.5	Plano de fase do sistema de controle a estrutura variável definido por (2.1) e (2.3), com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$ e $\kappa = \rho = 1$	12
2.6	Desempenho da lei de controle por modos deslizantes (2.3), com $\rho = \kappa = 1$, aplicada à dinâmica do movimento de uma massa unitária (2.1) com perturbação $d(t) = \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t)$: (a) (●) posição x_1 , (●) velocidade x_2 ; (b) variável de deslizamento σ ; (c) ação de controle u	13
2.7	Esquemático da construção do campo vetorial $f^S(t, x)$ da solução de Filippov na superfície de descontinuidade \mathcal{S}	16
2.8	Desempenho da lei de controle por modos deslizantes (2.27) com função de modulação (2.28), aplicada ao sistema do Exemplo 2.3 com perturbação $d(t, x, u) = -0.5u + x_1 + \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t)$: (a) (●) estado x_1 , (●) estado x_2 ; (b) variável de deslizamento σ ; (c) ação de controle u	25
2.9	Desempenho da lei de controle por modos deslizantes (2.32) com função de modulação (2.33), aplicada ao sistema do Exemplo 2.4 com perturbação (2.34): (a) (●) estado x_1 , (●) estado x_2 ; (b) (●) variável de deslizamento σ_1 , (●) variável de deslizamento σ_2 ; (c) (●) ação de controle u_1 , (●) ação de controle u_2	27

2.10	Plano de fase do sistema de controle contínuo definido por (2.1) e (2.35), com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$, $\kappa = \rho = 1$ e $\varepsilon = 0.5$. (●) trajetórias dentro da camada limite, (●) trajetórias fora da camada limite, (- -) fronteiras da camada limite.	29
2.11	Desempenho da lei de controle contínua (2.35), com $\rho = \kappa = 1$ e $\varepsilon = 0.5$, aplicada à dinâmica do movimento de uma massa unitária (2.1) com perturbação $d(t) = \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t)$: (a) (●) posição x_1 , (●) velocidade x_2 ; (b) variável de deslizamento σ ; (c) ação de controle u . . .	30
2.12	Exemplo de trajetória no espaço de estado de um super-twisting.	34
2.13	Desempenho do diferenciador de primeira ordem (2.44), baseado no algoritmo super-twisting (2.42), estimando a derivada de um sinal base $f_0(t) = \text{sen}(\pi t) + t$: (a) (●) erro de estimação $\sigma = x - f_0(t)$, (●) derivada $\dot{\sigma}$ do erro de estimação; (b) (●) sinal base $f_0(t)$, (●) estado x ; (c) (●) derivada $\dot{f}_0(t)$ do sinal base, (●) sinal u fornecido pelo algoritmo super-twisting, (●) estado z	37
2.14	Desempenho da lei de controle (2.50), baseada no VGSTA (2.52), aplicada ao sistema do Exemplo 2.7 com perturbação (2.57): (a) (●) variável de deslizamento σ , (●) derivada $\dot{\sigma}$; (b) (●) estado \bar{x}_1 , (●) estado \bar{x}_2 ; (c) (●) ação de controle u	42
2.15	Desempenho da lei de controle (2.60), baseada no STA multivariável (2.64), aplicada ao sistema do Exemplo 2.8: (a) (●) variável de deslizamento σ_1 , (●) variável de deslizamento σ_2 ; (b) (●) derivada $\dot{\sigma}_1$, (●) derivada $\dot{\sigma}_2$; (c) (●) ação de controle u_1 , (●) ação de controle u_2	46
3.1	Desempenho do super-twisting multivariável no controle de um satélite com matriz de inércia incerta e $w(0) = [-0.002 \ -0.007 \ 0.03]^T \text{rad/s}$: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 ; (b) componentes do vetor de torque [N · m] (●) T_1 , (●) T_2 , (●) T_3	56
3.2	Desempenho do super-twisting multivariável no controle de um satélite com matriz de inércia incerta e $w(0) = [-1 \ -3.5 \ 15]^T \text{rad/s}$: componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3	57
3.3	Desempenho do super-twisting multivariável modificado no controle de um satélite com matriz de inércia incerta e $w(0) = [-1 \ -3.5 \ 15]^T \text{rad/s}$: componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3	57

4.1	Desempenho da lei de controle variable gain super-twisting por realimentação de saída (4.11), aplicada ao sistema do Exemplo 4.1: (a) (●) saída y , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u	66
4.2	Desempenho do Super-Twisting Multivariável no controle do movimento de um satélite com condições iniciais $w(0) = [-0.0021 \ -0.0067 \ 0.0253]^T$ rad/s: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 ; (b) componentes do vetor de torque [N · m] (●) T_1 , (●) T_2 , (●) T_3	72
4.3	Desempenho do Super-Twisting Multivariável no controle do movimento de um satélite com condições iniciais $w(0) = [0.4162 \ -0.1910 \ 8.7877]^T$ rad/s: componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3	73
4.4	Desempenho do Variable Gain Super-Twisting Multivariável no controle de um satélite com condições iniciais $w(0) = [-0.0021 \ -0.0067 \ 0.0253]^T$ rad/s: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 ; (b) componentes do vetor de torque [N · m] (●) T_1 , (●) T_2 , (●) T_3	74
4.5	Desempenho do Variable Gain Super-Twisting Multivariável no controle de um satélite com condições iniciais $w(0) = [0.4162 \ -0.1910 \ 8.7877]^T$ rad/s: componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3	75
4.6	Cadeia composta por quatro trailers, controlada pelos dois atuadores conectados aos trailers ativos. O quarto trailer pode ou não estar conectado à cadeia.	75
4.7	(●) Envoltória $\bar{h}(t) = \ h(t)\ _{\max}$ para a norma da resposta ao impulso $h(t) = A_{21}A_{11} e^{A_{11}t} A_{12}$, computada considerando os intervalos admissíveis para os parâmetros incertos; (●) Resposta ao impulso $c_h e^{-\lambda_h t}$ do FOAF.	77
4.8	Desempenho do Variable Gain Super-Twisting Multivariável no controle de uma cadeia de trailers: (a) (●) velocidade v_1 do trailer 1 [m/s], (●) componente y_{m1} do sinal de referência; (b) (●) velocidade v_2 do trailer 2 [m/s], (●) componente y_{m2} do sinal de referência; (c) forças fornecidas pelos atuadores [N] (●) F_1 , (●) F_2	78
A.1	(●) Trajetória no espaço de estado de um super-twisting, (●) Curvas majorantes: C1, C2 e C3, (●) Parábola $\dot{\sigma} = -\gamma \sigma ^{\frac{1}{2}}$	87

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros da cadeia de trailers da Figura 4.6.	75
-----	---	----

Lista de Abreviaturas

FOAF	Filtro de Aproximação de Primeira Ordem, <i>First Order Approximation Filter</i> , p. 4
HOSM	Modos Deslizantes de Ordem Superior, <i>Higher Order Sliding Modes</i> , p. 2
MIMO	Multivariável, <i>Multiple-Input Multiple-Output</i> , p. 4
SISO	Monovariável, <i>Single-Input Single-Output</i> , p. 4
SMC	Controle por Modos Deslizantes, <i>Sliding Mode Control</i> , p. 2
STA	Algoritmo Super-Twisting, <i>Super-Twisting Algorithm</i> , p. 2
VGSTA	Algoritmo Variable Gain Super-Twisting, <i>Variable Gain Super-Twisting Algorithm</i> , p. 3

Capítulo 1

Introdução

Um importante problema em teoria de controle é o projeto de controladores que façam com que a saída do sistema rastreie uma determinada trajetória de referência. Na prática, possíveis incertezas na modelagem matemática do sistema e perturbações externas podem dificultar o projeto do controlador. Estas incertezas podem ser provenientes de dinâmicas não-modeladas, variações paramétricas e aproximações do comportamento do sistema por um modelo matemático simplificado. Neste caso, é necessário que o controlador projetado seja capaz de garantir o mesmo nível de desempenho independentemente das incertezas e perturbações existentes [1].

Uma das principais técnicas utilizadas no controle de plantas incertas é o controle por modos deslizantes [1, 2]. Esta abordagem destaca-se por apresentar propriedades interessantes, tais como: bom comportamento no transiente, convergência em tempo finito, insensibilidade a não-linearidades e incertezas casadas, além de destacável robustez quanto a estabilidade e desempenho. Entretanto, uma característica marcante de sua teoria convencional é o uso de leis de controle descontínuas, que levam à ocorrência de um indesejável chaveamento em alta frequência do sinal de controle, conhecido como *chattering* [3]. Recentemente, visando reduzir o *chattering* em sistemas a estrutura variável, foi introduzido o conceito de modos deslizantes de ordem superior. Este conceito é uma generalização do controle por modos deslizantes convencional e preserva suas principais vantagens [4], com acurácia ainda maior e a possibilidade de uma lei de controle contínua e menos propensa ao *chattering* [5].

Na literatura, muitas técnicas empregadas no controle a estrutura variável de sistemas incertos são baseadas em realimentação de estado. Entretanto, por razões físicas, técnicas ou econômicas, nem sempre é possível medir todo o vetor de estado do sistema. Sendo assim, o desenvolvimento de estratégias baseadas em controle por realimentação de saída é importante tanto do ponto de vista prático quanto teórico. Técnicas baseadas no controle por modos deslizantes convencional utilizando realimentação de saída têm sido aplicadas com sucesso no controle de sistemas incertos. Para isso, diferentes abordagens foram propostas com o objetivo de evitar a ne-

cessidade de se ter disponível o vetor de estado completo do sistema, tendo sido projetadas com base em: observadores de alto-ganho [6], malhas de predição [7], diferenciadores robustos e exatos [8], entre outras estratégias.

1.1 Tema: Controle por Modos Deslizantes

O controle a estrutura variável por modos deslizantes, ou, de forma abreviada, controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* – SMC), é uma técnica não-linear bastante eficiente no controle de sistemas incertos [1, 9–11]. Esta técnica caracteriza-se por uma lei de controle descontínua que faz o sistema em malha-fechada alternar entre estruturas diferentes, gerando um novo movimento no espaço de estados denominado modo deslizante [10–12]. A ideia básica é fazer com que as trajetórias do sistema alcancem e se mantenham em uma superfície do espaço de estado especificada conforme o comportamento dinâmico desejado, denominada superfície de deslizamento. Assim, uma vez que o modo deslizante tenha sido alcançado, o sistema passa a ser regido pela dinâmica desta superfície de deslizamento, tornando-se insensível a incertezas paramétricas e algumas classes de perturbações externas. Entretanto, a principal desvantagem deste método é a ocorrência de um chaveamento em alta frequência do sinal de controle, conhecido como *chattering*. Este chaveamento é bastante indesejável, uma vez que pode excitar dinâmicas ignoradas durante a modelagem e até instabilizar o sistema.

O controle por modos deslizantes foi generalizado com a introdução do conceito de modos deslizantes de ordem superior (*Higher Order Sliding Modes* - HOSM) [4]. Este conceito consiste em fazer o controlador atuar nas derivadas temporais de mais alta ordem do desvio sobre a superfície de deslizamento, em vez de influenciar apenas a primeira derivada como na teoria convencional. O objetivo neste caso é manter não apenas o desvio igual a zero, mas também suas derivadas temporais até uma determinada ordem. Desta forma, são preservadas as principais vantagens com respeito à robustez e desempenho do controle por modos deslizantes convencional, porém obtendo uma acurácia ainda maior. Além disso, outra vantagem é a possibilidade de se utilizar uma lei de controle contínua, e portanto menos propensa ao *chattering*, sem a necessidade da introdução de modificações adicionais como: zonas lineares, filtros passa-baixas, malhas de predição, observadores, entre outras.

Dentre os diversos controladores por modos deslizantes de ordem superior, destaca-se o algoritmo super-twisting (*Super Twisting Algorithm* – STA) [4]. Esta técnica de controle por modos deslizantes de segunda ordem foi desenvolvida com o objetivo de atenuar o *chattering* em sistemas com grau relativo unitário, apresentando um sinal de controle contínuo. Além disso, uma importante vantagem deste algoritmo em relação aos demais controladores baseados em modos deslizantes de

ordem superior é não necessitar de nenhuma informação sobre a derivada temporal da variável de deslizamento para a implementação da lei de controle. Este fato fez com que o super-twisting atraísse considerável atenção no contexto de sistemas a estrutura variável, tendo sido utilizado com sucesso em importantes aplicações, como o problema da diferenciação robusta e exata em tempo real [13].

Nos desenvolvimentos teóricos iniciais, as análises de estabilidade e convergência do super-twisting eram baseadas em métodos geométricos [4] e na teoria de sistemas homogêneos [14], o que dificultava o seu aperfeiçoamento. Mais recentemente, a introdução de análises baseadas em funções de Lyapunov permitiu que importantes extensões fossem obtidas [15, 16], ampliando a aplicabilidade do algoritmo. Em [17, 18], foi proposta uma generalização para o super-twisting a partir da introdução de ganhos variáveis e inclusão de termos não-homogêneos, denominada *Variable Gain Super Twisting Algorithm* (VGSTA). Esta abordagem tem como principal vantagem ser capaz de compensar de forma exata uma classe mais abrangente de incertezas/perturbações, além de obter uma convergência mais rápida em relação ao algoritmo convencional. Em [19], foi proposta uma estrutura multivariável para o super-twisting baseada em um conceito similar ao controle vetorial unitário, permitindo compensar incertezas/perturbações não-desacopladas com respeito às variáveis de estado. Entretanto, duas importantes limitações destas técnicas são a necessidade do conhecimento prévio da matriz de entrada do sistema, e o fato de serem baseadas em realimentação de estado.

1.2 Objetivos

Nesta dissertação, será abordado o problema do controle super-twisting de sistemas incertos de interesse prático, que podem ter características não-lineares significativas. A ideia geral é considerar aplicações onde há a necessidade ou a conveniência de se utilizar uma abordagem não-linear ou multivariável tanto na modelagem do sistema propriamente dito, como no projeto de seu controlador. O objetivo é desenvolver controladores por modos deslizantes de segunda ordem baseados no algoritmo super-twisting, visando ampliar a sua aplicabilidade. As estratégias de controle desenvolvidas devem ser capazes de obter um bom desempenho independentemente de possíveis problemas de implementação, tais como: variações paramétricas, perturbações externas, *chattering*, dinâmicas não-modeladas, entre outros.

1.3 Contribuições

Uma das contribuições a serem apresentadas nesta dissertação é a tentativa preliminar de contornar a necessidade do conhecimento exato da matriz de entrada do

sistema para a implementação do algoritmo super-twisting multivariável proposto em [19]. Aqui, o problema será restrito a sistemas com matriz de entrada simétrica e positiva definida. A partir de uma análise por função de Lyapunov, mostra-se que são necessários apenas limitantes inferior e superior dos autovalores da matriz de entrada para que a lei de controle seja implementada. Além disso, motivado pelo problema do controle do movimento de um satélite, é proposta uma modificação para o super-twisting multivariável baseada em ganhos variáveis. Para isso, é feita uma mudança de escala de tempo de modo que o novo algoritmo com ganhos variáveis possa ser tratado utilizando a mesma análise teórica desenvolvida para ganhos constantes. Assim, a estratégia modificada pode lidar com uma classe maior de incertezas/perturbações, e resultados globais de estabilidade podem ser obtidos para casos em que apenas propriedades locais são garantidas com ganhos constantes. Esta contribuição resultou em artigos publicados nos anais da *2016 American Control Conference* [20], e do *XXI Congresso Brasileiro de Automática* [21].

Outra contribuição desta dissertação é propor uma estratégia de controle por realimentação de saída com base no algoritmo Variable Gain Super-Twisting para sistemas incertos com grau relativo unitário, na presença de uma classe bastante geral de perturbações não-lineares dependentes do estado. Para alcançar uma solução por realimentação de saída, um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida é estimado utilizando filtros de aproximação de primeira ordem (*First Order Approximation Filters* – FOAFs) [22]. Esta abordagem resultou em um artigo apresentado no *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente* [23], considerando o caso SISO. Além disso, também é proposta uma generalização desta estratégia de controle por realimentação de saída para sistemas MIMO incertos com grau relativo uniforme e unitário e matriz de entrada conhecida. Para isso, é introduzida uma extensão multivariável não-desacoplada para o algoritmo Variable-Gain Super-Twisting. Até onde se sabe, este é o primeiro controlador por realimentação de saída baseado em um algoritmo super-twisting multivariável não-desacoplado capaz de garantir propriedades uniformes globais de estabilidade assintótica com convergência em tempo finito. Esta contribuição resultou em um artigo aceito para publicação na *IEEE Transactions on Automatic Control* [24], e outro publicado nos anais do *XXI Congresso Brasileiro de Automática* [25].

1.4 Organização da Dissertação

Esta dissertação é organizada da seguinte forma:

- No Capítulo 2, são apresentados os principais tópicos e fundamentos referentes ao controle por modos deslizantes, incluindo o conceito de modos deslizantes

de ordem superior e o algoritmo super-twisting.

- No Capítulo 3, é proposta uma nova implementação para o algoritmo super-twisting multivariável [19], permitindo lidar com sistemas multivariáveis com matriz de entrada incerta, simétrica, e positiva definida [20, 21].
- No Capítulo 4, são propostas estratégias de controle por realimentação de saída com base no algoritmo Variable Gain Super-Twisting para sistemas incertos monovariáveis [23] e multivariáveis [24, 25] com grau relativo uniforme e unitário. Além disso, uma extensão multivariável não-desacoplada para o algoritmo Variable Gain Super-Twisting também é proposta.
- As conclusões gerais sobre os trabalhos desenvolvidos e as perspectivas futuras são apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 2

Controle por Modos Deslizantes

O controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* – SMC) é uma técnica não-linear que tem como principal característica alternar entre estruturas diferentes dependendo da posição em que o sistema se encontra no espaço de estado, gerando um novo movimento denominado modo deslizante [10–12]. As principais vantagens desta técnica são seu bom comportamento no transiente, convergência em tempo finito, e destacável robustez e insensibilidade à incertezas e perturbações [1, 9–11]. A ideia geral é desenvolver uma estratégia de chaveamento de modo que as trajetórias do sistema alcancem e se mantenham em uma superfície do espaço de estado com comportamento dinâmico desejado, chamada superfície de deslizamento. Durante o deslizamento, o desempenho do sistema torna-se insensível a incertezas paramétricas e a algumas classes de perturbações externas. Esta importante característica é conhecida como propriedade da invariância, e garante que o comportamento do sistema em modo deslizante seja descrito pela dinâmica da superfície de deslizamento.

Uma característica marcante da teoria convencional de controle por modos deslizantes é o uso de leis de controle descontínuas. Devido às imperfeições e atrasos presentes no sistema, esta abordagem leva à ocorrência de um indesejável chaveamento em alta frequência do sinal de controle, conhecido como *chattering* [3]. Assim, visando uma maneira de reduzir o *chattering* em sistemas a estrutura variável, foi introduzido o conceito de modos deslizantes de ordem superior (*Higher Order Sliding Modes* – HOSM) como uma generalização do SMC convencional [4]. Ao contrário da teoria convencional, onde atua-se apenas na primeira derivada do desvio sobre a superfície de deslizamento, controladores baseados em HOSM tem como característica atuar nas derivadas temporais de mais alta ordem. Desta forma, são preservadas as principais vantagens da abordagem original, porém com acurácia ainda maior e a possibilidade de uma lei de controle contínua, reduzindo o *chattering* [5].

Nos últimos anos, um algoritmo de controle baseado em modos deslizantes de segunda ordem conhecido como *Super-Twisting Algorithm* (STA) [4] tem atraído considerável atenção. Este algoritmo foi desenvolvido com o objetivo de atenuar

o *chattering* em sistemas com grau relativo unitário, e apresenta como principal vantagem o fato de não necessitar de nenhuma informação sobre a derivada temporal do desvio sobre a superfície de deslizamento para a implementação da lei de controle. Nos desenvolvimentos teóricos iniciais, as análises de estabilidade e convergência deste algoritmo eram baseadas em métodos geométricos [4] e na teoria de sistemas homogêneos [14], o que dificultava o seu desenvolvimento. Mais recentemente, com a introdução de análises baseadas em funções de Lyapunov [15, 16], foram propostas generalizações para o super-twisting baseadas na utilização de ganhos variáveis [17, 18] e em uma estrutura multivariável [19], ampliando sua aplicabilidade.

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais tópicos e fundamentos referentes à teoria de sistemas a estrutura variável, a serem utilizados nos capítulos posteriores desta dissertação. Primeiramente, os conceitos básicos desta teoria serão mostrados por meio de exemplos ilustrativos na Seção 2.1. Além disso, duas ferramentas matemáticas fundamentais na análise dessa classe de sistemas serão apresentadas, respectivamente, nas Seções 2.2 e 2.3: a solução de Filippov para equações diferenciais com lado direito descontínuo, e o conceito de controle equivalente. Em seguida, será considerado na Seção 2.4 o projeto de controladores por modos deslizantes convencionais, abordando os problemas da escolha da superfície de deslizamento e da lei de controle descontínua, incluindo o caso multivariável e o controle vetorial unitário. Por fim, será apresentado na Seção 2.6 o conceito de modos deslizantes de ordem superior e suas principais propriedades, considerando detalhadamente as principais técnicas de controle baseadas no algoritmo super-twisting.

2.1 Conceitos Básicos

Na prática, sistemas de controle sempre apresentam discrepâncias com relação aos seus respectivos modelos matemáticos. Tais discrepâncias são geralmente provenientes de incertezas paramétricas e dinâmicas não-modeladas, além de perturbações externas. Sendo assim, um importante problema em teoria de controle é o projeto de controladores capazes de garantir um desempenho satisfatório em malha-fechada mesmo na presença de incertezas e perturbações limitadas.

Por exemplo, considere o movimento unidimensional de uma massa unitária [26], descrito pela seguinte equação de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u + d(t, x_1, x_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde x_1 e x_2 são respectivamente a posição e a velocidade da massa, u é a força exercida pelo controle e $d(t, x_1, x_2)$ é uma perturbação que representa as forças de

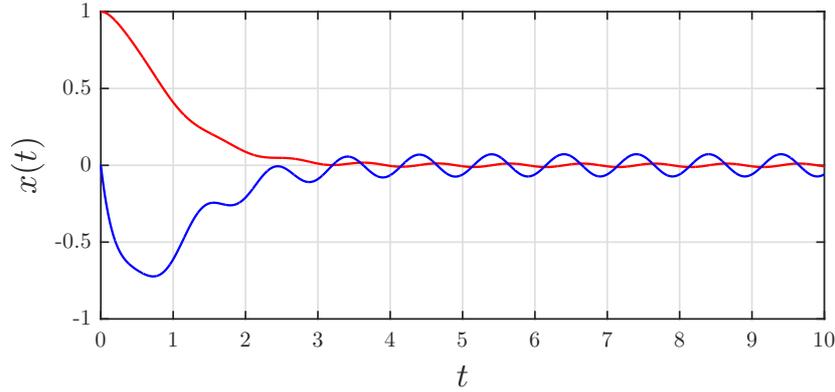


Figura 2.1: Desempenho da lei de controle via realimentação linear de estado (2.2) aplicada à dinâmica do movimento de uma massa unitária (2.1): (●) posição x_1 , (●) velocidade x_2 .

atrito e todas as outras forças presentes no sistema, sendo suposta limitada e tal que $|d(t, x_1, x_2)| \leq L$. O problema consiste em projetar uma lei de controle $u(x_1, x_2)$ de modo que x_1 e x_2 sejam levados para zero pelo menos assintoticamente, apesar da presença da perturbação limitada $d(t, x_1, x_2)$.

É possível mostrar que, em geral, uma lei de controle baseada em realimentação linear de estado definida por

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad (2.2)$$

com ganhos k_1 e k_2 , não é capaz de garantir estabilidade assintótica para $d(t, x_1, x_2) \neq 0$. Esse fato é ilustrado na Figura 2.1, que mostra o desempenho de tal lei de controle linear considerando $k_1 = -4$, $k_2 = -4$, e $d(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t)$. Note que as variáveis de estado não convergem assintoticamente para zero, mas apenas para um domínio limitado, o que ocorre em razão da presença da perturbação.

Considere agora o sistema de controle a estrutura variável definido por (2.1) e pela seguinte lei de controle descontínua:

$$\begin{cases} u = -\kappa x_2 - \rho \operatorname{sgn}(\sigma), \\ \sigma(x_1, x_2) = x_2 + \kappa x_1, \end{cases} \quad (2.3)$$

onde κ e ρ são constantes positivas a serem escolhidas no projeto do controlador. Por simplicidade, considere primeiramente o caso em que $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$. Observe que o sistema chaveia entre duas estruturas diferentes, dependendo da região do plano de fase em que ele se encontra.

- Na região $\sigma(x_1, x_2) > 0$, o sistema possui a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\kappa x_2 - \rho \end{cases} \quad (2.4)$$

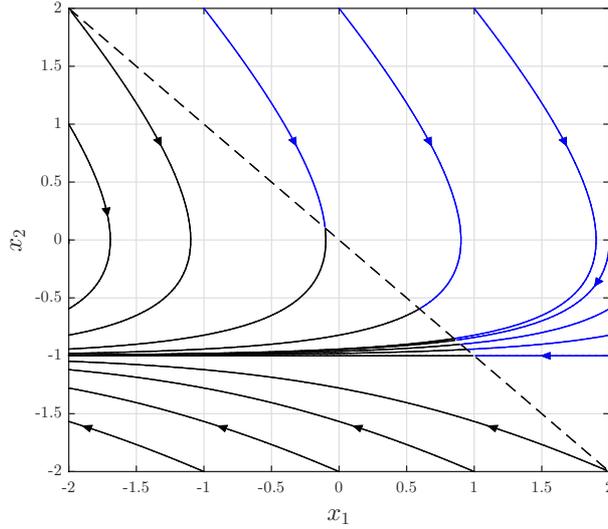


Figura 2.2: Plano de fase do sistema (2.4), para $\rho = \kappa = 1$. (●) trajetórias na região de validade do plano de fase, (●) trajetórias fora da região de validade do plano de fase, (- -) reta de chaveamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$.

- Na região $\sigma(x_1, x_2) < 0$, o sistema possui a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\kappa x_2 + \rho \end{cases} \quad (2.5)$$

Os planos de fase das duas estruturas isoladas são ilustrados nas Figuras 2.2 e 2.3, para $\rho = \kappa = 1$. Note que ambas as estruturas são instáveis quando consideradas isoladamente. Entretanto, na região de validade de cada estrutura, todas as trajetórias do sistema apontam em direção à reta de chaveamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$, que se encontra tracejada em ambas as figuras.

Para se obter o plano de fase completo do sistema de controle a estrutura variável definido por (2.1) e (2.3), com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$ e $\kappa = \rho = 1$, ainda é necessário saber o comportamento do sistema na superfície definida por $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = 0\}$, coincidente à reta de chaveamento. Para isso, serão considerados diferentes valores de atrasos no chaveamento, de modo que a mudança do sinal de controle não seja instantânea, mas ocorra um tempo depois de a trajetória do sistema ultrapassar a reta de chaveamento. Desta forma, quanto menor o atraso considerado, mais próximo o comportamento do sistema estará do caso ideal sem atraso. A Figura 2.4 mostra as trajetórias de estado para condições iniciais próximas de \mathcal{S} , considerando atrasos de 0.2, 0.1, e 0.01 s. Note que quanto menor o atraso, maior é a frequência de chaveamento, e maior é a semelhança entre a trajetória de estado e a reta de chaveamento. Sendo assim, pode-se concluir que, no caso ideal (chaveamento sem atraso), a trajetória do sistema fica confinada à superfície \mathcal{S} . Logo, após um intervalo de tempo finito $T > 0$, o sistema passa a ser regido pela dinâmica desta superfície,

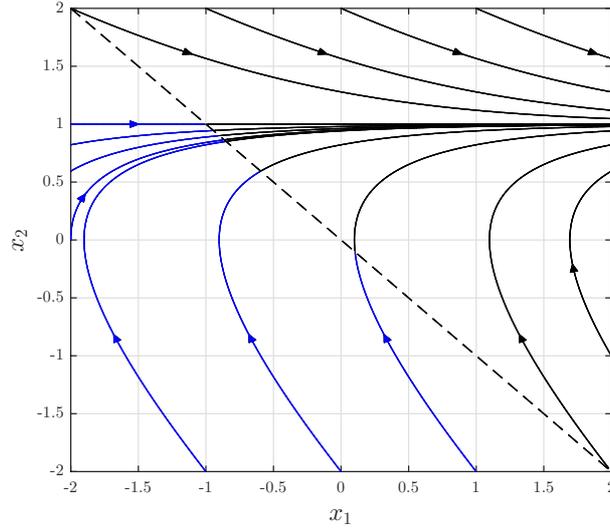


Figura 2.3: Plano de fase do sistema (2.5), para $\rho = \kappa = 1$. (•) trajetórias na região de validade do plano de fase, (•) trajetórias fora da região de validade do plano de fase, (- -) reta de chaveamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$.

que possui ordem reduzida em relação à dinâmica original do sistema em malha-fechada, e é descrita pela seguinte equação diferencial:

$$\sigma(x_1, x_2) = x_2 + \kappa x_1 = \dot{x}_1 + \kappa x_1 = 0, \quad t \geq T,$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(T) e^{-\kappa(t-T)}, \\ x_2(t) = x_2(T) e^{-\kappa(t-T)}, \end{cases} \quad t \geq T. \quad (2.6)$$

Como κ é uma constante positiva, o estado do sistema converge exponencialmente para zero. Portanto, um novo tipo de movimento, que não pertence a nenhuma das duas estruturas consideradas, ocorre no plano de fase. Esse novo movimento recebe o nome de **modo deslizante**, enquanto a superfície \mathcal{S} onde ocorre esse movimento é denominada **superfície de deslizamento**, e a função $\sigma(x_1, x_2)$ que define a superfície \mathcal{S} é conhecida como **variável de deslizamento**. O plano de fase completo do sistema é ilustrado na Figura 2.5.

A Figura 2.4 ilustra ainda o efeito de *chattering*. Devido à impossibilidade de um chaveamento instantâneo em sistemas práticos, conclui-se que irá ocorrer um chaveamento em frequência alta e finita do sinal de controle durante o deslizamento. Este chaveamento pode instabilizar o sistema ao excitar modos rápidos ignorados durante sua modelagem. Os efeitos mais indesejáveis ocorrem quando a frequência não é suficientemente alta a ponto de ser totalmente atenuada pelo sistema.

Seja agora o caso mais geral do sistema de controle a estrutura variável defi-

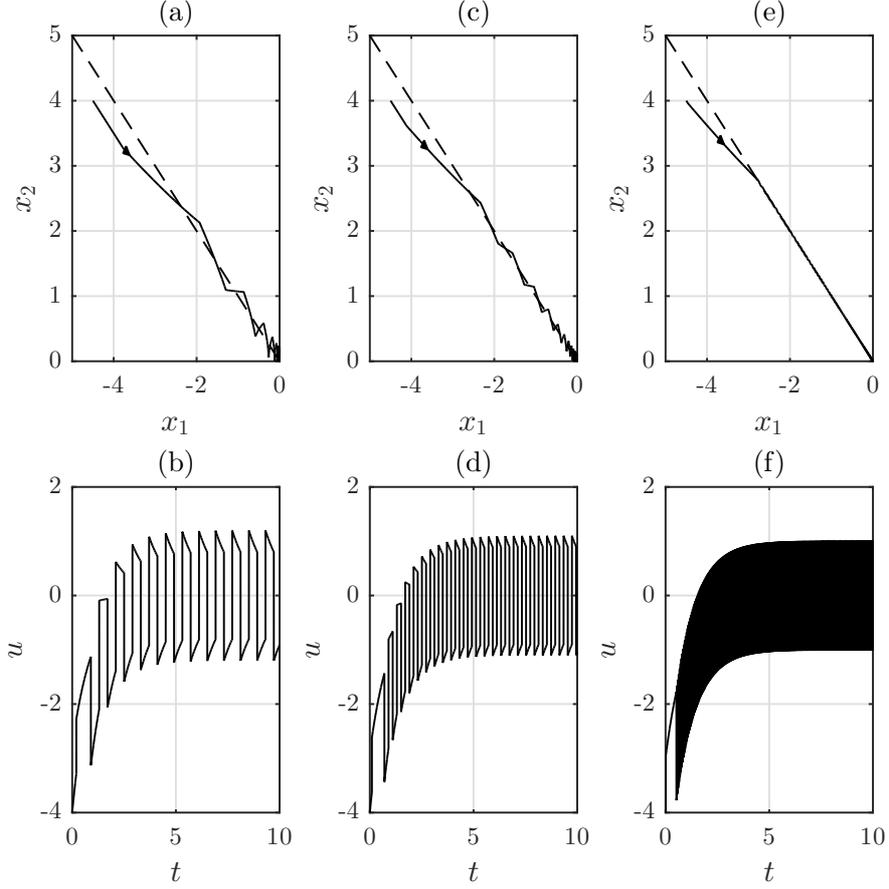


Figura 2.4: Trajetórias de estado e sinais de controle do sistema definido por (2.1) e (2.3), com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$, $\kappa = \rho = 1$, e os seguintes atrasos no chaveamento: (a,b) 0.2 s; (c,d) 0.1 s; (e,f) 0.01 s.

nido por (2.1) e (2.3), com $d(t, x_1, x_2) \neq 0$. Deseja-se mostrar que se o ganho ρ for apropriadamente escolhido, então o sistema em malha fechada é globalmente exponencialmente estável. Para isso, basta mostrar que a superfície de deslizamento \mathcal{S} é globalmente atrativa, com as trajetórias de estado convergindo em tempo finito para ela. Sendo assim, considere a seguinte função positiva definida:

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2,$$

cuja derivada temporal é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma \dot{\sigma} = \sigma \{-\kappa x_2 - \rho \operatorname{sgn}(\sigma) + d(t, x_1, x_2) + \kappa x_2\} \\ &= -|\sigma| \{\rho - d(t, x_1, x_2) \operatorname{sgn}(\sigma)\}. \end{aligned}$$

Como a perturbação é limitada por $|d(t, x_1, x_2)| \leq L$, tem-se que

$$\dot{V} \leq -(\rho - L)|\sigma| = -\eta\sqrt{2V},$$

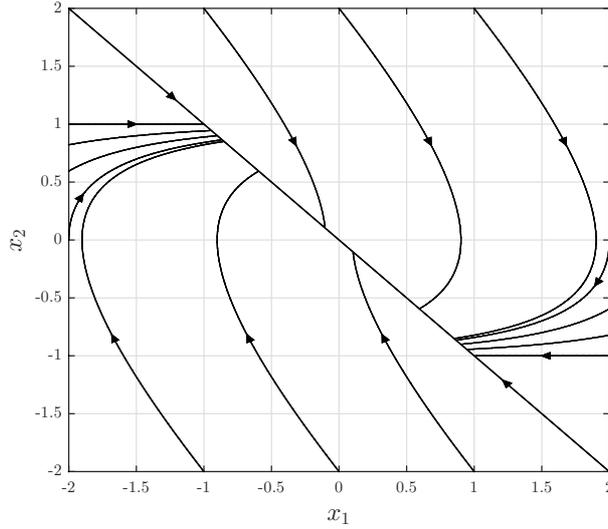


Figura 2.5: Plano de fase do sistema de controle a estrutura variável definido por (2.1) e (2.3), com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$ e $\kappa = \rho = 1$.

onde $\eta > 0$, e o ganho do controlador é escolhido como $\rho = \eta + L$. Integrando a desigualdade, tem-se

$$\sqrt{2V(t)} - \sqrt{2V(0)} \leq -\eta t.$$

Logo, pode-se concluir que a função positiva definida $V(t)$, assim como a variável de deslizamento $\sigma(x_1, x_2)$, converge para zero após um intervalo de tempo finito T limitado por

$$T \leq \frac{\sqrt{2V(0)}}{\eta} = \frac{|\sigma(0)|}{\eta}.$$

Uma vez que o modo deslizante tenha sido alcançado, as trajetórias do sistema ficam confinadas à superfície de deslizamento \mathcal{S} e a dinâmica torna-se insensível à perturbação $d(t, x_1, x_2)$, com os estados x_1 e x_2 convergindo exponencialmente para zero de acordo com (2.6).

A Figura 2.6 mostra o desempenho da lei de controle por modos deslizantes (2.3), com $\rho = \kappa = 1$, aplicada à dinâmica do movimento de uma massa unitária (2.1) com perturbação $d(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t)$. Observe que a variável de deslizamento σ apresenta uma convergência exata em tempo finito para zero, e o sistema entra em modo deslizante. Uma vez que o modo deslizante tenha sido alcançado, o controle u passa a chavear em alta frequência, e os estados x_1 e x_2 passam a convergir exponencialmente para zero.

2.2 Solução de Filippov

Do ponto de vista matemático, uma importante característica dos sistemas de controle a estrutura variável é a de apresentar equações diferenciais com lado direito

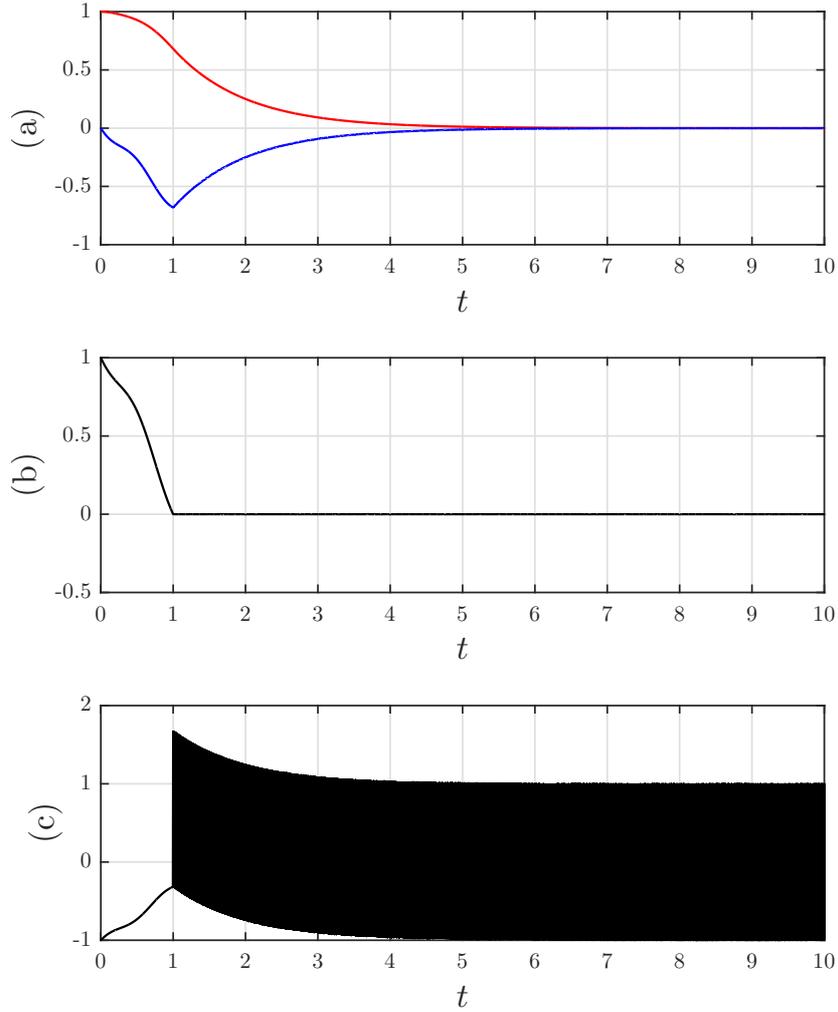


Figura 2.6: Desempenho da lei de controle por modos deslizantes (2.3), com $\rho = \kappa = 1$, aplicada à dinâmica do movimento de uma massa unitária (2.1) com perturbação $d(t) = \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t)$: (a) (●) posição x_1 , (●) velocidade x_2 ; (b) variável de deslizamento σ ; (c) ação de controle u .

descontínuo com respeito ao vetor de estado. Em geral, a lei de controle não é definida na superfície de deslizamento, o que representa uma dificuldade para a descrição formal do movimento em modo deslizante. Além disso, não é possível utilizar a teoria clássica para a solução de equações diferenciais, uma vez que a condição de Lipschitz para existência e unicidade da solução é violada. O conceito de solução para equações diferenciais com lado direito descontínuo, proposto por Filippov [27, 28], contorna esse problema ao definir o campo vetorial no ponto de descontinuidade como a combinação convexa dos campos vetoriais obtidos ao se aproximar este ponto a partir de diferentes direções.

Considere o sistema definido pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2.7)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, e $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função mensurável no sentido de Lebesgue, e definida em quase todo ponto em um domínio E do espaço (t, x) . Além disso, para qualquer subconjunto compacto $D \subset E$, existe uma função $A(t)$ localmente integrável e finita em quase todo ponto (t, x) do subconjunto, tal que

$$\|f(t, x)\| < A(t).$$

A definição formal da solução para equações diferenciais com lado direito descontínuo proposta por Filippov é dada a seguir [27, 28].

Definição 2.1 (Solução de Filippov). *Uma função $x(\cdot)$ é solução de (2.7) no intervalo $[t_0, t_1]$, se $x(\cdot)$ é absolutamente contínua em $[t_0, t_1]$, e se, para quase todo $t \in [t_0, t_1]$, tem-se a seguinte inclusão diferencial:*

$$\dot{x} \in F(x),$$

com

$$F(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{co}} \{f(t, B_\delta(x) \setminus N)\}, \quad (2.8)$$

onde μ é a medida de Lebesgue, $B_\delta(x)$ representa uma bola de raio δ centrada em x , $\overline{\text{co}}\{\cdot\}$ denota o fecho convexo, $f(t, B_\delta(x) \setminus N)$ é conjunto de todos os valores de $f(t, x)$ para $x \in B_\delta(x) \setminus N$, e a notação $\bigcap_{\mu N = 0}$ denota a interseção de todos os conjuntos N de medida nula no sentido de Lebesgue.

Note que, para um ponto x pertencente à superfície de descontinuidade, $F(x)$ representa o conjunto convexo mínimo de todos os possíveis valores limite de $f(t, x)$ na vizinhança de x , a menos de um conjunto de medida nula. Para x fora da superfície de descontinuidade, $F(x)$ corresponde ao próprio campo vetorial $f(t, x)$.

Considere, por exemplo, que o sistema (2.7) possua uma superfície de descontinuidade definida por $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\}$, onde $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}[\sigma(x)] = \nabla_x \sigma(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathcal{S}.$$

Suponha ainda que a dinâmica do sistema seja definida apenas nas duas regiões mutuamente excludentes $\mathcal{F}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) > 0\}$ e $\mathcal{F}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) < 0\}$, de modo que a equação diferencial (2.7) possa ser representada por

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(t, x), & x \in \mathcal{F}^+, \\ f^-(t, x), & x \in \mathcal{F}^-. \end{cases} \quad (2.9)$$

De acordo com a Definição 2.1, é possível mostrar que a solução do sistema no

sentido de Filippov é obtida a partir de (2.9) e da seguinte inclusão diferencial:

$$\dot{x} \in F(x), \quad (2.10)$$

$\forall x \in \mathcal{S}$, onde

$$F(x) = \{(1 - \alpha)f^-(t, x) + \alpha f^+(t, x) \mid \alpha \in [0, 1]\}.$$

Define-se o seguinte vetor normal à superfície de deslizamento \mathcal{S} em um ponto $x \in \mathcal{S}$, apontando de \mathcal{F}^- para \mathcal{F}^+ :

$$N_{\mathcal{S}}(x) = \begin{cases} + \nabla_x^T \sigma(x), & \text{se } \nabla_x^T \sigma(x) \text{ aponta de } \mathcal{F}^- \text{ para } \mathcal{F}^+, \\ - \nabla_x^T \sigma(x), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As projeções dos campos vetoriais $f^+(t, x)$ e $f^-(t, x)$ sobre o vetor normal $N_{\mathcal{S}}(x)$ são então definidas, respectivamente, como

$$f_N^+(t, x) = N_{\mathcal{S}}(x) \cdot f^+(t, x), \quad f_N^-(t, x) = N_{\mathcal{S}}(x) \cdot f^-(t, x).$$

De acordo com (2.10), ao atingir a superfície de descontinuidade em um ponto $x \in \mathcal{S}$, a trajetória de estado irá cruzar esta superfície caso as projeções dos campos vetoriais $f^+(t, x)$ e $f^-(t, x)$ sobre o vetor normal possuam o mesmo sinal, isto é, $f_N^+(t, x) f_N^-(t, x) > 0$. Entretanto, se $f_N^+(t, x) \leq 0$, $f_N^-(t, x) \geq 0$, e $f_N^-(t, x) - f_N^+(t, x) > 0$, então significa que pelo menos um dos campos vetoriais $f^+(t, x)$ e $f^-(t, x)$ está direcionado para a superfície de descontinuidade, e portanto a trajetória de estado será forçada a permanecer sobre esta superfície, sendo tangente à ela no ponto x . Neste caso, a constante $\alpha^{\mathcal{S}} \in [0, 1]$ que define o campo vetorial $f^{\mathcal{S}}(t, x) \in F(x)$ na superfície de descontinuidade \mathcal{S} pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$N_{\mathcal{S}}(x) \cdot f^{\mathcal{S}}(t, x) = 0,$$

ou seja

$$(1 - \alpha^{\mathcal{S}})f_N^-(t, x) + \alpha^{\mathcal{S}}f_N^+(t, x) = 0,$$

e portanto

$$\alpha^{\mathcal{S}} = \frac{f_N^-(t, x)}{f_N^-(t, x) - f_N^+(t, x)}.$$

A Figura 2.7 ilustra a construção geométrica do campo vetorial $f^{\mathcal{S}}(t, x)$ na superfície de descontinuidade \mathcal{S} para o caso em que $f_N^+(t, x) < 0$ e $f_N^-(t, x) > 0$, e a trajetória de estado é forçada a permanecer sobre \mathcal{S} . Observe que o vetor $f^{\mathcal{S}}(t, x)$, em um determinado ponto $x \in \mathcal{S}$, é formado pela interseção entre o segmento de reta

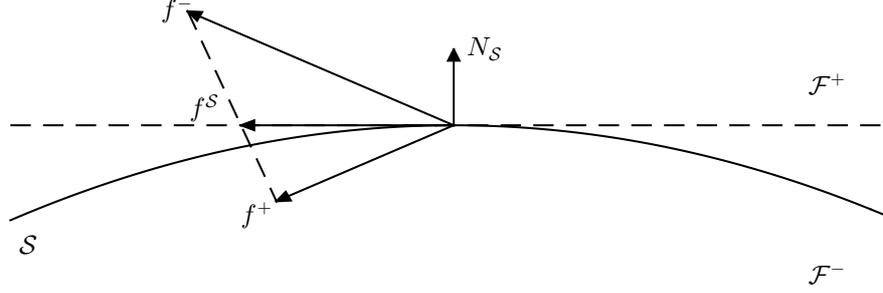


Figura 2.7: Esquemático da construção do campo vetorial $f^S(t, x)$ da solução de Filippov na superfície de descontinuidade \mathcal{S} .

que representa o fecho convexo ao qual pertencem $f^+(t, x)$ e $f^-(t, x)$, e o hiperplano tangente à \mathcal{S} .

O exemplo a seguir demonstra a construção da solução de Filippov para o sistema de controle a estrutura variável da seção anterior durante o deslizamento.

Exemplo 2.1. Considere o sistema a estrutura variável definido por (2.1), com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$, e pela lei de controle descontínua (2.3). Neste caso, é possível definir

$$f^+(t, x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\kappa x_2 - \rho \end{bmatrix}, \quad f^-(t, x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\kappa x_2 + \rho \end{bmatrix},$$

de modo que o sistema em malha-fechada possa ser escrito na forma (2.9). Da definição da variável de deslizamento $\sigma(x)$ em (2.3), segue que

$$N_S(x) = \nabla_x^T \sigma(x) = \begin{bmatrix} \kappa \\ 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $\nabla_x^T \sigma(x)$ aponta no sentido de \mathcal{F}^- para \mathcal{F}^+ . Sendo assim, tem-se as seguintes projeções:

$$f_N^+(t, x) = -\rho, \quad f_N^-(t, x) = \rho,$$

forçando as trajetórias de estado a permanecerem em modo deslizante na superfície \mathcal{S} , uma vez que ρ é uma constante positiva e, logo, $f_N^+(t, x) < 0$, $f_N^-(t, x) > 0$. Neste caso, tem-se que $\alpha^S = \frac{1}{2}$, e o campo vetorial da solução de Filippov na superfície de deslizamento é dado pela média dos campos vetoriais limite na vizinhança desta superfície, ou seja:

$$f^S(t, x) = \frac{1}{2}f^+(t, x) + \frac{1}{2}f^-(t, x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\kappa x_2 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a equação diferencial $\dot{x} = f^S(t, x)$, $\forall t \geq T$, onde T é o tempo em que a superfície de deslizamento é atingida, chega-se à mesma solução (2.6), obtida na

seção anterior.

Até aqui, foram apresentadas as condições necessárias para a existência da solução de Filippov do sistema definido por (2.7) e (2.9). Uma condição suficiente para garantir a unicidade da solução é a de que, se os campos vetoriais $f^+(t, x)$ e $f^-(t, x)$ forem localmente Lipschitz em x , respectivamente, nas regiões \mathcal{F}^+ e \mathcal{F}^- , e se $f(t, x)$ for contínua por partes, então a solução será única se pelo menos uma das desigualdades

$$f_N^+(t, x) < 0, \quad f_N^-(t, x) > 0,$$

for satisfeita $\forall x \in \mathcal{S}$.

2.3 Controle Equivalente

Uma forma simplificada de analisar a dinâmica na superfície de deslizamento em sistemas a estrutura variável é utilizando o conceito de controle equivalente [11]. O controle equivalente é definido como a ação de controle contínua necessária para manter a solução sobre a superfície de deslizamento. Este conceito deve ser pensado como uma ação de controle abstrata que facilita a obtenção de uma expressão para a dinâmica em modo deslizante, com o objetivo de auxiliar a análise de estabilidade do sistema em malha-fechada.

Considere o seguinte sistema:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u + \varphi(t, x),$$

sujeito a uma ação de controle descontínua $u \in \mathbb{R}^m$ capaz de garantir que o modo deslizante seja alcançado na superfície de deslizamento $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\}$, onde $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função continuamente diferenciável, as funções $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são suaves, e $\varphi(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma perturbação limitada e desconhecida. O controle equivalente é definido durante o deslizamento como a ação de controle contínua que mantém a trajetória do sistema sobre a superfície \mathcal{S} . Sendo assim, é possível obter tal ação de controle resolvendo a equação

$$\dot{\sigma}(x, u_{\text{eq}}) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} = 0,$$

isto é

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x)u_{\text{eq}} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \varphi(t, x) = 0,$$

logo

$$u_{\text{eq}} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \{f(t, x) + \varphi(t, x)\}, \quad (2.11)$$

assumindo que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x)$ seja não-singular. Neste caso, tem-se a seguinte dinâmica do sistema em malha-fechada durante o deslizamento:

$$\dot{x} = \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) \{f(t, x) + \varphi(t, x)\}. \quad (2.12)$$

Note que o controle equivalente é independente da ação de controle efetivamente aplicada ao sistema, que pode ser de natureza descontínua. Além disso, u_{eq} não é fisicamente implementável, uma vez que depende explicitamente da perturbação desconhecida $\varphi(t, x)$.

Suponha agora que a perturbação de entrada $\varphi(t, x)$ seja casada, tal que

$$\varphi(t, x) = g(t, x)d(t, x).$$

Neste caso, a dinâmica em malha-fechada durante o deslizamento é reduzida a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) f(t, x) + (g(t, x) - g(t, x)) d(t, x), \\ &= \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) f(t, x), \end{aligned}$$

uma vez que $g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) = g(t, x)$. Note que neste caso a dinâmica é independente de $\varphi(t, x)$. Esse resultado demonstra que, ao alcançar o modo deslizante, o sistema torna-se insensível a perturbações e incertezas casadas. Essa característica bastante desejável do controle por modos deslizantes é conhecida como **propriedade da invariância**. O exemplo a seguir ilustra esta propriedade.

Exemplo 2.2. Considere o sistema de controle a estrutura variável representado por (2.1) e (2.3) para $t \geq T$, onde T é o instante de tempo em que a superfície de deslizamento $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma(x_1, x_2) = 0\}$ é alcançada. Neste caso, o controle equivalente é definido por (2.11), com

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi(t, x) = g(t, x)d(t, x), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \begin{bmatrix} \kappa & 1 \end{bmatrix},$$

e portanto

$$u_{\text{eq}} = -\kappa x_2 - d(t, x).$$

Logo, a dinâmica em malha-fechada durante o deslizamento é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\kappa x_2, \end{cases} \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathcal{S},$$

que é insensível à perturbação $d(t, x)$ e tem como solução (2.6), como visto nas seções anteriores.

2.4 Controle Por Modos Deslizantes

Em geral, o projeto de um controlador por modos deslizantes consiste em duas etapas [1, 26]. Primeiramente, uma superfície de deslizamento \mathcal{S} deve ser definida de modo que a variável de deslizamento $\sigma(x)$ tenha grau relativo uniforme e unitário com respeito à lei de controle, e que a dinâmica em modo deslizante, que pode ser obtida utilizando o conceito de controle equivalente, corresponda à dinâmica desejada para o sistema em malha-fechada. Posteriormente, deve-se projetar uma lei de controle descontínua de modo a tornar \mathcal{S} ao menos localmente atrativa, seguindo uma determinada condição de alcançabilidade em tempo finito.

Por simplicidade, considere o seguinte sistema incerto:

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(t, x, u)], \quad (2.13)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \leq n$, é uma lei de controle descontínua, e $d : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função desconhecida e limitada compreendendo todas as não-linearidades, incertezas, e perturbações presentes no sistema. Além disso, a matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ possui posto completo, e o par (A, B) é controlável. Assuma ainda que a superfície de deslizamento seja definida por

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\} \quad (2.14)$$

com $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sendo uma função linear do estado, isto é:

$$\sigma(x) = Sx, \quad (2.15)$$

onde $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ possui posto completo. O objetivo é projetar um controlador por modos deslizantes que assegure que o sistema (2.13) seja globalmente exponencialmente estável, apesar da presença da perturbação limitada $d(t, x, u)$.

2.4.1 Superfície de Deslizamento

Considerando (2.14) e (2.15), o problema de projetar uma superfície de deslizamento para o sistema (2.13) é reduzido a escolher uma matriz S tal que as seguintes condições sejam satisfeitas [1, 26]:

- C1** A variável de deslizamento σ deve possuir grau relativo uniforme e unitário com respeito à lei de controle u .

C2 A dinâmica em modo deslizante deve ser exponencialmente estável.

Derivando a função $\sigma(x)$ com respeito ao tempo, tem-se:

$$\dot{\sigma} = S\dot{x} = SAx + SB[u + d(t, x, u)].$$

Logo, para satisfazer a condição **C1**, deve-se projetar S de modo que a matriz $SB \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seja não-singular. Além disso, considerando as equações (2.11) e (2.12) com $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = S$, $g(t, x) = B$, $f(t, x) = Ax$, e $\varphi(t, x) = Bd(t, x, u(x))$, obtêm-se o seguinte controle equivalente:

$$u_{\text{eq}} = -(SB)^{-1}SAx - d(t, x, u),$$

e a seguinte dinâmica em modo deslizante:

$$\dot{x} = (I - B(SB)^{-1}S)Ax, \quad \forall x \in \mathcal{S}, \quad (2.16)$$

que é insensível à perturbação casada, como explicado na Seção 2.3. Apesar da matriz que define a dinâmica em modo deslizante ser dependente de S , a forma como se deve projetar S de modo que a condição **C2** seja satisfeita não está clara.

Como B possui posto completo, de acordo com o Lema C.1, deve existir uma transformação ortogonal das coordenadas de estado $\bar{x} = Q^T x$, tal que o sistema de controle por modos deslizantes definido por (2.13) e (2.15) possa ser reescrito na seguinte forma regular [1, 26]:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}[u + d(t, x, u)], \\ \sigma &= \bar{S}\bar{x}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde

$$\bar{A} = Q^T A Q = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = Q^T B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_m \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = S Q = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & \bar{S}_2 \end{bmatrix},$$

e as submatrizes de \bar{A} , \bar{B} , e \bar{S} têm dimensões definidas de acordo com o vetor $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^T & \bar{x}_2^T \end{bmatrix}^T$, com componentes $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ e $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^m$. De modo a satisfazer a condição **C1**, a matriz que define a variável de deslizamento $S = \bar{S}Q^T$ deve ser escolhida tal que o produto $SB = \bar{S}\bar{B} = \bar{S}_2\bar{B}_m$ seja não-singular. Essa condição será satisfeita caso a submatriz $\bar{S}_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seja escolhida não-singular, uma vez que $\bar{B}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz não-singular de acordo com o Lema C.1. Utilizando a transformação ortogonal de coordenadas de estado, a dinâmica em modo deslizante

(2.16) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= (I - \bar{B}(\bar{S}\bar{B})^{-1}\bar{S}) \bar{A}\bar{x}, \\
&= (I - \bar{B}\bar{B}_m^{-1}\bar{S}_2^{-1}\bar{S}) \bar{A}\bar{x}, \\
&= \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & I \end{bmatrix} \right) \bar{A}\bar{x}, \\
&= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ -K\bar{A}_{11} & -K\bar{A}_{12} \end{bmatrix} \bar{x}, \quad \forall x \in \mathcal{S},
\end{aligned}$$

onde $K = \bar{S}_2^{-1}\bar{S}_1$. Como na superfície de deslizamento \mathcal{S} tem-se $\bar{x}_2 = -K\bar{x}_1$, então

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}_1 &= (\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}K) \bar{x}_1, \\
\dot{\bar{x}}_2 &= -K\bar{A}_{11}\bar{x}_1 - K\bar{A}_{12}\bar{x}_2,
\end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{S},$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1(t) &= e^{\Phi t} \bar{x}_1(T), \\
\bar{x}_2(t) &= -K e^{\Phi t} \bar{x}_1(T),
\end{aligned} \quad \forall t \geq T, \quad (2.18)$$

onde $\Phi = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}K$, e T é o instante de tempo em que o sistema entra em modo deslizante. Portanto, o sistema será exponencialmente estável se K for projetado de modo que a matriz Φ seja Hurwitz. Tal problema de projetar K pode ser interpretado como um problema de estabilização via realimentação linear de estado, desde que o par $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12})$ seja controlável. Isso é verdade, de acordo com o Lema C.2, uma vez que o par (A, B) e, conseqüentemente, o par (\bar{A}, \bar{B}) são controláveis. Sendo assim, K pode ser projetado por meio de métodos como alocação de polos e minimização linear quadrática [1, 26]. Além disso, note que a dinâmica em modo deslizante não depende da submatriz \bar{S}_2 , que pode ser escolhida como $\bar{S}_2 = \Lambda\bar{B}_m^{-1}$, de modo que o produto $\Lambda = SB \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seja uma matriz não-singular arbitrária. Definindo K e \bar{S}_2 , define-se também a matriz S , que é dada pela equação

$$S = \bar{S}_2 \begin{bmatrix} K & I \end{bmatrix} Q^T. \quad (2.19)$$

2.4.2 Controle a Relé

Para que o sistema de controle por modos deslizantes definido por (2.13), (2.14), e (2.15) seja globalmente exponencialmente estável, é necessário que a lei de controle u seja projetada de modo que a superfície de deslizamento \mathcal{S} seja globalmente atrativa, com as trajetórias de estado do sistema convergindo em tempo finito para esta superfície. Uma condição suficiente para que as trajetórias de estado sejam atraídas

globalmente e em tempo finito para \mathcal{S} é dada pela seguinte desigualdade:

$$\sigma^T \dot{\sigma} \leq -\eta \|\sigma\| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|} = \frac{d\|\sigma\|}{dt} \leq -\eta, \quad (2.20)$$

onde $\eta > 0$ é uma constante positiva arbitrária. Integrando a desigualdade, tem-se

$$\|\sigma(t)\| - \|\sigma(0)\| \leq -\eta t,$$

e portanto $\sigma(t)$ irá convergir para zero após um intervalo de tempo T , limitado por

$$T \leq \frac{\|\sigma(0)\|}{\eta}.$$

A condição (2.20) é conhecida como **condição de alcançabilidade**, e a lei de controle u pode ser projetada de acordo com essa condição [1, 26].

Considere primeiramente o sistema definido por (2.13), (2.14), e (2.15) para $m = 1$. Suponha que a perturbação seja limitada por

$$|d(t, x, u)| \leq k_u |u| + \bar{d}(t, x), \quad (2.21)$$

onde $0 \leq k_u < 1$ é uma constante conhecida, e $\bar{d} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva conhecida. Neste caso, a condição (2.20) é equivalente a

$$\sigma \dot{\sigma} = \sigma \{SAx + SBu + SBd(t, x, u)\} \leq -\eta |\sigma|.$$

Define-se então a lei de controle como

$$u = -\Lambda^{-1}[SAx + \rho(t, x) \operatorname{sgn}(\sigma)], \quad (2.22)$$

onde $\Lambda = SB \in \mathbb{R}$, e $\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de modulação positiva a ser escolhida. Sendo assim, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\sigma} &= \sigma \{-\rho(t, x) \operatorname{sgn}(\sigma) + \Lambda d(t, x, u)\} \\ &\leq -|\sigma| \{\rho(t, x) - |\Lambda| (k_u |u| + \bar{d}(t, x))\} \\ &\leq -|\sigma| \{(1 - k_u)\rho(t, x) - k_u |SAx| - |\Lambda| \bar{d}(t, x)\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

e portanto se a função de modulação for escolhida como

$$\rho(t, x) = \frac{k_u |SAx| + |\Lambda| \bar{d}(t, x) + \eta}{1 - k_u}, \quad (2.24)$$

então a condição (2.20) será satisfeita.

Considere agora o caso mais geral em que $1 \leq m \leq n$. Suponha que as compo-

mentos $d_i(t, x, u)$ do vetor perturbação $d(t, x, u)$ sejam limitadas por

$$|d_i(t, x, u)| \leq k_{u_i}|u_i| + \bar{d}_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.25)$$

onde u_i são as componentes do vetor u que representa a lei de controle, $0 \leq k_{u_i} < 1$ são constantes conhecidas, e $\bar{d}_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções positivas conhecidas. A condição (2.20) é dada por

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T \{SAx + SBu + SBd(t, x, u)\} \leq -\eta \|\sigma\|.$$

Como, de acordo com a Subseção 2.4.1, a matriz S pode ser escolhida de tal forma que $\Lambda = SB \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seja uma matriz não-singular arbitrária, então assumamos que S seja tal que $\Lambda = I$. Neste caso, o problema de projetar uma lei de controle $u \in \mathbb{R}^m$ é equivalente ao de projetar m leis de controle $u_i \in \mathbb{R}$ desacopladas. Define-se então as componentes da lei de controle como

$$u_i = -S_i Ax - \rho_i(t, x) \operatorname{sgn}(\sigma_i),$$

onde S_i corresponde à i -ésima linha da matriz S , σ_i são as componentes do vetor variável de deslizamento σ , e $\rho_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de modulação positivas a serem escolhidas. Neste caso, analogamente à (2.23), tem-se as seguintes relações

$$\begin{aligned} \sigma_i \dot{\sigma}_i &= \sigma_i \{-\rho_i(t, x) \operatorname{sgn}(\sigma_i) + d_i(t, x, u)\} \\ &\leq -|\sigma_i| \{(1 - k_{u_i})\rho_i(t, x) - k_{u_i}|S_i Ax| - \bar{d}_i(t, x)\}. \end{aligned}$$

Portanto, se as funções de modulação forem escolhidas como

$$\rho_i(t, x) = \frac{k_{u_i}|S_i Ax| + \bar{d}_i(t, x) + \eta}{1 - k_{u_i}},$$

então as seguintes desigualdades serão válidas

$$\sigma_i \dot{\sigma}_i \leq -\eta |\sigma_i|, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.26)$$

e a condição (2.20) será satisfeita.

Exemplo 2.3. Considere o sistema definido por (2.13), (2.14), e (2.15), com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

e a perturbação $d(t, x, u)$ limitada por (2.21), com $k_u = 0.5$ e $\bar{d}(t, x) = \|x\| + 0.5$. Neste caso, a transformação ortogonal de coordenadas de estado $\bar{x} = Q^T x$, que é

definida pela seguinte matriz de transformação ortogonal:

$$Q^T = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

leva o sistema à forma regular (2.17), com

$$\bar{A} = Q^T A Q = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 & -23 \\ 7 & 19 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = Q^T B = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = S Q = \bar{S}_2 \begin{bmatrix} K & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolhendo $K = -\frac{31}{23}$, e $\bar{S}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, a matriz S será definida por (2.19), e dada por

$$S = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 17 & 3 \end{bmatrix},$$

de modo que se tenha o produto $\Lambda = S B = 1$. Além disso, o comportamento do sistema em modo deslizante será dado por (2.18) com $\Phi = -5$. Sendo assim, o sistema será globalmente exponencialmente estável se a superfície de deslizamento definida por (2.14) for alcançada em tempo finito. Para isso, projeta-se a lei de controle de acordo com (2.22), isto é

$$u = -\frac{1}{23} (48x_1 + 91x_2) - \rho(t, x) \operatorname{sgn}(\sigma), \quad (2.27)$$

onde a função de modulação é definida por (2.24) com $\eta = 0.5$, e dada por

$$\rho(t, x) = \frac{1}{23} |48x_1 + 91x_2| + 2\|x\| + 2. \quad (2.28)$$

Portanto, a condição de alcançabilidade (2.20) é satisfeita globalmente, e o sistema é globalmente exponencialmente estável. A Figura 2.8 apresenta os resultados da simulação do sistema de controle por modos deslizantes projetado neste exemplo, com perturbação $d(t, x, u) = -0.5u + x_1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi t)$. Observe que a variável de deslizamento converge para zero após um intervalo de tempo finito $T \approx 0.1$ s. Durante o deslizamento, o estado x converge exponencialmente para zero.

2.4.3 Controle Vetorial Unitário

Como mostrado na seção anterior, para que a superfície de deslizamento seja alcançada globalmente e em tempo finito em sistemas com múltiplas entradas, é possível projetar a parte descontínua das componentes do vetor lei de controle como funções $\operatorname{sgn}(\cdot)$ das componentes correspondentes da variável de deslizamento, moduladas apropriadamente, de modo a satisfazer as condições de alcançabilidade desacopladas (2.26). O conceito de controle vetorial unitário [29, 30] apresenta uma

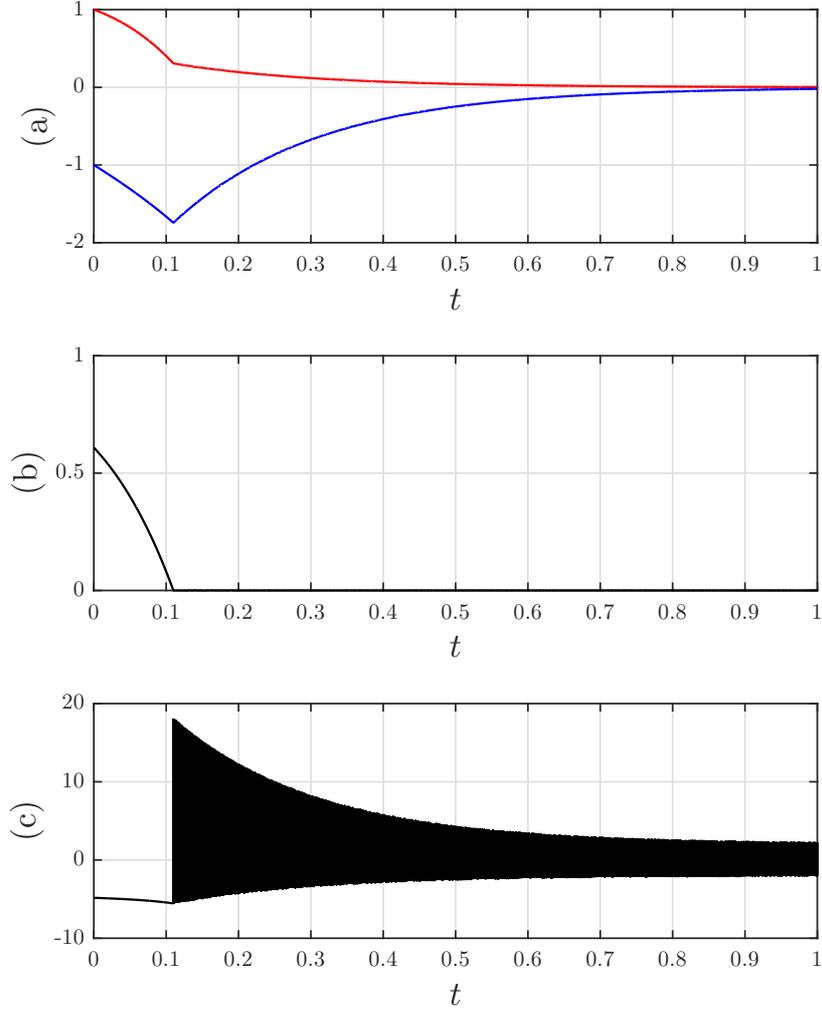


Figura 2.8: Desempenho da lei de controle por modos deslizantes (2.27) com função de modulação (2.28), aplicada ao sistema do Exemplo 2.3 com perturbação $d(t, x, u) = -0.5u + x_1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi t)$: (a) (•) estado x_1 , (•) estado x_2 ; (b) variável de deslizamento σ ; (c) ação de controle u .

alternativa para essa estratégia de controle desacoplada, com a vantagem de ser uma abordagem inerentemente multivariável. A ideia básica é generalizar a função $\text{sgn}(\sigma) = \frac{\sigma}{|\sigma|}$ do caso escalar para o caso multivariável, utilizando uma função vetor unitário do tipo $\frac{\sigma}{\|\sigma\|}$, de modo que a condição de alcançabilidade (2.20) seja satisfeita.

Considere o sistema de controle por modos deslizantes definido por (2.13), (2.14), e (2.15), e assumamos que a perturbação seja limitada por

$$\|d(t, x, u)\| \leq k_u \|u\| + \bar{d}(t, x), \quad (2.29)$$

onde $0 \leq k_u < 1$ é uma constante conhecida, e $\bar{d} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva conhecida. Note que essa condição é uma generalização de (2.25), e portanto compreende uma classe mais abrangente de perturbações. Escolhendo a matriz S de modo que $\Lambda = SB = I \in \mathbb{R}^{m \times m}$, a condição de alcançabilidade (2.20) será

equivalente a

$$\sigma^T \dot{\sigma} = \sigma^T \{SAx + u + d(t, x, u)\} \leq -\eta \|\sigma\|.$$

Define-se então a lei de controle como

$$u = -SAx - \rho(t, x) \frac{\sigma}{\|\sigma\|}, \quad (2.30)$$

onde $\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de modulação positiva a ser escolhida. Logo, tem-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \sigma^T \dot{\sigma} &= \sigma^T \left\{ -\rho(t, x) \frac{\sigma}{\|\sigma\|} + d(t, x, u) \right\} \\ &\leq -\|\sigma\| \{ \rho(t, x) - (k_u \|u\| + \bar{d}(t, x)) \} \\ &\leq -\|\sigma\| \{ (1 - k_u) \rho(t, x) - k_u \|SAx\| - \bar{d}(t, x) \}, \end{aligned}$$

e portanto se a função de modulação for escolhida como

$$\rho(t, x) = \frac{k_u \|SAx\| + \bar{d}(t, x) + \eta}{1 - k_u}, \quad (2.31)$$

então a condição (2.20) será satisfeita.

Exemplo 2.4. Considere o sistema definido por (2.13), (2.14), e (2.15), com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

e a perturbação $d(t, x, u)$ limitada por (2.29), com $k_u = 0.5$ e $\bar{d}(t, x) = \|x\| + 0.5$. Neste caso, o comportamento do sistema em modo deslizante será dado por

$$\sigma(x) = Sx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \quad \forall x \in \mathcal{S}$$

uma vez que a matriz S é quadrada e não-singular. Sendo assim, o estado do sistema irá convergir em tempo finito para zero se a superfície de deslizamento \mathcal{S} for alcançada em tempo finito. Para isso, projeta-se a lei de controle de acordo com (2.30), ou seja

$$u = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} x - \rho(t, x) \frac{\sigma}{\|\sigma\|}, \quad (2.32)$$

onde a função de modulação é definida por (2.31) com $\eta = 0.5$, e dada por

$$\rho(t, x) = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} x \right\| + 2\|x\| + 2. \quad (2.33)$$

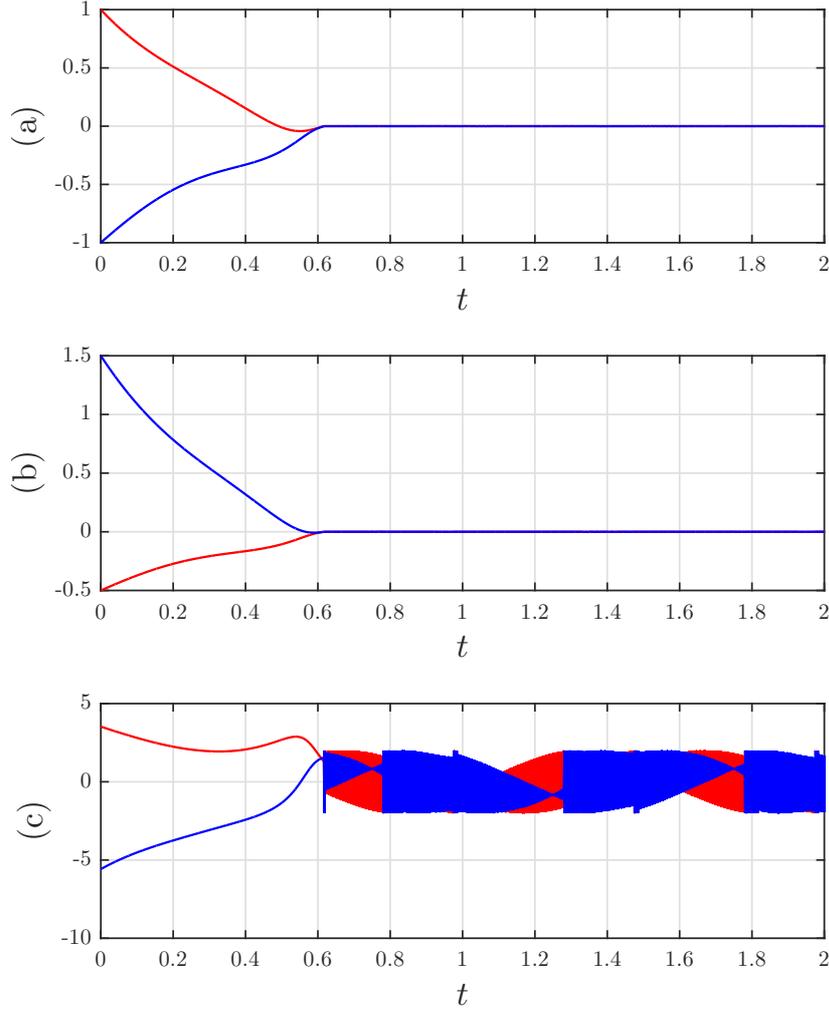


Figura 2.9: Desempenho da lei de controle por modos deslizantes (2.32) com função de modulação (2.33), aplicada ao sistema do Exemplo 2.4 com perturbação (2.34): (a) (●) estado x_1 , (●) estado x_2 ; (b) (●) variável de deslizamento σ_1 , (●) variável de deslizamento σ_2 ; (c) (●) ação de controle u_1 , (●) ação de controle u_2 .

Portanto, a condição de alcançabilidade (2.20) é satisfeita globalmente, e o estado do sistema converge globalmente e em tempo finito para zero. A Figura 2.9 apresenta os resultados da simulação do sistema de controle por modos deslizantes projetado neste exemplo, com perturbação dada por

$$d(t, x, u) = -\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} u + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Observe que a variável de deslizamento converge para zero após um intervalo de tempo finito $T \approx 0.6$ s. Durante o deslizamento, o estado do sistema é mantido igual a zero e a ação de controle chaveia em alta-frequência. Esse chaveamento em alta-frequência ocorre devido ao fato de a lei de controle (2.30) apresentar uma descontinuidade em $\sigma = 0$.

2.5 Aproximações Contínuas

Como mostrado nas seções anteriores, o controle por modos deslizantes convencional tem como característica reagir instantaneamente ao mínimo desvio sobre a restrição $\sigma(x) = 0$, que define a superfície de deslizamento (2.14), conduzindo o estado do sistema novamente à restrição através de uma ação de controle suficientemente intensa. Desta forma, é possível obter um controle com grande acurácia e robustez. No entanto, uma consequência intrínseca dessa reação imediata e intensa é o indesejável chaveamento em alta frequência do sinal de controle, conhecido como *chattering*. Para contornar este problema, diversas abordagens foram propostas com base na ideia de suavizar a descontinuidade presente na função sinal de modo a obter aproximações arbitrariamente similares, porém contínuas [1, 31].

Uma estratégia bastante simples para evitar a descontinuidade em controladores por modos deslizantes é mudar a dinâmica em uma pequena vizinhança da superfície de deslizamento \mathcal{S} , isto é, em uma **camada limite** [31] definida na forma

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |\sigma(x)| \leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Isso pode ser feito substituindo a função $\text{sgn}(\cdot)$ presente na lei de controle por uma zona linear com saturação, definida pela seguinte função:

$$\text{sat}(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} \sigma/\varepsilon, & |\sigma| \leq \varepsilon, \\ \text{sgn}(\sigma), & |\sigma| > \varepsilon. \end{cases}$$

Neste caso, o controlador permanece se comportando da mesma maneira fora da camada limite \mathcal{B} , garantindo que ela seja atrativa e invariante. Dentro de \mathcal{B} , a convergência para a superfície de deslizamento \mathcal{S} não será mais garantida pelo controlador. No entanto, é importante observar que a camada limite \mathcal{B} pode ser escolhida arbitrariamente próxima de \mathcal{S} , dependendo do parâmetro ε .

É importante destacar que existem outras estratégias de aproximações contínuas, como por exemplo a sigmóide apresentada em [1, Seção 1.4]. Entretanto, a acurácia e robustez do controle por modos deslizantes também são parcialmente perdidas nestes casos. O exemplo a seguir ilustra as principais propriedades destas aproximações.

Exemplo 2.5. Seja o movimento unidimensional de uma massa unitária, descrito pela dinâmica (2.1), e considere uma lei de controle contínua dada por

$$\begin{cases} u = -\kappa x_2 - \rho \text{sat}(\sigma, \varepsilon), \\ \sigma(x_1, x_2) = x_2 + \kappa x_1, \end{cases} \quad (2.35)$$

Note que esta lei de controle é uma aproximação de (2.3), obtida substituindo a

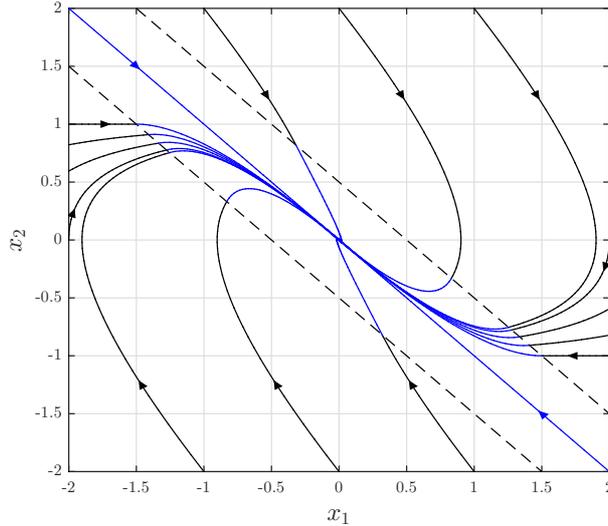


Figura 2.10: Plano de fase do sistema de controle contínuo definido por (2.1) e (2.35), com $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$, $\kappa = \rho = 1$ e $\varepsilon = 0.5$. (●) trajetórias dentro da camada limite, (●) trajetórias fora da camada limite, (- -) fronteiras da camada limite.

função $\text{sgn}(\cdot)$ por uma zona linear com saturação. A Figura 2.10 ilustra o plano de fase deste sistema considerando $d(t, x_1, x_2) \equiv 0$, $\kappa = \rho = 1$ e $\varepsilon = 0.5$. Observe que as trajetórias de estado convergem para a camada limite, e nela permanecem. Entretanto, não ocorre deslizamento como no caso ilustrado na Figura 2.5. Além disso, a Figura 2.11 mostra o desempenho da lei de controle (2.35) para $d(t, x_1, x_2) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t)$. Note que o sinal de controle contínuo garante apenas a convergência para a camada limite. Devido à perturbação senoidal, a convergência da variável de deslizamento não é exata como no caso ilustrado na Figura 2.6.

2.6 Modos Deslizantes de Ordem Superior

O controle por modos deslizantes foi generalizado com a introdução do conceito de modos deslizantes de ordem superior [4]. Tal conceito consiste em atuar nas derivadas temporais de mais alta ordem do desvio sobre a restrição, em vez de influenciar apenas a primeira derivada, como ocorre no controle por modos deslizantes convencional. O objetivo neste caso é manter não apenas o desvio σ igual a zero, mas também suas derivadas temporais até uma determinada ordem. Com isso, são preservadas as principais vantagens da abordagem original, porém com acurácia ainda maior e a possibilidade de uma lei de controle contínua, atenuando o *chattering* [5]. No contexto de HOSM, o modo deslizante é classificado de acordo com o grau de suavidade dinâmica do desvio σ calculado ao longo das trajetórias do sistema. A ordem do deslizamento é então dada pelo número total de derivadas contínuas de σ com respeito ao tempo, incluindo a derivada de ordem zero $\sigma^{(0)} = \sigma$, na vizinhança

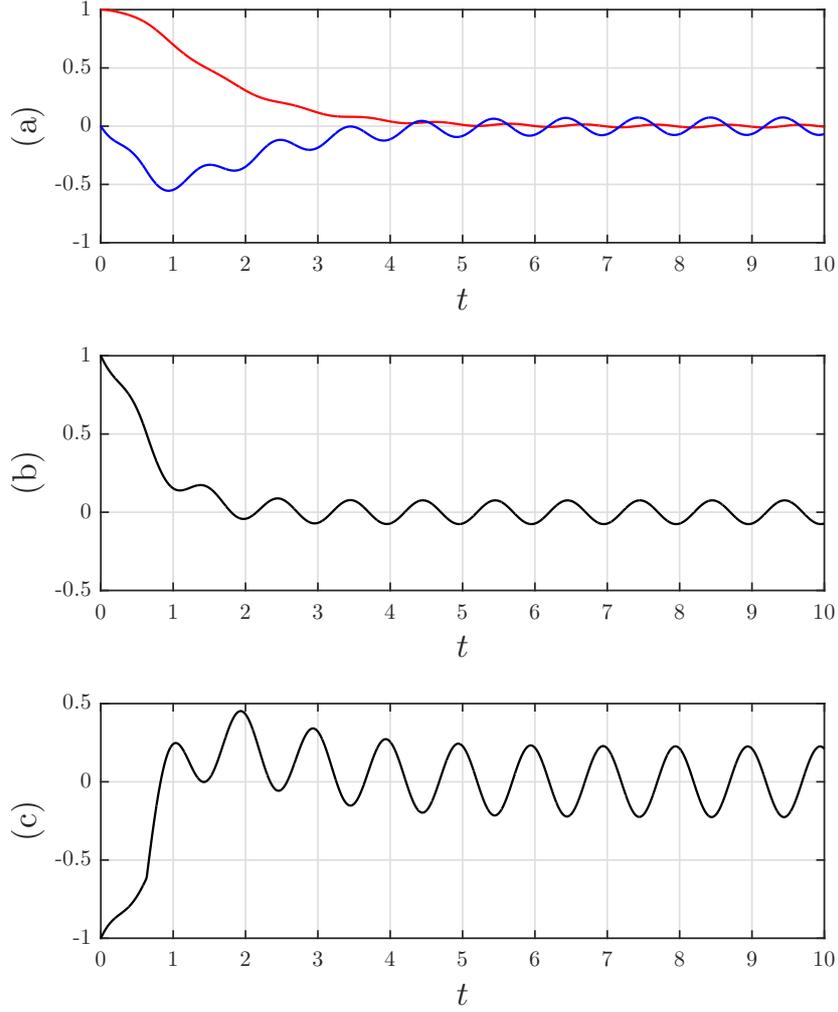


Figura 2.11: Desempenho da lei de controle contínua (2.35), com $\rho = \kappa = 1$ e $\varepsilon = 0.5$, aplicada à dinâmica do movimento de uma massa unitária (2.1) com perturbação $d(t) = \frac{1}{2} \text{sen}(2\pi t)$: (a) (●) posição x_1 , (●) velocidade x_2 ; (b) variável de deslizamento σ ; (c) ação de controle u .

do modo deslizante. A definição formal é dada a seguir.

Definição 2.2 ([5, 26]). *Considere a equação diferencial descontínua*

$$\dot{x} = f(x),$$

entendida no sentido de Filippov, com função de restrição $\sigma(x)$ suave. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- *As derivadas temporais $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ são funções contínuas do estado x .*
- *O conjunto*

$$\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\} \quad (2.36)$$

é um conjunto integral não vazio (i.e., consiste em trajetórias de Filippov).

- *O conjunto de campos vetoriais admissíveis de Filippov (2.8) nos pontos pertencentes a (2.36) contém mais de um vetor.*

Então, o movimento no conjunto (2.36) é dito existir em um modo deslizante de ordem r , e o conjunto (2.36) é denominado conjunto deslizante de ordem r . O caso não-autônomo é reduzido ao caso considerado acima introduzindo o estado fictício t , com dinâmica dada por $\dot{t} = 1$.

Segundo esta definição, o conjunto deslizante (2.36) é definido por uma restrição $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$, com dimensão r no espaço de estado. O modo deslizante convencional corresponde ao modo deslizante de primeira ordem, uma vez que neste caso a derivada $\dot{\sigma}$ é descontínua. Além disso, enquanto a convergência para (2.14) deve ocorrer em tempo finito para que um modo deslizante de primeira ordem se estabeleça, a convergência para o conjunto deslizante (2.36) de ordem $r \geq 2$ também pode ser assintótica. Um exemplo simples de convergência assintótica para um conjunto deslizante é dado por um sistema a estrutura variável de duas dimensões mantendo $x + \dot{x} = 0$ em um modo deslizante de primeira ordem. Neste caso, considerando a restrição $\sigma(x, \dot{x}) = x$, tem-se que as condições da Definição 2.2 são satisfeitas para $r = 2$, e pode-se dizer que existe um modo deslizante de segunda ordem assintoticamente estável na origem do espaço de estado $x = \dot{x} = 0$.

A acurácia com que um modo deslizante mantém uma determinada restrição está diretamente relacionada ao atraso no chaveamento τ (ou intervalo de tempo τ entre duas medições). Em um modo deslizante de primeira ordem, a primeira derivada temporal $\dot{\sigma}$ do desvio sobre a restrição é descontínua, e a acurácia com que se mantém a restrição $\sigma = 0$ é proporcional a τ . Similarmente, a derivada $\sigma^{(r)}$ é descontínua em um modo deslizante de ordem r , e a restrição $\sigma^{(r-1)} = 0$ é mantida com acurácia proporcional a τ . Isso implica que as demais restrições $\sigma^{(r-i)} = 0$, com $i = 1, 2, \dots, r$, são mantidas com acurácias proporcionais a τ^i . Logo, a acurácia com que um modo deslizante de ordem r pode manter a restrição $\sigma = 0$ é proporcional a τ^r [4, 8]. Note que estas acurácias são observadas apenas durante o modo deslizante, e portanto são garantidas apenas para HOSMs com convergência em tempo finito.

Em um sistema de controle a estrutura variável, a ordem mínima necessária para que um modo deslizante mantenha a restrição $\sigma = 0$ está fortemente relacionada ao conceito de grau relativo. Considerando que as discontinuidades presentes na dinâmica do sistema em malha-fechada sejam provenientes apenas da ação de controle, é possível mostrar que o grau relativo do sistema com saída dada pela função de restrição $\sigma(t, x)$ define o número mínimo de derivadas temporais contínuas do desvio σ . Seja o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \\ \sigma = \sigma(t, x), \end{cases} \quad (2.37)$$

sujeito a uma ação de controle $u \in \mathbb{R}$, com estado $x \in \mathbb{R}^n$ e saída $\sigma \in \mathbb{R}$. Assuma que as funções $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e $\sigma(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sejam suaves. Introduzindo o estado fictício t , definido tal que $\dot{t} = 1$, a dinâmica do novo vetor de estado $X = \begin{bmatrix} x^T & t \end{bmatrix}^T$ será dada por

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} f(t, x) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(t, x) \\ 0 \end{bmatrix} u = \tilde{f}(X) + \tilde{g}(X)u,$$

e a saída será definida por $\sigma = \sigma(X)$. O grau relativo da saída σ com respeito à entrada u em um ponto X é definido como a ordem da derivada total de σ na qual a entrada u aparece multiplicada por um coeficiente diferente de zero pela primeira vez, desde que os coeficientes que multiplicam u em todas as derivadas de menor ordem sejam identicamente nulos em uma vizinhança do ponto X . Calculando a primeira derivada temporal da saída ao longo das trajetórias do sistema, tem-se

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial}{\partial X}[\sigma(X)]\dot{X} = \nabla_X \sigma(X) \cdot (\tilde{f}(X) + \tilde{g}(X)u) = \mathcal{L}_{\tilde{f}}\sigma(X) + \mathcal{L}_{\tilde{g}}\sigma(X)u, \quad (2.38)$$

onde é definido $\mathcal{L}_h\sigma(X_0) = \nabla_X \sigma(X_0) \cdot h(X_0)$, considerando uma função diferenciável $\sigma(X)$ com respeito a um determinado campo vetorial $h(X)$ em um ponto X_0 . Logo, se $\mathcal{L}_{\tilde{g}}\sigma(X_0) \neq 0$ em um determinado ponto X_0 , então o grau relativo de σ com respeito a u será unitário neste ponto. Caso contrário, se $\mathcal{L}_{\tilde{g}}\sigma(X_0) \equiv 0$ em uma vizinhança do ponto X_0 , então o grau relativo de σ com respeito a u será igual a dois neste ponto se tivermos, na equação

$$\ddot{\sigma} = \mathcal{L}_{\tilde{f}}^2\sigma(X) + \mathcal{L}_{\tilde{g}}\mathcal{L}_{\tilde{f}}\sigma(X)u,$$

um coeficiente $\mathcal{L}_{\tilde{g}}\mathcal{L}_{\tilde{f}}\sigma(X_0) \neq 0$. Continuando esse raciocínio, obtém-se a definição formal de grau relativo a seguir.

Definição 2.3 ([32]). *Seja o sistema (2.37), com entrada $u \in \mathbb{R}$ e saída $\sigma \in \mathbb{R}$. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- $\mathcal{L}_{\tilde{g}}\mathcal{L}_{\tilde{f}}^i\sigma(X_0) \equiv 0$, com $i = 0, 1, \dots, r-2$, para todo ponto X em uma vizinhança do ponto X_0 .
- $\mathcal{L}_{\tilde{g}}\mathcal{L}_{\tilde{f}}^{r-1}\sigma(X_0) \neq 0$.

Então, é dito que o sistema (2.37) possui grau relativo r no ponto $X_0 = \begin{bmatrix} x_0^T & t_0 \end{bmatrix}^T$.

Segundo esta definição, para um sistema definido por (2.37) com grau relativo constante e igual a r , tem-se que as derivadas temporais da saída σ serão dadas

pelas seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}\sigma^{(i)} &= \mathcal{L}_{\tilde{f}}^i \sigma(X), \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \sigma^{(r)} &= \mathcal{L}_{\tilde{f}}^r \sigma(X) + \mathcal{L}_{\tilde{g}} \mathcal{L}_{\tilde{f}}^{r-1} \sigma(X) u,\end{aligned}$$

com coeficiente $\mathcal{L}_{\tilde{g}} \mathcal{L}_{\tilde{f}}^{r-1} \sigma(X) \neq 0$. Portanto, as derivadas temporais $\sigma^{(i)}$, com $i = 1, 2, \dots, r-1$, serão funções contínuas de X , e a restrição $\sigma = 0$ somente poderá ser mantida em um modo deslizante de ordem igual ou superior a r . No caso de um modo deslizante de ordem superior a r , a lei de controle u deverá ser contínua, porém com derivadas temporais descontínuas de modo a garantir a convergência para o modo deslizante de ordem superior.

O principal exemplo de controlador por modos deslizantes de ordem superior com lei de controle contínua é o super-twisting (*Super-Twisting Algorithm* – STA) [4]. Este controlador baseado em modos deslizantes de segunda ordem foi desenvolvido com o objetivo de atenuar o *chattering* em sistemas com grau relativo unitário, e destaca-se por não necessitar que a derivada temporal do desvio sobre a restrição esteja disponível para a implementação da lei de controle. Recentemente, foram propostas generalizações para o super-twisting baseadas na utilização de ganhos variáveis [17, 18] e na introdução de uma estrutura multivariável [19], ampliando sua aplicabilidade. Nas subseções a seguir, serão apresentados o controlador super-twisting e suas principais generalizações.

2.6.1 Super-Twisting

O super-twisting é um controlador baseado em modos deslizantes de segunda ordem, e foi desenvolvido com o objetivo de atenuar o *chattering* em sistemas com grau relativo unitário [4]. A ideia básica é projetar uma lei de controle dinâmica de modo que a ação descontínua esteja presente apenas em sua derivada temporal, visando obter uma convergência em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem por meio de um sinal de controle contínuo. Desta forma, um sistema de controle a estrutura variável baseado no algoritmo super-twisting caracteriza-se por um movimento em espiral em torno da origem do plano de fase $(\sigma, \dot{\sigma})$, como ilustrado na Figura 2.12. A principal vantagem do super-twisting com relação aos demais controladores baseados em modos deslizantes de segunda ordem é não ser necessária nenhuma informação sobre a derivada temporal $\dot{\sigma}$ para a implementação da lei de controle. Este fato fez com que o super-twisting atraísse considerável atenção no contexto de sistemas a estrutura variável, tendo sido utilizado com sucesso em importantes aplicações, como o problema da diferenciação robusta e exata em tempo real [13] e o controle de diversos sistemas de interesse prático [33–35].

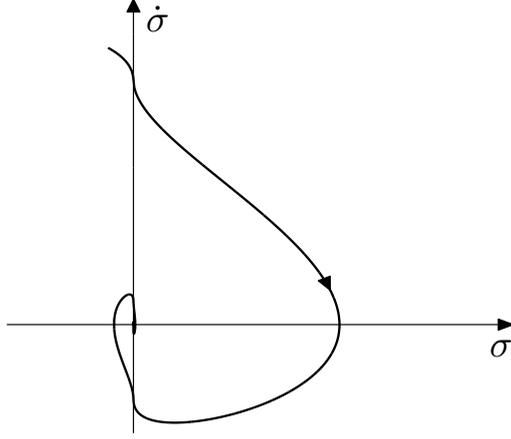


Figura 2.12: Exemplo de trajetória no espaço de estado de um super-twisting.

Seja um sistema de grau relativo unitário definido por (2.37). Considerando (2.38), tem-se a seguinte dinâmica:

$$\dot{\sigma} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad (2.39)$$

com $b(t, x) \neq 0$. Assuma que as desigualdades

$$|\dot{a}| + U_M |\dot{b}| \leq C, \quad 0 < K_m \leq b(t, x) \leq K_M, \quad \left| \frac{a}{b} \right| < qU_M, \quad 0 < q < 1, \quad (2.40)$$

sejam satisfeitas para determinadas constantes positivas C , K_m , K_M , U_M , e q . A lei de controle é definida baseada no algoritmo super-twisting [4, 36], sendo dada por

$$u = -k_1 |\sigma|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma) + z, \quad \dot{z} = \begin{cases} -u, & |u| > U_M, \\ -k_2 \operatorname{sgn}(\sigma), & |u| \leq U_M. \end{cases} \quad (2.41)$$

Note que de fato não é necessária nenhuma informação sobre a derivada temporal $\dot{\sigma}$ para a implementação de u , e que o algoritmo super-twisting fornece um sinal de controle contínuo, e portanto menos propenso ao *chattering* [4, 36]. O comportamento do sistema em malha-fechada é enunciado pelo teorema a seguir.

Teorema 2.1 ([36]). *Seja o sistema em malha-fechada definido por (2.39) e (2.41), obedecendo às desigualdades (2.40). Se $K_m k_2 > C$ e k_1 for suficientemente grande, então o controlador (2.41) garante o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ atraindo as trajetórias do sistema em tempo finito. O sinal de controle u converge em tempo finito para o segmento $[-U_M, U_M]$, e nele permanece. O sinal de controle nunca deixará este segmento se estiver inicialmente localizado dentro dele.*

Demonstração. ver [36]. O Apêndice A.1 apresenta uma análise das trajetórias do

sistema, mostrando suas propriedades de contração e de convergência em tempo finito para o modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. \square

Para sistemas com $b(t, x)$ constante em (2.39), pode-se utilizar a seguinte versão modificada da lei de controle (2.41), obtida fazendo $U_M \rightarrow \infty$:

$$u = -k_1 |\sigma|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma) + z, \quad \dot{z} = -k_2 \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (2.42)$$

Como $\dot{b} = 0$, assume-se que sejam satisfeitas as desigualdades

$$|a| \leq C, \quad 0 < K_m \leq b \leq K_M, \quad (2.43)$$

para determinadas constantes positivas C, K_m, K_M . Assim, se k_1 e k_2 forem escolhidos apropriadamente, então a lei de controle (2.42) também garante a convergência do sistema em malha-fechada para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. Este fato é enunciado pelo teorema a seguir.

Teorema 2.2. *Seja o sistema em malha-fechada definido por (2.39) e (2.42), com $b(t, x)$ constante. Assuma que as desigualdades (2.43) sejam satisfeitas. Se $K_m k_2 > C$ e k_1 for suficientemente grande, então o controlador (2.42) garante o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ atraindo as trajetórias do sistema em tempo finito.*

Demonstração. ver [13]. O teorema pode ser demonstrado a partir de uma análise semelhante à apresentada para $|u| < U_M$ no Apêndice A.1. Note que, neste caso, a condição suficiente sobre k_1 em (A.9) pode ser substituída por (A.7). \square

Uma das aplicações mais importantes do algoritmo super-twisting é a diferenciação robusta e exata em tempo real. Esta aplicação é abordada no exemplo a seguir.

Exemplo 2.6 (Diferenciador de Primeira Ordem). Considere um integrador descrito por

$$\dot{x} = u,$$

onde $x, u \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, o estado e a entrada deste sistema. Deseja-se estimar, em tempo real, a derivada de um sinal base $f_0(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. A ideia é projetar um sinal de entrada u contínuo de modo a garantir que o estado x rastreie o sinal base $f_0(t)$ em tempo finito. Desta forma, devido à dinâmica do integrador, é possível estimar a derivada do sinal base a partir do sinal contínuo fornecido por u . Para isso, é definido $\sigma := x - f_0(t)$ como o erro de estimação do sinal base, com dinâmica descrita por

$$\dot{\sigma} = -\dot{f}_0(t) + u.$$

Note que esta dinâmica é equivalente a (2.39) com $a(t, x) = -\dot{f}_0(t)$ e $b(t, x) = 1$. Assim, projeta-se u com base no algoritmo super-twisting em (2.42). O Teorema 2.2 garante a convergência em tempo finito das trajetórias do sistema para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$, desde que a desigualdade

$$|\ddot{f}_0(t)| \leq C,$$

seja satisfeita para alguma constante positiva C , de acordo com (2.43). Para isso, é suficiente que os ganhos do algoritmo sejam escolhidos tais que

$$k_1 > (k_2 + C) \sqrt{\frac{2}{k_2 - C}}, \quad k_2 > C,$$

onde k_1 obedece à condição (A.7) (ver Apêndice A.1). Portanto, a derivada do sinal base $f_0(t)$ pode ser estimada em tempo real utilizando o seguinte diferenciador de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_1 |x - f_0(t)|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(x - f_0(t)) + z, \\ \dot{z} = -k_2 \operatorname{sgn}(x - f_0(t)). \end{cases} \quad (2.44)$$

Assim, após um intervalo de tempo finito T , são estabelecidas as igualdades

$$x = f_0(t), \quad u = z = \dot{f}_0(t), \quad t \geq T. \quad (2.45)$$

A Figura 2.13 apresenta os resultados de simulação para a estimação da derivada de um sinal base $f_0(t) = \sin(\pi t) + t$ utilizando o diferenciador de primeira ordem (2.44), com ganhos $k_1 = 13$ e $k_2 = 30$. Observe que o sistema converge para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ após um intervalo de tempo finito $T \approx 0.4$ s. Durante o deslizamento, são estabelecidas as igualdades (2.45). Também é importante destacar que o sinal u fornecido pelo algoritmo super-twisting é contínuo, e portanto menos propenso ao *chattering*.

2.6.2 Variable Gain Super-Twisting

Nos desenvolvimentos teóricos iniciais, os ganhos do algoritmo super-twisting eram assumidos constantes, permitindo compensar globalmente apenas incertezas/perturbações com derivadas limitadas por constantes conhecidas a priori. Além disso, a natureza homogênea do algoritmo não permitia garantir o deslizamento para sistemas com incertezas linearmente dependentes do estado. Em contraste, graças à abordagem por função de Lyapunov que permeia sua teoria, controladores por modos deslizantes de primeira ordem apresentavam como vantagem a possibilidade de serem projetados utilizando ganhos variáveis. Apenas mais recentemente,

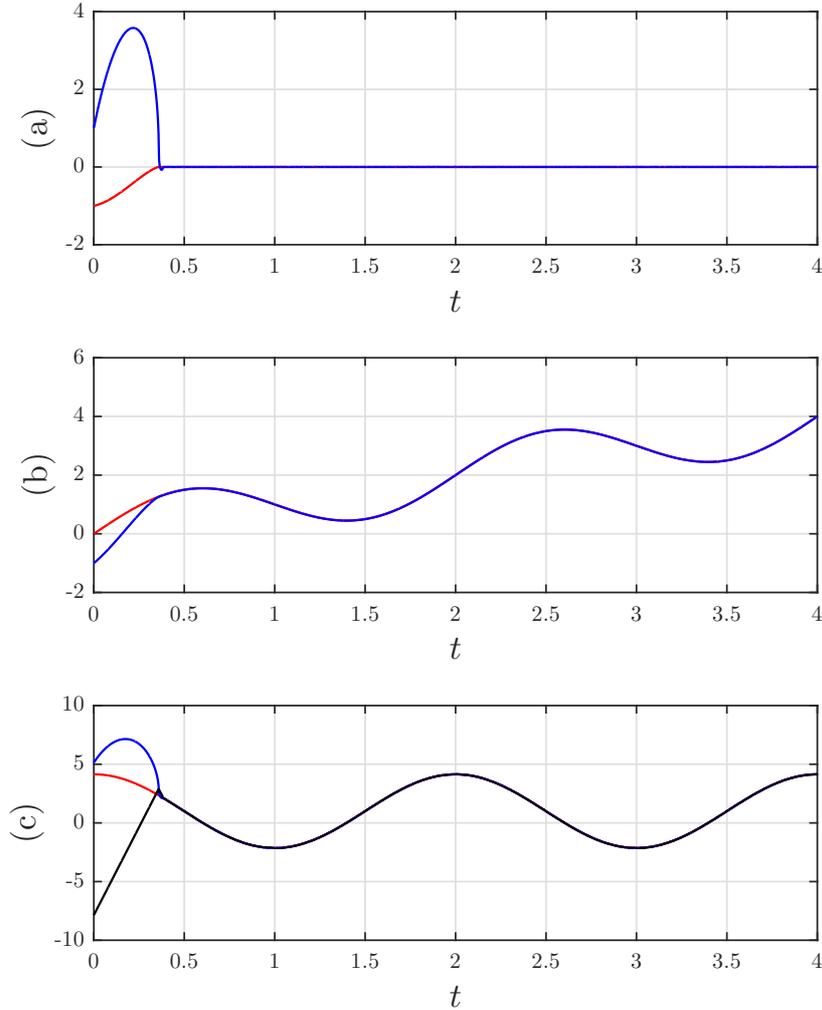


Figura 2.13: Desempenho do diferenciador de primeira ordem (2.44), baseado no algoritmo super-twisting (2.42), estimando a derivada de um sinal base $f_0(t) = \sin(\pi t) + t$: (a) (●) erro de estimação $\sigma = x - f_0(t)$, (●) derivada $\dot{\sigma}$ do erro de estimação; (b) (●) sinal base $f_0(t)$, (●) estado x ; (c) (●) derivada $f_0'(t)$ do sinal base, (●) sinal u fornecido pelo algoritmo super-twisting, (●) estado z .

análises baseadas em funções de Lyapunov foram introduzidas para o algoritmo super-twisting [15, 16], permitindo importantes desenvolvimentos em sua teoria.

O *Variable Gain Super-Twisting Algorithm* (VGSTA) é uma generalização do super-twisting obtida a partir da introdução de ganhos variáveis e inclusão de termos não-homogêneos ao algoritmo [17, 18]. Esta generalização tem como principal vantagem ser capaz de compensar de forma exata uma classe mais abrangente de incertezas/perturbações, permitindo que suas derivadas temporais sejam limitadas por funções contínuas previamente conhecidas. Além disso, com a introdução de termos não-homogêneos lineares ao algoritmo, é possível obter uma convergência mais rápida para condições mais distantes da superfície de deslizamento. A presença destes termos também permite compensar incertezas/perturbações crescentes com as variáveis de estado, garantindo o deslizamento global para sistemas cuja parte linear

não seja exatamente conhecida.

Considere um sistema incerto predominantemente linear descrito por

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(t, x)],$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a ação de controle, e $d(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função absolutamente contínua que engloba as incertezas/perturbações casadas presentes no sistema. Assuma que a matriz de entrada $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($1 \leq m \leq n$) possua posto completo, e que o par (A, B) seja controlável. Neste caso, existe uma matriz $B_\perp \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ de posto completo tal que $B_\perp B = 0$, e a transformação linear de coordenadas de estado definida por

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_\perp \\ (B^T B)^{-1} B^T \end{bmatrix} x,$$

leva o sistema à seguinte forma normal:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + u + \bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2), \end{aligned} \tag{2.46}$$

onde $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^m$, e $\bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(t, x)$. Note que o par $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12})$ é controlável de acordo com o Lema C.2, uma vez que (A, B) é controlável.

Deseja-se projetar a superfície de deslizamento, definida por um conjunto deslizante de segunda ordem $\mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma = \dot{\sigma} = 0\}$, de modo que σ possua grau relativo uniforme e unitário com respeito à lei de controle u , e que a dinâmica nesta superfície seja exponencialmente estável. Para isso, define-se a variável de deslizamento como

$$\sigma = \bar{x}_2 - K\bar{x}_1, \tag{2.47}$$

onde a matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ deve ser escolhida apropriadamente. Note que a variável de deslizamento σ de fato possui grau relativo uniforme e unitário com respeito a u , o que pode ser verificado a partir da dinâmica de \bar{x}_2 em (2.46). Além disso, ao alcançar a superfície de deslizamento, o sistema passa a ser descrito pela seguinte dinâmica de ordem reduzida:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}K)\bar{x}_1, \\ \bar{x}_2 &= K\bar{x}_1, \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{S}_2, \tag{2.48}$$

e portanto a escolha da matriz K pode ser interpretada como um problema de estabilização via realimentação linear de estado, uma vez que o par $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12})$ é controlável. Este problema pode ser resolvido utilizando métodos como alocação de

polos e minimização linear quadrática [1, 26].

Uma vez projetada a superfície de deslizamento, deve-se garantir que as trajetórias do sistema sejam atraídas em tempo finito para esta superfície. Considere a dinâmica da variável de deslizamento, obtida derivando (2.47) e dada por

$$\dot{\sigma} = (\bar{A}_{21} - K\bar{A}_{11}) \bar{x}_1 + (\bar{A}_{22} - K\bar{A}_{12}) \bar{x}_2 + u + \bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2). \quad (2.49)$$

A lei de controle é projetada na forma

$$u = -(\bar{A}_{21} - K\bar{A}_{11}) \bar{x}_1 - (\bar{A}_{22} - K\bar{A}_{12}) \bar{x}_2 + v, \quad (2.50)$$

onde v é uma variável de controle a ser definida posteriormente. Neste caso, considerando (2.46)-(2.47) e (2.49)-(2.50), a dinâmica do sistema pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}K) \bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\sigma, \\ \dot{\sigma} &= v + \bar{d}(t, \bar{x}_1, \sigma + K\bar{x}_1). \end{aligned} \quad (2.51)$$

A partir deste ponto, por simplicidade, será considerado o caso monovariável, com $m = 1$. Os resultados a serem obtidos podem ser diretamente estendidos ao caso multivariável aplicando uma estratégia desacoplada, considerando isoladamente cada uma das componentes do vetor $\sigma \in \mathbb{R}^m$. Sendo assim, a variável de controle $v \in \mathbb{R}$ é definida pelo Variable Gain Super-Twisting Algorithm [17, 18], e dada por

$$v = -k_1(t, x)\phi_1(\sigma) - \int_0^t k_2(\tau, x)\phi_2(\sigma)d\tau, \quad (2.52)$$

com

$$\phi_1(\sigma) = |\sigma|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma) + k_3\sigma, \quad \phi_2(\sigma) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\sigma) + \frac{3}{2}k_3|\sigma|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma) + k_3^2\sigma,$$

e $k_3 > 0$. Note que este algoritmo é uma generalização do super-twisting convencional, que é obtido fazendo os ganhos k_1 e k_2 constantes e $k_3 = 0$. Os termos não-homogêneos obtidos fazendo $k_3 > 0$ permitem ao algoritmo convergir mais rapidamente e compensar incertezas linearmente dependentes de σ , enquanto os ganhos variáveis k_1 e k_2 permitem compensar incertezas/perturbações com derivadas limitadas por funções contínuas conhecidas. Além disso, o termo \bar{d} , que engloba as incertezas/perturbações, é reescrito na forma

$$\bar{d}(t, \bar{x}_1, \sigma + K\bar{x}_1) = \underbrace{[\bar{d}(t, \bar{x}_1, \sigma + K\bar{x}_1) - \bar{d}(t, \bar{x}_1, K\bar{x}_1)]}_{g_1(t, \bar{x}_1, \sigma)} + \underbrace{\bar{d}(t, \bar{x}_1, K\bar{x}_1)}_{g_2(t, \bar{x}_1)}, \quad (2.53)$$

onde $g_1(t, \bar{x}_1, 0) = 0$. Assim, assume-se que as incertezas/perturbações presentes no

sistema satisfaçam as seguintes desigualdades:

$$|g_1(t, \bar{x}_1, \sigma)| \leq \varrho_1(t, x)|\phi_1(\sigma)|, \quad \left| \frac{d}{dt}[g_2(t, \bar{x}_1)] \right| \leq \varrho_2(t, x)|\phi_2(\sigma)|, \quad (2.54)$$

onde $\varrho_1(t, x) \geq 0$ e $\varrho_2(t, x) \geq 0$ são funções contínuas conhecidas. Portanto, considerando (2.51), (2.52) e (2.53), tem-se a seguinte a dinâmica para o sistema em malha-fechada:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}K) \bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\sigma, \\ \dot{\sigma} &= -k_1(t, x)\phi_1(\sigma) + z + g_1(t, \bar{x}_1, \sigma), \\ \dot{z} &= -k_2(t, x)\phi_2(\sigma) + \frac{d}{dt}[g_2(t, \bar{x}_1)], \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde $z = -\int_0^t k_2(\tau, x)\phi_2(\sigma)d\tau + g_2(t, \bar{x}_1)$. O comportamento do sistema em malha-fechada é então enunciado pelo teorema a seguir.

Teorema 2.3 ([17, 18]). *Considere o sistema em malha-fechada (2.55). Suponha que as desigualdades (2.54) sejam satisfeitas para determinadas funções contínuas conhecidas $\varrho_1(t, x) \geq 0$ e $\varrho_2(t, x) \geq 0$. Então, as trajetórias do sistema serão globalmente atraídas em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$, se os ganhos variáveis forem escolhidos como*

$$\begin{aligned} k_1(t, x) &= \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon\varrho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \varrho_1](\beta + 4\epsilon^2) \right\} \\ k_2(t, x) &= \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, x), \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde $\beta > 0$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ são constantes positivas arbitrárias.

Demonstração. O Apêndice A.2 apresenta a análise introduzida em [17, 18], que é baseada em uma função de Lyapunov para o sistema em malha-fechada (2.55), mostrando sua propriedade de convergência global em tempo finito para o modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. \square

O exemplo a seguir ilustra as principais propriedades de um sistema de controle por modos deslizantes de segunda ordem baseado no Variable Gain Super-Twisting Algorithm.

Exemplo 2.7. Considere o sistema descrito por (2.46), com

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Suponha que o termo $\bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ correspondente às incertezas/perturbações presen-

tes no sistema, representado na forma (2.53), satisfaça as desigualdades (2.54) com

$$\varrho_1(t, \bar{x}) = \frac{2}{k_3}, \quad \varrho_2(t, \bar{x}) = \max \left\{ \frac{8}{k_3^2}, 12|\bar{x}_1| + 8 \right\}.$$

A variável de deslizamento é definida por (2.47) com $K = -1$, e portanto a dinâmica na superfície de deslizamento é exponencialmente estável e dada por (2.48). A lei de controle é projetada com base no Variable Gain Super-Twisting Algorithm, e definida por (2.50) e (2.52). Os ganhos variáveis do algoritmo são escolhidos de acordo com (2.56) para constantes $\beta = 30$, $\epsilon = 1$, e $\delta = 0.1$, enquanto o ganho fixo é dado por $k_3 = 1$. A Figura 2.14 apresenta os resultados da simulação do sistema de controle por modos deslizante de segunda ordem projetado neste exemplo, com perturbação

$$\bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = 2\bar{x}_2 + \text{sen}(\pi t), \quad (2.57)$$

representada na forma (2.53) com

$$g_1(t, \bar{x}_1, \sigma) = 2\sigma, \quad g_2(t, \bar{x}_1) = 2K\bar{x}_1 + \text{sen}(\pi t),$$

e portanto

$$\frac{d}{dt}[g_2(t, \bar{x}_1)] = 2K(\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}K)\bar{x}_1 + 2K\bar{A}_{12}\sigma + \pi \cos(\pi t).$$

Observe que o VGSTA permite compensar a perturbação variante no tempo e dependente do estado $\bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$, fazendo o sistema convergir para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ após um intervalo de tempo finito $T \approx 0.3$ s. Durante o deslizamento, as variáveis de estado \bar{x}_1 e \bar{x}_2 convergem exponencialmente para zero. Também é importante destacar que, assim como no super-twisting convencional, o sinal de controle u fornecido pelo VGSTA é contínuo, e portanto menos propenso ao *chattering*.

2.6.3 Super-Twisting Multivariável

Em alguns casos, considerando uma decomposição apropriada, é possível transformar um problema de controle multivariável com m entradas em um problema desacoplado envolvendo m estruturas escalares. Desta forma, é possível aplicar técnicas de controle por modos deslizantes de segunda ordem baseadas no algoritmo super-twisting a sistemas multivariáveis. Entretanto, esta estratégia desacoplada pode falhar se a interação entre as variáveis de estado do sistema for suficientemente forte. Assim, outro importante avanço foi o desenvolvimento de uma estrutura multivariável para o algoritmo super-twisting [19], baseada em um conceito similar ao

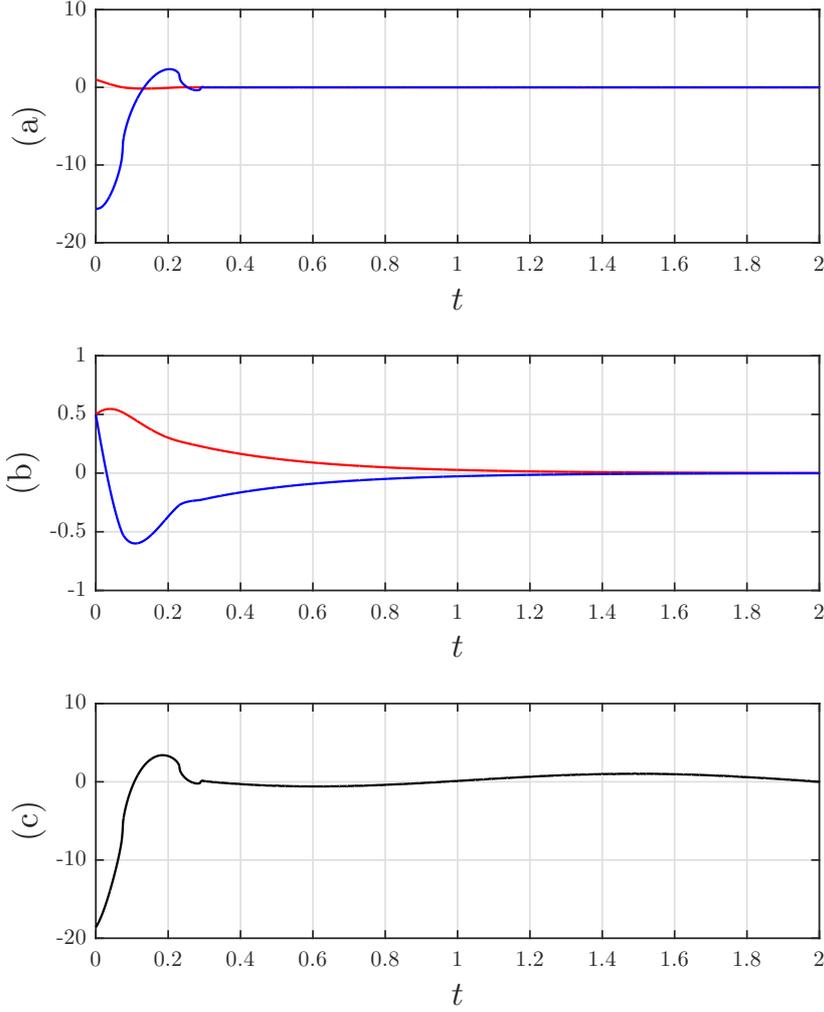


Figura 2.14: Desempenho da lei de controle (2.50), baseada no VGSTA (2.52), aplicada ao sistema do Exemplo 2.7 com perturbação (2.57): (a) (●) variável de deslizamento σ , (●) derivada $\dot{\sigma}$; (b) (●) estado \bar{x}_1 , (●) estado \bar{x}_2 ; (c) (●) ação de controle u .

controle vetorial unitário. Esta estrutura permite ao algoritmo compensar incertezas/perturbações não-desacopladas com respeito às variáveis de estado, e sua análise de estabilidade e convergência é baseada em uma extensão multivariável das funções de Lyapunov introduzidas para o super-twisting convencional [15, 16].

Seja o seguinte sistema a estrutura variável:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \\ \sigma = \sigma(t, x), \end{cases} \quad (2.58)$$

sujeito a uma ação de controle $u \in \mathbb{R}^m$, com estado $x \in \mathbb{R}^n$, e variável de deslizamento $\sigma \in \mathbb{R}^m$. Assuma que as funções $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, e $\sigma(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sejam suaves. Além disso, suponha que o sistema possua grau relativo uniforme e unitário, de modo que a dinâmica da variável de

deslizamento possa ser representada por

$$\dot{\sigma} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad (2.59)$$

com $a(t, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x)$, e $b(t, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ não-singular. A lei de controle é projetada na forma

$$u = [b(t, x)]^{-1} v, \quad (2.60)$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$ é uma variável de controle a ser definida posteriormente. Assim, a dinâmica da variável de deslizamento pode ser reescrita como

$$\dot{\sigma} = a(t, x) + v. \quad (2.61)$$

Note que a matriz de entrada $b(t, x)$ deve ser conhecida para que a lei de controle possa ser implementada. O objetivo é projetar a variável de controle v tal que as trajetórias do sistema sejam atraídas em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$.

É possível projetar o vetor de controle v utilizando uma estratégia desacoplada, definindo cada uma de suas componentes $v_i \in \mathbb{R}$ com base no algoritmo super-twisting convencional, da seguinte forma:

$$v_i = -k_{1i} |\sigma_i|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma_i) + \dot{\xi}_i, \quad \dot{\xi}_i = -k_{2i} \operatorname{sgn}(\sigma_i), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.62)$$

onde $\sigma_i \in \mathbb{R}$ são as componentes do vetor variável de deslizamento $\sigma \in \mathbb{R}^m$. Note que a dinâmica de σ é definida pela equação diferencial (2.61), e portanto tem-se

$$\dot{\sigma}_i = a_i(t, x) + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

onde $a_i(t, x) \in \mathbb{R}$ são as componentes da função vetorial $a(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Logo, para que esta estratégia desacoplada baseada no super-twisting convencional seja implementada com sucesso, as seguintes desigualdades devem ser satisfeitas:

$$|\dot{a}_i(t, x)| \leq C_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.63)$$

para determinadas constantes positivas C_i . Assim, de acordo com o Teorema 2.2, se os ganhos k_{1i} e k_{2i} forem escolhidos apropriadamente, então cada uma das componentes σ_i do vetor variável de deslizamento σ converge em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma_i = \dot{\sigma}_i = 0$. Portanto, é garantido o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ atraindo as trajetórias do sistema em tempo finito.

Considere agora, ao invés da estratégia desacoplada descrita acima, a seguinte estrutura multivariável não-desacoplada baseada no algoritmo super-twisting [19], com variável de controle definida como:

$$v = -k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + \xi, \quad \dot{\xi} = -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma. \quad (2.64)$$

Note que esta estrutura é obtida introduzindo termos lineares não-homogêneos ao algoritmo, e generalizando a função $\text{sgn}(\cdot)$ presente no caso escalar para uma função vetor unitário. O algoritmo super-twisting convencional pode ser recuperado fazendo $m = 1$ e $k_2 = k_4 = 0$. Além disso, assumamos que seja possível escrever $a(t, x)$ na forma

$$a(t, x) = \bar{a}_1(t, x) + \bar{a}_2(t, x), \quad (2.65)$$

onde $\bar{a}_1(t, x)$ e $\bar{a}_2(t, x)$ são funções suaves satisfazendo as desigualdades

$$\|\bar{a}_1(t, x)\| \leq \delta_1 \|\sigma\|, \quad \|\bar{a}_2(t, x)\| \leq \delta_2, \quad (2.66)$$

para determinadas constantes positivas conhecidas $\delta_1, \delta_2 > 0$. Note que esta condição é mais geral que a requerida no caso desacoplado, dada por (2.63), permitindo lidar com incertezas/perturbações não-desacopladas com respeito às variáveis de estado do sistema. Assim, considerando (2.61), (2.64) e (2.65), pode-se verificar que a dinâmica em malha-fechada é descrita por

$$\dot{\sigma} = -k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + z + \bar{a}_1(t, x), \quad \dot{z} = -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma + \bar{a}_2(t, x), \quad (2.67)$$

com $z = \xi + \bar{a}_2(t, x)$. O teorema a seguir apresenta as principais propriedades de estabilidade e convergência do sistema em malha-fechada.

Teorema 2.4 ([19]). *Considere o sistema em malha-fechada (2.67). Suponha que as desigualdades (2.66) sejam satisfeitas para determinadas constantes positivas conhecidas $\delta_1, \delta_2 > 0$. Então, existem intervalos de valores para os ganhos k_1, k_2, k_3 , e k_4 tais que as trajetórias do sistema sejam globalmente atraídas em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$.*

Demonstração. ver [19]. □

Supondo que as desigualdades (2.66) sejam satisfeitas para determinadas constantes positivas conhecidas δ_1 e δ_2 , um intervalo de valores para os ganhos do algoritmo super-twisting multivariável (2.64) que satisfaz o Teorema 2.4 é definido por [19]

$$k_1 > \sqrt{2\delta_2}, \quad k_2 > 2\delta_1, \quad k_3 > \max \{k_3^\Omega, k_3^\Psi\}, \quad k_4 > \max \{k_4^\Omega, k_4^\Psi\}, \quad (2.68)$$

onde

$$\begin{aligned} k_3^\Omega &= 3\delta_2 + \frac{2\delta_2^2}{k_1^2}, & k_3^\Psi &= \frac{\frac{9}{16}(k_1\delta_1)^2}{k_2(k_2 - 2\delta_1)} + \frac{\frac{1}{2}k_1^2\delta_1 - 2k_1^2k_2 + k_2\delta_2}{(k_2 - 2\delta_1)}, \\ k_4^\Omega &= \frac{\beta_1}{\beta_2} + 2k_2^2 + \frac{3}{2}k_2\delta_1, & k_4^\Psi &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2(k_2 - 2\delta_1)} + \frac{2k_2^2\delta_1 + \frac{1}{4}k_2\delta_1^2}{(k_2 - 2\delta_1)}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{9(k_1\delta_1)^2}{16k_2^2} \left(k_2 + \frac{1}{2}\delta_1\right)^2, & \beta_1 &= \left(\frac{3}{2}k_1^2k_2 + 3\delta_2k_2\right)^2, \\ \alpha_2 &= k_2(k_3 + 2k_1^2 - \delta_2) - \left(2k_3 + \frac{1}{2}k_1^2\right)\delta_1 - \frac{9(k_1\delta_1)^2}{16k_2}, & \beta_2 &= k_3k_1^2 - 2\delta_2^2 - 3\delta_2k_1^2. \end{aligned}$$

Assim, ajustando os ganhos do algoritmo de acordo com (2.68), garante-se o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ atraindo, em tempo finito, as trajetórias do sistema em malha-fechada (2.67).

Exemplo 2.8. Considere o sistema a estrutura variável descrito por (2.58), com

$$f(t, x) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{bmatrix}, \quad g(t, x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma(t, x) = x.$$

onde $f(t, x)$ representa as incertezas/perturbações presentes no sistema. Neste caso, a dinâmica da variável de deslizamento é descrita por (2.59), com $a(t, x) = f(t, x)$ e $b(t, x) = g(t, x)$. Note que esta dinâmica possui grau relativo uniforme e unitário, uma vez que $b(t, x)$ é uma matriz não-singular. O objetivo é projetar uma lei de controle na forma (2.60) de modo que as trajetórias do sistema sejam atraídas em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$.

É importante destacar que a estratégia de controle super-twisting desacoplada (2.62) não é capaz de assegurar convergência global neste caso, uma vez que as desigualdades (2.63) não são satisfeitas globalmente. A variável de controle é então projetada com base no algoritmo super-twisting multivariável (2.64). Definindo, de acordo com (2.65), as perturbações

$$\bar{a}_1(t, x) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x, \quad \bar{a}_2(t, x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{bmatrix},$$

pode-se verificar que as desigualdades (2.66) são satisfeitas para constantes positivas

$$\delta_1 = \left\| \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\|, \quad \delta_2 = \pi.$$

Os ganhos do algoritmo super-twisting são então ajustados de acordo com (2.68), e

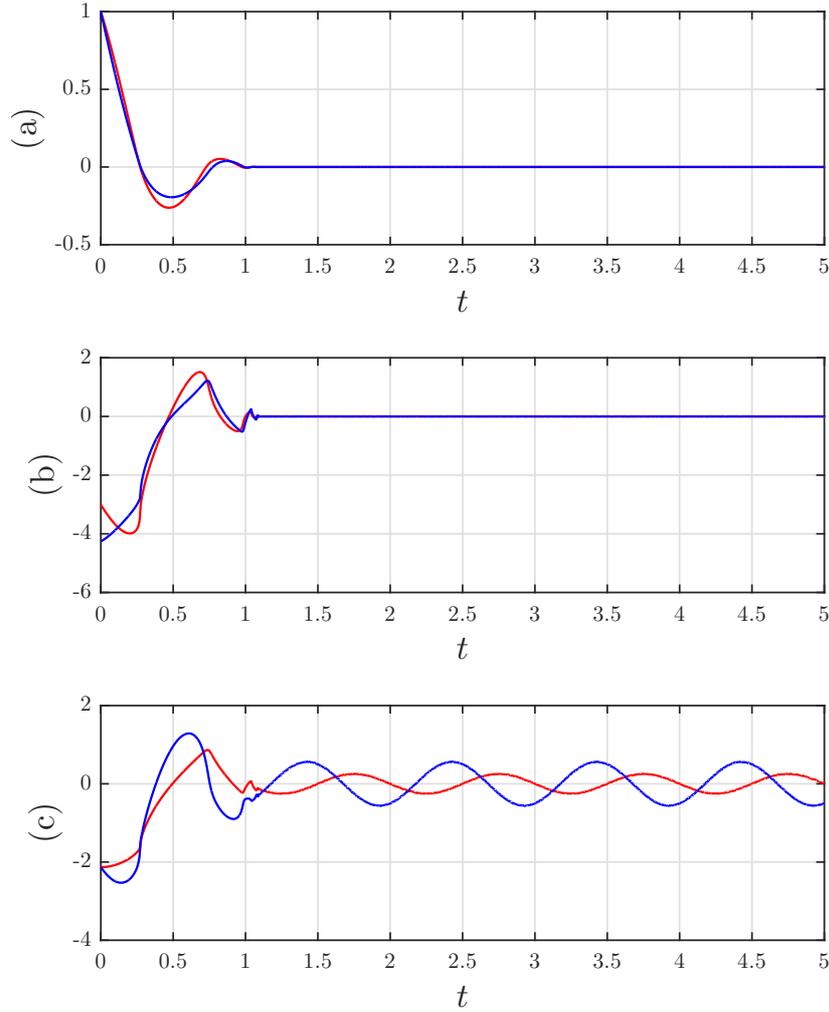


Figura 2.15: Desempenho da lei de controle (2.60), baseada no STA multivariável (2.64), aplicada ao sistema do Exemplo 2.8: (a) (●) variável de deslizamento σ_1 , (●) variável de deslizamento σ_2 ; (b) (●) derivada $\dot{\sigma}_1$, (●) derivada $\dot{\sigma}_2$; (c) (●) ação de controle u_1 , (●) ação de controle u_2 .

escolhidos como $k_1 = 2.5$, $k_2 = 2.2$, $k_3 = 12.6$, e $k_4 = 5.6$. A dinâmica em malha fechada é descrita por (2.67). A Figura 2.15 apresenta os resultados da simulação do sistema de controle por modos deslizantes de segunda ordem, baseado no super-twisting multivariável, projetado neste exemplo. Observe que o STA multivariável permite compensar a perturbação variante no tempo e linearmente dependente do estado, fazendo o sistema convergir para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ após um intervalo de tempo finito $T \approx 1.1$ s. Além disso, assim como no caso escalar, o sinal de controle u fornecido pelo STA multivariável é contínuo, e portanto menos propenso ao *chattering*.

Capítulo 3

Super-Twisting Multivariável para uma Classe de Sistemas com Matriz de Entrada Incerta

Como mostrado na Subseção 2.6.3, um importante avanço para a teoria super-twisting foi o desenvolvimento de uma estrutura multivariável para o algoritmo [19], baseada em um conceito similar ao controle vetorial unitário. Esta estrutura permite ao algoritmo compensar incertezas/perturbações não-desacopladas com respeito às variáveis de estado, e sua análise de estabilidade e convergência é baseada em uma extensão multivariável das funções de Lyapunov introduzidas para o super-twisting convencional [15, 16]. No entanto, embora a estratégia de controle seja capaz de compensar uma classe de incertezas/perturbações dependentes do estado, é necessário o conhecimento completo da matriz de entrada do sistema para que a lei de controle possa ser implementada.

Este capítulo tem como objetivo contornar a necessidade do conhecimento exato da matriz de entrada do sistema para a implementação do super-twisting multivariável [19]. Aqui, o problema será restrito a sistemas com matriz de entrada simétrica e positiva definida. Utilizando uma análise por função de Lyapunov, mostra-se que são necessários apenas limitantes inferior e superior dos autovalores da matriz de entrada para que a lei de controle seja implementada. Além disso, motivado pelo problema do controle do movimento de um satélite, é proposta uma modificação para o STA multivariável baseada em ganhos variáveis. Para isso, é feita uma mudança de escala de tempo de modo que o novo algoritmo com ganhos variáveis possa ser tratado utilizando a mesma análise teórica desenvolvida para ganhos constantes. Assim, a estratégia modificada pode lidar com uma classe maior de incertezas/perturbações, e resultados globais de estabilidade podem ser obtidos para casos em que apenas propriedades locais são garantidas com ganhos constantes.

3.1 Definição do Problema

Seja o seguinte sistema a estrutura variável com grau relativo uniforme e unitário:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \\ \sigma = \sigma(t, x), \end{cases}$$

sujeito a uma ação de controle $u \in \mathbb{R}^m$, com estado $x \in \mathbb{R}^n$, e variável de deslizamento $\sigma \in \mathbb{R}^m$. Assuma que as funções $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, e $\sigma(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sejam suaves. Além disso, suponha que a dinâmica da variável de deslizamento $\sigma \in \mathbb{R}^m$ possa ser representada por

$$\dot{\sigma} = a(t, x) + K_p u,$$

com $a(t, x) = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x)$, e matriz de entrada $K_p = \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ constante e não-singular. Considere que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas:

(A1) A matriz de entrada K_p é simétrica e positiva definida, isto é, $K_p = K_p^T > 0$.

(A2) A perturbação $a(t, x)$ pode ser reescrita na forma

$$a(t, x) = \gamma(t, x) + \phi(t, x),$$

onde $\gamma(t, x)$ e $\phi(t, x)$ são funções suaves satisfazendo as desigualdades

$$\|\gamma(t, x)\| \leq \delta_1 \|\sigma\|, \quad \|\dot{\phi}(t, x)\| \leq \delta_2, \quad (3.1)$$

para determinadas constantes positivas conhecidas $\delta_1, \delta_2 > 0$. É importante destacar que esta hipótese implica $\gamma(t, x) = 0$ para $\sigma = 0$.

(A3) A matriz de entrada K_p é incerta. Entretanto, limitantes superior (λ_M) e inferior (λ_m) para os autovalores de K_p são conhecidos.

O objetivo é determinar uma lei de controle u tal que a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ seja alcançada em tempo finito.

3.2 Super-Twisting Multivariável

Para alcançar esse objetivo, a lei de controle u é projetada com base no algoritmo super-twisting multivariável [19], sendo dada por

$$u = -k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \sigma + \xi, \quad \dot{\xi} = -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma.$$

Como mostrado na Subseção 2.6.3, a principal vantagem deste algoritmo multi-variável em relação ao super-twisting convencional é permitir compensar incertezas/perturbações não-desacopladas dependentes das variáveis de estado do sistema, estendendo a aplicabilidade do controlador à uma classe mais abrangente de sistemas incertos. A dinâmica do sistema em malha-fechada é então descrita por

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= -k_1 K_p \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 K_p \sigma + K_p z + \gamma(t, x), \\ \dot{z} &= -k_3 \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - k_4 \sigma + K_p^{-1} \dot{\phi}(t, x),\end{aligned}\tag{3.2}$$

onde $z = \xi + K_p^{-1} \phi(t, x)$. Note que, ao contrário do considerado na Subseção 2.6.3 [19], a matriz de entrada K_p não é completamente conhecida, e portanto não pode ser cancelada pela lei de controle. Este fato torna o problema mais desafiador, estendendo a aplicabilidade do controlador a uma classe mais abrangente de sistemas. O resultado principal deste capítulo é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 3.1. *Considere o sistema descrito por (3.2), e suponha que as Hipóteses (A1)–(A3) sejam satisfeitas. Se os ganhos k_1 , k_2 , k_3 e k_4 forem escolhidos de acordo com (3.5) e (3.6), então a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ será alcançada em tempo finito para quaisquer condições iniciais.*

Demonstração. Considere a seguinte função candidata, que é uma generalização da função de Lyapunov proposta originalmente para o super-twisting multivariável [19]:

$$\begin{aligned}V(\sigma, z) &= \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M\right) \|\sigma\| + \left(k_4 + \frac{k_2^2}{2} \lambda_M\right) \sigma^T \sigma + z^T K_p z + k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad - k_2 \sigma^T K_p z - k_1 \frac{z^T K_p \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Pode-se verificar que esta função é positiva definida e radialmente ilimitada, já que

$$V(\sigma, z) \geq 2k_3 \|\sigma\| + k_4 \sigma^T \sigma + \frac{1}{2} z^T K_p z + \frac{1}{2} \zeta^T K_p \zeta,$$

onde $\zeta = k_1 \frac{\sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2 \sigma - z$. Note ainda que $V(\sigma, z)$ é contínua em todo ponto, e diferenciável em todo ponto com exceção do subespaço $\mathcal{S} = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^{2m} \mid \sigma = 0\}$.

Derivando (3.3) ao longo das soluções do sistema em $\mathbb{R}^{2m} \setminus \mathcal{S}$, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M\right) \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|} + (2k_4 + k_2^2 \lambda_M) \sigma^T \dot{\sigma} + 2z^T K_p \dot{z} + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T \dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad - k_2 (z^T K_p \dot{\sigma} + \sigma^T K_p \dot{z}) - k_1 \frac{z^T K_p \dot{\sigma}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1 (z^T K_p \sigma)(\sigma^T \dot{\sigma})}{2 \|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} - k_1 \frac{\sigma^T K_p \dot{z}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Então, segue que

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} \left(k_3 + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \right) \sigma^T K_p \sigma - \frac{k_2}{\|\sigma\|} \left(k_3 + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \right) \sigma^T K_p \sigma + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|} \\
& - \frac{k_1 k_2^2 \lambda_M}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p \sigma - k_2^3 \lambda_M \sigma^T K_p \sigma + k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_p z - \frac{k_1 k_4}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p \sigma - k_2 k_4 \sigma^T K_p \sigma \\
& - \frac{3}{2} \frac{k_1^2 k_2 \lambda_M}{\|\sigma\|} \sigma^T K_p \sigma - \frac{3}{2} \frac{k_1 k_2^2 \lambda_M}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p \sigma + \frac{3}{2} \frac{k_1 k_2 \lambda_M}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p z + k_1 k_2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& + k_2^2 \sigma^T K_p^2 z - k_2 z^T K_p^2 z + k_1^2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|} + k_1 k_2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_1 \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\
& - \frac{k_1^2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^3} - \frac{k_1 k_2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p z)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& + \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \frac{\sigma^T \gamma}{\|\sigma\|} + (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \sigma^T \gamma + 2z^T \dot{\phi} \\
& + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 z^T K_p \gamma - k_2 \sigma^T \dot{\phi} - k_1 \frac{z^T K_p \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T \gamma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \\
& - k_1 \frac{\sigma^T \dot{\phi}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -\frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} \left(k_3 + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \right) \sigma^T K_p \sigma - k_2 k_3 \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|} - \frac{2\lambda_M k_1^2 k_2}{\|\sigma\|} \sigma^T K_p \sigma \\
& + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|} - \frac{5}{2} \frac{k_1 k_2^2 \lambda_M}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p \sigma - \frac{k_1 k_4}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p \sigma - k_2^3 \lambda_M \sigma^T K_p \sigma \\
& - k_2 k_4 \sigma^T K_p \sigma + k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_p z + k_2^2 \sigma^T K_p^2 z + \frac{3}{2} \frac{k_1 k_2 \lambda_M}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p z + \frac{2k_1 k_2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p^2 z \\
& - k_2 z^T K_p^2 z + k_1^2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|} - k_1 \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1^2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^3} \\
& - \frac{k_1 k_2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(z^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \frac{\sigma^T \gamma}{\|\sigma\|} \\
& + (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \sigma^T \gamma + 2z^T \dot{\phi} + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\sigma^T \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 z^T K_p \gamma \\
& - k_2 \sigma^T \dot{\phi} - k_1 \frac{z^T K_p \gamma}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \frac{k_1}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T \gamma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} - k_1 \frac{\sigma^T \dot{\phi}}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Além disso, note que a seguinte proposição é válida:

Proposição 3.1. *Seja a matriz de entrada positiva definida, isto é, $K_p = K_p^T > 0$. Então, a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$\frac{(z^T K_p \sigma)(z^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.$$

Demonstração. Seja $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\|\sigma\|}$ um vetor unitário. Então, segue que

$$z^T K_p \bar{\sigma} \leq \|z^T K_p\| = \sqrt{z^T K_p^2 z},$$

onde a desigualdade é consequência da Desigualdade de Cauchy-Schwarz para produtos internos. Portanto, tem-se

$$\frac{(z^T K_p \sigma)(z^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} = \frac{(z^T K_p \bar{\sigma})(z^T K_p \bar{\sigma})}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}.$$

□

Assim, considerando esta proposição e as desigualdades (3.1) da Hipótese (A2), pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{3}{2}}} \left(k_3 + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \right) \sigma^T K_p \sigma - k_2 k_3 \frac{\sigma^T K_p \sigma}{\|\sigma\|} - \frac{2\lambda_M k_1^2 k_2}{\|\sigma\|} \sigma^T K_p \sigma \\ & + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \frac{\sigma^T K_p z}{\|\sigma\|} - \frac{5}{2} \frac{k_1 k_2^2 \lambda_M}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p \sigma - \frac{k_1 k_4}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p \sigma - k_2^3 \lambda_M \sigma^T K_p \sigma \\ & - k_2 k_4 \sigma^T K_p \sigma + k_2^2 \lambda_M \sigma^T K_p z + k_2^2 \sigma^T K_p^2 z + \frac{3}{2} \frac{k_1 k_2 \lambda_M}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p z + \frac{2k_1 k_2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \sigma^T K_p^2 z \\ & - k_2 z^T K_p^2 z + k_1^2 \frac{z^T K_p^2 \sigma}{\|\sigma\|} - \frac{k_1}{2} \frac{z^T K_p^2 z}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} - \frac{k_1^2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^3} \\ & - \frac{k_1 k_2}{2} \frac{(z^T K_p \sigma)(\sigma^T K_p \sigma)}{\|\sigma\|^{\frac{5}{2}}} + \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \delta_1 \|\sigma\| \\ & + (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \delta_1 \|\sigma\|^2 + 2\delta_2 \|z\| + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\delta_1 \|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_2 \lambda_M \delta_1 \|z\| \|\sigma\| \\ & + k_2 \delta_2 \|\sigma\| + k_1 \lambda_M \delta_1 \|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} + \frac{k_1}{2} \lambda_M \frac{\delta_1 \|z\| \|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + k_1 \frac{\delta_2 \|\sigma\|}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{k_1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \lambda_m \left(k_3 + \lambda_M \frac{k_1^2}{2} \right) \|\sigma\| - \lambda_m (k_2 k_3 + 2\lambda_M k_1^2 k_2) \|\sigma\| + \frac{2k_1^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \lambda_M^2 \|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \\ & - \frac{\lambda_m}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{5}{2} k_1 k_2^2 \lambda_M + k_1 k_4 \right) \|\sigma\|^2 - \lambda_m (k_2 k_4 + k_2^3 \lambda_M) \|\sigma\|^2 + 2k_2^2 \lambda_M^2 \|\sigma\| \|z\| \\ & + \frac{4k_1 k_2 \lambda_M^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \|\sigma\| \|z\| - k_2 \lambda_m^2 \|z\|^2 - \frac{k_1}{2} \lambda_m^2 \frac{\|z\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} + \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \delta_1 \|\sigma\| \\ & + (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \delta_1 \|\sigma\|^2 + \frac{2\delta_2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \frac{\delta_1 \|\sigma\|^2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \\ & + k_2 \lambda_M \delta_1 \|z\| \|\sigma\| + k_2 \delta_2 \|\sigma\| + \frac{3}{2} k_1 \lambda_M \delta_1 \|z\| \|\sigma\|^{\frac{1}{2}} + \frac{k_1 \delta_2}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \|\sigma\|. \end{aligned}$$

Definindo $\chi = \left[\|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \quad \|\sigma\| \quad \|z\| \right]^T$, tem-se

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} \chi^T \Omega \chi - \chi^T \Psi \chi, \quad (3.4)$$

onde

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & \Omega_{13} \\ 0 & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{13} & \Omega_{23} & \Omega_{33} \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0 & \Psi_{13} \\ 0 & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ \Psi_{13} & \Psi_{23} & \Psi_{33} \end{bmatrix},$$

com elementos dados por

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \lambda_m \left(k_1 k_3 + \frac{k_1^3}{2} \lambda_M \right) - k_1 \delta_2, & \Omega_{13} &= -k_1^2 \lambda_M^2 - \delta_2, \\ \Omega_{22} &= \lambda_m \left(k_1 k_4 + \frac{5}{2} k_1 k_2^2 \lambda_M \right) - \frac{3}{2} k_1 k_2 \lambda_M \delta_1, & \Omega_{23} &= -2k_1 k_2 \lambda_M^2, \\ \Omega_{33} &= \frac{k_1}{2} \lambda_m^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= \lambda_m \left(k_2 k_3 + 2k_1^2 k_2 \lambda_M \right) - \left(2k_3 + \frac{k_1^2}{2} \lambda_M \right) \delta_1 - k_2 \delta_2, \\ \Psi_{22} &= \lambda_m \left(k_2 k_4 + k_2^3 \lambda_M \right) - (k_2^2 \lambda_M + 2k_4) \delta_1, & \Psi_{13} &= -\frac{3}{4} k_1 \lambda_M \delta_1, \\ \Psi_{23} &= -k_2^2 \lambda_M^2 - \frac{k_2}{2} \lambda_M \delta_1, & \Psi_{33} &= k_2 \lambda_m^2. \end{aligned}$$

Note que esta demonstração segue de perto os passos da prova apresentada em [19]. Entretanto, será considerada uma abordagem diferente para obter as condições sobre os ganhos do controlador, visando assegurar que $\Omega = \Omega^T > 0$ e $\Psi = \Psi^T > 0$. A ideia é selecionar os ganhos de modo que os elementos diagonais e os determinantes de ambas as matrizes sejam positivos. A intenção é obter relações mais diretas. Assim, pode-se verificar que $\Omega = \Omega^T > 0$ se

$$\begin{aligned} k_1 &> \sqrt{\frac{2\delta_2}{\lambda_M \lambda_m}}, & k_2 &> \frac{3}{5} \frac{\delta_1}{\lambda_m}, \\ k_3 &> 4k_1^2 \frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3} + 8 \frac{\lambda_M^2}{\lambda_m^3} \delta_2 + 4 \frac{\delta_2^2}{k_1^2 \lambda_m^3}, & k_4 &> 16k_2^2 \frac{\lambda_M^4}{\lambda_m^3}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

e que $\Psi = \Psi^T > 0$ se

$$\begin{aligned} k_1 &> 0, & k_2 &> \max \left\{ 2 \frac{\delta_1}{\lambda_m}, \delta_1 \sqrt{\frac{9}{14} \frac{\lambda_M}{\lambda_m^3}} \right\}, \\ k_3 &> \frac{k_2 \delta_2}{k_2 \lambda_m - 2\delta_1}, & k_4 &> \frac{3k_2^2 \lambda_M^3 \delta_1 + \frac{1}{2} k_2 \lambda_M^2 \delta_1^2 + k_2^3 \lambda_M (2\lambda_M^3 - \lambda_m^3)}{\lambda_m^2 (k_2 \lambda_m - 2\delta_1)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Considerando que os ganhos são escolhidos de modo a satisfazer (3.5) e (3.6), segue de (3.4) que

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(\Omega)}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}}\|\chi\|^2 - \lambda_{\min}(\Psi)\|\chi\|^2, \quad (3.7)$$

onde $\lambda_{\min}(\Omega), \lambda_{\min}(\Psi) > 0$ são os autovalores mínimos das matrizes simétricas e positivas definidas Ω e Ψ . Além disso, é possível reescrever a função (3.3) na forma

$$V(\sigma, z) = \bar{\chi}^T P \bar{\chi}, \quad P = \begin{bmatrix} (2k_3 + \frac{1}{2}k_1^2\lambda_M) I & \frac{1}{2}k_1k_2\lambda_M I & -\frac{1}{2}k_1K_p \\ \frac{1}{2}k_1k_2\lambda_M I & (k_4 + \frac{1}{2}k_2^2\lambda_M) I & -\frac{1}{2}k_2K_p \\ -\frac{1}{2}k_1K_p & -\frac{1}{2}k_2K_p & K_p \end{bmatrix},$$

com $\bar{\chi} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^T}{\|\sigma\|^{\frac{1}{2}}} & \sigma^T & z^T \end{bmatrix}^T$ e $P = P^T > 0$. Logo, tem-se

$$\lambda_{\min}(P)\|\bar{\chi}\|^2 \leq V \leq \lambda_{\max}(P)\|\bar{\chi}\|^2,$$

onde $\|\bar{\chi}\| = \|\chi\|$ e $\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P) > 0$ são respectivamente os autovalores mínimo e máximo da matriz P . Então, de (3.7) e $\|\sigma\|^{\frac{1}{2}} \leq \|\chi\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}$, segue que

$$\dot{V} \leq -\alpha_1 V^{\frac{1}{2}} - \alpha_2 V, \quad (3.8)$$

com

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}\lambda_{\min}(\Omega)}{\lambda_{\max}(P)}, \quad \alpha_2 = \frac{\lambda_{\min}(\Psi)}{\lambda_{\max}(P)},$$

para todo $(\sigma(t), z(t)) \in \mathbb{R}^{2m} \setminus \mathcal{S}$.

Portanto, de (3.8) e do fato de que as trajetórias do sistema não podem permanecer em $\mathcal{S} \setminus \{0\}$, segue que $V(\sigma, z)$ é uma função continuamente decrescente. Logo, o Teorema de Lyapunov generalizado em [37, Proposição 14.1] para inclusões diferenciais pode ser utilizado, como em [18, 19], para concluir que o ponto de equilíbrio na origem $(\sigma, z) = 0$ e a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ são alcançados em tempo finito partindo de qualquer condição inicial. Resolvendo a equação de comparação

$$\dot{v} = -\alpha_1 v^{\frac{1}{2}} - \alpha_2 v, \quad v(t_0) = v_0 \geq 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

verifica-se que V converge para zero após um intervalo de tempo finito T_f tal que

$$T_f \leq \frac{2}{\alpha_2} \ln \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} V^{\frac{1}{2}}(\sigma(t_0), z(t_0)) \right).$$

Note que $V(\sigma, z) = 0$ implica $z = \sigma = \dot{\sigma} = 0$. Assim, as trajetórias do sistema são atraídas em tempo finito para a superfície de deslizamento $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. \square

3.3 Estudo de Caso: Estabilização do Movimento de um Satélite

Considere o problema de estabilizar o movimento de um satélite controlado por propulsores, com dinâmica descrita pelas equações de corpo rígido não-lineares apresentadas em [19, 38]. O sistema é dado por

$$\dot{w} = J^{-1}(T + \bar{\gamma} - w \times Jw),$$

onde $T \in \mathbb{R}^3$ é o torque fornecido pelos propulsores, $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é uma matriz de inércia simétrica e positiva definida, $w \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular inercial do satélite, $\bar{\gamma} = \|w\|Jw$ é uma perturbação não-linear dependente do estado, e o símbolo \times denota o produto vetorial. Suponha que a matriz de inércia seja equivalente a de um satélite de pequeno porte, e dada por [39]

$$J = J_n + \kappa D, \quad (3.9)$$

onde

$$J_n = \begin{bmatrix} 2.7388 & -0.0031 & -0.0269 \\ -0.0031 & 2.7924 & 0.0136 \\ -0.0269 & 0.0136 & 2.1741 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \quad D = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.04 & 0.04 \\ 0.04 & 0.05 & 0.04 \\ 0.04 & 0.04 & 0.05 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

O termo J_n é a parcela nominal, e κD é a parcela incerta da matriz de inércia. A constante κ possui valor real igual a zero, porém a única informação disponível para fins de controle é que $\kappa \in [-3, 3]$. Assim, variando κ no intervalo considerado, obtém-se os limitantes $\lambda_m = 0.3$ e $\lambda_M = 0.5$ para os autovalores da matriz J^{-1} .

O objetivo é determinar uma lei de controle com base no algoritmo super-twisting multivariável de modo que a superfície de deslizamento $w = \dot{w} = 0$ seja alcançada em tempo finito, estabilizando o movimento do satélite. O torque é então definido como

$$T = -k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + \xi, \quad \dot{\xi} = -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w. \quad (3.10)$$

Neste caso, a dinâmica do sistema em malha-fechada é descrita por

$$\begin{aligned} \dot{w} &= -k_1 J^{-1} \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 J^{-1} w + J^{-1} z + \gamma(t, w), \\ \dot{z} &= -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $\gamma(t, w) = J^{-1}(\bar{\gamma} - w \times Jw)$ e $z = \xi$. Note que a Hipótese (A2) não é globalmente satisfeita, uma vez que $\gamma(t, w)$ depende quadraticamente da norma de w . No

entanto, para o caso local em que $\|w\| \leq 1$, tem-se

$$\|\gamma(t, w)\| \leq \left(1 + \frac{\lambda_M}{\lambda_m}\right) \|w\|^2 \leq \left(1 + \frac{\lambda_M}{\lambda_m}\right) \|w\|, \quad \|w\| \leq 1, \quad (3.12)$$

onde λ_m é o autovalor mínimo de J^{-1} . Logo, verifica-se que a Hipótese (A2) é satisfeita localmente em $\|w\| \leq 1$ para constantes positivas

$$\delta_1 = 1 + \frac{\lambda_M}{\lambda_m}, \quad \delta_2 = 0.$$

Além disso, de (3.3) e do fato de que V é uma função continuamente decrescente no tempo, segue que $2k_3\|w(t)\| \leq V(w, z) \leq V(w(t_0), z(t_0))$, $\forall t \geq t_0$. Portanto, a Hipótese (A2) será válida $\forall t \geq t_0$ se as condições iniciais $w(t_0)$ e $z(t_0)$ forem suficientemente pequenas e tais que $V(w_0, z_0) \leq 2k_3$. Assim, os seguintes ganhos são escolhidos de acordo com (3.5) e (3.6): $k_1 = 3$, $k_2 = 22$, $k_3 = 84$, e $k_4 = 18000$.

A Figura 3.1 apresenta os resultados de simulação do sistema de controle super-twisting multivariável projetado, considerando condições iniciais $w(0) = [-0.002 \quad -0.007 \quad 0.03]^T$ rad/s, e $z(0) = \xi(0) = 0$. Observe que o sinal de controle contínuo fornecido pelo torque permite a convergência em tempo finito da velocidade angular para zero, apesar da perturbação não-linear dependente do estado $\gamma(t, w)$ e da incerteza na matriz de inércia J . Entretanto, neste caso particular, o resultado obtido é válido apenas localmente no espaço de estado. Isso é ilustrado pela Figura 3.2, que mostra que o sistema se torna instável para condições iniciais mais distantes do equilíbrio e dadas por $w(0) = [-1 \quad -3.5 \quad 15]^T$ rad/s e $z(0) = \xi(0) = 0$.

3.3.1 Mudança de Escala de Tempo para Resultado Global

Visando obter estabilização global do movimento do satélite, considere um algoritmo super-twisting multivariável modificado, com lei de controle dada por

$$T = (1 + \|w\|) \left[-k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + \xi \right], \quad \dot{\xi} = (1 + \|w\|) \left[-k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w \right].$$

Neste caso, a dinâmica do sistema em malha-fechada é descrita por

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (1 + \|w\|) J^{-1} \left[-k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + z \right] + \gamma(t, w), \\ \dot{z} &= (1 + \|w\|) \left[-k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w \right]. \end{aligned}$$

onde $\gamma(t, w) = J^{-1}(\bar{\gamma} - w \times Jw)$ e $z = \xi$. Assim, de modo a simplificar a análise de estabilidade do sistema modificado, é considerada uma mudança de escala de tempo

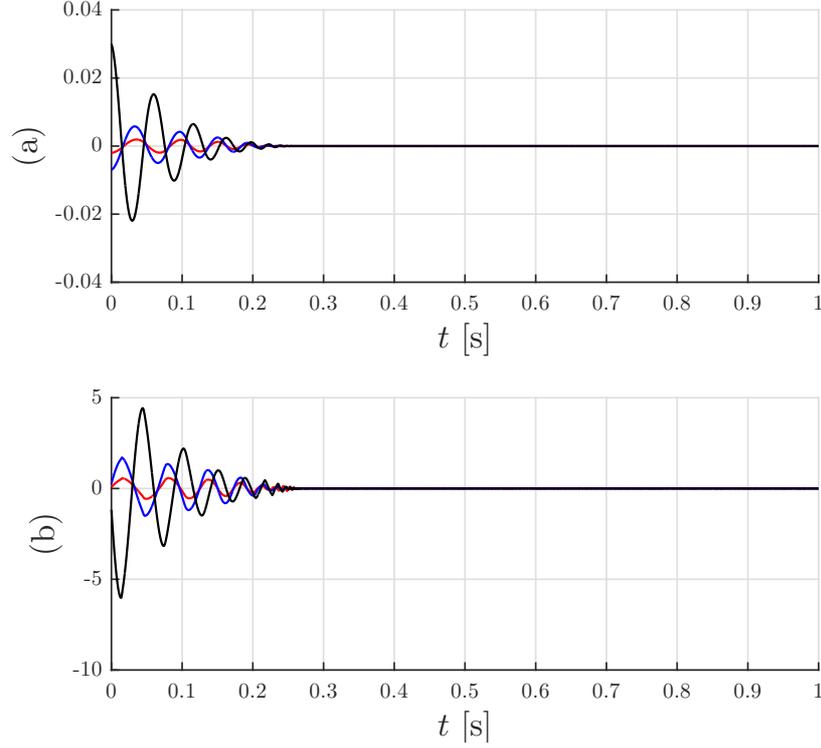


Figura 3.1: Desempenho do super-twisting multivariável no controle de um satélite com matriz de inércia incerta e $w(0) = [-0.002 \ -0.007 \ 0.03]^T \text{rad/s}$: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 ; (b) componentes do vetor de torque [N · m] (●) T_1 , (●) T_2 , (●) T_3 .

dependente do estado [40, Seção IV] definida por

$$dt = \frac{d\tau}{1 + \|w\|}, \quad \tau(t_0) = t_0$$

A dinâmica em malha-fechada na nova escala de tempo é descrita por

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= -k_1 J^{-1} \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 J^{-1} w + J^{-1} z + \gamma_\tau(t(\tau), w), \\ \frac{dz}{d\tau} &= -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w, \end{aligned}$$

onde $\gamma_\tau(t(\tau), w) = \frac{\gamma(t(\tau), w)}{1 + \|w\|}$. Note que a perturbação na nova escala de tempo é limitada linearmente pela norma do vetor velocidade angular inercial, uma vez que

$$\|\gamma_\tau(t(\tau), w)\| \leq \left(1 + \frac{\lambda_M}{\lambda_m}\right) \frac{\|w\|^2}{(1 + \|w\|)} \leq \left(1 + \frac{\lambda_M}{\lambda_m}\right) \|w\|.$$

Logo, a Hipótese (A2) é satisfeita globalmente no espaço de estado para

$$\delta_1 = 1 + \frac{\lambda_M}{\lambda_m}, \quad \delta_2 = 0.$$

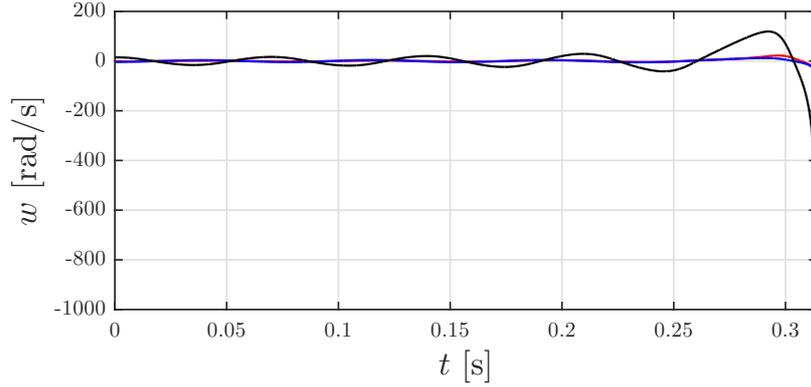


Figura 3.2: Desempenho do super-twisting multivariável no controle de um satélite com matriz de inércia incerta e $w(0) = [-1 \ -3.5 \ 15]^T$ rad/s: componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 .

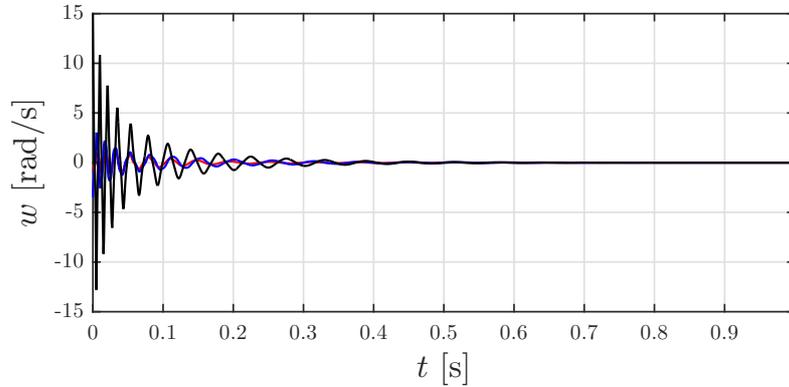


Figura 3.3: Desempenho do super-twisting multivariável modificado no controle de um satélite com matriz de inércia incerta e $w(0) = [-1 \ -3.5 \ 15]^T$ rad/s: componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 .

O resultado de estabilidade na nova escala de tempo é equivalente ao da escala de tempo original se a nova variável de tempo τ crescer ilimitadamente com o tempo [41, p. 149] [40]. Isso acontecerá se $\|w(t)\|$ for uniformemente limitada por alguma constante $\forall t \geq t_0$, o que é verdade para qualquer condição inicial como consequência do fato de que \dot{V} é negativa definida, como demonstrado na análise anterior. Portanto, considerando os mesmos parâmetros e ganhos do algoritmo super-twisting multivariável projetado anteriormente, o controlador modificado fornece convergência global do vetor velocidade angular inercial w para zero para qualquer condição inicial.

A Figura 3.3 apresenta os resultados de simulação do sistema de controle super-twisting multivariável modificado projetado nesta subseção, considerando condições iniciais $w(0) = [-1 \ -3.5 \ 15]^T$ rad/s e $z(0) = \xi(0) = 0$. Observe que a nova abordagem fornece convergência em tempo finito do vetor velocidade angular inercial w para zero até mesmo para condições iniciais mais distantes da origem.

Capítulo 4

Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída

Como mostrado na Subseção 2.6.1, o super-twisting é um algoritmo de controle por modos deslizantes de segunda ordem capaz de atenuar o indesejável efeito do *chattering* em sistemas incertos com grau relativo unitário. Este controlador tem como principal vantagem não necessitar de nenhuma informação sobre a derivada temporal da variável de deslizamento para a implementação da lei de controle. Recentemente, a introdução de análises baseadas em funções de Lyapunov [15, 16] permitiu o desenvolvimento de generalizações para o super-twisting baseadas na utilização de ganhos variáveis [17, 18] e na introdução de uma estrutura multivariável [19], consideradas anteriormente nas Subseções 2.6.2 e 2.6.3. No entanto, apesar de serem capazes de compensar uma classe bastante abrangente de incertezas/perturbações variantes no tempo e dependentes do estado, estas abordagens não apresentavam uma estratégia de controle por realimentação de saída.

O objetivo deste capítulo é propor uma estratégia de controle por realimentação de saída baseada em uma extensão multivariável do algoritmo variable gain super-twisting para sistemas incertos com grau relativo unitário na presença de uma classe bastante geral de perturbações não-lineares dependentes do estado. Até onde se sabe, este é o primeiro controlador por realimentação de saída baseado em um algoritmo super-twisting multivariável não-desacoplado capaz de garantir propriedades uniformes globais de estabilidade assintótica com convergência em tempo finito. Para alcançar uma solução por realimentação de saída, um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida é estimado utilizando filtros de aproximação de primeira ordem (*First Order Approximation Filters* – FOAFs) [22, 42]. A efetividade da estratégia de controle proposta, bem como a vantagem de se considerar um algoritmo super-twisting multivariável com ganhos variáveis em relação ao seu correspondente com ganhos fixos, são ilustradas em dois estudos de caso: a estabilização do movimento de um satélite, e o controle de uma cadeia de trailers.

4.1 Preliminares

Neste capítulo, todos os κ 's denotam constantes positivas apropriadas. Funções de classes \mathcal{K} , \mathcal{K}_∞ , e \mathcal{KL} são definidas como de costume [43]. $\|\cdot\|$ representa a norma Euclidiana para vetores, ou a norma induzida para matrizes. Aqui, a definição de Filippov para a solução de equações diferenciais descontínuas é assumida [27]. A margem de estabilidade de uma matriz de transferência $p \times m$ dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ é definida por

$$\gamma_0 := \min_j \{-\operatorname{Re}(p_j)\},$$

onde p_j são os polos de $G(s)$. O sistema com matriz de transferência $G(s)$ é BIBO estável se e somente se $\gamma_0 > 0$. A margem de estabilidade de uma matriz real A é definida por

$$\lambda_0 := \min_j \{-\operatorname{Re}(\lambda_j)\},$$

onde λ_j são os autovalores de A . Se $\lambda_0 > 0$, então A é Hurwitz.

4.2 Definição do Problema

Considere um sistema não-linear incerto descrito por

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(x, t)], \quad y = Cx, \quad (4.1)$$

onde $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}^m$ é a saída, e $d(x, t) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função absolutamente contínua não-linear que engloba as incertezas/perturbações casadas presentes no sistema. Assuma que apenas a saída esteja disponível para a implementação da lei de controle. A perturbação não precisa ser uniformemente limitada a priori. Entretanto, $d(x, t)$ e seu gradiente devem ser limitados em norma por funções contínuas conhecidas, de modo a satisfazer as Hipóteses (A6) a serem definidas posteriormente. Além disso, as matrizes A , B e C são incertas e pertencentes a um conjunto compacto, de modo que os limitantes necessários para suas incertezas são conhecidos.

Suponha que as seguintes hipóteses básicas sejam satisfeitas:

- (A1) A matriz de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ é de fase mínima e possui posto completo.
- (A2) O sistema é controlável e observável.
- (A3) $G(s)$ possui grau relativo uniforme e unitário, isto é, $\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = K_p = CB$, onde $K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é não-singular.

O objetivo é determinar uma lei de controle u por realimentação de saída baseada em uma extensão multivariável do algoritmo variable gain super-twisting de modo que a saída y rastreie em tempo finito um sinal de referência $y_m \in \mathbb{R}^m$ gerado pelo seguinte modelo de referência:

$$\dot{y}_m = A_m y_m + K_m r, \quad (4.2)$$

onde A_m é Hurwitz, e $r \in \mathbb{R}^m$ é uma entrada de referência limitada e contínua por partes. Em outras palavras, definindo o erro de rastreamento de saída como

$$e := y - y_m, \quad (4.3)$$

pretende-se projetar u tal que as trajetórias do sistema sejam atraídas globalmente e em tempo finito para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$.

Considerando a Hipótese (A2), pode-se mostrar que as matrizes B e C possuem posto completo. Neste caso, é possível obter uma matriz $B_\perp \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ de posto completo tal que $B_\perp B = 0$. Logo, como o produto $K_p = CB$ é não-singular de acordo com a Hipótese (A3), tem-se que a transformação linear de coordenadas de estado definida por

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_\perp \\ C \end{bmatrix} x,$$

leva o sistema (4.1) à seguinte forma normal:

$$\dot{\eta} = A_{11}\eta + A_{12}y, \quad (4.4a)$$

$$\dot{y} = A_{21}\eta + A_{22}y + K_p[u + d(x, t)], \quad (4.4b)$$

onde a dinâmica dos zeros $\dot{\eta} = A_{11}\eta$ é estável, considerando as Hipóteses (A1) e (A2). Note que $\eta \in \mathbb{R}^{n-m}$ é uma variável de estado não-medida, ao contrário do considerado em [17, 18]. A dinâmica do erro de rastreamento de saída é descrita por

$$\dot{e} = K_p u + f(\eta, e, t), \quad (4.5)$$

onde o termo

$$f(\eta, e, t) = A_{21}\eta + A_{22}e + K_p d(\eta, e, t) + A_{22}y_m - \dot{y}_m, \quad (4.6)$$

com $d(\eta, e, t) = d(x, t)$, é considerado como uma perturbação não-linear dependente do estado. Esta perturbação pode ser reescrita como

$$f(\eta, e, t) = \underbrace{[f(\eta, e, t) - f(\eta, 0, t)]}_{g_1(\eta, e, t)} + \underbrace{f(\eta, 0, t)}_{g_2(\eta, t)} = g_1(\eta, e, t) + g_2(\eta, t),$$

onde

$$g_1(\eta, e, t) = A_{22}e + K_p \{d(\eta, e, t) - d(\eta, 0, t)\}, \quad (4.7a)$$

$$g_2(\eta, t) = A_{21}\eta + K_p d(\eta, 0, t) + A_{22}y_m - \dot{y}_m, \quad (4.7b)$$

e $g_1(\eta, 0, t) = 0$. Assim, para projetar uma estratégia de controle com base no algoritmo variable gain super-twisting, é necessário se ter disponíveis limitantes superiores para as normas da perturbação $g_1(\eta, e, t)$ e da derivada temporal

$$\frac{d}{dt} [g_2(\eta, t)] = A_{21}A_{11}\eta + A_{21}A_{12}(e + y_m) + K_p \frac{d}{dt} [d(\eta, 0, t)] + A_{22}\dot{y}_m - \ddot{y}_m. \quad (4.8)$$

Entretanto, estes limitantes geralmente dependem da norma da variável de estado não-medida η . Portanto, é necessário obter um limitante superior para a norma de η , o que pode ser feito utilizando filtros de aproximação de primeira ordem [42].

4.3 Filtros de Aproximação de Primeira Ordem

Para estimar um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida de um sistema linear e invariante no tempo, é possível utilizar filtros de aproximação de primeira ordem. Estes filtros podem ser projetados de acordo com o lema a seguir, ligeiramente modificado em relação ao apresentado em [42].

Lema 4.1 ([42]). *Considere um sistema linear e invariante no tempo descrito por*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx,$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada, e $y \in \mathbb{R}^p$ é a saída. Assuma que a matriz A seja Hurwitz. Defina $\gamma_0 > 0$ como a margem de estabilidade da matriz de transferência $H(s) := C(sI - A)^{-1}B$ e $\gamma := \gamma_0 - \delta_0 > 0$, onde δ_0 é uma constante positiva arbitrária menor que γ_0 . Então, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que a resposta ao impulso $h(t)$ satisfaça

$$\|h(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0,$$

e que as seguintes desigualdades sejam válidas, $\forall t \geq t_0 \geq 0$:

$$\|h(t) * u(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t} * \|u(t)\|, \quad \|x(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t} * \|u(t)\| + c_2 e^{-(\lambda_0 - \delta_0)(t - t_0)} \|x(t_0)\|.$$

onde $\lambda_0 > 0$ é a margem de estabilidade da matriz A . Note que $\gamma_0 = \lambda_0$ para realizações mínimas $\{A, B, C\}$.

Demonstração. ver [42, Lema 2]. □

O objetivo é determinar uma aproximação de primeira ordem de um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida η , com dinâmica dada por (4.4a). Neste caso, é necessário ter algum conhecimento sobre a margem de estabilidade da matriz A_{11} , que é Hurwitz uma vez que $G(s)$ é de fase mínima e o sistema é controlável e observável. Assim, é feita a seguinte hipótese:

(A4) Um limitante inferior $\lambda > 0$ para a margem de estabilidade de A_{11} é conhecido.

Logo, um limitante superior para a norma de η pode ser obtido pelo seguinte FOAF:

$$\dot{\hat{\eta}} = -\lambda_f \hat{\eta} + c_f \|y\|, \quad (4.9)$$

com constantes apropriadas $c_f, \lambda_f > 0$, que podem ser computadas utilizando os métodos de otimização descritos em [22, 44]. Portanto, considerando o Lema 4.1, é possível obter a desigualdade

$$\|\eta(t)\| \leq \hat{\eta}(t) + |\pi_\eta(t)|, \quad |\pi_\eta(t)| = c_\eta \|x_\eta(t_0)\| e^{-\lambda_\eta(t-t_0)}, \quad (4.10)$$

para determinadas constantes $c_\eta, \lambda_\eta > 0$, e $x_\eta = [\eta^T \ \hat{\eta}]^T$.

4.4 Variable Gain Super-Twisting Monovariável por Realimentação de Saída

Considere primeiramente o caso SISO, em que $m = 1$. Suponha que a seguinte hipótese adicional seja satisfeita:

(A5a) O sinal do ganho de alta frequência $k_p = CB$ é conhecido e, sem perda de generalidade, suposto positivo. Caso k_p seja negativo, deve-se inverter o sinal da lei de controle escalar $u \in \mathbb{R}$ e substituir k_p por $|k_p|$.

Neste caso, a lei de controle u é definida com base no algoritmo variable gain super-twisting proposto em [17, 18], e dada por

$$u = -k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) - \int_{t_0}^t k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e)dt, \quad (4.11)$$

onde

$$\phi_1(e) = |e|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e) + k_3 e, \quad \phi_2(e) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(e) + \frac{3}{2} k_3 |e|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e) + k_3^2 e, \quad (4.12)$$

com $k_3 > 0$. Note que, como mostrado na Subseção 2.6.2, este algoritmo é uma generalização para ganhos variáveis do super-twisting convencional, que é obtido fazendo os ganhos k_1 e k_2 constantes, e k_3 igual a zero.

Visando propor uma estratégia de controle por realimentação de saída, deve-se levar em consideração a presença do FOAF (4.9) no sistema em malha-fechada. Assim, é feita a seguinte hipótese com respeito à perturbação (4.6):

(A6a) A perturbação (4.6) satisfaz as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} |g_1(\eta, e, t)| &\leq \{\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_1(t)|\} |\phi_1(e)|, \\ \left| \frac{d}{dt}[g_2(\eta, t)] \right| &\leq \{\varrho_2(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_2(t)|\} |\phi_2(e)|, \end{aligned} \quad (4.13)$$

para determinadas funções contínuas conhecidas $\varrho_1(t, \hat{\eta}, e), \varrho_2(t, \hat{\eta}, e) \geq 0$, e termos exponencialmente decrescentes $|\pi_1(t)| = \gamma_1 (\|x_\eta(t_0)\|) e^{-\lambda_1(t-t_0)}$, e $|\pi_2(t)| = \gamma_2 (\|x_\eta(t_0)\|) e^{-\lambda_2(t-t_0)}$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$.

Note que esta hipótese é ligeiramente diferente daquela feita em [17, 18], devido à presença dos termos exponencialmente decrescentes $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$. Estes termos são introduzidos com o objetivo de representar perturbações relacionadas a $|\pi_\eta(t)|$ na desigualdade (4.10). Portanto, considerando as equações dinâmicas do erro de rastreamento (4.5) e da variável de estado não-medida (4.4a) do sistema (4.1), em conjunto com o filtro de aproximação de primeira ordem (4.9) e a lei de controle variable gain super-twisting (4.11), verifica-se que a dinâmica do sistema em malha-fechada é descrita por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}} &= -\lambda_f \hat{\eta} + c_f |e + y_m|, \\ \dot{\eta} &= A_{11} \eta + A_{12} [e + y_m], \\ \dot{e} &= -k_p k_1(t, \hat{\eta}, e) \phi_1(e) + z + g_1(\eta, e, t), \\ \dot{z} &= -k_p k_2(t, \hat{\eta}, e) \phi_2(e) + \frac{d}{dt}[g_2(\eta, t)], \end{aligned} \quad (4.14)$$

com $z = -k_p \int_{t_0}^t k_2(t, \hat{\eta}, e) \phi_2(e) dt + g_2(\eta, t)$.

Teorema 4.1. *Considere o sistema em malha-fechada (4.14). Assuma que as Hipóteses (A1)–(A6a) sejam satisfeitas. Então, as trajetórias do sistema serão atraídas globalmente e em tempo finito para a superfície de deslizamento $\dot{e} = e = 0$ se os ganhos variáveis forem escolhidos como*

$$\begin{aligned} k_1(t, \hat{\eta}, e) &\geq \delta + \frac{1}{k_p^2 \beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [4\epsilon^2 + 2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon(\varrho_2 + k_p\beta) + \epsilon + \varrho_1(k_p\beta + 4\epsilon^2) \right\}, \\ k_2(t, \hat{\eta}, e) &= \beta + 2\epsilon k_1(t, \hat{\eta}, e), \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde β, ϵ e δ são constantes positivas arbitrárias.

Demonstração. ver Apêndice B.1. □

O exemplo a seguir ilustra as principais características de um sistema de controle variable gain super-twisting por realimentação de saída.

Exemplo 4.1. Considere um sistema não-linear incerto descrito por (4.1), com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+1}{(s-1)^2},$$

e ganho de alta frequência $k_p = CB = 1$. As matrizes A , B , e C são incertas e pertencentes a um conjunto compacto, de modo que apenas limitantes para suas incertezas são conhecidos. Além disso, as incertezas/perturbações casadas presentes no sistema são representadas pela função $d(x, t)$, e dadas por

$$d(x, t) = |Cx| + 0.5 \sin(8\pi t) = |y| + 0.1 \sin(8\pi t).$$

Note que as Hipóteses (A1)–(A3) são satisfeitas. Aplicando a transformação linear de coordenadas de estado definida por

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_\perp \\ C \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x,$$

o sistema é levado à forma normal (4.4), com

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = 1, \quad A_{21} = -4, \quad A_{22} = 3, \quad K_p = k_p = 1.$$

O objetivo é determinar uma lei de controle u por realimentação de saída baseada no algoritmo variable gain super-twisting de modo que a saída y rastreie em tempo finito um sinal de referência y_m gerado pelo modelo de referência (4.2), com

$$A_m = -1, \quad K_m = 1, \quad r = \sin(2\pi t).$$

Em outras palavras, definindo o erro de rastreamento de saída como (4.3), pretende-se projetar u tal que as trajetórias do sistema sejam atraídas globalmente e em tempo finito para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$. Para isso, suponha que sejam conhecidos um limitante inferior $\lambda = 0.5$ para a margem de estabilidade da matriz A_{11} e o sinal do ganho de alta frequência k_p , satisfazendo as Hipóteses (A4) e (A5a). Além disso, definindo $d(\eta, e, t) = d(x, t)$, assumamos que os seguintes limitantes para as incertezas/perturbações presentes no sistema sejam conhecidos

$$\begin{aligned} |A_{11}| \leq 1.2, \quad |A_{12}| \leq 1.2, \quad |A_{21}| \leq 5, \quad |A_{22}| \leq 4, \quad 0.8 \leq |k_p| \leq 1, \\ |d(\eta, e, t) - d(\eta, 0, t)| \leq 2|e|, \quad \left| \frac{d}{dt}[d(\eta, 0, t)] \right| \leq 2|\dot{y}_m| + 3. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Neste caso, para que seja possível projetar u com base no algoritmo variable gain super-twisting por realimentação de saída, deve-se garantir que a Hipótese (A6a) seja satisfeita. Para isso, obtém-se primeiramente um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida η utilizando um filtro de aproximação de primeira ordem definido por (4.9), com constantes

$$\lambda_f = 0.5, \quad c_f = 1.2,$$

satisfazendo a desigualdade (4.10). Em seguida, é necessário determinar funções contínuas $\varrho_1(t, \hat{\eta}, e)$, $\varrho_2(t, \hat{\eta}, e) \geq 0$ de modo que as desigualdades (4.13) sejam satisfeitas pela perturbação (4.6). Neste sentido, considerando (4.7a), (4.8), (4.10), (4.12), e (4.16), é possível mostrar que os termos que representam as incertezas/perturbações presentes no sistema são limitados de acordo com as desigualdades

$$|g_1(\eta, e, t)| \leq |A_{22}||e| + |K_p||d(\eta, e, t) - d(\eta, 0, t)| \leq 4|e| + 2|e| \leq \frac{6}{k_3}|\phi_1(e)|$$

e também

$$\begin{aligned} \left| \frac{dg_2}{dt} \right| &\leq |A_{21}| \{ |A_{11}||\eta| + |A_{12}|[|e| + |y_m|] \} + |k_p| \left| \frac{d}{dt}[d(\eta, 0, t)] \right| + |A_{22}||\dot{y}_m| + |\ddot{y}_m| \\ &\leq 6|e| + 6\{\hat{\eta} + |\pi_\eta(t)|\} + 6|y_m| + 2|\dot{y}_m| + 3 + 4|\dot{y}_m| + |\ddot{y}_m| \\ &\leq \max \left\{ \frac{6}{k_3^2}, 12\hat{\eta} + 12|y_m| + 12|\dot{y}_m| + 2|\ddot{y}_m| + 6 + |\pi_2(t)| \right\} |\phi_2(e)|, \end{aligned}$$

onde $|\pi_2(t)| = 2|\pi_\eta(t)|$. Logo, as funções contínuas são escolhidas como

$$\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) = \frac{6}{k_3}, \quad \varrho_2(t, \hat{\eta}, e) = \max \left\{ \frac{6}{k_3^2}, 12\hat{\eta} + 12|y_m| + 12|\dot{y}_m| + 2|\ddot{y}_m| + 6 \right\}.$$

Assim, é garantido que a hipótese (A6a) é satisfeita. Portanto, define-se a lei de controle variable gain super-twisting como (4.11), com ganhos variáveis definidos de acordo com (4.15), e ganho fixo $k_3 = 0.5$. Os ganhos variáveis são escolhidos utilizando constantes positivas $\delta = 0.1$, $\epsilon = 1$, e $\beta = 3500$, e um limitante inferior conhecido para o ganho de alta frequência $k_p \geq 0.8$, definido em (4.16).

A Figura 4.1 apresenta os resultados da simulação do sistema de controle variable gain super-twisting por realimentação de saída projetado neste exemplo, considerando condições iniciais $x(0) = [0.5 \ 0.5]^T$. Observe que o erro de rastreamento de saída converge em tempo finito para zero apesar das incertezas/perturbações presentes no sistema. Este resultado mostra a efetividade e robustez da estratégia de controle proposta. Além disso, é importante destacar que a convergência é obtida por meio de um sinal de controle contínuo, e portanto menos propenso ao *chattering*.

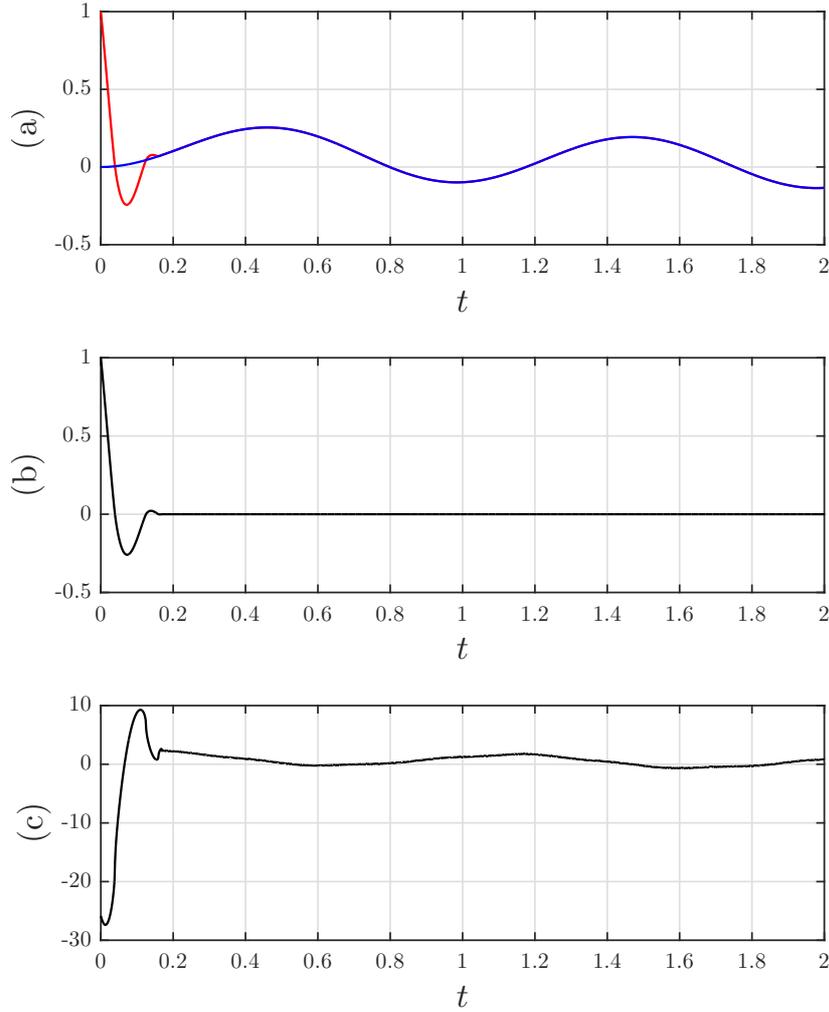


Figura 4.1: Desempenho da lei de controle variable gain super-twisting por realimentação de saída (4.11), aplicada ao sistema do Exemplo 4.1: (a) (●) saída y , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u .

4.5 Variable Gain Super-Twisting Multivariável por Realimentação de Saída

Considere agora o caso multivariável, em que $m \geq 1$. Suponha que a seguinte hipótese adicional com respeito ao ganho de alta frequência seja satisfeita:

(A5b) O ganho de alta frequência $K_p = CB$ é conhecido.

Neste caso, considerando a dinâmica do erro de rastreamento de saída (4.5), é possível determinar a lei de controle u de modo que o termo \dot{y}_m presente na perturbação (4.6) seja cancelado. Para isso, define-se a lei de controle utilizando o conhecimento disponível sobre o ganho de alta frequência, na seguinte forma:

$$u = K_p^{-1}[v + \dot{y}_m], \quad (4.17)$$

onde v é uma variável de controle a ser definida posteriormente. Note que é possível utilizar \dot{y}_m na implementação da lei de controle, uma vez que o modelo de referência (4.2) é conhecido. Assim, a dinâmica do erro de rastreamento de saída (4.5) pode ser reescrita na forma

$$\dot{e} = v + \bar{f}(\eta, e, t), \quad (4.18)$$

onde a perturbação não-linear dependente do estado é definida como

$$\bar{f}(\eta, e, t) = \bar{g}_1(\eta, e, t) + \bar{g}_2(\eta, t) = A_{21}\eta + A_{22}e + K_p d(\eta, e, t) + A_{22}y_m, \quad (4.19)$$

com

$$\begin{aligned} \bar{g}_1(\eta, e, t) &= \bar{f}(\eta, e, t) - \bar{f}(\eta, 0, t) = A_{22}e + K_p \{d(\eta, e, t) - d(\eta, 0, t)\}, \\ \bar{g}_2(\eta, t) &= \bar{f}(\eta, 0, t) = A_{21}\eta + K_p d(\eta, 0, t) + A_{22}y_m, \end{aligned}$$

e $\bar{g}_1(\eta, 0, t) = 0$. A derivada temporal da perturbação $\bar{g}_2(\eta, t)$ é dada por

$$\frac{d}{dt} [\bar{g}_2(\eta, t)] = A_{21}A_{11}\eta + A_{21}A_{12}(e + y_m) + K_p \frac{d}{dt} [d(\eta, 0, t)] + A_{22}\dot{y}_m.$$

Portanto, considerando a dinâmica do erro de rastreamento de saída (4.18), deve-se determinar a variável de controle v de modo que as trajetórias do sistema sejam atraídas em tempo finito para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$.

Nesta seção, é proposta uma estrutura multivariável não-desacoplada baseada no algoritmo variable gain super-twisting [17, 18], apresentado na Subseção 2.6.2. A principal vantagem desta estrutura é permitir lidar com incertezas não-desacopladas e perturbações dependentes do estado, estendendo a aplicabilidade do algoritmo a uma classe maior de sistemas incertos. A variável de controle é definida como

$$v = -k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) - \int_{t_0}^t k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e)dt, \quad (4.20)$$

onde

$$\phi_1(e) = \frac{e}{\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 e, \quad \phi_2(e) = \frac{1}{2} \frac{e}{\|e\|} + \frac{3}{2} k_3 \frac{e}{\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3^2 e, \quad (4.21)$$

com $k_3 > 0$. Note que esta estrutura é obtida generalizando as funções $\text{sgn}(\cdot)$ presentes no caso escalar para funções vetor unitário. O algoritmo variable gain super-twisting escalar pode ser recuperado fazendo $m = 1$. Além disso, outra característica interessante deste algoritmo de controle multivariável é que a matriz jacobiana

$$\Phi'_1(e) = \frac{d\phi_1}{de} = \frac{1}{\|e\|^{\frac{1}{2}}} \left\{ I - \frac{ee^T}{2\|e\|^2} \right\} + k_3 I, \quad (4.22)$$

possui as três propriedades a seguir.

Propriedade (P1)

Considerando (4.21), a seguinte igualdade é válida:

$$\phi_2(e) = \Phi'_1(e)\phi_1(e).$$

Esta é a extensão de uma importante propriedade observada no caso escalar [17, 18]. A estrutura multivariável não-desacoplada (4.20)–(4.21), obtida generalizando as funções $\text{sgn}(\cdot)$ presentes no caso escalar para funções vetor unitário, felizmente satisfaz à mesma propriedade. Isso pode ser verificado pelo cálculo direto de $\Phi'_1(e)\phi_1(e)$.

Propriedade (P2)

No caso escalar, uma propriedade fundamental para que seja possível assegurar a convergência do algoritmo é dada por

$$\phi'_1(e) = \frac{d\phi_1}{de} = \frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 > 0, \quad m = 1.$$

No caso multivariável, $\Phi'_1(e) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é uma matriz, o que torna a análise mais complicada. Note que esta matriz é simétrica, como pode ser verificado em (4.22). Assim, considere a seguinte forma quadrática com vetor $w \in \mathbb{R}^m$:

$$w^T \Phi'_1(e)w = \frac{1}{\|e\|^{\frac{1}{2}}} \left\{ \|w\|^2 - \frac{(w^T e)(e^T w)}{2\|e\|^2} \right\} + k_3 \|w\|^2, \quad (4.23)$$

que alcança o seu valor mínimo no máximo valor do produto $(w^T e)(e^T w)$. De acordo com a desigualdade de Cauchy-Schwarz para produtos internos, tem-se

$$(w^T e)(e^T w) \leq \|w\|^2 \|e\|^2.$$

Logo, pode-se verificar que a seguinte desigualdade é válida:

$$w^T \Phi'_1(e)w \geq \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|w\|^2, \quad \forall w \in \mathbb{R}^m, \quad (4.24)$$

e portanto a matriz jacobiana $\Phi_1(e)$ é positiva definida. Note que a igualdade em (4.24) ocorre quando w é um autovetor de $\Phi'_1(e)$ linearmente dependente de e .

Propriedade (P3)

Para $m > 1$, outra propriedade interessante é que a forma quadrática (4.23) alcança o seu valor máximo quando o produto $(w^T e)(e^T w)$ é igual a zero. Isso ocorre quando w é um autovetor de $\Phi'_1(e)$ ortogonal a e . Neste caso, a norma induzida da matriz

$\Phi'_1(e)$ é definida a partir deste valor máximo, e dada por

$$\|\Phi'_1(e)\| = \frac{1}{\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3, \quad m > 1. \quad \blacksquare$$

Estas propriedades são fundamentais para a análise de convergência do algoritmo.

Visando propor uma estratégia de controle por realimentação de saída como na Seção 4.4, deve-se considerar a presença do FOAF (4.9) no sistema em malha fechada. Assim, é feita a seguinte hipótese com respeito à perturbação (4.19):

(A6b) A perturbação (4.19) satisfaz as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \|\bar{g}_1(\eta, e, t)\| &\leq \{\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_1(t)|\} \|\phi_1(e)\| \\ \left\| \frac{d}{dt} [\bar{g}_2(\eta, t)] \right\| &\leq \{\varrho_2(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_2(t)|\} \|\phi_2(e)\|, \end{aligned} \quad (4.25)$$

para determinadas funções contínuas conhecidas $\varrho_1(t, \hat{\eta}, e), \varrho_2(t, \hat{\eta}, e) \geq 0$, e termos exponencialmente decrescentes $|\pi_1(t)| = \gamma_1 (\|x_\eta(t_0)\|) e^{-\lambda_1(t-t_0)}$, e $|\pi_2(t)| = \gamma_2 (\|x_\eta(t_0)\|) e^{-\lambda_2(t-t_0)}$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty$.

É importante destacar que esta hipótese é ligeiramente diferente daquela feita em [17, 18], devido à presença dos termos exponencialmente decrescentes $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$. Como comentado na Seção 4.4, estes termos são introduzidos com o objetivo de representar perturbações relacionadas a $|\pi_\eta(t)|$ na desigualdade (4.10).

Neste caso, a dinâmica do sistema em malha-fechada é definida pelas equações dinâmicas do erro de rastreamento (4.18) e da variável de estado não-medida (4.4a) do sistema (4.1), em conjunto com o FOAF (4.9) e a lei de controle (4.17)–(4.20). Então, visando demonstrar propriedades uniformes globais de estabilidade assintótica, define-se as variáveis de referência auxiliares $\hat{\eta}_m$ e η_m como

$$\dot{\hat{\eta}}_m = -\lambda_f \hat{\eta}_m + c_f \|y_m\|, \quad \dot{\eta}_m = A_{11} \eta_m + A_{12} y_m, \quad \hat{\eta}_m(t_0) = \eta_m(t_0) = 0.$$

Note que estas variáveis representam sinais do tempo bem definidos, uma vez que suas condições iniciais são determinadas a priori. Portanto, considerando as variáveis auxiliares, a dinâmica do sistema em malha-fechada pode ser representada por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_e &= -\lambda_f \hat{\eta}_e + c_f [\|e + y_m\| - \|y_m\|], \\ \dot{\eta}_e &= A_{11} \eta_e + A_{12} e, \\ \dot{e} &= -k_1(t, \hat{\eta}, e) \phi_1(e) + z + \bar{g}_1(\eta, e, t), \\ \dot{z} &= -k_2(t, \hat{\eta}, e) \phi_2(e) + \frac{d}{dt} [\bar{g}_2(\eta, t)]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

com $\hat{\eta}_e = \hat{\eta} - \hat{\eta}_m$, $\eta_e = \eta - \eta_m$, e $z = -\int_{t_0}^t k_2(t, \hat{\eta}, e) \phi_2(e) dt + \bar{g}_2(\eta, t)$.

Teorema 4.2. *Considere o sistema em malha-fechada (4.26), com vetor de estado $X_e = [\hat{\eta}_e \ \eta_e^T \ e^T \ z^T]^T$. Assuma que as Hipóteses (A1)–(A6b) sejam satisfeitas. Então, o sistema é globalmente uniformemente assintoticamente estável, e suas trajetórias são atraídas globalmente e em tempo finito para a superfície de deslizamento $\dot{e} = e = 0$, se os ganhos variáveis forem escolhidos como*

$$\begin{aligned} k_1(t, \hat{\eta}, e) &= \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [4\epsilon \varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon \varrho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \varrho_1](\beta + 4\epsilon^2) \right\}, \\ k_2(t, \hat{\eta}, e) &= \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, \hat{\eta}, e), \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde β , ϵ e δ são constantes positivas arbitrárias.

Demonstração. ver Apêndice B.2. □

A efetividade da estratégia de controle proposta, bem como a vantagem de se considerar um algoritmo super-twisting multivariável com ganhos variáveis em relação ao seu correspondente com ganhos fixos, são ilustradas pelos estudos de caso a seguir.

4.5.1 Estudo de Caso: Estabilização de um Satélite

Visando evidenciar as vantagens de se considerar um algoritmo super-twisting multivariável com ganhos variáveis em relação ao seu correspondente com ganhos constantes, considere o problema de estabilização do movimento de um satélite controlado por propulsores. A dinâmica do movimento é descrita pela seguinte equação não-linear de corpo rígido [19, 38]:

$$\dot{w} = J^{-1}(T + d(t, w) - w \times Jw), \quad (4.28)$$

onde $w \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular inercial do satélite, $T \in \mathbb{R}^3$ é o torque fornecido pelos propulsores, e $d(t, w) = \|w\|Jw$ é uma perturbação de entrada não-linear dependente do estado. Assuma que a matriz de inércia simétrica e positiva definida seja conhecida a priori e dada por

$$J = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1.2757 & -0.0040 & -0.0230 \\ -0.0040 & 0.6597 & 0.0063 \\ -0.0230 & 0.0063 & 0.8750 \end{bmatrix} \text{ kgm}^2.$$

O objetivo é determinar uma ação de controle a ser fornecida pelo torque T de modo que as trajetórias de estado do sistema sejam atraídas em tempo finito para a superfície de deslizamento $w = \dot{w} = 0$, estabilizando o movimento do satélite. Neste caso, projeta-se o torque na forma

$$T = J\bar{T}, \quad (4.29)$$

onde \bar{T} é uma variável de controle a ser definida posteriormente. Para isso, serão considerados dois algoritmos de controle multivariável por modos deslizantes de segunda ordem: o Super-Twisting Multivariável [19], apresentado na Subseção 2.6.3; e o Variable Gain Super-Twisting Multivariável, proposto nesta seção.

Considere primeiramente o projeto de uma estratégia de controle com base no algoritmo Super-Twisting Multivariável [19]. Note que a equação não-linear de corpo rígido (4.28), com torque definido na forma (4.29), é correspondente à dinâmica (2.61) para $\sigma = x = w$, $v = J^{-1}T = \bar{T}$, e $a(t, x) = a(t, w) = J^{-1}(d(t, w) - w \times Jw)$. Assim, considerando (2.65) e (2.66), escreve-se a perturbação na forma

$$a(t, w) = \bar{a}_1(t, w) + \bar{a}_2(t, w),$$

onde as funções

$$\bar{a}_1(t, w) = J^{-1}(\|w\|Jw - w \times Jw), \quad \bar{a}_2(t, w) = 0$$

devem satisfazer as desigualdades

$$\|\bar{a}_1(t, w)\| \leq \delta_1 \|w\|, \quad \|\dot{\bar{a}}_2(t, w)\| \leq \delta_2.$$

para determinadas constantes $\delta_1, \delta_2 > 0$. Entretanto, como $\|\bar{a}_1(t, w)\|$ cresce quadraticamente com a norma da velocidade angular inercial, estas desigualdades não podem ser satisfeitas globalmente. Então, define-se as constantes δ_1 e δ_2 de modo a satisfazer as desigualdades localmente em $\mathcal{D} = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \|w\| \leq 1\}$, tais que

$$\delta_1 = 1 + \frac{\lambda_{\max}\{J\}}{\lambda_{\min}\{J\}}, \quad \delta_2 = 0.$$

Neste caso, a variável de controle é definida pelo algoritmo (2.64), de modo que

$$\bar{T} = -k_1 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} - k_2 w + \xi, \quad \dot{\xi} = -k_3 \frac{w}{\|w\|} - k_4 w.$$

Os ganhos deste algoritmo são escolhidos de acordo com (2.68), e dados por $k_1 = 1$, $k_2 = 6.9$, $k_3 = 1$, e $k_4 = 293$. A Figura 4.2 apresenta os resultados da simulação do sistema de controle super-twisting multivariável projetado, considerando condições iniciais $w(0) = [-0.0021 \ -0.0067 \ 0.0253]^T$ rad/s e $\xi(0) = 0$. Observe que o sinal de controle contínuo fornecido pelo torque permite a convergência em tempo finito da velocidade angular inercial w para zero, apesar da presença da perturbação não-linear dependente do estado $d(t, w)$. Entretanto, a Figura 4.3 mostra que o sistema se torna instável para condições iniciais mais distantes do equilíbrio, dadas por $w(0) = [0.4162 \ -0.1910 \ 8.7877]^T$ rad/s e $\xi(0) = 0$. Portanto, conclui-se que neste

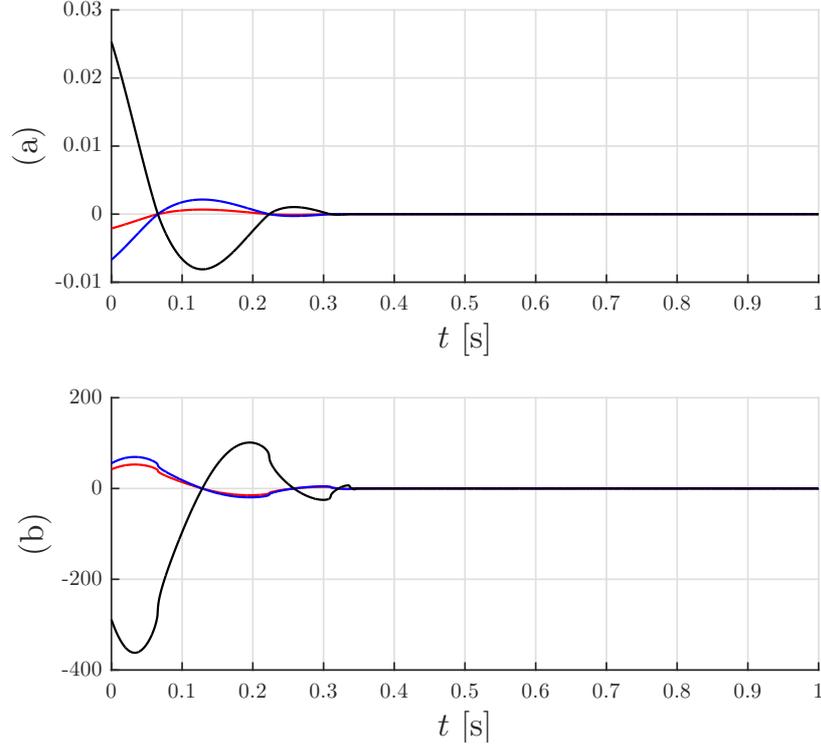


Figura 4.2: Desempenho do Super-Twisting Multivariável no controle do movimento de um satélite com condições iniciais $w(0) = [-0.0021 \ -0.0067 \ 0.0253]^T$ rad/s: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 ; (b) componentes do vetor de torque [N · m] (●) T_1 , (●) T_2 , (●) T_3 .

caso o algoritmo Super-Twisting Multivariável com ganhos constantes é capaz de fornecer apenas convergência local no espaço de estado.

Considere agora o projeto de uma estratégia de controle com base no algoritmo Variable Gain Super-Twisting Multivariável. Note que a equação não-linear de corpo rígido (4.28), com torque definido na forma (4.29), é correspondente à dinâmica (4.18) para $e = w$, $v = J^{-1}T = \bar{T}$, e $\bar{f}(\eta, e, t) = \bar{f}(t, w) = J^{-1}(d(t, w) - w \times Jw)$. Assim, considerando (4.19), escreve-se a perturbação na forma

$$\bar{f}(t, w) = \bar{g}_1(t, w) + \bar{g}_2(t) = J^{-1}(\|w\|Jw - w \times Jw),$$

onde

$$\bar{g}_1(t, w) = \bar{f}(t, w) - \bar{f}(t, 0) = J^{-1}(\|w\|Jw - w \times Jw), \quad \bar{g}_2(t) = \bar{f}(t, 0) = 0,$$

e $\bar{g}_1(t, 0) = 0$. Esta perturbação deve satisfazer as desigualdades (4.25), dadas por

$$\|\bar{g}_1(t, w)\| \leq \varrho_1(t, w) \|\phi_1(w)\|, \quad \left\| \frac{d}{dt}[\bar{g}_2(t)] \right\| \leq \varrho_2(t, w) \|\phi_2(w)\|,$$

para determinadas funções contínuas $\varrho_1(t, w), \varrho_2(t, w) \geq 0$. É importante destacar

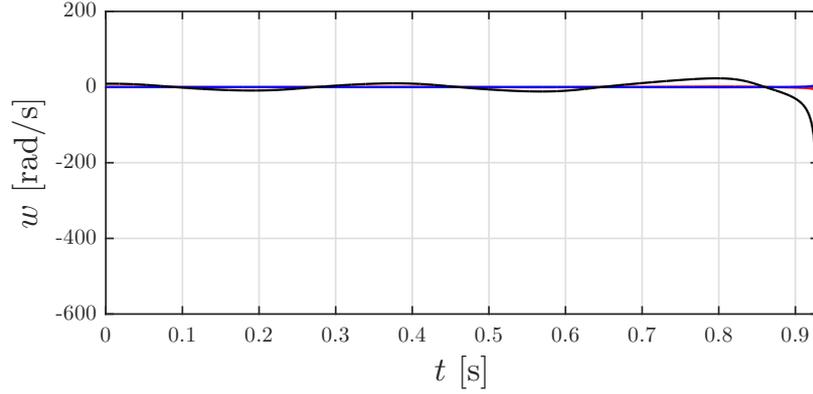


Figura 4.3: Desempenho do Super-Twisting Multivariável no controle do movimento de um satélite com condições iniciais $w(0) = [0.4162 \ -0.1910 \ 8.7877]^T$ rad/s: componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 .

que os termos exponencialmente decrescentes em (4.25) não se aplicam neste caso, uma vez que todas as variáveis de estado estão disponíveis para fins de controle. Então, define-se as funções contínuas $\varrho_1(t, w)$ e $\varrho_2(t, w)$ como

$$\varrho_1(t, w) = \frac{\|w\|}{k_3} \left(1 + \frac{\lambda_{\max}\{J\}}{\lambda_{\min}\{J\}} \right), \quad \varrho_2(t, w) = 0.$$

Neste caso, a variável de controle é definida pelo algoritmo (4.20)–(4.21), tal que

$$\bar{T} = -k_1(t, w)\phi_1(w) - \int_{t_0}^t k_2(t, w)\phi_2(w)dt,$$

onde

$$\phi_1(w) = \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 w, \quad \phi_2(w) = \frac{1}{2} \frac{w}{\|w\|} + \frac{3}{2} k_3 \frac{w}{\|w\|^{\frac{1}{2}}} + k_3^2 w,$$

Os ganhos variáveis $k_1(t, w)$ e $k_2(t, w)$ são selecionados de acordo com (4.27), com $\delta = 1.5$, $\beta = 1$, e $\epsilon = 0.1$, enquanto o ganho constante é escolhido como $k_3 = 1$. A Figura 4.4 apresenta os resultados da simulação do sistema de controle variable gain super-twisting multivariável projetado nesta subseção, considerando condições iniciais $w(0) = [-0.0021 \ -0.0067 \ 0.0253]^T$ rad/s. Observe que o algoritmo com ganhos variáveis fornece uma comparável, senão ainda mais rápida, convergência utilizando menos esforço de controle em relação ao seu correspondente com ganhos constantes, como pode ser verificado comparando as Figuras 4.2 e 4.4. Além disso, a Figura 4.5 mostra que a velocidade angular inercial w converge em tempo finito para zero mesmo para condições iniciais mais distantes do equilíbrio, dadas por $w(0) = [0.4162 \ -0.1910 \ 8.7877]^T$ rad/s. Portanto, conclui-se que o Variable Gain Super-Twisting Multivariável permite obter resultados globais de estabilidade para sistemas incertos na presença de uma classe maior de incertezas/perturbações em relação ao algoritmo Super-Twisting Multivariável com ganhos constantes.

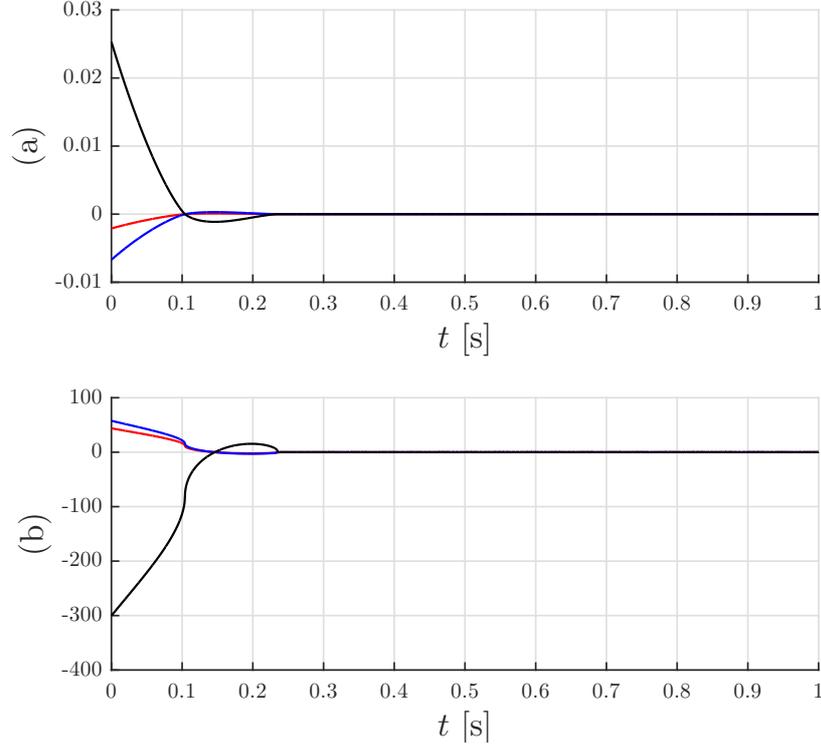


Figura 4.4: Desempenho do Variable Gain Super-Twisting Multivariável no controle de um satélite com condições iniciais $w(0) = [-0.0021 \ -0.0067 \ 0.0253]^T$ rad/s: (a) componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 ; (b) componentes do vetor de torque [N · m] (●) T_1 , (●) T_2 , (●) T_3 .

4.5.2 Estudo de Caso: Controle de uma Cadeia de Trailers

De modo a ilustrar a aplicabilidade da estratégia de controle Variable Gain Super-Twisting Multivariável por realimentação de saída, considere o problema do controle de uma cadeia de trailers apresentado em [45]. Seja a cadeia composta por quatro trailers representada na Figura 4.6, controlada pelos atuadores conectados aos dois trailers ativos. A dinâmica do movimento é descrita pela forma normal (4.4), com

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{31}}{m_3} & -\frac{b_{23}}{m_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k_{24}}{m_4} & -\frac{b_{24}}{m_4} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{b_{23}}{m_3} \\ 0 & -1 \\ 0 & \frac{b_{24}}{m_4} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \frac{k_{31}}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_{23}}{m_2} & \frac{k_{24}}{m_2} & \frac{b_{24}}{m_2} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{23} + b_{24}}{m_2} \end{bmatrix}, \quad K_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix},$$

onde a saída $y = [v_1 \ v_2]^T$ é composta pelas velocidades dos trailers ativos, a ação de controle $u = [F_1 \ F_2]^T$ é fornecida pela forças provenientes dos atuadores, e a variável

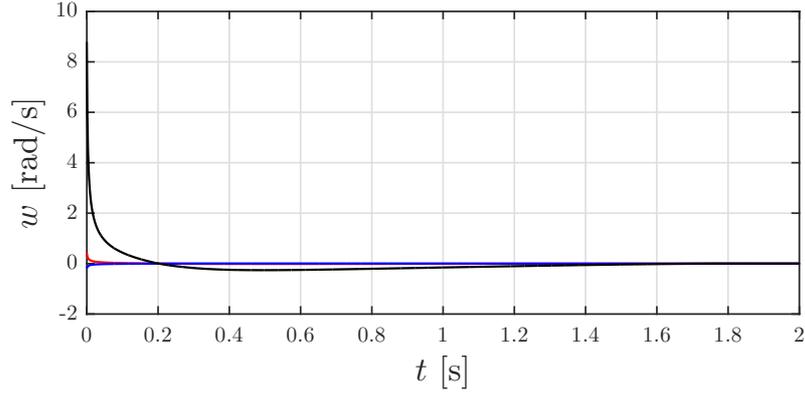


Figura 4.5: Desempenho do Variable Gain Super-Twisting Multivariável no controle de um satélite com condições iniciais $w(0) = [0.4162 \ -0.1910 \ 8.7877]^T$ rad/s: componentes do vetor velocidade angular inercial [rad/s] (●) w_1 , (●) w_2 , (●) w_3 .

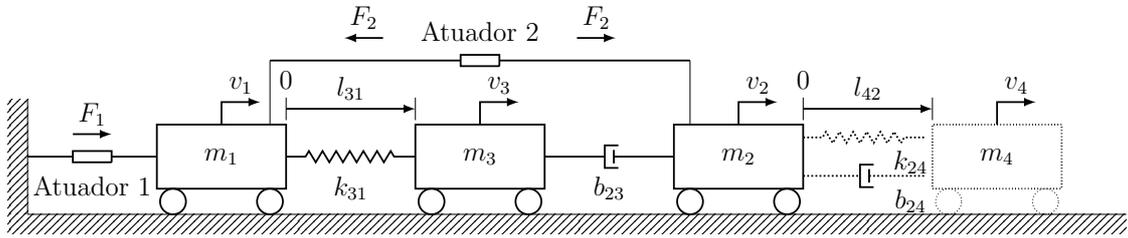


Figura 4.6: Cadeia composta por quatro trailers, controlada pelos dois atuadores conectados aos trailers ativos. O quarto trailer pode ou não estar conectado à cadeia.

Tabela 4.1: Parâmetros da cadeia de trailers da Figura 4.6.

Parâmetro	Nominal	Mínimo	Máximo	Unidade
m_1	1.2	1.2	1.2	kg
m_2	2.5	2.5	2.5	kg
m_3	1.0	0.5	1.5	kg
m_4	1.0	1.0	1.0	kg
k_{24}	100	100	100	N/m
k_{31}	30	25	35	N/m
b_{23}	4.0	2.5	6.0	Ns/m
b_{24}	3.0	3.0	3.0	Ns/m

de estado não-medida $\eta = [l_{31} \ v_3 \ l_{42} \ v_4]^T$ é composta pelas distâncias l_{31} e l_{42} entre os trailers correspondentes, e pelas velocidades dos trailers passivos. A perturbação de entrada é nula, isto é, $d(x, t) \equiv 0$. Os parâmetros físicos do sistema são incertos, porém limitados de acordo com a Tabela 4.1. Além disso, o quarto trailer pode ou não estar conectado à cadeia. Quando desconectado, considera-se $b_{24} = 0$ Ns/m e $k_{24} = 0$ N/m, e a variável de estado não-medida é reduzida a $\eta = [l_{31} \ v_3]^T$. Note que as hipóteses (A1)–(A5b) são satisfeitas.

O objetivo é determinar uma lei de controle u por realimentação de saída com base no algoritmo Variable Gain Super-Twisting Multivariável de modo que a saída

y rastreie em tempo finito um sinal de referência y_m gerado pelo modelo de referência

$$\dot{y}_m = -2y_m + r, \quad r = [20 \operatorname{sen}(10t) \quad -10 \operatorname{sen}(5t)]^T \text{ m/s}^2.$$

Em outras palavras, definindo o erro de rastreamento de saída como (4.3), pretende-se projetar u tal que as trajetórias do sistema sejam atraídas globalmente e em tempo finito para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$. Para isso, o conhecimento nominal do sistema é considerado de modo a reduzir a magnitude da ação de controle. Assim, em vez de (4.17), a lei de controle é definida na forma

$$u = K_p^{-1}[v + \dot{y}_m - A_{22}^{\text{nom}}y],$$

onde A_{22}^{nom} é o valor nominal da matriz A_{22} , e a variável de controle v é definida pelo algoritmo Variable Gain Super-Twisting Multivariável (4.20)–(4.21). Neste caso, a dinâmica do erro de rastreamento de saída é descrita por (4.18), onde a perturbação não-linear dependente do estado é definida como

$$\bar{f}(\eta, e, t) = \bar{g}_1(\eta, e, t) + \bar{g}_2(\eta, t) = A_{21}\eta + \tilde{A}_{22}e + \tilde{A}_{22}y_m, \quad \tilde{A}_{22} = A_{22} - A_{22}^{\text{nom}},$$

com

$$\bar{g}_1(\eta, e, t) = \bar{f}(\eta, e, t) - \bar{f}(\eta, 0, t) = \tilde{A}_{22}e, \quad \bar{g}_2(\eta, t) = \bar{f}(\eta, 0, t) = A_{21}\eta + \tilde{A}_{22}y_m,$$

e $\bar{g}_1(\eta, 0, t) = 0$. A derivada temporal da perturbação $\bar{g}_2(\eta, t)$ é dada por

$$\frac{d}{dt} [\bar{g}_2(\eta, t)] = A_{21}A_{11}\eta + A_{21}A_{12}(e + y_m) + \tilde{A}_{22}\dot{y}_m.$$

Note que esta perturbação satisfaz as desigualdades

$$\|\bar{g}_1\| \leq \|\tilde{A}_{22}\| \|e\| \leq \frac{\|\tilde{A}_{22}\|}{k_3} \|\phi_1\|,$$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\bar{g}_2}{dt} \right\| &\leq \|A_{21}A_{11}\eta\| + \|A_{21}A_{12}\|(\|e\| + \|y_m\|) + \|\tilde{A}_{22}\| \|\dot{y}_m\| \\ &\leq \max \left\{ \frac{\|A_{21}A_{12}\|}{k_3^2}, 2 \left(\|A_{21}A_{11}\eta\| + \|A_{21}A_{12}\| \|y_m\| + \|\tilde{A}_{22}\| \|\dot{y}_m\| \right) \right\} \|\phi_2\|. \end{aligned}$$

Logo, de modo a satisfazer a Hipótese (A6b), deve-se obter um limitante superior para a norma $\|A_{21}A_{11}\eta\|$, dependente da variável de estado não-medida η . Isso pode ser feito multiplicando o valor máximo $\|A_{21}A_{11}\|_{\max} = 211.6$, considerando os intervalos admissíveis para os parâmetros incertos, por um limitante superior para a norma de η fornecido por um filtro de aproximação de primeira ordem na forma

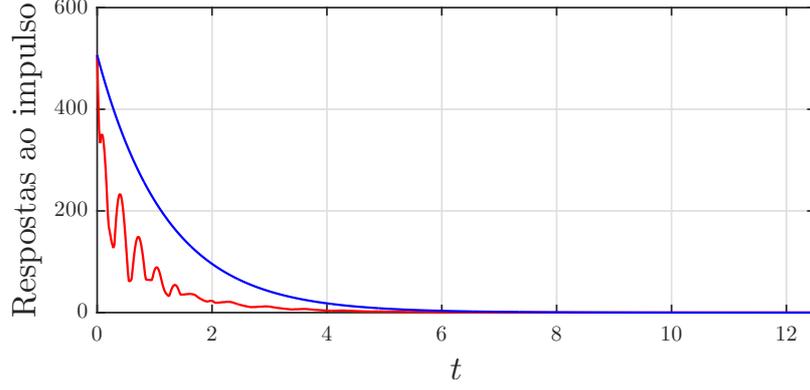


Figura 4.7: (●) Envoltória $\bar{h}(t) = \|h(t)\|_{\max}$ para a norma da resposta ao impulso $h(t) = A_{21}A_{11}e^{A_{11}t}A_{12}$, computada considerando os intervalos admissíveis para os parâmetros incertos; (●) Resposta ao impulso $c_h e^{-\lambda_h t}$ do FOAF.

(4.9) para o subsistema (4.4a). Assim, o FOAF projetado de modo a minimizar o ganho DC teria como parâmetros $c_f = 12.4$ e $\lambda_f = 0.83$, computados utilizando os métodos de otimização descritos em [22]. Entretanto, um limitante superior menos conservativo é obtido projetando um filtro de aproximação de primeira ordem para o sistema com resposta ao impulso $h(t) = A_{21}A_{11}e^{A_{11}t}A_{12}$. A dinâmica deste FOAF é descrita por

$$\dot{\hat{\eta}} = -\lambda_h \hat{\eta} + c_h \|y\|,$$

onde os parâmetros $c_h = 506.7$ e $\lambda_h = 0.83$ são escolhidos de modo a minimizar o ganho DC. Note que c_h é consideravelmente menor que o produto $\|A_{21}A_{11}\|_{\max}c_f$. A Figura 4.7 mostra que a resposta ao impulso do FOAF projetado é um limitante superior aceitável para a envoltória $\bar{h}(t) = \|h(t)\|_{\max}$, considerando os intervalos admissíveis para os parâmetros incertos. Neste caso, em vez de (4.10), tem-se

$$\|A_{21}A_{11}\eta(t)\| \leq \hat{\eta}(t) + |\pi_\eta(t)|, \quad |\pi_\eta(t)| = c_\eta \|x_\eta(t_0)\| e^{-\lambda_\eta(t-t_0)},$$

para determinadas constantes $c_\eta, \lambda_\eta > 0$, e $x_\eta = [\eta^T \ \hat{\eta}]^T$. Portanto, para satisfazer as desigualdades (4.25) na Hipótese (A6b), as funções contínuas $\varrho_1(t, \hat{\eta}, e)$ e $\varrho_2(t, \hat{\eta}, e)$ são escolhidas como

$$\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) = \frac{\|\tilde{A}_{22}\|}{k_3},$$

$$\varrho_2(t, \hat{\eta}, e) = \max \left\{ \frac{\|A_{21}A_{12}\|_{\max}}{k_3^2}, 2 \left(\hat{\eta} + \|A_{21}A_{12}\|_{\max} \|y_m\| + \|\tilde{A}_{22}\|_{\max} \|\dot{y}_m\| \right) \right\},$$

onde os valores máximos $\|\tilde{A}_{22}\|_{\max}$ e $\|A_{21}A_{12}\|_{\max}$ são computados considerando os intervalos admissíveis para os parâmetros incertos. Os ganhos variáveis $k_1(t, \hat{\eta}, e)$ e $k_2(t, \hat{\eta}, e)$ são então selecionados de acordo com (4.27), considerando $\delta = 0.1$, $\epsilon = 4$, e $\beta = 900$, enquanto o ganho constante é escolhido como $k_3 = 0.4$.

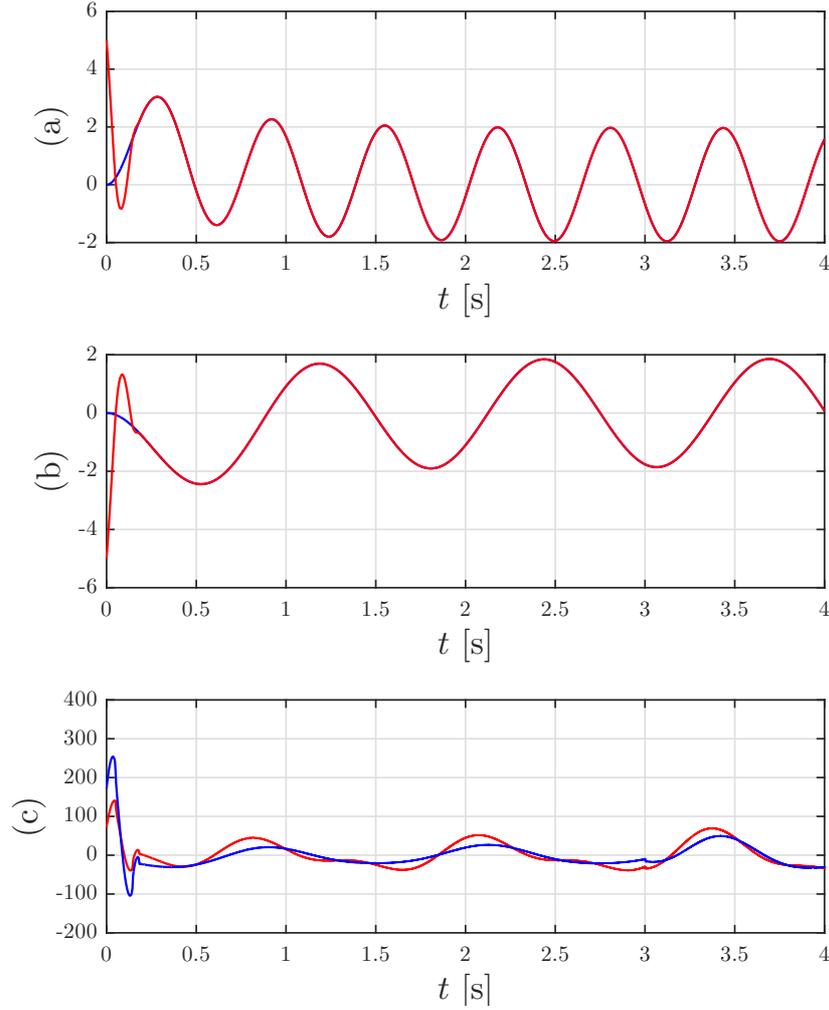


Figura 4.8: Desempenho do Variable Gain Super-Twisting Multivariável no controle de uma cadeia de trailers: (a) (●) velocidade v_1 do trailer 1 [m/s], (●) componente y_{m1} do sinal de referência; (b) (●) velocidade v_2 do trailer 2 [m/s], (●) componente y_{m2} do sinal de referência; (c) forças fornecidas pelos atuadores [N] (●) F_1 , (●) F_2 .

A Figura 4.8 apresenta os resultados da simulação do sistema de controle Variable Gain Super-Twisting Multivariável por realimentação de saída aqui projetado, para condições iniciais $y(0) = [5 \ -5]^T$ m/s e $\eta(0) = 0$. Os parâmetros incertos são dados por $m_3 = 1.5$ kg, $b_{23} = 6$ Ns/m, e $k_{31} = 35$ N/m. O quarto trailer está inicialmente desconectado, sendo conectado em $t = 3$ s. Observe que o sinal de controle contínuo fornece um rastreamento exato a partir de um instante de tempo finito $T \approx 0.2$ s, quando as trajetórias do sistema convergem para o modo deslizante $e = \dot{e} = 0$. Note ainda que o erro de rastreamento é insensível à conexão do quarto trailer à cadeia. Além disso, é importante salientar que foram escolhidos os mesmos parâmetros de simulação considerados em [45], visando comparar as duas abordagens. Em contraste à ação de controle descontínua em [45], a estratégia proposta apresenta uma performance similar através de um esforço de controle significativamente menor e, o mais importante, com um sinal de controle contínuo e menos propenso ao *chattering*.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

No Capítulo 3, uma nova implementação para o algoritmo super-twisting multi-variável [19] foi proposta para sistemas multivariáveis com matriz de entrada incerta, simétrica, e positiva definida. A partir de uma análise por função de Lyapunov, foi demonstrado que apenas limitantes inferior e superior para os autovalores da matriz de entrada do sistema são necessários para a implementação da lei de controle. Além disso, motivado pelo problema de estabilização global do movimento de um satélite, mostrou-se que um novo algoritmo super-twisting com ganhos variáveis pode ser obtido por meio de uma mudança de escala de tempo não-linear e dependente do estado. Na nova escala de tempo, o algoritmo modificado com ganhos variáveis foi analisado utilizando a mesma análise teórica do seu correspondente com ganhos constantes. Os resultados teóricos foram confirmados por meio de simulações numéricas, mostrando que o algoritmo modificado é capaz de lidar com uma classe mais abrangente de incertezas/perturbações, assegurando propriedades globais de estabilidade para casos em que apenas resultados locais podem ser obtidos com ganhos constantes.

No Capítulo 4, foram propostas estratégias de controle por realimentação de saída com base no algoritmo Variable Gain Super-Twisting [17, 18] para sistemas incertos na presença de uma classe bastante geral de incertezas/perturbações não-lineares dependentes do estado. Para alcançar uma solução por realimentação de saída, um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida é estimado utilizando filtros de aproximação de primeira ordem. Na Seção 4.4, foram considerados sistemas monovariáveis incertos com grau relativo unitário. A partir de uma análise por função de Lyapunov similar a utilizada na abordagem original [17, 18], foram demonstradas propriedades globais de convergência em tempo finito do erro de rastreamento de saída para um modo deslizante de segunda ordem. Um exemplo de simulação foi apresentado para validar os resultados teóricos e para ilustrar a efetividade do esquema de controle proposto. Na Seção 4.5, foi proposta uma estratégia de controle por realimentação de saída baseada em uma extensão multi-variável do algoritmo Variable Gain Super-Twisting para sistemas multivariáveis

incertos com grau relativo uniforme e unitário. Até onde se sabe, este é o primeiro controlador por realimentação de saída baseado em um algoritmo super-twisting multivariável não-desacoplado capaz de garantir propriedades uniformes globais de estabilidade assintótica com convergência em tempo finito. A efetividade da estratégia de controle proposta, bem como a vantagem de se considerar um algoritmo super-twisting multivariável com ganhos variáveis em relação ao seu correspondente com ganhos constantes, foram ilustradas em dois problemas de interesse prático: a estabilização do movimento de um satélite, e o controle de uma cadeia de trailers.

Trabalhos Futuros

São propostos os seguintes tópicos de pesquisa para continuação dos trabalhos apresentados nesta dissertação de mestrado:

- **STA Multivariável para Sistemas com Matriz de Entrada Incerta:**

Um importante aperfeiçoamento para a estratégia de controle proposta no Capítulo 3 seria contornar a necessidade da hipótese de simetria da matriz de entrada do sistema. Além disso, outro tema de pesquisa interessante seria entender a análise baseada na mudança de escala de tempo para uma classe mais abrangente de sistemas multivariáveis incertos.

- **Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída:**

Uma das principais limitações da estratégia de controle proposta no Capítulo 4 é a necessidade do conhecimento prévio da matriz de entrada do sistema. Obter um algoritmo super-twisting por realimentação de saída para sistemas com matriz de entrada incerta seria um interessante tema para pesquisas futuras. Outra importante contribuição seria estudar maneiras de utilizar o conhecimento nominal do sistema com o objetivo de reduzir a magnitude do sinal de controle.

- **Comportamento Transitório do Super-Twisting:**

Estratégias de controle baseadas no algoritmo super-twisting podem tentar impor uma convergência muito rápida por meio de uma ação de controle suficientemente intensa, o que pode comprometer a aplicação prática desses métodos. Desta forma, seria interessante desenvolver novas estratégias com o objetivo de melhorar o comportamento transitório de controladores baseados no algoritmo super-twisting.

Referências Bibliográficas

- [1] EDWARDS, C., SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Series in Systems and Control. Taylor & Francis, 1998.
- [2] UTKIN, V., GULDNER, J., SHI, J. *Sliding mode control in electromechanical systems*. Taylor & Francis, 1999.
- [3] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [4] LEVANT, A. “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control”, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, v. 58, n. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [5] FRIDMAN, L., LEVANT, A. “Higher Order Sliding Modes”. In: Perruquetti, W., Barbot, J. (Eds.), *Sliding Mode Control in Engeneering*, Marcel Dekker Inc., pp. 53–101, 2002.
- [6] EMELYANOV, S. V., KOROVIN, S. K., NERSISIAN, A. L., et al. “Output feedback stabilization of uncertain plants: a variable structure systems approach”, *Int. J. Contr.*, v. 55, n. 1, pp. 61–82, 1992.
- [7] HSU, L. “Smooth Sliding Control of uncertain systems based on a prediction error”, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 7, pp. 353–372, 1997.
- [8] LEVANT, A. “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control”, *Int. J. Contr.*, v. 76, n. 9, pp. 924–941, 2003.
- [9] HUNG, J. Y., GAO, W., HUNG, J. C. “Variable structure control: a survey”, *IEEE Trans. on Ind. Electronics*, v. 40, n. 1, pp. 2–22, 1993.
- [10] ITKIS, U. *Control Systems of Variable Structure*. John Wiley, 1976.
- [11] UTKIN, V. I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. MIR, 1978.
- [12] EMELYANOV, S. V. *Theory of variable structure systems*. Nauka, 1970.

- [13] LEVANT, A. “Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique”, *Automatica*, v. 34, n. 3, pp. 379–384, 1998.
- [14] LEVANT, A. “Homogeneity approach to high-order sliding mode design”, *Automatica*, v. 41, n. 5, pp. 823–830, 2005.
- [15] MORENO, J., OSORIO, M. “A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers”. In: *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pp. 2856–2861, 2008.
- [16] MORENO, J., OSORIO, M. “Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 57, n. 4, pp. 1035–1040, 2012.
- [17] DÁVILA, A., MORENO, J., FRIDMAN, L. “Variable gains super-twisting algorithm: A Lyapunov based design”. In: *Proc. American Contr. Conf.*, Baltimore, MD, 2010.
- [18] GONZALEZ, T., MORENO, J. A., FRIDMAN, L. “Variable Gain Super-Twisting Sliding Mode Control”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 57, n. 8, pp. 2100–2105, 2012.
- [19] NAGESH, I., EDWARDS, C. “A multivariable super-twisting sliding mode approach”, *Automatica*, v. 50, n. 3, pp. 984–988, 2014.
- [20] VIDAL, P. V. N. M., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Multivariable Super-Twisting Algorithm for a class of systems with uncertain input matrix”. In: *2016 American Control Conference (ACC)*, pp. 7201–7206, Julho 2016.
- [21] VIDAL, P. V. N. M., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Super-Twisting Algorithm Multivariável para uma Classe de Sistemas com Matriz de Entrada Incerta”, *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, 2016.
- [22] CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R., HSU, L. “Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems”, *IEEE Trans. Ind. Electron.*, v. 55, n. 11, pp. 4037–4046, 2008.
- [23] VIDAL, P. V. N. M., KEIJOCK, T. A., NUNES, E. V. L., et al. “Variable Gain Super-Twisting Control Using Only Output Feedback”, *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2015.
- [24] VIDAL, P. V. N. M., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Output-Feedback Multivariable Global Variable Gain Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016. doi: 10.1109/TAC.2016.2609602.

- [25] VIDAL, P. V. N. M., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Variable Gain Super-Twisting Algorithm Multivariável por Realimentação de Saída”, *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, 2016.
- [26] SHITESSEL, Y., EDWARDS, C., FRIDMAN, L., et al. *Sliding Mode Control and Observation*. Springer, New York, 2014.
- [27] FILIPPOV, A. F. “Differential equations with discontinuous right-hand side”, *American Math. Soc. Translations*, v. 42, n. 2, pp. 199–231, 1964.
- [28] FILIPPOV, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [29] GUTMANN, S., LEITMANN, G. “Stabilizing control for linear systems with bounded parameters and input uncertainty”. In: *Proc. IFIC Conference on Optimization Techniques*, pp. 8–14, Nice, France, 1975.
- [30] GUTMAN, S. “Uncertain dynamical systems — a Lyapunov min-max approach”, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 24, n. 3, pp. 437–443, 1979.
- [31] SLOITINE, J., LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [32] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering. Springer New York, 1995.
- [33] KUNUSCH, C., PULESTON, P. F., MAYOSKY, M. A., et al. “Sliding Mode Strategy for PEM Fuel Cells Stacks Breathing Control Using a Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 17, n. 1, pp. 167–174, Janeiro 2009.
- [34] DERAFA, L., BENALLEGUE, A., FRIDMAN, L. “Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 349, n. 2, pp. 685–699, 2012.
- [35] EVANGELISTA, C., PULESTON, P., VALENCIAGA, F., et al. “Lyapunov-Designed Super-Twisting Sliding Mode Control for Wind Energy Conversion Optimization”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 60, n. 2, pp. 538–545, Fevereiro 2013.
- [36] LEVANT, A. “Introduction to high-order sliding modes”. 2002. Disponível em: <http://www.tau.ac.il/~levant/hosm2002.pdf>.
- [37] DEIMLING, K. *Multivalued Differential Equations*. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. De Gruyter, 1992.

- [38] SIDI, M. J. *Spacecraft Dynamics and Control: A Practical Engineering Approach*. Cambridge University Press, 1997.
- [39] GOEREE, B., FASSE, E. “Sliding mode attitude control of a small satellite for ground tracking maneuvers”. In: *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, v. 2, pp. 1134–1138, 2000.
- [40] HSU, L., ORTEGA, R., DAMM, G. “A globally convergent frequency estimator”, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 44, n. 4, pp. 698–713, Abril 1999.
- [41] LIAPUNOV, A. M., PLISS, V. A., ABRAMOVICI, F. *Stability of motion*. Mathematics in science and engineering: a series in monographs and textbooks. Burlington, MA, Elsevier, 1967.
- [42] HSU, L., COSTA, R. R., CUNHA, J. P. V. S. “Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems”, *Asian Journal of Control*, v. 5, n. 4, pp. 543–556, 2003.
- [43] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems, 3rd Ed.* John Wiley, 2002.
- [44] CUNHA, J. P. V. S. *Controle de Sistemas Multivariáveis Incertos por Realimentação de Saída e Modo Deslizante*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [45] CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R., HSU, L. “Design of sliding mode controllers for linear uncertain systems based on first order approximation filters”. In: *Proc. 9th Int. Workshop Variable Structure Syst., Alghero, Italy*, pp. 340–345, 2006.
- [46] LORÍA, A. “Observers are Unnecessary for Output-Feedback Control of Lagrangian Systems”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 61, n. 4, pp. 905–920, Abril 2016.
- [47] STRANG, G. *Linear algebra and its applications*. Academic Press, 1976.

Apêndice A

Super-Twisting

A.1 Super-Twisting – Análise das Trajetórias

Seja o sistema em malha-fechada definido por (2.39) e (2.41), obedecendo às desigualdades (2.40). A derivada temporal do sinal de controle é dada por

$$\dot{u} = \begin{cases} -\frac{k_1}{2} \frac{\dot{\sigma}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} - u, & |u| > U_M, \\ -\frac{k_1}{2} \frac{\dot{\sigma}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} - k_2 \operatorname{sgn}(\sigma), & |u| \leq U_M. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Para $|u| > U_M$, segue da dinâmica (2.39) e da terceira desigualdade em (2.40) que $u\dot{\sigma} > 0$, o que implica $u\dot{u} < -U_M|u|$. Logo, o sinal de controle u converge em tempo finito para o segmento $[-U_M, U_M]$, e nele permanece. O sinal de controle nunca deixará este segmento se estiver inicialmente localizado dentro dele.

Na fronteira $|u| = U_M$, segue da dinâmica (2.39) e das desigualdades (2.40) que

$$K_m(1-q)U_M \leq |\dot{\sigma}| = b \left| \frac{a}{b} + u \right| \leq K_M(1+q)U_M, \quad |u| = U_M, \quad (\text{A.2})$$

com $u\dot{\sigma} > 0$. Neste caso, segue de (A.1) que $u\dot{u} > 0$ para $\sigma\dot{\sigma} < 0$ e $|\sigma|$ suficientemente grande, e portanto pode existir um modo deslizante de primeira ordem mantendo $u = -U_M \operatorname{sgn}(\sigma)$. Note, no entanto, que este modo deslizante é mantido apenas durante um intervalo de tempo finito, uma vez que $\sigma\dot{\sigma} < 0$ e $|\dot{\sigma}|$ obedece à desigualdade (A.2), o que implica $|\sigma|$ decrescente até que $u\dot{u} < 0$.

Para $|u| < U_M$, segue de (2.39) e (A.1) que o sistema possui a seguinte dinâmica:

$$\ddot{\sigma} = \dot{a} + \dot{b}u - \frac{bk_1}{2} \frac{\dot{\sigma}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} - bk_2 \operatorname{sgn}(\sigma), \quad |u| < U_M.$$

Considerando as desigualdades (2.40), verifica-se que tal dinâmica obedece à seguinte

inclusão diferencial:

$$\ddot{\sigma} \in [-C, C] - [K_m, K_M] \left(\frac{k_1}{2} \frac{\dot{\sigma}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} + k_2 \operatorname{sgn}(\sigma) \right), \quad |u| < U_M. \quad (\text{A.3})$$

Suponha que, em um dado instante de tempo, o estado do sistema seja dado por $\sigma = 0$ e $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_0 > 0$. Neste caso, como a derivada temporal $\dot{\sigma}$ é positiva, σ cresce, levando a trajetória do sistema para primeiro quadrante do plano de fase $(\sigma, \dot{\sigma})$.

No primeiro quadrante, uma vez que a condição $K_m k_2 > C$ é satisfeita e $\sigma, \dot{\sigma} > 0$, pode-se concluir por (A.3) que $\ddot{\sigma} < 0$. Assim, $\dot{\sigma}$ irá decrescer, levando o sistema ao quarto quadrante, enquanto σ crescerá até que alcance seu valor máximo em $\dot{\sigma} = 0$. Uma curva majorante para a trajetória real do sistema no primeiro quadrante pode ser obtida a partir da desigualdade

$$\dot{\sigma} \frac{d\dot{\sigma}}{dt} \leq - (K_m k_2 - C) \frac{d\sigma}{dt},$$

que é obtida considerando a inclusão (A.3) com $\sigma, \dot{\sigma} > 0$. Integrando, tem-se

$$\frac{\dot{\sigma}^2}{2} - \frac{\dot{\sigma}_0^2}{2} \leq - (K_m k_2 - C) \sigma$$

O valor máximo de σ no primeiro quadrante é então majorado por

$$\sigma_M = \frac{\dot{\sigma}_0^2}{2(K_m k_2 - C)} \geq \sigma. \quad (\text{A.4})$$

Logo, a curva majorante para a trajetória real do sistema no primeiro quadrante é definida pela equação

$$\dot{\sigma}^2 = 2(K_m k_2 - C)(\sigma_M - \sigma).$$

No quarto quadrante, como $\dot{\sigma} < 0$, então σ irá decrescer até que se torne igual a zero. Além disso, considerando (A.3) com $\sigma > 0$ e $\dot{\sigma} < 0$, é possível obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{2} \frac{\dot{\sigma}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} &> - \left(k_2 - \frac{C}{K_m} \right) \Rightarrow \ddot{\sigma} < 0, \\ \frac{k_1}{2} \frac{\dot{\sigma}}{|\sigma|^{\frac{1}{2}}} &< - \left(k_2 + \frac{C}{K_m} \right) \Rightarrow \ddot{\sigma} > 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Assim, $\ddot{\sigma} < 0$ para $|\dot{\sigma}|$ suficientemente pequeno, impossibilitando que a trajetória do sistema aponte novamente em direção ao primeiro quadrante. Por outro lado, como $\ddot{\sigma} > 0$ para $|\dot{\sigma}|$ suficientemente grande, a segunda relação em (A.5) permite obter o

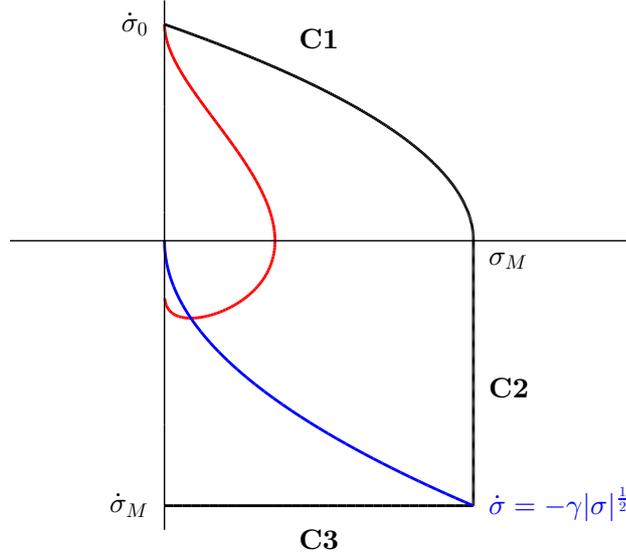


Figura A.1: (●) Trajetória no espaço de estado de um super-twisting, (●) Curvas majorantes: C1, C2 e C3, (●) Parábola $\dot{\sigma} = -\gamma|\sigma|^{\frac{1}{2}}$.

seguinte limitante inferior para $\dot{\sigma}$:

$$\dot{\sigma}_M = -\frac{2}{k_1} \left(k_2 + \frac{C}{K_m} \right) |\sigma_M|^{\frac{1}{2}} \leq \dot{\sigma}. \quad (\text{A.6})$$

Note que este limitante é obtido pela intersecção entre a parábola definida por $\dot{\sigma} = -\gamma|\sigma|^{\frac{1}{2}}$, com $\gamma = \frac{2}{k_1} \left(k_2 + \frac{C}{K_m} \right)$, e a reta $\sigma = \sigma_M$, como ilustra a Figura A.1.

Portanto, uma curva majorante que envolve a trajetória real do sistema no primeiro e quarto quadrantes é definida a partir dos seguintes segmentos:

$$\begin{aligned} \text{Segmento C1: } & \dot{\sigma}^2 = 2(K_m k_2 - C)(\sigma_M - \sigma), & \text{para } \dot{\sigma} \geq 0, \\ \text{Segmento C2: } & \sigma = \sigma_M, & \text{para } \dot{\sigma}_M \leq \dot{\sigma} < 0, \\ \text{Segmento C3: } & \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_M, & \text{para } 0 \leq \sigma \leq \sigma_M \end{aligned}$$

A Figura A.1 ilustra um exemplo de trajetória de um super-twisting, com suas respectivas curvas majorantes. Observe que a trajetória real é envolvida pelas curvas C1, C2 e C3, que funcionam como limitantes.

Note que a análise das trajetórias do sistema no terceiro e segundo quadrantes, para $|u| < U_M$, é análoga à feita anteriormente. Assim, uma condição capaz de garantir localmente a convergência do algoritmo é dada por $\left| \frac{\dot{\sigma}_M}{\dot{\sigma}_0} \right| < 1$, e equivale a

$$k_1 > \left(k_2 + \frac{C}{K_m} \right) \sqrt{\frac{2}{(K_m k_2 - C)}}. \quad (\text{A.7})$$

de acordo com (A.6) e (A.4). Entretanto, esta condição não é suficiente para asse-

gurar convergência global, uma vez que não impede que as trajetórias do sistema alternem entre os modos deslizantes de primeira ordem nas fronteiras $u = \pm U_M$. Uma condição suficiente para a convergência global do algoritmo super-twisting é obtida considerando os limitantes (A.2) nas fronteiras $u = \pm U_M$. Esta condição é dada por

$$\left| \frac{\dot{\sigma}_M}{\dot{\sigma}_0} \right| < \frac{K_m(1-q)}{K_M(1+q)} < 1, \quad (\text{A.8})$$

e é equivalente a

$$k_1 > \frac{K_M(1+q)(K_mk_2 + C)}{K_m^2(1-q)} \sqrt{\frac{2}{(K_mk_2 - C)}} \quad (\text{A.9})$$

de acordo com (A.6) e (A.4). Resta mostrar que esta convergência ocorre em tempo finito. Para isso, basta considerar uma vizinhança suficientemente pequena da origem, uma vez que (A.8) garante que as trajetórias do sistema convergem para esta vizinhança após um intervalo de tempo finito.

Considere $|u| < U_M$, e defina a variável auxiliar

$$\xi = a(t, x) + b(t, x)z,$$

de modo que $\xi = \dot{\sigma}$ para $\sigma = 0$, de acordo com (2.39) e (2.41). Note que $z \rightarrow -\frac{a}{b}$ na medida que o sistema se aproxima da origem do espaço de estado. Suponha que, após um intervalo de tempo finito, a trajetória do sistema se encontre em uma vizinhança suficiente pequena da origem, tal que $|z| < U_M$. Neste caso, tem-se

$$\dot{\xi} = \dot{a} + \dot{b}z - bk_2 \operatorname{sgn}(\sigma),$$

e a seguinte desigualdade é válida, de acordo com (2.40):

$$\dot{\xi} \operatorname{sgn}(\sigma) \leq -(K_mk_2 - C).$$

Logo, integrando esta desigualdade entre os instantes de tempo em que a trajetória cruza o eixo $\dot{\sigma}$, é possível obter o seguinte limitante superior para o intervalo de tempo T_i necessário para realizar meia volta sobre a origem do espaço de estado:

$$T_i \leq \frac{|\dot{\sigma}_i| + |\dot{\sigma}_{i+1}|}{(K_mk_2 - C)},$$

onde $\dot{\sigma}_i$ e $\dot{\sigma}_{i+1}$ representam as intersecções entre a trajetória e o eixo $\dot{\sigma}$. O intervalo de tempo total T que a trajetória do sistema leva para convergir para a origem do espaço de estado é então obtido pela soma dos intervalos de tempo de cada meia

volta sobre a origem, e limitado por

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} T_i \leq \frac{2}{(K_m k_2 - C)} \sum_{i=0}^{\infty} |\dot{\sigma}_i|,$$

onde $\dot{\sigma}_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, correspondem às intersecções entre a trajetória do sistema e o eixo $\dot{\sigma}$. Considerando a condição (A.8), verifica-se que o somatório $\sum_{i=0}^{\infty} |\dot{\sigma}_i|$ é limitado pela soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com razão menor que 1. Sabe-se que esta soma possui um valor finito, o que implica T também finito. Portanto, conclui-se que o modo deslizante de segunda ordem na origem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ atrai as trajetórias do sistema em tempo finito. \square

A.2 Variable Gain Super-Twisting – Análise por Função de Lyapunov

Seja a função candidata representada pela seguinte forma quadrática [17, 18]:

$$V(\sigma, z) = \zeta^T P \zeta,$$

onde

$$\zeta = \begin{bmatrix} \phi_1(\sigma) \\ z \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \beta + 4\epsilon^2 & -2\epsilon \\ -2\epsilon & 1 \end{bmatrix},$$

com constantes positivas arbitrárias $\beta > 0$ e $\epsilon > 0$. Note que esta função é positiva definida, uma vez que P é uma matriz simétrica e positiva definida. Além disso, a função $V(\sigma, z)$ é contínua em todo ponto, e diferenciável em todo ponto com exceção do subespaço $\mathcal{S}_1 = \{(\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = 0\}$. Pretende-se mostrar que $V(\sigma, z)$ é uma função de Lyapunov para o subsistema (σ, z) do sistema em malha-fechada (2.55), e que esta função converge para zero em tempo finito. Para isso, considere a derivada temporal da variável ζ , dada por

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \phi_1'(\sigma) \dot{\sigma} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1'(\sigma) \{-k_1(t, x)\phi_1(\sigma) + z + g_1(t, \bar{x}_1, \sigma)\} \\ -k_2(t, x)\phi_2(\sigma) + \frac{d}{dt}[g_2(t, \bar{x}_1)] \end{bmatrix},$$

onde $\phi_1'(\sigma) = \frac{d\phi_1}{d\sigma}$. Os termos correspondentes às incertezas/perturbações presentes no sistema podem ser representados, sem perda de generalidade, pelos produtos $g_1(t, \bar{x}_1, \sigma) = \alpha_1(t, x)\phi_1(\sigma)$ e $\frac{d}{dt}[g_2(t, \bar{x}_1)] = \alpha_2(t, x)\phi_2(\sigma)$, com funções apropriadas $\alpha_1(t, x)$ e $\alpha_2(t, x)$. Assim, de acordo com as desigualdades (2.54), tem-se que $|\alpha_1(t, x)| \leq \varrho_1(t, x)$ e $|\alpha_2(t, x)| \leq \varrho_2(t, x)$. Além disso, uma importante propriedade

das funções $\phi_1(\sigma)$ e $\phi_2(\sigma)$ é dada pela seguinte relação:

$$\phi_1'(\sigma)\phi_1(\sigma) = \left(\frac{1}{2|\sigma|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \phi_1(\sigma) = \phi_2(\sigma).$$

Então, a derivada temporal de ζ pode ser reescrita como

$$\dot{\zeta} = \phi_1'(\sigma)\mathcal{A}(t, x)\zeta, \quad \mathcal{A}(t, x) = \begin{bmatrix} -(k_1(t, x) - \alpha_1(t, x)) & 1 \\ -(k_2(t, x) - \alpha_2(t, x)) & 0 \end{bmatrix},$$

para todo ponto $(\sigma, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}_1$. Logo, a derivada temporal da função candidata $V(\sigma, z)$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}_1$ é dada por

$$\dot{V} = \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} = -\phi_1'(\sigma)\zeta^T Q(t, x)\zeta,$$

onde

$$Q(t, x) = -(\mathcal{A}^T(t, x)P + P\mathcal{A}(t, x)) = \begin{bmatrix} 2\{(\beta + 4\epsilon^2)(k_1 - \alpha_1) - 2\epsilon(k_2 - \alpha_2)\} & \star \\ -(\beta + 4\epsilon^2) - 2\epsilon(k_1 - \alpha_1) + (k_2 - \alpha_2) & 4\epsilon \end{bmatrix}.$$

Note que $Q(t, x)$ é uma matriz simétrica, uma vez que P é simétrica. Considerando o ganho variável $k_2(t, x)$ definido por (2.56), tem-se

$$Q(t, x) = \begin{bmatrix} 2\{\beta k_1 + 2\epsilon\alpha_2 - [2\epsilon + \alpha_1](\beta + 4\epsilon^2)\} & \star \\ 2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2 & 4\epsilon \end{bmatrix}.$$

Assim, pode-se verificar que, se o ganho variável $k_1(t, x)$ for escolhido de acordo com (2.56), então a matriz simétrica obtida pela subtração

$$Q - 2\epsilon I = \begin{bmatrix} 2\left\{\beta\delta + \frac{1}{4\epsilon}[2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon[\varrho_2 + \alpha_2] + [\varrho_1 - \alpha_1](\beta + 4\epsilon^2)\right\} & \star \\ 2\epsilon\alpha_1 - \alpha_2 & 2\epsilon \end{bmatrix}$$

é positiva definida, uma vez que $|\alpha_1(t, x)| \leq \varrho_1(t, x)$ e $|\alpha_2(t, x)| \leq \varrho_2(t, x)$. Logo, a derivada temporal da função candidata $V(\sigma, z)$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}_1$ é limitada por

$$\dot{V} = -\phi_1'(\sigma)\zeta^T Q(t, x)\zeta \leq -2\epsilon\phi_1'(\sigma)\zeta^T \zeta = -2\epsilon \left(\frac{1}{2|\sigma|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\zeta\|^2, \quad (\text{A.10})$$

onde $\|\zeta\|$ representa a norma Euclidiana de ζ , dada por

$$\|\zeta\| = \sqrt{\phi_1^2 + z^2} = \sqrt{|\sigma| + 2k_3|\sigma|^{\frac{3}{2}} + k_3^2\sigma^2 + z^2}.$$

Além disso, considerando a desigualdade

$$\lambda_{\min} \{P\} \|\zeta\|^2 \leq V = \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \|\zeta\|^2,$$

onde $\lambda_{\max} \{P\}$ e $\lambda_{\min} \{P\}$ representam respectivamente os autovalores máximo e mínimo da matriz P , obtém-se as seguintes relações:

$$\|\zeta\|^2 \geq \frac{V}{\lambda_{\max} \{P\}}, \quad |\sigma|^{\frac{1}{2}} \leq \|\zeta\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}} \{P\}}. \quad (\text{A.11})$$

Então, considerando (A.10) e (A.11), tem-se que a derivada temporal de $V(\sigma, z)$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}_1$ obedece à seguinte desigualdade:

$$\dot{V} \leq -\gamma_1 V^{\frac{1}{2}}(\sigma, z) - \gamma_2 V(\sigma, z), \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\gamma_1 = \frac{\epsilon \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}} \{P\}}{\lambda_{\max} \{P\}}, \quad \gamma_2 = \frac{2\epsilon k_3}{\lambda_{\max} \{P\}}.$$

Portanto, observando que as trajetórias do subsistema (σ, z) do sistema em malha fechada (2.55) não podem permanecer no subconjunto $\mathcal{S}_1 \setminus \{0\}$, verifica-se que $V(\sigma, z)$ é uma função continuamente decrescente. Logo, a partir do Teorema de Lyapunov generalizado para Inclusões Diferenciais [37, Proposição 14.1], pode-se concluir que $V(\sigma, z)$ é uma função de Lyapunov para o subsistema (σ, z) . A propriedade que permite esta conclusão é que o Teorema de Lyapunov generalizado requer apenas a continuidade, e não diferenciabilidade, da função de Lyapunov. Além disso, a solução da equação de comparação

$$\dot{\bar{v}} = -\gamma_1 \bar{v}^{\frac{1}{2}} - \gamma_2 \bar{v}, \quad \bar{v}(t_0) = \bar{v}_0 \geq 0,$$

é dada por

$$\bar{v}(t) = e^{-\gamma_2(t-t_0)} \left[\bar{v}_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \left(1 - e^{\frac{\gamma_2}{2}(t-t_0)} \right) \right]^2, \quad \forall t \geq t_0.$$

Logo, $V(\sigma, z)$ converge para zero após um intervalo de tempo finito T limitado por

$$T \leq \frac{2}{\gamma_2} \ln \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} V^{\frac{1}{2}}(\sigma(t_0), z(t_0)) \right).$$

Note que $V(\sigma, z) = 0$ implica $z = \sigma = \dot{\sigma} = 0$. Portanto, conclui-se que as trajetórias do sistema são atraídas globalmente em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$.

Apêndice B

Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída

B.1 Demonstração do Teorema 4.1

Demonstração. Seja a seguinte função candidata de Lyapunov, ligeiramente modificada em relação à função proposta em [17, 18]:

$$V(e, z) = \zeta^T P \zeta, \quad P = \begin{bmatrix} k_p \beta + 4\epsilon^2 & -2\epsilon \\ -2\epsilon & 1 \end{bmatrix},$$

com $\zeta = [\phi_1(e) \ z]^T$, e $\beta, \epsilon > 0$. Note que esta função é contínua em todo ponto, e diferenciável em todo ponto exceto no subespaço $\mathcal{S} = \{(e, z) \in \mathbb{R}^2 | e = 0\}$. Considere a seguinte propriedade das funções $\phi_1(e)$ e $\phi_2(e)$, definidas em (4.12):

$$\phi_1'(e) = \frac{d\phi_1}{de} = \frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3, \quad \phi_2 = \phi_1' \phi_1 = \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \phi_1.$$

Logo, segue que a derivada temporal de ζ é dada por

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \phi_1'(e) \{-k_p k_1(t, \hat{\eta}, e) \phi_1(e) + z + g_1(\eta, e, t)\} \\ -k_p k_2(t, \hat{\eta}, e) \phi_2(e) + \frac{d}{dt}[g_2(\eta, t)] \end{bmatrix} = \phi_1'(e) \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e) \zeta + \psi(\eta, e, t),$$

com

$$\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} -k_p k_1(t, \hat{\eta}, e) & 1 \\ -k_p k_2(t, \hat{\eta}, e) & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi(\eta, e, t) = \begin{bmatrix} \phi_1'(e) g_1(\eta, e, t) \\ \frac{d}{dt}[g_2(\eta, t)] \end{bmatrix},$$

para todo ponto em $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$, onde esta derivada existe. Neste caso, é possível verificar que a derivada temporal da função candidata $V(e, z)$ no mesmo subconjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$

é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\ &= \phi_1'(e) \zeta^T (\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)^T P + P \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)) \zeta + 2 \zeta^T P \psi(\eta, e, t) \\ &= -\phi_1'(e) \zeta^T \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) \zeta + 2 \zeta^T P \psi(\eta, e, t),\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) = -(\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)^T P + P \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)) = \begin{bmatrix} 2\beta k_p^2 k_1 + 4\epsilon k_p(2\epsilon k_1 - k_2) & \star \\ k_p(k_2 - 2\epsilon k_1 - \beta) - 4\epsilon^2 & 4\epsilon \end{bmatrix}.$$

Substituindo o ganho k_2 pelo definido em (4.15), tem-se

$$\mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} 2\beta k_p^2 k_1 - 4\epsilon k_p \beta & \star \\ -4\epsilon^2 & 4\epsilon \end{bmatrix}.$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}\zeta^T P \psi(\eta, e, t) &= \{(k_p \beta + 4\epsilon^2)\phi_1 - 2\epsilon z\} \phi_1' g_1 + \{-2\epsilon \phi_1 + z\} \frac{dg_2}{dt} \\ &\leq (k_p \beta + 4\epsilon^2) \phi_1' |\phi_1| |g_1| + 2\epsilon \phi_1' |z| |g_1| + \{2\epsilon |\phi_1| + |z|\} \left| \frac{dg_2}{dt} \right| \\ &\leq \phi_1' \{[(\varrho_1 + |\pi_1|)(k_p \beta + 4\epsilon^2) + 2\epsilon(\varrho_2 + |\pi_2|)] |\phi_1|^2 \\ &\quad + [(\varrho_2 + |\pi_2|) + 2\epsilon(\varrho_1 + |\pi_1|)] |z| |\phi_1|\},\end{aligned}$$

então tem-se

$$2\zeta^T P \psi \leq \phi_1' \{\bar{\zeta}^T \Gamma(t, \hat{\eta}, e) \bar{\zeta} + \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\},$$

com $\bar{\zeta} = [|\phi_1| \quad |z|]^T$ e

$$\Gamma(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} 2\varrho_1(k_p \beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon \varrho_2 & \star \\ \varrho_2 + 2\epsilon \varrho_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi(t) = \begin{bmatrix} 2|\pi_1|(k_p \beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon |\pi_2| & \star \\ |\pi_2| + 2\epsilon |\pi_1| & 0 \end{bmatrix}.$$

Da desigualdade $\bar{\zeta}^T \mathcal{Q} \bar{\zeta} \leq \zeta^T \mathcal{Q} \zeta$, segue que

$$\dot{V} \leq -\phi_1' \{\bar{\zeta}^T \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) \bar{\zeta} - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\},$$

onde

$$Q(t, \hat{\eta}, e) = \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) - \Gamma(t, \hat{\eta}, e),$$

e

$$Q - 2\epsilon I = \begin{bmatrix} 2\beta k_p^2 k_1 - 2\varrho_1(k_p \beta + 4\epsilon^2) - 4\epsilon(\varrho_2 + k_p \beta) - 2\epsilon & \star \\ -(4\epsilon^2 + \varrho_2 + 2\epsilon \varrho_1) & 2\epsilon \end{bmatrix},$$

Note que selecionando o ganho k_1 de acordo com (4.15), tem-se que $Q - 2\epsilon I$ é uma matriz positiva definida. Logo, a derivada temporal da função candidata é limitada pela seguinte desigualdade:

$$\dot{V} \leq - \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \{2\epsilon \|\zeta\|^2 - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\}, \quad (\text{B.1})$$

uma vez que $\|\bar{\zeta}\| = \|\zeta\|$. Além disso, como $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$ são limitados, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \leq \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) |\phi_1| \{c_{\phi_1} |\phi_1| + c_z |z|\} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} k_3 |e|^{\frac{1}{2}} + k_3^2 |e| \right) \{c_\zeta \|\zeta\|\} \\ &\leq c_1 \|\zeta\| + c_2 \|\zeta\|^2, \end{aligned}$$

para determinadas constantes $c_{\phi_1}, c_z, c_\zeta, c_1, c_2 > 0$, uma vez que

$$\|\zeta\|^2 = |\phi_1|^2 + |z|^2 = |e| + 2k_3|e|^{3/2} + k_3^2|e|^2 + |z|^2.$$

Assim, segue da desigualdade

$$\lambda_{\min} \{P\} \|\zeta\|^2 \leq V(e, z) = \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \|\zeta\|^2 \quad (\text{B.2})$$

que a derivada temporal da função candidata é limitada por

$$\dot{V} \leq \bar{c}_1 V^{\frac{1}{2}}(e, z) + \bar{c}_2 V(e, z),$$

para constantes $\bar{c}_1, \bar{c}_2 > 0$. Portanto, $V(e, z)$ não pode escapar em tempo finito.

Por outro lado, é possível mostrar que a seguinte desigualdade é válida:

$$\bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \leq |\pi_\zeta(t)| \|\bar{\zeta}\|^2,$$

para determinada função exponencial decrescente $\pi_\zeta(t)$. Esta desigualdade, em conjunto com (B.1), implica

$$\dot{V} \leq - (2\epsilon - |\pi_\zeta(t)|) \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\bar{\zeta}\|^2.$$

Logo, como $|\pi_\zeta(t)|$ é um termo exponencialmente decrescente, tem-se a seguinte relação após um instante de tempo finito t_1 :

$$2\epsilon - |\pi_\zeta(t)| \geq 2\mu, \quad \forall t \geq t_1,$$

onde $\mu < \epsilon$ é uma constante positiva. Assim, tem-se

$$\dot{V} \leq -2\mu \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\zeta\|^2, \quad \forall t \geq t_1.$$

Então, considerando (B.2) e a desigualdade

$$|e|^{\frac{1}{2}} \leq \|\zeta\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}(e, z)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}},$$

pode-se mostrar que a derivada temporal da função candidata $V(e, z)$ é limitada de acordo com a seguinte desigualdade:

$$\dot{V} \leq -\kappa_1 V^{\frac{1}{2}}(e, z) - \kappa_2 V(e, z), \quad \forall t \geq t_1,$$

para constantes positivas

$$\kappa_1 = \frac{\mu \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}}{\lambda_{\max}\{P\}}, \quad \kappa_2 = \frac{2\mu k_3}{\lambda_{\max}\{P\}}.$$

Neste caso, observando que as trajetórias do subsistema (e, z) do sistema em malha-fechada (4.14) não podem permanecer no subconjunto $\mathcal{S} \setminus \{0\}$, verifica-se que $V(e, z)$ é uma função continuamente decrescente. Logo, a partir do Teorema de Lyapunov generalizado para Inclusões Diferenciais [37, Proposição 14.1], pode-se concluir que $V(e, z)$ é uma função de Lyapunov para o subsistema (e, z) . A propriedade que permite esta conclusão é que o Teorema de Lyapunov generalizado requer apenas a continuidade, e não diferenciabilidade, da função de Lyapunov. Além disso, a solução da equação de comparação

$$\dot{v} = -\kappa_1 v^{\frac{1}{2}} - \kappa_2 v, \quad v(t_1) = v_1 \geq 0, \quad \forall t \geq t_1$$

é dada por

$$v(t) = e^{-\kappa_2(t-t_1)} \left[v_1^{\frac{1}{2}} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \left(1 - e^{\frac{\kappa_2}{2}(t-t_1)} \right) \right]^2, \quad \forall t \geq t_1.$$

Logo, $V(e, z)$ converge para zero após um instante de tempo finito T limitado por

$$T \leq t_1 + \frac{2}{\kappa_2} \ln \left(1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} V^{\frac{1}{2}}(e(t_1), z(t_1)) \right).$$

Note que $V(e, z) = 0$ implica $z = e = \dot{e} = 0$. Portanto, as trajetórias do sistema são atraídas em tempo finito para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$. \square

B.2 Demonstração do Teorema 4.2

Demonstração. Seja a seguinte função candidata de Lyapunov, que é uma extensão multivariável da função proposta em [17, 18]:

$$V(e, z) = \zeta^T P \zeta, \quad P = \begin{bmatrix} (\beta + 4\epsilon^2)I & -2\epsilon I \\ -2\epsilon I & I \end{bmatrix}$$

com $\zeta = [\phi_1^T(e) \ z^T]^T$, e $\beta, \epsilon > 0$. Note que esta função é contínua em todo ponto, e diferenciável em todo ponto exceto no subespaço $\mathcal{S} = \{(e, z) \in \mathbb{R}^{2m} \mid e = 0\}$. Neste caso, segue da dinâmica do sistema em malha-fechada (4.26) e da Propriedade (P1) que a derivada temporal de ζ é dada por

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \Phi_1'(e) \{-k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) + z + \bar{g}_1(\eta, e, t)\} \\ -k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e) + \frac{d}{dt}[\bar{g}_2(\eta, t)] \end{bmatrix} = \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)\zeta + \psi(\eta, e, t),$$

com

$$\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} -k_1(t, \hat{\eta}, e)\Phi_1'(e) & \Phi_1'(e) \\ -k_2(t, \hat{\eta}, e)\Phi_1'(e) & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi(\eta, e, t) = \begin{bmatrix} \Phi_1'(e)\bar{g}_1(\eta, e, t) \\ \frac{d}{dt}[\bar{g}_2(\eta, t)] \end{bmatrix},$$

para todo ponto em $\mathbb{R}^{2m} \setminus \mathcal{S}$, onde esta derivada existe. Logo, é possível verificar que a derivada temporal da função candidata no mesmo subconjunto $\mathbb{R}^{2m} \setminus \mathcal{S}$ é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\ &= \zeta^T (\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)^T P + P \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)) \zeta + 2\zeta^T P \psi(\eta, e, t) \\ &= -\zeta^T \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) \zeta + 2\zeta^T P \psi(\eta, e, t), \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde

$$\mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) = -(\mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)^T P + P \mathcal{A}(t, \hat{\eta}, e)) = \begin{bmatrix} \{2\beta k_1 + 4\epsilon(2\epsilon k_1 - k_2)\} \Phi_1' & \star \\ \{k_2 - 2\epsilon k_1 - (\beta + 4\epsilon^2)\} \Phi_1' & 4\epsilon \Phi_1' \end{bmatrix}.$$

Substituindo o ganho k_2 pelo definido em (4.27), tem-se

$$\mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} \{2\beta k_1 - 4\epsilon(\beta + 4\epsilon^2)\} \Phi_1' & 0 \\ 0 & 4\epsilon \Phi_1' \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a Propriedade (P2) implica

$$-\zeta^T \mathcal{Q}(t, \hat{\eta}, e) \zeta \leq -\left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3\right) \bar{\zeta}^T \bar{\mathcal{Q}}(t, \hat{\eta}, e) \bar{\zeta},$$

com $\bar{\zeta} = [\|\phi_1(e)\| \quad \|z\|]^T$ e

$$\bar{Q}(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} 2\beta k_1 - 4\epsilon(\beta + 4\epsilon^2) & 0 \\ 0 & 4\epsilon \end{bmatrix}.$$

Além disso, considerando (4.25) e a Propriedade (P1), tem-se

$$\begin{aligned} \zeta^T P\psi(\eta, e, t) &= \{(\beta + 4\epsilon^2)\phi_1 - 2\epsilon z\}^T \Phi_1' \bar{g}_1 + \{-2\epsilon\phi_1 + z\}^T \frac{d\bar{g}_2}{dt} \\ &\leq (\beta + 4\epsilon^2)\|\phi_1^T \Phi_1'\| \|\bar{g}_1\| + 2\epsilon\|z\| \|\Phi_1'\| \|\bar{g}_1\| + \{2\epsilon\|\phi_1\| + \|z\|\} \left\| \frac{d\bar{g}_2}{dt} \right\| \\ &\leq (\varrho_1 + |\pi_1|) [(\beta + 4\epsilon^2)\|\phi_1\| \|\Phi_1' \phi_1\| + 2\epsilon\|z\| \|\Phi_1'\| \|\phi_1\|] \\ &\quad + (\varrho_2 + |\pi_2|) (2\epsilon\|\phi_1\| + \|z\|) \|\Phi_1' \phi_1\| \end{aligned}$$

Assim, sabendo que

$$\Phi_1'(e)\phi_1(e) = \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \phi_1(e),$$

e considerando a Propriedade (P3), pode-se verificar que

$$\begin{aligned} \zeta^T P\psi(\eta, e, t) &\leq \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \{(\varrho_1 + |\pi_1|)(\beta + 4\epsilon^2)\|\phi_1\|^2 + 4\epsilon(\varrho_1 + |\pi_1|)\|z\|\|\phi_1\| \\ &\quad + 2\epsilon(\varrho_2 + |\pi_2|)\|\phi_1\|^2 + (\varrho_2 + |\pi_2|)\|z\|\|\phi_1\|\}. \end{aligned}$$

Então, tem-se a desigualdade

$$2\zeta^T P\psi(\eta, e, t) \leq \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \{\bar{\zeta}^T \Psi(t, \hat{\eta}, e) \bar{\zeta} + \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\},$$

com

$$\Psi(t, \hat{\eta}, e) = \begin{bmatrix} 2\varrho_1(\beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon\varrho_2 & \star \\ \varrho_2 + 4\epsilon\varrho_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi(t) = \begin{bmatrix} 2|\pi_1|(\beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon|\pi_2| & \star \\ |\pi_2| + 4\epsilon|\pi_1| & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a derivada temporal (B.3) da função candidata $V(e, z)$ é limitada de acordo com a seguinte desigualdade:

$$\dot{V} \leq - \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \{\bar{\zeta}^T Q(t, \hat{\eta}, e) \bar{\zeta} - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\},$$

onde

$$Q(t, \hat{\eta}, e) = \bar{Q}(t, \hat{\eta}, e) - \Psi(t, \hat{\eta}, e),$$

de modo que

$$Q - 2\epsilon I = \begin{bmatrix} 2\beta k_1 - (4\epsilon + 2\rho_1)(\beta + 4\epsilon^2) - 4\epsilon\rho_2 - 2\epsilon & \star \\ & -(\rho_2 + 4\epsilon\rho_1) \\ & & 2\epsilon \end{bmatrix}.$$

Note que selecionando o ganho k_1 de acordo com (4.27), tem-se que $Q - 2\epsilon I$ é uma matriz positiva definida. Portanto, verifica-se que a derivada temporal da função candidata é limitada de acordo com a desigualdade

$$\dot{V} \leq - \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \{2\epsilon\|\zeta\|^2 - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\}. \quad (\text{B.4})$$

uma vez que $\|\bar{\zeta}\| = \|\zeta\|$.

Forward Completeness

Para que seja possível garantir propriedades uniformes globais de estabilidade assintótica e convergência para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$, deve-se primeiramente mostrar que as trajetórias do sistema não podem escapar em tempo finito. Considere a desigualdade (B.4), que implica

$$\dot{V} \leq \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}.$$

Note que os termos exponencialmente decrescentes $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$ presentes nos elementos da matriz $\Pi(t)$ são definidos na Hipótese (A6b) e uniformemente limitados de acordo com

$$\begin{aligned} |\pi_1(t)| &= \gamma_1 (\|x_\eta(t_0)\|) e^{-\lambda_1(t-t_0)} \leq \gamma_1 (\|X_e(t_0)\|), \\ |\pi_2(t)| &= \gamma_2 (\|x_\eta(t_0)\|) e^{-\lambda_2(t-t_0)} \leq \gamma_2 (\|X_e(t_0)\|), \end{aligned} \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{K}_\infty,$$

uma vez que as relações $\hat{\eta}_e(t_0) = \hat{\eta}(t_0)$ e $\eta_e(t_0) = \eta(t_0)$ implicam $\|X_e(t_0)\| \geq \|x_\eta(t_0)\|$. Neste caso, pode-se mostrar que existem constantes positivas $\kappa_1 = \gamma_{\kappa_1}(\|X_e(t_0)\|)$ e $\kappa_2 = \gamma_{\kappa_2}(\|X_e(t_0)\|)$, $\gamma_{\kappa_1}, \gamma_{\kappa_2} \in \mathcal{K}_\infty$, tais que

$$\dot{V} \leq \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\phi_1\| \{ \kappa_1 \|\phi_1\| + \kappa_2 \|z\| \}.$$

Logo, considerando a igualdade $\|\phi_1\| = \|e\|^{\frac{1}{2}} + k_3\|e\|$ e a definição do vetor ζ , é possível mostrar que

$$\dot{V} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}k_3\|e\|^{\frac{1}{2}} + k_3^2\|e\| \right) \kappa_3\|\zeta\|,$$

com $\kappa_3 = \kappa_1 + \kappa_2$. Assim, considerando as relações $\|e\|^{\frac{1}{2}} \leq \|\phi_1\|$, $k_3\|e\| \leq \|\phi_1\|$, e $\|\phi_1\| \leq \|\zeta\|$, pode-se verificar que

$$\dot{V} \leq \kappa_4\|\zeta\| + \kappa_5\|\zeta\|^2,$$

com $\kappa_4 = \frac{\kappa_3}{2}$ e $\kappa_5 = \frac{5k_3\kappa_3}{2}$. Neste caso, como a função candidata $V(e, z)$ satisfaz

$$\lambda_{\min}\{P\}\|\zeta\|^2 \leq V(e, z) = \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max}\{P\}\|\zeta\|^2, \quad (\text{B.5})$$

então sua derivada temporal é limitada por

$$\dot{V} \leq \kappa_6 V^{\frac{1}{2}}(e, z) + \kappa_7 V(e, z),$$

com $\kappa_6 = \frac{\kappa_4}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}}$ e $\kappa_7 = \frac{\kappa_5}{\lambda_{\min}\{P\}}$. Resolvendo a equação de comparação

$$\dot{v} = \kappa_6 v^{\frac{1}{2}} + \kappa_7 v, \quad v(t_0) = v_0 \geq 0 \quad (\text{B.6})$$

obtém-se a solução

$$v(t) = e^{\kappa_7(t-t_0)} \left[v_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\kappa_6}{\kappa_7} \left(1 - e^{-\frac{\kappa_7}{2}(t-t_0)} \right) \right]^2, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (\text{B.7})$$

Note que $v(t)$ não diverge em tempo finito. Portanto, invocando o princípio de comparação, verifica-se que a função candidata é limitada de acordo com a desigualdade

$$V(e, z) \leq v(t), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (\text{B.8})$$

Assim, é garantido que a variável de estado z e o erro de rastreamento e não escapam em tempo finito. Além disso, como $\hat{\eta}_e$ e η_e são variáveis de estado provenientes de dinâmicas lineares estáveis com ganhos finitos, conclui-se que o estado completo X_e do sistema em malha-fechada (4.26) não pode escapar em tempo finito.

Estabilidade Uniforme Global

Visando demonstrar propriedades uniformes globais de estabilidade, considere novamente a relação (B.4). É possível mostrar que existe uma função exponencialmente decrescente $|\pi_3(t)| = \gamma_3(\|X_e(t_0)\|) e^{-\lambda_3(t-t_0)}$, $\lambda_3 > 0$, $\gamma_3 \in \mathcal{K}_\infty$, capaz de satisfazer a desigualdade

$$\bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \leq |\pi_3(t)| \|\bar{\zeta}\|^2.$$

Neste caso, considerando o termo exponencialmente decrescente $|\pi_3(t)|$, verifica-se que a derivada temporal da função candidata $V(e, z)$ é limitada de acordo com a

seguinte desigualdade:

$$\dot{V} \leq -(2\epsilon - |\pi_3(t)|) \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\bar{\zeta}\|^2, \quad (\text{B.9})$$

Logo, existe um instante de tempo finito T_1 , dado por

$$T_1 = t_0 + \max \left\{ 0, \frac{\ln \left(\frac{\gamma_3(\|X_e(t_0)\|)}{\epsilon} \right)}{\lambda_3} \right\}, \quad (\text{B.10})$$

tal que

$$2\epsilon - |\pi_3(t)| \geq \epsilon, \quad \forall t \geq T_1, \quad (\text{B.11})$$

e a derivada temporal \dot{V} se torna negativa definida. Assim, considerando (B.7) e (B.8), é possível concluir que as trajetórias do sistema podem crescer no máximo exponencialmente até o instante de tempo $t = T_1$, e a função candidata é limitada de acordo com a desigualdade

$$V(e, z) \leq v(T_1), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad (\text{B.12})$$

onde

$$v(T_1) = \left[v_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\kappa_7}{2}(T_1-t_0)} + \frac{\kappa_6}{\kappa_7} \left(e^{\frac{\kappa_7}{2}(T_1-t_0)} - 1 \right) \right]^2. \quad (\text{B.13})$$

Note que, das definições das constantes κ_i e da relação $v_0 = \zeta^T(t_0)P\zeta(t_0)$, segue que

$$\kappa_7 = \frac{5k_3(\kappa_1 + \kappa_2)}{2\lambda_{\min}\{P\}} = \frac{5k_3(\gamma_{\kappa_1} + \gamma_{\kappa_2})}{2\lambda_{\min}\{P\}} = \gamma_{\kappa_7}(\|X_e(t_0)\|), \quad \frac{\kappa_6}{\kappa_7} = \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}}{5k_3},$$

e também

$$\begin{aligned} v_0 &\leq \lambda_{\max}\{P\} \|\zeta(t_0)\|^2 = \lambda_{\max}\{P\} \left[\left(\|e(t_0)\|^{\frac{1}{2}} + k_3\|e(t_0)\| \right)^2 + \|z(t_0)\|^2 \right] \\ &\leq \lambda_{\max}\{P\} \left[\left(\|X_e(t_0)\|^{\frac{1}{2}} + k_3\|X_e(t_0)\| \right)^2 + \|X_e(t_0)\|^2 \right] = \gamma_{v_0}(\|X_e(t_0)\|), \end{aligned}$$

com $\gamma_{\kappa_7}, \gamma_{v_0} \in \mathcal{K}_\infty$. Além disso, considerando (B.10), tem-se a seguinte relação

$$T_1 - t_0 \leq \frac{\ln \left(1 + \frac{\gamma_3(\|X_e(t_0)\|)}{\epsilon} \right)}{\lambda_3} = \gamma_{\Delta T}(\|X_e(t_0)\|), \quad \gamma_{\Delta T} \in \mathcal{K}_\infty.$$

Neste caso, considerando que κ_7 , v_0 , e $T_1 - t_0$ são limitados por funções classe \mathcal{K}_∞ , e que a constante dada pela divisão de κ_6 por κ_7 é independente de $\|X_e\|$, pode-se

verificar que as seguintes desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} v_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\kappa_7}{2}(T_1-t_0)} &\leq \gamma_{v_0}^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\gamma_{\kappa_7}}{2}\gamma_{\Delta T}} = \gamma_4(\|X_e(t_0)\|), & \gamma_4 &\in \mathcal{K}_\infty, \\ \frac{\kappa_6}{\kappa_7} \left(e^{\frac{\kappa_7}{2}(T_1-t_0)} - 1 \right) &\leq \frac{\kappa_6}{\kappa_7} \left(e^{\frac{\gamma_{\kappa_7}}{2}\gamma_{\Delta T}} - 1 \right) = \gamma_5(\|X_e(t_0)\|), & \gamma_5 &\in \mathcal{K}_\infty. \end{aligned}$$

Logo, considerando (B.12) e (B.13), tem-se

$$V(e, z) \leq v(T_1) \leq [\gamma_4(\|X_e(t_0)\|) + \gamma_5(\|X_e(t_0)\|)]^2 = \gamma_6(\|X_e(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0,$$

com $\gamma_6 \in \mathcal{K}_\infty$. Assim, considerando (B.5), verifica-se que as normas da variável de estado z e do erro de rastreamento de saída e são limitadas por

$$\begin{aligned} \|e\| &\leq \frac{\|\zeta\|}{k_3} \leq \frac{V(e, z)}{k_3 \lambda_{\min}\{P\}} \leq \frac{\gamma_6(\|X_e(t_0)\|)}{k_3 \lambda_{\min}\{P\}} = \gamma_e(\|X_e(t_0)\|), & \gamma_e &\in \mathcal{K}_\infty, \\ \|z\| &\leq \|\zeta\| \leq \frac{V(e, z)}{\lambda_{\min}\{P\}} \leq \frac{\gamma_6(\|X_e(t_0)\|)}{\lambda_{\min}\{P\}} = \gamma_z(\|X_e(t_0)\|), & \gamma_z &\in \mathcal{K}_\infty. \end{aligned}$$

Além disso, as variáveis de estado $\hat{\eta}_e$ e η_e em (4.26) são provenientes de dinâmicas lineares e invariantes no tempo com soluções dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_e &= e^{-\lambda_f(t-t_0)} \hat{\eta}_e(t_0) + \int_{t_0}^t c_f e^{-\lambda_f(t-\tau)} [\|e + y_m\| - \|y_m\|] d\tau, & c_f, \lambda_f &> 0, \\ \eta_e &= e^{A_{11}(t-t_0)} \eta_e(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_{11}(t-\tau)} A_{12}e d\tau, & A_{11} &\text{Hurwitz,} \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} |\hat{\eta}_e| &\leq |\hat{\eta}_e(t_0)| + \int_{t_0}^t c_f e^{-\lambda_f(t-\tau)} \|e\| d\tau \leq |\hat{\eta}_e(t_0)| + \frac{c_f}{\lambda_f} \sup_{t \geq t_0} \|e\| \\ &\leq \|X_e(t_0)\| + \frac{c_f}{\lambda_f} \gamma_e(\|X_e(t_0)\|) = \gamma_{\hat{\eta}_e}(\|X_e(t_0)\|), & \gamma_{\hat{\eta}_e} &\in \mathcal{K}_\infty, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \|\eta_e\| &\leq \kappa_8 \|\eta_e(t_0)\| + \int_{t_0}^t \|e^{A_{11}(t-\tau)} A_{12}\| \|e\| d\tau \leq \kappa_8 \|\eta_e(t_0)\| + \kappa_9 \sup_{t \geq t_0} \|e\| \\ &\leq \kappa_8 \|X_e(t_0)\| + \kappa_9 \gamma_e(\|X_e(t_0)\|) = \gamma_{\eta_e}(\|X_e(t_0)\|), & \gamma_{\eta_e} &\in \mathcal{K}_\infty, \end{aligned}$$

para determinadas constantes $\kappa_8, \kappa_9 > 0$. Logo, conclui-se que a norma do vetor de estado X_e do sistema em malha-fechada (4.26) é limitada $\forall t \geq t_0 \geq 0$ por

$$\|X_e\| \leq |\hat{\eta}_e| + \|\eta_e\| + \|e\| + \|z\| \leq \gamma_{\hat{\eta}_e} + \gamma_{\eta_e} + \gamma_e + \gamma_z = \gamma_{X_e}(\|X_e(t_0)\|),$$

onde $\gamma_{X_e} \in \mathcal{K}_\infty$. Portanto, a origem do sistema em malha-fechada (4.26) é globalmente uniformemente estável de acordo com [46, Definição 2].

Convergência Global em Tempo Finito

Com o objetivo de demonstrar a convergência global em tempo finito das trajetórias do sistema (4.26) para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$, considere novamente a desigualdade (B.9). Como a relação (B.11) é válida $\forall t \geq T_1$, então

$$\dot{V} \leq -\epsilon \left(\frac{1}{2\|e\|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\zeta\|^2, \quad \forall t \geq T_1.$$

Logo, segue das desigualdades (B.5) e $\|e\|^{\frac{1}{2}} \leq \|\phi_1\| \leq \|\zeta\|$ que

$$\dot{V} \leq -c_1 V^{\frac{1}{2}}(e, z) - c_2 V(e, z), \quad \forall t \geq T_1,$$

onde

$$c_1 = \frac{\epsilon}{2\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}\{P\}}, \quad c_2 = \frac{\epsilon k_3}{\lambda_{\max}\{P\}}.$$

Neste caso, observando que as trajetórias do subsistema (e, z) do sistema em malha-fechada (4.26) não podem permanecer no subconjunto $\mathcal{S} \setminus \{0\}$, verifica-se que $V(e, z)$ é uma função continuamente decrescente. Logo, a partir do Teorema de Lyapunov generalizado para Inclusões Diferenciais [37, Proposição 14.1], pode-se concluir que $V(e, z)$ é uma função de Lyapunov para o subsistema (e, z) . A propriedade que permite esta conclusão é que o Teorema de Lyapunov generalizado requer apenas a continuidade, e não diferenciabilidade, da função de Lyapunov. Além disso, a solução da equação de comparação

$$\dot{v} = -c_1 v^{\frac{1}{2}} - c_2 v, \quad v(T_1) = v_1 \geq 0, \quad \forall t \geq T_1$$

é dada por

$$v(t) = e^{-c_2(t-T_1)} \left[v_1^{\frac{1}{2}} + \frac{c_1}{c_2} \left(1 - e^{\frac{c_2}{2}(t-T_1)} \right) \right]^2, \quad \forall t \geq T_1.$$

Logo, $V(e, z)$ converge para zero após um instante de tempo finito T limitado por

$$T \leq T_1 + \frac{2}{c_2} \ln \left(1 + \frac{c_2}{c_1} V^{\frac{1}{2}}(e(T_1), z(T_1)) \right).$$

Note que $V(e, z) = 0$ implica $z = e = \dot{e} = 0$. Portanto, as trajetórias do sistema são atraídas globalmente em tempo finito para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$.

Estabilidade Assintótica Uniforme Global

Após um instante de tempo finito T , as trajetórias do sistema convergem para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$, e as dinâmicas das variáveis de estado $\hat{\eta}_e$ e η_e em (4.26) passam a ser descritas por

$$\dot{\hat{\eta}}_e = -\lambda_f \hat{\eta}_e, \quad \dot{\eta}_e = A_{11} \eta_e, \quad \forall t \geq T,$$

o que implica

$$\hat{\eta}_e = e^{-\lambda_f(t-T)} \hat{\eta}_e(T), \quad \eta_e = e^{A_{11}(t-T)} \eta_e(T), \quad \forall t \geq T,$$

com $\lambda_f > 0$ e A_{11} Hurwitz. Note que $\hat{\eta}_e$ e η_e convergem exponencialmente para zero nestas condições. Logo, conclui-se que, além de globalmente uniformemente estável, a origem do sistema em malha-fechada (4.26) é globalmente uniformemente atrativa [46, Definição 3]. Portanto, de acordo com [46, Definição 4], esta origem também é globalmente uniformemente assintoticamente estável.

□

Apêndice C

Lemas Auxiliares

Lema C.1. *Seja $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, onde $1 \leq m \leq n$, uma matriz de posto completo. Então existe uma matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$\bar{B} = Q^T B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_m \end{bmatrix},$$

onde $\bar{B}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é não-singular.

Demonstração. Pode-se escrever a matriz B como

$$B = B_1 B_2 = \begin{bmatrix} B_\perp & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix},$$

onde $B_\perp \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ é uma matriz de posto completo com colunas pertencentes ao espaço nulo à esquerda de B , e $I_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz identidade. Note que $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz não-singular e $B_\perp^T B = 0$, uma vez que B e B_\perp possuem posto completo e o espaço nulo à esquerda de B é ortogonal ao espaço coluna de B . Sendo assim, é possível realizar a seguinte fatoração QR [47]:

$$B_1 = QR = Q \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix},$$

onde as matrizes $R_1 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ e $R_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ são triangulares superiores e não-singulares. Note que R é diagonal por blocos, uma vez que $B_\perp^T B = 0$. Substituindo $B_1 = QR$ na equação de B , tem-se

$$B = QRB_2 = Q \begin{bmatrix} 0 \\ R_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, definindo $\bar{B}_m = R_2$ e sabendo que Q é uma matriz ortogonal, pode-se

concluir que

$$\bar{B} = Q^T B = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_m \end{bmatrix}.$$

□

Lema C.2. *Seja um sistema definido pela seguinte equação de estado:*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \leq n$, e $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é não-singular. Então o sistema será controlável se e somente se o par (A_{11}, A_{12}) for controlável.

Demonstração. Considere primeiramente que o sistema seja controlável. Assim, a matriz

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & B_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

terá posto completo por linhas $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, o que implica que todas as suas linhas serão linearmente independentes. Sendo assim, a matriz

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

também terá posto completo por linhas $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, e portanto o par (A_{11}, A_{12}) será controlável.

Suponha agora que o par (A_{11}, A_{12}) seja controlável. Neste caso, a matriz (C.2) terá posto completo por linhas, e então o primeiro bloco de linhas da matriz (C.1) será linearmente independente. Sendo assim, como B_2 é não-singular, então a matriz (C.1) também terá posto completo por linhas $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, e o sistema será controlável. □