



LOCALIZAÇÃO SUBMARINA UTILIZANDO UMA ÚNICA REFERÊNCIA ACÚSTICA VIA FILTRO UKF

Victor Frangipani de Oliveira Lima

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Liu Hsu

Rio de Janeiro
Dezembro de 2015

LOCALIZAÇÃO SUBMARINA UTILIZANDO UMA ÚNICA REFERÊNCIA
ACÚSTICA VIA FILTRO UKF

Victor Frangipani de Oliveira Lima

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Liu Hsu, Docteur d'État

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Prof. Valdir Grassi Junior, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2015

Lima, Victor Frangipani de Oliveira

Localização Submarina Utilizando Uma Única Referência Acústica Via Filtro UKF/Victor Frangipani de Oliveira Lima. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015.

XVI, 116 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Liu Hsu

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 77 – 86.

1. Sistema de Localização Submarina. 2. Veículos Submarinos Autônomos. 3. Estimadores de Estado. I. Hsu, Liu. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

LOCALIZAÇÃO SUBMARINA UTILIZANDO UMA ÚNICA REFERÊNCIA ACÚSTICA VIA FILTRO UKF

Victor Frangipani de Oliveira Lima

Dezembro/2015

Orientador: Liu Hsu

Programa: Engenharia Elétrica

Esta dissertação trata do problema de localização submarina utilizando uma única referência acústica e propõe um sistema de localização submarina de baixo custo para o robô submarino de operação remota LUMA (*Light Underwater Mobile Asset*), veículo projetado para realizar pesquisas ambientais na Baía do Almirantado, onde se localiza a Estação Antártica Brasileira. O sistema se baseia no uso de modem acústico, profundímetro, unidade de medição inercial e câmeras de vídeo. Dois estimadores de estado são aplicados, o Filtro de Kalman Estendido (EKF) e o *Unscented Kalman Filter* (UKF), este até então não havia sido analisado para o problema em questão. Como substituto de sensores *Doppler Velocity Log* (DVL), de alto custo, é considerado o uso de câmeras de vídeo como sistema de odometria visual. As simulações computacionais realizadas atestaram a viabilidade do sistema de localização proposto com resultados similares ou até melhores que um sistema de localização USBL convencional.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SINGLE-BEACON UNDERWATER LOCALIZATION WITH UNSCENTED KALMAN FILTER

Victor Frangipani de Oliveira Lima

December/2015

Advisor: Liu Hsu

Department: Electrical Engineering

This dissertation studies the issue of single-beacon underwater localization and proposes a low-cost localization system for remotely operated submarine robot LUMA (Light Underwater Mobile Asset), vehicle designed for environmental research in Admiralty Bay, where is the Comandante Ferraz Brazilian Antarctic Base. The system is based on an acoustic modem, depth sensor, inertial measurement unit and video cameras. Two state estimators are applied, the Extended Kalman Filter (EKF) and the Unscented Kalman Filter (UKF). The UKF until this work wasn't applied for this kind of problem. A visual odometry system is considered as an alternative for a high-cost Dopple Velocity Log sensor. Computer simulations were performed and proved the viability of the proposed system with a localization accuracy comparable or even better than a conventional USBL system.

Sumário

| | |
|---|------------|
| Lista de Figuras | ix |
| Lista de Tabelas | xi |
| Lista de Símbolos | xii |
| Lista de Abreviaturas | xv |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Submersíveis Não Tripulados | 1 |
| 1.2 Objetivos e Metodologia | 3 |
| 1.3 Organização da Dissertação | 4 |
| 2 Sistemas de Localização | 6 |
| 2.1 Introdução | 6 |
| 2.2 Navegação Estimada | 7 |
| 2.2.1 DVL - Doppler Velocity Log | 7 |
| 2.2.2 INS - Sistema de Navegação Inercial | 9 |
| 2.3 Geofísica | 11 |
| 2.3.1 Óptico | 11 |
| 2.3.2 Sonar | 11 |
| 2.4 Acústica | 12 |
| 2.4.1 LBL | 13 |
| 2.4.2 USBL | 15 |
| 2.4.3 SBL | 16 |
| 2.4.4 Localização Com Uma Única Referência Acústica | 17 |
| 2.5 Considerações Finais | 19 |
| 3 Modelo do Sistema | 21 |
| 3.1 Modelo Cinemático do Veículo | 21 |
| 3.2 Modelo Dinâmico do Veículo | 26 |
| 3.3 Modelo dos Sensores | 27 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.4 | Considerações Finais | 28 |
| 4 | Estimadores de Estado | 29 |
| 4.1 | Filtro de Kalman | 29 |
| 4.1.1 | Predição | 30 |
| 4.1.2 | Correção | 31 |
| 4.2 | EKF - Filtro de Kalman Estendido | 35 |
| 4.2.1 | Predição | 36 |
| 4.2.2 | Correção | 37 |
| 4.3 | UKF - Unscented Kalman Filter | 41 |
| 4.3.1 | UT - Transformada Unscented Escalonada | 42 |
| 4.3.2 | UKF - Unscented Kalman Filter | 47 |
| 4.4 | Considerações Finais | 51 |
| 5 | Sistema de Localização Proposto | 52 |
| 5.1 | Sensores | 52 |
| 5.1.1 | Advanced Navigation Spatial | 52 |
| 5.1.2 | Velki HPX | 54 |
| 5.1.3 | WHOI Micromodem | 55 |
| 5.1.4 | Sensor de Velocidade | 56 |
| 5.2 | Algoritmo de Localização | 57 |
| 5.2.1 | Inicialização | 57 |
| 5.2.2 | Submersão | 59 |
| 5.2.3 | Varredura | 62 |
| 5.3 | Considerações Finais | 64 |
| 6 | Simulações | 65 |
| 6.1 | Parâmetros de Simulação | 65 |
| 6.2 | Resultados das Simulações | 68 |
| 6.2.1 | Cenário 1 | 68 |
| 6.2.2 | Cenário 2 | 69 |
| 6.3 | Considerações Finais | 71 |
| 7 | Conclusão | 74 |
| 7.1 | Trabalhos Futuros | 75 |
| | Referências Bibliográficas | 77 |
| A | Conceitos de Probabilidade | 87 |
| A.1 | Variáveis Aleatórias | 87 |
| A.2 | Função Densidade de Probabilidade | 88 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| A.3 | Valor Esperado | 89 |
| A.4 | Distribuição Gaussiana | 90 |
| A.5 | Variáveis Aleatórias Distribuídas Conjuntamente | 90 |
| A.6 | Variáveis Aleatórias Multidimensionais | 91 |
| A.7 | Processo Estocástico | 93 |
| B | Algumas Demonstrações | 95 |
| B.1 | Propriedades do traço de uma matriz | 95 |
| B.1.1 | Permutação Cíclica | 95 |
| B.1.2 | <i>Quadratic Outer Product Trace Derivative</i> | 96 |
| B.1.3 | <i>Sandwich Product Trace Derivative</i> | 96 |
| C | Códigos Desenvolvidos | 98 |
| C.1 | Filtro EKF | 98 |
| C.1.1 | Predição | 98 |
| C.1.2 | Correção | 99 |
| C.2 | Filtro UKF | 99 |
| C.2.1 | UT - Transformada Unscented Escalonada | 99 |
| C.2.2 | Predição | 101 |
| C.2.3 | Correção | 101 |
| C.3 | Simulações | 102 |
| C.3.1 | Gerador de medidas | 102 |
| C.3.2 | Sistema de Localização | 104 |
| C.3.3 | Funções auxiliares | 109 |

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Modelo do ROV LUMA | 1 |
| 1.2 | Exemplos de AUVs | 3 |
| 2.1 | <i>DVL - Doppler Velocity Log</i> | 8 |
| 2.2 | INS - Inertial Navigation Sensor | 10 |
| 2.3 | Mapeamento com sonar | 12 |
| 2.4 | Sonar HISAS | 13 |
| 2.5 | Localização no plano por trilateração | 14 |
| 2.6 | Sistema LBL | 14 |
| 2.7 | Sistema USBL | 15 |
| 2.8 | Sistema SBL | 16 |
| 2.9 | Localização no plano com uma única referência | 17 |
| 2.10 | Modem acústico | 18 |
| 3.1 | Sistema de coordenadas utilizado | 23 |
| 4.1 | Diagrama simplificado do Filtro de Kalman | 30 |
| 4.2 | Diagrama do Filtro de Kalman | 34 |
| 4.3 | Diagrama do Filtro de Kalman Estendido | 39 |
| 4.4 | Transformação polar-cartesiana aproximada por linearização | 42 |
| 4.5 | Transformação polar-cartesiana aproximada via UT | 47 |
| 4.6 | Diagrama do UKF | 51 |
| 5.1 | IMU <i>Advanced Navigation Spatial</i> | 52 |
| 5.2 | Antena GPS <i>Advanced Navigation Poseidon</i> | 53 |
| 5.3 | Velki HPX | 54 |
| 5.4 | Representação de uma operação do ROV LUMA. | 57 |
| 5.5 | Sistemas de coordenadas ECEF e NED. | 58 |
| 5.6 | Diagrama do algoritmo de localização | 63 |
| 6.1 | Histograma da inovação da medida de distância | 67 |
| 6.2 | Erro de posição em função do parâmetro β do filtro UKF | 68 |

| | | |
|-----|--|----|
| 6.3 | Simulação do Cenário 1 | 69 |
| 6.4 | Simulação do Cenário 1 | 70 |
| 6.5 | Simulação do Cenário 2 | 71 |
| 6.6 | Simulação do Cenário 2 | 72 |
| A.1 | A área sombreada representa $P(0 \leq X \leq 1)$ | 88 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|---|----|
| 3.1 | Notação usada para veículos marinhos, SNAME | 25 |
| 6.1 | Sensores utilizados para localização | 67 |

Lista de Símbolos

| | |
|----------------------------|--|
| $P_{\text{IMU-}\Theta}$ | Matriz de covariância do ruído da medida z_{Θ} [rad^2], p. 60 |
| $P_{\text{IMU-}\omega}$ | Matriz de covariância do ruído da medida z_{ω} [rad^2/s^2], p. 60 |
| P_{dist} | Matriz de covariância do ruído da medida z_{dist} [m^2], p. 61 |
| P_{odom} | Matriz de covariância do ruído da medida z_{odom} [m^2/s^2], p. 61 |
| P_{prof} | Matriz de covariância do ruído da medida z_{prof} [m^2], p. 60 |
| P_{prop} | Matriz de covariância do ruído da medida z_{prop} [m^2/s^2], p. 60 |
| P_k | Covariância da estimativa do estado do sistema no instante k , p. 58 |
| Q_k | Covariância do ruído do processo, p. 58 |
| R_{ne} | Matriz de rotação do sistema de coordenadas ECEF para NED, p. 57 |
| Θ_{ib} | Vetor de orientação do veículo em relação ao referencial inercial [rad], p. 24 |
| α, β e κ | Parâmetros do filtro UKF, p. 42 |
| λ_r | Latitude da origem do sistema de coordenadas local [rad], p. 57 |
| ω_{ib}^b | Vetor de velocidade angular do veículo expresso nas coordenadas do veículo rad/s , p. 24 |
| ϕ | Ângulo de Euler relativo ao eixo x (Balanço) [rad], p. 23 |
| ϕ_r | Longitude da origem do sistema de coordenadas local [rad], p. 57 |
| ψ | Ângulo de Euler relativo ao eixo z (Guinada) [rad], p. 23 |

| | |
|-------------------|---|
| θ | Ângulo de Euler relativo ao eixo y (Caturro) [rad], p. 23 |
| Σ_b | Sistema de coordenadas fixo ao corpo do veículo, p. 21 |
| Σ_i | Sistema de coordenadas inercial, p. 21 |
| Σ_s | Sistema de coordenadas de um sensor, p. 26 |
| p | Velocidade angular na direção do eixo x [rad/s], p. 24 |
| p_{ib} | Vetor de coordenadas do veículo em relação ao referencial inercial [m], p. 24 |
| q | Velocidade angular na direção do eixo y [rad/s], p. 24 |
| q_k | Ruído branco discreto do processo, p. 58 |
| r | Velocidade angular na direção do eixo z [rad/s], p. 24 |
| u | Velocidade linear na direção do eixo x (Avanço) [m/s], p. 24 |
| v | Velocidade linear na direção do eixo y (Deriva) [m/s], p. 24 |
| v_{ia}^i | Vetor de velocidade da corrente marinha representada no sistema de coordenadas inercial [m/s], p. 26 |
| v_{ib}^b | Vetor de velocidade linear do veículo expresso nas coordenadas do veículo [m/s], p. 24 |
| w | Velocidade linear na direção do eixo z (<i>Heave</i>) [m/s], p. 24 |
| x_k | Vetor de estado do sistema no instante k , p. 57 |
| z_k | Vetor de medidas dos sensores do veículo no instante k , p. 60 |
| z_{Θ} | Medida da orientação do veículo obtida por meio da IMU [rad], p. 60 |
| z_{ω} | Medida da velocidade angular do veículo obtida por meio da IMU [rad/s], p. 60 |
| z_{dist} | Medida da distância do veículo em relação ao referencial na superfície obtida a partir do Modem Acústico [m], p. 61 |
| z_{odom} | Medida da velocidade linear do veículo calculada por meio de odometria visual [m/s], p. 61 |
| z_{prof} | Medida da profundidade do veículo calculada por meio do sensor de pressão [m], p. 60 |

z_{prop}

Medida de velocidade linear do veículo em relação à água calculada por meio da rotação dos propulsores [m/s], p. 60

Lista de Abreviaturas

| | |
|------|---|
| ADCP | <i>Acoustic Doppler Current Profiler</i> , p. 7 |
| AHRS | <i>Attitude and Heading Reference System</i> , p. 8 |
| AUV | Veículo Submarino Autônomo, (<i>Autonomous Underwater Vehicle</i>), p. 1 |
| DVL | <i>Doppler Velocity Log</i> , p. 6 |
| ECEF | Sistema de coordenadas <i>Earth-Centered, Earth-Fixed</i> , p. 52 |
| EKF | Filtro de Kalman Estendido (<i>Extended Kalman Filter</i>), p. 34 |
| GPS | Sistema de Posicionamento Global (<i>Global Positioning System</i>), p. 5 |
| IMU | <i>Inertial Measurement Unit</i> , p. 8 |
| INS | <i>Inertial Navigation System</i> , p. 8 |
| LBL | <i>Long Baseline</i> , p. 12 |
| MEMS | Sistema Micro-Eletromecânico (<i>Micro-electromechanical System</i>), p. 8 |
| NED | Sistema de coordenadas <i>North-East-Down</i> , p. 56 |
| ROV | Veículo Submarino de Operação Remota, (<i>Remotely Operated Underwater Vehicle</i>), p. 1 |
| SBL | Short Baseline, p. 15 |
| SBL | <i>Short Baseline</i> , p. 12 |
| UKF | <i>Unscented Kalman Filter</i> , p. 40 |
| USBL | <i>Ultra-Short Baseline</i> , p. 12, 14 |
| UT | <i>Unscented Transform</i> , p. 40 |

- UUV Veículo Submarino Não Tripulado, (*Unmanned Underwater Vehicles*), p. 1
- WGS84 *World Geodetic System 1984*, p. 52

Capítulo 1

Introdução

O LUMA (*Light Underwater Mobile Asset*), figura 1.1, é um robô submarino de operação remota desenvolvido pelo Grupo de Simulação e Controle em Automação e Robótica (GSCAR) do Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE). É um submersível não tripulado projetado para operar em profundidades de até 1000 metros. A conexão com a superfície é feita por meio de um cabo umbilical com fibra óptica, que serve tanto para o controle do veículo quanto para a transmissão de vídeos e dados dos sensores embarcados. Seu principal objetivo é a coleta de imagens do leito marinho na Baía do Almirantado, onde se localiza a Estação Antártica Brasileira Comandante Ferraz.

1.1 Submersíveis Não Tripulados

Veículos submarinos não tripulados (UUVs, *Unmanned Underwater Vehicles*) são divididos em duas classes:

- Veículos submarinos de operação remota (ROVs - *Remotely Operated Un-*

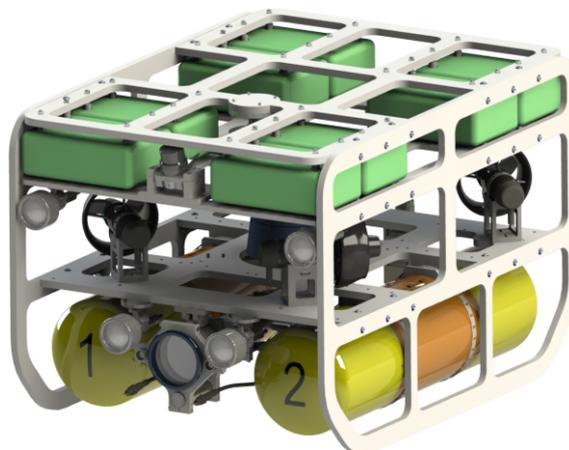


Figura 1.1: Modelo renderizado do ROV LUMA

derwater Vehicles)

- Veículos submarinos autônomos (AUVs - *Autonomous Underwater Vehicles*)

As primeiras pesquisas com submersíveis autônomos foram feitas entre as décadas de 1950 e 1960, com AUVs que se limitavam a experimentos de curta duração e pouco do que foi desenvolvido foi publicado abertamente na época (Blidberg 2001). Eram veículos custosos, de grandes dimensões e ineficientes para o que propunham realizar (Wernli 1999).

Até a década de 1980 o foco no desenvolvimento de submersíveis não tripulados se deu em ROVs (Blidberg 2001). Estes se tornaram essenciais para diversas missões submarinas, estudos oceanográficos, manipulação de estruturas submersas ou inspeções em zonas de risco, por exemplo.

Em meados da década de 1980, com a evolução da capacidade de processamento de computadores e na tecnologia de armazenamento de energia, o desenvolvimento de AUVs ganhou força. As décadas seguintes são marcadas por um aumento no número de AUVs operacionais e no surgimento de empresas especializadas em sua fabricação.

Um levantamento apresentado em Wernli (1999) constatou que no ano de 1999 haviam 66 AUVs operacionais ou em desenvolvimento. A pesquisa apresentada em Newman & Westwood (2012) indica que em 2009 haviam 390 AUVs em operação, três anos depois este número saltou para 560. Do total, cerca de 89% são aplicados em pesquisas científicas ou na indústria militar, geralmente em operações de mapeamento, inspeção ou vigilância. Enquanto aplicações que exigem algum tipo de interferência no ambiente, sejam para a instalação, reparação ou manutenção de equipamentos, continuam sendo realizadas por ROVs. Alguns estudos vêm sendo realizados com I-AUVs (*Intervention-AUVs*), veículos autônomos com manipuladores robóticos, mas ainda se trata de um campo incipiente (Ribas et al. 2012).

A grande maioria dos ROVs é conectada ao navio de apoio por meio de um cabo umbilical, utilizado para enviar comandos ao veículo e prover uma fonte de energia. Embora isto permita operações de longa duração, é necessária uma infraestrutura grande e custosa. Uma missão longe da costa demanda um navio de consideráveis dimensões, equipado com um guindaste para içamento e sistemas TMS (*TMS - Tether Management System*) para gerenciamento do umbilical, além da tripulação, que deve incluir operadores especializados em ROVs (Ribas et al. 2010).

Os únicos tipos de automatização presentes na maioria dos ROVs modernos são para o controle automático da direção, profundidade e altitude. A condução do veículo depende bastante das habilidades de seu operador, que deve superar condições como baixa visibilidade, variações de correntes marítimas e efeitos de arraste do cabo umbilical (Omerdic et al. 2012).

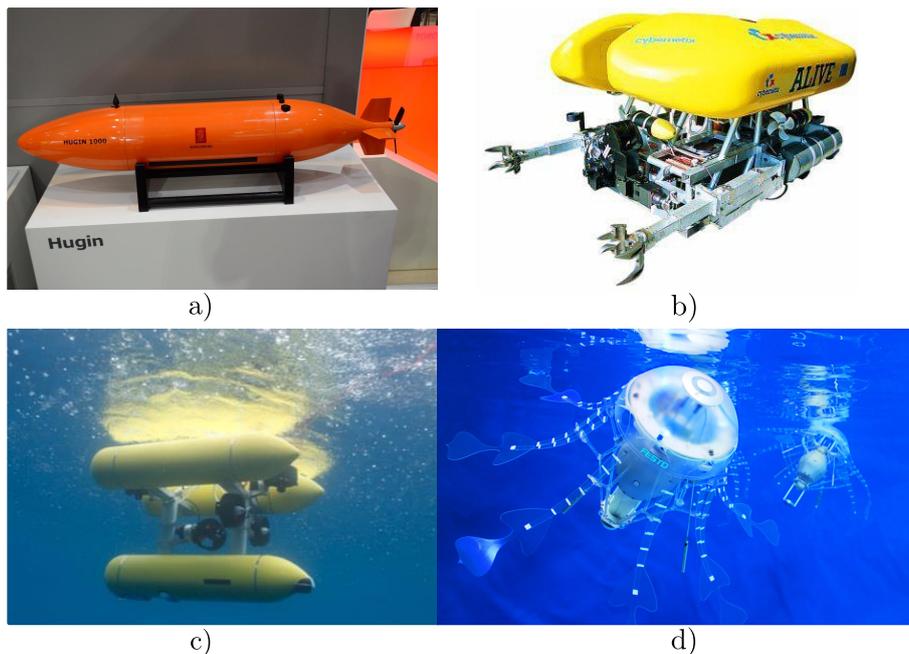


Figura 1.2: Exemplos de AUVs em suas diversas formas: a) Kongsberg Hugin 1000 (Subsea World News 2014) b) Cybernetix ALIVE (Cybernetix 2014) c) Girona 500 (CIRS Underwater Robotics Research Center 2014) d) Festo AquaJelly (Festo Corporation 2014)

Avanços recentes buscam minimizar as limitações de um ROV, isso pode se dar pela redução nas suas dimensões, facilitando o seu lançamento, no uso de fibra óptica para a comunicação, o que leva a umbilicais mais finos com efeito de arraste reduzido, ou na eliminação deste cabo umbilical, de modo que o ROV deve carregar sua própria fonte energética e a comunicação se dá por um meio de um modem acústico (Brun 2012). Alguns submersíveis têm sido projetados para operar com um maior grau de autonomia, de forma a depender menos de um operador, um ROV capacitado para seguir uma determinada trajetória de forma autônoma é descrito em Omerdic et al. (2012). Outra tendência é o desenvolvimento de veículos híbridos (HROV - *Hybrid Remotely Operated Vehicle*), que podem ser configurados tanto como um AUV, sem umbilical, quanto como um ROV (Brun 2012). Um submersível deste tipo é descrito em Bowen et al. (2008).

1.2 Objetivos e Metodologia

A autonomia de submersíveis têm sido um campo de intenso desenvolvimento na robótica submarina e um ponto crucial é o uso de um sistema de localização, que permita obter as coordenadas geográficas do veículo (Kinsey et al. 2006). Tal sistema possibilitaria capacitar o LUMA com um grau de maior de autonomia, além de permitir que os dados coletados em cada missão possam ser mapeados. Com tais

possibilidades em vista, esta dissertação tem como objetivo principal o projeto de um algoritmo de localização.

Para tal, a seguinte metodologia de trabalho foi adotada:

- Foi realizada uma revisão bibliográfica das principais técnicas de localização submarina e de tal estudo foi identificado um método que seja adequado para o LUMA, levando em conta as condições do ambiente de operação e do conjunto de equipamentos disponíveis.
- Para estimar a localização do veículo é necessário o uso de um modelo do mesmo e de cada sensor utilizado. Um estudo foi feito levando em conta as incertezas atreladas a cada dispositivo e nos sistemas de coordenadas adotado.
- A formulação do estimador se deu por meio da aproximação do filtro de Kalman para casos não-lineares, duas propostas de aproximação foram analisadas, o filtro de Kalman Estendido (EKF) e o *Unscented Kalman Filter* (UKF).
- A viabilidade do algoritmo de localização proposto é analisada por meio de simulações computacionais que testaram possíveis situações de campo.

1.3 Organização da Dissertação

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

- Capítulo 2 - Apresenta uma revisão bibliográfica de técnicas de localização submarina bem como dos principais sensores utilizados. Conclui com a sugestão de um sistema de localização baseado em um modem acústico e em equipamentos já disponíveis no LUMA.
- Capítulo 3 - Descreve a parametrização utilizada para descrever o estado do veículo e apresenta o modelo cinemático do mesmo.
- Capítulo 4 - Descreve o filtro de Kalman para sistemas lineares e duas aproximações utilizadas para casos não-lineares: filtro de Kalman Estendido (EKF) e o *Unscented Kalman Filter* (UKF).
- Capítulo 5 - Detalha o conjunto de sensores utilizados pelo LUMA e propõe o algoritmo de localização.
- Capítulo 6 - Simulações mostram a viabilidade do sistema de localização proposto.
- Capítulo 7 - Apresenta as conclusões gerais do trabalho e discorre sobre possíveis trabalhos futuros a partir desta dissertação.

- Os apêndices A e B apresentam, respectivamente, conceitos de probabilidade e demonstrações de algumas propriedades matriciais que são úteis para o entendimento do capítulo 4. O apêndice C inclui os códigos desenvolvidos para a simulação do sistema de localização.

Capítulo 2

Sistemas de Localização

2.1 Introdução

Um fator crítico para o sucesso de missões com submersíveis é o sistema de localização e navegação utilizado (Kinsey et al. 2006). Há autores que fazem uma distinção entre os termos, a definição adotada em Paull et al. (2014) considera que a precisão de localização descreve quão bem o veículo se situa em um mapa, enquanto a precisão de navegação se refere a qualidade de guiar o veículo de um ponto a outro. Enquanto a definição adotada por Bar-Shalom et al. (2002) utiliza o termo navegação em contraste com o de rastreamento, este corresponde ao problema de estimação do estado de um veículo com base em medições remotas, enquanto navegação é o mesmo problema tratado na perspectiva do veículo com base nos dados fornecidos pelos sensores embarcados. De modo que ora os termos são tratados como sinônimos, ora navegação trata de um sistema mais abrangente que faz uso de um subsistema de localização. Uma vez que este trabalho focará no problema de estimativa da posição de um veículo, e não nos possíveis usos de tal informação, será utilizado o termo localização.

Os dados coletados pelo veículo só adquirem algum sentido de interpretação com o conhecimento do local de amostragem. Para garantir a validade dos dados é essencial um sistema de localização, seja para um mapeamento batimétrico, obtenção de amostras da água ou filmagens do leito do oceano. O conhecimento do estado do veículo permite colocar dados obtidos em diferentes missões em um sistema de coordenadas comum (Bingham 2009a).

Muitas operações necessitam que um UUV percorra uma trajetória específica tão próximo quanto o possível, colete dados e retorne para a base de apoio. Tais tarefas dependem de um sistema de localização e uma falha em seguir a trajetória desejada ou de retornar para a base pode resultar no fracasso da missão ou na perda do veículo.

A localização de um UUV é desafiante devido à grande atenuação de sinais de alta frequência (e.g., rádio, micro-onda) na água e da relativa falta de estruturas de referência em um ambiente de mar aberto. Na superfície pode-se fazer uso de GPS, enquanto isto é inviável debaixo d'água. Há métodos de comunicação óptica submarina que permitem a transmissão de dados em distância de até 100 metros, no entanto são experimentais e incipientes (Farr et al. 2010).

Em contraste, ondas acústicas se propagam com maior facilidade na água do que no ar. O som é a principal forma utilizada para comunicação entre animais marinhos, o canto de algumas espécies de baleia pode ser escutado em distâncias da ordem de milhares de quilômetros. Submersíveis costumam fazer uso, de uma forma ou de outra, de algum tipo de equipamento acústico para se localizarem.

As técnicas de localização submarina são geralmente divididas em três classes principais que serão detalhadas neste capítulo:

- Navegação Inercial e Estimada (Seção 2.2)
- Geofísica (Seção 2.3)
- Acústica (Seção 2.4)

Sendo que um sistema de localização costuma fazer uso de mais uma técnica. Estas serão descritas neste capítulo como base de uma revisão bibliográfica, e se valeu de trabalhos que apresentaram um panorama das principais técnicas de localização para submersíveis: Bingham (2009a), Chen et al. (2013a,b), Kinsey et al. (2006), Leonard et al. (1998), Miller et al. (2010), Paull et al. (2014), Stutters et al. (2008), Tan et al. (2011), Vickery (1998).

2.2 Navegação Estimada

A navegação estimada (DR, *Dead Reckoning*) é uma técnica tradicional que se baseia no conhecimento inicial da posição do veículo e da integração de medidas da velocidade e/ou aceleração do mesmo para obter uma nova estimativa de posição (Leonard et al. 1998). Por conta de erros nos dados dos sensores de bordo a incerteza na estimativa de posição cresce de forma ilimitada, de modo que é necessário periodicamente fazer uma correção da estimativa. Isto pode ser feito por meio de uma outra técnica de localização submarina, geofísica ou acústica, ou emergindo o veículo e captando sinais de GPS, por exemplo.

2.2.1 DVL - Doppler Velocity Log

O principal sensor para medir a velocidade de um veículo submarino é o DVL (*Doppler Velocity Log*), que emite ondas acústicas e capta ecos que são analisados por

meio do efeito Doppler. A diferença de frequência entre o som emitido e o eco refletido dão uma informação da velocidade relativa entre o emissor e o refletor:

$$\Delta f = f_r - f_e \simeq \pm \frac{2uf_e}{c} \quad (2.1)$$

Em que f_e é a frequência do sinal emitido, f_r a frequência do sinal recebido, u a velocidade do sensor DVL e c a velocidade do som no meio. O sinal da equação depende da direção tomada pelo veículo, se este trafega de encontro ou se afasta do refletor. Este é geralmente o leito do oceano, alguns casos excepcionais utilizam camadas de gelo como refletor (McEwen et al. 2005). Para atenuar erros de medida a velocidade do som no meio deve ser devidamente estimada.

O funcionamento de um DVL depende portanto da proximidade do veículo com o leito do oceano. Para um dispositivo que opere com ondas acústicas de 300 kHz a distância máxima é da ordem de 250 metros (Stanway 2010). Sensores que trabalham com frequências maiores necessitam de uma maior proximidade com o leito.



Figura 2.1: DVL Workhorse Navigator, da Teledyne Technologies (Teledyne RDI 2013)

Um DVL possui múltiplos transdutores, geralmente quatro, para obter componentes da velocidade do veículo nos três eixos. O vetor de velocidades nos eixos dos transdutores é mapeado no sistema de coordenadas do veículo, e é então expresso em um sistemas de coordenadas inercial por meio de uma matriz de rotação, esta calculada a partir de informações de sensores de orientação (Kinsey & Whitcomb 2003). É portanto necessário o alinhamento entre o sistema de coordenadas do sensor com o do veículo e de um conhecimento da orientação do mesmo.

A precisão de medida de um DVL está na ordem de 1 a 0,2% da velocidade, sendo que os dispositivos de maior precisão podem possuir restrições de exportação. Um sistema de localização baseado em DVL, com sensores de alta performance, permitem obter uma precisão de até 0,01% sobre a distância percorrida (Stutters et al. 2008). Isto é, para cada quilômetro percorrido pelo veículo há um acréscimo da ordem de 10 centímetros no erro da posição. Para sistemas mais típicos, de custo

mais modesto, este valor está na ordem de 2 – 5% (Paull et al. 2014).

A informação da velocidade da água em relação ao veículo também pode ser uma informação útil ao sistema de navegação, para tal, é utilizado um ADCP (*Acoustic Doppler Current Profiler*). Quando a plataforma está fixa em relação a um referencial o ADCP permite obter estimativas da correnteza marinha. Alguns autores utilizam a terminologia DVLWT (*Doppler Velocity Log Water-Track*) para designar este tipo de equipamento e DVLBT (*Doppler Velocity Log Bottom-Track*) para o DVL descrito anteriormente. O ADCP se baseia na reflexão de sinais acústicos por partículas suspensas (planctons, sedimentos, neve marinha) e consegue medir a velocidade do veículo em relação à água. Como a reflexividade dessas partículas não é tão grande quanto o leito do oceano, o processamento dos sinais difere do DVL, embora fisicamente os sensores sejam iguais. O ADCP emite múltiplos pulsos e capta do sinal refletido a diferença de fase entre pulsos subsequentes para derivar a velocidade.

Um método de navegação baseado em ADCP é sugerido em Stanway (2010). Isto é de particular interesse para o caso em que o DVL perde contato com o leito do oceano, quando o veículo opera em níveis de média profundidade, e para tal é preciso ter alguma estimativa da correnteza marinha.

2.2.2 INS - Sistema de Navegação Inercial

O DVL depende de uma medida de orientação do veículo, de modo que deve ser empregada uma unidade de medida inercial (IMU, *Inertial Measurement Unit*). Unidades de medida inercial (IMU, *Inertial Measurement Unit*) são compostas geralmente de acelerômetros e giroscópios. Estes medem respectivamente a aceleração linear e a velocidade angular do veículo. Um sistema de navegação inercial (INS, *Inertial Navigation System*) integra as medidas da IMU, que em conjunto com valores iniciais do estado do veículo, permitem a localização e a orientação do mesmo. Um sistema que utilize a IMU para obter apenas a orientação é chamado de AHRS (*Attitude and Heading Reference System*).

INSs de alta precisão empregam giroscópios FOG (*Fiber Optic Gyro*) ou RLG (*Ring Laser Gyro*) que se baseiam no efeito óptico de *Sagnac*. A deriva do erro de medida de tais sensores é da ordem de $1 - 0,05^\circ/h$. Tais dispositivos são custosos e possuem um alto consumo de energia (Fig. 2.2), de modo que seu uso é bem restrito, geralmente para operações militares que não podem depender de condições de visibilidade ou em ocasiões que o veículo não pode ser detectado, isto é não pode emitir ondas acústicas (Kinsey et al. 2006).

Mais acessíveis são os giroscópios do tipo MEMS (*Micro-electromechanical Systems*) que se baseiam no efeito de Coriolis. Um corpo percorrendo uma trajetória

retilínea com velocidade v expressa em um sistema de coordenadas local que gira com uma velocidade angular ω em relação a um sistema de coordenadas inercial irá apresentar uma aceleração de Coriolis dada por:

$$a = 2v \times \omega$$

A medida da aceleração, em conjunto com o controle da velocidade do corpo, permite uma estimativa da velocidade angular do mesmo. A deriva de giroscópios do tipo MEMS é da ordem de $3 - 20^\circ/h$, de modo que é necessário o auxílio de algum sensor adicional para limitar o erro.

Acelerômetros podem medir forças externas atuando no veículo, isto inclui a força da gravidade que pode ser utilizada para calcular a inclinação do corpo em relação aos eixos perpendiculares a força, isto é, os ângulos de caturro (*pitch*) e balanço (*roll*).

Bússolas giroscópicas (*gyrocompass*) ou magnetômetros podem ser utilizadas para o cálculo da guinada (*yaw*) do veículo. A primeira, presente em muitos veículos navais de grande porte, se baseia no efeito de precessão causado pela rotação da terra para obter a direção do norte verdadeiro. Sensores modernos, que utilizam princípios ópticos, permitem uma medida de rumo com precisão na ordem de $0,1^\circ$, porém o custo ainda restringe seu uso na maioria dos UUVs.

Magnetômetros medem o campo magnético da terra para obter consequentemente o norte magnético. A precisão de medida de rumo por meio de um magnetômetro está na ordem de $0,5 - 10^\circ$. Esta é degradada por distúrbios no campo magnético local, gerados tanto pelo próprio equipamento do veículo quanto por estruturas ferromagnéticas presentes no ambiente. Seus efeitos podem ser atenuados por meio de uma calibração prévia. Apesar de tais limitações a maioria dos submersíveis empregam um magnetômetro, seja como sensor primário ou secundário (Kinsey et al. 2006).



Figura 2.2: INS Phins 6000, da iXBlue (iXBlue 2014)

2.3 Geofísica

Navegação geofísica explora características do ambiente de operação para obter uma estimativa da posição do veículo. Essas referências podem ser naturais, geofísicas propriamente ditas, ou artificiais (e.g., tubulações), detectadas por meio de câmeras ou sonares. Há publicações que consideram o uso de mapas de campo magnético, no entanto há pouco resultado prático nesta área (Stutters et al. 2008).

Como é constatado em Paull et al. (2014), quase a totalidade dos artigos que abordam navegação geofísica adotam algum método de SLAM (*Simultaneous Localization and Mapping*), que tratam simultaneamente do problema de localização com o de mapeamento. Uma revisão sobre algoritmos de SLAM submarino é feita em Ribas et al. (2010).

2.3.1 Óptico

Limitações no alcance de sistemas ópticos restringem seu uso para ambientes com boa iluminação e ricos em referência visuais. Exemplos comuns de uso estão na inspeção de casco de navios, seguimento de linhas de tubulação ou no mapeamento de pequenas áreas do leito do oceano. Como indica Ribas et al. (2010), o número de trabalhos publicados sobre SLAM visual submarino que apresentam resultados com dados experimentais ainda é muito limitado.

Entre os primeiros trabalhos que abordam o problema de SLAM submarino por meio de um sistema de visão está a tese Fleischer (2000), posteriormente explorada em Garcia et al. (2002). A orientação e o movimento do veículo é calculada por meio da comparação de imagens subsequentes.

O VAN (*Visually Augmented Navigation*), detalhado em Eustice (2005) e Eustice et al. (2008), procura tirar vantagem da fusão entre sistemas de navegação estimada com DVL e algoritmos de SLAM baseado em visão. O autor considera um veículo que percorre por trajetórias com cruzamentos, o sistema de câmeras é utilizado para detectar se o veículo está em um ponto já navegado, com base neste conhecimento o erro da navegação estimada por um DVL é reduzido. Uma extensão deste trabalho é apresentada em Kim & Eustice (2013) visando permitir uma navegação em regiões pobres em pontos de referência visuais.

2.3.2 Sonar

Para a navegação geofísica é mais comum o uso de um Sonar (*Sound Navigation And Ranging*), que se baseia na propagação de ondas acústicas para obter informações do ambiente, geralmente do tipo *Side Scan* ou *Multibeam*. O primeiro produz uma imagem acústica de uma ampla faixa do fundo do mar e o segundo sonda uma área

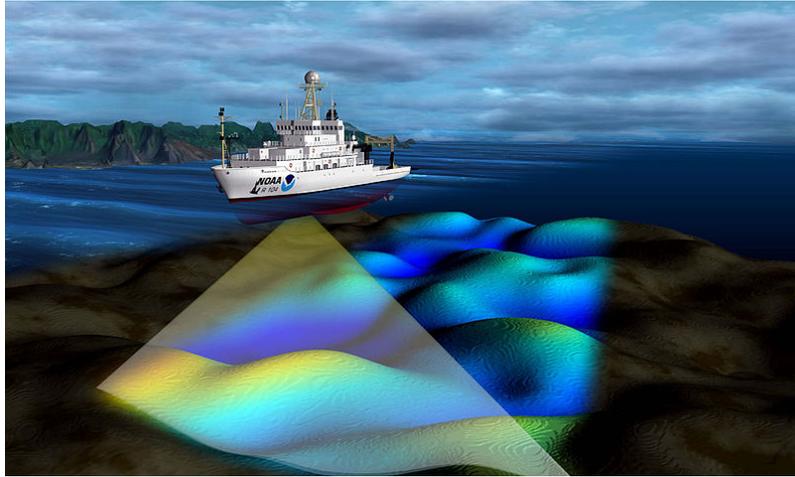


Figura 2.3: Representação do mapeamento do leito do oceano por meio de uma embarcação equipada com sonar (National Ocean Service 2009)

reduzida, mas de maior resolução.

A performance de um algoritmo SLAM depende da quantidade e da qualidade de referências presentes no ambiente (Paull et al. 2014). O primeiro tipo de sonar, por varrer uma área maior, permite, ao menos em potencial, a detecção de um número maior de marcos de referência. Em contraste, o segundo tipo, por produzir imagens acústicas de maior qualidade, permite a extração de dados geofísicos com maior facilidade (Stutters et al. 2008).

Um sonar MSIS (*Mechanical Scanning Imaging Sonar*) também pode ser utilizado, no entanto a taxa de atualização da imagem acústica é lenta, da ordem de alguns segundos, o que aumenta a complexidade de algoritmos de mapeamento. Um estudo sobre SLAM com este tipo de equipamento é apresentado em Ribas et al. (2010), porém o autor nota que tais sistemas estão limitados para ambientes de laboratório ou com referências artificiais instaladas.

Outro tipo de sensor é o SAS (*Synthetic Aperture Sonar*), sistema utilizado em UUVs de alto desempenho para obter imagens acústicas de alta qualidade, com resolução de até 4 centímetros, de um alvo imóvel. Este é sondado em mais de uma posição e as imagens são combinadas para gerar uma imagem acústica final mais detalhada. Para tal o sonar deve ser integrado com um sistema de navegação estimada.

2.4 Acústica

Em sistemas de localização acústica a posição é calculada por meio de medidas do tempo de voo de ondas sonoras que trafegam entre o veículo e dispositivos de referência com coordenadas conhecidas. Múltiplas medidas, em conjunto com uma estimativa da velocidade do som no meio, possibilitam a obtenção da localização do

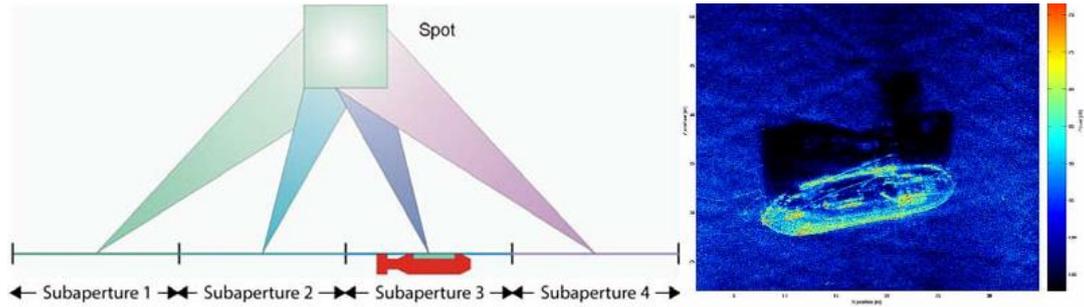


Figura 2.4: Kongsberg HISAS 1030 (Kongsberg 2015)

veículo.

De forma simplificada tais sistemas se baseiam no princípio da trilateração, o mesmo utilizado pelo GPS. Considerando, por exemplo, um veículo planar, a sua posição pode ser auferida com base em medidas de distância em relação a três referenciais, tal como está ilustrada na figura 2.5.

Um panorama dos principais sistemas de posicionamento acústico, bem como uma descrição dos componentes e da terminologia utilizada, pode ser encontrado em Vickery (1998). Os sistemas são classificados pela distância entre os dispositivos acústicos (*baseline length*), e três tipos básicos são definidos:

- Linha de base longa (LBL, *Long Baseline*): 100m - 6000m (Seção 2.4.1)
- Linha de base curta (SBL, *Short Baseline*): 20m - 50m (Seção 2.4.3)
- Linha de base ultra curta (USBL, *Ultra-Short Baseline*): < 10cm (Seção 2.4.2)

Diferentes dispositivos acústicos são utilizados dependendo da arquitetura escolhida. Tais equipamentos são constituídos de transdutores que convertem sinais eletrônicos em acústicos e vice-versa. Os principais equipamentos utilizados são descritos em Vickery (1998), entre os quais o *transponder*, dispositivo que ao receber um sinal de interrogação envia uma resposta acústica e o *transceiver*, que conectado a uma unidade de processamento realiza o cálculo final de posição. De uso mais recente, tem se popularizado o modem acústico que, além de transmitir dados, pode auxiliar um sistema de localização ou mesmo servir de sensor primário.

2.4.1 LBL

No LBL as referências acústicas costumam ser instaladas no leito do oceano, separadas entre si em distâncias da ordem de centenas ou milhares de metros. Uma vez fixados, a posição dos dispositivos deve ser georeferenciada. Isto pode ser feita por um veículo de apoio na superfície, que navegando por uma determinada trajetória interroga o dispositivo periodicamente (Kussat et al. 2005).

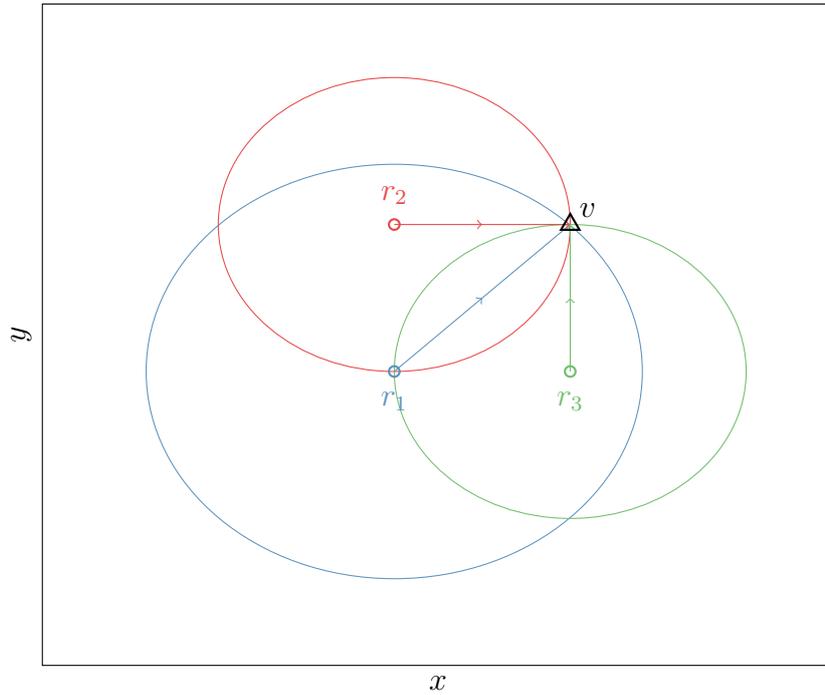


Figura 2.5: Problema de trilateração no plano, com três referências r_1, r_2, r_3 utilizadas para obter a localização do veículo v .

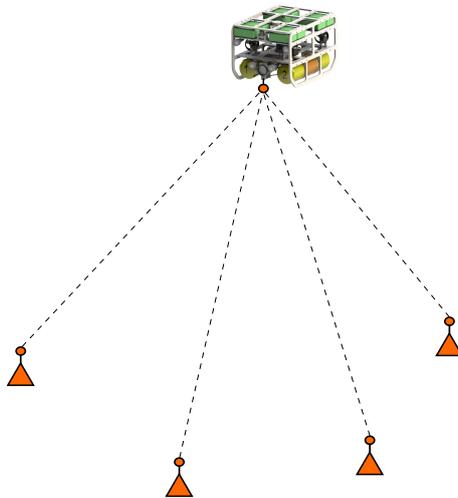


Figura 2.6: Long Baseline

Por necessitar de uma infraestrutura complexa para instalar, georeferenciar e recuperar o equipamento, se trata de um sistema custoso. E uma vez que as referências são fixas, o campo de operação do veículo é limitado. Há experimentos que instalam as referências acústicas abaixo de camadas de gelo (Bellingham et al. 1993) ou em boias georeferenciadas (Alcocer et al. 2007).

Em geral são utilizadas ondas na frequência de $12kHz$, que permitem precisão na ordem de $0,1 - 10$ metros. O veículo deve operar em distâncias máximas da ordem de 10 quilômetros, para que o sinal acústico seja detectado. É possível obter uma

precisão na ordem de milímetros com sistemas que operem em $300kHz$ ou mais, no entanto devido a maior atenuação do sinal o campo de visibilidade é muito restrito e por isso é pouco utilizado (Kinsey et al. 2006).

Considerando o tempo necessário para o sinal trafegar entre cada dispositivo e o veículo, a medida de posição é obtida em períodos da ordem de dezenas de segundos. De modo que um sistema de localização acústica costuma ser empregado em conjunto com uma técnica de navegação estimada (Bingham 2009b).

2.4.2 USBL

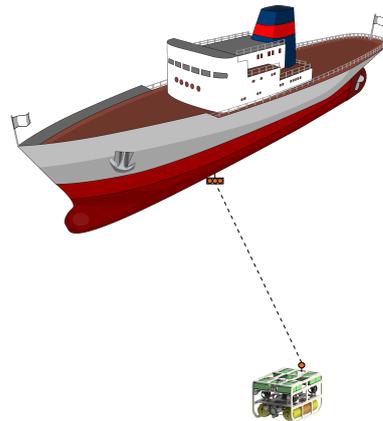


Figura 2.7: Sistema USBL. Adaptado de (Wikimedia Commons 2011)

Quando não é possível instalar equipamentos no ambiente de operação é comum o uso do USBL, que requer apenas dois equipamentos, um no veículo e outro numa embarcação de apoio. Um sistema USBL, também chamado de SSBL (*super short baseline*), utiliza um *transceiver*, que possui um conjunto de transdutores (3 ou mais) separados entre si por uma distância na ordem de 10 centímetros.

A configuração mais comum fixa o *transceiver* no casco de um navio na superfície e o *transponder* no submersível. O *transceiver* emite um sinal de interrogação acústica que é respondido pelo *transponder*. O intervalo de tempo entre a interrogação e a resposta permite estimar a distância entre os dispositivos. Comparando a fase do sinal captado em cada transdutor do *transceiver* é possível obter uma estimativa da direção do mesmo.

Uma vez que a posição é obtida em coordenadas polares, que deve ser posteriormente convertida em coordenadas retangulares, há uma relação diretamente proporcional entre a distância dos dispositivos e o erro. Este é da ordem de $0,1 - 5\%$ da distância.

A medida de posição é obtida em relação ao sistema de coordenadas do *transceiver* fixado na embarcação de apoio, de modo que para obter uma medida georeferenciada é necessário o uso de um sensor de orientação e de um GPS na superfície.

É preciso então enviar os dados ao submersível por meio de algum sistema de comunicação, isto pode ser feito tanto por um modem acústico quanto por um cabo umbilical, se presente.

Por conta de um possível desalinhamento entre o dispositivo acústico USBL no navio e os sensores de navegação deste, é necessário realizar uma etapa de calibração. Alguns sistemas USBL integram todos os sensores em um único módulo, de modo a minimizar a necessidade de calibramento (Audric 2004).

Uma fonte considerável de ruído acústico no sistema USBL é a própria embarcação de apoio. Para mitigar isso algumas aplicações adotam uma estrutura invertida, chamada de iUSBL. Uma aplicação é detalhada em (Hiller et al. 2012), que em seu experimento utilizou um transceiver no submersível, enquanto na superfície foi alocado o transponder, ambos com um modem acústico. O veículo na superfície responde uma interrogação com um pacote acústico que inclui sua posição e orientação.

2.4.3 SBL

Menos comum que os sistemas apresentados anteriormente, o SBL utiliza múltiplos transceivers (3 ou mais) que são instalados no casco de um navio na superfície. A distância entre cada dispositivo geralmente é maior que 30 metros, de modo que é necessária uma estrutura razoavelmente grande (Vickery 1998).

A diferença do tempo de chegada de um sinal entre cada transceiver permite obter a direção do sinal emitido pelo submersível. A distância é obtida por meio do tempo de vôo do sinal. Tais medidas possibilitam obter a posição do submersível em relação ao navio. Tal como no USBL, para obter uma posição georeferenciada é necessário utilizar um sensor de orientação inercial e um GPS.

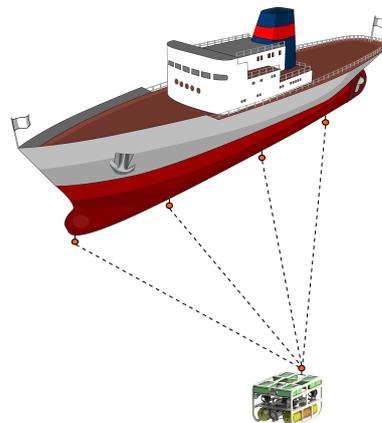


Figura 2.8: Sistema SBL. Adaptado de (Wikimedia Commons 2011)

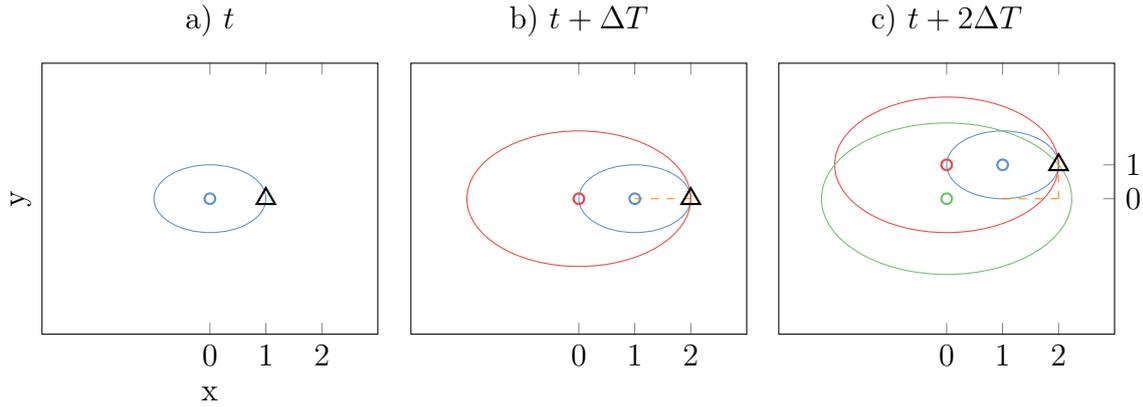


Figura 2.9: a) Primeira medida obtida pelo veículo, representado pelo triângulo, em relação ao farol acústico, representado pelo círculo, b) Atualização da primeira medida com base em dados da navegação estimada, linha tracejada, e obtenção da segunda medida, c) Terceira medida obtida e atualização das anteriores

2.4.4 Localização Com Uma Única Referência Acústica

O primeiro trabalho a propor um sistema de localização com uma única referência acústica foi descrito em Scherbatyuk (1995), desde então o problema foi tratado em variadas formas e sob diferentes nomes. *Single Beacon Navigation* é o termo mais utilizado, mas também pode ser referido como *Range-Only Localization*, *Virtual Long Baseline*, *Synthetic Long Baseline* e *One-Way-Travel-Time Navigation*.

Um sistema de navegação com base em apenas uma referência acústica pode ser pensado, simplificadamente, como um LBL virtual. Ao invés de interrogar simultaneamente múltiplas referências, o sistema interroga uma única em pontos distintos, como se estivesse obtendo medidas de referências virtuais. Métodos de navegação estimada são adotados para obter, a partir da localização conhecida da referência real, a posição das referências virtuais.

Considerando um veículo planar, o sistema é representado na figura 2.9.

Ao contrário do LBL, a qualidade da estimativa de um sistema que utilize apenas uma referência acústica depende diretamente da qualidade da navegação estimada utilizada em conjunto.

O problema foi inicialmente tratado com uma referência acústica fixa. Trabalhos desenvolvidos em duas teses, Hartsfield (2005) e LaPointe (2006), introduziram a ideia de referências móveis, fixadas em veículos na superfície. Isto é possível com o uso de modems acústicos, que além de permitirem estimativas de distância pelo tempo de voo do sinal, possibilitam a transmissão de dados da localização do dispositivo.

A redução de custo e a miniaturização tornaram o modem acústico acessível e comum em AUVs, de modo que este é o principal equipamento utilizado para este

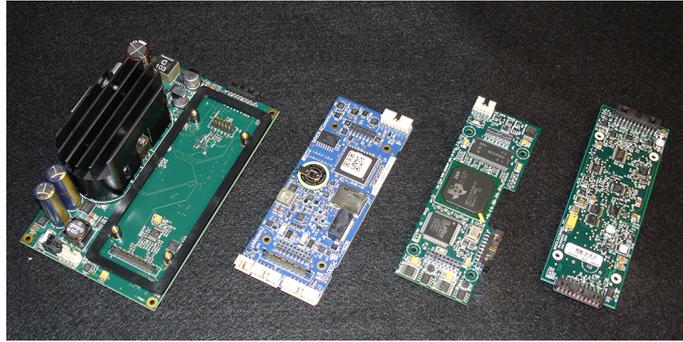


Figura 2.10: WHOI Micro-modem (Woods Hole Oceanographic Institution 2015)

método de localização. Um WHOI (*Woods Hole Oceanographic Institution*) Micro-modem é utilizado em Hartsfield (2005), o modelo mais simples possui uma taxa de transmissão de 80bps e cada pacote acústico armazena 32 bytes de informação, suficiente para incluir dados do GPS na superfície.

Outra vantagem do modem acústico é a possibilidade de utilizar relógios sincronizados. Em um experimento detalhado em Eustice et al. (2006) o autor considera um modem acústico que insere na mensagem o *timestamp* do início de transmissão. Qualquer veículo que receber a mensagem, e que tiver o relógio sincronizado com a fonte, pode estimar a distância desta. Tal metodologia é denominada de navegação acústica OWTT (*One-Way-Travel-Time*). Com tal avanço não é preciso utilizar o método tradicional de interrogação e resposta.

Além de encurtar o tempo necessário para obter uma medida, o uso de relógios sincronizados permitiu avanços em sistemas de navegação com múltiplos AUVs. Sem sincronização cada veículo deve fazer uma interrogação em separado para obter sua resposta, de modo que é necessário gerenciar o período de cada transmissão. Um estudo apresentado em Tan et al. (2014) considera múltiplos AUVs trabalhando de forma cooperativa, sendo um veículo mestre, equipado com sensores precisos de navegação, e múltiplos veículos seguidores, equipados com o mínimo de equipamento necessário. Estes obtêm informações do veículo mestre, que auxiliam em seu sistema de navegação e localização.

Outros trabalhos que exploram sistemas de modems acústicos sincronizados são: Eustice et al. (2011, 2007), Fallon et al. (2010), Folk et al. (2010), McPhail & Pebody (2009), Nogueira et al. (2010), Papadopoulos et al. (2010), Tan et al. (2014), Walls & Eustice (2011), Webster (2010), Webster et al. (2012, 2009, 2013).

Sistemas sem DVL

Embora seja um equipamento presente na maioria dos AUVs, o DVL é um dispositivo custoso, o preço dos modelos mais baratos está na ordem de 20.000 dólares, de modo

que sistemas de localização que almejam baixo custo consideram alternativas para a estimativa da velocidade do veículo.

O primeiro trabalho da área de navegação *single-beacon* que não utiliza um DVL é descrito em Vaganay et al. (2000), sendo posteriormente estendido em Baccou & Jouvencel (2002) e Baccou & Jouvencel (2003). A velocidade do veículo é estimada a partir da rotação de seus propulsores, que são calibrados previamente. O movimento do veículo é estimado com base em um modelo cinemático e é empregado um filtro de Kalman estendido, inicializado por meio de um método de mínimos quadrados. Este filtro permite, além de estimar a posição do AUV, obter uma estimativa do desvio da medida de velocidade e da correnteza do ambiente.

Uma outra abordagem é apresentada em Ferreira et al. (2010), que utiliza a mesma metodologia para a medida da velocidade adotada em Baccou & Jouvencel (2002), mas apresenta testes empregando filtros de partículas, seja para estimar a posição do veículo ou para inicializar um filtro de Kalman Estendido. Ambos apresentaram resultados apenas em simulações. Um resultado experimental foi obtida na tese Gadre (2007), precedida por estudos descritos em Gadre & Stilwell (2004, 2005*a, b*).

2.5 Considerações Finais

Este capítulo apresentou uma revisão bibliográfica das principais técnicas utilizadas para localização de submersíveis. Com base neste estudo e considerando as condições de operação do LUMA, que impedem a instalação de uma estrutura de apoio no ambiente, dois equipamentos podem ser utilizados, USBL ou um Modem Acústico. Há vantagens e desvantagens para cada método.

O USBL seria uma solução de prateleira, no entanto a precisão obtida varia de acordo com a distância do submersível em relação ao veículo de apoio. O custo do equipamento mais barato é de aproximadamente 15.000 dólares, com um alcance de 1.000 metros e um erro de localização da ordem de 2 – 5% da distância entre os veículos, erro que pode ser consideravelmente maior por fatores de desalinhamento entre os sensores. Um USBL com alcance de até 5.000 metros possui um preço da ordem de 35.000 dólares. No caso hipotético em que o LUMA atue como um AUV ou HROV, a ausência do umbilical requer um sistema de comunicação acústica. Alguns equipamentos encapsulam *transceivers* de USBL com modems acústicos, porém com custo bem mais elevado.

A segunda possibilidade seria o uso de um Modem Acústico. Um conjunto com todo o equipamento necessário para realizar comunicações em distâncias de até 3.000 metros custa na ordem de 15.000 dólares. Para que possa ser utilizado em um sistema de localização são necessários sensores que permitam a implementação de

navegação estimada. Para tal o LUMA já possui um profundímetro e uma IMU. Não havendo um DVL, técnicas alternativas para a estimativa da velocidade devem ser exploradas.

Levando em consideração os custos, a operação em profundidades de até 1.000 metros e numa possível conversão do ROV LUMA em um HROV, foi optado pelo uso de um modem acústico. A implementação é discutida nos capítulos seguintes, primeiro com uma análise de um modelo do veículo no capítulo 3, no capítulo 4 são descritos filtros probabilísticos que são a base para o algoritmo de localização proposto no capítulo 5, para verificar sua viabilidade foram realizadas simulações computacionais, cujos resultados são apresentados no capítulo 6.

Capítulo 3

Modelo do Sistema

Para o desenvolvimento de um sistema de localização para um determinado veículo é essencial o uso de um modelo deste. É ponto praticamente comum entre trabalhos desta área a adoção de um modelo cinemático do submersível, visto como um corpo rígido. Em muitas missões AUVs seguem trajetórias retilíneas, em que por boa parte do tempo o veículo possui velocidade aproximadamente constante. O modelo dinâmico dificilmente está disponível com boa precisão e seus parâmetros variam de acordo com os equipamentos utilizados a bordo, a posição destes afeta na distribuição de peso ou em efeitos de arraste, por exemplo. Também é desejável que o algoritmo de localização seja relativamente independente do veículo utilizado. Uma vez que o LUMA é uma plataforma de caráter experimental, sujeita a diversas alterações, não seria prático o uso de um modelo dinâmico. Este será usado apenas para fins de simulação, de modo que uma breve análise sobre a dinâmica de um AUV é apresentada no final deste capítulo.

3.1 Modelo Cinemático do Veículo

O modelo cinemático, que será apresentado nesta seção, trata basicamente da relação entre a velocidade do veículo nas coordenadas do corpo para a velocidade do veículo nas coordenadas inerciais. Para modelar o movimento do veículo este é considerado como um corpo rígido. Isto é, um corpo indeformável, que pode ser descrito matematicamente como um subconjunto $O \in \mathbb{R}^3$, de modo que a distância entre quaisquer par de pontos (p, q) seja constante ao longo do tempo:

$$\|p(t) - q(t)\| = \|p(0) - q(0)\| = \text{cte.}$$

Os conceitos sobre a cinemática de corpos rígidos que serão apresentados neste capítulo são um resumo do que é desenvolvido em Murray et al. (1994), que possui um estudo detalhado sobre o tema.

Um movimento rígido pode ser descrito pelo mapeamento $g(t) : O \rightarrow \mathbb{R}^3$, que descreve como pontos do corpo se movimentam ao longo do tempo em relação a um sistema fixo de coordenadas cartesianas. A função $g(t)$ mapeia as coordenadas iniciais de um ponto do corpo para as coordenadas do mesmo ponto no instante t . Da mesma forma pode ser descrita a transformação de vetores que conectam dois pontos do corpo:

$$\vec{v} = p - q \quad g_*(\vec{v}) = g(p) - g(q)$$

Um mapeamento $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ pode ser definido como uma transformação de corpo rígido se satisfaz as seguintes propriedades:

1. Preserva módulo: $\|g(p) - g(q)\| = \|p - q\|$ para quaisquer pontos $p, q \in \mathbb{R}^3$
2. Preserva produto vetorial: $g_*(\vec{v} \times \vec{w}) = g_*(\vec{v}) \times g_*(\vec{w})$ para quaisquer vetores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

Esta segunda propriedade evita que reflexões internas ao corpo [e.g., $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$] sejam permitidas e indica que o ângulo entre dois vetores permanece constante na transformação rígida. Um sistema de coordenadas de mão direita, i.e. $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$, após uma transformação de corpo rígido permanecerá de mão direita.

O movimento do sistema de coordenadas fixo ao corpo do veículo, $\Sigma_b(O_b - x_b y_b z_b)$, é descrito em relação à um referencial inercial, $\Sigma_i(O_i - xyz)$. Tais coordenadas estão representadas na figura 3.1. Sendo que a origem das coordenadas do veículo, O_b , é geralmente escolhida para coincidir com o centro de gravidade (CG) do corpo e os eixos x_b, y_b, z_b coincidindo com os eixos principais de inércia, se tais dados forem conhecidos. Tal escolha é feita para facilitar o possível uso de um modelo dinâmico. Para veículos marinhos é assumido que a aceleração em um ponto na superfície da terra pode ser desprezada. Esta é considerada uma boa aproximação, uma vez que o movimento da terra dificilmente afeta veículos marinhos de baixa velocidade, de modo que um sistema de coordenadas Σ_i fixo à terra pode ser considerado inercial (Fossen 1994).

A configuração do corpo em relação ao referencial inercial é definida pelo par (p_{ib}, R_{ib}) , que definem respectivamente uma operação de translação e uma de rotação. Temos que $p_{ib} \in \mathbb{R}^3$ é o vetor da posição de O_b em relação à O_i e $R_{ib} \in SO(3)$ é a orientação das coordenadas Σ_b em relação às coordenadas Σ_i . Em que $SO(3)$ é o espaço das matrizes de rotação em $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, definido da seguinte forma:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : RR^T = I, \det(R) = 1\} \quad (3.1)$$

O par (p_{ib}, R_{ib}) define uma configuração que pertence ao grupo especial Euclidiano

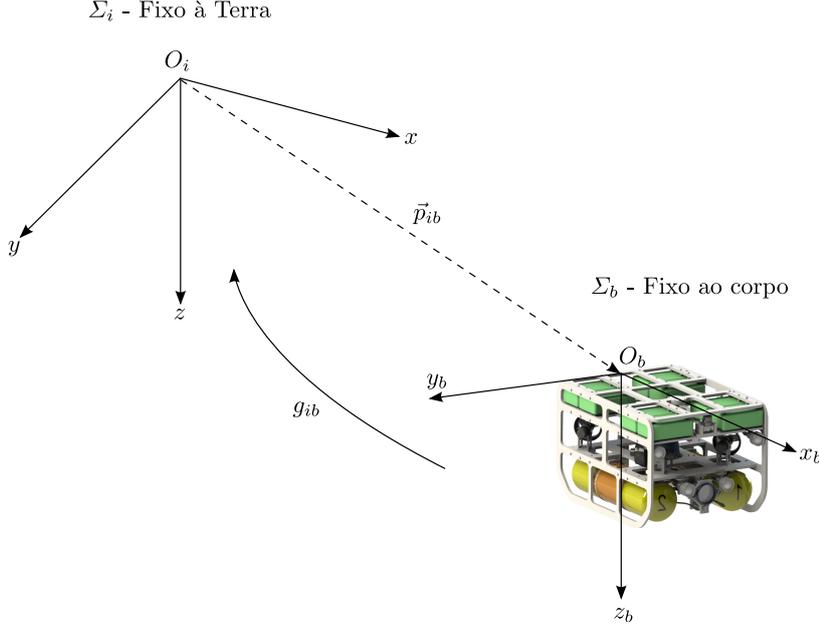


Figura 3.1: Sistema de coordenadas utilizado

$SE(3)$, definido por:

$$SE(3) = \{(p, R) : p \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3)\} \quad (3.2)$$

Dado um ponto q_b , representado nas coordenadas Σ_b , pode ser obtido q_i , sua representação em Σ_i , por meio da seguinte operação:

$$q_i = g_{ib}(q_b) = \vec{p}_{ib} + R_{ib}q_b \quad (3.3)$$

Pode-se também utilizar a representação homogênea para definir a mesma transformação por meio do produto entre uma matriz e um vetor em \mathbb{R}^4 .

$$\bar{q}_i = \begin{bmatrix} q_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ib} & p_{ib} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{g}_{ib}\bar{q}_b \quad (3.4)$$

Em que \bar{q}_i , um vetor em \mathbb{R}^4 , é a representação homogênea do ponto q_i em \mathbb{R}^3 , por meio do acréscimo de 1 em suas coordenadas. Um vetor em \mathbb{R}^3 é representado nas coordenadas homogêneas com a adição de um 0, uma vez que se trata da diferença entre dois pontos. A matriz \bar{g}_{ib} é a representação homogênea da transformação $g_{ib} \in SE(3)$. Deste é possível tratar uma sequência de transformações como uma série de multiplicações de matrizes. Seja por exemplo um sensor, de coordenadas Σ_s , fixado ao veículo, sua configuração em relação ao sistema de coordenadas inercial pode ser dado por:

$$\bar{g}_{is} = \bar{g}_{ib}\bar{g}_{bs} = \begin{bmatrix} R_{ib}R_{bs} & R_{ib}p_{bs} + p_{ib} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

É comum parametrizar uma orientação por meio dos ângulos de Euler, em que uma rotação genérica é descrita pela combinação de três rotações elementares ao redor de eixos x , y e z , que são respectivamente definidas a seguir:

$$R_x(\phi) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) := \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) := \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Há diversas definições para os ângulos de Euler, cada qual adotando uma sequência de rotações diferentes. Em veículos marítimos é comum o uso dos ângulos de Euler ZYX, comumente chamados de ângulos de balanço (ϕ , *roll*), caturro (θ , *pitch*) e guinada (ψ , *yaw*).¹ Considerando Σ_i transladado de modo que sua origem coincida com Σ_b , a orientação do veículo é obtida por meio de três rotações elementares: $R_z(\psi)$ é a rotação do veículo ao redor do eixo z de Σ_i , $R_y(\theta)$ a rotação ao redor do eixo y do sistema de coordenadas resultante e $R_x(\phi)$ a rotação ao redor do eixo x do sistema de coordenadas após as rotações de *pitch* e *yaw*. A matriz resultante, $R_{bi} = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$, rotaciona o sistema de coordenadas Σ_i para Σ_b . A transposta desta realiza a operação inversa, de modo que $R_{ib} = R_z^T(\psi)R_y^T(\theta)R_x^T(\phi)$, ou por extenso:

$$R_{ib} = \tag{3.6}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Dada uma matriz de rotação, $R \in SO(3)$, pode-se obter os ângulos de balanço,

¹Há autores que chamam tal parametrização de ângulos de Tait-Bryan ZYX, Náuticos, de Cardano ou de Fick.

Tabela 3.1: Notação usada para veículos marinhos, SNAME

| | velocidade linear e angular | posição e ângulos de Euler |
|---|--------------------------------|-------------------------------|
| movimento no eixo x (avanço, <i>surge</i>) | u | x |
| movimento no eixo y (deriva, <i>sway</i>) | v | y |
| movimento no eixo z (heave) | w | z |
| rotação ao redor do eixo x (balanço, <i>roll</i>) | p | ϕ |
| rotação ao redor do eixo y (caturro, <i>pitch</i>) | q | θ |
| rotação ao redor do eixo z (guinada, <i>yaw</i>) | r | ψ |

caturro e guinada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\psi &= \operatorname{atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \theta &= \operatorname{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}) \\ \phi &= \operatorname{atan2}(r_{32}, r_{33})\end{aligned}$$

Em que r_{ij} é o elemento na linha i e coluna j da matriz R . De tais equações é possível ver que há uma singularidade nesta parametrização quando $\theta = \pi/2$. Isto se refere ao caso em que o veículo esteja submergindo ou emergindo numa posição totalmente vertical, algo que não deverá ocorrer com o submersível em questão. Se ocorresse, seria necessário adotar uma representação em Quaternions, que é livre de singularidades e comumente utilizada em veículos aeroespaciais.

Para o modelo cinemático, o estado do veículo x_v é definido por 12 variáveis, nomeadas de acordo com o padrão SNAME (*Society of Naval Architects & Marine Engineers*), como indicado na tabela 3.1 retirada de Fossen (1994). A posição e orientação do veículo são descritas nas coordenadas inerciais, enquanto velocidade linear e angular são expressas no sistema de coordenadas do veículo.

$$x_v = \begin{bmatrix} p_{ib} & \Theta_{ib} & v_{ib}^b & \omega_{ib}^b \end{bmatrix}^T \quad (3.8)$$

Em que $p_{ib} = [x, y, z]^T$, $\Theta_{ib} = [\psi, \theta, \phi]^T$, $v_{ib}^b = [u, v, w]^T$ e $\omega_{ib}^b = [p, q, r]^T$. Uma vez que o vetor de velocidade linear é expresso nas coordenadas do veículo, é necessário passá-lo para o sistema de coordenadas inerciais antes de igualá-lo com a derivada no tempo da posição do veículo. De tal modo que

$$\dot{p}_{ib} = v_{ib}^i = R_{ib} v_{ib}^b \quad (3.9)$$

Também é necessário estabelecer uma relação entre a derivada dos ângulos de Euler e a velocidade angular visto nas coordenadas do veículo. Para isto é utilizada

a seguinte relação, tal como é visto em From et al. (2014).

$$\hat{\omega}_{ib}^b = R_{ib}^T \dot{R}_{ib} \quad (3.10)$$

Disto temos que

$$\omega_{ib}^b = \begin{bmatrix} \dot{\phi} - \sin \theta \dot{\psi} \\ \cos \theta \dot{\psi} \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \cos \theta \dot{\psi} \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}^{-1}} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Temos então

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Com

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathcal{J} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Considerando que as velocidades permaneçam constantes, o modelo cinemático do veículo fica reduzido a:

$$\dot{x}_v = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p_{ib} \\ \Theta_{ib} \\ v_{ib}^b \\ \omega_{ib}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ib} v_{ib}^b \\ \mathcal{J} \omega_{ib}^b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.2 Modelo Dinâmico do Veículo

Como dito anteriormente, embora não seja utilizado para o sistema de localização apresentado neste trabalho, é essencial o uso de um modelo dinâmico do veículo para realizar simulações do mesmo. O modelo será apresentado de forma breve neste trabalho, um estudo mais detalhado pode ser encontrado em Goulart (2007) e Chin (2013). Ambos consideram o veículo totalmente submerso em um fluido ideal e desprezam o efeito de ondas e do cabo umbilical sobre o mesmo.

Em linhas gerais a dinâmica do veículo é definida por:

$$M_{CR} \dot{\nu} + C_{CR}(\nu) \nu = -M_A \dot{\nu} - C_A(\nu) \nu - D_L \nu - D_Q \nu |\nu| + G(\eta) + \tau_A \quad (3.15)$$

Em que $\nu = [v_{ib}^b, \omega_{ib}^b]^\top$, M_{CR} é a matriz de inércia do corpo rígido e M_A a matriz de inércia adicional; C_{CR} e C_A são as matrizes de Coriolis e centrípeta do corpo

rígido e adicional, respectivamente; D_L e D_Q são as matrizes de arraste linear e quadrático, respectivamente; $G(\eta)$ é a força-momento de restauração, corresponde à efeitos de peso e flutuação do veículo; τ_A é o vetor de força-momento gerado pelos propulsores. Aglutinando termos similares:

$$M\dot{\nu} + C(\nu) + D(\nu)\nu + G_f(\nu) = \tau_A \quad (3.16)$$

Onde $M = M_{CR} + M_A$, $C(\nu) = [C_{CR}(\nu) + C_A]\nu$ e $D(\nu) = D_L + D_Q|\nu|$.

3.3 Modelo dos Sensores

O veículo é equipado por um conjunto de sensores que permitem uma estimativa de profundidade, orientação, velocidade e distância em relação a um ponto na superfície. Por ora, apenas é estabelecida a relação entre as variáveis medidas e o estado do veículo. Uma discussão mais detalhada sobre os equipamentos utilizados será feita no capítulo 5. Cada sensor possui uma sistema de coordenadas próprio $\Sigma_s(O_s - x_s y_s z_s)$ e sua medida deve ser mapeada de Σ_s para o sistema de coordenadas adequado.

Uma vez que o veículo foi modelado como um corpo rígido a velocidade angular medida por um sensor ideal é igual a velocidade angular do veículo rotacionada para as coordenadas do sensor:

$$\begin{aligned} z_\omega &= \omega_{is} = R_{sb}\omega_{ib} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & R_{sb} \end{bmatrix} x_v \end{aligned}$$

A velocidade linear de um veículo submarino pode ser obtida tanto em relação a um referencial inercial quanto em relação à água. No primeiro caso há uma medida direta de v_{ib}^b , considerando $\Sigma_s(O_s - x_s y_s z_s)$ o sistema de coordenadas do sensor, a seguinte relação é obtida:

$$\begin{aligned} z_v &= v_{is}^s = R_{sb}(v_{ib}^b + \omega_{ib}^b \times p_{bs}) \\ &= R_{sb}v_{ib}^b - R_{sb}\hat{p}_{bs}\omega_{ib}^b \\ &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & R_{sb} & -R_{sb}\hat{p}_{bs} \end{bmatrix} x_v \end{aligned}$$

No segundo caso a velocidade linear do veículo é estimada em relação à água, portanto é preciso definir um referencial que translada com a água, $\Sigma_a(O_a - x_a y_a z_a)$. Assumindo que a correnteza é irrotacional, possuindo apenas componentes de velocidade linear, v_{ia}^i . A medida obtida é a velocidade do veículo em relação à água visto nas coordenadas do veículo, v_{ab}^b , em que $v_{ib}^b = v_{ab}^b + R_{bi}v_{ia}^i$. No sistema de coordenadas do sensor:

$$\begin{aligned}
z_v &= v_{as}^s = R_{sb}(v_{ab}^b + \omega_{ab}^b \times p_{bs}) \\
&= R_{sb}(v_{ib}^b - R_{bi}v_{ia}^i + \omega_{ib}^b \times p_{bs}) \\
&= R_{sb}v_{ib}^b - R_{sb}R_{bi}v_{ia}^i - R_{sb}\hat{p}_{bs}\omega_{ib}^b \\
&= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & R_{sb} & -R_{sb}\hat{p}_{bs} \end{bmatrix} x_v - R_{sb}R_{bi}v_{ia}^i
\end{aligned}$$

Em que $\omega_{ab}^b = \omega_{ib}^b$, uma vez que as correntezas são consideradas irrotacionais. Na ausência de um modelo detalhado do oceano, é suposto que a correnteza possui um valor aproximadamente constante.

Para a medida de distância foi considerada a posição de uma referência na superfície nas coordenadas (x_m, y_m, z_m) , de modo que o sensor obtém um valor dado por:

$$z_{\text{dist}} = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2}$$

A profundidade é obtida diretamente:

$$z_{\text{prof}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0_{1 \times 9} \end{bmatrix} x_v$$

A orientação é obtida já na parametrização dos ângulos de Euler:

$$z_{\text{euler}} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} \end{bmatrix} x_v$$

3.4 Considerações Finais

Os modelos abordados neste capítulo tratam de casos ideais, em que o veículo navega com velocidade constante e as medidas dos sensores são exatas, nos capítulos seguintes são tratados casos em que há incerteza no sistema, de modo que a velocidade varia e as medidas obtidas são corrompidas por ruídos.

Capítulo 4

Estimadores de Estado

Os modelos usados até agora foram tratados de modo determinístico, sem considerar nenhum tipo de incerteza. O conhecimento exato do estado do sistema é uma idealização, medidas de sensores são corrompidas por ruídos e os modelos utilizados são simplificações. O estado do sistema deve ser tratado como um vetor aleatório, cujo valor não é conhecido de forma exata mas sim por meio de distribuições probabilísticas. Na seção 4.1 será apresentado o Filtro de Kalman, que permite uma estimativa ótima do estado de um sistema linear. Em seguida são descritas duas aproximações desse filtro para sistemas não-lineares, o EKF na seção 4.2 e o UKF na seção 4.3. Os conceitos de probabilidade utilizados neste capítulo são apresentados no apêndice A.

4.1 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um método que permite a obtenção de uma estimativa ótima do estado de um sistema dado que este obedeça determinadas condições que serão descritas a seguir. A palavra filtro é empregada no sentido de obter a melhor estimativa a partir de dados ruidosos, filtrando o ruído presente. Sua primeira aplicação foi no sistema de controle de orientação da espaçonave Apollo da NASA. Desde então tem sido utilizado em uma vasta gama de aplicações.

Tal como definido em Gelb (1974), um estimador ótimo é um algoritmo computacional que processa medidas de forma a obter uma estimativa com erro mínimo do estado do sistema, isto com base em uma estimativa inicial, no modelo dinâmico do sistema e das medidas, e parâmetros estatísticos de ruídos do sistema e das medidas. O filtro de Kalman considera modelos lineares, aqui definidos por

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_k + W_k q_k \quad (4.1)$$

$$z_k = H_k x_k + G_k r_k \quad (4.2)$$

Em que q_k e r_k são ruídos brancos, de média nula e não correlacionados:

$$\begin{aligned}
 q_k &\sim (0, Q_k) \\
 r_k &\sim (0, R_k) \\
 E[q_k q_j^T] &= Q_k \delta_{k-j} \\
 E[r_k r_j^T] &= R_k \delta_{k-j} \\
 E[q_k r_j^T] &= 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

O filtro de Kalman pode ser dividido em duas etapas: predição e correção. A primeira se baseia no uso do modelo do sistema para atualizar uma estimativa inicial, obtendo uma nova estimativa dita *a priori*, esta é descrita em 4.1.1. A correção obtém uma estimativa dita *a posteriori* a partir de uma medida e seu respectivo modelo, tal etapa é desenvolvida em 4.1.2. A formulação apresentada nesta seção é baseada em Gelb (1974) e Simon (2006).

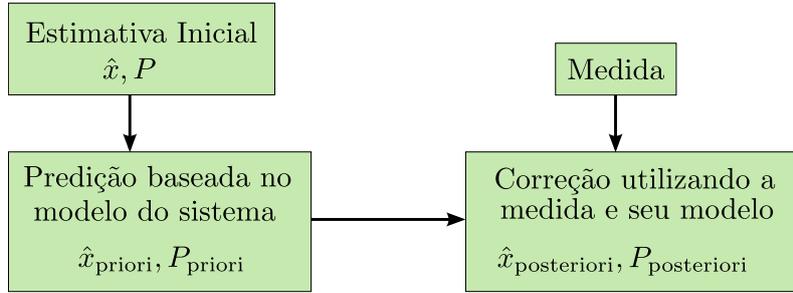


Figura 4.1: Diagrama simplificado do Filtro de Kalman

4.1.1 Predição

Dada uma estimativa do estado anterior, denotada por $\hat{x}_{k-1|k-1}$, com uma incerteza definida pela matriz de covariância $P_{k-1|k-1}$, a predição deve obter uma estimativa $\hat{x}_{k|k-1}$, dita *a priori*, com sua respectiva covariância $P_{k|k-1}$.

A estimativa inicial é propagada utilizando o modelo do sistema, eq. 4.1, e o valor esperado do resultado é a a estimativa *a priori*:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{k|k-1} &= E[A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k + W_k q_k] \\
 &= A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Com os erros de estimativa definidos por

$$\tilde{x}_{k-1|k-1} \triangleq \hat{x}_{k-1|k-1} - x_{k-1} \tag{4.5}$$

$$\tilde{x}_{k|k-1} \triangleq \hat{x}_{k|k-1} - x_k \tag{4.6}$$

Substituindo 4.1 e 4.4 em 4.6,

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k|k-1} &= A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k - A_k x_{k-1} - B_k u_k - W_k q_k \\ &= A_k \tilde{x}_{k-1|k-1} - W_k q_k\end{aligned}$$

Com o seguinte valor esperado

$$E[\tilde{x}_{k|k-1}] = A_k E[\tilde{x}_{k-1|k-1}]$$

De modo que se a estimativa anterior não for tendenciosa, i.e. $E[\tilde{x}_{k-1|k-1}] = 0$, a estimativa *a priori* também não será tendenciosa.

Em seguida deve-se obter a covariância do erro de estimativa *a priori*

$$P_{k|k-1} = E[\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^\top]$$

Expandindo,

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^\top &= (\hat{x}_{k|k-1} - x_k)(\hat{x}_{k|k-1} - x_k)^\top \\ &= (A_k \tilde{x}_{k-1|k-1} - W_k q_k)(A_k \tilde{x}_{k-1|k-1} - W_k q_k)^\top \\ &= A_k \tilde{x}_{k-1|k-1} \tilde{x}_{k-1|k-1}^\top A_k^\top - A_k \tilde{x}_{k-1|k-1} q_k^\top W_k^\top \\ &\quad - W_k q_k \tilde{x}_{k-1|k-1}^\top A_k^\top + W_k q_k q_k^\top W_k^\top\end{aligned}$$

Utilizando do fato de que não há correlação entre a estimativa no instante t_k e o ruído q_k , ou seja $E[\tilde{x}_{k-1|k-1} q_k^\top] = 0$, com a equação 4.3, a covariância do erro de estimativa *a priori* é igual a

$$P_{k|k-1} = A_k P_{k-1|k-1} A_k^\top + W_k Q_k W_k^\top \quad (4.7)$$

As equações 4.4 e 4.7 definem a etapa de predição do filtro. A estimativa *a priori* obtida deve ser então utilizada na etapa de correção, descrita a seguir.

4.1.2 Correção

Considerando a estimativa *a priori*, é derivada uma estimativa *a posteriori*, $\hat{x}_{k|k}$, que incorpore a medida, z_k . A seguinte forma recursiva é buscada

$$\hat{x}_{k|k} \triangleq K'_k \hat{x}_{k|k-1} + K_k z_k \quad (4.8)$$

Inserindo 4.2 na equação anterior,

$$\hat{x}_{k|k} = K'_k \hat{x}_{k|k-1} + K_k H_k x_k + K_k G_k r_k \quad (4.9)$$

Esta equação, combinada com 4.6,

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= K'_k(x_k + \tilde{x}_{k|k-1}) + K_k H_k x_k + K_k G_k r_k \\ &= (K'_k + K_k H_k)x_k + K'_k \tilde{x}_{k|k-1} + K_k G_k r_k\end{aligned}$$

Definindo o erro de estimação *a posteriori* por

$$\tilde{x}_{k|k} \triangleq \hat{x}_{k|k} - x_k \quad (4.10)$$

E substituindo no último resultado,

$$\tilde{x}_{k|k} = (K'_k + K_k H_k - I)x_k + K'_k \tilde{x}_{k|k-1} + K_k G_k r_k$$

Uma vez que assumimos que a estimativa *a priori* não é tendenciosa, para que a estimativa *a posteriori* também não o seja a seguinte relação é obtida,

$$K'_k = I - K_k H_k$$

De modo que 4.8 pode ser escrita por

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (4.11)$$

com o correspondente erro

$$\tilde{x}_{k|k} = (I - K_k H_k)\tilde{x}_{k|k-1} + K_k G_k r_k \quad (4.12)$$

O cálculo de K_k , denominado ganho de Kalman, é obtido minimizando uma função de custo J_k , no caso o valor esperado do erro quadrático da estimativa,

$$J_k = E[\tilde{x}_{k|k}^\top \tilde{x}_{k|k}]$$

que também pode ser escrito com base no traço da covariância do erro *a posteriori*. Em que $tr(\cdot)$ é o operador de traço de uma matriz.

$$J_k = tr(E[\tilde{x}_{k|k} \tilde{x}_{k|k}^\top]) = tr(P_{k|k}) \quad (4.13)$$

Expandindo a fórmula da covariância com base em 4.12

$$\begin{aligned}P_{k|k} &= E[\tilde{x}_{k|k} \tilde{x}_{k|k}^\top] \\ &= E[((I - K_k H_k)\tilde{x}_{k|k-1} + K_k G_k r_k)(\tilde{x}_{k|k-1}^\top (I - K_k H_k)^\top + r_k^\top G_k^\top K_k^\top)] \\ &= (I - K_k H_k)E[\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^\top](I - K_k H_k)^\top + K_k G_k E[r_k r_k^\top] G_k^\top K_k^\top\end{aligned}$$

Posto que não há correlação entre o ruído de medida e a estimativa *a priori*, i.e. $E[\tilde{x}_{k|k-1} r_k^\top] = 0$. Como é conhecido que $E[\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^\top] = P_{k|k-1}$ e $E[r_k r_k^\top] = R_k$, substituindo tais relações na equação anterior:

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= (I - K_k H_k) P_{k|k-1} (I - K_k H_k)^\top + K_k G_k R_k G_k^\top K_k^\top \\ &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H_k^\top K_k^\top - K_k H_k P_{k|k-1} + K_k H_k P_{k|k-1} H_k^\top K_k^\top + K_k G_k R_k G_k^\top K_k^\top \end{aligned} \quad (4.14)$$

Uma vez que o traço é um operador linear, o traço de $P_{k|k}$ é igual ao somatório do traço de cada componente da equação anterior. Para obter o ganho ótimo é preciso que $\frac{\partial}{\partial K_k} \text{tr}(P_{k|k})$ se anule. Para tal duas identidades do traço serão utilizadas:

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{tr}(ABA^\top) = A(B + B^\top) \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \text{tr}(BAC) = B^\top C^\top \quad (4.16)$$

As provas de tais identidades podem ser vistas nos apêndices B.1.2 e B.1.3, respectivamente.

É preciso colocar a equação 4.14 em um formato que as duas identidades possam ser exploradas. Isto é feito utilizando outras duas propriedades do traço, a invariância à transposta e a permutação cíclica:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^\top) \quad (4.17)$$

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB) \quad (4.18)$$

A prova desta é desenvolvida no apêndice B.1.1. Utilizando 4.17 e em seguida 4.18,

$$\text{tr}(P_{k|k-1} H_k^\top K_k^\top) = \text{tr}(K_k H_k P_{k|k-1}) = \text{tr}(P_{k|k-1} K_k H_k) \quad (4.19)$$

Com o uso de 4.15 e 4.16,

$$\frac{\partial}{\partial K_k} \text{tr}(P_{k|k}) = -2P_{k|k-1} H_k^\top + 2K_k H_k P_{k|k-1} H_k^\top + 2K_k G_k R_k G_k^\top \quad (4.20)$$

Igualando o resultado anterior a zero,

$$\begin{aligned} K_k (H_k P_{k|k-1} H_k^\top + G_k R_k G_k^\top) &= P_{k|k-1} H_k^\top \\ K_k &= P_{k|k-1} H_k^\top (H_k P_{k|k-1} H_k^\top + G_k R_k G_k^\top)^{-1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Uma análise sobre a hessiana de J_k constatará que ela é positiva definida, de modo que o ganho de Kalman minimiza de fato J_k .

Para derivar uma fórmula mais simples para o cálculo de $P_{k|k}$, o valor do ganho

K_k é substituído na equação 4.14

$$\begin{aligned}
P_{k|k} &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1}H_k^\top(H_kP_{k|k-1}H_k^\top + R_k)^{-1}H_kP_{k|k-1} \\
&\quad - P_{k|k-1}H_k^\top(H_kP_{k|k-1}H_k^\top + R_k)^{-1}H_kP_{k|k-1} \\
&\quad + P_{k|k-1}H_k^\top(H_kP_{k|k-1}H_k^\top + R_k)^{-1}H_kP_{k|k-1}H_k^\top(H_kP_{k|k-1}H_k^\top + R_k)^{-1}H_kP_{k|k-1} \\
&\quad + P_{k|k-1}H_k^\top(H_kP_{k|k-1}H_k^\top + R_k)^{-1}R_k(H_kP_{k|k-1}H_k^\top + R_k)^{-1}H_kP_{k|k-1} \\
&= P_{k|k-1} - P_{k|k-1}H_k^\top(H_kP_{k|k-1}H_k^\top + R_k)^{-1}H_kP_{k|k-1} \\
&= P_{k|k-1} - K_kH_kP_{k|k-1} \\
&= (I - K_kH_k)P_{k|k-1}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

As equações 4.21, 4.11 e 4.22 definem a etapa de correção do filtro. Ambas etapas são representadas no diagrama 4.2.

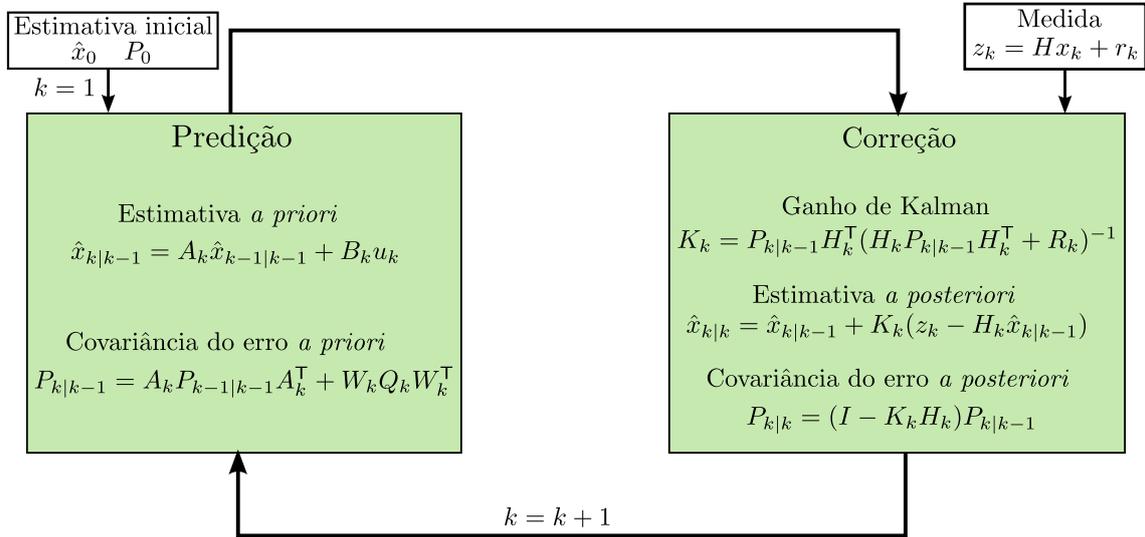


Figura 4.2: Diagrama do Filtro de Kalman

Em síntese o filtro é definido pelo seguinte algoritmo

Algorithm 1 Filtro_de_Kalman($\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}, u_k, z_k$)

- 1: $\hat{x}_{k|k-1} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k$ Eq. 4.4
 - 2: $P_{k|k-1} = A_k P_{k-1|k-1} A_k^\top + Q_k$ Eq. 4.7
 - 3: $K_k = P_{k|k-1} H_k^\top (H_k P_{k|k-1} H_k^\top + R_k)^{-1}$ Eq. 4.21
 - 4: $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1})$ Eq. 4.11
 - 5: $P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$ Eq. 4.22
 - 6: **return** $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$
-

O filtro de Kalman é o filtro linear ótimo para a minimização do erro quadrático médio. Quando os ruídos além de possuírem média nula, serem brancos e decorrelacionados, possuem uma distribuição Gaussiana, então o filtro de Kalman é a solução ótima (Simon 2006).

No caso em que os ruídos de processo e de medida sejam correlacionados, i.e. $E[q_k r_j^T] \neq 0$, ou em que os ruídos sejam coloridos mas possuam uma relação linear com um ruído branco, é possível modificar a estrutura do filtro para que ele continue sendo ótimo. Tais modificações são apresentadas em Simon (2006).

Quando o modelo do sistema ou da medida for não-linear não é possível aplicar o filtro e uma aproximação deve ser obtida. Nas seções 4.2 e 4.3 duas possibilidades são exploradas.

4.2 EKF - Filtro de Kalman Estendido

Na prática a grande maioria dos sistemas possui alguma não-linearidade que acaba restringindo o uso do filtro de Kalman. Temos que o sistema não-linear seja descrito por

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + q_k \quad (4.23)$$

$$z_k = h_k(x_k) + r_k \quad (4.24)$$

Tal como no caso linear os ruídos obedecem a seguinte relação

$$q_k \sim (0, Q_k)$$

$$r_k \sim (0, R_k)$$

$$E[q_k q_j^T] = Q_k \delta_{k-j}$$

$$E[r_k r_j^T] = R_k \delta_{k-j}$$

$$E[q_k r_j^T] = 0$$

O filtro de Kalman deve ser aproximado de alguma forma. Um dos algoritmos mais utilizados para esta situação é o Filtro de Kalman Estendido (EKF, *Extended Kalman Filter*).

Considerando a expansão na série de Taylor de $f(x)$ ao redor de \hat{x} , em que o erro é definido $\tilde{x} = x - \hat{x}$, a seguinte equação é obtida

$$f(x) = f(\hat{x}) + D_{\tilde{x}} f + \frac{1}{2!} D_{\tilde{x}}^2 f + \frac{1}{3!} D_{\tilde{x}}^3 f + \dots$$

Em que a operação $D_{\tilde{x}}^k f$ é definida por

$$D_{\tilde{x}}^k f = \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(x) \Big|_{\hat{x}}$$

A aproximação utilizada pelo EKF trunca a série no termo de primeira ordem,

se baseando na hipótese que os termos de ordem maior são desprezíveis e a função é aproximadamente linear.

$$f(x) \approx f(\hat{x}) + D_{\hat{x}}f = f(\hat{x}) + F\tilde{x}$$

Em que F é o Jacobiano de $f(x)$ calculado em \hat{x}

$$F = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{\hat{x}}$$

A estrutura do filtro de Kalman é preservada no EKF, a etapa de predição é descrita a seguir em 4.2.1 e a correção em 4.2.2. A formulação apresentada aqui é baseada em Gelb (1974).

4.2.1 Predição

Considerando uma estimativa anterior $\hat{x}_{k-1|k-1}$, a estimativa *a priori* é dada por

$$\hat{x}_{k|k-1} = f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}) \quad (4.25)$$

De modo que o erro de estimativa é

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k|k-1} &\triangleq \hat{x}_{k|k-1} - x_k \\ &= f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}) - f_k(x_{k-1}) - q_k \end{aligned} \quad (4.26)$$

Usando a aproximação linear de f_k ao redor de $\hat{x}_{k-1|k-1}$,

$$f_k(x_{k-1}) \approx f_k(\hat{x}_{k-1|k-1}) - F_k \tilde{x}_{k-1|k-1}$$

Combinando as duas equações anteriores

$$\tilde{x}_{k|k-1} \approx F_k \tilde{x}_{k-1|k-1} - q_k$$

Utilizando a aproximação anterior para o cálculo da covariância do erro *a priori*,

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= E[\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^T] \\ &\approx E[(F_k \tilde{x}_{k-1|k-1} - q_k)(F_k \tilde{x}_{k-1|k-1} - q_k)^T] \\ &= F_k E[\tilde{x}_{k-1|k-1} \tilde{x}_{k-1|k-1}^T] F_k^T + E[q_k q_k^T] \\ &= F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k \end{aligned} \quad (4.27)$$

As equações 4.25 e 4.27 definem a etapa de predição do EKF. A estimativa *a priori* obtida deve ser então utilizada na etapa de correção descrita a seguir.

4.2.2 Correção

Para a etapa de correção o modelo de medida é aproximado por um sistema linear, com tal aproximação o desenvolvimento das equações é similar ao caso linear e alguns detalhes de cálculo serão omitidos. A estrutura buscada é dada por

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \{z_k - E[h_k(x_k)]\} \quad (4.28)$$

De modo que o erro é de estimativa *a posteriori* é

$$\tilde{x}_{k|k} = \tilde{x}_{k|k-1} + K_k \{h_k(x_k) - E[h_k(x_k)]\} + K_k r_k$$

Considerando que o erro de estimativa *a priori* é decorrelacionado do ruído de medida, a seguinte fórmula para a covariância *a posteriori* é obtida:

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} + E[\tilde{x}_{k|k-1}(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])]^\top K_k^\top \\ &\quad + K_k E[(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])\tilde{x}_{k|k-1}^\top] \\ &\quad + K_k E[(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])^\top] K_k^\top + K_k R_k K_k^\top \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para obter o ganho K_k são utilizadas as mesmas propriedades que foram exploradas para o filtro linear, de modo a obter

$$K_k = -xh^\top (hh^\top + R_k)^{-1} \quad (4.30)$$

Em que, por simplificação, a seguinte notação é adotada

$$\begin{aligned} xh^\top &= E[\tilde{x}_{k|k-1}(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])]^\top \\ hx^\top &= E[(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])\tilde{x}_{k|k-1}^\top] \\ hh^\top &= E[(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])^\top] \end{aligned}$$

Substituindo 4.30 em 4.29

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} + xh^\top (hh^\top + R_k)^{-1} hh^\top (hh^\top + R_k)^{-1} hx^\top \\ &\quad - 2xh^\top (hh^\top + R_k)^{-1} hx^\top + xh^\top (hh^\top + R_k)^{-1} Q_k (hh^\top + R_k)^{-1} hx^\top \\ &= P_{k|k-1} - xh^\top (hh^\top + R_k)^{-1} hx^\top \end{aligned}$$

Ou na notação anterior

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} + K_k E[(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])\tilde{x}_{k|k-1}^\top] \quad (4.31)$$

Tal como foi feito na predição, a função não-linear é linearizada por meio de sua

série de Taylor, calculada ao redor de $\hat{x}_{k|k-1}$ e truncada no termo de primeira ordem

$$h_k(x_k) \approx h_k(\hat{x}_{k|k-1}) - H_k \tilde{x}_{k|k-1}$$

Em que H_k é o Jacobiano de h_k calculado em $\hat{x}_{k|k-1}$.

De modo direto,

$$E[h_k(x_k)] \approx E[h_k(\hat{x}_{k|k-1})] - H_k E[\tilde{x}_{k|k-1}] = h_k(\hat{x}_{k|k-1})$$

Em que foi considerada que a estimativa *a priori* não é tendenciosa. Obtendo então

$$h_k(x_k) - E[h_k(x_k)] \approx h_k(\hat{x}_{k|k-1}) - H_k \tilde{x}_{k|k-1} - h_k(\hat{x}_{k|k-1}) = -H_k \tilde{x}_{k|k-1}$$

que resulta em

$$E[(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])\tilde{x}_{k|k-1}^\top] \approx -H_k E[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{x}_{k|k-1}^\top] = -H_k P_{k|k-1}$$

Substituindo este resultado na equação 4.31

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k H_k P_{k|k-1} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (4.32)$$

Fazendo as mesmas aproximações para o ganho 4.30

$$\begin{aligned} K_k &= -E[\tilde{x}_{k|k-1}(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])^\top] \{E[(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])(h_k(x_k) - E[h_k(x_k)])^\top] + R_k\}^{-1} \\ &\approx E[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{x}_{k|k-1}^\top] H_k^\top \{H_k E[\tilde{x}_{k|k-1}\tilde{x}_{k|k-1}^\top] H_k^\top + R_k\}^{-1} \\ &= P_{k|k-1} H_k^\top (H_k P_{k|k-1} H_k^\top + R_k)^{-1} \end{aligned} \quad (4.33)$$

As equações 4.21, 4.28 e 4.32 definem a etapa de correção do filtro. Ambas etapas são representadas no diagrama 4.3.

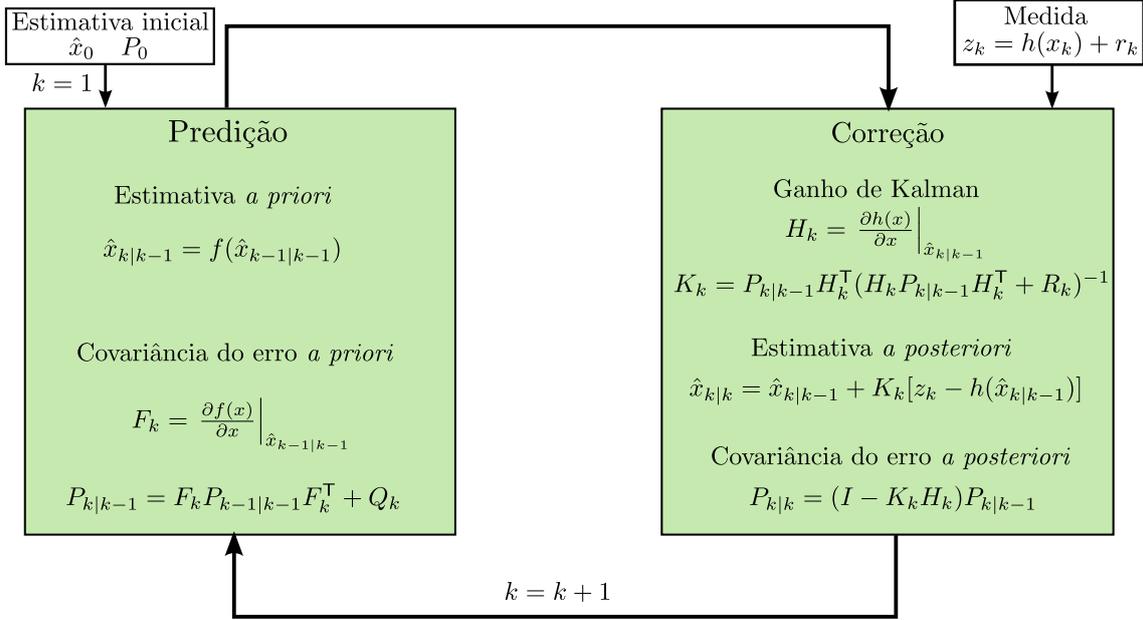


Figura 4.3: Diagrama do Filtro de Kalman Estendido

Em síntese o EKF é definido pelo seguinte algoritmo, cuja implementação feita para o *MATLAB* está no apêndice C.1.

Algorithm 2 EKF($\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}, z_k$)

- 1: $\hat{x}_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1})$ Eq. 4.25
 - 2: $F_k = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{k-1|k-1}}$
 - 3: $P_{k|k-1} = F_k P_{k-1|k-1} F_k^T + Q_k$ Eq. 4.27
 - 4: $H_k = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \Big|_{\hat{x}_{k|k-1}}$
 - 5: $K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1}$ Eq. 4.21
 - 6: $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - h_k(\hat{x}_{k|k}))$ Eq. 4.28
 - 7: $P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$ Eq. 4.32
 - 8: **return** $\hat{x}_{k|k}, P_{k|k}$
-

Embora seja muito utilizado, o EKF não possui uma boa performance quando as funções são altamente não-lineares ou no caso em que não é possível o cálculo do jacobiano, em funções descontínuas, por exemplo. Os casos a seguir irão exemplificar os erros de aproximação causados pelo processo de linearização.

Exemplo - Caso escalar $f(x) = x^2$

Considerando o exemplo apresentado em Julier & Uhlmann (1996), temos $f(x) = x^2$, com uma variável aleatória $x = \hat{x} + \delta_x$, em que \hat{x} é a média de x e $\delta_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$, o

valor esperado de $f(x)$ é dado por

$$E[f(x)] = E[f(\hat{x} + \delta_x)] = E[\hat{x}^2 + 2\hat{x}\delta_x + \delta_x^2] = \hat{x}^2 + \sigma_x^2$$

E a variância por

$$\begin{aligned} E[(f(x) - E[f(x)])^2] &= E[(\hat{x}^2 + 2\hat{x}\delta_x + \delta_x^2 - \hat{x}^2 - \sigma_x^2)^2] \\ &= E[(2\hat{x}\delta_x + \delta_x^2 - \sigma_x^2)^2] \\ &= E[(4\hat{x}^2 - 2\sigma_x^2)\delta_x^2 + \delta_x^4 + \sigma_x^4 + 4\hat{x}\delta_x^3 - 4\hat{x}\delta_x\sigma_x^2] \\ &= (4\hat{x}^2 - 2\sigma_x^2)\sigma_x^2 + E[\delta_x^4] + \sigma_x^4 \\ &= 4\hat{x}^2\sigma_x^2 + E[\delta_x^4] - \sigma_x^4 \\ &= 4\hat{x}^2\sigma_x^2 + 2\sigma_x^4 \end{aligned}$$

Em que $E[\delta_x^4] = 3\sigma_x^2$ é o quarto momento da distribuição Gaussiana.

Considerando apenas a etapa de predição do algoritmo EKF, a seguinte estimativa *a priori* é obtida

$$\hat{x}_{\text{EKF}} = f(\hat{x}) = \hat{x}^2$$

Com o Jacobiano calculado em \hat{x} ,

$$F = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{\hat{x}} = 2\hat{x}$$

E a variância é aproximada por

$$P_{\text{EKF}} = F\sigma_x^2F^\top = 4\hat{x}^2\sigma_x^2 \quad (4.34)$$

Para este caso a aproximação utilizada pelo EKF leva a uma estimativa incorreta tanto da média quanto da variância. Sendo que esta é subestimada por um fator igual a $2\sigma_x^4$.

Exemplo - Transformação Polar-Cartesiana

Este exemplo, apresentado em Simon (2006), considera um radar que obtém a localização de um alvo planar em coordenadas polares ($w = [r, \theta]^\top$), que precisa ser convertida para coordenadas cartesianas ($z = [x, y]^\top$).

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(w) = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

Foi considerado que ambas as coordenadas possuem uma distribuição normal, dada por $r \sim \mathcal{N}(1, 0.02)$ e $\theta \sim \mathcal{N}(\pi/2, \pi/9)$.

Utilizando apenas a etapa de predição do EKF,

$$\hat{z}_{\text{EKF}} = f(\hat{w}) = \begin{bmatrix} \hat{r} \cos(\hat{\theta}) \\ \hat{r} \sin(\hat{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por sua vez é obtido

$$\begin{aligned} F &= \left. \frac{\partial f(w)}{\partial w} \right|_{\hat{w}} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \hat{\theta} & -\hat{r} \sin \hat{\theta} \\ \sin \hat{\theta} & \hat{r} \cos \hat{\theta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De modo que a covariância é aproximada por

$$\begin{aligned} P_{\text{EKF}} &= F P F^{\top} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_r^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,1218 & 0 \\ 0 & 0,0004 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O cálculo analítico de \hat{z} e P não é tão simples quanto no caso escalar. Para obter valores de referência foram realizadas transformações Polar-Cartesiana em 20.000 pontos amostrados com base na distribuição gaussiana inicial, isto é exibido na figura 4.4. A comparação entre ambas mostra que a estimativa da coordenada y com base na aproximação linear possui um erro considerável e sua variância é subestimada.

4.3 UKF - Unscented Kalman Filter

O *Unscented Kalman Filter* (UKF) se baseia no princípio anunciado por Uhlmann (1994) de que é mais fácil aproximar a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória do que aproximar uma função não-linear arbitrária. Isto é feito por meio da *Unscented Transform* (UT).

A UT aplica a função não-linear sobre um conjunto de pontos gerados a partir da média e covariância de uma variável aleatória, e parâmetros estatísticos do conjunto

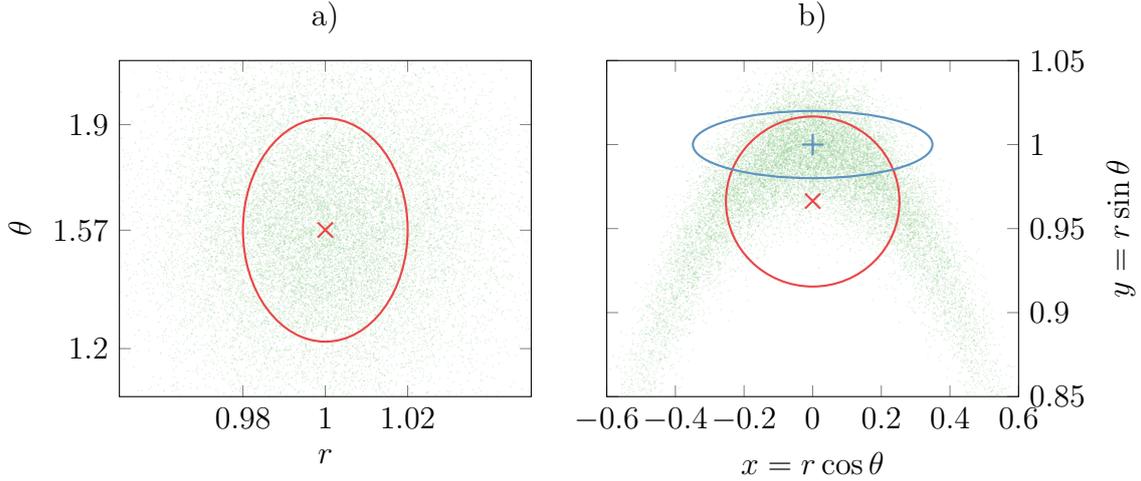


Figura 4.4: Em a) a nuvem de pontos é escolhida a partir de uma distribuição gaussiana centrada em $(1, \pi/2)$ e com desvio padrão de 0,02 para r e $\pi/9$ para θ , representada pela elipse vermelha. Em b) é aplicada a transformação Polar-Cartesiana ao conjunto de pontos, a elipse vermelha é centrada na média resultante com os eixos principais definidos pelos desvios-padrão, a elipse azul é centrada na estimativa calculada a partir da aproximação linear.

resultante são calculados para obter uma aproximação da média e da covariância da variável aleatória resultante.

Há certa similaridade com métodos de Monte Carlo (e.g., Filtro de Partículas), que empregam uma nuvem de pontos pseudoaleatórios para obter as estimativas. Em tais métodos o número de pontos é arbitrário, quanto maior melhor é a aproximação, isto é limitado apenas por conta poder de processamento disponível. A diferença básica do UT é a de que os pontos, denominados sigma, são escolhidos de forma determinística, de modo que o conjunto possua algumas propriedades de interesse.

Há diversos métodos para a seleção do conjunto de pontos sigma, em Menegaz et al. (2015) há uma lista das diferentes variações de escolha encontradas na literatura. A seguir é apresentado o método escalonado, mais comumente utilizado por permitir uma aproximação mais precisa com graus de liberdade adicionais, que é descrito em Julier (2002).

4.3.1 UT - Transformada Unscented Escalonada

Um conjunto \mathcal{S} consiste de $p + 1$ pontos sigma com pesos correspondentes

$$\mathcal{S} = \{i = 0, 1, \dots, p : x^{(i)}, W^{(i)}\} \quad (4.35)$$

Não há restrição de sinal para os pesos $W^{(i)}$, mas para que seja garantida uma

estimativa não tendenciosa, a seguinte condição deve ser obedecida:

$$\sum_{i=0}^p W^{(i)} = 1 \quad (4.36)$$

Assumindo uma variável aleatória $x \in \mathbb{R}^n$, de distribuição arbitrária, com média \hat{x} e covariância P_x , o objetivo é obter uma aproximação da média e covariância da variável aleatória $f(x)$, em que f é uma função não-linear arbitrária. A UT seleciona \mathcal{S} de modo que os pontos sigma possuam os primeiros momentos iguais aos de x . O método escalonado faz isso por meio da escolha de $2n + 1$ pontos

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha^2(n + \kappa) - n \\ \hat{x}^{(0)} &= \hat{x} & W_m^{(0)} &= \lambda/(n + \lambda) & W_c^{(0)} &= W_m^{(0)} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ \hat{x}^{(i)} &= \hat{x} + (\alpha\sqrt{(n + \kappa)P_x})_i & W_m^{(i)} &= 1/[2(n + \lambda)] & W_c^{(i)} &= W_m^{(i)} & i = 1, \dots, n \\ \hat{x}^{(i)} &= \hat{x} - (\alpha\sqrt{(n + \kappa)P_x})_i & W_m^{(i)} &= 1/[2(n + \lambda)] & W_c^{(i)} &= W_m^{(i)} & i = n + 1, \dots, 2n \end{aligned}$$

Em que A_i é a coluna i da matriz A , e a raiz quadrada matricial é calculada por meio da decomposição Cholesky, $A = LL^T$. $W_m^{(i)}$ é o peso associado ao ponto $x^{(i)}$ para o cálculo da média e $W_c^{(i)}$ o peso para o cálculo da covariância. Os parâmetros β , κ e α são os graus de liberdade da transformada. β pode ser escolhido para incorporar o conhecimento de momentos de ordem maior de uma determinada distribuição, κ é um parâmetro positivo utilizado para garantir que a matriz de covariância seja positiva definida e α é o fator de escalonamento, que permite controlar a excursão dos pontos sigma ao redor da média.

Considerando uma transformação não-linear $y = f(x)$, a média da variável aleatória resultante é aproximada por

$$E[f(x)] \approx \hat{y} = \sum_{i=0}^{2n} W_m^{(i)} f(\hat{x}^{(i)}) \quad (4.37)$$

A covariância do erro, $\tilde{y} = y - E[y]$, por sua vez é aproximada por

$$E[\tilde{y}\tilde{y}^T] \approx \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} \{f(\hat{x}^{(i)}) - \hat{y}\} \{f(\hat{x}^{(i)}) - \hat{y}\}^T \quad (4.38)$$

Outro valor de interesse para o UKF é a matriz de correlação entre \tilde{x} e \tilde{y} , que é aproximada por

$$E[\tilde{x}\tilde{y}^T] \approx \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} \{\hat{x}^{(i)} - \hat{x}\} \{f(\hat{x}^{(i)}) - \hat{y}\}^T \quad (4.39)$$

Em síntese o algoritmo da UT Escalonada é descrito a seguir.

Algorithm 3 UT_Escalonada($\hat{x}, P_x, \alpha, \beta, \kappa$)

```

1:  $\lambda \leftarrow \alpha^2(n + \kappa) - n$ 
2:  $\hat{x}^{(0)} \leftarrow \hat{x}, \quad W_m^{(0)} \leftarrow \lambda/(n + \lambda)$ 
3: for  $i=1, \dots, n$  do
4:    $\hat{x}^{(i)} \leftarrow \hat{x} + (\sqrt{(n + \lambda)P_x})_i, \quad W_m^{(i)} \leftarrow 1/2(n + \lambda)$ 
5:    $\hat{x}^{(i+n)} \leftarrow \hat{x} - (\sqrt{(n + \lambda)P_x})_i, \quad W_m^{(i+n)} \leftarrow 1/2(n + \lambda)$ 
6: end for
7:  $W_c \leftarrow W_m$ 
8:  $W_c^{(0)} \leftarrow W_c^{(0)} + (1 - \alpha^2 + \beta)$ 
9:  $\hat{y} \leftarrow \sum_{i=0}^{2n} W_m^{(i)} f(\hat{x}^{(i)})$ 
10:  $P_y \leftarrow \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} \{f(\hat{x}^{(i)}) - \hat{y}\} \{f(\hat{x}^{(i)}) - \hat{y}\}^T$ 
11:  $P_{xy} \leftarrow \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} \{\hat{x}^{(i)} - \hat{x}\} \{f(\hat{x}^{(i)}) - \hat{y}\}^T$ 
12: return  $\hat{y}, P_y, P_{xy}$ 

```

Exemplo - Caso escalar

Independente da escolha dos parâmetros o filtro preserva os primeiros dois momentos de uma determinada distribuição. Pode-se ilustrar com o caso de uma variável escalar x de média \hat{x} e variância σ^2 . O caso multivariável com média nula e covariância I é tratado no apêndice de Julier & Uhlmann (2004). O seguinte conjunto de pontos e pesos é obtido:

$$\begin{aligned}
\hat{x}^{(0)} &= \hat{x} \\
\hat{x}^{(1)} &= \hat{x} + \sqrt{1 + \lambda}\sigma \\
\hat{x}^{(2)} &= \hat{x} - \sqrt{1 + \lambda}\sigma \\
W_m^{(0)} &= \lambda/(1 + \lambda) \\
W_m^{(1)} &= W_m^{(2)} = \frac{1}{2(1 + \lambda)}
\end{aligned}$$

Por conta da simetria dos pontos a média é preservada:

$$\begin{aligned}
E[x] &\approx \sum_{i=0}^2 W^{(i)} x^{(i)} \\
&= \frac{\lambda}{1 + \lambda} \hat{x} + \frac{1}{2(1 + \lambda)} (\hat{x} + \sqrt{1 + \lambda}\sigma) + \frac{1}{2(1 + \lambda)} (\hat{x} - \sqrt{1 + \lambda}\sigma) \\
&= \hat{x}
\end{aligned}$$

E para a variância a seguinte aproximação é obtida

$$\begin{aligned}
E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T] &\approx \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} [\hat{x}^{(i)} - \hat{x}][\hat{x}^{(i)} - \hat{x}]^T \\
&= \frac{1}{2(1 + \lambda)} (1 + \lambda) \sigma^2 + \frac{1}{2(1 + \lambda)} (1 + \lambda) \sigma^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

Exemplo - Caso escalar $f(x) = x^2$

Com este mesmo conjunto de pontos o exemplo tratado em 4.2.2 é repetido. Aplicando a equação 4.37,

$$\begin{aligned}
E[f(x)] &\approx \frac{\lambda}{1 + \lambda} \hat{x}^2 + \frac{1}{2(1 + \lambda)} (\hat{x} + \sigma_x \sqrt{1 + \lambda})^2 + \frac{1}{2(1 + \lambda)} (\hat{x} - \sigma_x \sqrt{1 + \lambda})^2 \\
&= \frac{\lambda}{1 + \lambda} \hat{x}^2 + \frac{1}{1 + \lambda} [\hat{x}^2 + (1 + \lambda) \sigma_x^2] \\
&= \hat{x}^2 + \sigma_x^2
\end{aligned}$$

Para a variância é aplicada a equação 4.38,

$$\begin{aligned}
E[f(x)f(x)^T] &\approx [(1 - \alpha^2 + \beta) + \frac{\lambda}{1 + \lambda}] \sigma^4 + \frac{1}{2(1 + \lambda)} [\lambda^2 \sigma^4 + 2\hat{x}\lambda\sqrt{1 + \lambda}\sigma^3 + 4\hat{x}^2(1 + \lambda)\sigma^2] + \\
&\quad + \frac{1}{2(1 + \lambda)} [\lambda^2 \sigma^4 - 2\hat{x}\lambda\sqrt{1 + \lambda}\sigma^3 + 4\hat{x}^2(1 + \lambda)\sigma^2] \\
&= (1 - \alpha^2 + \beta) \sigma^4 + \frac{\lambda}{1 + \lambda} \sigma^4 + \frac{\lambda^2 \sigma^4}{(1 + \lambda)} + \frac{4\hat{x}^2(1 + \lambda)\sigma^2}{1 + \lambda} \\
&= (1 - \alpha^2 + \beta) \sigma^4 + \lambda \sigma^4 + 4\hat{x}^2 \sigma^2 \\
&= (1 - \alpha^2 + \beta) \sigma^4 + [\alpha^2(1 + \kappa) - 1] \sigma^4 + 4\hat{x}^2 \sigma^2 \\
&= \alpha^2 \kappa \sigma^4 + \beta \sigma^4 + 4\hat{x}^2 \sigma^2
\end{aligned}$$

O valor comumente utilizado para κ é 0, enquanto que $\beta = 2$ é um valor ótimo para distribuições gaussianas (Wan & Van Der Merwe 2000). Com tais parâmetros é obtido o valor exato da variância calculada de forma analítica em 4.2.2.

Exemplo - Transformação Polar-Cartesiana

Repetindo agora o exemplo da transformação polar-cartesiana, o seguinte conjunto de pontos é obtido

$$\begin{aligned} \hat{x}^{(0)} &= \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} & \hat{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} + \sqrt{2+\lambda} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ 0 \end{bmatrix} & \hat{x}^{(3)} &= \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} - \sqrt{2+\lambda} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hat{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} + \sqrt{2+\lambda} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} & \hat{x}^{(4)} &= \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} - \sqrt{2+\lambda} \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para simplificar a notação é utilizado $c = \sqrt{2+\lambda}$. Aplicando a transformação nos pontos sigma,

$$\begin{aligned} f(\hat{x}^{(0)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & f(\hat{x}^{(1)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + c\sigma_r \end{bmatrix} & f(\hat{x}^{(3)}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - c\sigma_r \end{bmatrix} \\ f(\hat{x}^{(2)}) &= \begin{bmatrix} -\sin(c\sigma_\theta) \\ \cos(c\sigma_\theta) \end{bmatrix} & f(\hat{x}^{(4)}) &= \begin{bmatrix} \sin(c\sigma_\theta) \\ \cos(c\sigma_\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos então

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^4 W^{(i)} f(\hat{x}^{(i)}) \\ &= \frac{\lambda}{c^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2c^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + c\sigma_r \end{bmatrix} + \frac{1}{2c^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - c\sigma_r \end{bmatrix} + \frac{1}{2c^2} \begin{bmatrix} -\sin(c\sigma_\theta) \\ \cos(c\sigma_\theta) \end{bmatrix} + \frac{1}{2c^2} \begin{bmatrix} \sin(c\sigma_\theta) \\ \cos(c\sigma_\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\lambda+1+\cos(\sigma_\theta\sqrt{2+\lambda})}{\lambda+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A covariância é dada por

$$\begin{aligned} P_{\hat{z}} &= \sum_{i=0}^{2n} W^{(i)} \{f(\hat{x}^{(i)}) - \hat{z}\} \{f(\hat{x}^{(i)}) - \hat{z}\}^T \\ &= \left[\frac{\lambda}{c^2} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \hat{y} \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \frac{1}{2c^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + c\sigma_r - \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + c\sigma_r - \hat{y} \end{bmatrix}^T + \frac{1}{2c^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - c\sigma_r - \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - c\sigma_r - \hat{y} \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \frac{1}{2c^2} \begin{bmatrix} -\sin(c\sigma_\theta) \\ \cos(c\sigma_\theta) - \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(c\sigma_\theta) \\ \cos(c\sigma_\theta) - \hat{y} \end{bmatrix}^T + \frac{1}{2c^2} \begin{bmatrix} \sin(c\sigma_\theta) \\ \cos(c\sigma_\theta) - \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(c\sigma_\theta) \\ \cos(c\sigma_\theta) - \hat{y} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Pela simetria os termos fora da diagonal são nulos. O primeiro valor da diagonal

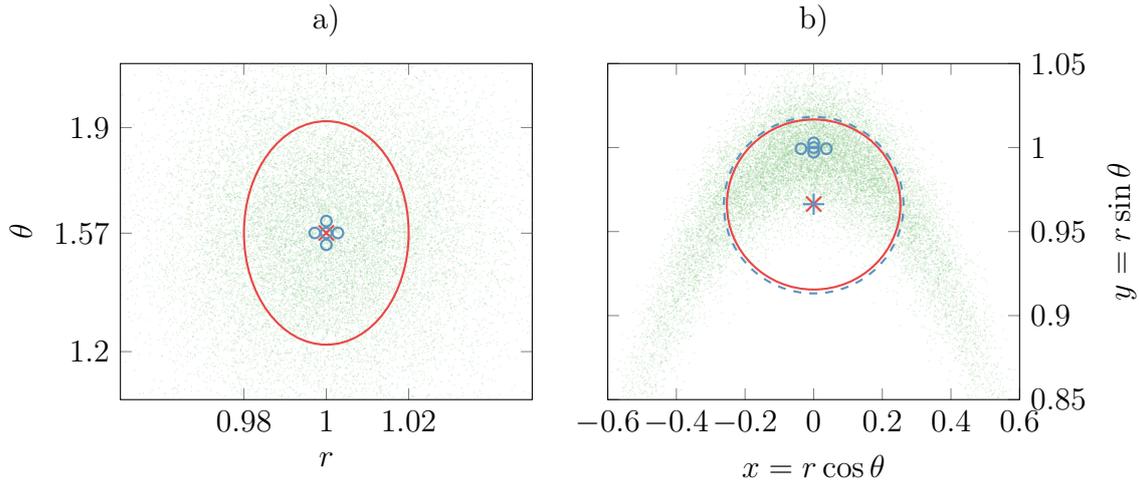


Figura 4.5: Em a) uma nuvem de pontos é escolhida a partir de uma distribuição uniforme centrada em $(1, \pi/2)$ e com desvio padrão de 0.02 para r e $\pi/9$ para θ , representada pela elipse vermelha. Em b) é aplicada a transformação polar-cartesiana ao conjunto de pontos, a elipse vermelha é centrada na média resultante com os eixos principais definidos pelos desvios-padrão, a elipse azul é centrada na estimativa calculada a partir da transformada UT.

é dada por

$$\frac{\sin^2(c\sigma_\theta)}{c^2}$$

O segundo por

$$\left[\frac{\lambda}{c^2} + (1 - \alpha^2 + \beta) \right] (1 - \hat{y})^2 + \frac{1}{2c^2} [(1 + c\sigma_r - \hat{y})^2 + (1 - c\sigma_r - \hat{y})^2] + \frac{1}{c^2} [\cos(c\sigma_\theta) - \hat{y}]^2$$

Substituindo os parâmetros, utilizando $\beta = 2$, $\kappa = 0$ e $\alpha = 0, 1$,

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,9657 \end{bmatrix} \quad P_{\hat{z}} = \begin{bmatrix} 0,068 & 0 \\ 0 & 0,003 \end{bmatrix}$$

O resultado é ilustrado na figura 4.5 que, em comparação com a figura 4.4 da aproximação via linearização, fica evidente a capacidade da UT em obter melhores aproximações da média e da covariância da transformação polar-cartesiana.

4.3.2 UKF - Unscented Kalman Filter

Considerando o mesmo sistema utilizado para a derivação do EKF, repetido aqui

por conveniência

$$x_{k+1} = f_k(x_k) + q_k \quad (4.40)$$

$$z_k = h_k(x_k) + r_k \quad (4.41)$$

E os ruídos caracterizados por

$$q_k \sim (0, Q_k)$$

$$r_k \sim (0, R_k)$$

$$E[q_k q_j^T] = Q_k \delta_{k-j}$$

$$E[r_k r_j^T] = R_k \delta_{k-j}$$

$$E[q_k r_j^T] = 0$$

O UKF repete a formulação do filtro de Kalman, baseado em duas etapas, predição e correção, que serão descritos em 4.3.2 e 4.3.2, respectivamente.

Predição

A aproximação utilizada pelo UKF é baseada na transformada UT. Qualquer variação dessa transformada pode ser utilizada, este trabalho utilizara a versão escalonada apresentada na seção anterior. Considerando uma estimativa inicial dada por $\hat{x}_{k-1|k-1}$, com sua respectiva covariância $P_{k-1|k-1}$, a seguinte escolha para os pontos sigma é obtida

$$\hat{x}^{(0)} = \hat{x}_{k-1|k-1}$$

$$\hat{x}^{(i)} = \hat{x}_{k-1|k-1} + \left(\sqrt{(n + \lambda) P_{k-1|k-1}} \right)_i$$

$$\hat{x}^{(i)} = \hat{x}_{k-1|k-1} - \left(\sqrt{(n + \lambda) P_{k-1|k-1}} \right)_i$$

Com os pesos definidos por

$$W_m^{(0)} = \lambda / (n + \lambda) \quad W_c^{(0)} = \lambda / (n + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta)$$

$$W_m^{(i)} = 1 / [2(n + \lambda)] \quad W_c^{(i)} = W_m^{(i)} \quad i = 1, \dots, n$$

$$W_m^{(i)} = 1 / [2(n + \lambda)] \quad W_c^{(i)} = W_m^{(i)} \quad i = n + 1, \dots, 2n$$

Em que $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$.

A estimativa *a priori* é então obtida por

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_m^{(i)} f_k(\hat{x}^{(i)}) \quad (4.42)$$

E a covariância por

$$P_{k|k-1} = R_k + \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} \{f_k(\hat{x}^{(i)}) - \hat{x}_{k|k-1}\} \{f_k(\hat{x}^{(i)}) - \hat{x}_{k|k-1}\}^T \quad (4.43)$$

As duas equações anteriores definem a etapa de predição do UKF.

Correção

Para aproximar o filtro de Kalman por meio de uma transformada UT deve-se antes expressar o ganho de Kalman, definido em 4.21, de uma forma alternativa. Considerando o vetor de inovação ν_k , definido pela diferença entre a medida obtida e a medida esperada com base na estimativa *a priori*, é obtida a seguinte relação

$$\begin{aligned} \nu_k &:= (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \\ &= H_k \tilde{x}_{k|k-1} + r_k \end{aligned}$$

A covariância da inovação é igual a

$$\begin{aligned} P_{\nu_k} &= E[\nu_k \nu_k^T] = E[(H_k \tilde{x}_{k|k-1} + r_k)(H_k \tilde{x}_{k|k-1} + r_k)^T] \\ &= E[H_k \tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^T H_k^T + r_k r_k^T] \\ &= H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \end{aligned}$$

E a matriz de correlação entre o erro *a priori* e a inovação será

$$\begin{aligned} P_{\tilde{x}_{k|k-1} \nu_k} &= E[\tilde{x}_{k|k-1} \nu_k^T] \\ &= E[\tilde{x}_{k|k-1} (\tilde{x}_{k|k-1}^T H_k^T + r_k^T)] \\ &= E[\tilde{x}_{k|k-1} \tilde{x}_{k|k-1}^T] H_k^T + E[\tilde{x}_{k|k-1} r_k^T] \\ &= P_{k|k-1} H_k^T \end{aligned}$$

Com os dois resultados anteriores, pode-se colocar 4.21 na seguinte forma

$$\begin{aligned} K_k &= P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \\ &= P_{\tilde{x}_{k|k-1} \nu_k} P_{\nu_k}^{-1} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Um novo conjunto de pontos sigma é gerado a partir da estimativa *a priori*, isto

é

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(0)} &= \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{x}^{(i)} &= \hat{x}_{k|k-1} + \left(\sqrt{(n+\lambda)P_{k|k-1}} \right)_i \\ \hat{x}^{(i)} &= \hat{x}_{k|k-1} - \left(\sqrt{(n+\lambda)P_{k|k-1}} \right)_i\end{aligned}$$

Obtendo então a seguinte aproximação realizada pela UT

$$E[h_k(x_k)] \approx \hat{z}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_m^{(i)} h_k(\hat{x}^{(i)}) \quad (4.45)$$

Com a covariância dada por

$$P_{\nu_k} = R_k + \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} \{h_k(\hat{x}^{(i)}) - \hat{z}_k\} \{h_k(\hat{x}^{(i)}) - \hat{z}_k\}^T \quad (4.46)$$

E a correlação entre o erro *a priori* e a inovação por

$$P_{\hat{x}_{k|k-1}\nu_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_c^{(i)} [\hat{x}^{(i)} - \hat{x}_{k|k-1}] [h_k(\hat{x}^{(i)}) - \hat{z}_k]^T \quad (4.47)$$

Juntando os resultados anteriores, a seguinte estimativa *a posteriori* é obtida

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - \hat{z}_k) \quad (4.48)$$

A covariância por sua vez é atualizada por

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - K_k P_{\nu_k} K_k^T \quad (4.49)$$

As fórmulas 4.44, 4.48 e 4.49 definem a etapa de correção do UKF. O filtro é sintetizado no algoritmo a seguir e no diagrama 4.6.

Algorithm 4 UKF($\hat{x}_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}, z_k$)

- | | |
|--|------------------------|
| 1: $\hat{x}_{k k-1}, P_{k k-1} \leftarrow \text{UT}(\hat{x}_{k-1 k-1}, P_{k-1 k-1})$ | Eqs. 4.42 e 4.43 |
| 2: $\hat{z}_k, P_{\nu_k}, P_{\hat{x}_{k k-1}\nu_k} \leftarrow \text{UT}(\hat{x}_{k k-1}, P_{k k-1})$ | Eqs. 4.41, 4.46 e 4.47 |
| 3: $K_k \leftarrow P_{\hat{x}_{k k-1}\nu_k} P_{\nu_k}^{-1}$ | Eq. 4.44 |
| 4: $\hat{x}_{k k} \leftarrow \hat{x}_{k k-1} + K_k(z_k - \hat{y}_k)$ | Eq. 4.48 |
| 5: $P_{k k} \leftarrow P_{k k-1} - K_k P_{\nu_k} K_k^T$ | Eq. 4.49 |
| 6: return $\hat{x}_{k k}, P_{k k}$ | |
-

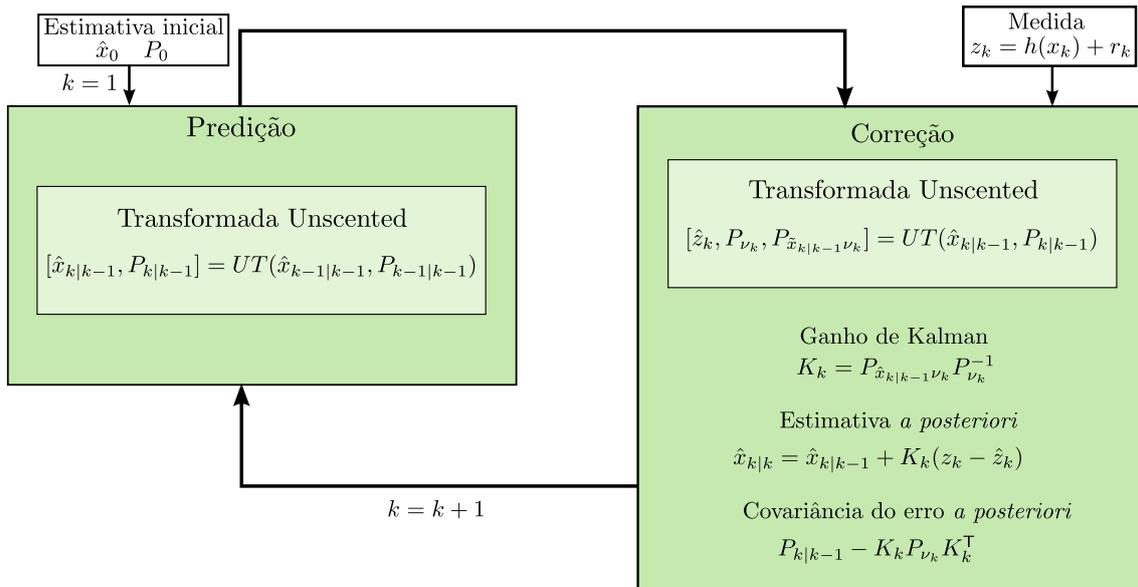


Figura 4.6: Diagrama do UKF

4.4 Considerações Finais

Este capítulo apresentou o Filtro de Kalman, ótimo para sistemas lineares. Em seguida foram descritas duas técnicas utilizadas para a aproximação desse filtro em sistemas não-lineares. Primeiro o EKF, que se baseia na linearização do sistema em torno de uma estimativa inicial. Em seguida o UKF que, com base em um conjunto de pontos sigma, permite melhores aproximações. No capítulo seguinte será descrito a aplicação de tais filtros para um algoritmo de localização submarina.

Capítulo 5

Sistema de Localização Proposto

Este capítulo apresenta o sistema de localização para o LUMA. Na seção 5.1 serão descritos os sensores utilizados e em 5.2 o algoritmo de localização é proposto com base no modelo do veículo e nos filtros EKF e UKF descritos nos capítulos anteriores.

5.1 Sensores

5.1.1 Advanced Navigation Spatial

A *Advanced Navigation Spatial*, figura 5.1, é uma unidade de medição inercial constituída por acelerômetros, giroscópios, magnetômetros e um receptor de GPS. Os sensores são do tipo MEMS e não podem ser empregados como uma INS pois a deriva no erro seria alta sem a recepção do sinal de GPS. Este só é possível na superfície e será utilizado para a estimativa inicial da posição e velocidade do veículo. Quando submerso o sensor fornecerá medidas de orientação e velocidade angular.

GPS

O sinal de GPS é obtido por meio de uma antena marinizada *Advanced Navigation Poseidon*, figura 5.2, com capacidade de até 3.000 metros de profundidade. A precisão é da ordem de 2 m para a posição e de 0,05 m/s para a velocidade li-



Figura 5.1: Unidade de Medição Inercial *Advanced Navigation Spatial*



Figura 5.2: Antena GPS *Advanced Navigation Poseidon*

near, tal como consta no manual *Advanced Navigation* (2015). A posição da antena em relação ao sensor pode ser informada ao dispositivo para efetuar correções na medida.

Serviços de DGPS (*Differential GPS*) utilizam bases fixas, de localização conhecida e próximas ao campo de operação, para observar o erro da posição obtida pelo GPS que depende, entre outros fatores, das condições atmosféricas do local. Tais informações podem ser fornecidas ao sensor para obter uma estimativa mais precisa, o que permitira um erro de posição da ordem de $0,6m$.

A posição obtida pelo GPS é expressa por padrão em termos de latitude, longitude e elevação, no sistema de coordenadas WGS84 (*World Geodetic System 1984*). Também pode ser expressa no sistema de coordenadas ECEF (*Earth-Centered, Earth-Fixed*), com origem no centro da terra, o eixo- x interceptando o ponto de cruzamento entre a linha do Equador e o meridiano de Greenwich, o eixo- z é definido ao longo do eixo de rotação da terra apontando para o polo norte e o eixo- y é ortogonal aos outros eixos, formando um sistema de coordenadas de mão direita. O dispositivo possibilita a leitura dos dados em ambas as coordenadas. Fórmulas para a conversão entre os sistemas WGS84 e ECEF são apresentadas em Cai et al. (2011).

IMU

O dispositivo fornece pacotes com medidas de orientação na parametrização dos ângulos de Euler, bem como o desvio padrão dessas medidas. Estas são da ordem de $0,5^\circ$ para os ângulos de balanço e caturro.

O ângulo de guinada depende primordialmente da medida do campo magnético terrestre por meio dos magnetômetros. Estruturas ferromagnéticas próximas ao sensor distorcem o campo, implicando uma medida de pior qualidade. Para atenuar interferências estáticas, causadas pela estrutura do veículo, uma calibração pode ser feita por meio do software *Spatial Manager* tal como é descrito no manual do equipamento *Advanced Navigation* (2015). Interferências dinâmicas, causadas por



Figura 5.3: Velki HPX

estruturas ferromagnéticas externas ou motores elétricos muito próximos, não são facilmente atenuadas e caso degradem muito a medida os magnetômetros devem ser desligados. Se houver algum outro sensor que possa ser usado para obter uma estimativa de guinada, e.g. bússola giroscópica ou dupla antena de GPS, esta informação pode ser fornecida como medida auxiliar para a IMU. Caso contrário a guinada é medida com base apenas na integração dos giroscópios, o que resulta em uma deriva no erro da ordem de $3^\circ/h$. Sem interferências de grande magnitude e com uma calibração prévia o desvio padrão da medida fica na ordem de 1° .

Os giroscópios da IMU permitem medir diretamente a velocidade angular do veículo, não há no entanto um pacote que forneça o desvio padrão do erro de medida. Este depende, entre outros fatores, de um conhecimento da temperatura do sensor, da precisão dos fatores de escalonamento e do alinhamento dos eixos de cada giroscópio. A assistência técnica da empresa que fabrica o dispositivo recomenda um valor arbitrário na ordem de $0,25^\circ/s$.

5.1.2 Velki HPX

A medida da pressão exercida pela água permite auferir a profundidade do veículo. Em um modelo simples a densidade da água e a gravidade são consideradas constantes, de modo que a relação entre a pressão e a profundidade é linear. Para profundidades altas, acima de algumas centenas de metros, é preciso utilizar outro modelo. Um algoritmo para conversão de pressão para profundidade que leva em conta variações da gravidade para diferentes latitudes é apresentada em Fofonoff & Millard (1983), o autor afirma que sua fórmula possui um erro menor que $0,1m$ para profundidades inferiores a 10.000 metros. Com um sensor de alta precisão é possível obter uma medida com erro da ordem de $0,01\%$ da profundidade (Antonelli et al. 2008).

5.1.3 WHOI Micromodem

O *WHOI Micromodem* é um sistema de comunicação que trabalha com ondas acústicas e permite o envio de 32 bytes de dados por pacote. Com um modem no navio de apoio, localizado nas coordenadas (x_m, y_m, z_m) , e um no AUV, localizado em (x, y, z) , é possível auferir a distância entre os dois equipamentos por meio do tempo de voo do sinal acústico transmitido e de uma estimativa da velocidade do som.

$$\begin{aligned} z_{\text{dist}} &= \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2} \\ &\approx c \times (t_{\text{recep.}} - t_{\text{envio}}) \end{aligned}$$

Isto será possível se os relógios estiverem sincronizados e o pacote de dados enviado contiver um *timestamp* do início da transmissão, tal como é feito em Eustice et al. (2006). Caso a embarcação de apoio se locomova é preciso também enviar a localização (x_m, y_m, z_m) do transmissor.

Na configuração de um ROV, em que há um cabo umbilical, a comunicação via fibra óptica pode ser aproveitada para indicar o início da transmissão acústica e enviar os dados referentes à localização do equipamento na superfície. Deste modo apenas um pacote de *ping*, sem dados adicionais, é enviado, e as interrogações acústicas podem ser feitos com uma maior frequência.

Caso o veículo opere sem umbilical e não houver um sistema de relógios sincronizados, é preciso que o veículo interrogue a embarcação de apoio e este envie sua localização na resposta. Neste caso deve se considerar a posição do veículo no instante de interrogação (x_1, y_1, z_1) e no de recepção (x_2, y_2, z_2) .

$$\begin{aligned} z_{\text{dist}} &= \sqrt{(x_1 - x_m)^2 + (y_1 - y_m)^2 + (z_1 - z_m)^2} \\ &\quad + \sqrt{(x_2 - x_m)^2 + (y_2 - y_m)^2 + (z_2 - z_m)^2} \\ &\approx c \times (t_{\text{recep.}} - t_{\text{inter.}}) \end{aligned}$$

Uma análise aprofundada sobre diversos tipos de erros que podem degradar a medida (e.g., incertezas na velocidade do som, refração no meio) é feita em McPhail & Pebody (2009).

A velocidade do som na água é da ordem de $1.500m/s$, sendo que o valor exato depende de variações na temperatura, salinidade e pressão da água. Há tabelas com fatores de correção para diferentes regiões do globo (Carter & Dept 1980), sendo que no pior caso é possível esperar um erro da ordem de 0,15% da distância (McPhail & Pebody 2009).

5.1.4 Sensor de Velocidade

Como mencionado no capítulo 2, o principal sensor para a medição de velocidade de um submersível é o DVL. O LUMA não dispõe deste tipo de equipamento e métodos alternativos devem ser explorados.

Odometria visual é o processo de estimar o movimento do veículo com base em dados de uma ou mais câmeras fixadas no mesmo. Uma revisão bibliográfica dos principais algoritmos utilizados para odometria visual bem como um histórico de sua aplicação é apresentada em Scaramuzza & Fraundorfer (2011). O autor menciona que a maioria dos trabalhos desta área se baseiam no uso de um sistema estéreo, que emprega duas câmeras separadas por uma distância fixa para obter uma estimativa de profundidade, simulando o sistema de visão humano.

Detalhes de implementação fogem ao escopo deste trabalho, mas de modo simplificado um algoritmo de odometria visual funciona por meio da detecção de pontos característicos de uma imagem, ou par de imagens no caso estéreo, que são rastreados na imagem precedente. A comparação entre tais pontos permite uma estimativa do movimento do veículo.

A implementação de odometria visual em AUVs já foi explorada em Corke et al. (2007), Hildebrandt & Kirchner (2010), Salvi, Petillot & Batlle (2008), Salvi, Petillot, Thomas & Aulinas (2008), Wirth et al. (2013).

Uma comparação de duas bibliotecas que implementam algoritmos de odometria visual é apresentada em Wirth et al. (2013), *libviso2* e *fovis*, ambas foram integradas ao ROS (*Robot Operating System*) pelo autor. A *libviso2* implementa odometria visual tanto para um sistema de câmera estéreo quanto para uma câmera monocular, esta dependendo de um conhecimento da distância do leito em relação ao veículo que poderia ser fornecida por um altímetro. A *fovis* considera uma câmera estéreo ou RGB-D (e.g., *Microsoft Kinect*). No mesmo trabalho é relatado um experimento com um sistema de câmera estéreo equipado em um veículo submarino que obteve um erro de velocidade linear da ordem de $0,02m/s$ e angular de $0,2^\circ/s$, o que resultou em um erro de localização da ordem de 1% da distância percorrida.

Um sistema de odometria visual que combina dados de uma câmera estéreo e de uma IMU é proposto em Hildebrandt & Kirchner (2010), nas simulações realizadas foi obtido um erro da ordem de 0,1% da distância percorrida.

A qualidade da odometria depende de uma boa condição de iluminação no ambiente e de uma cena estática com textura o suficiente que permita estimar o movimento aparente (Scaramuzza & Fraundorfer 2011). Quando não há contato visual com o leito do oceano uma outra técnica deve ser empregada.

Em (Vaganay et al. 2000), (Baccou & Jouvencel 2002), (Baccou & Jouvencel 2003) e (Gadre 2007) é realizada uma calibração prévia para estimar a velocidade

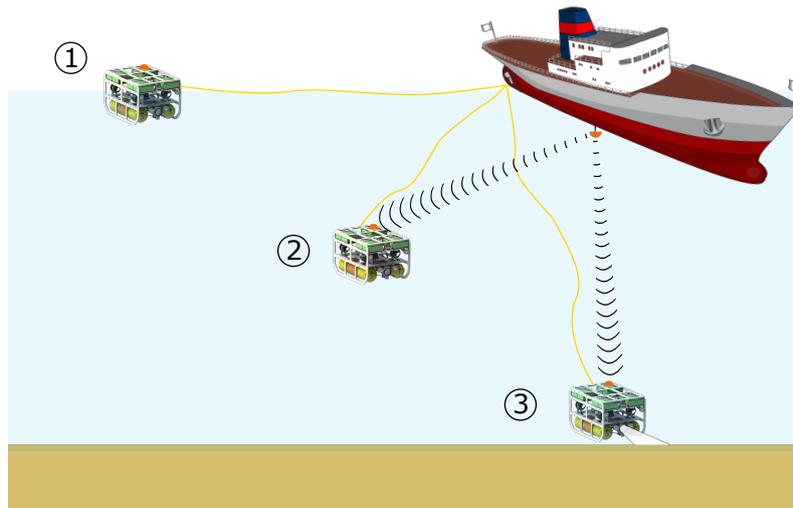


Figura 5.4: Representação de uma operação do ROV LUMA. Em 1) o veículo se encontra na superfície, 2) submerge e 3) navega próximo ao leito do oceano. Adaptado de (Wikimedia Commons 2011)

com base na rotação dos propulsores. Em (Ferreira et al. 2010) considera o uso de um modelo dinâmico do veículo e do conhecimento da força exercida pelos propulsores. Para ambos os casos a velocidade é medida em relação à água, com correnteza desconhecida. Esta pode ser estimada por meio de dados históricos e um modelo do oceano, tal como é feito em (Hollinger et al. 2012).

5.2 Algoritmo de Localização

O algoritmo proposto nesta seção pode ser dividido em três etapas, ilustradas na figura 5.4:

- 1 - Inicialização, com o veículo na superfície onde é possível o uso de GPS.
- 2 - Submersão, com o LUMA navegando em direção ao leito do oceano, mas sem contato visual com o mesmo. A velocidade do veículo é estimada a partir da rotação dos propulsores.
- 3 - Varredura, quando o leito do oceano entra no campo de visão das câmeras e é possível utilizar um sistema de odometria visual.

5.2.1 Inicialização

Inicialmente é necessário definir os sistemas de coordenadas utilizados. Como referencial inercial é utilizados um sistema de coordenadas NED (*North-East-Down*),

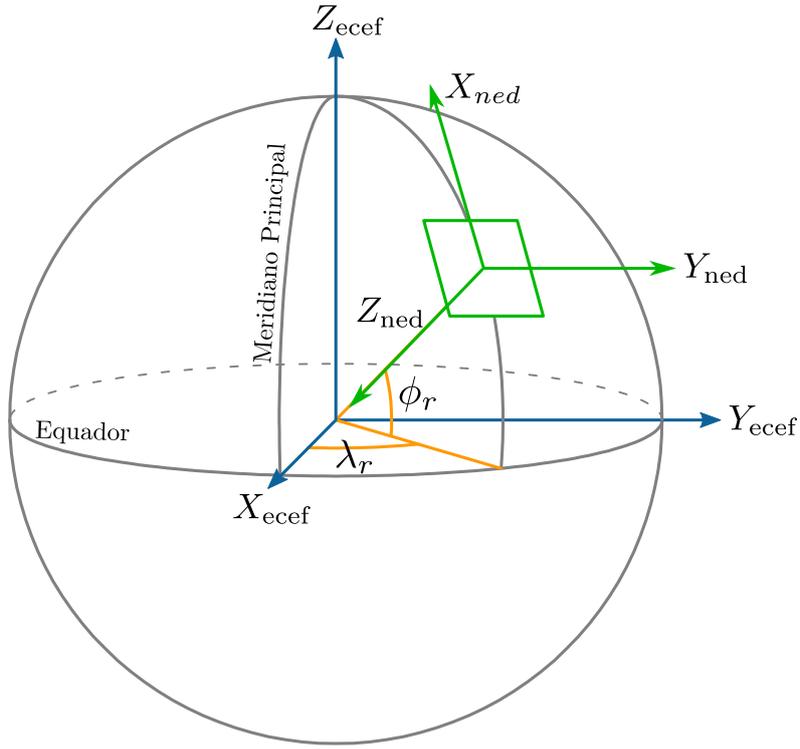


Figura 5.5: Sistemas de coordenadas ECEF e NED. Diagrama adaptado de (Wiki-media Commons 2010).

figura 5.5. Este é um sistema de coordenadas de mão direita definido por uma origem fixada arbitrariamente na superfície terrestre, o eixo- x aponta em direção ao norte geodético, o eixo- y aponta em direção ao leste geodético e o eixo- z aponta para baixo em direção ao centro da terra.

Com o LUMA situado na superfície é feita uma primeira leitura do sinal de GPS. Sua posição define a origem do sistema de coordenadas inercial, que inicialmente coincide com a origem do sistema de coordenadas do veículo. Esta posição expressa nas coordenadas ECEF é transmitida para a embarcação de apoio. Tal informação é necessária para a conversão da posição da embarcação de apoio, obtida também por GPS, para o sistema de coordenadas local, dada pela fórmula descrita em Cai et al. (2011):

$$P_n = R_{ne}(p_e - p_o) \quad (5.1)$$

Sendo R_{ne} a matriz de rotação do sistema de coordenadas ECEF para o NED:

$$R_{ne} = \begin{bmatrix} -\sin \phi_r \cos \lambda_r & -\sin \phi_r \sin \lambda_r & \cos \phi_r \\ -\sin \lambda_r & \cos \lambda_r & 0 \\ -\cos \phi_r \cos \lambda_r & -\cos \phi_r \sin \lambda_r & -\sin \phi_r \end{bmatrix}$$

Em que ϕ_r e λ_r são, respectivamente, a longitude e a latitude da origem do sistema de coordenadas local, p_e a posição da embarcação de apoio nas coordenadas ECEF e p_o a posição da origem do sistema de coordenadas local.

Por conta de sua centralidade no algoritmo de localização proposto, utilizaremos o sistema de coordenadas do sensor *Advanced Navigation Spatial* como sistema de coordenadas do veículo, cuja origem coincide com a origem do sistema de coordenadas local no instante de inicialização.

Antes do veículo submergir, sua velocidade é estimada por meio da rotação dos propulsores e de uma estimativa da correnteza marinha. Esta pode ser inicializada pela medição da velocidade por meio do GPS com os propulsores ainda desligados. O estado inicial do sistema, x_0 é dado pelo estado do veículo em conjunto com a correnteza marinha v_{ia}^i :

$$x_0 = \left[0_{1 \times 3} \quad \Theta_{ib} \quad v_{ia}^i \quad \omega_{ib}^b \quad v_{ia}^i \right]_0^T$$

E a covariância é inicializada com base nas incertezas dos sensores utilizados.

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_{\text{GPS-}p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\text{IMU-}\Theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{\text{GPS-}v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{\text{IMU-}\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{\text{GPS-}v} \end{bmatrix}$$

Tendo inicializado o estado do sistema, o veículo liga os propulsores e começa a submergir.

5.2.2 Submersão

Para a propagação desse estado consideramos o modelo cinemático apresentado no capítulo 3 em conjunto com a suposição de que a correnteza marinha permanece aproximadamente constante. Em projetos de sistemas de localização de UUVs é comum adotar uma frequência de amostragem da ordem de 10 Hz, este é o valor utilizado em Webster (2010), por exemplo. O modelo cinemático considera velocidades constante, no entanto na prática a velocidade sofre pequenas variações. Estas são representadas pela adição de um ruído branco de média nula, $q_k \in \mathbb{R}^9$, com covariância Q_k . A variação da velocidade durante o período de amostragem é da ordem de \sqrt{Q} (Bar-Shalom et al. 2002).

Aplicando a discretização pelo método de Euler, temos:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} p_{ib} \\ \Theta_{ib} \\ v_{ib}^b \\ \omega_{ib}^b \\ v_{ia}^i \end{bmatrix}_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_{ib} \\ \Theta_{ib} \\ v_{ib}^b \\ \omega_{ib}^b \\ v_{ia}^i \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} R(\Theta_{ib})v_{ib}^b \\ \mathcal{J}(\Theta_{ib})\omega_{ib}^b \\ 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \Delta t}_{f(x_k)} + \begin{bmatrix} 0_{6 \times 9} \\ I_{9 \times 9} \end{bmatrix} q_k \quad (5.2)$$

Para a predição do estado por meio do filtro UKF basta o conhecimento da estimativa e covariância inicial, x_0 e P_0 , da covariância do ruído, Q_k , e do modelo do sistema, $f(x_k)$. O filtro EKF requer o cálculo adicional do Jacobiano desta função, isto é dado por:

$$F(x_k) = \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \frac{\partial R}{\partial \Theta} v \Delta t & R \Delta t & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Theta} \omega \Delta t & 0 & \mathcal{J} \Delta t & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Os índices foram suprimidos para facilitar a leitura. Então, por meio da definição da matriz de rotação em 3.6, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \Theta} &= \frac{\partial R_z^T(\psi) R_y^T(\theta) R_x^T(\phi)}{\partial \Theta} v \\ &= \left[R_z^T(\psi) R_y^T(\theta) \frac{\partial R_x^T(\phi)}{\partial \phi} v \quad R_z^T(\psi) \frac{\partial R_y^T(\theta)}{\partial \theta} R_x^T(\phi) v \quad \frac{\partial R_z^T(\psi)}{\partial \psi} R_y^T(\theta) R_x^T(\phi) v \right] \end{aligned}$$

Em que

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_x^T(\phi)}{\partial \phi} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \\ 0 & -\cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix} \\ \frac{\partial R_y^T(\theta)}{\partial \theta} &= \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \\ \frac{\partial R_z^T(\psi)}{\partial \psi} &= \begin{bmatrix} -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E também

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \omega & \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} \omega & \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi} \omega \end{bmatrix}$$

Em que, com base na equação 3.12,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \phi} \omega &= \begin{bmatrix} 0 & \cos \phi \tan \theta & -\sin \phi \tan \theta \\ 0 & -\sin \phi & -\cos \phi \\ 0 & \cos \phi \sec \theta & -\sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} \omega \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta} \omega &= \begin{bmatrix} 0 & \sin \phi \sec^2 \theta & \cos \phi \sec^2 \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi \sec \theta \tan \theta & \cos \phi \sec \theta \tan \theta \end{bmatrix} \omega \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \psi} \omega &= 0_{3 \times 1} \end{aligned}$$

Com exceção do Modem Acústico, a medida de todos os sensores pode ser lida com uma frequência igual ou superior a 10 Hz. Não havendo um sinal acústico, o vetor de medidas é constituído dos ângulos de orientação e da velocidade angular, medidos pela IMU, da profundidade, a partir do transmissor de pressão, e da velocidade do veículo em relação à água, estimados por meio da rotação dos propulsores:

$$z_k = \begin{bmatrix} z_{\text{prof}} \\ z_{\Theta} \\ z_{\omega} \\ z_{\text{prop}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{1 \times 2} & 1 & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 1} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} & R_{sb} & -R_{sb} \hat{p}_{bs} & -R_{sb} R_{bi}(\Theta) \end{bmatrix}}_{h_k(x_k)} x_k + r_k$$

Em que r_k é um ruído de média nula e covariância dada por

$$R_k = \begin{bmatrix} P_{\text{prof}} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0 & P_{\text{IMU-}\Theta} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0 & 0_{1 \times 3} & P_{\text{IMU-}\omega} & 0_{1 \times 3} \\ 0 & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & P_{\text{prop}} \end{bmatrix}$$

A etapa de correção do filtro UKF depende da estimativa *a priori* $\hat{x}_{k|k-1}$ e sua respectiva matriz de covariância $P_{k|k-1}$, e do conhecimento de $h_k(x_k)$ e da covariância do ruído de medida R_k . O filtro EKF requer ainda o cálculo do jacobiano da função de medida.

$$H(x_k) = \frac{\partial z_k}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 2} & 1 & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 1} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 1} & -R_{sb} \frac{\partial R_{bi}}{\partial \Theta} v_{ia}^i & R_{sb} & -R_{sb} \hat{p}_{bs} & -R_{sb} R_{bi} \end{bmatrix}$$

O Modem localizado na superfície é configurado para enviar uma mensagem periodicamente contendo sua posição expressa no sistema de coordenadas local (x_m, y_m, z_m) e possivelmente um *timestamp*. Caso não haja, a sincronização é feita por meio do cabo umbilical, usado para sinalizar o início de uma transmissão, evento que o submersível cronometra até a recepção do sinal acústico. A medida é modelada por

$$z_{\text{dist}}(x_k) = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2} + r_k, \quad r_k \sim (0, P_{\text{dist}})$$

Para a aplicação do EKF, temos que o Jacobiano desta medida é dado por

$$\frac{\partial z_{\text{dist}}(x_k)}{\partial x_k} = \begin{bmatrix} (x - x_m)/z_{\text{dist}}(x_k) & (y - y_m)/z_{\text{dist}}(x_k) & (z - z_m)/z_{\text{dist}}(x_k) & 0_{1 \times 12} \end{bmatrix}$$

É preciso notar que o vetor de medidas z_k varia de acordo com o conjunto de medidas obtido a cada instante, de modo que ora possui uma informação de distância, ora não há tal dado.

5.2.3 Varredura

Quando o veículo se aproxima do leito do oceano e as condições de visibilidade são favoráveis, um sistema de odometria visual é utilizado, de modo que a velocidade do veículo agora é medida em relação a um referencial inercial. De modo que

$$z_{\text{odom}} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & R_{sb} & -R_{sb} \hat{p}_{bs} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} x_k + r_k, \quad r_k \sim (0_{1 \times 3}; P_{\text{odom}}) \quad (5.3)$$

Com o Jacobiano dado por

$$\frac{\partial z_{\text{vel}}(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & R_{sb} & -R_{sb} \hat{p}_{bs} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

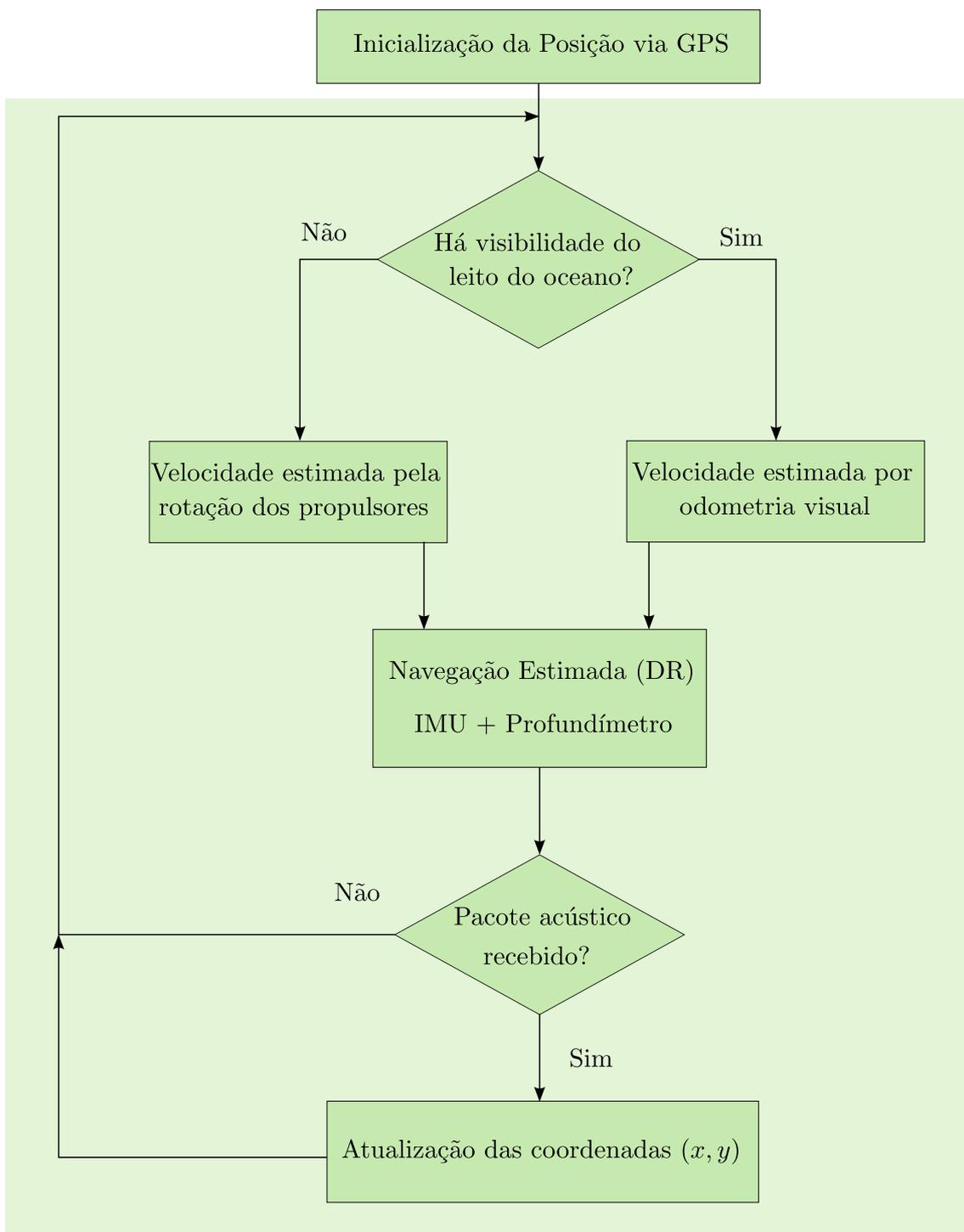


Figura 5.6: Diagrama do algoritmo de localização

5.3 Considerações Finais

O algoritmo proposto é resumido no diagrama da figura 5.6. Em síntese, a posição é inicializada na superfície por meio de um GPS, em seguida o veículo submerge, não havendo visibilidade do leito do oceano a velocidade é estimada por meio da rotação dos propulsores, do contrário um sistema de odometria visual é utilizado. A posição horizontal do veículo (x, y) é calculada por meio da integração da velocidade, de modo que a estimativa possui um erro crescente. Quando há recepção de um sinal pelo Modem Acústico, a informação de distância é utilizada para corrigir as coordenadas (x, y) . No capítulo seguinte o algoritmo é testado com base em simulações computacionais.

Capítulo 6

Simulações

O sistema de localização proposto é verificado neste capítulo por meio de simulações feitas com o *MATLAB*. Trajetórias foram geradas com base no modelo dinâmico de um ROV e medidas foram simuladas retratando o conjunto de sensores do LUMA. Na próxima seção os parâmetros utilizados são explicitados e na seguinte os resultados obtidos para diferentes condições são mostrados em gráficos e tabelas.

6.1 Parâmetros de Simulação

As simulações realizadas para este trabalho utilizaram os parâmetros do modelo dinâmico apresentados em (Chin 2013), medidos em cima do RRC ROV, do centro de pesquisas de robótica da Universidade Tecnológica de Nanyang. O RRC ROV é um submersível com 1 m de comprimento, 0,9 m de largura, 0,9 m de altura, possui um peso seco de 115 kg e utiliza uma estrutura semelhante ao do LUMA. O autor disponibiliza um modelo desenvolvido no *Simulink/MATLAB* que serviu para gerar a trajetória do veículo. Estas foram geradas considerando velocidades máximas da ordem de $0,5m/s$.

Medidas de distância obtidas por meio do tempo de voo de um sinal acústico possuem uma distribuição não-gaussiana, em Webster et al. (2012) há um gráfico do histograma da inovação da medida feito a partir de leituras do WHOI Micromodem, o mesmo modelo presente no LUMA. Um ruído foi gerado a partir dos dados coletados de tal histograma, figura 6.1, para compensar a resolução do gráfico foi adicionado um ruído com distribuição de *Rayleigh*. Esta é a distribuição resultante da raiz quadrada da soma dos quadrados de variáveis aleatórias gaussianas.

Na ausência de modelos mais detalhados para o ruído de medida dos demais sensores distribuições gaussianas foram assumidas, tal como é feito em Webster et al. (2012). Também foi considerado que os ruídos de medida de cada sensor são decorrelacionados e possuem covariância constante. Com base no estudo realizado no capítulo anterior, as covariâncias foram definidas com valores dentro da ordem

de precisão dos sensores analisados no capítulo anterior, tais dados estão listados na tabela 6.1 com as respectivas unidades. Em suma,

$$\begin{aligned}
P_{\text{prof}} &= 0,5^2 \quad [m^2] & P_{\text{dist}} &= 3,3^2 \quad [m^2] \\
P_{\text{GPS-}p} &= \begin{bmatrix} 5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{bmatrix} \quad [m^2], & P_{\text{IMU-}\Theta} &= \frac{\pi^2}{180^2} \begin{bmatrix} 0,5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{bmatrix} \quad [rad^2] \\
P_{\text{GPS-}v} &= \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \quad [m^2/s^2] & P_{\text{IMU-}\omega} &= \frac{\pi^2}{180^2} \begin{bmatrix} 0,25^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25^2 \end{bmatrix} \quad [rad^2/s^2] \\
P_{\text{prop}} &= \begin{bmatrix} 0,1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1^2 \end{bmatrix} \quad [m^2/s^2] & P_{\text{odom}} &= \begin{bmatrix} 0,02^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02^2 \end{bmatrix} \quad [m^2/s^2]
\end{aligned}$$

A covariância Q_k deve ser sintonizada de acordo com o grau de variação das velocidades do veículo e da correnteza marinha. A escolha deve ser feita de modo que $\sqrt{Q_k}$ seja da ordem da variação da velocidade durante um período de amostragem (Bar-Shalom et al. 2002).

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_v & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & Q_\omega & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & Q_{\text{curr}} \end{bmatrix}$$

Em que foi arbitrado $Q_v = 5E-4I_{3 \times 3}$ e $Q_\omega = 1E-5I_{3 \times 3}$. As correntezas foram modeladas como constantes, na simulação consideramos $v_{ia}^i = [0,05 \quad 0,01 \quad 0]^T$, de modo que $Q_{\text{curr}} = 0_{3 \times 3}$.

Para o filtro UKF é preciso também sintonizar os parâmetros α, β, κ . Para incorporar medidas com ruídos gaussianos foi utilizado $\beta = 2$, valor ótimo para este caso, $\alpha = 1E-3$ e $\kappa = 0$.

Para a medida de distância captada do modem acústico foi amostrado, a partir de uma distribuição gaussiana, um conjunto de 1E4 possíveis estados iniciais do veículo. Para cada ponto simulamos uma medida de distância com o ruído de distribuição não-gaussiana. A etapa de correção do filtro UKF é aplicada com diferentes valores para β e o erro quadrático médio da posição estimada do veículo é calculada. O gráfico na figura 6.2 evidencia que o erro mínimo para o conjunto de pontos e medidas considerado está na ordem de $\beta = 2E4$. Para os outros parâmetros definimos $\alpha = 0,5$ e $\kappa = 0$, variações em torno desses valores não mostraram nenhuma melhora significativa na estimativa.

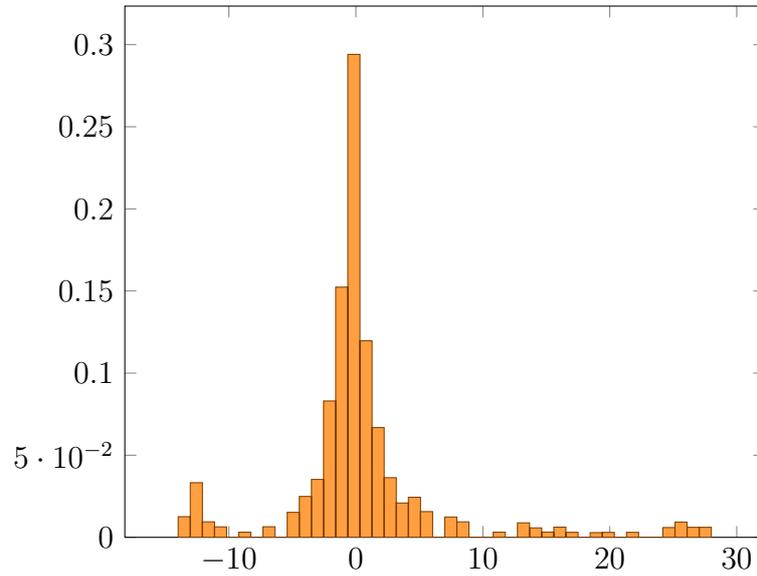


Figura 6.1: Histograma da inovação da medida de distância gerado a partir de gráfico exposto em Webster et al. (2012)

Tabela 6.1: Sensores utilizados para localização

| Sensor | Medida | Precisão | Frequência |
|-------------------|--|----------------|------------|
| IMU | ϕ, θ | $0,5^\circ$ | $10Hz$ |
| IMU | ψ | 1° | $10Hz$ |
| Giroscópios (IMU) | p, q, r | $0,25^\circ/s$ | $10Hz$ |
| Profundímetro | z | $0,5m$ | $10Hz$ |
| Propulsor | v_{ab}^b | $0,1m/s$ | $10Hz$ |
| Odometria Visual | u, v, w | $0,02m/s$ | $10Hz$ |
| GPS | x, y, z, x_m, y_m, z_m | $5m$ | $0,1Hz$ |
| Modem Acústico | $\sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2}$ | $3,3m$ | $0,1Hz$ |

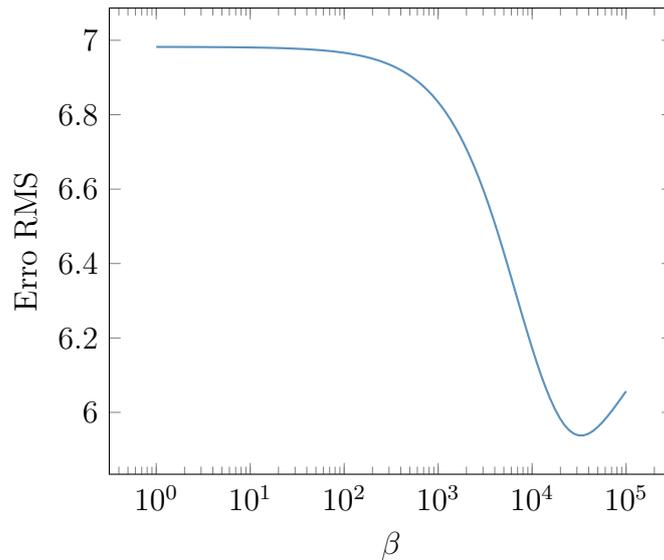


Figura 6.2: Erro de posição em função do parâmetro β do filtro UKF

6.2 Resultados das Simulações

6.2.1 Cenário 1

No primeiro cenário simulado foi considerado que o veículo está inicialmente na superfície em alto-mar, submerge até chegar a 1000 metros de profundidade, quando a odometria visual é ativada e o veículo percorre uma trajetória retilínea.

Para a primeira simulação foi considerado um Modem Acústico fixo em um ponto na superfície, situação que ocorreria com a embarcação de apoio ancorada ou em um porto, que manda a cada 10 segundos um sinal contendo sua localização obtida por GPS. Os gráficos 6.3 e 6.4 mostram o resultado de uma simulação nessas condições.

É possível notar que há um erro crescente na estimativa da posição enquanto o veículo mede a própria velocidade considerando apenas a rotação dos propulsores. Para este caso o erro atinge um máximo da ordem de 100 metros para o filtro UKF e de 250 para o EKF. Quando o veículo obtém contato visual com o leito do oceano, em $t = 1.700s$, a odometria visual é ativada permitindo uma melhoria drástica na estimativa da posição.

Para comparar a eficiência dos filtros foram feitas 20 simulações em diferentes condições iniciais e medidas para a mesma trajetória. O seguinte resultado foi obtido:

| Algoritmo | Erro RMS Médio [m] | Desvio Padrão [m] |
|-----------|--------------------|-------------------|
| EKF | 85, 77 | 74, 21 |
| UKF | 46, 12 | 15, 67 |

Em seguida o mesmo foi feito considerando o caso em que o Modem Acústico está em uma embarcação móvel, que percorre uma trajetória circular na superfície

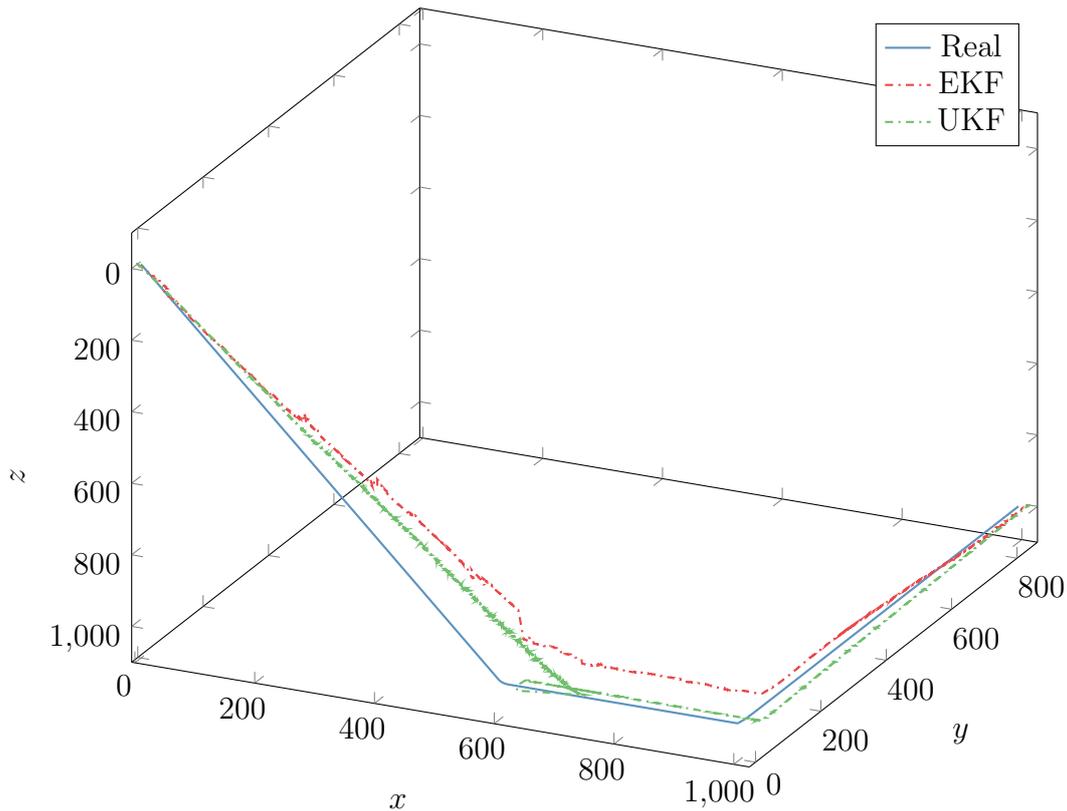


Figura 6.3: Simulação do Cenário 1

com raio igual a 200 metros. O seguinte resultado foi obtido:

| Algoritmo | Erro RMS Médio [m] | Desvio Padrão [m] |
|-----------|--------------------|-------------------|
| EKF | 22,46 | 9,42 |
| UKF | 47,04 | 21,09 |

Neste segundo caso o filtro EKF obtém uma melhora considerável, o que corrobora a hipótese que a qualidade de sua estimativa é mais suscetível a perda de observabilidade por conta do processo de linearização (Arrichiello et al. 2013). Quanto ao filtro UKF, o erro é consideravelmente maior que o EKF, no entanto é da mesma ordem que o do caso anterior, com Modem Acústico fixo.

6.2.2 Cenário 2

No segundo cenário foi considerado o veículo navegando já próximo ao leito do oceano, utilizando desde o princípio a odometria visual. Os gráficos 6.5 e 6.6 mostram os resultados de uma simulação.

Para analisar a dependência do filtro com a qualidade da odometria visual obtida, foram feitas 20 simulações para cada valor de σ_v , o resultado obtido foi:

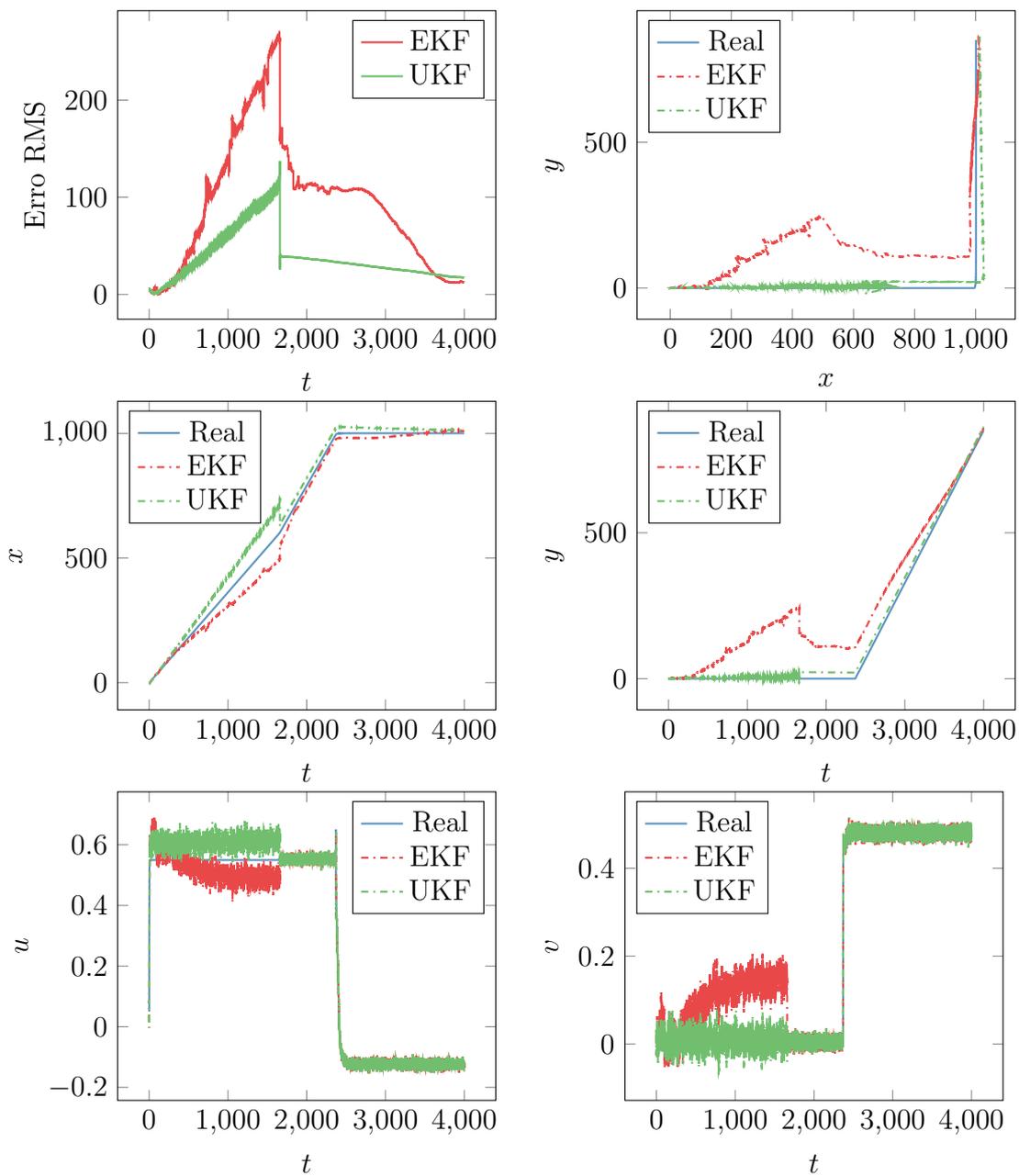


Figura 6.4: Simulação do Cenário 1

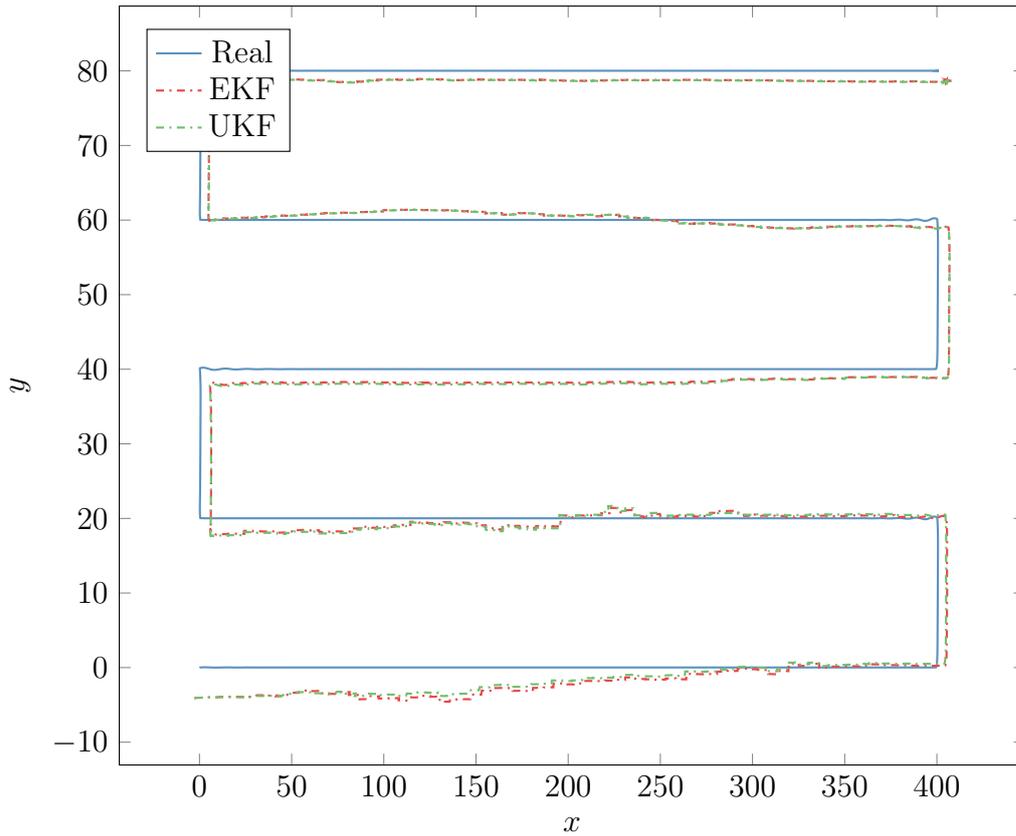


Figura 6.5: Simulação do Cenário 2

| σ_v | EKF | | UKF | |
|------------|----------|---------------|----------|---------------|
| | Erro RMS | Desvio Padrão | Erro RMS | Desvio Padrão |
| 0,02 | 5,56 | 0,70 | 5,48 | 0,72 |
| 0,04 | 5,76 | 0,51 | 5,72 | 0,61 |
| 0,08 | 5,48 | 0,60 | 5,52 | 0,67 |
| 0,16 | 6,15 | 0,65 | 5,81 | 0,82 |

E com o modem fixo, utilizando $\sigma_v = 0,02m/s$, para 20 simulações o seguinte resultado foi obtido

| Algoritmo | Erro RMS Médio | Desvio Padrão |
|-----------|----------------|---------------|
| EKF | 5,35 | 1,13 |
| UKF | 5,36 | 1,10 |

6.3 Considerações Finais

As simulações atestaram a viabilidade dos filtros em dois cenários, um que o veículo submerge até atingir sua profundidade máxima e outro em que o veículo já começa no estágio de varredura, em contato com o leito do oceano. Para cada cenário foram simulados os casos em que a embarcação de apoio fica ancorada e percorre uma trajetória circular. O primeiro caso no primeiro cenário mostraram uma melhor

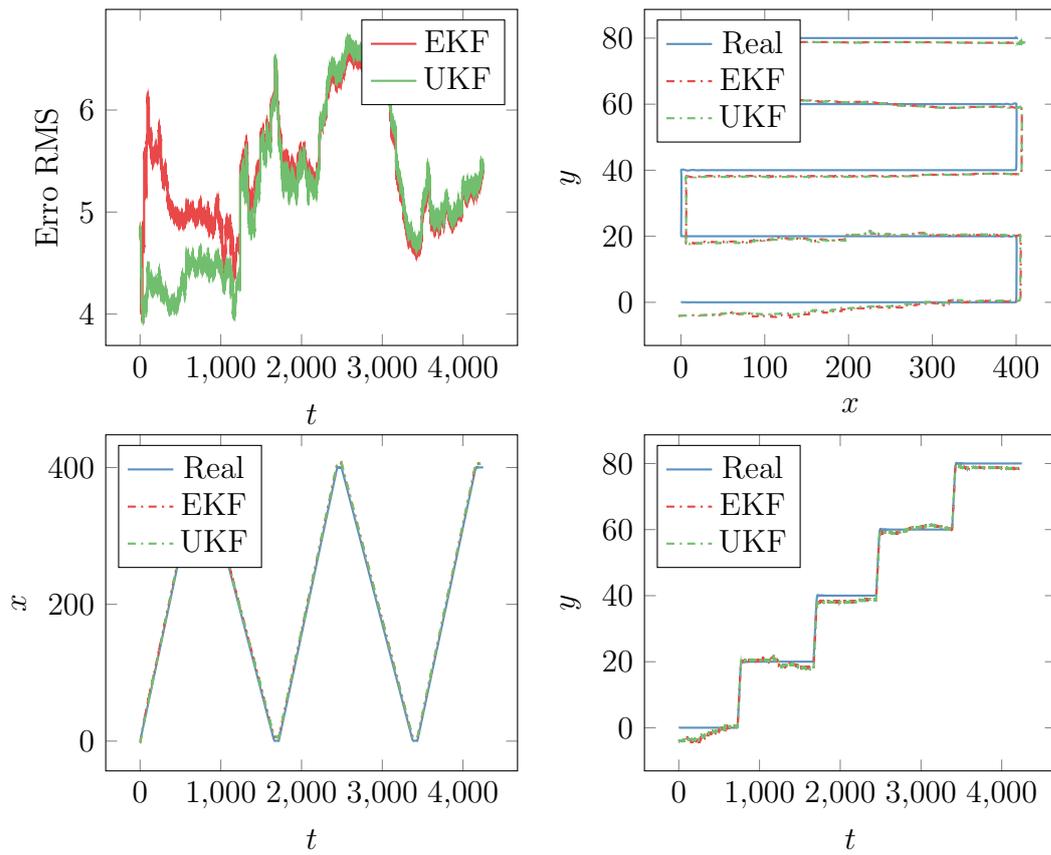


Figura 6.6: Simulação do Cenário 2

performance do filtro UKF em relação ao EKF. Com a embarcação de apoio em movimento a estimativa do filtro EKF melhora drasticamente e a do UKF pouco muda. Para o segundo cenário, em ambos os casos, os filtros UKF e EKF possuem desempenhos semelhantes.

Os resultados obtidos podem ser comparados com os erros de posicionamento de um sistema USBL de baixo custo. Considerando que este, tal como visto no capítulo 2, possui um erro variável da ordem de 2–5% da distância entre os modems equipados no submersível e no veículo de apoio na superfície, para uma distância de 1000 metros o USBL obteria uma localização com erro na ordem de 20 – 50 metros. Este erro está na mesma ordem do erro de localização obtido nas simulações do primeiro cenário e é superior ao erro de localização obtido nas simulações do segundo cenário, na ordem de 5 metros, e que considera o uso de odometria visual durante toda a missão.

Capítulo 7

Conclusão

Este trabalho abordou o desenvolvimento de um sistema de localização submarina. Foi feita uma revisão das principais técnicas utilizadas atualmente e, considerando o contexto de operação do submersível e o conjunto de equipamentos disponíveis, foi sugerido um método que se baseia em um modem acústico, profundímetro, unidade de medição inercial e câmeras.

Modelos dos sensores e do veículo foram estudados para o uso de um filtro probabilístico que, incorporando parâmetros estatísticos dos ruídos do sistema, permite uma estimativa do estado do submersível. Para tal duas aproximações do filtro de Kalman para sistemas não-lineares são empregadas, EKF e UKF.

Por meio de simulações, foram feitas comparações entre os filtros, mostrando as vantagens e desvantagens de cada um. Os resultados obtidos demonstram a viabilidade do algoritmo proposto e abrem espaço para testes experimentais em campo. Comparando com sistemas USBL de baixo custo, o sistema proposto obteve erros da mesma ordem de grandeza ou até melhores, no caso em que um sistema de odometria visual é utilizado durante toda a missão.

A contribuição principal deste trabalho é a proposta de um sistema de localização de custo reduzido e adequado ao conjunto de equipamentos utilizados pelo LUMA. Até o presente momento o filtro UKF não havia sido aplicado no contexto de um sistema de localização com base em apenas uma referência acústica, mostramos sua viabilidade e capacidade de em determinadas condições obter estimativas melhores que a do filtro EKF. Os trabalhos desta área que não utilizam um sensor DVL estimam a velocidade a partir da rotação dos propulsores, o uso de um sistema de odometria visual como sensor de velocidade permite uma melhoria significativa no sistema de localização.

7.1 Trabalhos Futuros

Esta dissertação se trata de uma proposta inicial para um sistema de localização, o seu desenvolvimento abre diversas possibilidades de estudo, entre os quais:

- A sintonização de parâmetros do UKF ainda é um assunto pouco tratado, em muitas aplicações se adotam os valores padrão sem maiores discussões, um estudo apresentado em Turner & Rasmussen (2010) aponta como uma má escolha dos parâmetros pode degradar o funcionamento do filtro e sugere um método de sintonização por meio de uma otimização via processos gaussianos.
- As simulações realizadas consideraram o conhecimento da covariância da medida de cada sensor, dos dispositivos considerados apenas a IMU fornece diretamente o desvio padrão dos ângulos de Euler. A calibração dos sensores deve ser feita para obter parâmetros da incerteza de cada sensor. Tais parâmetros também sofrem variações no ambiente de operação, e.g. neve marinha afetando a qualidade da odometria visual. Formulações adaptativas (Jiang et al. 2007, Xiong et al. 2008) e robustas (Ishihara et al. 2009) podem ser exploradas.
- O LUMA não possui um sensor próprio para a medição de velocidade linear, os resultados obtidos neste trabalho sugerem a formulação de um sistema de visão estéreo para servir de odometria visual. O software do LUMA usa como base o ROS, que já possui bibliotecas para a implementação de odometria visual. Além deste propósito a visão estéreo possibilitaria realizar um mapeamento tridimensional do leito do oceano, que em conjunto com o sistema de localização, poderia ser projetado um algoritmo de SLAM. Outra abordagem que pode ser testada para odometria visual é o conjunto de uma câmera monocular e o altímetro.
- Veículos que não utilizam DVL ou odometria visual estimam a velocidade linear com um ADCP ou por meio da rotação dos propulsores. Em ambos os casos a correnteza marinha não é medida. O filtro apresentado neste trabalho considera correntezas praticamente constantes. Uma modelagem mais fiel poderia implementar um modelo do oceano que leve em conta variações na correnteza e na maré (Donovan 2012, Garau et al. 2006).
- Sistemas de localização OWTT empregam relógios sincronizados entre os modems acústicos, neste trabalho é feita a sugestão do uso da comunicação por fibra óptica como sinalizador do envio de um pacote acústicos. Experimentos precisam ser feitos para atestar o funcionamento desse mecanismo.
- Apenas o GPS foi utilizado para a obter a posição da embarcação de apoio, a

precisão desta medida pode ser melhorada se houver acesso a outros equipamentos na superfície.

- O sistema de localização proposto utiliza filtros para que o veículo obtenha uma estimativa de seus estados no instante de operação. Um algoritmo de suavização, tal como o RTS (Rauch-Tung-Striebel), possibilita obter uma estimativa off-line da trajetória percorrida pelo veículo.

Referências Bibliográficas

- Advanced Navigation (2015), *Spatial Reference Manual*, 4.1 edn, Advanced Navigation.
Disponível em: <http://www.advancednavigation.com.au/sites/advancednavigation.com.au/files/Spatial%20Reference%20Manual.pdf>. Acesso em: 15 Out. 2015.
- Alcocer, A., Oliveira, P. & Pascoal, A. (2007), ‘Study and implementation of an EKF GIB-based underwater positioning system’, *Control Engineering Practice* **15**(6), 689 – 701.
- Antonelli, G., Fossen, T. I. & Yoerger, D. R. (2008), Underwater robotics, in B. Siciliano & O. Khatib, eds, ‘Springer Handbook of Robotics’, Springer, Berlin, Alemanha, pp. 987–1008.
- Arrichiello, F., Antonelli, G., Aguiar, A. P. & Pascoal, A. (2013), ‘An observability metric for underwater vehicle localization using range measurements’, *Sensors* **13**(12), 16191–16215.
- Audric, M. (2004), GAPS, a new concept for USBL, in ‘OCEANS ’04. MTTs/IEEE TECHNO-OCEAN ’04’, Vol. 2, pp. 786–788 Vol.2.
- Baccou, P. & Jouvencel, B. (2002), Homing and navigation using one transponder for AUV, postprocessing comparisons results with long base-line navigation. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002. (ICRA 2002), Washington, Estados Unidos. Vol. 4, pp. 4004–4009.
- Baccou, P. & Jouvencel, B. (2003), Simulation results, post-processing experimentations and comparisons results for navigation, homing and multiple vehicles operations with a new positioning method using on transponder. Proceedings of IEEE/RSJ International Intelligent Robots and Systems, 2003. (IROS 2003), Las Vegas, Estados Unidos. Conference on , Vol. 1, pp. 811–817.

- Bar-Shalom, Y., Kirubarajan, T. & Li, X. R. (2002), *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*, John Wiley & Sons, Inc., Nova Iorque, Estados Unidos.
- Bellingham, J. G., Deffenbaugh, M., Leonard, J. & Catipovic, J. (1993), Arctic under-ice survey operations, *in* ‘Proceedings of the 8th Annual Symposium of Unmanned Untethered Submersible Technology’, New Hampshire, Estados Unidos, pp. 50–59.
- Bingham, B. (2009a), Navigating autonomous underwater vehicles, *in* A. V. Inzartsev, ed., ‘Underwater Vehicles’, InTech, Rijeka, Croácia, chapter 3, pp. 33–50.
- Bingham, B. (2009b), Predicting the navigation performance of underwater vehicles. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2009. (IROS 2009), St. Louis, Estados Unidos. pp. 261–266.
- Blidberg, D. R. (2001), The development of autonomous underwater vehicles (AUV); a brief summary, *in* ‘ICRA Conference’, Seul, Coreia do Sul.
- Bowen, A. D., Yoerger, D. R., Taylor, C., McCabe, R., Howland, J., Gomez-Ibanez, D., Kinsey, J. C., Heintz, M., McDonald, G., Peters, D. B., Fletcher, B., Young, C., Buescher, J., Whitcomb, L. L., Martin, S. C., Webster, S. E. & Jakuba, M. V. (2008), The nereus hybrid underwater robotic vehicle for global ocean science operations to 11,000m depth, *in* ‘OCEANS 2008’, pp. 1–10.
- Brun, L. (2012), ‘ROV/AUV trends: Market and technology’, *Marine Technology Reporter* **55**(7), 48–51.
- Cai, G., Chen, B. M. & Lee, T. H. (2011), *Unmanned Rotorcraft Systems*, Advances in Industrial Control, Springer-Verlag, Londres, Inglaterra.
- Carter, D. & Dept, G. B. H. (1980), *Echo-sounding Correction Tables: Formerly Matthews’ Tables*, Hydrographic Department, Ministry of Defence, Reino Unido.
- Chen, L., Wang, S., McDonald-Maier, K. & Hu, H. (2013a), ‘Towards autonomous localization and mapping of AUVs: a survey’, *International Journal of Intelligent Unmanned Systems* **1**(2), 97–120.
- Chen, L., Wang, S., McDonald-Maier, K. & Hu, H. (2013b), ‘Towards autonomous localization and mapping of AUVs: a survey’, *International Journal of Intelligent Unmanned Systems* **1**, 97–120.

- Chin, C. S. (2013), *Computer-Aided Control Systems Design*, CRC Press Inc, Estados Unidos.
- CIRS Underwater Robotics Research Center (2014), ‘Girona 500’, Autonomous Undersea Vehicle Applications Center.
Disponível em: <http://auvac.org/platforms/view/245>. Acesso em: 5 Nov. 2015.
- Corke, P., Detweiler, C., Dunbabin, M., Hamilton, M., Rus, D. & Vasilescu, I. (2007), Experiments with underwater robot localization and tracking. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2007. (ICRA 2007), Roma, Itália. pp. 4556–4561.
- Cybernetix (2014), ‘Cybernetix Alive’, Autonomous Undersea Vehicle Applications Center.
Disponível em: <http://auvac.org/configurations/view/15>. Acesso em: 5 Nov. 2015.
- Donovan, G. (2012), ‘Position error correction for an autonomous underwater vehicle inertial navigation system (INS) using a particle filter’, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **37**(3), 431–445.
- Eustice, R. M. (2005), Large-area visually augmented navigation for autonomous underwater vehicles, PhD thesis, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology / Woods Hole Oceanographic Institution Joint Program, Cambridge, Estados Unidos.
- Eustice, R. M., Singh, H. & Whitcomb, L. L. (2011), ‘Synchronous-clock one-way-travel-time acoustic navigation for underwater vehicles’, *Journal of Field Robotics, Special Issue on State of the Art in Maritime Autonomous Surface and Underwater Vehicles* **28**(1), 121–136.
- Eustice, R., Pizarro, O. & Singh, H. (2008), ‘Visually augmented navigation for autonomous underwater vehicles’, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **33**(2), 103–122.
- Eustice, R., Whitcomb, L., Singh, H. & Grund, M. (2006), Recent advances in synchronous-clock one-way-travel-time acoustic navigation, in ‘OCEANS 2006’, pp. 1–6.
- Eustice, R., Whitcomb, L., Singh, H. & Grund, M. (2007), Experimental results in synchronous-clock one-way-travel-time acoustic navigation for autonomous underwater vehicles. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2007. (ICRA 2007), Roma, Itália. pp. 4257–4264.

- Fallon, M. F., Papadopoulos, G., Leonard, J. J. & Patrikalakis, N. M. (2010), ‘Cooperative AUV navigation using a single maneuvering surface craft’, *International Journal of Robotics Research* **29**, 1461–1474.
- Farr, N., Bowen, A., Ware, J., Pontbriand, C. & Tivey, M. (2010), An integrated, underwater optical /acoustic communications system, *in* ‘OCEANS 2010 IEEE’, Sidney, Australia, pp. 1–6.
- Ferreira, B., Matos, A. & Cruz, N. (2010), Single beacon navigation: Localization and control of the MARES AUV, *in* ‘OCEANS 2010’, pp. 1–9.
- Festo Corporation (2014), ‘Festo AquaJelly’.
Disponível em: https://www.festo.com/cms/en_corp/9772_10378.htm. Acesso em: 5 Nov. 2015.
- Fleischer, S. D. (2000), Bounded-error vision-based navigation of autonomous underwater vehicles, phd, Stanford University, Stanford, Estados Unidos.
- Fofonoff, N. & Millard, R. (1983), Algorithms for computation of fundamental properties of seawater, UNESCO Tech. Pap. Mar. Sci. 44, UNESCO, Paris, França. 53 pp.
- Folk, A., Armstrong, B., Wolbrecht, E., Grip, H. F., Anderson, M. & Edwards, D. (2010), Autonomous underwater vehicle navigation using moving baseline on a target ship, *in* ‘OCEANS 2010’, pp. 1–7.
- Fossen, T. I. (1994), *Guidance and control of ocean vehicles*, Wiley, Chichester, Inglaterra.
- From, P. J., Gravdahl, J. T. & Pettersen, K. Y. (2014), *Vehicle-Manipulator Systems*, 1 edn, Springer-Verlag, Londres, Inglaterra.
- Gadre, A. S. (2007), Observability Analysis in Navigation Systems with an Underwater Vehicle Application, PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Gadre, A. & Stilwell, D. (2004), Toward underwater navigation based on range measurements from a single location. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. (ICRA 2004), Barcelona, Espanha. Vol. 5, pp. 4472–4477.
- Gadre, A. & Stilwell, D. (2005*a*), A complete solution to underwater navigation in the presence of unknown currents based on range measurements from a single location. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005), Alberta, Canada. pp. 1420–1425.

- Gadre, A. & Stilwell, D. (2005*b*), Underwater navigation in the presence of unknown currents based on range measurements from a single location. Proceedings of the American Control Conference, 2005. (ACC 2005), Portland, Estados Unidos. Vol. 1, pp. 656–661.
- Garau, B., Alvarez, A. & Oliver, G. (2006), AUV navigation through turbulent ocean environments supported by onboard H-ADCP. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. (ICRA 2006), Orlando, Estados Unidos. Vol 1 pp. 3556–3561.
- Garcia, R., Puig, J., Ridao, P. & Cufi, X. (2002), Augmented state kalman filtering for AUV navigation. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002. (ICRA 2002), Washington, Estados Unidos. Vol. 4, pp. 4010–4015 vol.4.
- Gelb, A. (1974), *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, Estados Unidos.
- Goulart, C. (2007), Modelagem, simulação e controle de um veículo submarino de operação remota, Master’s thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Hartsfield, J. C. (2005), Single transponder range only navigation geometry (STRONG) applied to REMUS autonomous under water vehicles, Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology and Woods Hole Oceanographic Institution.
- Hildebrandt, M. & Kirchner, F. (2010), IMU-aided stereo visual odometry for ground-tracking AUV applications, *in* ‘OCEANS 2010 IEEE’, Sidney, Australia, pp. 1–8.
- Hiller, T., Steingrimsson, A. & Melvin, R. (2012), Positioning small AUVs for deeper water surveys using inverted USBL, *in* ‘Hydro12 - Taking care of the sea’, Hydrographic Society Benelux, Países Baixos. Topic B: subsea positioning.
- Hollinger, G. A., de Menezes Pereira, A. A., Ortenzi, V. & Sukhatme, G. S. (2012), Towards improved prediction of ocean processes using statistical machine learning, *in* ‘Robotics: Science and Systems Workshop on Robotics for Environmental Monitoring’, Sidney, Australia.
- Ishihara, J. Y., Terra, M. H., Borges, G. A., Scandaroli, G. S., Inoue, R. S. & Grassi Jr., V. (2009), Applications of robust descriptor kalman filter in robotics, *in* V. M. Moreno & A. Pigazo, eds, ‘Kalman Filter Recent Advances and Applications’, InTech, Rijeka, Croácia, chapter 22.

- iXBlue (2014), ‘Phins 6000’.
Disponível em: <https://www.ixblue.com/products/phins-6000>.
Acesso em: 5 Nov. 2015.
- Jiang, Z., Song, Q., He, Y. & Han, J. (2007), A novel adaptive unscented kalman filter for nonlinear estimation, *in* ‘Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on’, pp. 4293–4298.
- Julier, S. (2002), The scaled unscented transformation. Proceedings of American Control Conference, 2002. (ACC 2002), Alaska, Estados Unidos. Vol. 6, pp. 4555–4559.
- Julier, S. & Uhlmann, J. (2004), ‘Unscented filtering and nonlinear estimation’. Proceedings of the IEEE. Vol. 92, pp. 401–422.
- Julier, S. & Uhlmann, J. K. (1996), A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions, Technical report, University of Oxford.
- Kim, A. & Eustice, R. (2013), ‘Real-time visual slam for autonomous underwater hull inspection using visual saliency’. IEEE Transactions on Robotics. **29**(3), 719–733.
- Kinsey, J. C. & Whitcomb, L. L. (2003), Preliminary field experience with the DVLNAV integrated navigation system for manned and unmanned submersibles, Technical report, In: Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Guidance and Control of Underwater Vehicles, GCUV.
- Kinsey, J., Eustice, R. & Whitcomb, L. (2006), A survey of underwater vehicle navigation: Recent advances and new challenges, *in* ‘IFAC Conference of Manoeuvring and Control of Marine Craft’.
- Kongsberg (2015), ‘Hisas 1030’.
<http://www.km.kongsberg.com/ks/web/nokbg0240.nsf/AllWeb/90CBC5D82A8F2A6CC125721F003360C2?OpenDocument>. Acesso em: 5 Nov. 2015.
- Kussat, N. H., Chadwell, C. D. & Zimmerman, R. (2005), ‘Absolute positioning of an autonomous underwater vehicle using GPS and acoustic measurements’, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **30**(1), 153–164.
- LaPointe, C. E. G. (2006), Virtual long baseline (VLBL) autonomous underwater vehicle navigation using a single transponder, Master’s thesis, Massachusetts Institute of Technology.

- Leonard, J. J., Bennett, A. A., Smith, C. M. & Feder, H. J. S. (1998), Autonomous underwater vehicle navigation, Technical report, MIT Marine Robotics Laboratory.
- McEwen, R., Thomas, H., Weber, D. & Psota, F. (2005), ‘Performance of an AUV navigation system at arctic latitudes’, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **30**(2), 443–454.
- McPhail, S. & Pebody, M. (2009), ‘Range-only positioning of a deep-diving autonomous underwater vehicle from a surface ship’, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **34**(4), 669–677.
- Menegaz, H., Ishihara, J., Borges, G. & Vargas, A. (2015), ‘A systematization of the unscented Kalman filter theory’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **60**(10), 2583–2598.
- Miller, P., Farrell, J., Zhao, Y. & Djapic, V. (2010), ‘Autonomous underwater vehicle navigation’, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **35**(3), 663–678.
- Murray, R. M., Li, Z. & Sastry, S. S. (1994), *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, Estados Unidos.
- National Ocean Service (2009), ‘Collecting multibeam sonar data’, Wikimedia Commons.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Collecting_Multibeam_Sonar_Data.jpg. Acesso em: 9 Nov. 2015.
- Newman, P. & Westwood, J. (2012), The market for AUVs and ROVs, *in* ‘Oceanology International’, Londres, Inglaterra.
- Nogueira, M., Sousa, J. & Pereira, F. (2010), Cooperative autonomous underwater vehicle localization, *in* ‘OCEANS 2010 IEEE’, Sidney, Australia, pp. 1–9.
- Omerdic, E., Toal, D., Nolan, S. & Ahmad, H. (2012), ROV LATIS: next generation smart underwater vehicle, *in* ‘Further Advances in Unmanned Marine Vehicles’, The Institution of Engineering and Technology, Reino Unido, chapter 2.
- Papadopoulos, G., Fallon, M., Leonard, J. & Patrikalakis, N. (2010), Cooperative localization of marine vehicles using nonlinear state estimation, *in* ‘Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on’, pp. 4874–4879.
- Paull, L., Saeedi, S., Seto, M. & Li, H. (2014), ‘AUV navigation and localization: A review’, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **39**(1), 131–149.

- Ribas, D., Palomeras, N., Ridao, P., Carreras, M. & Mallios, A. (2012), ‘Girona 500 AUV: From survey to intervention’, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **17**(1), 46–53.
- Ribas, D., Ridao, P. & Neira, J. (2010), *Underwater SLAM for Structured Environments Using an Imaging Sonar*, 1st edn, Springer Publishing Company, Incorporated, Nova Iorque, Estados Unidos.
- Ross, S. (2002), *A First course in probability*, 6. ed edn, Prentice Hall, Nova Jersey, Estados Unidos.
- Salvi, J., Petillot, Y. & Batlle, E. (2008), Visual SLAM for 3D large-scale seabed acquisition employing underwater vehicles. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2008. (IROS 2008), Nice, França. pp. 1011–1016.
- Salvi, J., Petillot, Y., Thomas, S. & Aulinas, J. (2008), Visual SLAM for underwater vehicles using video velocity log and natural landmarks, in ‘OCEANS 2008’, pp. 1–6.
- Scaramuzza, D. & Fraundorfer, F. (2011), ‘Visual odometry [tutorial]’, *Robotics Automation Magazine, IEEE* **18**(4), 80–92.
- Scherbatyuk, A. (1995), The AUV positioning using ranges from one transponder LBL, in ‘OCEANS ’95. MTS/IEEE. Challenges of Our Changing Global Environment. Conference Proceedings.’, Vol. 3, pp. 1620–1623 vol.3.
- Simon, D. (2006), *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*, Wiley, Nova Jersey, Estados Unidos.
- Stanway, M. J. (2010), Water profile navigation with an acoustic doppler current profiler, in ‘OCEANS 2010 IEEE - Sydney’, pp. 1–5.
- Stutters, L., Liu, H., Tiltman, C. & Brown, D. (2008), ‘Navigation technologies for autonomous underwater vehicles’, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews* **38**(4), 581–589.
- Subsea World News (2014), ‘Kongsberg Hugin AUV’.
<http://subseaworldnews.com/2014/10/01/kongsberg-experiences-high-demand-for-hugin-auv/>. Acesso em: 5 Nov. 2015.
- Tan, H.-P., Diamant, R., Seah, W. K. & Waldmeyer, M. (2011), ‘A survey of techniques and challenges in underwater localization’, *Ocean Engineering* **38**, 1663–1676.

- Tan, Y. T., Gao, R. & Chitre, M. (2014), ‘Cooperative path planning for range-only localization using a single moving beacon’, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **39**(2), 371–385.
- Teledyne RDI (2013), ‘Workhorse Navigator DVL’.
Disponível em: <http://www.rdinstruments.com/navigator.aspx>.
Acesso em: 5 Nov. 2015.
- Turner, R. & Rasmussen, C. (2010), Model based learning of sigma points in unscented Kalman filtering, *in* IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP), 2010. pp. 178–183.
- Uhlmann, J. K. (1994), Simultaneous map building and localization for real time applications, PhD thesis, University of Oxford.
- Vaganay, J., Baccou, P. & Jouvencel, B. (2000), Homing by acoustic ranging to a single beacon, *in* ‘OCEANS 2000 MTS/IEEE Conference and Exhibition’, Vol. 2, pp. 1457–1462 vol.2.
- Vickery, K. (1998), Acoustic positioning systems. a practical overview of current systems, *in* Proceedings of the 1998 Workshop on Autonomous Underwater Vehicles, 1998. AUV’98. pp. 5–17.
- Walls, J. & Eustice, R. (2011), Experimental comparison of synchronous-clock cooperative acoustic navigation algorithms, *in* ‘OCEANS 2011’, pp. 1–7.
- Wan, E. & Van Der Merwe, R. (2000), The unscented Kalman filter for nonlinear estimation, *in* The IEEE Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. pp. 153–158.
- Webster, S. E. (2010), Decentralized single-beacon acoustic navigation: Combined communication and navigation for underwater vehicles, PhD thesis, Johns Hopkins University.
- Webster, S. E., Eustice, R. M., Singh, H., & Whitcomb, L. L. (2012), ‘Advances in single-beacon one-way-travel-time acoustic navigation for underwater vehicles’, *The International Journal of Robotics Research* **31**, 935–949.
- Webster, S., Eustice, R., Singh, H. & Whitcomb, L. (2009), Preliminary deep water results in single-beacon one-way-travel-time acoustic navigation for underwater vehicles, *in* ‘IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems’.

- Webster, S., Walls, J., Whitcomb, L. & Eustice, R. (2013), ‘Decentralized extended information filter for single-beacon cooperative acoustic navigation: Theory and experiments’, *IEEE Transactions on Robotics* **29**(4), 957–974.
- Wernli, R. L. (1999), AUVs-the maturity of the technology, in ‘OCEANS ’99 MTS/IEEE. Riding the Crest into the 21st Century’, Vol. 1, pp. 189–195 vol.1.
- Wikimedia Commons (2010), ‘ECEF ENU longitude latitude relationships’, Wikimedia Commons.
Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ECEF_ENU_Longitude_Latitude_relationships.svg. Acesso em: 8 Nov. 2015.
- Wikimedia Commons (2011), ‘Vector image of a ship’, Wikimedia Commons.
Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ship.svg>. Acesso em: 8 Nov. 2015.
- Wirth, S., Negre Carrasco, P. & Codina, G. (2013), Visual odometry for autonomous underwater vehicles, in ‘OCEANS - Bergen, 2013 MTS/IEEE’, pp. 1–6.
- Woods Hole Oceanographic Institution (2015), ‘WHOI micromodem’.
Disponível em: <http://acomms.whoi.edu/micro-modem/>. Acesso em: 8 Nov. 2015.
- Xiong, K., Zhang, H. & Liu, L. (2008), ‘Adaptive robust extended Kalman filter for nonlinear stochastic systems’, *Control Theory Applications, IET* **2**(3), 239–250.

Apêndice A

Conceitos de Probabilidade

Este apêndice apresenta conceitos básicos de probabilidade que são fundamentais para o desenvolvimento dos filtros descritos no capítulo 4. As referências utilizadas foram (Ross 2002) e (Simon 2006), que devem ser consultadas para um maior aprofundamento.

A.1 Variáveis Aleatórias

O conjunto de todos os possíveis valores que podem ser assumidos por uma variável aleatória é denominado espaço amostral Ω . Qualquer subconjunto ζ é denominado evento, sendo $P(\zeta)$ a probabilidade de tal evento ocorrer, em que os seguintes axiomas (de Kolmogorov) devem ser respeitados:

A1. $0 \leq P(\zeta) \leq 1$

A2. $P(\Omega) = 1$

A3. Se ζ_1, ζ_2, \dots são eventos mutuamente excludentes (i.e., $i \neq j \implies \zeta_i \cap \zeta_j = \emptyset$), temos que $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \zeta_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\zeta_i)$

Como consequência direta de tais axiomas, temos

C1. $P(\emptyset) = 0$

C2. Seja ζ^C o complemento de ζ , tal que $\zeta \cap \zeta^C = \emptyset$ e $\zeta \cup \zeta^C = \Omega$, temos $P(\zeta^C) = 1 - P(\zeta)$.

C3. Se $\zeta \subset \nu$, então $P(\zeta) \leq P(\nu)$

C4. $P(\zeta \cup \nu) = P(\zeta) + P(\nu) - P(\zeta \cap \nu)$

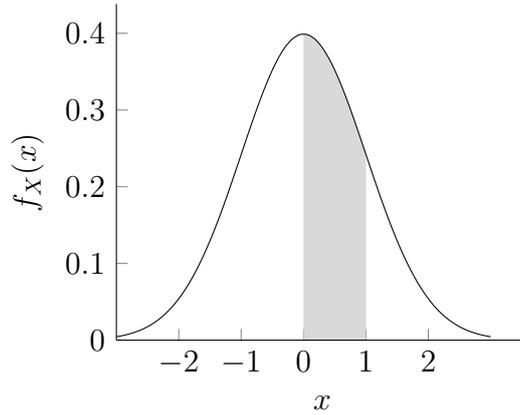


Figura A.1: A área sombreada representa $P(0 \leq X \leq 1)$

Uma variável aleatória X é definida como uma função que mapeia o conjunto de todos os possíveis valores que podem ser assumidos pela variável aleatória, denominado espaço amostral Ω , para o conjunto dos números reais.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

De modo que um evento $\zeta \in \Omega$ é mapeado em $X(\zeta) \in \mathbb{R}$. Seja $B \subseteq \mathbb{R}$, temos

$$X \in B = \{\zeta \in \Omega : X(\zeta) \in B\}$$

$$P(X \in B) = P(\{\zeta \in \Omega : X(\zeta) \in B\})$$

Uma variável aleatória pode ser discreta (e.g., X descreve o lançamento de um dado, com B representando o conjunto de eventos que o número de face é ímpar) ou contínua (e.g., X é a medida de um altímetro, com $B = [a, b]$ representando um intervalo de valores possíveis). O último caso é de maior interesse para esta dissertação e será tratado aqui.

A.2 Função Densidade de Probabilidade

Uma variável aleatória contínua é caracterizada por sua função densidade de probabilidade f_X (pdf, *probability density function*). A probabilidade de um evento mapeado em B ocorrer é dado por

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x) dx$$

A partir dos axiomas de probabilidade, temos que

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx &= 1 \\ P(a < X \leq b) &= \int_a^b f_X(x)dx \end{aligned}$$

Também é útil definir a função distribuição F_X

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Desta definição temos as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(z)dz \\ f_X(x) &= \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \\ F_X(x) &\in [0, 1] \\ F_X(-\infty) &= 0 \\ F_X(\infty) &= 1 \\ a \leq b &\implies F_X(a) \leq F_X(b) \\ P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

A.3 Valor Esperado

O valor esperado de uma função $g(X)$, de uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade f_X , é definido por

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

Quando $g(X) = X$, temos o valor esperado de X , também chamado de média ou primeiro momento de X ,

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$$

A variância, ou segundo momento central, de uma variável aleatória X é obtida com $g(X) = (X - \mu)^2$,

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x)dx$$

Em que σ é denominado desvio padrão de X . A notação $X \sim (\mu, \sigma^2)$ indica que X é uma variável aleatória cujo valor esperado é μ e desvio padrão σ . Seguindo o mesmo princípio, temos que o n -ésimo momento central de X é obtido com $g(X) = (X - \mu)^n$. Em algumas aplicações é prático definir a assimetria (*skewness*) por $E[(X - \mu)^3]/\sigma^3$ e a curtose (*kurtosis*) por $E[(X - \mu)^4]/\sigma^4$.

A.4 Distribuição Gaussiana

Uma variável aleatória é dita Gaussiana ou Normal, quando sua função densidade de probabilidade é definida por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Ou, de forma compacta, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Uma variável aleatória Gaussiana é dita normalizada se $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Quando se desconhece a pdf de uma variável aleatória é comum supor que esta é Gaussiana. Tal escolha é baseada no Teorema Central do Limite, que basicamente prova que a soma de um conjunto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) X_1, X_2, \dots, X_n , com média μ e variância σ^2 , converge para uma distribuição Gaussiana quando n tende ao infinito (Ross 2002).

A.5 Variáveis Aleatórias Distribuídas Conjuntamente

A função distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é definida por

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

E a função densidade de probabilidade conjunta por

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

O valor esperado de uma função $g(X, Y)$ é dado por

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(x, y) dx dy$$

Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y), \quad \forall x, y$$

Isto implica que

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

A covariância entre X e Y é dada por

$$C_{XY} = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = E[XY] - \mu_x\mu_y$$

E a correlação por

$$R_{XY} = E[XY]$$

Se X e Y forem não correlacionadas, então

$$R_{XY} = E[X]E[Y]$$

Independência implica não correlação, o contrário não necessariamente é verdade. Se $R_{XY} = 0$ dizemos que X e Y são ortogonais.

A.6 Variáveis Aleatórias Multidimensionais

Considerando agora X e Y como vetores aleatórios (i.e. cada componente do vetor é uma variável aleatória, $[X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ e $[Y_1, Y_2, \dots, Y_m]^T$) sua correlação é dada pela matriz

$$\begin{aligned} R_{XY} &= E[XY^T] \\ &= \begin{bmatrix} E[X_1Y_1] & \cdots & E[X_1Y_m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_nY_1] & \cdots & E[X_nY_m] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A covariância definida por

$$\begin{aligned} C_{XY} &= E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)^T] \\ &= E[XY^T] - \mu_x\mu_y^T \end{aligned}$$

A matriz de autocorrelação de X , dada por

$$\begin{aligned} R_X &= E[XX^\top] \\ &= \begin{bmatrix} E[X_1^2] & \cdots & E[X_1X_n] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_nX_1] & \cdots & E[X_n^2] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma vez que $E[X_iX_j] = E[X_jX_i]$, para qualquer par (i, j) , a matriz de autocorrelação é sempre simétrica, $R_x = R_x^\top$. É também sempre positiva semidefinida:

$$\begin{aligned} z^\top R_X z &= z^\top E[XX^\top]z \\ &= E[z^\top XX^\top z] \\ &= E[(z^\top X)^2] \geq 0 \end{aligned}$$

A matriz de autocovariância é dada por

$$\begin{aligned} C_X &= E[(X - \mu_x)(X - \mu_x)^\top] \\ &= \begin{bmatrix} E[(X_1 - \mu_1)^2] & \cdots & E[(X_1 - \mu_1)(X_n - \mu_n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E[(X_n - \mu_n)(X_1 - \mu_1)] & \cdots & E[(X_n - \mu_n)^2] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uma vez que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ para qualquer par (i, j) , a matriz de autocovariância é simétrica. Também é positiva semidefinida:

$$\begin{aligned} z^\top C_X z &= z^\top E[(X - \mu_x)(X - \mu_x)^\top]z \\ &= E[z^\top (X - \mu_x)(X - \mu_x)^\top z] \\ &= E[(z^\top (X - \mu_x))^2] \geq 0 \end{aligned}$$

Um vetor aleatório é Gaussiano se

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C_x)}} \exp \left[\frac{-1}{2} (x - \mu_x)^\top C_X^{-1} (x - \mu_x) \right]$$

Ou em notação simplificada $X \sim \mathcal{N}(\mu_x, C_X)$. Qualquer combinação linear desta variável também possuirá uma distribuição gaussiana. Considerando um vetor aleatório $Y = AX + b$, temos que $Y \sim \mathcal{N}(A\mu_x + b, AC_X A^\top)$.

A.7 Processo Estocástico

Um processo estocástico é um vetor aleatório $X(t)$ que varia no tempo.

A função de distribuição de $X(t)$ é definida como

$$F_X(x, t) = P(X(t) \leq x)$$

E a função densidade de probabilidade, por

$$f_X(x, t) = \frac{\partial^n F_X(x, t)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

Com isso, a média é dada por

$$\mu_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x, t) dx$$

E a covariância por

$$C_X(t) = E\{[X(t) - \mu_x(t)][X(t) - \mu_x(t)]^T\}$$

Uma vez que $X(t_1)$ e $X(t_2)$ são dois vetores aleatórios distintos, podemos falar na função distribuição e densidade de probabilidade conjunta para tais vetores

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2)$$
$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Para simplificar a notação omitimos o índice de tais funções.

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)^T]$$
$$C_x(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu(t_1)][X(t_2) - \mu(t_2)]^T\}$$

Quando $X(t_1)$ é independente de $X(t_2)$ para qualquer $t_1 \neq t_2$, $X(t)$ é denominado ruído branco. Do contrário, seria um ruído colorido. Tal nomenclatura é justificada como base no espectro de frequência do processo, $S_X(\omega)$. Este, para um sinal estocástico estacionário no sentido amplo, é definido pela transformada de Fourier da autocorrelação:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$
$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Quando se trata de um processo estocástico discretizado no tempo, o espectro de frequência é definido por

$$S_X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k)e^{-j\omega k}, \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

$$R_X(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{j\omega k} d\omega$$

E o mesmo é chamado de ruído branco se

$$R_X(k) = \sigma^2 \delta_k$$

Em que δ_k é a função delta de Kronecker, definida por

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$$

Se $X(k)$ é um ruído branco, então os vetores aleatórios $X(n)$ e $X(m)$ só serão correlacionados quando $n = m$. De modo que o sinal possui a mesma potência para todas as frequências:

$$S_X(\omega) = R_X(0), \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi]$$

Apêndice B

Algumas Demonstrações

B.1 Propriedades do traço de uma matriz

Temos que o traço de uma matriz é definido pelo somatório dos elementos de sua diagonal. Seja A uma matriz $m \times m$, em que a_{ij} é o elemento da linha i e coluna j de A , temos que

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^m a_{ii} \quad (\text{B.1})$$

B.1.1 Permutação Cíclica

O traço é invariante à permutação cíclica, de modo que

$$\text{tr}(ABC) = \text{tr}(CAB) = \text{tr}(BCA) \quad (\text{B.2})$$

Desde que as dimensões das matrizes sejam tais que permitam as três multiplicações. Considerando A uma matriz $m \times n$; B , $n \times p$; C , $p \times m$, temos

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_j b_{1j}c_{j1} & \cdots & \sum_j b_{1j}c_{jm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_j b_{nj}c_{j1} & \cdots & \sum_j b_{nj}c_{jm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{jk} a_{1k}b_{kj}c_{j1} & \cdots & \sum_{jk} a_{1k}b_{kj}c_{jm} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{jk} a_{mk}b_{kj}c_{j1} & \cdots & \sum_{jk} a_{mk}b_{kj}c_{jm} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
tr(ABC) &= \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} c_{ji} \\
&= \sum_{ijk} c_{ji} a_{ik} b_{kj} = tr(CAB) \\
&= \sum_{ijk} b_{kj} c_{ji} a_{ik} = tr(BCA)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

B.1.2 Quadratic Outer Product Trace Derivative

Queremos provar que

$$\frac{\partial}{\partial A} tr(ABA^\top) = AB^\top + AB \tag{B.4}$$

Em que A é uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times n$. Para tal, usando a equação B.3 com $C = A^\top$, temos

$$tr(ABA^\top) = \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} a_{ij} \tag{B.5}$$

De modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial A} tr(ABA^\top) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_{11}} \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} a_{ij} & \cdots & \frac{\partial}{\partial a_{1n}} \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} a_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_{m1}} \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} a_{ij} & \cdots & \frac{\partial}{\partial a_{mn}} \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} a_{ij} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_j b_{1j} a_{1j} + \sum_k a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_j b_{nj} a_{1j} + \sum_k a_{1k} b_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_j b_{1j} a_{mj} + \sum_k a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_j b_{nj} a_{mj} + \sum_k a_{mk} b_{kn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_j b_{1j} a_{1j} & \cdots & \sum_j b_{nj} a_{1j} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_j b_{1j} a_{mj} & \cdots & \sum_j b_{nj} a_{mj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_k a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_k a_{1k} b_{kn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_k a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_k a_{mk} b_{kn} \end{bmatrix} \\
&= AB^\top + AB
\end{aligned} \tag{B.6}$$

B.1.3 Sandwich Product Trace Derivative

Queremos provar que

$$\frac{\partial}{\partial B} tr(ABC) = A^\top C^\top \tag{B.7}$$

Usando a equação B.3, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial B} \text{tr}(ABC) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial b_{11}} \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} c_{ji} & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_{1p}} \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} c_{ji} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial b_{n1}} \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} c_{ji} & \cdots & \frac{\partial}{\partial b_{np}} \sum_{ijk} a_{ik} b_{kj} c_{ji} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_i a_{i1} c_{1i} & \cdots & \sum_i a_{i1} c_{pi} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i a_{in} c_{1i} & \cdots & \sum_i a_{in} c_{pi} \end{bmatrix} = A^T C^T \end{aligned}$$

Apêndice C

Códigos Desenvolvidos

C.1 Filtro EKF

C.1.1 Predição

```
function [x_pri, P_pri] = ekf_predicao(x, P, f, F, R, param)
% Etapa de predicacao do Filtro de Kalman Estendido (EKF)
% com base no modelo:
%     x[k+1] = f(x[k]) + r[k]
%     E{r[k]r[k]'} = R
%
% Entradas:
%     x - Estimativa inicial
%     P - Covariancia da estimativa inicial
%     f(x,param) - Modelo do sistema
%     F(x,param) - Jacobiano de f
%     R - Covariancia do ruido
%     param - Parametros para f e F
%
% Saidas:
%     x_pri - Estimativa predita (a priori)
%     P_pri - Covariancia da estimativa predita (a priori)

%Predicacao da estimativa com base no modelo do sistema
x_pri = f(x,param);

%Aproximacao linear da covariancia com base no Jacobiano
F = F(x,param);
P_pri = F*P*F' + R;
```

C.1.2 Correção

```
function [x_pos, P_pos] = ekf_correcao(x, P, z, h, H, Q, param)
% Etapa de correcao do Filtro de Kalman Estendido (EKF)
% com base no modelo:
%     y[k] = h(x[k]) + q[k]
%     E{q[k]q[k]'} = Q
%
% Entradas:
%     x - Estimativa inicial
%     P - Covariancia da estimativa inicial
%     h(x,param) - Modelo de medida
%     H(x,param) - Jacobiano de h
%     Q - Covariancia do ruido de medida
%     param - Parametros para h e H
%
% Saidas:
%     x_pos - Estimativa corrigida (a posteriori)
%     P_pos - Covariancia da estimativa corrigida

N = size(x,1);

% Calculo do ganho de Kalman
H = H(x,param);
K = P*H'/(H*P*H' + Q);
if isnan(K)
disp('ERRO: Ganho de Kalman singular');
return;
end

%Correcao da estimativa
zhat = h(x,param);
x_pos = x + K*(z-zhat);

%Covariancia da estimativa corrigida
P_pos = (eye(N) - K*H) * P * (eye(N) - K*H)' + K*Q*K';
P_pos = (P_pos + P_pos')/2;
```

C.2 Filtro UKF

C.2.1 UT - Transformada Unscented Escalonada

```

function [y,Py,y,Pxy] = transformada_unscented(x,P,f,param,...
                                             alpha,beta,kapa)

% Transformada Unscented Escalonada (UT)
%
% Entradas:
%     x - Media da variavel aleatoria
%     P - Covariancia da variavel aleatoria
%     f(x,param) - Funcao de transformacao
%     param - Parametros para f
%     alpha,beta,kapa - Parametros da UT
%
% Saidas:
%     y - Estimativa da media de f(x)
%     Py - Estimativa da covariancia de y
%     Pxy - Estimativa da correlacao entre x e y

% Pesos para os pontos sigma
N = size(x,1);
lambda=alpha^2*(N+kapa)-N;
c=N+lambda;
Wm=[lambda/c 0.5/c+zeros(1,2*N)];
Wc=Wm;
Wc(1)=Wc(1)+(1-alpha^2+beta);
c=sqrt(c);

% Pontos sigma
A = c*chol(P)';
X = x(:,ones(1,numel(x)));
Xsigma = [x X+A X-A];
L=size(Xsigma,2);
Xsigma_d = Xsigma - x(:,ones(1,L));

% Aplica a funcao nao-linear para cada ponto sigma
Ysigma = [];
for k=1:L
Ysigma = [Ysigma f(Xsigma(:,k),param)];
end

% Estimativa da media de f(x)
y = zeros(size(Ysigma,1),1);
for k=1:L
y = y + Wm(k)*Ysigma(:,k);
end

Ysigma_d = Ysigma-y(:,ones(1,L));
% Estimativa da covariancia de y
Py = Ysigma_d*diag(Wc)*Ysigma_d';

```

```
% Estimativa da correlacao entre x e y
Pxy = Xsigma_d*diag(Wc)*Ysigma_d';
```

C.2.2 Predição

```
function [x_pri, P_pri] = ukf_predicao(x,P, f, R, param, ...
alpha, beta, kapa)
% Etapa de predicao do Filtro de Kalman Unscented (UKF)
% com base no modelo:
%     x[k+1] = f(x[k]) + r[k]
%     E{r[k]r[k]'} = R
%
% Entradas:
%     x - Estimativa inicial
%     P - Covariancia da estimativa inicial
%     f(x,param) - Modelo do sistema
%     R - Covariancia do ruido
%     param - Parametros para f
%     alpha, beta, kapa - Parametros da transformada unscented
%
% Saidas:
%     x_pri - Estimativa predita (a priori)
%     P_pri - Covariancia da estimativa predita (a priori)

[x_pri, P_pri] = transformada_unscented(x,P,f,param,alpha,beta,kapa);
P_pri = P_pri + R;
```

C.2.3 Correção

```
function [x_pos, P_pos] = ukf_correcao(x,P,z, h, Q, param, ...
alpha, beta, kapa)
% Etapa de correcao do Filtro de Kalman Unscented (UKF)
% com base no modelo:
%     y[k] = h(x[k]) + q[k]
%     E{q[k]q[k]'} = Q
%
% Entradas:
%     x - Estimativa inicial
%     P - Covariancia da estimativa inicial
%     h(x,param) - Modelo de medida
%     Q - Covariancia do ruido de medida
%     param - Parametros para h
```

```

%
% Saidas:
%     x_pos - Estimativa corrigida (a posteriori)
%     P_pos - Covariancia da estimativa corrigida

[z1,P2,P12] = transformada_unscented(x,P,h,param,alpha,beta,kapa);

%Calculo do ganho de Kalman
K = P12*pinv(P2 + Q);

%Correcao da estimativa
x_pos = x + K*(z-z1);

%Covariancia da estimativa corrigida
P_pos = P - K*P12';
P_pos = (P_pos + P_pos')/2;

```

C.3 Simulações

C.3.1 Gerador de medidas

```

% Histograma do erro de medida do modem
PD = [-14    4
-13    11
-12     3
-11     2
-10     0
-9      1
-8      0
-7      2
-6      0
-5      5
-4      8
-3     12
-2     27
-1     50
0      97
1      39
2      22
3      12
4       7
5       8
6       5
7       4

```

```

8      3
9      0
10     0
11     1
12     0
13     3
14     2
15     1
16     2
17     1
18     0
19     1
20     1
21     0
22     1
23     0
24     0
25     2
26     3
27     2
28     2];

PD(:,2) = PD(:,2)/sum(PD(:,2));
PD(:,2) = cumsum(PD(:,2));
pd = makedist('rayleigh', 3.3);
dist_noise = @( ) (PD(find(rand()<PD(:,2),1,'first'),1) + random(pd));

%-----

tinit = simout.time(1);
dt = 0.1;
tfinal = simout.time(end);
Niter = (tfinal-tinit)/dt;

%Parametros iniciais do sistema
% x(1) = posicao no eixo x
% x(2) = posicao no eixo y
% x(3) = posicao no eixo z
% x(4) = roll
% x(5) = pitch
% x(6) = yaw
% x(7) = velocidade no eixo x
% x(8) = velocidade no eixo y
% x(9) = velocidade no eixo z
% x(10) = rotacao no eixo x
% x(11) = rotacao no eixo y
% x(12) = rotacao no eixo z

```

```

% x(13) = correnteza no eixo x
% x(14) = correnteza no eixo y
% x(15) = correnteza no eixo z
X = zeros(24, Niter);
Z = zeros(17, Niter);

sigma_prof = 0.5;           %Profundidade           Profundimetro
sigma_roll = 0.5*pi/180;   %Roll           IMU
sigma_pitch = 0.5*pi/180;  %Pitch           IMU
sigma_yaw = 1*pi/180;      %Yaw           IMU
sigma_vel = 0.02;          %Vel. Linear     Odometria Visual
sigma_vb = 0.1;            %Vel. Linear     Propulsores
sigma_wb = 0.25*pi/180;    %Vel. Angular    IMU
sigma_gps = 5;             %Posicao          GPS

for i = 1:Niter
t = (i-1)*dt;
ind = round(t*1e2 + 1);
x = simout.signals.values(ind, 1:24)';
X(:,i) = x;

%Movimento do modem na superficie
xb = -200*cos(2*pi/2000*t);
yb = -200*sin(2*pi/2000*t);
zb = 0;

range = sqrt((x(1)-xb)^2 + (x(2)-yb)^2 + (x(3)-zb)^2)...
+ dist_noise();
prof = x(3) + normrnd(0, sigma_prof);
roll = x(4) + normrnd(0, sigma_roll);
pitch = x(5) + normrnd(0, sigma_pitch);
yaw = x(6) + normrnd(0, sigma_yaw);
vlin_iner = x(7:9) + normrnd(0, sigma_vel, 3, 1);
vang = x(10:12) + normrnd(0, sigma_wb, 3, 1);
vlin_water = x(13:15) + normrnd(0, sigma_vb, 3, 1);
spos = [normrnd(xb, sigma_gps); normrnd(yb, sigma_gps); normrnd(zb, 1)];

z = [range; prof; roll; pitch; yaw; vlin_iner; vang; vlin_water; spos];
Z(:,i) = z;
end

```

C.3.2 Sistema de Localização

```

% x(1) = posicao no eixo x

```

```

% x(2) = posicao no eixo y
% x(3) = posicao no eixo z
% x(4) = roll
% x(5) = pitch
% x(6) = yaw
% x(7) = velocidade no eixo x (em relacao ao ref. inercial)
% x(8) = velocidade no eixo y (em relacao ao ref. inercial)
% x(9) = velocidade no eixo z (em relacao ao ref. inercial)
% x(10) = rotacao no eixo x
% x(11) = rotacao no eixo y
% x(12) = rotacao no eixo z
% x(13) = correnteza no eixo x (em relacao ao ref. inercial)
% x(14) = correnteza no eixo y (em relacao ao ref. inercial)
% x(15) = correnteza no eixo z (em relacao ao ref. inercial)

% Estimativa inicial
xcurr = normrnd(0.05,0.02);
ycurr = normrnd(0.01,0.02);
xhat = [normrnd(0,5); normrnd(0,5); normrnd(50,0.5);
normrnd(0,0.5*pi/180); normrnd(0,0.5*pi/180); normrnd(0,1*pi/180);
xcurr; ycurr; 0;
normrnd(0,0.25*pi/180); normrnd(0,0.25*pi/180); normrnd(0,0.25*pi/180);
xcurr; ycurr; 0];
P = diag([5^2,5^2,0.25,(0.5*pi/180*ones(1,2)).^2,...
(0.8*pi/180).^2,1e-1*ones(1,3),...
(0.25*pi/180*ones(1,3)).^2,1e-1*ones(1,3)]);

%Parametros do tempo de simulacao
tinit = simout.time(1);
dt = 0.1;
tfinal = simout.time(end);
iter = (tfinal-tinit)/dt;

N = size(xhat,1);

f_func = @rov_f;
df_dx_func = @rov_df_dx;

h_func = @rov_h;
dh_dx_func = @rov_dh_dx;

hPing_func = @rov_hPing;
dhPing_dx_func = @rov_dhPing_dx;

hDvl_func = @rov_hDvl;
dhDvl_dx_func = @rov_dhDvl_dx;

```

```

hDvlPing_func = @rov_hDvlPing;
dhDvlPing_dx_func = @rov_dhDvlPing_dx;

% Ruído do processo
sigma_w2 = 1e-4;
Q = eye(9)*(sigma_w2^2);
Q(1,1) = 0.005;
Q(2,2) = Q(1,1);
Q(3,3) = Q(1,1);
Q(4,4) = 1e-4;
Q(5,5) = Q(4,4);
Q(6,6) = Q(4,4);
Q(7,7) = 0;
Q(8,8) = Q(7,7);
Q(9,9) = Q(7,7);
G = [zeros(6,9); eye(9)];
Qn = G*Q*G';
Qd = Qn*dt;

tping = 10;
sigma_range = 3.3;

R = diag([sigma_range^2, sigma_prof^2,...
sigma_roll^2, sigma_pitch^2, sigma_yaw^2,...
(sigma_vb^2)*ones(1,3), (sigma_wb^2)*ones(1,3)]);
Rd = R/dt;

Rdvl = diag([sigma_range^2, sigma_prof^2,...
sigma_roll^2, sigma_pitch^2, sigma_yaw^2,...
(sigma_vel^2)*ones(1,3), (sigma_wb^2)*ones(1,3)]);
Rdvl = Rdvl/dt;

%-----
% EKF
%-----

x_ekf_pri = zeros(N, iter);
x_ekf_pri(:,1) = xhat;
x_ekf_pos = zeros(N, iter);
x_ekf_pos(:,1) = xhat;

P_ekf_pri = zeros([N, N, iter]);
P_ekf_pri(:,:,1) = P;
P_ekf_pos = zeros([N, N, iter]);
P_ekf_pos(:,:,1) = P;

```

```

for i = 2:Niter
t = (i-1)*dt;

if X(3,i) > 997
dvl = 1;
else
dvl = 1;
end

[x_ekf_pri(:,i), P_ekf_pri(:, :, i)] = ekf_predicao(x_ekf_pos(:,i-1), ...
P_ekf_pos(:, :, i-1), f_func, df_dx_func, Qd, dt);

if dvl == 0
if rem(t, tping) == 0
z = [Z(1:5,i);Z(12:14,i);Z(9:11,i)];
[x_ekf_pos(:,i), P_ekf_pos(:, :, i)] = ...
ekf_atualizacao(x_ekf_pri(:,i),P_ekf_pri(:, :, i), ...
z, hPing_func, dhPing_dx_func, Rd, Z(15:17,i));
else
z = [Z(2:5,i);Z(12:14,i);Z(9:11,i)];
[x_ekf_pos(:,i), P_ekf_pos(:, :, i)] = ...
ekf_atualizacao(x_ekf_pri(:,i),P_ekf_pri(:, :, i), ...
z, h_func, dh_dx_func, Rd(2:end,2:end), []);
end
else
if rem(t, tping) == 0
z = Z(1:11,i);
[x_ekf_pos(:,i), P_ekf_pos(:, :, i)] = ...
ekf_atualizacao(x_ekf_pri(:,i),P_ekf_pri(:, :, i), ...
z, hDvlPing_func, dhDvlPing_dx_func, Rdvl, Z(15:17,i));
else
z = Z(2:11,i);
[x_ekf_pos(:,i), P_ekf_pos(:, :, i)] = ...
ekf_atualizacao(x_ekf_pri(:,i),P_ekf_pri(:, :, i), ...
z, hDvl_func, dhDvl_dx_func, Rdvl(2:end,2:end), []);
end
end

end

%-----
% UKF
%-----

```

```

x_ukf_pri = zeros(N, iter);
x_ukf_pri(:,1) = xhat;
x_ukf_pos = zeros(N, iter);
x_ukf_pos(:,1) = xhat;

P_ukf_pri = zeros([N, N, iter]);
P_ukf_pri(:,:,1) = P;
P_ukf_pos = zeros([N, N, iter]);
P_ukf_pos(:,:,1) = P;

for i = 2:Niter
t = (i-1)*dt;

if X(3,i) > 997
dvl = 1;
else
dvl = 1;
end

[x_ukf_pri(:,i), P_ukf_pri(:,:,i)] = ukf_predicao(x_ukf_pos(:,i-1), ...
P_ukf_pos(:,:,i-1), f_func, Qd, dt, ...
1e-3, 2, 0);
%
if dvl == 0
if rem(t, tping) == 0
z = Z(1,i);
dist_func = @(x,par) sqrt((x(1)-par(1))^2 + ...
(x(2)-par(2))^2 + (x(3)-par(3))^2);

[x_ukf_pos(:,i), P_ukf_pos(:,:,i)] = ...
ukf_atualizacao(x_ukf_pri(:,i),P_ukf_pri(:,:,i)...
,z, dist_func, Rd(1,1), Z(15:17,i), 0.5, 4e4, 0);

z = [Z(2:5,i);Z(12:14,i);Z(9:11,i)];
[x_ukf_pos(:,i), P_ukf_pos(:,:,i)] = ...
ukf_atualizacao(x_ukf_pos(:,i),P_ukf_pos(:,:,i),...
z, h_func, Rd(2:end,2:end), [], ...
1e-3, 2, 0);
else
z = [Z(2:5,i);Z(12:14,i);Z(9:11,i)];
[x_ukf_pos(:,i), P_ukf_pos(:,:,i)] = ...
ukf_atualizacao(x_ukf_pri(:,i),P_ukf_pri(:,:,i),...
z, h_func, Rd(2:end,2:end), [], ...
1e-3, 2, 0);

end

```

```

else
if rem(t, tping) == 0
z = Z(1,i);
dist_func = @(x,par) sqrt((x(1)-par(1))^2 +...
(x(2)-par(2))^2 + (x(3)-par(3))^2);

[x_ukf_pos(:,i), P_ukf_pos(:,:,i)] = ...
ukf_atualizacao(x_ukf_pri(:,i),P_ukf_pri(:,:,i),...
z, dist_func, Rd(1,1), Z(15:17,i), 0.5, 4e4, 0);

z = Z(2:11,i);
[x_ukf_pos(:,i), P_ukf_pos(:,:,i)] = ...
ukf_atualizacao(x_ukf_pos(:,i),P_ukf_pos(:,:,i),...
z, hDvl_func, Rdvl(2:end,2:end), [],...
1e-3, 2, 0);

else
z = Z(2:11,i);
[x_ukf_pos(:,i), P_ukf_pos(:,:,i)] = ...
ukf_atualizacao(x_ukf_pri(:,i),P_ukf_pri(:,:,i),...
z, hDvl_func, Rdvl(2:end,2:end), [],...
1e-3, 2, 0);
end
end

end

```

C.3.3 Funções auxiliares

```

function [x_n] = rov_f(x,param)

dt = param(1);

phi = x(4);      % Roll
tht = x(5);     % Pitch
psi = x(6);     % Yaw
vb = x(7:9);    % Vel. Lin.
wb = x(10:12);  % Vel. Ang.

% Matrizes de rotacao
R_x = [1      0      0;
0   cos(phi)  sin(phi);

```

```

0    -sin(phi)   cos(phi)];

R_y = [cos(tht)   0   -sin(tht);
0         1       0;
sin(tht)   0   cos(tht)];

R_z = [cos(psi)   sin(psi)   0;
-sin(psi)   cos(psi)   0;
0         0         1];

R_lv = R_z'*R_y'*R_x';

J = [1         sin(phi)*tan(tht)   cos(phi)*tan(tht);
0         cos(phi)   -sin(phi);
0         sin(phi)*sec(tht)   cos(phi)*sec(tht)];

%Atualiza estado
x_n = x + [R_lv*vb; J*wb; zeros(9,1)]*dt;

```

```

function [Jacob] = rov_df_dx(x,param)

dt = param(1);

phi = x(4);      % Roll
tht = x(5);     % Pitch
psi = x(6);     % Yaw
vb = x(7:9);    % Vel. Lin.
wb = x(10:12);  % Vel. Ang.

% Matrizes de rotacao
R_x = [1         0         0;
0   cos(phi)   sin(phi);
0   -sin(phi)  cos(phi)];

dR_x = [0         0         0;
0   -sin(phi)   cos(phi);
0   -cos(phi)  -sin(phi)];

R_y = [cos(tht)   0   -sin(tht);
0         1       0;
sin(tht)   0   cos(tht)];

dR_y = [-sin(tht)   0   -cos(tht);
0         0         0;
cos(tht)   0   -sin(tht)];

```

```

R_z = [cos(psi)    sin(psi)    0;
       -sin(psi)   cos(psi)    0;
       0           0           1];

dR_z = [-sin(psi)  cos(psi)    0;
        -cos(psi)  -sin(psi)   0;
        0          0           0];

R_lv = R_z'*R_y'*R_x';

dRvb_dTh = [R_z'*R_y'*dR_x'*vb  R_z'*dR_y'*R_x'*vb  dR_z'*R_y'*R_x'*vb];

J = [1          sin(phi)*tan(tht)    cos(phi)*tan(tht);
     0          cos(phi)              -sin(phi);
     0          sin(phi)*sec(tht)     cos(phi)*sec(tht)];

dJ_dphi = [0,    cos(phi)*tan(tht),  -sin(phi)*tan(tht);
           0,    -sin(phi),           -cos(phi);
           0,    cos(phi)/cos(tht),  -sin(phi)/cos(tht)];

dJ_dtght = [0, sin(phi)*(tan(tht)^2 + 1), cos(phi)*(tan(tht)^2 + 1);
            0,      0,                    0;
            0, (sin(phi)*sin(tht))/cos(tht)^2, (cos(phi)*sin(tht))/cos(tht)^2];

dJwb_dTh = [dJ_dphi*wb  dJ_dtght*wb  zeros(3,1)];

Jacob = [eye(3,3)      dRvb_dTh*dt      R_lv*dt
         zeros(3,3)  zeros(3,3);
         zeros(3,3)   eye(3,3)+dJwb_dTh*dt  zeros(3,3)  J*dt  zeros(3,3);
         zeros(6,6)  eye(6,6)  zeros(6,3);
         zeros(3,6)  zeros(3,6)  eye(3,3)];

```

```

function [y] = rov_h(x, param)

prof = x(3);
roll = x(4);
pitch = x(5);
yaw = x(6);
vlin = x(7:9);
vang = x(10:12);
vcurr = x(13:15);

phi = roll;
tht = pitch;    % Pitch
psi = yaw;      % Yaw

```

```

% Matrizes de rotacao
R_x = [1      0      0;
0      cos(phi)  sin(phi);
0      -sin(phi) cos(phi)];

R_y = [cos(tht)  0  -sin(tht);
0      1      0;
sin(tht)  0  cos(tht)];

R_z = [cos(psi)  sin(psi)  0;
-sin(psi)  cos(psi)  0;
0      0      1];

R_vl = R_x*R_y*R_z;

y = [
prof;
roll;
pitch;
yaw;
vlin - R_vl*vcurr;
vang];

```

```

function [H] = rov_dh_dx(x, param)

roll = x(4);
pitch = x(5);
yaw = x(6);
phi = roll;
tht = pitch;      % Pitch
psi = yaw;        % Yaw
% Matrizes de rotacao
R_x = [1      0      0;
0      cos(phi)  sin(phi);
0      -sin(phi) cos(phi)];

dR_x = [0      0      0;
0      -sin(phi)  cos(phi);
0      -cos(phi)  -sin(phi)];

R_y = [cos(tht)  0  -sin(tht);
0      1      0;
sin(tht)  0  cos(tht)];

dR_y = [-sin(tht)  0  -cos(tht);
0      0      0;

```

```

cos(tht)    0    -sin(tht)];

R_z = [cos(psi)    sin(psi)    0;
-sin(psi)    cos(psi)    0;
0            0            1];

dR_z = [-sin(psi)    cos(psi)    0;
-cos(psi)    -sin(psi)    0;
0            0            0];

R_vl = R_x*R_y*R_z;
vcurr = x(13:15);
dRvl_dTh = [dR_x*R_y*R_z*vcurr R_x*dR_y*R_z*vcurr R_x*R_y*dR_z*vcurr];

H = [
0, 0, 1, zeros(1,9) zeros(1,3);
zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3) zeros(3,3) zeros(3,3);
zeros(3,3) -dRvl_dTh eye(3) zeros(3,3) -R_vl;
zeros(3,3) zeros(3,3) zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3);
];

```

```

function [y] = rov_hPing(x, param)

xb = param(1);
yb = param(2);
zb = param(3);

range = sqrt((x(1)-xb)^2 + (x(2)-yb)^2 + (x(3)-zb)^2);
prof = x(3);
roll = x(4);
pitch = x(5);
yaw = x(6);
vlin = x(7:9);
vang = x(10:12);
vcurr = x(13:15);

phi = roll;
tht = pitch;    % Pitch
psi = yaw;      % Yaw
% Matrizes de rotacao
R_x = [1    0    0;
0    cos(phi)    sin(phi);
0    -sin(phi)    cos(phi)];

R_y = [cos(tht)    0    -sin(tht);

```

```

0          1          0;
sin(tht)   0      cos(tht)];

R_z = [cos(psi)      sin(psi)      0;
-sin(psi)      cos(psi)      0;
0              0              1];

R_vl = R_x*R_y*R_z;

y = [range;
prof;
roll;
pitch;
yaw;
vlin - R_vl*vcurr;
vang];

```

```

function [H] = rov_dhPing_dx(x, param)

xb = param(1);
yb = param(2);
zb = param(3);

roll = x(4);
pitch = x(5);
yaw = x(6);
phi = roll;
tht = pitch;      % Pitch
psi = yaw;        % Yaw
% Matrizes de rotacao
R_x = [1          0          0;
0      cos(phi)   sin(phi);
0      -sin(phi)  cos(phi)];

dR_x = [0          0          0;
0      -sin(phi)   cos(phi);
0      -cos(phi)  -sin(phi)];

R_y = [cos(tht)      0      -sin(tht);
0          1          0;
sin(tht)      0      cos(tht)];

dR_y = [-sin(tht)      0      -cos(tht);
0          0          0;
cos(tht)      0      -sin(tht)];

```

```

R_z = [cos(psi)    sin(psi)    0;
       -sin(psi)   cos(psi)    0;
       0           0           1];

dR_z = [-sin(psi)  cos(psi)    0;
        -cos(psi)  -sin(psi)   0;
        0          0           0];

R_vl = R_x*R_y*R_z;
vcurr = x(13:15);
dRvl_dTh = [dR_x*R_y*R_z*vcurr  R_x*dR_y*R_z*vcurr  R_x*R_y*dR_z*vcurr];

H = [(x(1)-xb)/sqrt((x(1)-xb)^2 + (x(2)-yb)^2 + (x(3)-zb)^2), ...
      (x(2)-yb)/sqrt((x(1)-xb)^2 + (x(2)-yb)^2 + (x(3)-zb)^2), ...
      (x(3)-zb)/sqrt((x(1)-xb)^2 + (x(2)-yb)^2 + (x(3)-zb)^2), zeros(1,12);
      0, 0, 1, zeros(1,12);
      zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3) zeros(3,3) zeros(3,3);
      zeros(3,3) -dRvl_dTh eye(3) zeros(3,3) -R_vl;
      zeros(3,3) zeros(3,3) zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3)
    ];

```

```

function [y] = rov_hDvl(x, param)

```

```

prof = x(3);
roll = x(4);
pitch = x(5);
yaw = x(6);
vlin = x(7:9);
vang = x(10:12);

```

```

y = [
prof;
roll;
pitch;
yaw;
vlin;
vang];

```

```

function [H] = rov_dhDvl_dx(x, param)

```

```

H = [

```

```

0, 0, 1, zeros(1,9) zeros(1,3);
zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3) zeros(3,3) zeros(3,3);
zeros(3,3) zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3) zeros(3,3);
zeros(3,3) zeros(3,3) zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3);
];

```

```

function [y] = rov_hDvlPing(x, param)

xb = param(1);
yb = param(2);
zb = param(3);

range = sqrt((x(1)-xb)^2 + (x(2)-yb)^2 + (x(3)-zb)^2);
prof = x(3);
roll = x(4);
pitch = x(5);
yaw = x(6);
vlin = x(7:9);
vang = x(10:12);

y = [range;
prof;
roll;
pitch;
yaw;
vlin;
vang];

```

```

function [H] = rov_dhDvlPing_dx(x, param)

xb = param(1);
yb = param(2);
zb = param(3);

H = [(x(1)-xb)/sqrt((x(1)-xb)^2 + (x(2)-yb)^2 + (x(3)-zb)^2), ...
(x(2)-yb)/sqrt((x(1)-xb)^2 + (x(2)-yb)^2 + (x(3)-zb)^2), ...
(x(3)-zb)/sqrt((x(1)-xb)^2 + (x(2)-yb)^2 + (x(3)-zb)^2), zeros(1,12);
0, 0, 1, zeros(1,12);
zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3) zeros(3,3) zeros(3,3);
zeros(3,3) zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3) zeros(3,3);
zeros(3,3) zeros(3,3) zeros(3,3) eye(3) zeros(3,3)
];

```