



CONTROLE DE MANIPULADOR REDUNDANTE COM RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS APLICADO A CIRURGIAS ROBÓTICAS ASSISTIDAS

Fernando de Gusmão Coutinho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Fernando Cesar Lizarralde

Rio de Janeiro
Junho de 2015

CONTROLE DE MANIPULADOR REDUNDANTE COM RESTRIÇÕES
CINEMÁTICAS APLICADO A CIRURGIAS ROBÓTICAS ASSISTIDAS

Fernando de Gusmão Coutinho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

Prof. Fernando Pereira Duda, D.Sc.

Prof. Liu Hsu, Docteur D'Etat

Dr. Antonio Candea Leite , D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JUNHO DE 2015

Coutinho, Fernando de Gusmão

Controle de manipulador redundante com restrições cinemáticas aplicado a cirurgias robóticas assistidas/Fernando de Gusmão Coutinho. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015.

XV, 105 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Fernando Cesar Lizarralde

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 94 – 100.

1. Restrição Cinemática. 2. Manipuladores Robóticos.
3. Robótica Cirúrgica. I. Lizarralde, Fernando Cesar. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, pelo incentivo e apoio durante o mestrado e que, mesmo distantes, fizeram de tudo para se fazer presentes nos momentos em que eu não me contive e perdi a calma.

Um agradecimento especial ao meu orientador Fernando Lizarralde, pelo apoio, orientação e, principalmente, pela paciência durante o desenvolver deste trabalho. Parte de seus conselhos vão seguir comigo nos próximos passos de meu desenvolvimento.

Aos membros da banca, Liu, Antonio e Fernando, um muito obrigado pelas críticas e sugestões. Estas contribuíram para melhorar o trabalho final e acredito que contribuirão também para trabalhos futuros.

Agradeço aos amigos que fiz durante o mestrado, pelos momentos de apoio e estudo e, em especial, os amigos do Lead e Labcon, pois sem eles, provavelmente não teria conseguido chegar aonde cheguei.

Agradeço ao CNPq, a FAPERJ e a CAPES pelo suporte financeiro, com a bolsa e o apoio aos projetos desenvolvidos no laboratório e que de alguma forma contribuíram para realização do presente trabalho.

E finalmente, agradeço a Renata e meus amigos de Belém, por acreditarem em minhas capacidades, pelo incentivo e pelo apoio moral, fundamentais para a conclusão desta dissertação.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE DE MANIPULADOR REDUNDANTE COM RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS APLICADO A CIRURGIAS ROBÓTICAS ASSISTIDAS

Fernando de Gusmão Coutinho

Junho/2015

Orientador: Fernando Cesar Lizarralde

Programa: Engenharia Elétrica

Este trabalho trata do controle de manipuladores robóticos de cadeia cinemática aberta (série) cinematicamente restringidos utilizados para cirurgia minimamente invasivas assistidas roboticamente (*RAMIS*). Ao contrário de robôs cirúrgicos convencionais, o manipulador série não apresenta restrição de movimentos que garantam a inserção de instrumentos cirúrgicos no corpo humano. Por outro lado, sua estrutura é mais adaptável a diferentes procedimentos que possam ser realizados, aumentando-se a versatilidade. O ponto de inserção dos instrumentos cirúrgicos impõe uma restrição cinemática que, para robôs série, deve ser garantida via uma estratégia de controle. Encontra-se, então, um mapeamento a partir das velocidades do efetuador para as velocidades projetadas no espaço nulo da restrição e usa-se esse mapeamento para encontrar uma trajetória no espaço das juntas para o qual as restrições sejam satisfeitas. Através deste mapeamento, chamado de *Jacobiano Restrito*, impõe-se uma restrição cinemática na cadeia do manipulador garantindo a possibilidade de movimento do efetuador em todas as direções possíveis. O método é primeiramente validado em um ambiente simulado para então ser demonstrado em um robô *Motoman DIA10* de cinemática similar à de um robô cirúrgico de cadeia aberta convencional.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

REDUNDANT MANIPULATOR CONTROL WITH KINEMATIC CONSTRAINT FOR ROBOTIC ASSISTED SURGERY

Fernando de Gusmão Coutinho

June/2015

Advisor: Fernando Cesar Lizarralde

Department: Electrical Engineering

This work deals with kinematically restricted open chain robotic manipulators applied in robotically assisted minimally invasive surgery *RAMIS*. Unlike conventional surgical robots, the serial manipulator has no mechanical constraints to ensure the insertion of surgical instruments into the human body. Moreover, its structure is more adaptable to different procedures that can be performed by increasing the versatility and reducing the high costs of robotically assisted surgery. The insertion point of the surgical instruments is called remote center of motion (RCM) and the kinematic constraints at this point for serial robots must be projected on a virtual basis. We find then, a mapping from the end-effector velocities projected on the constraint null space and this mapping is used to find the trajectory in the joint space to which the constraints are satisfied. Through this mapping, called *Constrained Jacobian*, a kinematic constraint is imposed on the manipulator chain ensuring the possibility of full end-effector motion. The method is first validated in a simulated environment and then its efficiency is showed on a real robot with its kinematics similar to a surgical robot.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Abreviaturas	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivações	3
1.2 Revisão Bibliográfica	6
1.2.1 Restrição cinemática na <i>RAMIS</i>	7
1.2.2 Arquitetura Operacional da RAMIS	9
1.3 Objetivos	10
1.4 Metodologia	11
1.5 Organização do texto	12
2 Modelagem e Controle Cinemáticos de Manipuladores Robóticos	13
2.1 Configuração de um Corpo Rígido	13
2.1.1 Rotação de um Corpo Rígido	14
2.1.2 Transformação Homogênea de um Corpo Rígido	17
2.1.3 Enfoque Exponencial	20
2.2 Cinemática Direta de um Manipulador	22
2.2.1 Espaço Operacional	24
2.3 Cinemática Diferencial	24
2.3.1 Velocidade de Corpo Rígido	25
2.3.2 Jacobiano Geométrico	27
2.4 Controle Cinemático de Manipuladores	28
2.4.1 Erros do Sistema	29
2.4.2 Lei de Controle Cinemático	31
2.5 Manipuladores Redundantes	33
2.6 Conclusão	33

3	Controle de Manipuladores Restringidos Cinematicamente	34
3.1	Controle Cinemático de Manipuladores Restringidos	38
3.2	Restrição Unidirecional (eixo x_r) em um Manipulador de 8- <i>GDL</i> . . .	39
3.3	Restrição Bidirecional (eixos x_r e z_r) em um Manipulador de 8- <i>GDL</i> .	41
3.4	Ponto de Incisão em Movimento	44
3.5	Manipulabilidade	45
3.6	Singularidades Cinemáticas	50
3.6.1	Método Damped Least-Squares (DLS)	50
3.6.2	Método da Inversa Filtrada	52
3.7	Conclusão	53
4	Simulações e Experimentos	54
4.1	Simulações	55
4.1.1	Movimentos restringidos em uma direção	56
4.1.2	Movimentos restringidos em duas direções	61
4.2	Resultados Experimentais	74
4.2.1	Comparação entre métodos para evitar singularidades	75
4.2.2	Restrição bidirecional	80
4.2.3	Restrição bidirecional com o ponto de incisão restrito a uma trajetória	85
4.3	Conclusão	90
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	91
5.1	Conclusões	91
5.2	Proposta de Trabalhos Futuros	92
	Referências Bibliográficas	94
A	Conceitos matemáticos	101
A.1	Operador produto vetorial	101
A.2	Quatérnios	103
A.3	Decomposição em valores singulares	105

Lista de Figuras

1.1	Sistemas robóticos para aplicações (a) Domésticas (Roomba, cortesia iRobot), (b) Médicas (Da Vinci, costesia Intuitive Surgical, Inc.), (c) Militares (DIANE, robô EOD desenvolvido pela COPPE-UFRJ) e (d) Industriais (Robôs em uma industria automobilistica - DailyInbox).	1
1.2	(a) Primeiro sistema robótico para cirurgias estereotáxicas (cortesia <i>allaboutroboticsurgery.com</i>) e (b) ProBot (cortesia <i>Imperial College London</i>).	4
1.3	Injeção de gás carbônico durante a MIS.	5
1.4	Sistemas robóticos utilizados para cirurgias de invasão mínima: (a) Da Vinci; (b) ZEUS; (c) AESOP; (d) Neuromate.	6
1.5	Manipuladores mestres utilizado em robótica cirúrgica.	10
1.6	Inserção das ferramentas no corpo humano expressando o RCM pelo sistema de coordenadas \mathcal{F}_r (Mayer et al. 2004).	10
2.1	Descrição dos Elos e Juntas de um Manipulador.	13
2.2	Posição entre sistemas de coordenadas.	14
2.3	Orientação entre sistemas de coordenadas.	16
2.4	Sistemas de coordenadas para transformações de corpo rígido (Murray et al. (1994)).	18
2.5	(a) Junta de rotação e (b) junta prismática	20
2.6	Representação da cadeia cinemática de um manipulador	23
2.7	Malha de controle de velocidade	28
2.8	Representação dos sistemas de coordenadas desejado ${}^d\mathcal{F}_e$ e atual \mathcal{F}_e (Cortesia da Yaskawa Motoman Inc.).	31
3.1	Esquema de robô cirúrgico e a inserção do <i>shaft</i> .	34
3.2	Esquema de robô cirúrgico e a inserção do <i>shaft</i> .	35
3.3	Malha de controle cinemático do manipulador com restrição.	39
3.4	Robô redundante com elo restringido em uma única direção.	41
3.5	Esquema alternativo de punho para o <i>shaft</i> inserido.	44

3.6	Elipsóide de manipulabilidade do efetuador, ilustrado para o caso planar de dois GDLs.	47
3.7	Manipulabilidade do Jacobiano restrito para o caso da restrição unidirecional.	48
3.8	Manipulabilidade do Jacobiano restrito para o caso da restrição bilateral com punho zx	49
3.9	Manipulabilidade do Jacobiano restrito para o caso da restrição bilateral com punho zy	50
4.1	Detalhes do braço direito do <i>Motoman DIA10</i>	54
4.2	Manipulador de oito graus de liberdade na configuração zero.	56
4.3	Detalhes da posição inicial do manipulador com a restrição	57
4.4	Velocidades na restrição. Legenda: $v_x^r (-)$, $v_z^r (-)$	57
4.5	(a) Erro de posição. (b) Erro de orientação.	58
4.6	(a) Índice de manipulabilidade dos Jacobianos. (b) Valores de l_a e q_7	59
4.7	Velocidade das juntas do manipulador.	60
4.8	Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.	60
4.9	Manipulador de 8-GDLs na posição inicial de operação $p_{0e}=[19.4 \ 101.9 \ 95.8]^T$ cm com restrição em duas direções.	61
4.10	(a) Erro de posição. (b) Erro de orientação.	62
4.11	Velocidades na restrição. Legenda: $v_x^r (-)$, $v_z^r (-)$	63
4.12	(a) Índice de manipulabilidade dos Jacobianos. (b) Valores de l_a e q_7	63
4.13	Velocidade das juntas do manipulador.	64
4.14	Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.	64
4.15	(a) Erro de posição. (b) Erro de orientação.	66
4.16	(a) Índice de manipulabilidade dos Jacobianos. (b) Valores de l_a e q_7	67
4.17	Velocidades na restrição. Legenda: $v_x^r (-)$, $v_z^r (-)$	68
4.18	Velocidade das juntas do manipulador.	68
4.19	Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.	69
4.20	(a) Erro de posição. (b) Erro de orientação.	71
4.21	Velocidades na restrição. Legenda: $v_x^r (-)$, $v_z^r (-)$	72
4.22	(a) Manipulabilidade dos Jacobianos. (b) Valores de l_a e q_7	72
4.23	Velocidade das juntas do manipulador.	73
4.24	Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.	73
4.25	Diagrama esquemático da montagem experimental.	74
4.26	Montagem experimental do robô e a restrição.	75
4.27	Velocidade ao longo dos eixos x e y no ponto de incisão.	76
4.28	Comparação entre os métodos $(J_{0e}^r)^{-1}$, <i>DLS</i> e <i>FI</i>	77
4.29	Erros de posição e orientação no efetuador.	78

4.30	Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação. Legenda: $(J_{0e}^r)^{-1} (-)$, DLS $(-)$, FI $(-)$	79
4.31	Velocidade nos eixos x e z no ponto de incisão e norma de velocidades das juntas	80
4.32	Imagens sobrepostas do manipulador restringido.	81
4.33	Índice de manipulabilidade do Jacobiano restrito.	81
4.34	Posição e orientação no efetuador em coordenadas inerciais.	82
4.35	Norma do erro de posição e orientação do efetuador.	83
4.36	Velocidade das juntas do manipulador.	84
4.37	Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.	84
4.38	Velocidade nos eixos x e z no ponto de incisão.	85
4.39	Índice de manipulabilidade do Jacobiano restrito.	86
4.40	Posição e orientação no efetuador em coordenadas inerciais.	87
4.41	(a) Norma do erro de posição do efetuador. (b) Norma do erro de orientação do efetuador.	88
4.42	Velocidade das juntas do manipulador.	89
4.43	Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.	89
A.1	Rotação em torno de um vetor	103

Lista de Tabelas

4.1	Algoritmo do esquema de controle de um manipulador de 8-GDLs com restrição cinemática.	55
4.2	Parâmetros de controle utilizados nas simulações.	55
4.3	Parâmetros de controle utilizados nos experimentos.	75

Lista de Símbolos

CO_2	Dióxido de carbono, p. 4
H	Matriz que define a restrição, p. 36
J_{0e}^B	Jacobiano do manipulador, p. 28
J_{0i}^B	Jacobiano parcial do manipulador, p. 27
J_{0e}^r	Jacobiano restrito, p. 38
K_o	Ganho de orientação, p. 32
K_p	Ganho de posição, p. 32
Q	Representação do quatérnio unitário, p. 16
Q_d	Orientação desejada em quatérnio, p. 30
R_Δ	Matriz de erro de orientação, p. 30
S_l	Inversa a esquerda da matriz de atualização, p. 53
S_r	Inversa a direita da matriz de atualização, p. 53
Γ	Matriz de ganho de atualização, p. 53
Θ	Matriz de atualização do método da filtrada inversa, p. 53
ϵ	Parte vetorial do quatérnio unitário, p. 16
η	Parte escalar do quatérnio unitário, p. 16
κ	Fator de amortecimento do DLS, p. 52
ω	Velocidade angular, p. 22
\bar{u}	Sinal de controle cartesiano, p. 29
\bar{u}_o	Sinal de controle cartesiano para orientação, p. 29

\bar{u}_p	Sinal de controle cartesiano para posição, p. 29
θ	Vetor de ângulos das juntas do manipulador, p. 24
$\tilde{\epsilon}$	Parte vetorial do erro de quatérnio, p. 30
$\tilde{\eta}$	Parte escalar do erro de quatérnio, p. 30
ξ	Twist, p. 22
e_p^B	Erro de posição do efetuador, p. 29
e_o	Erro de orientação do efetuador, p. 29
e_q	Erro de quatérnio, p. 30
u	Sinal de controle de velocidade das juntas, p. 29
v	Velocidade linear, p. 22
w	Índice de manipulabilidade do manipulador, p. 47
w_r	Índice de manipulabilidade do Jacobiano restrito, p. 50
$(J_{0e}^B)^\dagger$	Pseudo-inversa do Jacobiano do manipulador, p. 33
${}^dR_{0e}$	Matriz de orientação desejada, p. 30
${}^d\omega_{0e}$	Referência de velocidade angular do efetuador, p. 31
${}^dv_{0r}$	Referência de velocidade linear na restrição, p. 45
${}^dp_{0e}$	Posição desejada do efetuador, p. 30
${}^dv_{0e}$	Referência de velocidade linear do efetuador, p. 30

Lista de Abreviaturas

DLS	Damped Least Square, p. 50
FDA	Food and Drug Administration, p. 4
FI	Filtered Inverse, p. 52
GDLs	Graus de Liberdade, p. 8
MIS	Minimally Invasive Surgery, p. 4
RAMIS	Robotics-Assisted Minimally Invasive Surgery, p. 2
RCM	Remote Center of Motion, p. 2, 8
SRI	Stanford Research Institut, p. 3

Capítulo 1

Introdução

A utilização de robôs em indústrias é cada vez mais frequente, podendo ser uma alternativa a um operário em tarefas repetitivas, perigosas ou que exijam mais precisão, velocidade ou força (Hägele et al. 2008, Trevelyan et al. 2008). Além disso, a robótica também tem se mostrado cada vez mais presente no dia a dia do ser humano, seja por meio de robôs domésticos ou robôs de auxílio ao trabalho humano em diversas outras áreas (Prassler & Kosuge 2008). Alguns exemplos destes robôs são mostrados na Figura 1.1.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.1: Sistemas robóticos para aplicações (a) Domésticas (Roomba, cortesia iRobot), (b) Médicas (Da Vinci, cortesia Intuitive Surgical, Inc.), (c) Militares (DIANE, robô EOD desenvolvido pela COPPE-UFRJ) e (d) Industriais (Robôs em uma industria automobilística - DailyInbox).

Comumente, quando se trata de manipuladores robóticos, o objetivo principal é controlar a posição e orientação do efetuador do robô, dada uma trajetória gerada por um algoritmo de planejamento ou definida por um dispositivo háptico. Esta trajetória define o movimento do efetuador para a realização de alguma tarefa ou um comportamento desejado em relação ao espaço de tarefas. Neste caso, um problema bastante discutido é a realização de tarefas de rastreamento de trajetórias por manipuladores com restrições cinemáticas.

Um dos casos mais desafiadores de cadeia cinemática restringida é em cirurgias minimamente invasivas (Robotics-assisted Minimally Invasive Surgery - RAMIS) . As restrições impostas pelo ponto de entrada no corpo humano exigem velocidades laterais nulas para que os traumatismos na região sejam minimizados. Estas restrições, em geral, são denominadas Pontos de Movimentação Remota (do inglês, Remote Center of Motion - RCM).

No caso das cirurgias minimamente invasivas, ao invés de manusear os instrumentos da cirurgia diretamente, o cirurgião pode ser auxiliado pelo robô de maneira a aumentar a confiabilidade do procedimento ou até mesmo controlar o robô através de um ambiente de teleoperação, permitindo que algumas tarefas, como a restrição cinemática ou o amortecimento de movimentos bruscos que possam ser realizados por um cirurgião, sejam tratados por um computador. A teleoperação ainda permite que o procedimento cirúrgico seja realizado sem a presença do cirurgião, que poderia estar em qualquer outro lugar do mundo controlando o robô cirurgião, permitindo que hospitais realizem procedimentos específicos sem de fato dispor de um especialista (Avazpour et al. 2015).

Além disso, de forma geral, instrumentos autônomos (em configurações previamente conhecidas) podem substituir ferramentas tradicionalmente manuseadas por cirurgiões, para executar determinadas tarefas (como afastamento de costelas) com muito mais suavidade ou realizar movimentos mais precisos através de um controlador com realimentação. Desta forma, as cirurgias robóticas assistidas que utilizam técnicas minimamente invasivas têm como objetivo reduzir ou eliminar o trauma do tecido tradicionalmente associados com a cirurgia convencional, inclusive diminuindo o tempo de treinamento exigido por cirurgiões (Dargahi et al. 2012).

Atualmente, as cirurgias robóticas são realizadas com manipuladores restringidos mecanicamente através de elos paralelos (Taylor 2008). Manipuladores série têm arquitetura simplificada e por isso seu uso diminuiria os custos operacionais de uma cirurgia. Para que estes manipuladores possam atuar em cirurgias assistidas roboticamente, deve-se adicionar uma restrição a sua cadeia cinemática e isto é feito de maneira virtual através de uma estratégia de controle (Marinho et al. 2014).

Nesta dissertação propõe-se um método onde a restrição é tratada a nível cinemático e satisfeita por um mapeamento da velocidade das juntas para a velocidade do efetuador, sujeitando o espaço das juntas a restrição imposta. Calcula-se um sinal de controle para as velocidades das juntas que garante que as restrições sejam satisfeitas, permitindo, assim, que os esquemas de controles realizados no espaço de tarefas possa ser aplicado normalmente.

Apesar de, para a maioria dos procedimentos cirúrgicos minimamente invasivos, serem exigidas velocidades laterais nulas, existem operações que apresentariam menos danos caso o ponto de incisão pudesse acompanhar uma trajetória ou os movimentos que o tecido perfurado efetua. Exemplos disso podem ser observados em procedimentos afetados pela respiração do paciente ou pelos batimentos cardíacos, ou ainda em cirurgias oculares em que o olho não permanece estático durante a operação (Wei et al. 2009).

1.1 Motivações

O interesse no desenvolvimento de plataformas de cirurgia robótica evoluiu a partir da necessidade de melhorar a precisão das técnicas cirúrgicas. Ao longo dos últimos 30 anos, diversas plataformas robóticas foram introduzidas para a melhoria de procedimentos cirúrgicos específicos. Durante este tempo, diversos trabalhos foram desenvolvidos prevendo o potencial que as plataformas de robótica cirúrgica apresentavam, não somente na maior confiabilidade dos procedimentos realizados, como também no ambiente de teleoperação compartilhada, onde o cirurgião não precisava necessariamente estar perto do paciente, nos ambientes virtuais de imersão e na realimentação da força exercida pela ferramenta.

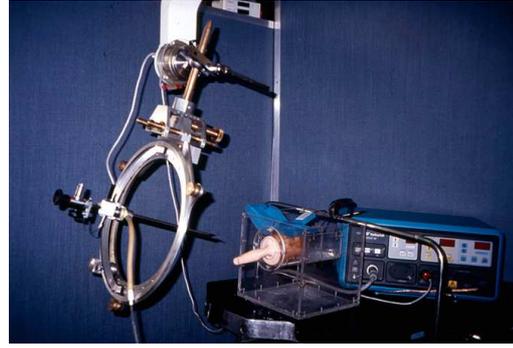
Os primeiros resultados em robótica cirúrgica foram publicados em (Kwoh et al. 1988), onde um robô *PUMA 200*¹ ligado a um tomógrafo e com uma ponta de prova ligada ao seu efetuador realizou a biópsia de um tumor cerebral, conforme ilustrado na Figura 1.2(a). Os resultados apresentados foram mais rápidos e precisos que em uma neurocirurgia estereotáxica realizada por humanos, o que significa uma menor chance de, durante uma cirurgia deste tipo, o paciente sofrer danos colaterais. Mesmo com os resultados favoráveis, o procedimento não foi considerado para a prática em grande escala por motivos de insegurança da classe médica da época.

No início de 1990, alguns dos cientistas da equipe da NASA-Ames ingressaram no Instituto de Pesquisas de Stanford (SRI). Trabalhando no SRI com outros pesquisadores de robótica e especialistas de realidade virtual, estes cientistas desenvolveram uma tele-manipulador para cirurgia da mão. Um dos principais

¹Robô projetado especialmente para o trabalho delicado e preciso, mas robusto o suficiente para fornecer uma trajetória bastante estável para os padrões da época.



(a)



(b)

Figura 1.2: (a) Primeiro sistema robótico para cirurgias estereotáxicas (cortesia *allaboutroboticsurgery.com*) e (b) ProBot (cortesia *Imperial College London*).

objetivos do projeto era dar ao cirurgião a sensação de operar diretamente sobre o paciente, e não do outro lado da sala. Enquanto estes robôs estavam sendo desenvolvidos, cirurgiões gerais e endoscopistas se juntaram à equipe de desenvolvimento e perceberam o potencial do sistema para melhoria das limitações impostas a cirurgia laparoscópica convencional (Lanfranco et al. 2004).

Na década de 90, a *Integrated Surgical Supplies Ltd.* começou a desenvolver o *RoboDoc*, um sistema robótico projetado para ser usado em ortopedia, na substituição completa do quadril com uma maior precisão (Bauer et al. 1999). O *RoboDoc* foi o primeiro robô cirúrgico aprovado pela *FDA* (Food and Drug Administration).

Utilizando o robô *ProBot*², vide Figura 1.2(b), a primeira aplicação robótica em cirurgias minimamente invasivas foi realizada por Davies em (Davies et al. 1989) em procedimentos de prostatectomia. O ProBot foi desenvolvido para executar as tarefas repetitivas de corte e cauterização deste tipo de procedimento, aliviando o cirurgião de grande parte do ônus da cirurgia. O robô foi primeiramente testado em laboratório e depois foi utilizado para o procedimento em seres humanos, provando ser capaz de executar a ressecção da próstata.

Dentre as técnicas de cirurgias minimamente invasivas (MIS), a mais comum é a laparoscopia. A laparoscopia é chamada assim por realizar apenas pequenas incisões entre 0,5 e 1,0 cm para observar o interior da cavidade abdominal através de lentes potentes, micro-câmeras e monitores de vídeo. Na cirurgia laparoscópica, o abdômen do paciente é inflado com dióxido de carbono (CO_2) por meio de uma agulha para levantar a parede abdominal a uma distância segura dos órgãos, de forma que o acesso a área de operação seja facilitado. Além disso, mais três furos

²Robô desenvolvido pelo Colégio Imperial de Londres para o campo da urologia.

pequenos são feitos para a incisão da câmera e dos instrumentos cirúrgicos (Kang 2002), conforme ilustrado na Figura 1.3.

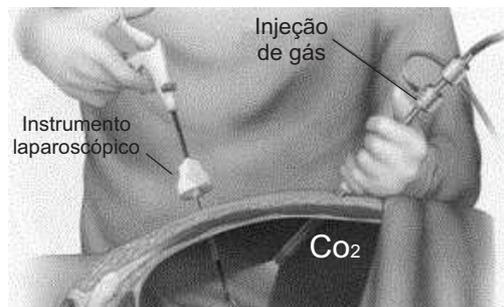


Figura 1.3: Injeção de gás carbônico durante a MIS.

Somente na última década as técnicas de cirurgia robótica alcançaram níveis de maturidade suficiente para permitir que fossem aplicadas na prática com segurança. Como resultado de extensas pesquisas acadêmicas e industriais, a robótica cirúrgica pôde então ser realizada no ambiente clínico (Lum et al. 2006). Alguns sistemas robóticos para cirurgias minimamente invasivas foram disponibilizados comercialmente, entre eles o *da Vinci* da *Intuitive Surgical*, o *ZEUS* e o *AESOP*, ambos da *Computer Motion* e o *Neuromate* da *Renishaw*, observado na Figura 1.4.

Após 2003, a *Computer Motion* se fundiu a *Intuitive Surgical*, levando o robô *da Vinci* a liderança do mercado de laparoscopia, sendo utilizado para cirurgias em humanos nos Estados Unidos e Europa. Em 2008, o Brasil contava com apenas um robô cirúrgico. Atualmente, o número aumentou para sete e estima-se que, nos próximos dois anos, esse volume cresça ainda mais.

Com o objetivo de minimizar o desgaste do ponto de incisão, os manipuladores para cirurgia minimamente invasiva disponíveis comercialmente tem uma restrição mecânica inerente a sua cadeia cinemática, limitada por um *trocarte*³. A restrição imposta na cadeia cinemática do robô cirurgião impede que haja movimentos laterais no RCM, de maneira que o trocarte não cause mais traumatismo na região.

Manipuladores de cadeia aberta têm a vantagem de ser mais adaptáveis ao ambiente cirúrgico, oferecem a vantagem de funcionar tanto para cirurgias minimamente invasivas como para cirurgias convencionais de maiores incisões (Aghakhani et al. 2013). Além disso a restrição rígida dos robôs cirúrgicos disponíveis comercialmente pode ser desvantajosa para cirurgia minimamente invasiva em que o RCM deva acompanhar movimentos leves do corpo do paciente,

³Instrumento utilizado normalmente em punções abdominais que pode ser dividido em duas partes. A parte externa ao abdômen possui um canal para a introdução dos instrumentos com um sistema valvulado para evitar o escape do CO_2 . A parte interna é constituída de material cortante para atravessar a parede abdominal durante sua introdução.

como em cirurgias oculares, cirurgias cardíacas ou cirurgia realizadas na coluna vertebral, em que a respiração pode movimentar o ponto de incisão na pele.

Outra desvantagem dos robôs cirúrgicos atuais é de não apresentarem controle direto de posição, isto é, o laço de controle de posição dos efetadores é feito a partir da visão do cirurgião, não apresentando possibilidades de realimentação de força quando o instrumento realiza contato com órgãos internos ao paciente.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.4: Sistemas robóticos utilizados para cirurgias de invasão mínima: (a) Da Vinci; (b) ZEUS; (c) AESOP; (d) Neuromate.

1.2 Revisão Bibliográfica

Nesta seção, será apresentada uma revisão bibliográfica sobre o tema de cirurgias robóticas e os principais desafios relacionados à restrição cinemática imposta ao ponto de inserção. Será apresentado também um breve estudo sobre como as melhorias propostas para arquitetura operacional da robótica cirúrgica minimamente invasiva vem se desenvolvendo nos últimos anos.

1.2.1 Restrição cinemática na *RAMIS*

A cadeia cinemática de um sistema robótico é dita restringida quando esta deve satisfazer uma equação de restrição que relacione a posição ou velocidade do manipulador a um referencial inercial ou móvel.

Inicialmente, as restrições eram tratadas como obstáculos virtuais seguindo a abordagem de Maciejewski & Klein (1985), onde realizou-se um método de desvio de obstáculos que não necessitava da posição inicial e do destino final do efetuador (meios difundidos na época como solução para a problemática de desvio de obstáculos). A abordagem apresentada determinava os ângulos das juntas de um manipulador sob uma restrição dinâmica sendo definidos dois objetivos por vezes conflitantes.

O objetivo principal era que o efetuador de um robô de n graus de liberdade seguisse uma velocidade de referência e o objetivo secundário era o desvio do obstáculo, para o qual a abordagem utilizada consistia na identificação do ponto da cadeia cinemática mais próximo do obstáculo para cada instante de tempo e atribuir a este ponto uma velocidade de referência em uma direção oposta a aproximação do ponto à superfície do obstáculo. Portanto, o objetivo principal e o objetivo secundário são descritos por:

$$J_e \dot{\theta} = \dot{x}_e \quad (1.1)$$

$$J_o \dot{\theta} = \dot{x}_o, \quad (1.2)$$

onde $\dot{\theta} \in \mathbb{R}^n$ são as velocidades das juntas do robô, $\dot{x}_e \in \mathbb{R}^6$ é a velocidade do efetuador, $\dot{x}_o \in \mathbb{R}^6$ é a velocidade especificada ao ponto da cadeia que deve desviar do obstáculo, $J_e \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ é o Jacobiano do efetuador e $J_o \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ é o Jacobiano parcial do ponto de desvio do obstáculo.

O método consistia em empilhar os Jacobianos como em:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{x}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_e \\ J_o \end{bmatrix} \dot{q}, \quad (1.3)$$

e, caso a matriz resultante não tenha posto n , utilizar a inversa generalizada (Boullion & Odell 1972) e tratar a velocidade do efetuador e a velocidade de desvio do obstáculo de maneiras diferentes. Primeiramente, satisfaz-se o comando de velocidade do efetuador e posteriormente utiliza-se a redundância do sistema para se criar um comando de velocidade de desvio do obstáculo. A matriz composta pelo Jacobiano parcial do ponto de desvio do obstáculo e do operador de projeção do efetuador, $J_o(I - J_e^\dagger J_e)$ representa os graus de liberdade disponíveis para mover o ponto próximo ao obstáculo enquanto não se transmite o movimento ao efetuador.

Para que se pudesse controlar com eficácia a influência que o desvio de obstáculos teria no movimento do manipulador, optou-se por utilizar a solução:

$$\dot{\theta} = J_e^\dagger \dot{x}_e + \alpha_\eta(d)[J_o(I - J_e^\dagger J_e)]^\dagger(\alpha_0(d)\dot{x}_0 - J_0 J_e^\dagger \dot{x}_e), \quad (1.4)$$

onde $J_e^\dagger \in \mathbb{R}^{n \times 6}$ é a pseudo-inversa a direita de J_e , d é o módulo da distância entre a superfície do obstáculo e o ponto do manipulador mais próximo desta superfície, $\alpha_0(d) > 0$ é a magnitude da velocidade da tarefa secundária, $\alpha_\eta(d) > 0$ é o ganho que define a magnitude da solução homogênea encontrada a ser acrescida.

Uma metodologia de controle para calcular a trajetória ótima dada uma referência de movimento desejada foi desenvolvida em (Fundá et al. 1993, 1996), impondo as restrições existentes pela técnica do Jacobiano estendido (Baillieul 1985), i.e., agrega-se ao Jacobiano do manipulador, a matriz que mapeia a velocidade das juntas à velocidade do ponto restringido. A trajetória é otimizada através do uso de mínimos quadrados ponderados, cujos pesos são escolhidos após uma análise da geometria do movimento de algumas tarefas específicas e restrições impostas ao robô no espaço das juntas.

Em Locke & Patel (2007), o controle Cartesiano de um robô PA10-7C Mitsubishi para a o posicionamento ótimo do ponto de incisão (RCM) foi implementado utilizando a abordagem de Jacobiano estendido, no entanto, as expressões para a cinemática diferencial do trocarte não foram apresentadas.

O conceito de utilização de prioridade entre tarefas também foi usado em (Azimian et al. 2010, Azimian 2012), onde o Jacobiano estendido foi utilizado para calcular o movimento restringido em relação a geometria do manipulador e do trocarte. Definindo a tarefa secundária como o movimento do efetuador e a prioritária pelo mapeamento das velocidades laterais do ponto de inserção ao espaço das juntas. Essa relação foi deduzida pela projeção da matriz Jacobiana da tarefa na restrição.

O robôs *AESOP* e o *Da Vinci* foram desenvolvidos para controlar os movimentos próximos ao ponto de incisão passivamente através de restrições mecânicas, respectivamente mecanismos esféricos ou de barras paralelas (*4-bar linkage*), cujo centro do movimento coincide com o ponto de inserção desejado (Azimian et al. 2010). Em Ortmaier & Hirzinger (2000) observa-se que, para a cinemática de um manipulador redundante de 7-GDLs, considerou-se as juntas cinco e seis passivas, impondo-se uma restrição geométrica e garantindo que nenhuma força seria exercida nas laterais do ponto de inserção. Como resultado disso, somente se permitiu ao manipulador 4-GDLs dentro do abdômen. A posição do *trocarte* foi estimada algebricamente através da cinemática do manipulador que insere a ferramenta a ser utilizada no orifício.

Um conceito de realimentação háptica foi proposto em (Li et al. 2005, Kapoor et al. 2006) através de um sistema que estima uma força virtual dependendo do posicionamento do dispositivo háptico. Regiões de segurança são determinadas para aumentar a segurança das operações. A partir do momento que as ferramentas ou o RCM se afastam da região segura de operação, o operador presencia uma resistência física no dispositivo háptico.

Em Mayer et al. (2004), foi implementado um protótipo de robô cirúrgico de código e características abertas capaz de realizar o controle da postura do efetuador com realimentação de força utilizando uma ferramenta háptica.

Aghakhani et al. (2013) propôs uma formalização do modelo da restrição do RCM, exigindo pouco conhecimento sobre a geometria do trocarte e permitindo um controle total no posicionamento dos instrumentos cirúrgicos dentro do corpo do paciente. Em Marinho et al. (2014) a cinemática baseada em quatérnios duais foi utilizada para controlar a posição do RCM enquanto o efetuador teve sua trajetória gerada por cirurgiões.

1.2.2 Arquitetura Operacional da RAMIS

A cirurgia robótica minimamente invasiva encontrou sua arquitetura atual após extensivos testes e 20 anos de pesquisa. Uma plataforma de comunicação foi desenvolvida por Mitsubishi et al. (1995) em que o médico cirurgião não precisava ficar em contato direto com o robô e o paciente, podendo assim fazer a cirurgia de outro lugar utilizando um sistema de visão e dispondo os eixos das ferramentas no mesmo ponto focal do microscópio. Informação de força em múltiplos eixos foram adicionados a arquitetura das ferramentas para que os obstáculos que impusessem restrições, os contatos e a detecção de força excessiva fossem reconhecidos. O aparelho mestre de controle, dispunha de uma realimentação de força, um sistema de aquisição de informações visuais e, tal como o manipulador escravo, dispunha de um espaço de trabalho pequeno e limitado. Somente as forças translacionais necessitaram ser transmitidas ao operador, pois a ponta das ferramentas fora considerada como um ponto fixo. A semelhança entre o manipulador mestre utilizado em Mitsubishi et al. (1995) com o manipulador utilizado nas cirurgias robóticas atuais pode ser observado na Figura 1.5.

Em (Wang et al. 2006), foi desenvolvido um sistema para a execução de procedimentos cardíacos minimamente invasivos. O sistema incluía um par de instrumentos cirúrgicos acoplados a um par de braços robóticos, um para segurar o tecido cardíaco e outro para suturá-lo. Desta vez o ponto fixo era o ponto de incidência das ferramentas. O aperfeiçoamento das cirurgias robóticas avançou com a melhoria de ambientes virtuais que proporcionavam a telepresença do cirurgião. Os ambientes

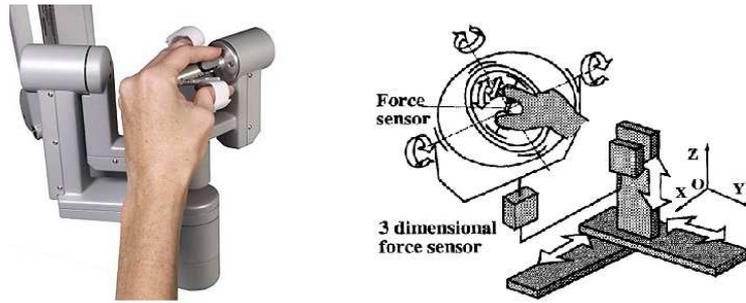


Figura 1.5: Manipuladores mestres utilizado em robótica cirúrgica.

virtuais foram primeiramente utilizados na fase de treinamento em cirurgias oculares (Sagar et al. 1994) e laparoscópicas (Tendick et al. 1998). Eventualmente o uso dos ambientes virtuais foram inseridos em procedimentos (Bro-Nielsen & Cotin 1996, Bro-Nielsen et al. 1996) e cirurgias robóticas laparoscópicas (Tendick & Cavusoglu 1997), criando um ambiente virtual do interior do paciente e reduzindo o efeito de fulcro⁴.

1.3 Objetivos

O objetivo deste trabalho é controlar a postura do efetuador, representado pelo sistema de coordenadas \mathcal{F}_e , satisfazendo uma restrição cinemática imposta a um ponto deste manipulador, denominado ponto de inserção (RCM) e representado pelo sistema de coordenadas \mathcal{F}_r . A Figura 1.6 ilustra a cirurgia minimamente invasiva, onde ocorre a inserção do efetuador do manipulador no corpo do paciente.

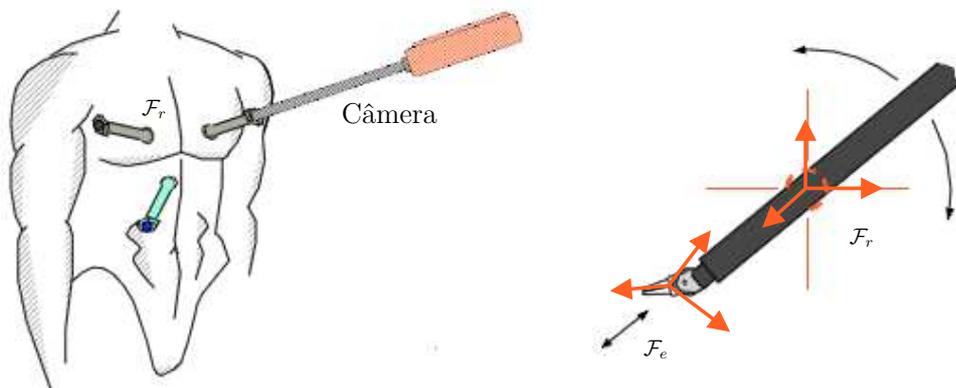


Figura 1.6: Inserção das ferramentas no corpo humano expressando o RCM pelo sistema de coordenadas \mathcal{F}_r (Mayer et al. 2004).

⁴Efeito de alavanca no ponto de incisão, faz com que a ponta do instrumento mova na direção oposta a da mão do cirurgião.

A trajetória de referência deve ser realizada pelo efetuador de forma a garantir que a restrição seja satisfeita, garantindo-se a estabilidade e a convergência do algoritmo. A estrutura de controle deve ser realizada de maneira a permitir ao menos 6-GDLs de movimento ao efetuador. O método será primeiramente ilustrado através de simulações e então testes experimentais serão realizados em um manipulador redundante.

1.4 Metodologia

Apesar dos robôs cirúrgicos atuais terem, habitualmente, cinemática restringida mecanicamente por elos paralelos, um manipulador serial poderia ser utilizados para procedimentos diferentes com uma menor mudança na configuração do ambiente cirúrgico, diminuindo custos e, provavelmente, aumentando a aceitação de sistemas robóticos em ambientes médicos (Marinho et al. 2014). Robôs de estrutura serial não apresentam nenhuma restrição cinemática em sua cadeia. Estuda-se então, maneiras de respeitar a restrição de um trocarte de forma que o movimento do efetuador seja projetado no ponto pivotante de incisão.

O manipulador utilizado para cirurgias robóticas tem 6-GDLs e na sua extremidade fixa-se um *shaft*. O *shaft* é uma haste metálica com uma ferramenta na sua extremidade e é a parte do sistema cirúrgico que é inserida no corpo humano através do trocarte. O *shaft* normalmente é restringido em duas direções que formam o plano do tecido em que este foi inserido.

O sistema discutido nesta dissertação consiste de um manipulador série redundante para o qual deseja-se controlar a postura do efetuador e o movimento de um ponto da cadeia cinemática deste manipulador, denominado RCM. O RCM é o ponto de um dos elos do manipulador que representa o ponto em que o *shaft* está em contato com o trocarte.

A restrição cinemática do RCM é resolvida primeiramente redefinindo-se as variáveis de velocidade na restrição a serem mapeadas a partir da velocidade das juntas. O novo vetor de velocidade é definido em função da velocidade desejada do efetuador e é projetado no espaço nulo da restrição, de forma que uma redução de dimensionalidade seja imposta às novas velocidades.

As velocidades definem o movimento do efetuador e do elo restringido e a nova estrutura garante que a restrição imposta pelo RCM seja respeitada. Em seguida, encontra-se uma matriz, chamada aqui de Jacobiano restrito, que mapeia as novas variáveis de velocidade nas velocidades das juntas.

A vantagem do método é que, definindo a lei de controle no sistema de coordenadas do efetuador, permite-se aplicar esquemas de controle no espaço operacional respeitando-se a restrição. Esquemas de controle no espaço do efetuador

foram estudados por diversos autores, onde o espaço do efetuador é decomposto em direções que exigem controle robusto e direções que requerem controle complacente (Natale 2003, Mason 1981, Craig & Raibert 1979, Abbati-Marescotti et al. 1990, Bruyninckx & De Schutter 1996, Lipkin & Duffy 1988) utilizando o espaço nulo do Jacobiano aumentado. Além disso, pode-se definir um movimento à restrição, de forma que ela acompanhe uma trajetória dada ou medida.

Resultados anteriores foram apresentados em (Pham et al. 2014, Coutinho et al. 2014), onde utilizou-se o Jacobiano restrito para mapear a velocidade do efetuador às velocidades das juntas levando-se em conta uma restrição imposta em um ponto (RCM) da cadeia cinemática de um manipulador redundante. As restrições do manipulador foram então discutidas e foram apresentados resultados em que um ponto da cadeia cinemática do manipulador deveria permanecer estático enquanto o efetuador realizava uma tarefa.

Nesta dissertação, apresenta-se um caso generalizado, mapeando-se a velocidade do efetuador às velocidades das juntas através do Jacobiano restrito. O manipulador é submetido a uma restrição em um ponto de sua cadeia cinemática e são estudados o caso em que a velocidade deve permanecer nula e o caso em que o RCM deve seguir uma trajetória fixa. Além disso, apresenta-se um breve estudo sobre a manipulabilidade do Jacobiano restrito e uma comparação entre dois métodos para lidar com o problema de singularidades cinemáticas.

1.5 Organização do texto

O trabalho desenvolvido é organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2 - são apresentados os fundamentos teóricos básicos sobre a cinemática e o controle cinemático de manipuladores robóticos de cadeia aberta.
- Capítulo 3 - é desenvolvido o método de controle de postura do efetuador adicionando a restrição cinemática através do cálculo do Jacobiano restrito para diferentes tipos de configurações do punho do manipulador
- Capítulo 4 - são apresentados os resultados obtidos através de simulações e os ensaios experimentais realizados em um robô redundante *Motoman DIA10*.
- Capítulo 5 - são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido e a metodologia proposta. Apresenta-se também, algumas propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Modelagem e Controle Cinemáticos de Manipuladores Robóticos

Neste capítulo considera-se a cinemática direta e diferencial de um manipulador robótico rígido. Um manipulador robótico rígido consiste em uma cadeia cinemática composta por um conjunto de corpos rígidos (elos) que são conectados entre si por juntas prismáticas ou de rotação (Figura 2.1).

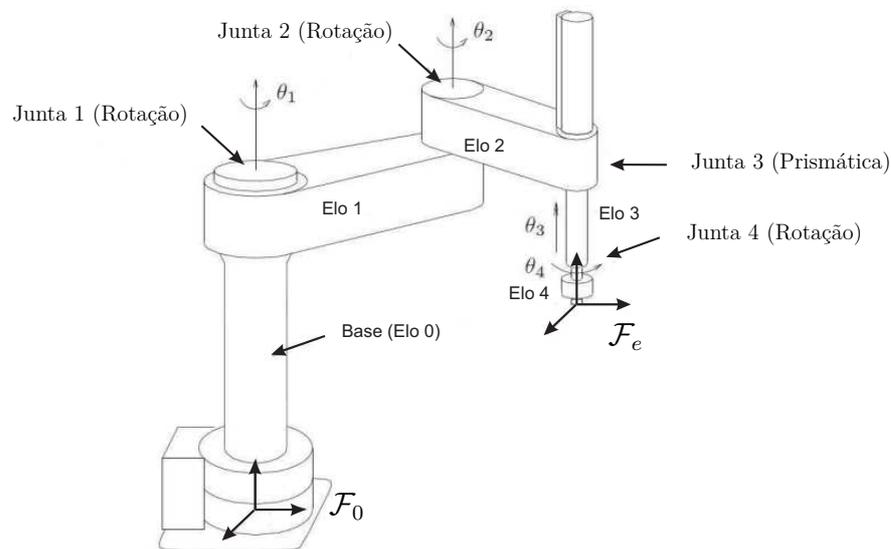


Figura 2.1: Descrição dos Elos e Juntas de um Manipulador.

2.1 Configuração de um Corpo Rígido

Em um espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 representado por um sistema de coordenadas ortonormal $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \end{bmatrix}$, define-se o corpo rígido como um conjunto de

partículas, tal que a distância entre as partículas seja fixa para todos os instantes de tempo. Portanto, considerando p_i e p_j a trajetória de duas das partículas que formam um corpo rígido, elas devem satisfazer a relação:

$$\|p_i(t) - p_j(t)\| = \|p_i(0) - p_j(0)\| = \text{constante}. \quad (2.1)$$

A configuração de um corpo rígido é representada por um sistema de coordenadas localizado em um ponto associado ao corpo rígido. O movimento do corpo rígido é descrito pelo movimento do sistema de coordenadas do corpo rígido \mathcal{F}_c relativo a um sistema de coordenadas inercial \mathcal{F}_0 (Figura 2.2).

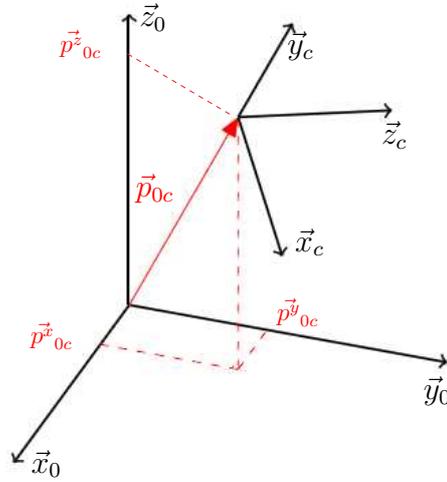


Figura 2.2: Posição entre sistemas de coordenadas.

Neste trabalho, utiliza-se a convenção da mão direita para sistemas de coordenadas, sendo assim, dados três vetores ortonormais $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ a condição $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$ é satisfeita.

2.1.1 Rotação de um Corpo Rígido

Para descrever a orientação de um corpo rígido, considera-se um sistema de coordenadas ortonormal fixo no corpo rígido $\mathcal{F}_c = [\vec{x}_c, \vec{y}_c, \vec{z}_c]$. Estes eixos são expressos em relação ao sistema de coordenadas inercial $\mathcal{F}_0 = [\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0]$ da seguinte forma:

$$R_{0c} = \begin{bmatrix} x_{0c} & y_{0c} & z_{0c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_c) & (\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_c) & (\vec{x}_0 \cdot \vec{z}_c) \\ (\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_c) & (\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_c) & (\vec{y}_0 \cdot \vec{z}_c) \\ (\vec{z}_0 \cdot \vec{x}_c) & (\vec{z}_0 \cdot \vec{y}_c) & (\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_c) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (2.2)$$

onde x_{0c}, y_{0c} e $z_{0c} \in \mathbb{R}^3$ são as coordenadas das componentes do sistema de coordenadas \mathcal{F}_c representadas no sistema de coordenadas \mathcal{F}_0 .

Nota-se que os vetores coluna da matriz R tem norma unitária ($\vec{x}_{0c}^T \vec{x}_{0c} = \vec{y}_{0c}^T \vec{y}_{0c} = \vec{z}_{0c}^T \vec{z}_{0c} = 1$) e são mutuamente ortogonais, pois estes representam vetores unitários de um sistema de coordenadas ortogonal ($\vec{x}_{0c}^T \vec{y}_{0c} = \vec{y}_{0c}^T \vec{z}_{0c} = \vec{z}_{0c}^T \vec{x}_{0c} = 0$). Conseqüentemente, R_{0c} é uma matriz ortogonal ($R_{0c}^T R_{0c} = I_3$, onde $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz identidade).

A partir disto e considerando que os sistemas de coordenadas seguem a convenção da mão direita, pode-se determinar que

$$\det(R_{0c}) = \vec{x}_{0c}^T \cdot (\vec{y}_{0c} \times \vec{z}_{0c}) = \vec{x}_{0c}^T \cdot \vec{x}_{0c} = 1. \quad (2.3)$$

O conjunto de todas as matrizes $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ que satisfazem estas propriedades define o grupo de rotações no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 e é denominado grupo especial ortonormal de dimensão 3 ($SO(3)$). Este grupo é definido por:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : R^T R = I_3 \text{ e } \det(R) = 1\}. \quad (2.4)$$

Considerando somente um movimento de rotação, pode-se descrever a matriz de rotação através do movimento realizado ao redor de um vetor fixo. Considerando $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário que especifica a direção em que a rotação é realizada e $\alpha \in \mathbb{R}$ o ângulo desta rotação em radianos (Figura 2.3), a matriz de rotação é dada pelo teorema de rotação de Euler:

$$R_{bc}(k, \alpha) = e^{\hat{k}\alpha} \in SO(3), \quad (2.5)$$

onde o operador $(\hat{\cdot})$ representa o operador de produto vetorial de um vetor (vide Apêndice A.1), uma matriz anti-simétrica ($\hat{k} = -\hat{k}^T$) da forma:

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.6)$$

e o termo $e^{\hat{k}\alpha}$ é dado pela fórmula de Rodrigues (Murray et al. 1994):

$$e^{\hat{k}\alpha} = I + \sin(\alpha)\hat{k} + (1 - \cos(\alpha))\hat{k}^2 \in SO(3). \quad (2.7)$$

A matriz de rotação representa uma transformação de corpo rígido, portanto preserva a distância e a orientação entre os pontos do corpo.

Uma representação alternativa para a orientação de corpos rígidos pode ser obtida com uma representação de quatro parâmetros, ao invés dos nove parâmetros

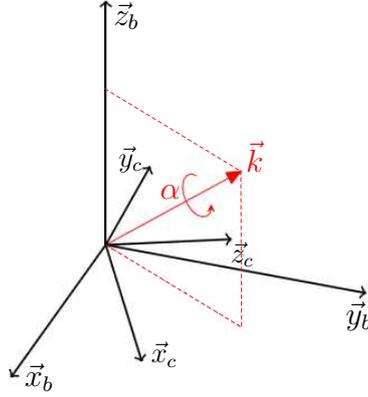


Figura 2.3: Orientação entre sistemas de coordenadas.

necessários para a matriz de rotação. Esta representação é denominada *quatérnio unitário* $Q = \{\eta, \epsilon\}$, uma generalização dos números complexos \mathbb{C} que forma o conjunto $\mathbb{H} = \{\eta, \epsilon\}$, composto de uma componente escalar $\eta \in \mathbb{R}$ e uma parte vetorial complexa $\epsilon \in \mathbb{R}^3$, cuja única restrição é $\|Q\| = 1$.

As componentes do quatérnio Q são definidas por:

$$\eta = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (2.8)$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)k. \quad (2.9)$$

As propriedades e operações realizadas pelo quatérnio unitário são apresentadas no Apêndice A.2. A matriz de rotação correspondente a orientação dada por um quatérnio $Q = \{\eta, \epsilon\}$, tem a forma (Siciliano et al. 2011):

$$R(\eta, \epsilon) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2 + \epsilon_1^2) - 1 & 2(\epsilon_1\epsilon_2 - \eta\epsilon_3) & 2(\epsilon_1\epsilon_3 + \eta\epsilon_2) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2 + \eta\epsilon_3) & 2(\eta^2 + \epsilon_2^2) - 1 & 2(\epsilon_2\epsilon_3 - \eta\epsilon_1) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3 - \eta\epsilon_2) & 2(\epsilon_2\epsilon_3 + \eta\epsilon_1) & 2(\eta^2 + \epsilon_3^2) - 1 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

ou pode ser deduzida pela Fórmula de Rodrigues (Murray et al. 1994)

$$R(\eta, \epsilon) = I + 2\eta\hat{\epsilon} + 2\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}. \quad (2.11)$$

Para obter o quatérnio a partir da matriz de rotação deve-se lembrar da unicidade do quatérnio e que as rotações de $-\alpha$ em torno de um vetor $-k$ são iguais a rotação de α em torno de k , logo $Q = \{\eta, \epsilon\} = \{-\eta, -\epsilon\}$. Assim, para uma matriz de rotação $R = \{r_{ij} \mid i, j = 1, 2, 3\} \in SO(3)$ calcula-se o quatérnio unitário da forma:

$$\eta = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \text{sinal}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1}, \\ \epsilon_2 &= \text{sinal}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{11} - r_{33} + 1}, \\ \epsilon_3 &= \text{sinal}(r_{21} - r_{12}) \sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

para uma rotação dentro do intervalo de $\alpha \in [-\pi, \pi]$, o que por si, já é suficiente para representar qualquer rotação. Esta suposição é responsável pelo sinal da parte escalar do quatérnio, ou seja, $\eta \geq 0$. E a função $\text{sinal}(\cdot)$ é dada por

$$\text{sinal}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

O quatérnio gerado a partir de uma matriz de rotação $R^{-1} = R^T$ é denotado por Q^{-1} e é dado por

$$Q^{-1} = \{\eta, -\epsilon\}. \quad (2.15)$$

Considerando $Q_1 = \{\eta_1, \epsilon_1\}$ e $Q_2 = \{\eta_2, \epsilon_2\}$ os quatérnios correspondentes às matrizes de rotação R_1 e R_2 , respectivamente. O quatérnio correspondente ao produto $R_1 R_2$ é dado por (Siciliano et al. 2011):

$$Q_1 \otimes Q_2 = \{\eta_1, \epsilon_1\} \otimes \{\eta_2, \epsilon_2\} = \{\eta_1 \eta_2 + \epsilon_1^T \epsilon_2, \eta_1 \epsilon_2 + \eta_2 \epsilon_1 + \hat{\epsilon}_1 \epsilon_2\} \in \mathbb{S}^3, \quad (2.16)$$

onde o operador \otimes define o produto entre quatérnios. Observa-se aqui que, caso $Q_2 = Q_1^{-1}$ então o produto de (2.16) resulta em $Q_I = \{1, 0\}$, o que caracteriza o elemento identidade, ou o quatérnio referente a matriz identidade.

2.1.2 Transformação Homogênea de um Corpo Rígido

Visto que as transformações de corpo rígido mantém constantes as distância entre as partículas do corpo rígido e preserva a orientação dos vetores entre estas partículas, o movimento de um corpo rígido pode então ser expresso por uma transformação

de corpo rígido que descreva a posição e orientação instantâneas de um sistema de coordenadas localizado no corpo rígido em relação a um sistema de coordenadas de referência.

Em geral, os movimentos do corpo rígido consistem de rotação e translações. O procedimento para determinar movimentos de rotação foi descrito na Seção 2.1.1. O procedimento para determinar o movimento linear, i.e., puramente translacional, é feito a partir da variação do vetor entre a origem do sistema de coordenadas do corpo rígido \mathcal{F}_c e a origem do sistema de coordenadas inercial \mathcal{F}_b , no caso $p_{bc}(t) \in \mathbb{R}^3$.

A configuração do corpo rígido consiste então no dual entre a posição e orientação (p_{bc}, R_{bc}) chamado postura e o espaço desta configuração é formado pelo produto do espaço $SO(3)$ com o espaço \mathbb{R}^3 e chamado de grupo especial Euclidiano de dimensão 3, ou $SE(3)$, dado por:

$$SE(3) = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} R & p \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \middle| R \in SO(3) \text{ e } p \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

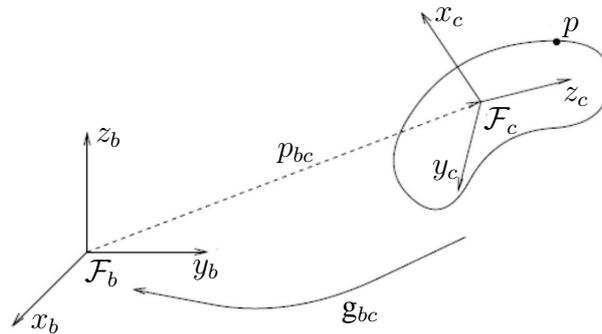


Figura 2.4: Sistemas de coordenadas para transformações de corpo rígido (Murray et al. (1994)).

Desta forma, analogamente aos elementos do grupo $SO(3)$, um elemento $(p, R) \in SE(3)$ serve não somente como a configuração de um corpo rígido, mas também como a transformação do sistema de coordenadas em que um ponto é representado. Mais precisamente, dado um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ e considerando $p_b, p_c \in \mathbb{R}^3$ a representação destes ponto nos sistemas de coordenadas \mathcal{F}_b e \mathcal{F}_c respectivamente, pode-se encontrar uma transformação entre as representações por:

$$p_b = p_{bc} + R_{bc}p_c, \quad (2.17)$$

onde R_{bc} é a rotação do sistema de coordenadas \mathcal{F}_c em relação a \mathcal{F}_b e p_{bc} é o vetor de posição entre a origem dos dois sistemas (Figura 2.4). A transformação de pontos e

vetores pela transformação homogênea é mais facilmente representada por matrizes e vetores em \mathbb{R}^4 , chamada de representação homogênea, deste forma, a transformação homogênea da equação (2.17) pode ser reescrita por:

$$\begin{bmatrix} p_b \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{bc} & p_{bc} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_{bc}} \begin{bmatrix} p_c \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{g}_{bc} \in SE(3)$ é a transformação homogênea entre os sistemas de coordenadas. A transformação inversa é dada por:

$$p_c = -R_{bc}^T p_{bc} + R_{ab}^T p_b = -R_{bc} p_{bc} + R_{bc} p_b, \quad (2.19)$$

ou, utilizando a representação em \mathbb{R}^4 como:

$$\begin{bmatrix} p_c \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{cb} & -R_{cb} p_{bc} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_{cb}} \begin{bmatrix} p_b \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Nota-se que $\mathbf{g}_{bc}^{-1} = \mathbf{g}_{cb}$. As transformações homogêneas podem ser combinadas de modo a formar uma nova transformação homogênea. Dada a transformação homogênea \mathbf{g}_{bc} que mapeia um sistema de coordenadas \mathcal{F}_c em relação a um sistema de coordenadas \mathcal{F}_b , e considerando a configuração de \mathcal{F}_b em relação a um sistema de coordenadas \mathcal{F}_a dada por \mathbf{g}_{ab} , pode-se expressar o sistema de coordenadas \mathcal{F}_c em relação a \mathcal{F}_a através de:

$$\mathbf{g}_{ac} = \mathbf{g}_{ab} \mathbf{g}_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab} R_{bc} & R_{ab} p_{bc} + p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

A equação (2.21) define a *regra da composição* para transformações homogêneas. Utilizando a representação homogênea pode-se verificar as propriedades do grupo $SE(3)$ das transformações homogêneas que são:

- Se $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in SE(3)$, então $\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \in SE(3)$.
- O elemento identidade $I_{4 \times 4} \in SE(3)$.
- Se $\mathbf{g} = (p, R) \in SE(3)$ então sua inversa é dada por

$$\mathbf{g}^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- A regra da composição para as transformações homogêneas é associativa.

2.1.3 Enfoque Exponencial

A noção de mapeamento exponencial introduzido em (2.5) para matrizes do grupo $SO(3)$ pode ser generalizado para o grupo especial Euclidiano, $SE(3)$. Opta-se pela utilização deste enfoque por permitir um tratamento mais rigoroso e intuitivo dos movimentos de corpo rígido, além de facilitar a análises geométricas mais detalhada do movimento de cada elo.

O movimento de um corpo rígido pode ser considerado como um movimento de rotação em torno de um vetor k seguido de uma translação paralela aquele vetor. Essa representação do movimento é chamada de movimento *screw* ou movimento de parafuso.

Para isto, considera-se o corpo rígido da Figura 2.5(a), um robô de um elo que efetua uma rotação no eixo $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{k}\| = 1$ e onde $o \in \mathbb{R}^3$ é um ponto deste eixo. Assumindo que o elo rotaciona com velocidade unitária, então a velocidade da extremidade do corpo, $p(t)$, é dada por

$$\dot{p}(\theta) = \vec{\omega} \times (p(\theta) - o) \quad (2.22)$$

que pode ser representado no formato de coordenadas homogêneas definindo-se uma matriz 4×4 , $\hat{\xi}$, tal que:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & -\omega \times o \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\xi}} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\bar{p}} = \hat{\xi} \bar{p}, \quad (2.23)$$

onde \bar{p} e $\dot{\bar{p}}$ são as representações homogêneas da posição do ponto da extremidade do elo e do vetor de velocidade desse ponto.

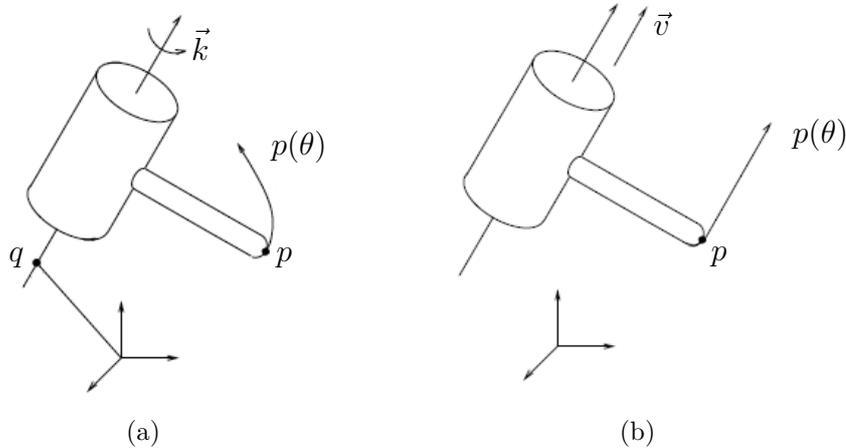


Figura 2.5: (a) Junta de rotação e (b) junta prismática

A solução da equação diferencial (2.23) é dada por:

$$\bar{p}(\theta) = e^{\hat{\xi}t} p(0), \quad (2.24)$$

onde o escalar t é o montante total de rotação (já que se rotaciona com velocidade unitária), $\mathbf{g} = e^{\hat{\xi}t} \in SE(3)$ é a exponencial matricial da matriz $\hat{\xi}t$, um mapeamento da posição a inicial de um ponto a sua posição final após ter rotacionado t radianos e é definido por:

$$e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})\hat{\omega}v + \omega\omega^T v\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

De maneira similar, pode-se definir a transformação homogênea devido a um movimento de translação como uma matriz exponencial 4×4 . A velocidade do ponto p localizado na extremidade do corpo rígido, representado por uma junta prismática na Figura 2.5(b), é dada por

$$\dot{\bar{p}}(\theta) = v. \quad (2.26)$$

A solução desta equação é a semelhante a (2.24), mas para o caso da junta prismática, as velocidades angulares são nulas e deve-se considerar:

$$\begin{aligned} \hat{\xi} &= \begin{bmatrix} 0 & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \\ e^{\hat{\xi}\theta} &= \begin{bmatrix} I & v\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para os dois casos, a transformação homogênea $\mathbf{g} = e^{\hat{\xi}\theta} \in SE(3)$ é igual a encontrada na Seção 2.1.2, mas tem uma interpretação diferente. O enfoque exponencial é interpretado como o mapeamento da posição inicial de um ponto $p(0) \in \mathbb{R}^3$ às coordenadas desse ponto após o movimento do corpo rígido $p(\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} p(0)$.

Neste caso, $p(0)$ e $p(\theta)$ são especificado em relação a um mesmo sistema de coordenada. Similarmente, se $\mathbf{g}_{ab}(0)$ representa a configuração inicial de um corpo rígido relativo a um sistema de coordenadas \mathcal{F}_a , então, a configuração final permanecerá relativa a ao mesmo sistema de coordenadas e é dada por:

$$\mathbf{g}_{ab} = e^{\hat{\xi}\theta} \mathbf{g}_{ab}(0). \quad (2.28)$$

O elemento ξ é denominado *twist* e é uma forma de gerar o grupo especial Euclidiano das transformadas homogêneas através da descrição da velocidades instantâneas do corpo rígido em termos de suas componentes linear v e angular ω (Murray et al. 1994). Define-se então o operador (\sim) para que se possa descrever o *twist* através de um vetor de dimensão 6 de forma:

$$\xi = \widetilde{\begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix},$$

onde $\xi = (v, \omega)$ são as coordenadas em *twist* de $\hat{\xi}$. O operador inverso $\hat{\cdot}$ forma a matriz 4×4 a partir do vetor $\xi \in \mathbb{R}^6$.

Assim, o mapeamento exponencial de um *twist* fornece o movimento relativo de um corpo rígido. Esta interpretação da exponencial do *twist* como mapeamento de sua configuração inicial à configuração final é importante para a definição da cinemática de um manipulador. Dessa forma, o *twist* de cada junta de um manipulador é dado por:

$$\xi_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.29)$$

com ξ_i sendo *twist* da junta i e $v_i \in \mathbb{R}^3$ e $\omega_i \in \mathbb{R}^3$ a velocidade escalar e angular do sistema de coordenadas \mathcal{F}_i , respectivamente. Para juntas de rotação, o *twist* é dado por:

$$\xi_i = \begin{bmatrix} -k_i \times l_i \\ k_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.30)$$

onde k_i é o vetor unitário na direção do eixo em torno do qual a junta se movimenta e l_i é um ponto qualquer desse eixo. Considerando o caráter exclusivamente translacional das juntas prismáticas, o *twist* destas juntas é naturalmente dado por:

$$\xi_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6. \quad (2.31)$$

2.2 Cinemática Direta de um Manipulador

Um manipulador é uma associação de $n + 1$ corpos rígidos, chamados de elos, interligados por n juntas. Cada junta i adiciona um grau de mobilidade ao manipulador e conecta o elo $i - 1$ ao elo i . Define-se um sistema de coordenadas \mathcal{F}_i com $i = 1, \dots, n$ associado a cada elo i do manipulador e com sua origem

posicionada na junta i . Define-se também, um sistema de coordenadas inercial de referência \mathcal{F}_0 , associado a base do manipulador e um sistema de coordenadas \mathcal{F}_e para a extremidade oposta a base do manipulador, chamada de efetuador, onde, normalmente, posiciona-se uma ferramenta. Note que \mathcal{F}_e é fixo em relação a \mathcal{F}_n .

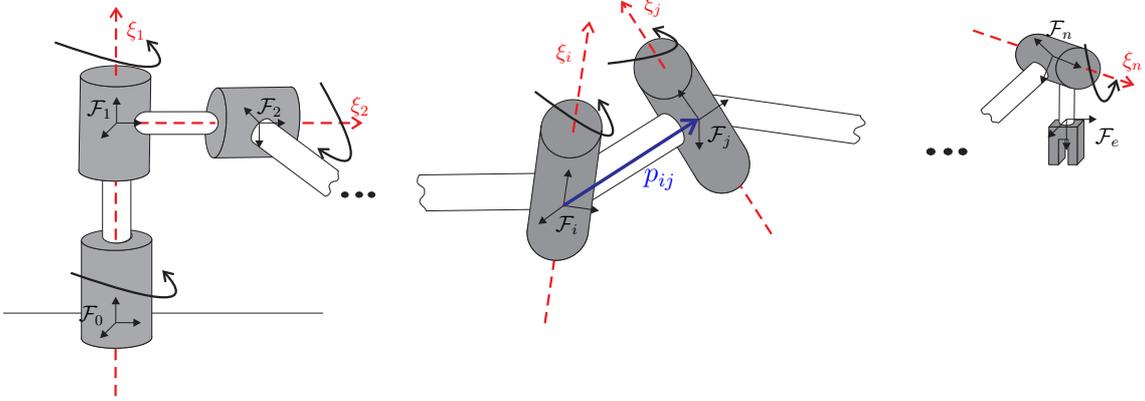


Figura 2.6: Representação da cadeia cinemática de um manipulador

Em um espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 representado por um sistema de coordenadas ortonormal $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \end{bmatrix}$, a posição de um corpo rígido em relação a outro é dado pelo vetor de posição. Considerando dois elos de um manipulador representados pelos sistemas de coordenadas \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_j , como na Figura 2.6, a posição relativa é dada pelo vetor:

$$p_{ij}(t) = \begin{bmatrix} p_{ij}^x \\ p_{ij}^y \\ p_{ij}^z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.32)$$

O mapeamento de um sistema de coordenadas \mathcal{F}_j para \mathcal{F}_i é dado por:

$$\mathbf{g}_{ij}(t) = \begin{bmatrix} R_{ij}(t) & p_{ij}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3), \quad (2.33)$$

Portanto, com respeito ao sistema de coordenadas da base \mathcal{F}_0 , a posição e a orientação do sistema de coordenadas do efetuador \mathcal{F}_e são expressas através da matriz de transformação homogênea dada por

$$\mathbf{g}_{0e}(t) = \begin{bmatrix} R_{0e}(t) & p_{0e}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3), \quad (2.34)$$

onde $R_{0e} \in SO(3)$ é a matriz de rotação que define a orientação do efetuador em relação a base e p_{0e} é a posição do sistema de coordenadas do efetuador \mathcal{F}_e em relação ao sistema de coordenadas da base \mathcal{F}_0 . Assim, o mapeamento da cinemática

direta de um manipulador serial de n juntas $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ pode ser dado pelo produto de transformações homogêneas:

$$\mathbf{g}_{0e}(\theta) = \mathbf{g}_{01}(\theta_1) \mathbf{g}_{12}(\theta_2) \dots \mathbf{g}_{i-1 i}(\theta_i) \mathbf{g}_{ij}(\theta_j) \dots \mathbf{g}_{n-1 n}(\theta_n) \mathbf{g}_{ne}, \quad (2.35)$$

onde \mathbf{g}_{ne} é a transformação homogênea constante do último elo ao efetuador.

2.2.1 Espaço Operacional

Conforme descrito nesta seção, a cinemática direta de um manipulador permite descrever a posição e orientação do efetuador em função da posição das juntas do robô θ .

Para uma tarefa designada ao efetuador, é necessário definir a posição e orientação deste, eventualmente, como uma função do tempo. Isto é simples para a posição, porém, especificar a orientação através da matriz de rotação em função do tempo não é nada prático. Isto se dá devido a restrição imposta por (2.4), onde as colunas da matriz de rotação devem sempre cumprir a condição de ortonormalidade para cada instante de tempo.

A postura do corpo rígido pode então ser definida como o dual de posição e orientação do sistema de coordenadas do corpo em relação a outro sistema de coordenadas de referência. Para um manipulador como o da Figura 2.6, a postura de um dos elos \mathcal{F}_i relativa a outro elo ou a base do robô, é dada em função de um conjunto de ângulos definidos pela rotação das juntas entre eles.

Desta forma, a cinemática direta descreve a postura do efetuador de um manipulador em função das variáveis das juntas com respeito a um sistema de coordenada de referência \mathcal{F}_0 . A postura do efetuador é definida no espaço operacional e é dada pela função:

$$x_{0e} = h(\theta) = \begin{bmatrix} p_{0e} \\ Q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1},$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^n$ define o espaço das juntas do manipulador e $h(\theta)$ uma função não-linear, que permite a determinação das variáveis do espaço operacional a partir do conhecimento das variáveis do espaço das juntas.

2.3 Cinemática Diferencial

De maneira geral, trabalhar com a postura do efetuador pode apresentar diversas dificuldades, principalmente na cinemática inversa, onde a posição das juntas deve ser calculado a partir da posição e orientação do mesmo.

De outra maneira, pode-se trabalhar com as velocidades do efetuador, de maneira a encontrar um mapeamento entre elas e as velocidades das juntas, denominado de Jacobiano. O Jacobiano também se torna útil no estudo de redundâncias e singularidades do manipulador.

2.3.1 Velocidade de Corpo Rígido

Considerando um ponto q_j de um corpo rígido com um sistema de coordenadas \mathcal{F}_j e dada uma transformação homogênea $\mathbf{g}_{ij}(t)$ relacionando um sistema de coordenadas \mathcal{F}_i a \mathcal{F}_j em função do tempo, este ponto pode ser representado com respeito a \mathcal{F}_i por:

$$\bar{q}_i = \mathbf{g}_{ij}\bar{q}_j. \quad (2.36)$$

A velocidade deste ponto em relação a \mathcal{F}_i é então dada por:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{q_i} &= \frac{d}{dt}\bar{q}_i(t) = \dot{\mathbf{g}}_{ij}\bar{q}_j, \\ \bar{v}_{q_i} &= \dot{\mathbf{g}}_{ij}\mathbf{g}_{ij}^{-1}\bar{q}_i. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Também é possível expressar a velocidade do corpo rígido com respeito ao sistema de coordenadas instantâneo do próprio corpo, isto é, \mathcal{F}_j . Define-se a velocidade do ponto no sistema de coordenadas do corpo por:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{q_j} &= \mathbf{g}_{ij}^{-1}\bar{v}_{q_i} = \mathbf{g}_{ij}^{-1}\dot{\mathbf{g}}_{ij}\mathbf{g}_{ij}^{-1}\bar{q}_i, \\ \bar{v}_{q_j} &= \mathbf{g}_{ij}^{-1}\dot{\mathbf{g}}_{ij}\bar{q}_j. \end{aligned} \quad (2.38)$$

O termo $\dot{\mathbf{g}}_{ij}$ da primeira equação não é tão útil, mas o termo $\mathbf{g}_{ij}^{-1}\dot{\mathbf{g}}_{ij}$ tem um significado especial. Considerando:

$$\dot{\mathbf{g}}_{ij} = \begin{bmatrix} \dot{R}_{ij}(t) & \dot{p}_{ij}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{ij}^{-1}\dot{\mathbf{g}}_{ij} &= \begin{bmatrix} R_{ij} & p_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R}_{ij} & \dot{p}_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{g}_{ij}^{-1}\dot{\mathbf{g}}_{ij} &= \mathbf{g}_{0j}^{-1}\dot{\mathbf{g}}_{0j} = \begin{bmatrix} R_{0j}^\top \dot{R}_{0j}^\top & R_{0j}^\top \dot{p}_{0j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

o que tem o formato de um *twist*. Considerando \mathcal{F}_i o sistema de coordenadas inercial \mathcal{F}_0 e \mathcal{F}_j o sistema de coordenadas do corpo rígido, por analogia ao movimento

rotacional do corpo rígido e a definição de *twist*, pode-se definir a velocidade de corpo \hat{V}_{0j}^B por:

$$\hat{V}_{0j}^B = \mathfrak{g}_{0j}^{-1} \dot{\mathfrak{g}}_{0j} = \begin{bmatrix} R_{0j}^\top \dot{R}_{0j}^\top & R_{0j}^\top \dot{p}_{0j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

ou

$$V_{0j}^B = \begin{bmatrix} v_{0j}^B \\ \omega_{0j}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{0j}^\top \dot{p}_{0j} \\ \underbrace{R_{0j}^\top \dot{R}_{0j}^\top} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

A velocidade do corpo rígido pode ser representado com respeito a outro sistema de coordenadas através da matriz de transformação adjunta. O matriz adjunta que mapeia a velocidade de um corpo rígido representado pelo sistema de coordenadas \mathcal{F}_j referente a um sistema de coordenadas \mathcal{F}_i é dada por:

$$Ad_{\mathfrak{g}_{ij}} = \begin{bmatrix} R_{ij} & \hat{p}_{ij} R_{ij} \\ 0 & R_{ij} \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

A matriz adjunta também define o mapeamento dos *twists* pela dependência à transformação homogênea entre seus sistemas de coordenadas de referência $\mathfrak{g} \in SE(3)$. A adjunta pode representar a transformação dos *twists* por:

$$Ad_{\mathfrak{g}}(\xi) = \mathfrak{g} \hat{\xi} \mathfrak{g}^{-1} \quad \forall \mathfrak{g} \in SE(3). \quad (2.44)$$

A transformação adjunta satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 1: A inversa da transformação adjunta é dada por:

$$Ad_{\mathfrak{g}}^{-1} = Ad_{\mathfrak{g}^{-1}} = \begin{bmatrix} R^\top & -R^\top \hat{p} \\ 0 & R^\top \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Propriedade 2: A composição de duas transformações adjuntas é dada por:

$$Ad_{\mathfrak{g}} Ad_{\mathfrak{h}} = Ad_{\mathfrak{gh}}. \quad (2.46)$$

Para o caso em que os sistemas de coordenadas são estacionários, pode-se representar a velocidade de corpo de um corpo rígido em k , em relação ao sistema de coordenadas \mathcal{F}_j , isto é, V_{jk}^B , em um novo sistema de coordenadas \mathcal{F}_i . Para isto, deve-se fazer o mapeamento adjunto a partir da transformação homogênea entre os dois sistemas de coordenadas (g_{ij}), de forma que as velocidades se relacionem como $V_{ik}^B = Ad_{g_{ij}} V_{jk}^B$. Caso a transformação homogênea seja variante no tempo,

uma forma geral de relacionar as formas de representação da velocidade é feito acrescentando as velocidades entre os sistemas de coordenadas \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_j e as velocidades entre os sistemas de coordenadas \mathcal{F}_j e \mathcal{F}_k a equação de forma que:

$$V_{ik}^B = \text{Ad}_{g_{ij}^{-1}} V_{ij}^B + V_{jk}^B. \quad (2.47)$$

2.3.2 Jacobiano Geométrico

O Jacobiano geométrico mapeia a velocidade das juntas na velocidade linear (v_{0e}) e angular (ω_{0e}^B) do espaço operacional. As velocidades devem ser definidas de acordo com um sistema de coordenadas de referência.

Aplicando-se a regra da cadeia em (2.41), visualiza-se a dependência linear da velocidade de corpo em relação a velocidade das juntas:

$$\hat{V}_{0i}^B = \sum_{k=1}^i \mathbf{g}_{0i}^{-1}(\theta) \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{0i}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k \right) = \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{0i}}{\partial \theta_k} \mathbf{g}_{0i}^{-1}(\theta) \right) \dot{\theta}_k, \quad (2.48)$$

o que em coordenadas *twist* pode ser reescrito por:

$$V_{0i}^B = \left[\left(\mathbf{g}_{0i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_{0i}}{\partial \theta_1} \right)^\vee \quad \dots \quad \left(\mathbf{g}_{0i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_{0i}}{\partial \theta_i} \right)^\vee \right] \dot{\theta}, \quad (2.49)$$

ou, pode-se definir o mapeamento da velocidade inercial em relação a velocidade das juntas como:

$$V_{0i}^B = J_{0i}^B \dot{\theta}, \quad (2.50)$$

onde

$$J_{0i}^B = \left[\left(\mathbf{g}_{0i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_{0i}}{\partial \theta_1} \right)^\vee \quad \dots \quad \left(\mathbf{g}_{0i}^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}_{0i}}{\partial \theta_i} \right)^\vee \right]. \quad (2.51)$$

Utilizando a definição de matrizes adjuntas de (2.44) e da cinemática direta em coordenadas exponenciais de (2.35), uma forma mais simples de representar as colunas do Jacobiano J_{0i}^B é:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}_{0i}}{\partial \theta_k} \mathbf{g}_{0i}^{-1} \right)^\vee = \text{Ad}_{g_{0k-1}} \xi_k. \quad (2.52)$$

Desta forma, o Jacobiano espacial é definido por:

$$J_{0i}^B = \left[\xi_1^\dagger \quad \xi_2^\dagger \quad \dots \quad \xi_i^\dagger \right], \quad (2.53)$$

onde

$$\xi_k^\dagger = \text{Ad}_{\mathbf{g}_{k_i} \mathbf{g}_{0_i}(0)} \xi_k = \left(\frac{\partial \mathbf{g}_{0_i}}{\partial \theta_k} \mathbf{g}_{0_i}^{-1} \right)^\vee. \quad (2.54)$$

Definindo a matriz para o manipulador completo, tem-se que:

$$J_{0e}^B = \begin{bmatrix} \xi_1^\dagger & \xi_2^\dagger & \dots & \xi_n^\dagger \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (2.55)$$

onde $J_{0e}^B(\theta) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ depende da configuração atual de posição das juntas do manipulador, mapeando a velocidade das juntas na velocidade de corpo do efetuador.

As colunas da matriz J_{0e}^B correspondem aos *twists* das juntas expressos em relação ao sistema de coordenadas do efetuador. A transformação homogênea entre o efetuador e a base na configuração inicial $\mathbf{g}_{0e}(\theta(0))$ aparece explícita em (2.54). Pode-se escolher a configuração de modo a alinhar os sistemas de coordenadas inercial (\mathcal{F}_0) e do efetuador (\mathcal{F}_e), de forma a garantir $\mathbf{g}_{0e}(\theta(0)) = I$ e simplificar o cálculo do Jacobiano de corpo.

2.4 Controle Cinemático de Manipuladores

Considera-se o problema de controle cinemático para um robô manipulador com n graus de liberdade. Neste contexto, assume-se que (H1) a equação cinemática do robô é conhecida e (H2) os efeitos da dinâmica do robô podem ser desprezados¹.

Em geral, a maioria dos robôs industriais possui uma malha interna de controle de velocidade das juntas (Figura 2.7). Para um sinal de controle $u = {}^d\dot{\theta}$ e um controlador de alto ganho ($K \rightarrow \infty$), tem-se que $e \rightarrow 0$ e conseqüentemente $u \approx \dot{\theta}$.

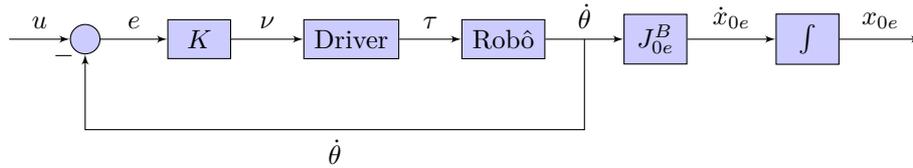


Figura 2.7: Malha de controle de velocidade

Portanto, o movimento do manipulador pode ser descrito por:

$$\dot{\theta}_i = u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.56)$$

onde $\dot{\theta}_i$ é a velocidade angular da i -ésima junta, u_i é um sinal de controle de velocidade aplicado ao driver do motor da i -ésima junta e n é o número de juntas do manipulador.

¹O efeito do acoplamento dinâmico pode ser desprezado quando as juntas apresentam elevados fatores de redução nas engrenagens e/ou os movimentos da tarefa de interesse requerem baixas velocidades ou acelerações lentas.

A cinemática diferencial inversa apresenta um mapeamento linear entre o espaço das juntas e o espaço de trabalho do manipulador variante de acordo com o posicionamento das juntas do manipulador.

Considerando um manipulador que possua o mesmo número de graus de liberdade que a dimensão do espaço operacional, isto é $m = n$, a cinemática diferencial (2.50) fornece a relação entre o vetor de velocidade das juntas e as velocidades linear e angular do efetuador por:

$$V_{0e}^B = \begin{bmatrix} v_{0e}^B \\ \omega_{0e}^B \end{bmatrix} = J_{0e}^B(\theta)u = \begin{bmatrix} J_{0e(p)}^B(\theta) \\ J_{0e(o)}^B(\theta) \end{bmatrix} u, \quad (2.57)$$

onde $J_{0e(p)}^B$ e $J_{0e(o)}^B$ são os Jacobianos de posição e orientação, respectivamente. A solução para o controle cinemático pode então ser definida desacoplando o sistema através do Jacobiano inverso, i.e.:

$$u = (J_{0e}^B(\theta))^{-1}\bar{u}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_p \\ \bar{u}_o \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

onde \bar{u}_p e \bar{u}_o são os sinais de controle Cartesiano de posição e orientação, respectivamente.

Supondo que o objetivo de controle para uma dada tarefa seja levar a postura do manipulador de um condição inicial $g_{0e}(\theta(0))$ a uma condição desejada ${}^d g_{0e}$, é preciso estabelecer uma métrica para o erro de configuração.

2.4.1 Erros do Sistema

O erro de postura possui uma componente de posição e outra de orientação $e^B = \begin{bmatrix} e_p^B & e_o \end{bmatrix}$. O erro de posição é dado pela subtração do vetor de posição desejado e do vetor de posição atual nas coordenadas de corpo, i.e.:

$$e_p^B = R_{0e}^T \left({}^d p_{0e} - p_{0e} \right), \quad (2.59)$$

e o objetivo do controle de posição pode ser formalizado por:

$$p_{0e} \rightarrow {}^d p_{0e}(t) \quad \text{ou} \quad e_p^B \rightarrow 0. \quad (2.60)$$

Considerando (2.41) e (2.59), a dinâmica do erro de posição é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_p^B &= {}^d v_{0e}^B - v_{0e}^B + \dot{R}_{0e}^T \left({}^d p_{0e} - p_{0e} \right), \\ \dot{e}_p^B &= {}^d v_{0e}^B - \bar{u}_p - \hat{\omega}_{0e}^B e_p^B, \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde $\omega_{0e}^B \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular em coordenadas de corpo do sistema de coordenadas do efetuador \mathcal{F}_e com respeito ao sistema de coordenadas da base \mathcal{F}_0 .

O erro entre orientações, representadas na forma de quatérnios, pode ser formulado a partir da diferença entre um sistema de coordenadas desejado ${}^d\mathcal{F}_e$ e um sistema de coordenadas atual \mathcal{F}_e , ambos em relação ao sistema de coordenadas inercial, comumente posicionado na base do manipulador \mathcal{F}_0 . Assume-se que a orientação de cada um desses sistemas de coordenadas pode ser representado por uma matriz de rotação em relação a base ${}^dR_{0e}$ e R_{0e} , respectivamente, ou como um quatérnio correspondente a cada matriz de rotação $Q_d = \{\eta_d, \epsilon_d\}$ e $Q = \{\eta, \epsilon\}$.

O erro de orientação pode ser definido por uma matriz de erro de atitude $R_\Delta \in SO(3)$, definida através do enfoque inercial por:

$$R_\Delta = {}^dR_{0e}(t)R_{0e}^\top, \quad (2.62)$$

e o objetivo do controle pode ser formalizado por:

$$R_{0e} \rightarrow {}^dR_{0e}(t) \quad \text{ou} \quad R_\Delta \rightarrow I.$$

Considere $e_q = \{\tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}\}$ a representação de quatérnio unitário para R_Δ , tal que $e_q = Q_d(t) \otimes Q^{-1}$, onde o operador \otimes define o produto entre quatérnios (2.16). O objetivo do controle utilizando a notação de quatérnios é definido por:

$$Q \rightarrow Q_d \quad \text{ou} \quad e_q \rightarrow Q_I = \{1, 0\}. \quad (2.63)$$

Observa-se que $e_q = \{1, 0\}$ se e somente se ${}^d\mathcal{F}_e$ e \mathcal{F}_e estiverem alinhados.

Observa-se que, como o erro de orientação é não linear, deve-se considerar a relação entre a derivada no tempo do quatérnio Q e a velocidade angular ω . A evolução de um quatérnio no tempo se relaciona a velocidade angular pela regra da propagação do quatérnio no *enfoque de coordenadas de corpo* (Fjellstad 1994):

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\frac{1}{2}(\epsilon^\top)\omega, \\ \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2}(\eta I + \hat{\epsilon})\omega, \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde $\omega \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de velocidade angular, cujo as direções indicam os eixos de rotação instantâneas.

A derivada do erro de quatérnios no tempo pode então ser deduzida aplicando (2.64) em (2.16):

$$\dot{e}_q = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\eta}} \\ \dot{\tilde{\epsilon}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}B(e_q)\tilde{\omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tilde{\epsilon}^\top \\ \tilde{\eta}I + \hat{\tilde{\epsilon}} \end{bmatrix} \tilde{\omega} \in \mathbb{S}^3, \quad (2.65)$$

onde $\tilde{\omega} = {}^d\omega_{0e}^B - \bar{u}_o$. Note que, essa expressão também é satisfeita para o quatérnio desejado Q_d .

A posição e a orientação relativas entre o sistema de coordenadas desejado e o atual, tal como o erro entre eles pode ser ilustrado na Figura 2.8.

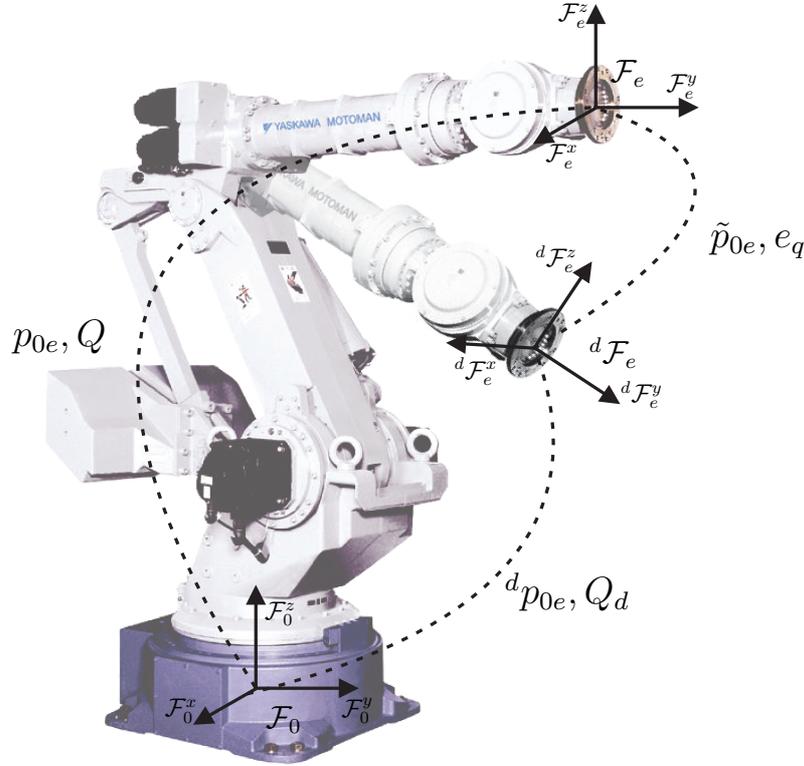


Figura 2.8: Representação dos sistemas de coordenadas desejado ${}^d\mathcal{F}_e$ e atual \mathcal{F}_e (Cortesia da Yaskawa Motoman Inc.).

2.4.2 Lei de Controle Cinemático

Considerando o problema de controle cinemático de posição e orientação do efetador de um manipulador, propõe-se, para os problemas (2.61) e (2.65) a lei de controle:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_p \\ \bar{u}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^d v_{0e}^B + K_p e_p^B - \hat{\omega}_{0e}^B e_p \\ {}^d \omega_{0e}^B + K_o \tilde{\epsilon} \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

o que resulta na seguinte dinâmica do erro em malha fechada:

$$\dot{e}_p = -K_p e_p^B, \quad \dot{\tilde{\epsilon}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\tilde{\epsilon}^T K_o \tilde{\epsilon} \\ \tilde{\eta} K_o \tilde{\epsilon} \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

onde $K_p = K_p^T > 0$ e $K_o = K_o^T > 0$ são os ganhos de posição e de orientação, respectivamente. Portanto, o seguinte teorema pode ser declarado:

Teorema 2.4.1. *Considerando o sistema de controle em malha fechada descrito por (2.57) e (2.58) com a lei de controle dada por (2.66). Assumindo que os sinais de referência ${}^d p_{0e}(t)$ e ${}^d Q(t)$ são continuamente limitados. Baseado nas hipóteses de controle cinemático, as seguintes propriedades são válidas: (i) todos os sinais do sistema em malha-fechada são uniformemente limitados; (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p^B(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\eta} = \pm 1$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\epsilon} = 0$. Portanto, o sistema de controle em malha-fechada é quase globalmente assintoticamente estável ou AGAS (no inglês, almost globally² asymptotically stable).*

Prova. A estabilidade assintótica do sistema não-linear que compreende (2.61) e (2.65) é estudada através da Teoria de Estabilidade de Lyapunov (Slotine & Li 1991). Utilizando a função candidata de Lyapunov (Leite 2011):

$$2V(e_p^B, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}) = e_p^{B\top} e_p^B + (\tilde{\eta} - 1)^2 + \tilde{\epsilon}^\top \tilde{\epsilon} > 0, \quad (2.68)$$

e diferenciando (2.68) com respeito ao tempo ao longo das trajetórias do sistema, e aplicando a regra de propagação do quatérnio de (2.64), tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_p^{B\top} \dot{e}_p^B + (\tilde{\eta} - 1) \dot{\tilde{\eta}} + \tilde{\epsilon}^\top \dot{\tilde{\epsilon}}, \\ \dot{V} &= e_p^{B\top} \left({}^d v_{0e} - \bar{u}_p - \omega_{0e}^B e_p^B \right) - (\tilde{\eta} - 1) \tilde{\epsilon}^\top K_o \tilde{\epsilon} + \tilde{\epsilon}^\top \tilde{\eta} K_o \tilde{\epsilon}, \\ \dot{V} &= -e_p^{B\top} K_p e_p^B - \tilde{\epsilon}^\top K_o \tilde{\epsilon} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Considerando as propriedades do quatérnio unitário quando a orientação do efetuator é igual a orientação desejada, isto é $Q = Q_d$, o erro de orientação torna-se $e_q = \{1, 0^\top\}^\top$. Caso $Q = \bar{Q}_d$, então $e_q = \{-1, 0^\top\}^\top$, o que significa que o sistema de erro de orientação possui dois pontos de equilíbrio.

Uma vez que V é uma função definida positiva com derivada não-positiva tem-se que $V \in \mathcal{L}_\infty$, i.e. V é uniformemente limitado (Ioannou & Sun 1996), implicando que $e_p^B, \tilde{\eta}$ e $\tilde{\epsilon} \in \mathcal{L}_\infty$. Além disso, como $V > 0$ e $\dot{V} \leq 0$, tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} V(e_p^B, \tilde{\eta}, \tilde{\epsilon}) = V_\infty \geq 0$ existe. Então, a partir de (2.69) tem-se que $-\int_0^\infty \dot{V}(t') dt' = V_0 - V_\infty \geq 0$, onde $V_0 = V(e_p^B(0), \tilde{\eta}(0), \tilde{\epsilon}(0))$, que implica em $e_p^B, \tilde{\epsilon} \in \mathcal{L}_2$. A partir de (2.61) e (2.65) e sabendo que $\tilde{\omega}, B(Q) \in \mathcal{L}_\infty$, implica que $\dot{e}_p^B, \dot{\tilde{\epsilon}} \in \mathcal{L}_\infty$, desde que ${}^d p_{0e}$ e ${}^d \omega_{0e}^B$ sejam sinais contínuos e uniformemente limitados.

Portanto, usando o *Lema de Barbalat* (Slotine & Li 1991) e sabendo que $e_p^B, \tilde{\epsilon} \in \mathcal{L}_2$ e $\dot{e}_p^B, \dot{\tilde{\epsilon}} \in \mathcal{L}_\infty$, implica que $\ddot{V} = -2(e_p^{B\top} K_p \dot{e}_p^B - \tilde{\epsilon}^\top K_o \dot{\tilde{\epsilon}})$ é limitada, $\lim_{t \rightarrow \infty} e_p^B = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\epsilon} = 0$ e, conseqüentemente, pela condição de normalidade do quatérnio, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\eta} = \pm 1$ provando a estabilidade assintótica quase-global do sistema de controle em malha-fechada. \square

²Utiliza-se o termo *almost globally* para indicar que o domínio de atração é o espaço de estado completo, exceto para um conjunto de medida nula (Wen & Kreutz-Delgado 1991).

2.5 Manipuladores Redundantes

O manipulador é dito redundante quando número de graus de mobilidade é maior que a dimensão do espaço operacional, isto é $n > m$. Os robôs cirúrgicos são redundantes quando o *shaft* é conectado na sua extremidade, fazendo com que o sistema completo passe a ter mais de 6-GDLs.

Para um manipulador redundante o Jacobiano é retangular, tendo agora mais colunas do que linhas e resultando em infinitas formas de definir a velocidade das juntas para o mesmo movimento no espaço de trabalho.

Utilizando a pseudo-inversa a direita de Moore-Penrose do Jacobiano $(J_{0e}^B)^\dagger = (J_{0e}^B)^\top (J_{0e}^B (J_{0e}^B)^\top)^{-1}$, pode-se obter a equação de controle de velocidade das juntas através das leis de controles descritas por (2.61) e (2.65) e do manipulador sem modificar a postura do efetuador.

$$u = (J_{0e}^B)^\dagger \bar{u} + (I - (J_{0e}^B)^\dagger J_{0e}^B) z_0. \quad (2.70)$$

Isto é válido caso \bar{u} não leve as juntas a uma configuração em que o Jacobiano perca posto e o manipulador atinja uma posição singular.

O primeiro termo de (2.70) é responsável pela minimização da norma das velocidades das juntas. O segundo termo é chamado solução homogênea e utiliza uma abordagem que projeta um vetor de velocidades das juntas arbitrário z_0 no espaço nulo de J_{0e}^B através da matriz de projeção $(I - (J_{0e}^B)^\dagger J_{0e}^B)$ (Siciliano et al. 2011).

Observa-se novamente que esta formulação é válida também para o Jacobiano e as velocidades de corpo (2.51)(2.41)

2.6 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentados alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento da dissertação. A cinemática direta é uma forma de descrever a postura do efetuador no espaço operacional com respeito a um sistema de coordenadas de referência a partir das variáveis de posição das juntas. A representação das velocidades do corpo rígido foram apresentadas, bem como a cinemática diferencial que descreve a relação entre as velocidades das juntas e as velocidades linear e angular do efetuador por meio do Jacobiano Espacial e do Jacobiano de Corpo. O problema de controle cinemático de posição e orientação para manipuladores robóticos é discutido e as devidas modificações para manipuladores redundantes são apresentadas.

Capítulo 3

Controle de Manipuladores Restringidos Cinematicamente

Neste capítulo será estudada o problema de restrição cinemática em manipuladores redundantes. Em geral, para as aplicações de robótica cirúrgica considera-se que o sistema robótico é composto de um manipulador robótico de 6-GDLs, serial ou de elos paralelos, com uma haste com uma ferramenta para realizar os procedimentos cirúrgicos chamada de *shaft* ligada ao último elo do manipulador. O *shaft* é inserido no corpo através do trocarte e possui um punho robótico (*wrist*) de dois ou mais graus de liberdade com uma ferramenta que é utilizada para manipulação ou corte dos tecidos internos (From 2013). Um esquema da inserção do *shaft* com os sistemas de coordenadas correspondentes é ilustrado na Figura 3.1.

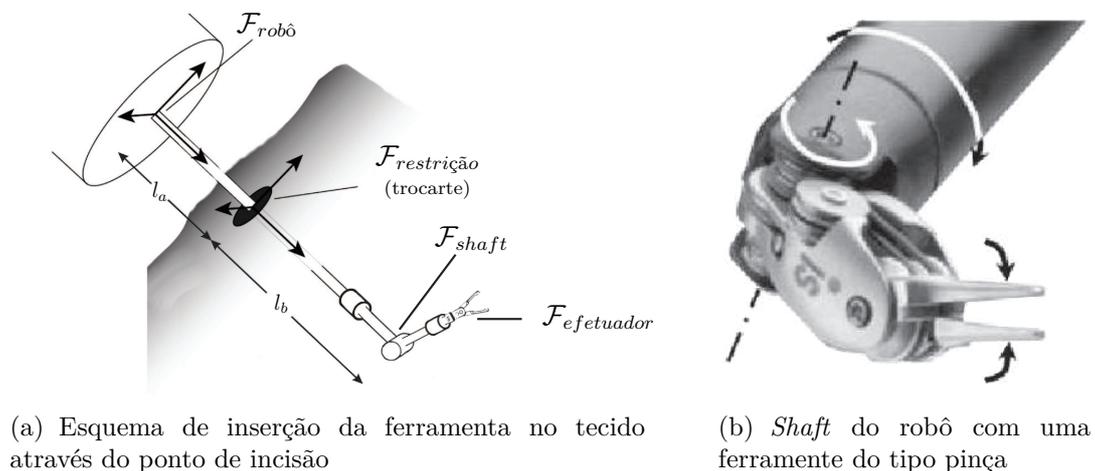


Figura 3.1: Esquema de robô cirúrgico e a inserção do *shaft*.

De forma geral, a restrição em um ponto da cadeia cinemática pode ser escrita como (Ginsberg 2008):

$$H V_{0r}^B(\theta, \dot{\theta}) = 0 \in \mathbb{R}^r, \quad (3.1)$$

onde $H \in \mathbb{R}^{r \times 6}$ é a matriz que define a restrição e r a dimensão do espaço da restrição.

A abordagem apresentada é válida para manipuladores redundantes de n -GDLs, tal que $n - r \geq 6$. Um esquemático de um robô redundante com um tronco antropomórfico, um punho esférico (Siciliano et al. 2011) e um *shaft* de dois graus de liberdade (total de 8-GDLs) é mostrado na Figura 3.2. Os sistemas de coordenadas da restrição \mathcal{F}_r , o sistema de coordenadas localizado no começo e no fim do elo restringido (\mathcal{F}_i e \mathcal{F}_j respectivamente) e, por fim, o sistema de coordenadas do efetuator \mathcal{F}_e também são representados na Figura 3.2. Os movimentos possíveis para cada sistema de cada elo também são descritos na figura.

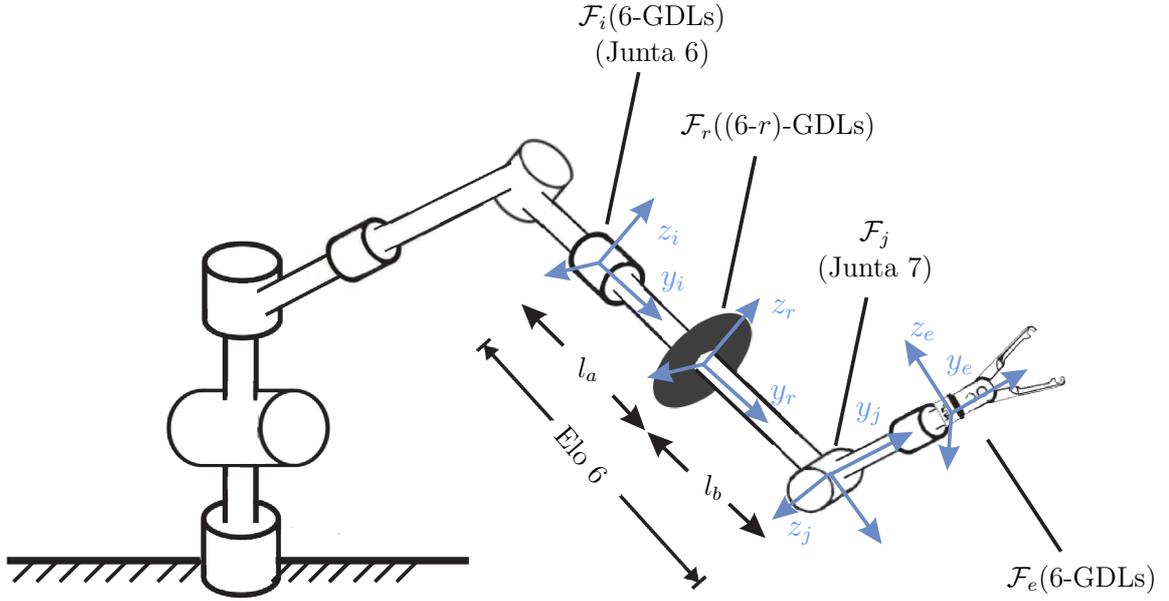


Figura 3.2: Esquema de robô cirúrgico e a inserção do *shaft*.

Nesta dissertação, estuda-se uma restrição aplicada em um ponto do sexto elo de um manipulador redundante. A restrição é localizada em um ponto entre as juntas 6 e 7 e restringe o movimento em r direções, reduzindo o espaço de movimento após a restrição em r -GDLs. Nota-se que as duas juntas após a restrição podem fazer com que o efetuator recupere a dimensão do espaço de movimento em seis graus de liberdade.

Sem perda de generalidade, considera-se que os sistemas de coordenadas \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_r estão alinhados de forma que $R_{ri} = I$ (From 2013).

A relação entre as velocidades dos sistema de coordenadas \mathcal{F}_r e \mathcal{F}_i , considerando \mathcal{F}_r fixo com relação a \mathcal{F}_i , é dada por (2.43) de forma que:

$$V_{0r}^B = Ad_{g_{ri}} V_{0i}^B = \begin{bmatrix} R_{ri} & \hat{p}_{ir} R_{ri} \\ 0 & R_{ri} \end{bmatrix} V_{0i}^B = \begin{bmatrix} v_{0i}^B + \hat{p}_{ir} \omega_{0i}^B \\ \omega_{0i}^B \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

A velocidade do robô no sistema de coordenadas \mathcal{F}_i pode ser calculada a partir do Jacobiano parcial (função das juntas do manipulador a partir da primeira junta até a junta anterior a restrição), tratando-se como um robô separado de i -*GDLs* (Murray et al. 1994):

$$V_{0i}^B = J_{0i}^B(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i}, \quad (3.3)$$

onde $\theta_{1i} \in \mathbb{R}^i$ são as posições das juntas da base até o elo do sistema de coordenadas \mathcal{F}_i , $\dot{\theta}_{1i} \in \mathbb{R}^i$ é a velocidade destas juntas e $J_{0i}^B(\theta_{1i}) \in \mathbb{R}^{6 \times i}$ é o Jacobiano parcial. De (3.2) e (3.3), tem-se que:

$$V_{0r}^B = Ad_{g_{ri}} J_{0i}^B(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i} = J_{0r}^B(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i}, \quad (3.4)$$

onde $J_{0r}^B(\theta_{1i}) = Ad_{g_{ri}} J_{0i}^B(\theta_{1i})$ é o Jacobiano que mapeia a velocidade das juntas θ_{1i} para as velocidades do sistema de coordenadas da restrição. A velocidade do efetuador é dada analogamente a (3.3):

$$V_{0e}^B = J_{0e}^B(\theta) \dot{\theta}, \quad (3.5)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de posição de todas as juntas do manipulador, $J_{0e}^B(\theta) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ é o Jacobiano geométrico de corpo do efetuador.

Substituindo (3.4) em (3.1) tem-se :

$$\underbrace{H Ad_{g_{ri}}}_{\Lambda} J_{0i}^B(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i} = 0, \quad (3.6)$$

e então, considerando o espaço nulo de $\Lambda = H Ad_{g_{ri}}$ tem-se (Coutinho et al. 2014):

$$\dot{\theta}_{1i} = J_{0i}^{B\dagger} \Lambda^\# \bar{v}_{0i}, \quad (3.7)$$

onde $\Lambda^\#$ é a matriz que gera o espaço nulo de $H Ad_{g_{ri}}$, de forma que $H Ad_{g_{ri}} \Lambda^\# = 0$ e $\bar{v}_{0i} \in \mathbb{R}^{6-r}$, onde $6-r$ é a dimensão do espaço nulo de $H Ad_{g_{ri}}$ e caracteriza os graus de liberdade dentro deste subespaço.

Particionando $\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_{1i} & \theta_{jn} \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$, sendo $\theta_{jn} \in \mathbb{R}^{n-i}$ as juntas posteriores a restrição, pode-se reescrever (3.5) como

$$V_{0e}^B = \begin{bmatrix} J_{0e_1}^B(\theta) & J_{0e_2}^B(\theta_{jn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1i} \\ \dot{\theta}_{jn} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

onde $J_{0e_1}^B(\theta) \in \mathbb{R}^{6 \times i}$ e $J_{0e_2}^B(\theta_{jn}) \in \mathbb{R}^{6 \times n-i}$. Substituindo (3.7) em (3.8) tem-se que

$$V_{0e}^B = \underbrace{\begin{bmatrix} J_{0e_1}^B(\theta) & J_{0i}^{B\dagger} \Lambda^\# & J_{0e_2}^B(\theta_{jn}) \end{bmatrix}}_{J_{0e}^r} \begin{bmatrix} \bar{v}_{0i} \\ \dot{\theta}_{jn} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde $J_{0e}^r = \begin{bmatrix} J_{0e_1}^B(\theta) & J_{0i}^{B\dagger}(\theta_{1i}) \Lambda^\# & J_{0e_2}^B(\theta_{jn}) \end{bmatrix}$ é chamado *Jacobiano Restrito*.

Supondo que o Jacobiano parcial $J_{0i}^{B\dagger}(\theta_{1i})$ seja não-singular, a partir de (3.8) tem-se que:

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1i} \\ \dot{\theta}_{jn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{0i}^{B\dagger} V_{0i}^B \\ \dot{\theta}_{jn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{0i}^{B\dagger} \Lambda^\# \bar{v}_{0i} \\ \dot{\theta}_{jn} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Aplicando (3.10) em (3.9) a cinemática diferencial restrita é expressa por:

$$V_{0e}^B = J_{0e}^r \begin{bmatrix} J_{0i}^{B\dagger} \Lambda^\# & \vdots & 0^{i \times n-i} \\ & & I^{(n-i) \times (n-i)} \end{bmatrix}^\dagger \dot{\theta}. \quad (3.11)$$

O Jacobiano de corpo representa um mapeamento das velocidade das juntas à velocidade do efetuador em coordenadas de corpo e pode ser particionado em duas partes como:

$$\begin{aligned} J_{0e}^B &= \begin{bmatrix} \xi_1^\dagger & \xi_2^\dagger & \cdots & \xi_n^\dagger \end{bmatrix}, \\ J_{0e}^B &= \begin{bmatrix} \underbrace{\text{Ad}_{g_{1e}}^{-1} \xi_1^1 \quad \cdots \quad \text{Ad}_{g_{ie}}^{-1} \xi_i^i \quad \text{Ad}_{g_{je}}^{-1} \xi_j^j \quad \cdots \quad \xi_n^n}_{\in \mathbb{R}^{6 \times n}} \end{bmatrix}, \\ J_{0e}^B &= \begin{bmatrix} & J_{0e_1}^B(\theta) & J_{0e_2}^B(\theta_{jn}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times n}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde ξ_i^i é o twist constante no sistema de coordenadas \mathcal{F}_i e $\text{Ad}_{g_{ie}}^{-1}$ é a matriz Adjunta que transforma ξ_i^i do sistema de coordenadas \mathcal{F}_i para ξ_i^\dagger representado no sistema de coordenadas do efetuador \mathcal{F}_e . $J_{0e_1}^B(\theta)$ mapeia a contribuição das juntas anteriores a restrição $\dot{\theta}_{1i}$ para a velocidade do efetuador enquanto $J_{0e_2}^B(\theta_{jn})$ mapeia a contribuição das juntas posteriores para o ponto de incisão.

O Jacobiano de corpo parcial é denotado por $J_{0i}^B(\theta_{1i})$, o que corresponde ao mapeamento das velocidades das juntas $\dot{\theta}_{1i}$ para a velocidade do elo l_i em referência ao próprio sistema de coordenadas \mathcal{F}_i . O Jacobiano de corpo parcial para \mathcal{F}_i é dado por:

$$J_{0i}^B(\theta_{1i}) = \begin{bmatrix} \text{Ad}_{g_{1i}}^{-1} \xi_1^1 & \text{Ad}_{g_{2i}}^{-1} \xi_2^2 & \cdots & \xi_i^i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times i}. \quad (3.13)$$

De (3.8) e (3.13) pode-se reescrever $J_{0e_1}^B(\theta_{1i})$ como:

$$\begin{aligned} J_{0e_1}^B(\theta) &= \begin{bmatrix} \text{Ad}_{g_{1e}}^{-1} \xi_1^1 & \text{Ad}_{g_{2e}}^{-1} \xi_2^2 & \cdots & \text{Ad}_{g_{ie}}^{-1} \xi_i^i \end{bmatrix}, \\ J_{0e_1}^B(\theta) &= \text{Ad}_{g_{ei}} \begin{bmatrix} \text{Ad}_{g_{1i}}^{-1} \xi_1^1 & \text{Ad}_{g_{2i}}^{-1} \xi_2^2 & \cdots & \xi_i^i \end{bmatrix}, \\ J_{0e_1}^B(\theta) &= \text{Ad}_{g_{ei}} J_{0i}^B(\theta_{1i}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assim, o Jacobiano restrito é dado por:

$$J_{0e}^r = \begin{bmatrix} \text{Ad}_{g_{ei}} \Lambda^\# & J_{0e_2}^B(\theta_{jn}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times m}, \quad (3.15)$$

para alguma restrição r -dimensional. Se a dimensão do espaço operacional é igual a 6, a dimensão do espaço coluna do Jacobiano é dada por $m = 6 - r + n - i$.

3.1 Controle Cinemático de Manipuladores Restringidos

Deseja-se controlar a postura do efetuador de forma que $\mathfrak{g}_{0e} \rightarrow {}^d\mathfrak{g}_{0e}$, para isso, considera-se que os objetivos de controle para posição (2.60) e orientação (2.63) do efetuador são dados por:

$$e^B = \begin{bmatrix} e_p^B \\ e_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_p^B \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

onde $e^B \in \mathbb{R}^m$ corresponde ao erro de rastreamento da postura do efetuador no espaço operacional expresso nas coordenadas do efetuador.

O sistema a ser controlado, respeitando as restrições de velocidade impostas, é dado por:

$$V_{0e}^B = J_{0e}^r \begin{bmatrix} J_{0i}^{B\dagger} \Lambda^\# & \vdots & 0^{i \times n-i} \\ & & I^{(n-i) \times (n-i)} \end{bmatrix}^\dagger u, \quad (3.17)$$

para um sinal de controle $u = \dot{\theta}$. Desta forma, supondo que o Jacobiano restrito J_{0e}^r seja não-singular, o sinal de controle de velocidade nas juntas é dado por:

$$u = \begin{bmatrix} J_{0i}^{B\dagger} \Lambda^\# & \vdots & 0^{i \times n-i} \\ & & I^{(n-i) \times (n-i)} \end{bmatrix} J_{0e}^{r\dagger} \bar{u}, \quad \bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_p \\ \bar{u}_o \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

onde \bar{u}_p e \bar{u}_o são os sinais de controle Cartesiano de posição e orientação, respectivamente. Então, substituindo (3.18) em (3.17), tem-se que $V_{0e}^B = \bar{u}$.

Desta forma as velocidades das juntas $\dot{\theta}$ podem ser calculadas através da escolha de um sinal de controle Cartesiano \bar{u} para o controle de postura em malha fechada similar a (2.66), resultado na equação do erro semelhante a (2.67):

$$\dot{e}^B = \begin{bmatrix} -K_p e_p^B \\ -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^\top K_o \tilde{\epsilon} \\ \frac{1}{2} \tilde{\eta} K_o \tilde{\epsilon} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

tornando o sistema quase globalmente assintoticamente estável. O diagrama de blocos para o controle cinemático para um manipulador restringido é ilustrado na Figura 3.3.

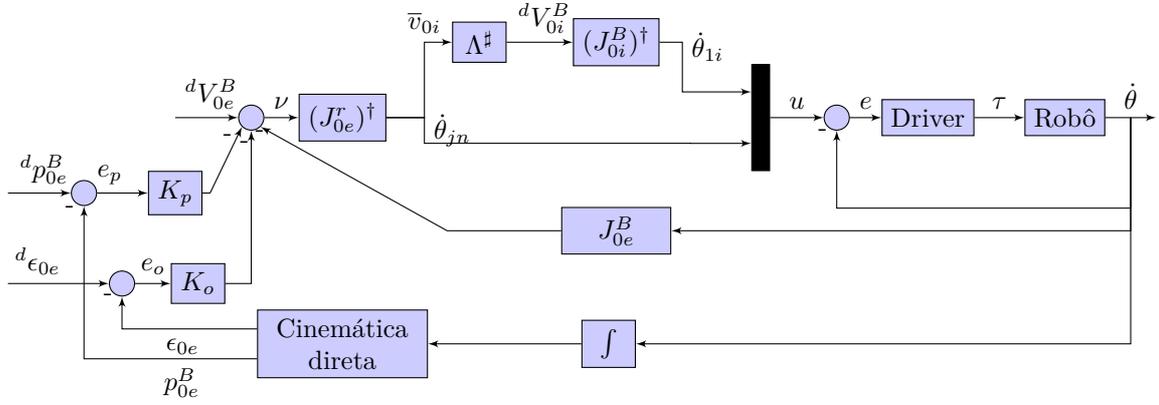


Figura 3.3: Malha de controle cinemático do manipulador com restrição.

3.2 Restrição Unidirecional (eixo x_r) em um Manipulador de 8-*GDL*

Para algumas técnicas cirúrgicas, a incisão realizada é feita por um corte transversal no abdômen e não há a necessidade de um trocar pois o movimento deve ser evitado somente em uma direção para que não ocorra mais danos ao tecido. Considerando um manipulador de oito juntas de revolução e levando em conta uma restrição na direção de um dos eixos perpendiculares ao elo entre as juntas 6 e 7 possibilita-se que um movimento $SE(3)$ possa ser realizado pelo efetuador.

Considerando um elo p_{ij} conectando duas juntas, onde se localizam os sistemas de coordenadas \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_j , considerando também que um ponto deste elo encontra-se restringido e é representado pelo sistema de coordenadas \mathcal{F}_r , alinhado a \mathcal{F}_i ($R_{ir} = I_{3 \times 3}$). Supondo que este elo se prolongue ao longo do eixo y do sistema de coordenadas \mathcal{F}_i e que a posição da restrição em relação a \mathcal{F}_i seja dada por

$p_{ir} = \begin{bmatrix} 0 & l_a & 0 \end{bmatrix}^\top$, a relação entre as velocidades de \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_r é dada por:

$$V_{0r}^B = Ad_{g_{ri}} V_{0i}^B = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \hat{p}_{ir} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} V_{0i}^B, \quad (3.20)$$

onde

$$\hat{p}_{ir} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_a \\ 0 & 0 & 0 \\ l_a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e $Ad_{g_{ri}}$ é a matriz de transformação adjunta do sistema de coordenadas \mathcal{F}_r em relação ao sistema de coordenadas \mathcal{F}_i .

Para uma restrição ao longo do eixo x do sistema de coordenadas \mathcal{F}_r , a matriz de restrição de (3.1) é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Portanto, a restrição cinemática é dada por:

$$H V_{0r}^B = \Lambda V_{0i}^B = 0 \Rightarrow v_x^r = v_x^i - l_a \omega_z^i = 0, \quad (3.22)$$

onde

$$\Lambda = H Ad_{g_{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_a \end{bmatrix}.$$

Uma possível escolha para a matriz que gera o espaço nulo $\Lambda^\#$, considerando (3.22), é dada por (From 2013):

$$\Lambda^\# = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{l_a} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Assim, pode-se calcular o Jacobiano restrito, considerando um robô de 8-*GDLs* com uma restrição imposta após a sexta junta. A perda de dimensionalidade em um grau de liberdade causada pela restrição é recuperada pelas duas últimas juntas, como ilustrado na Figura 3.4.

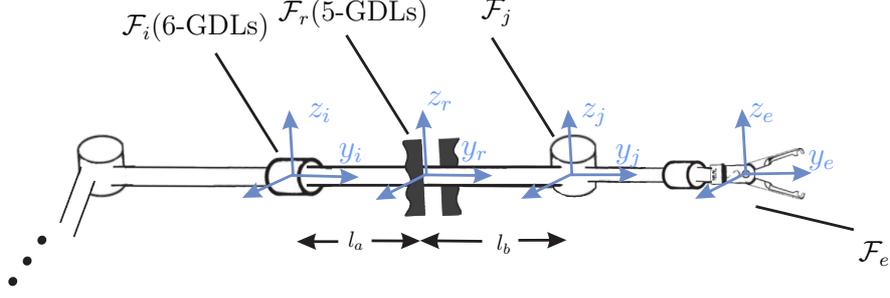


Figura 3.4: Robô redundante com elo restringido em uma única direção.

Além disso, considerando que a última junta seja uma junta de revolução em torno de um *twist* na direção do eixo z do sistema de coordenadas do elo posterior a restrição \mathcal{F}_j , o Jacobiano restrito será dada por:

$$J_{0e}^r = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_8 s_7 & -s_8 & \alpha_3 & -l_8 s_7 s_8 & -l_8 c_8 & 0 \\ \frac{l_b s_7}{l_a} & c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & s_7 s_8 & c_8 & \alpha_4 & l_8 c_8 s_7 & -l_8 s_8 & 0 \\ -\frac{s_8}{l_a} & 0 & 0 & c_7 c_8 & c_8 s_7 & -s_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_7 & c_7 & 0 & 1 \\ \frac{c_8}{l_a} & 0 & 0 & c_7 s_8 & s_7 s_8 & c_8 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

onde $s_i = \sin(\theta_i)$, $c_i = \cos(\theta_i)$, $\alpha_1 = -c_8 (l_8 + l_b c_7)/l_a$, $\alpha_2 = -s_8 (l_8 + l_b c_7)/l_a$, $\alpha_3 = -s_8 (l_a + l_b + l_8 c_7)$ e $\alpha_4 = c_8 (l_a + l_b + l_8 c_7)$.

3.3 Restrição Bidirecional (eixos x_r e z_r) em um Manipulador de 8-*GDL*

Para a maioria dos procedimentos cirúrgicos minimamente invasivos, tais como cirurgias ortopédicas (Bauer et al. 1999), prostatectomia (Davies et al. 1989), ou laparoscópicas em geral (Lanfranco et al. 2004) exige-se que os movimentos laterais do ponto de inserção (nos eixos x_r e z_r do sistema de coordenadas \mathcal{F}_r) sejam nulos.

Assume-se uma cadeia robótica de 8-*GDL* ($n=8$) que é inserida através de um orifício. Isso adiciona uma restrição de dois graus de liberdade no ponto de entrada, representado por \mathcal{F}_r , isto é, o ponto em um elo que está penetrando o orifício, permitindo-se 6-*GDLs* anteriores a restrição ($i = 6$) e 2-*GDL* posteriores a restrição ($n - i = 2$).

Considerando a mesma relação de velocidades entre o ponto de restrição representado pelo sistema de coordenadas \mathcal{F}_r e o sistema de coordenadas \mathcal{F}_i descrito na Seção 3.2, tal como a matriz adjunta entre \mathcal{F}_i e \mathcal{F}_r (3.20). Considera-se desta

vez, uma restrição que evite os movimentos do ponto de restrição nas direções dos eixos x e z do sistema de coordenadas de \mathcal{F}_r . Portanto, esta restrição é descrita por:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H V_{0r}^B = V_{0r_{xz}}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Da definição da restrição em (3.6), tem-se que:

$$\Lambda = H Ad_{g_{ri}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_a \\ 0 & 0 & 1 & l_a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H V_{0r}^B = \Lambda V_{0i}^B = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} v_x^r \\ v_z^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x^a - l_a \omega_a^z \\ v_z^a + l_a \omega_a^x \end{bmatrix} = 0, \quad (3.26)$$

onde assume-se que a distância da junta anterior a restrição do ponto de entrada l_a é conhecida. Em (3.9) uma possível escolha para a matriz que gera o espaço nulo $\Lambda^\#$ é dada por

$$\Lambda^\# = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{l_a} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Proposta esta matriz, pode-se definir duas possibilidades para a matriz J_{0e}^r assumindo-se a direção do *twist* da sexta junta coincidente ao alinhamento dos sistemas de coordenadas \mathcal{F}_i , \mathcal{F}_r e \mathcal{F}_j ao longo do eixo y do sistema de coordenadas inercial. A primeira é dada por um punho “ zy ”, de forma que as juntas posteriores a restrição se posicionem com o manipulador da Figura 3.2. Nesse caso, o *twist* da sétima junta está alinhado ao eixo z do sistema de coordenadas inercial e a última junta alinha seu *twist* ao da junta anterior a restrição. O Jacobiano restrito para

este sistema é dada por:

$$J_{0e}^r = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_8 s_7 & \alpha_3 & -l_8 s_7 s_8 & -l_8 c_8 & 0 \\ l_b s_7 / l_a & c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & s_7 s_8 & \alpha_4 & l_8 c_7 c_8 & -l_8 s_8 & 0 \\ -s_8 / l_a & 0 & -c_7 c_8 / l_a & c_8 s_7 & -s_8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_7}{l_a} & c_7 & 0 & 1 \\ c_8 / l_a & 0 & -c_7 s_8 / l_a & s_7 s_8 & c_8 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

onde $\alpha_1 = -c_8 (l_8 + l_b c_7) / l_a$, $\alpha_2 = -s_8 (l_8 + l_b c_7) / l_a$, $\alpha_3 = s_8 (l_b + l_8 c_7) / l_a$ e $\alpha_4 = -c_8 (l_b + l_8 c_7) / l_a$.

Outra configuração possível assume que os *twists* das últimas três juntas estejam posicionados de forma perpendicular, formando um punho “ zx ”, como a inserção proposta na Figura 3.5, em que o *twist* das duas últimas juntas estejam alinhados com o eixo z e x do sistema de coordenadas de corpo de cada um delas, respectivamente. A convenção adotada assume que a distância entre as duas últimas juntas seja desprezível, logo, esta convenção permite análises semelhantes ao caso em que o punho seja do tipo “ xz ”.

O Jacobiano restrito para este sistema é dado por:

$$J_{0e}^r = \begin{bmatrix} \alpha_1 & s_7 & 0 & 0 & -l_8 & 0 \\ l_b c_8 s_7 / l_a & c_7 c_8 & \alpha_2 & -l_8 s_7 s_8 & 0 & -l_8 s_8 \\ l_b c_7 s_8 / l_a & c_7 s_8 & \alpha_3 & l_8 c_8 s_7 & 0 & l_8 c_8 \\ 0 & 0 & -c_7 / l_a & s_7 & 0 & 1 \\ -s_8 / l_a & 0 & c_8 s_7 / l_a & c_7 c_8 & -s_8 & 0 \\ c_8 l_a & 0 & s_7 s_8 / l_a & c_7 s_8 & c_8 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

onde $\alpha_1 = l_8 + l_b c_7 / l_a$, $\alpha_2 = s_8 (l_b + l_8 c_7) / l_a$ e $\alpha_3 = -c_8 (l_b + l_8 c_7) / l_a$.

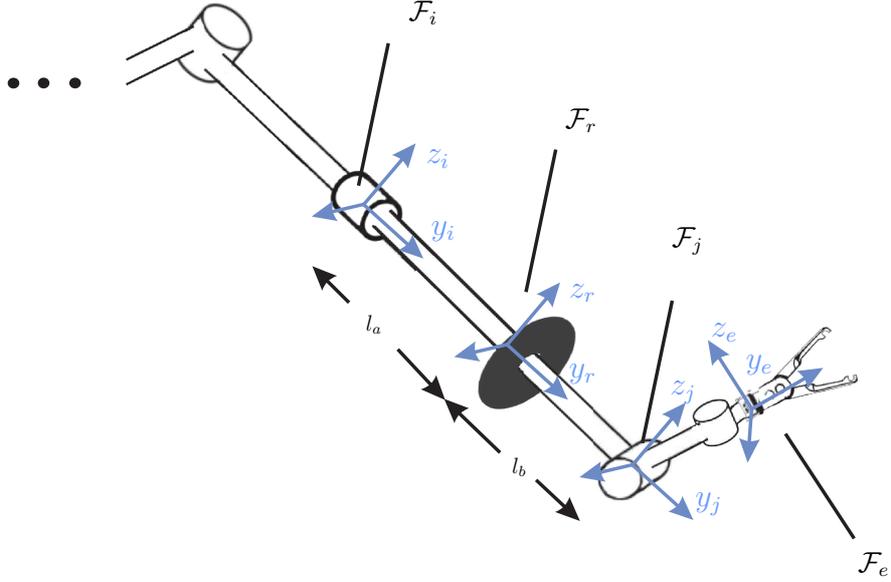


Figura 3.5: Esquema alternativo de punho para o *shaft* inserido.

3.4 Ponto de Incisão em Movimento

Existem procedimentos minimamente invasivos de cirurgia em que menos danos são causados ao tecido caso o RCM acompanhe o movimento que o tecido perfurado executa. Exemplos disso podem ser observados em procedimentos afetados pela respiração do paciente ou pelos batimentos cardíacos, ou ainda em cirurgias oculares em que o olho não permanece estático durante a operação (Wei et al. 2009). Desta forma, esta seção busca discutir a restrição quando o ponto restringido do manipulador realiza algum movimento.

Neste caso, a velocidade das restrições não será mais nula e a restrição pode ser definida por:

$$\begin{aligned} H V_{0r}^B &= {}^d v_{0r} \in \mathbb{R}^r, \\ \underbrace{H Ad_{g_{0i}}}_{\Lambda} V_{0i}^B &= {}^d v_{0r}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Da definição do Jacobiano de corpo parcial (3.14):

$$\Lambda J_{0i}^B \dot{\theta}_{1i} = {}^d v_{0r}, \quad (3.31)$$

busca-se um sinal de controle para as juntas que respeite a restrição. Supondo que o Jacobiano parcial $J_{0i}^B(\theta_{1i})$ seja não-singular, tem-se que:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{1i} &= (J_{0i}^B(\theta_{1i}))^\dagger V_{0i}^B, \\ \dot{\theta}_{1i} &= (J_{0i}^B(\theta_{1i}))^\dagger \left(\Lambda^\# \bar{v}_{0i} + \Lambda^\dagger {}^d v_{0r} \right),\end{aligned}\quad (3.32)$$

onde $\Lambda^\#$ é a matriz que gera o espaço nulo de Λ tal que $\Lambda\Lambda^\# = 0$ e Λ^\dagger é a pseudo-inversa a direita de Λ tal que $\Lambda\Lambda^\dagger = I$. Aplicando (3.32) no particionamento do Jacobiano do manipulador (3.8), define-se o sistema de controle:

$$V_{0e}^B = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{Ad}_{g_{ei}} \Lambda^\# & J_{0e_2}^B(\theta_{jn}) \end{bmatrix}}_{J_{0e}^r} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{v}_{0i} \\ \dot{\theta}_{jn} \end{bmatrix}}_u + \underbrace{\text{Ad}_{g_{ei}} \Lambda^\dagger}_{J_c} {}^d v_{0r}, \quad (3.33)$$

onde $J_c \in \mathbb{R}^{6 \times r}$ mapeia o movimento do ponto de incisão ao movimento do efetuador e J_{0e}^r é o Jacobiano restrito. Desta forma, pode-se escolher uma lei de controle de postura do efetuador para (3.33) dada por:

$$u = (J_{0e}^r)^\dagger \left({}^d V_{0e}^B + \begin{bmatrix} K_p e_p^B - \hat{\omega}_{0e}^B e_p^B \\ K_o \tilde{\epsilon} \end{bmatrix} - J_c {}^d v_{0r} \right). \quad (3.34)$$

Note que, para um sinal de referência ${}^d v_{0r}$ limitado, (3.34) define um sinal de controle que assegura a estabilidade assintótica quase global para o sistema de controle em malha fechada.

3.5 Manipulabilidade

Quando o efetuador do manipulador fica impossibilitado de realizar movimentos em alguma direção o Jacobiano do manipulador se torna singular. Esta medida que define a distância da posição do efetuador a uma configuração que torna o Jacobiano singular é chamada de manipulabilidade. Em Murray et al. (1994), define-se manipulabilidade local como a capacidade do sistema de coordenadas do efetuador \mathcal{F}_e de realizar um movimento regido pelo Jacobiano J_{0e}^B dentro do espaço de trabalho do manipulador.

O conceito de manipulabilidade local foi primeiramente estudado por Yoshikawa (1985b) onde foi desenvolvido uma maneira de mensurar um índice de manipulabilidade. O objetivo é evitar configurações singulares modificando sua trajetória, evitando assim valores de manipulabilidade muito baixos. No caso de robôs redundantes, o fato da quantidade de graus de liberdade n ser superior a dimensão do espaço de tarefas p resolve parcialmente o problema de baixa manipulabilidade Yoshikawa (1985a), gerando assim um espaço nulo no qual pode-se

encontrar uma trajetória em que a manipulabilidade mantenha-se acima de um limiar aceitável.

Assim, estuda-se o índice manipulabilidade local por meio do Jacobiano do manipulador $J_M \in \mathbb{R}^{6 \times n}$. O Jacobiano, então, mapeia movimentos infinitesimais das juntas ($\dot{\theta}$) a movimentos infinitesimais no espaço de trabalho V_{0e}^B , de forma que se possa gerar uma matriz de manipulabilidade W :

$$W = J_M J_M^\top, \quad (3.35)$$

e a manipulabilidade é dada por w :

$$w = \sqrt{|\det J_M J_M^\top|}. \quad (3.36)$$

Visto que a a matriz Jacobiano J_M pode ser decomposta pelos seus valores singulares:

$$J_M = U \Sigma V^\top, \quad (3.37)$$

onde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_p & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

e $U \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes ortogonais. A equação do índice de manipulabilidade (3.36) pode então ser reescrita como:

$$w = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_p. \quad (3.39)$$

Para fins ilustrativos, a manipulabilidade pode ser representada por um elipsóide de dimensão $p = 6$ no qual os autovalores de $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ e os autovetores de $U = \{v_1, \dots, v_p\}$ representam os eixos do elipsóide. O elipsóide para o caso em que a dimensão do espaço de trabalho é dada por $p = 2$ é ilustrado na Figura 3.6.

No caso deste trabalho, um manipulador serial é restringido em um ponto de sua cadeia cinemática, evitando movimentos em uma ou mais direções a partir deste ponto. Assim, a cadeia cinemática tem seus movimentos restringidos para as juntas anteriores ao ponto de restrição, mas após ele, o resto da cadeia cinemática encontra-se livre para realizar movimentos. Esta maneira de tratar o manipulador restringido não pode ser estudada da mesma maneira que um manipulador serial

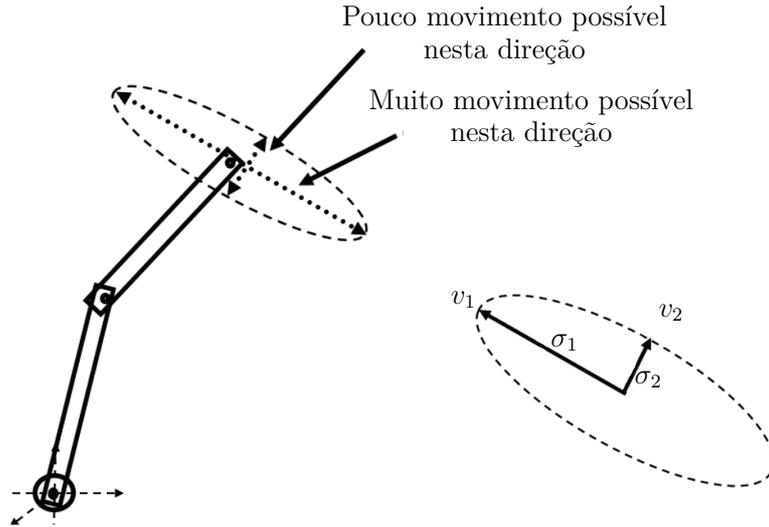


Figura 3.6: Elipsóide de manipulabilidade do efetuador, ilustrado para o caso planar de dois GDLs.

livre ou um manipulador restrito mecanicamente (Wen & Wilfinger 1999, Merlet 2007), como um robô de elos paralelos, por exemplo.

O índice de manipulabilidade de um manipulador serial restringido pode ser determinado em dois passos. A primeira é calcular o índice de manipulabilidade do Jacobiano parcial de corpo J_{0i}^B , w_i . Isto mede a eficiência que o manipulador pode gerar os movimentos do sistema de coordenadas \mathcal{F}_i e, conseqüentemente, as velocidades da restrição V_{0r}^B . Isto é equivalente ao índice proposto em (3.36), onde $J_M = J_{0i}^B$. No entanto, este cálculo não leva em conta eficiência em gerar a velocidade do efetuador V_{0e}^B .

Posteriormente, estima-se o índice de manipulabilidade do efetuador, assumindo que as i juntas anteriores a restrição possam realizar movimentos $SE(3)$. A partir do Jacobiano restrito J_{0i}^r pode-se aferir quando é possível gerar a velocidade do efetuador em seis graus de liberdade a partir do sinal de controle u calculado. A análise da manipulabilidade desta matriz leva em consideração somente a geometria da restrição e a cadeia cinemática posterior a ela.

O elipsóide de manipulabilidade do Jacobiano restrito é então dado escolhendo-se $J_M = J_{0e}^r$ e fornece a manipulabilidade nas direções das velocidades do efetuador V_{0e}^B . Isto pode ser interpretado como a mobilidade de V_{0e}^B dado a velocidade de corpo do sistema de coordenadas \mathcal{F}_i , V_{0i}^B , e a velocidade das juntas posteriores a restrição $\dot{\theta}_{jn}$. Por causa desta dependência, a mobilidade de \mathcal{F}_e não pode ser dada unicamente pela análise da manipulabilidade do Jacobiano restrito, w_r .

Assim, os dois índices de manipulabilidade são essenciais para avaliar a capacidade de movimento do efetuador do manipulador série restringido. Caso ambos os índices de manipulabilidade tenham valores elevados, pode-se afirmar

que o efetuador não terá dificuldades em realizar o movimento desejado, podendo realizar movimentos na direção de qualquer um de seus eixos ou rotacionar ao redor deles livremente. A manipulabilidade também ajuda a descobrir a causa das singularidades e até mesmo como resolve-las.

No caso da restrição unidirecional da Seção 3.2, aplicando a decomposição em valores singulares para o Jacobiano restrito em que uma direção do elo é restringida (3.24) por exemplo, pode-se encontrar os valores singulares, cujo produto é interpretado como a manipulabilidade da restrição w_r .

$$w_r = l_b^2 \frac{\sin(\theta_7)^2 (l_a + l_b)^2 + 2}{l_a^2}. \quad (3.40)$$

Nota-se que a manipulabilidade da restrição unidirecional é nula para quando $l_b = 0$, ou seja, a restrição localiza-se muito próxima da junta posterior $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}_j$. O índice de manipulabilidade é máximo para valores mínimos de l_a , porém, para estes valores, a restrição seria interpretada como singular, pois para $\mathcal{F}_r = \mathcal{F}_i$ a matriz adjunta é dada por $Ad_{g_{ri}} = I_{6 \times 6}$, e a matriz aniquiladora $\Lambda^\#$ (3.23) não poderia ser gerada, fazendo com que os sinais de controle gerados fossem muito elevados.

A evolução da manipulabilidade para a restrição unidirecional é ilustrada na Figura 3.7, onde a o ângulo da sétima junta θ_7 varia de 0 a 8 radianos e a distância l_b varia de 0 a 1 em um elo de dimensão $l_a + l_b = 2m$.

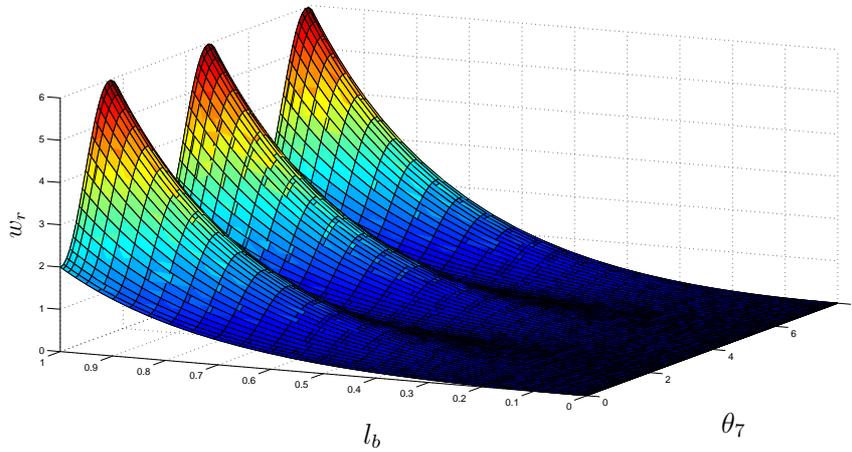


Figura 3.7: Manipulabilidade do Jacobiano restrito para o caso da restrição unidirecional.

No caso da restrição bilateral, a restrição é um plano no espaço, logo, deve-se dispor de duas juntas posteriores a ela para que a manipulabilidade seja reposta. Para o caso em que o eixo das juntas posteriores são do tipo “ zx ” ou “ xz ” a manipulabilidade do Jacobiano restrito (3.29) é dada por:

$$w_r = \frac{l_b^2 \cos(\theta_7)}{l_a^2}, \quad (3.41)$$

em que novamente, de maneira semelhante a (3.40), a manipulabilidade depende de l_b e l_a , mas desta vez w_r será nulo caso $\theta_7 = \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. A singularidade em $\cos(\theta_7) = 0$ é dada pela interseção do centro do punho com o eixo de rotação da junta anterior a restrição, uma singularidade genérica do tipo cotovelo (Spong et al. 2005). Para esta restrição os resultados são observados na Figura 3.8. Assim como no caso anterior, a distância l_b varia de 0 a 1 em um elo de dimensão $l_a + l_b = 2$, mas neste caso a posição da junta posterior a restrição θ_7 também varia.

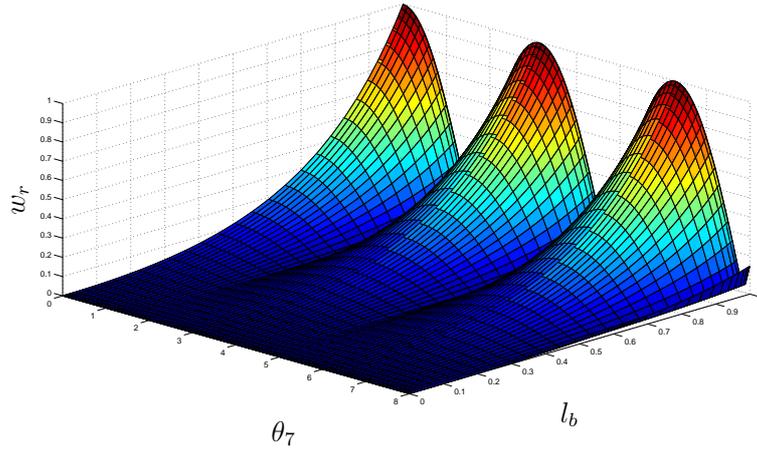


Figura 3.8: Manipulabilidade do Jacobiano restrito para o caso da restrição bilateral com punho zx .

No caso em que o eixo de rotação da última junta do manipulador e da última junta anterior a restrição rotacionam no eixo y em coordenadas de corpo, a restrição é dada por:

$$w_r = \frac{l_b^2 \sin(\theta_7)}{l_a^2}. \quad (3.42)$$

Neste caso, quando as juntas θ_6 e θ_8 se alinham, ou seja, em $\theta_7 = \{0 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ocorre uma singularidade, denominada genericamente de singularidade de punho esférico (Spong et al. 2005). A evolução desta manipulabilidade em relação a variação de l_b e θ_7 foi feita como no caso anterior e pode ser observado na Figura 3.9.

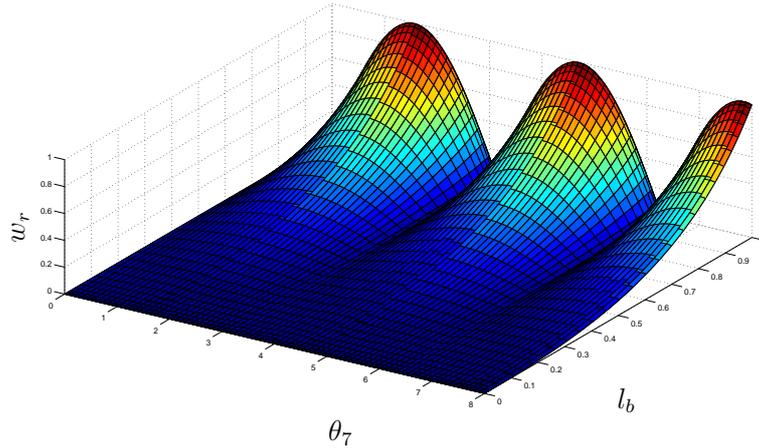


Figura 3.9: Manipulabilidade do Jacobiano restrito para o caso da restrição bilateral com punho zy .

3.6 Singularidades Cinemáticas

Em geral, não é possível garantir que o sinal de controle u seja factível e produza movimentos adequados para as juntas do robô, uma vez que o mesmo depende da inversa do Jacobiano. Neste contexto, quando o efetuador aproxima-se de uma singularidade de fronteira ou interna, o Jacobiano restrito J_{0e}^r (ou o Jacobiano parcial J_{0i}^B) torna-se singular apresentando linhas (ou colunas) linearmente dependentes.

Este fato gera um inconveniente não apenas nas configurações singulares do robô, como também na vizinhança destas singularidades, onde os Jacobianos tornam-se mal-condicionados, resultando em sinais de velocidades das juntas superiores aos suportados. Para este problema, utiliza-se dois algoritmos que propõem solucionar, ou reduzir os efeitos, da problemática de singularidades cinemáticas.

3.6.1 Método Damped Least-Squares (DLS)

A solução mais utilizada para resolver o problema da cinemática inversa é o método *Damped Least-Squares* (DLS) (Nakamura & Hanafusa 1986). Neste método, para o caso do mapeamento entre a velocidade das juntas e a velocidade do sistema de coordenadas \mathcal{F}_i , o Jacobiano J_{0i}^B invertido é reescrito (Siciliano et al. 2011) de forma a modificar a lei de controle (2.58):

$$u = \left(J_{0i}^B \right)^\top \left(J_{0i}^B \left(J_{0i}^B \right)^\top + \kappa^2 I \right)^{-1} {}^d V_{0i}^B, \quad (3.43)$$

onde κ é um fator de amortecimento que torna a inversão melhor condicionada por um ponto de vista numérico (Mayorga et al. 1993). Este fator de amortecimento pode ser constante, resultando em um algoritmo numericamente estável em todo espaço operacional (Wampler 1986). Por outro lado, um fator de amortecimento

constante causa um movimento impreciso e algumas posições das juntas próximas as singularidades não podem ser alcançadas. Alternativamente, o fator de amortecimento κ pode ser escolhido de forma a afetar efetivamente a cinemática diferencial inversa somente em pontos próximos da singularidade (Nakamura & Hanafusa 1986) de forma que κ seja dado por:

$$\kappa = \begin{cases} 0, & \text{se } w \geq w_0, \\ \alpha_0 \left(1 - \frac{w}{w_0}\right)^2, & \text{se } w < w_0, \end{cases} \quad (3.44)$$

onde $w = \sqrt{J_{0i}^{B\top} J_{0i}^B}$ é o índice de manipulabilidade, α_0 é um fator de escala e w_0 é um parâmetro que define um limite para quando o manipulador está próximo de uma configuração singular.

A mesma ideia pode ser utilizada para evitar as singularidade do Jacobiano restrito, assumindo que deve-se minimizar a função custo:

$$f(u) = \left\| J_{0e}^r u - {}^d V_{0e}^B \right\| + \kappa^2 \|u\|. \quad (3.45)$$

O mapeamento entre o sinal de controle u e a velocidade do efetuador V_{0e}^B pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} J_{0e}^r \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} {}^d V_{0e}^B \\ 0 \end{bmatrix} \right\| &= 0, \\ \begin{bmatrix} (J_{0e}^r)^\top & \kappa I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{0e}^r \\ \kappa I \end{bmatrix} u &= \begin{bmatrix} (J_{0e}^r)^\top & \kappa I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^d V_{0e}^B \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \left((J_{0e}^r)^\top J_{0e}^r + \kappa^2 I \right) u &= (J_{0e}^r)^\top {}^d V_{0e}^B, \end{aligned}$$

e, solucionando-se esse relação para u tem-se:

$$u = (J_{0e}^r)^\top \left(J_{0e}^r (J_{0e}^r)^\top + \kappa^2 I \right)^{-1} {}^d V_{0e}^B, \quad (3.46)$$

que, apesar de ter a mesma forma do DLS tradicional, tem uma interpretação diferente. As velocidades foram restringidas na nova variável u enquanto seguia-se a velocidade de referência do efetuador ${}^d V_{0e}^B$ o mais próximo possível, o que difere da maneira tradicional, que restringe a velocidade das juntas diretamente.

Desta maneira, as singularidades que surgem como resultado das restrições impostas à cadeia são evitadas, e não as singularidades cinemáticas do próprio braço robótico. A fim de garantir que essas singularidades também sejam evitadas, é preciso aplicar o DLS também no Jacobiano parcial do manipulador que calcula

as velocidades das juntas a partir das velocidades desejadas V_{0i}^B do sistema de coordenadas \mathcal{F}_i como em (3.43).

3.6.2 Método da Inversa Filtrada

Uma alternativa mais recente ao Método DLS é o Método da Inversa Filtrada (FI - do inglês, Filtered Inverse). A técnica requer o ajuste de um único parâmetro, sendo também mais vantajoso computacionalmente por não exigir inversão matricial, decomposição em valores singulares ou cálculo de manipulabilidade.

Por outro lado, o método não garante a convergência nos casos em que o Jacobiano se aproxima de uma configuração singular mais rapidamente que uma exponencial (Vargas et al. (2014)).

O método Filtered Inverse considera que a lei de controle u utiliza uma matriz $\Theta(t)$ atualizada a cada iteração ao invés da inversão do Jacobiano $(J_{0e}^r)^{-1}$ tal que $J_{0e}^r \Theta = I$. A dinâmica da matriz $\Theta(t)$ é estabelecida a partir do sinal de erro gerado pela inversa a direita e a esquerda, S_r e S_l , respectivamente, definidas por:

$$S_r = J_{0e}^r \Theta - I, \quad S_l = \Theta J_{0e}^r - I. \quad (3.47)$$

Considerando a função candidata de Lyapunov:

$$V_c = V_r + V_l = \text{tr}(S_r^T S_r) + \text{tr}(S_l^T S_l), \quad (3.48)$$

onde $\text{tr}(\cdot)$ é o traço da matriz, a lei de atualização composta pode ser obtida por:

$$\dot{\Theta} = -\Gamma \left[(J_{0e}^r)^T S_r + S_l (J_{0e}^r)^T \right], \quad (3.49)$$

onde $\Gamma = \Gamma^T > 0$ é a matriz de ganho de atualização.

Note que, a saída do algoritmo proposto pode ser interpretada como uma inversa filtrada do Jacobiano. Assim, recorrendo ao método Filtered Inverse e a lei de controle modificada proposta em Vargas (2013), o sinal de controle de velocidades u pode ser definido em termos da matriz de filtrada inversa:

$$u = \Theta \Theta^T J_{0e}^r {}^d V_{0e}^B. \quad (3.50)$$

Esta lei de controle modificada é necessária para que a convergência do algoritmo seja garantida, já que desta forma $\Theta \Theta^T$ é semi-definida positiva e simétrica, além disso, para casos em que a trajetória de referência é inalcançável, o erro é regido por uma matriz de ponderação que influencia na solução obtida, ponderando os diferentes objetivos de controle do algoritmo.

Vale mencionar que se comparado com outras soluções de singularidades da cinemática diferencial, as principais vantagens do método FI são: o *número de parâmetros a serem sintonizados* - somente a matriz de ganho de atualização Γ - e a *eficiência computacional*, já que não necessita de inversão de matrizes, decomposição em valores singulares ou medir a manipulabilidade. Note que, para o caso do método DLS, o amortecimento κ é constantemente parametrizado em função da medida de manipulabilidade.

3.7 Conclusão

Neste capítulo apresenta-se o conceito de controle de um manipulador restringido cinematicamente de forma a garantir velocidades laterais nulas em um ponto de sua cadeia cinemática. Apresenta-se o método do Jacobiano restrito para o qual o controle de postura do efetuador e do movimento da restrição é realizado de maneira unificada. Uma lei de controle proporcional com um termo *feedforward* é proposta, de forma a garantir a estabilidade e a convergência assintótica do erro de postura do efetuador.

O algoritmo foi generalizado para que velocidades do ponto de incidência possam ser realizadas de maneira controlada através de um sinal de velocidade desejada adicionado a lei de controle.

Apresenta-se uma introdução a manipulabilidade de manipuladores e uma breve análise sobre as singularidades do Jacobiano restrito é realizada para restrições cinemáticas em manipuladores de oito graus de liberdade. Dois métodos para evitar estas singularidades são comentados de forma a propor soluções para lidar com as singularidades do sistema.

Capítulo 4

Simulações e Experimentos

Para validar a proposta do controle cinemático de manipuladores redundantes restringidos são apresentados resultados de simulação e experimentais da mesma. Os resultados simulados foram realizados utilizando o Matlab (MathWorks, Inc.) e o *toolbox* de robótica (Corke 1996). Os testes experimentais foram implementados em um robô industrial *Motoman DIA10* que possui dois braços, com 15 GDLs no total (7 GDLs em cada braço e um GDL no tronco), vide detalhes cinemático do robô na Figura 4.1, e as trajetórias realizadas pelo efetuator de um dos braços foram pré-estabelecidas ou geradas por um dispositivo háptico *Phantom Omni* (Sensable, EUA).

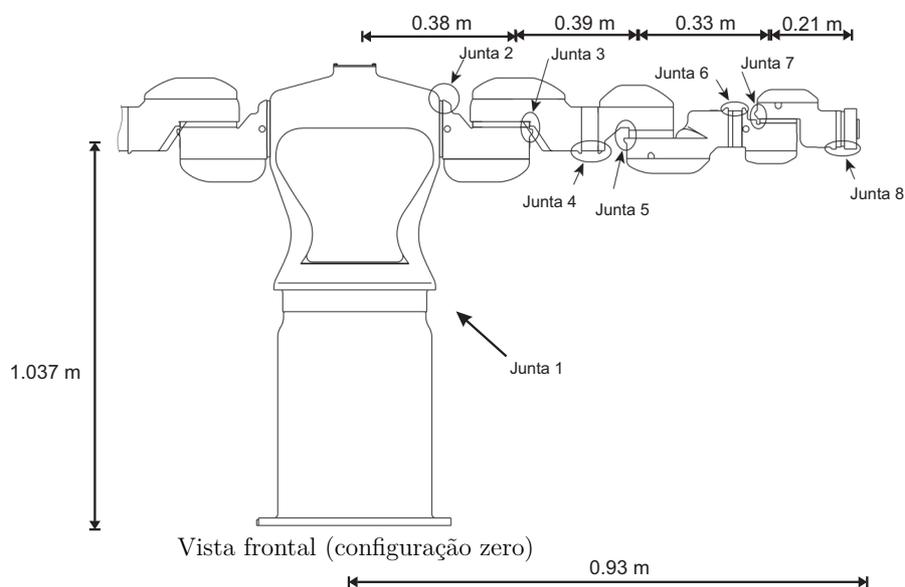


Figura 4.1: Detalhes do braço direito do *Motoman DIA10*.

O algoritmo do controle implementado nos experimentos e simulações é apresentado na Tabela 4.1. Nota-se a apresentação de três métodos de realizar a cinemática diferencial inversa, representado de maneira geral pelo termo J_{inv} .

Tabela 4.1: Algoritmo do esquema de controle de um manipulador de 8-GDLs com restrição cinemática.

Cinemática direta	$\begin{bmatrix} p_{0e}^\top & Q^\top \end{bmatrix}^\top = h(\theta)$
Erros de posição e orientação	$e_p^B = R_{0e}^\top ({}^d p_{0e} - p_{0e}),$ $e_q = \begin{bmatrix} \tilde{\eta} & \tilde{\epsilon}^\top \end{bmatrix}^\top, \quad e_o = \tilde{\epsilon}$
Sinais de controle Cartesiano	$\bar{u}_p = {}^d v_{0e}^B + K_p e_p^B - \hat{\omega}_{0e} ({}^d p_{0e} - p_{0e})$ $\bar{u}_o = {}^d \omega_{0e} + K_o e_o$
Enfoque pseudo-inversa	$J_{inv} = (J_{0e}^r)^\dagger$
Enfoque DLS	$J_{inv} = (J_{0i}^B)^\top \left(J_{0i}^B (J_{0i}^B)^\top + \kappa^2 I \right)^{-1}$
Enfoque Filtered Inverse	$\dot{\Theta} = -\Gamma \left[(J_{0e}^r)^\top S_r + S_l (J_{0e}^r)^\top \right],$ $J_{inv} = \Theta \Theta^\top J_{0e}^r$
Controle cinemático com restrição	$\begin{bmatrix} \bar{v}_{0i} & \dot{\theta}_{jn} \end{bmatrix}^\top = J_{inv} \begin{bmatrix} \bar{u}_p & \bar{u}_o \end{bmatrix}^\top$ $\dot{\theta}_{1i} = (J_{0i}^B)^\dagger \Lambda^\# \bar{v}_{0i},$ $u = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{1i} & \dot{\theta}_{jn} \end{bmatrix}^\top$

4.1 Simulações

As simulações foram realizadas para poder testar a eficácia da arquitetura e metodologia de controle. Utilizou-se um manipulador de 8-GDLs de dimensões semelhantes ao conjunto de tronco mais o braço direito do *Motoman DIA10* (Figura 4.1) para os casos da restrição em somente uma direção, os casos em que duas direções do RCM estejam restringidas e no caso em que o ponto de incisão deve realizar uma trajetória pré-definida. A modelagem do manipulador em sua configuração zero é ilustrada na Figura 4.2. Para todas as simulações, elo restringido tem $33cm$ de extensão e a restrição está a $l_a = 15cm$ da sexta junta. A posição inicial escolhida foi $p_{0e} = \begin{bmatrix} 19.4 & 101.9 & 95.8 \end{bmatrix}^\top cm$ para a qual as matrizes Jacobianas são não-singular. Os parâmetros de controle utilizados na simulação são descritos na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Parâmetros de controle utilizados nas simulações.

Ganho de posição	$K_p = 5$
Ganho de orientação	$K_o = 10$
Amortecimento DLS	$\kappa = 0.05$

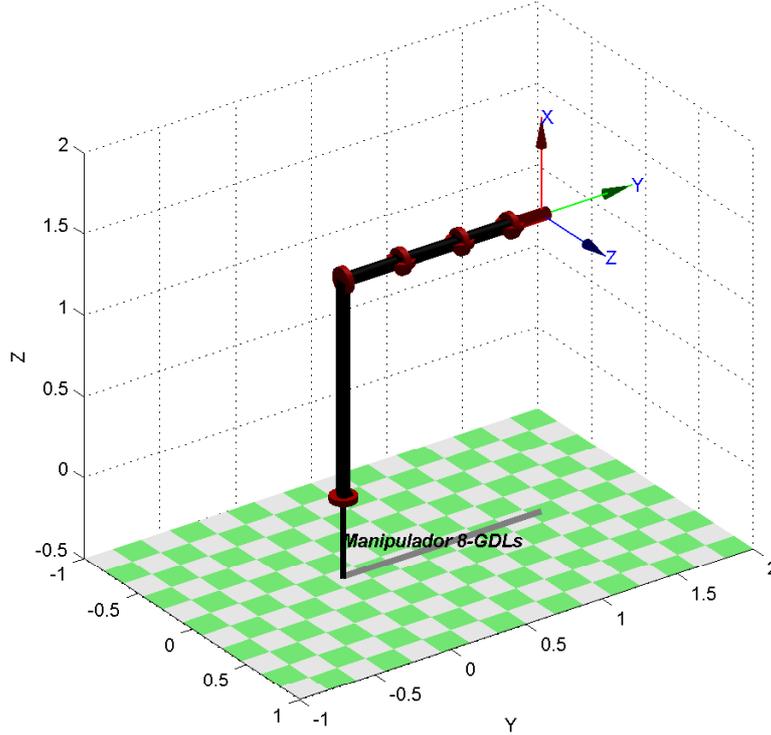


Figura 4.2: Manipulador de oito graus de liberdade na configuração zero.

4.1.1 Movimentos restringidos em uma direção

Simulação 1:

Para esta simulação, o efetuador na posição inicial é ilustrado na Figura 4.3, a restrição é representada pelo plano hachurado, ilustrando a região em que o RCM secciona o elo e a direção em que o movimento não pode ser realizado.

A trajetória realizada para esta simulação dispõe de uma componente senoidal nas três direções do sistema de coordenadas do efetuador \mathcal{F}_e de forma que:

$${}^d p_{0e} = \begin{bmatrix} 0.5A \sin(\omega t) \\ 2.2A \cos(2\omega t) - 2.2A \\ A \sin(2\omega t) \end{bmatrix} \text{ cm}, \quad (4.1)$$

onde a amplitude $A = 3\text{cm}$, a frequência $\omega = 2\pi/200 \text{ rad s}^{-1}$ e t é o tempo. A orientação do sistema foi regulada de forma a manter a orientação inicial.

Como esperado, a trajetória é realizada mesmo para trechos da trajetória próximos a singularidade $l_b = 0$. A velocidade do ponto de incisão nas direções x e z são mostrados na Figura 4.4. O erro de posição em cada eixo do sistema de coordenadas do efetuador e o erro de orientação em quatérnio são observados na Figura 4.5.

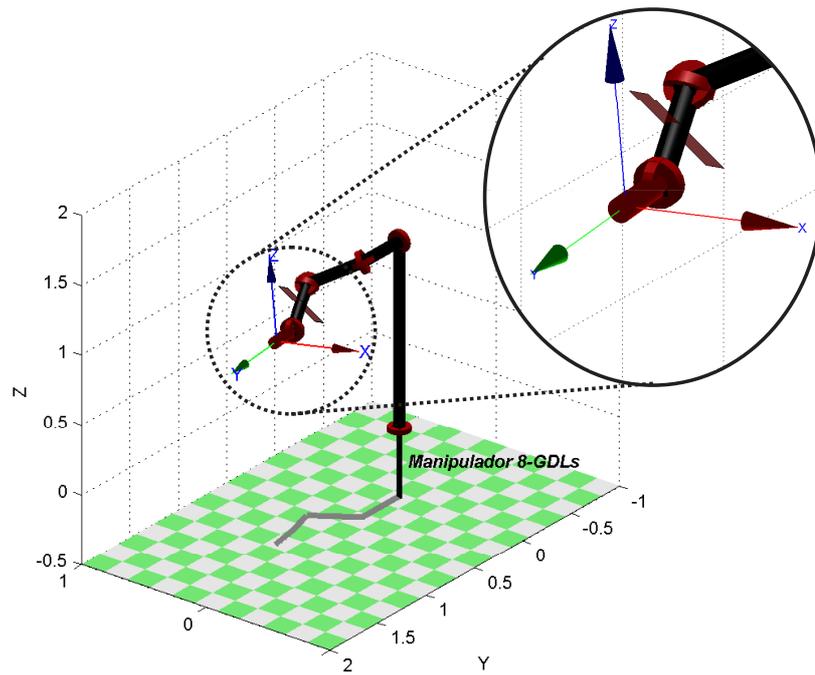


Figura 4.3: Detalhes da posição inicial do manipulador com a restrição

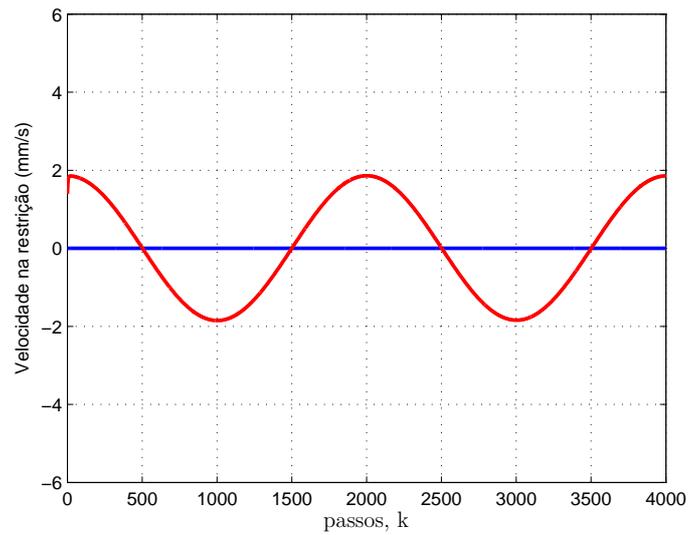
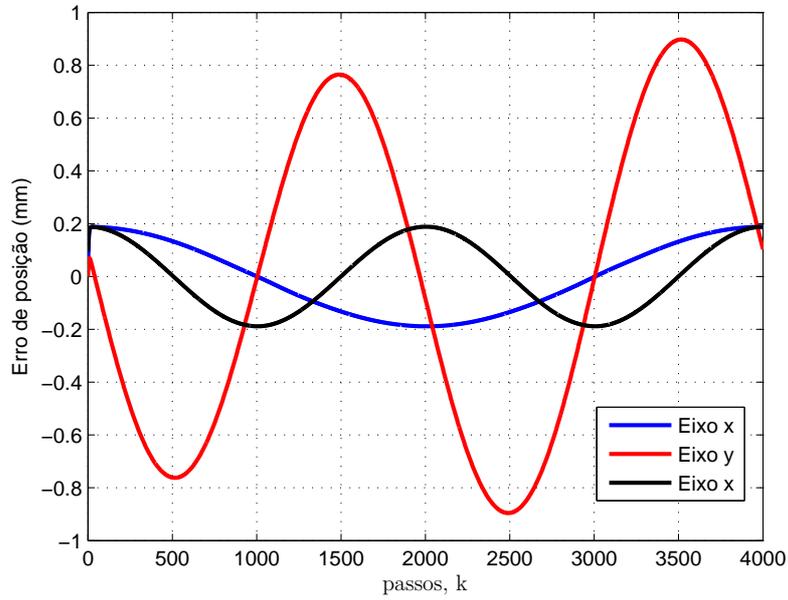
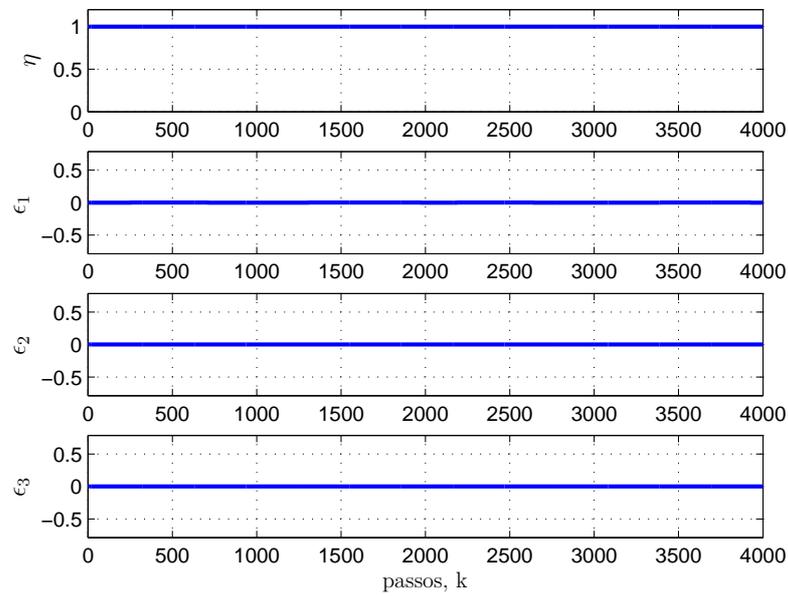


Figura 4.4: Velocidades na restrição. Legenda: v_x^r (-), v_z^r (-).



(a)



(b)

Figura 4.5: (a) Erro de posição. (b) Erro de orientação.

A evolução do índice de manipulabilidade do Jacobiano parcial e do Jacobiano restrito é ilustrado na Figura 4.6. Nota-se a dependência da manipulabilidade dos Jacobianos em função das variáveis l_a e q_7 .

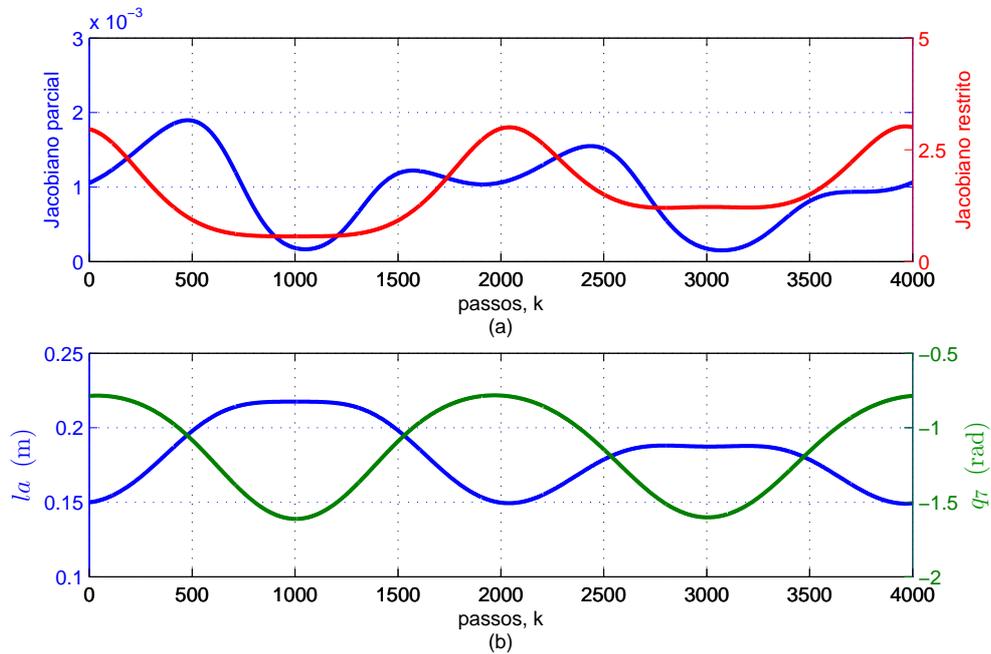


Figura 4.6: (a) Índice de manipulabilidade dos Jacobianos. (b) Valores de l_a e q_7 .

O rastreamento de trajetória no espaço das juntas e no espaço Cartesiano é descrito na Figura 4.7 e na Figura 4.8, onde pode-se observar que um desempenho satisfatório foi alcançado.

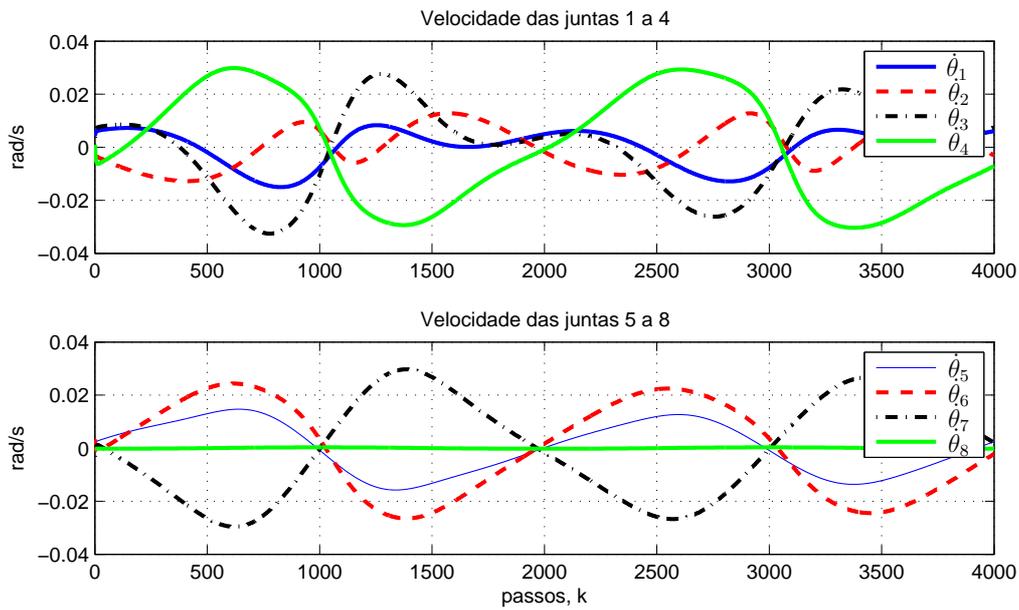


Figura 4.7: Velocidade das juntas do manipulador.

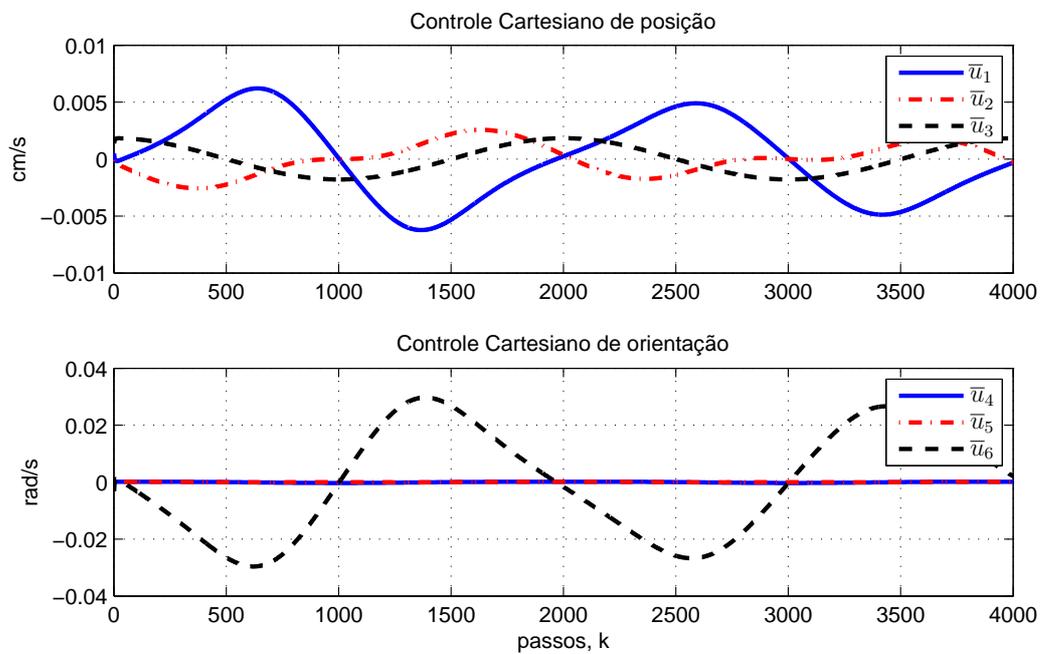


Figura 4.8: Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.

4.1.2 Movimentos restringidos em duas direções

O caso em que a restrição é realizada em duas direções do sistema de coordenadas \mathcal{F}_r é simulado e o manipulador em sua posição inicial é ilustrado na 4.9, nesta figura, a restrição é representada pelo plano hachurado, ilustrando a região em que o RCM secciona o elo e as direções em que o movimento não pode ser realizado.

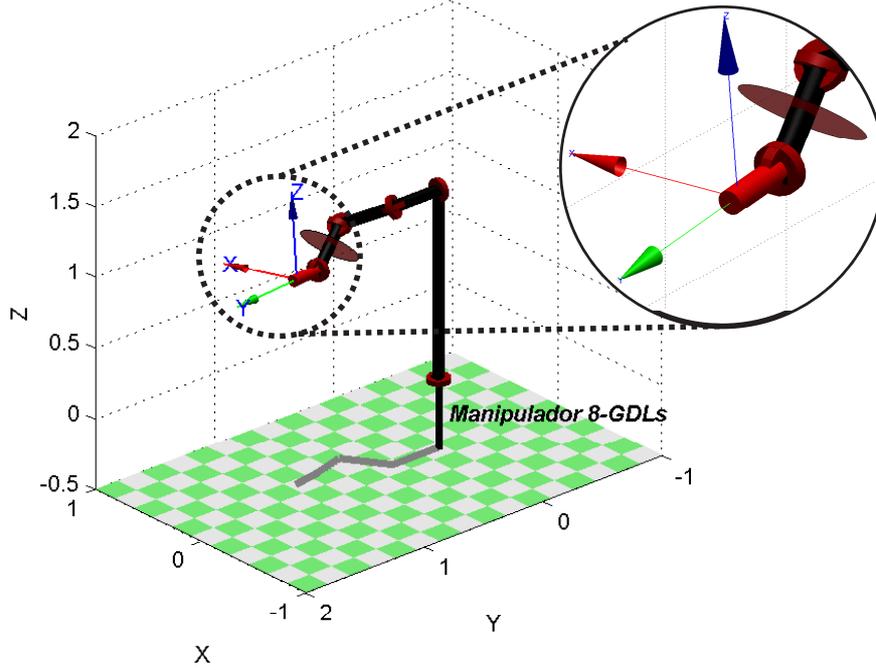


Figura 4.9: Manipulador de 8-GDLs na posição inicial de operação $p_{0e}=[19.4 \ 101.9 \ 95.8]^T \text{ cm}$ com restrição em duas direções.

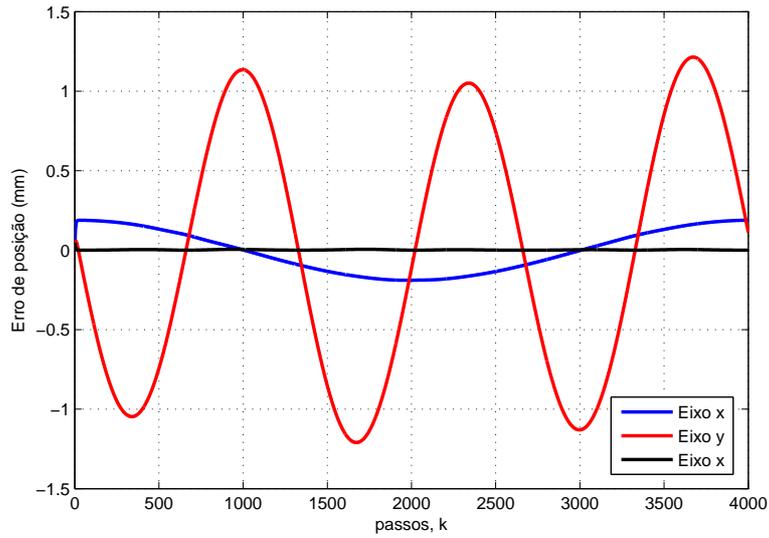
Simulação 2:

Para esta simulação, deseja-se manter o RCM com velocidades nulas nas direções x e z de \mathcal{F}_r . Considera-se que a trajetória desejada ao efetuador é dada por:

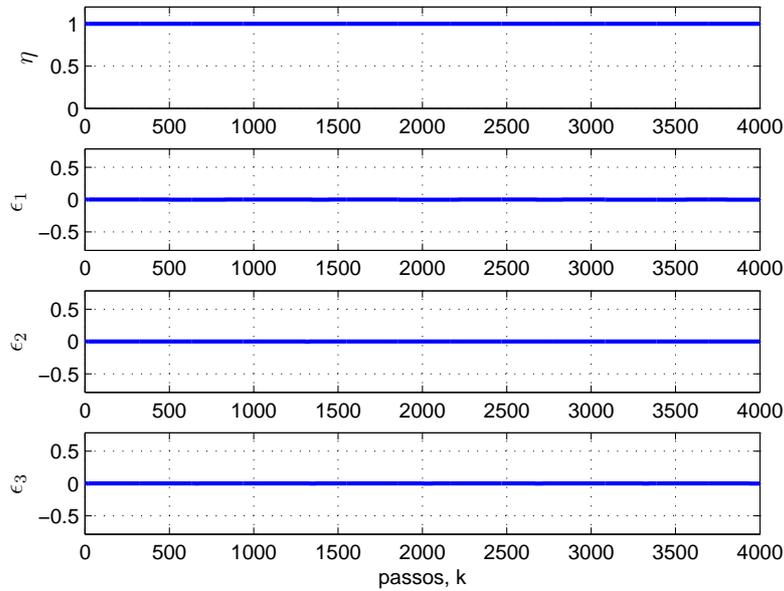
$${}^d p_{0e} = \begin{bmatrix} 0.5A \sin(\omega t) \\ -2.0A \sin(3\omega t - \pi/2) - 2.0A \\ 0.5A \sin(2\omega t) \end{bmatrix} \text{ cm}, \quad (4.2)$$

onde a amplitude $A = 3 \text{ cm}$, a frequência $\omega = 2\pi/200 \text{ rad s}^{-1}$ e t é o tempo. A orientação do sistema foi regulada de forma a manter a orientação inicial e os erros de posição e orientação do efetuador são mostrados na Figura 4.10.

Para esta simulação, a velocidade da restrição no eixos x e z manteve-se próxima de 0, como observado na Figura 4.11.



(a)



(b)

Figura 4.10: (a) Erro de posição. (b) Erro de orientação.

A evolução do índice de manipulabilidade do Jacobiano parcial e do Jacobiano restrito é mostrado na Figura 4.12. Nota-se a dependência da manipulabilidade dos Jacobianos em função das variáveis l_a e q_7 .

O rastreamento de trajetória no espaço das juntas e no espaço Cartesiano é descrito na Figura 4.13 e na Figura 4.14, onde pode-se observar que um desempenho satisfatório foi alcançado.

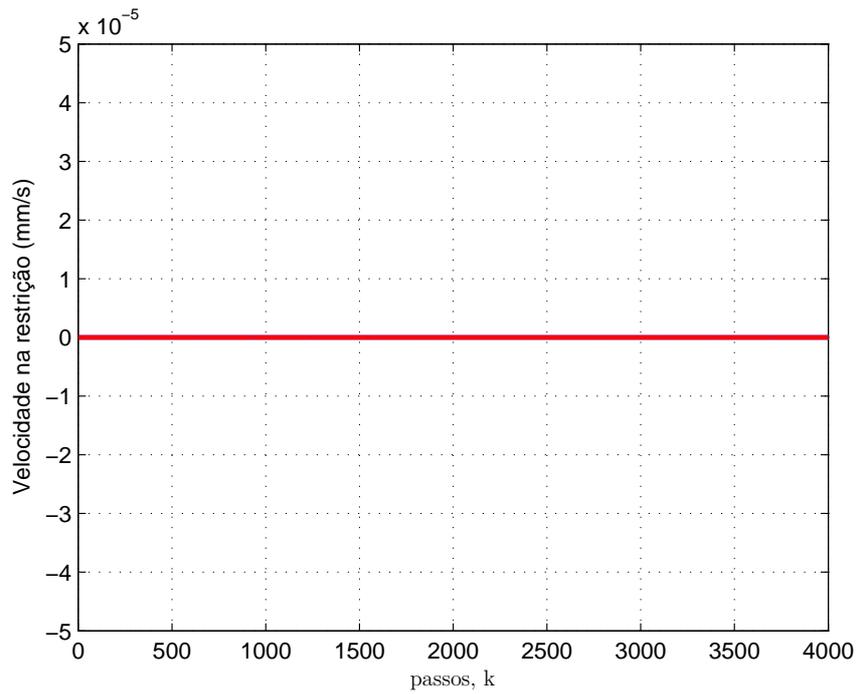


Figura 4.11: Velocidades na restrição. Legenda: v_x^r (—), v_z^r (—).

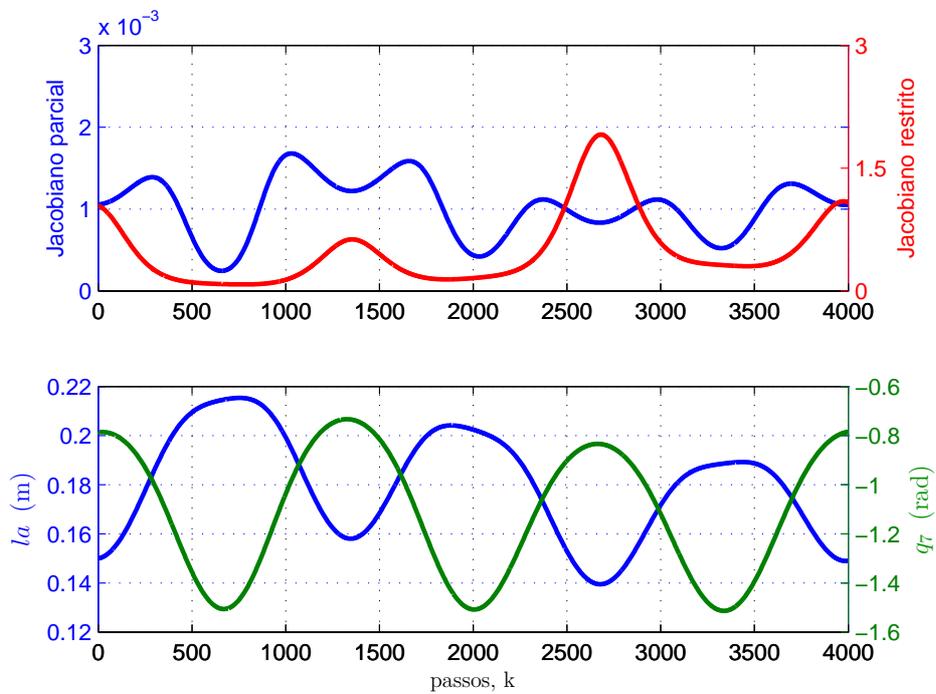


Figura 4.12: (a) Índice de manipulabilidade dos Jacobianos. (b) Valores de l_a e q_7 .

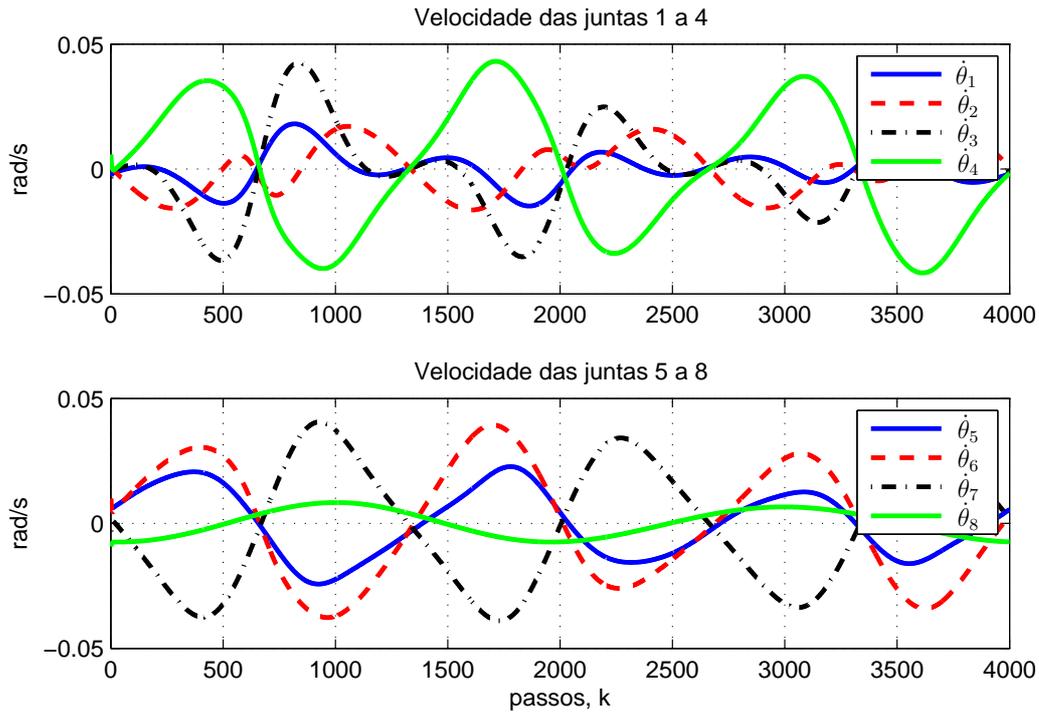


Figura 4.13: Velocidade das juntas do manipulador.

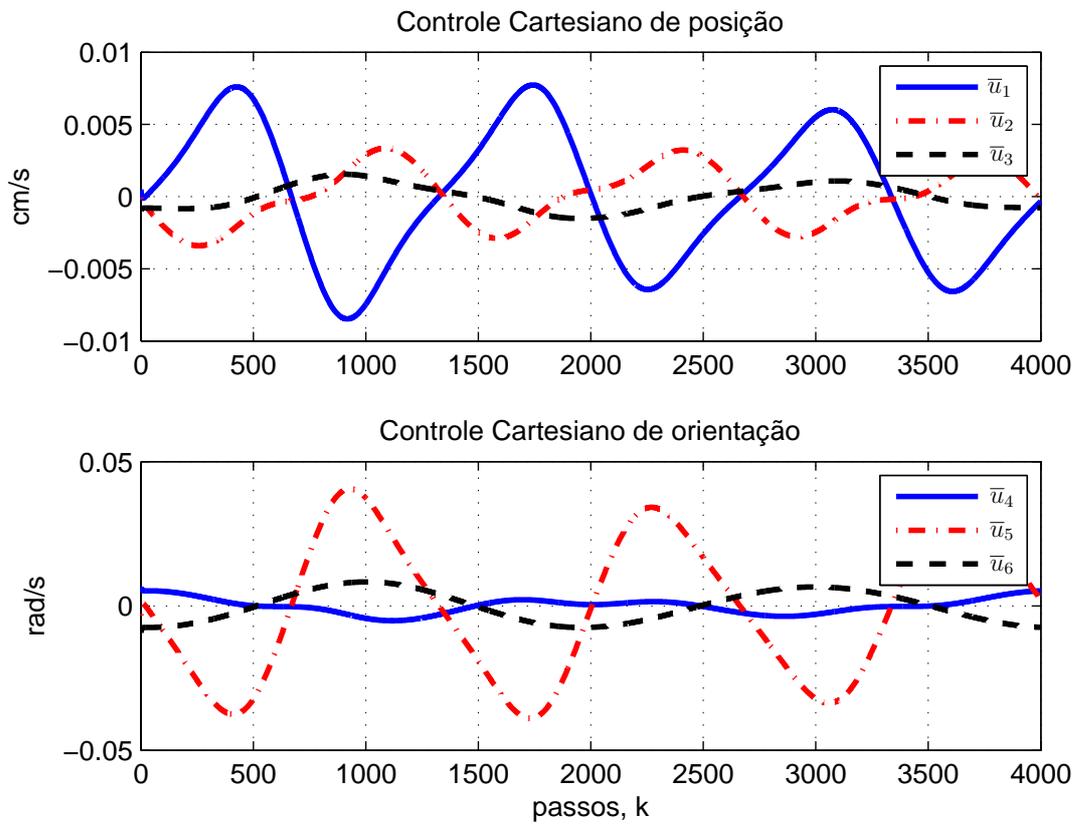


Figura 4.14: Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.

Simulação 3:

Nesta simulação, novamente deseja-se manter o RCM com velocidades nulas nas direções x e z de \mathcal{F}_r . Considera-se que a trajetória desejada ao efetuador é dada por:

$${}^d p_{0e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9A \sin(\omega t - \pi/2) + 0.9A \\ 0 \end{bmatrix} cm, \quad (4.3)$$

onde a amplitude $A = 3cm$, a frequência $\omega = 2\pi/200 \text{ rad s}^{-1}$ e t é o tempo. A orientação desejada do efetuador, posteriormente convertida para quatérnio, é dada por:

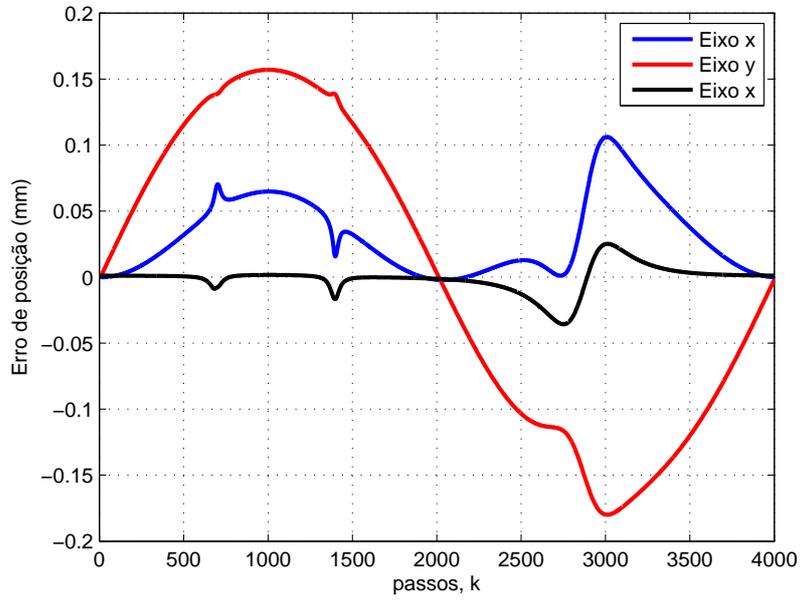
$$\phi = \begin{bmatrix} -\pi/8 \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} rad, \quad (4.4)$$

e foi projetada de forma a fazer com que o Jacobiano restrito e o Jacobiano parcial passem por singularidades. Utilizou-se o método *DLS* com fator de amortecimento $\kappa_r = 0.05$ para o Jacobiano restrito. Os erros de posição e orientação do efetuador são mostrados na Figura 4.15.

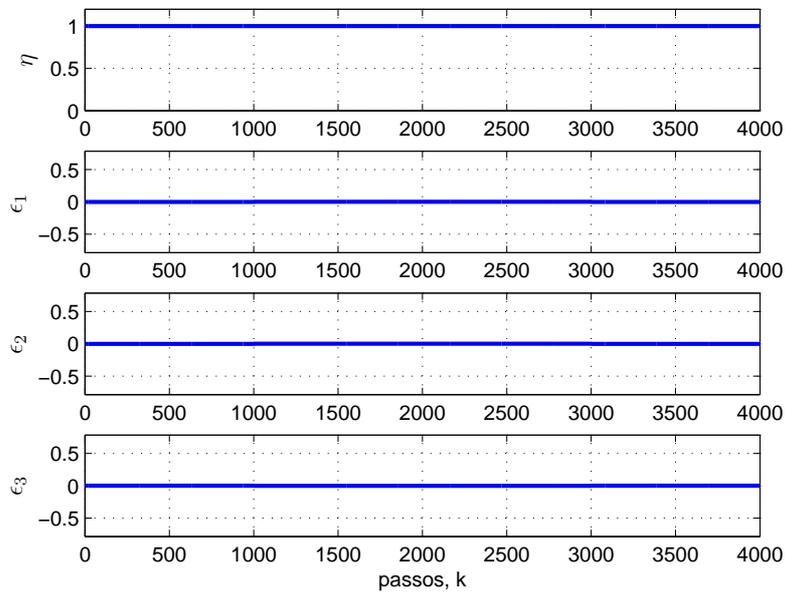
Como demonstrado anteriormente, o índice de manipulabilidade do Jacobiano restrito J_{0e}^r é diretamente proporcional ao quadrado do vetor de posição entre a restrição e a junta posterior a esta $l_b = \|p_{rb}\|$ (Figura 3.9). A manipulabilidade do Jacobiano é ilustrada na Figura 4.16. Nota-se a singularidade do Jacobiano restrito para quando q_7 assume valores próximos de 0 e a baixa manipulabilidade do Jacobiano parcial para quando o ponto de incisão localiza-se próximo a sexta junta do manipulador, i.e. $l_a \approx 0$.

As singularidade refletem nas velocidades da restrição, como pode-se observar na Figura 4.17. Apesar disto, as velocidades se mantêm bastante reduzidas devido ao método para solução das singularidades utilizado.

O rastreamento de trajetória no espaço das juntas e no espaço Cartesiano é descrito na Figura 4.18 e na Figura 4.19, onde pode-se observar que um desempenho satisfatório foi alcançado.



(a)



(b)

Figura 4.15: (a) Erro de posição. (b) Erro de orientação.

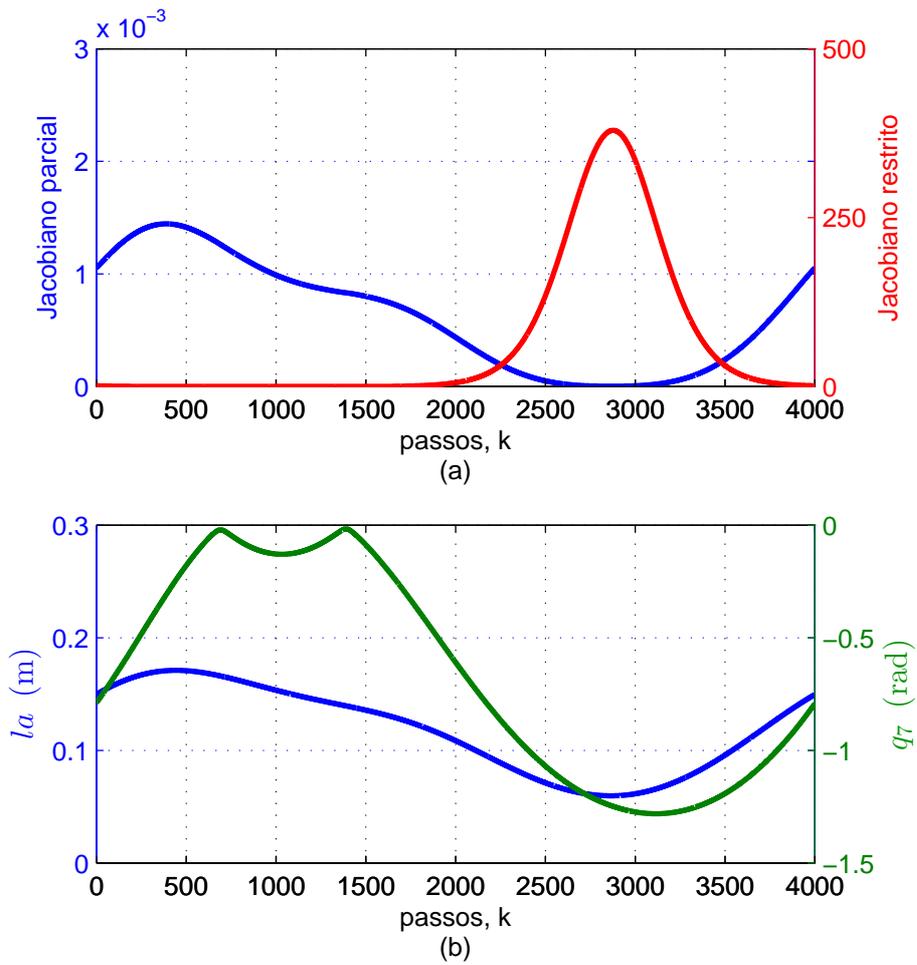


Figura 4.16: (a) Índice de manipulabilidade dos Jacobianos. (b) Valores de l_a e q_7 .

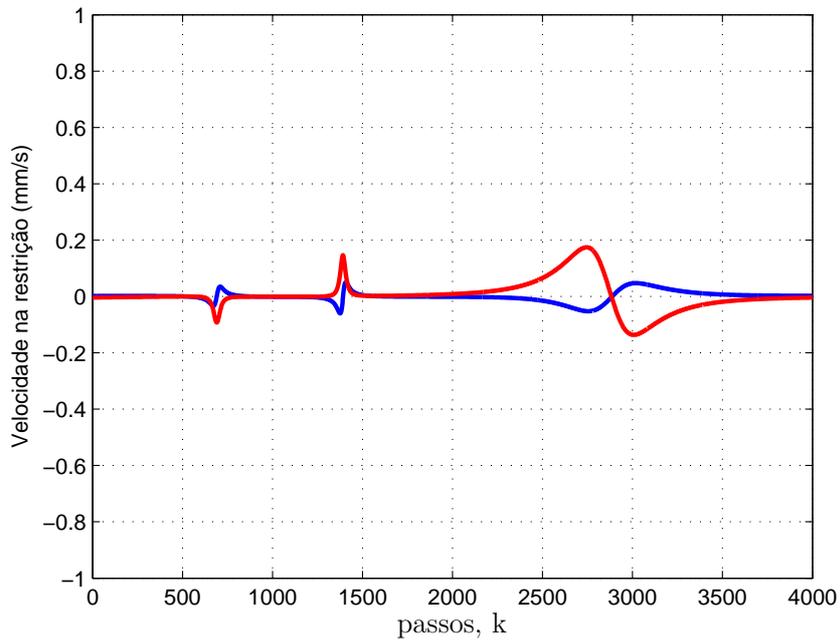


Figura 4.17: Velocidades na restrição. Legenda: v_x^r (—), v_z^r (—).

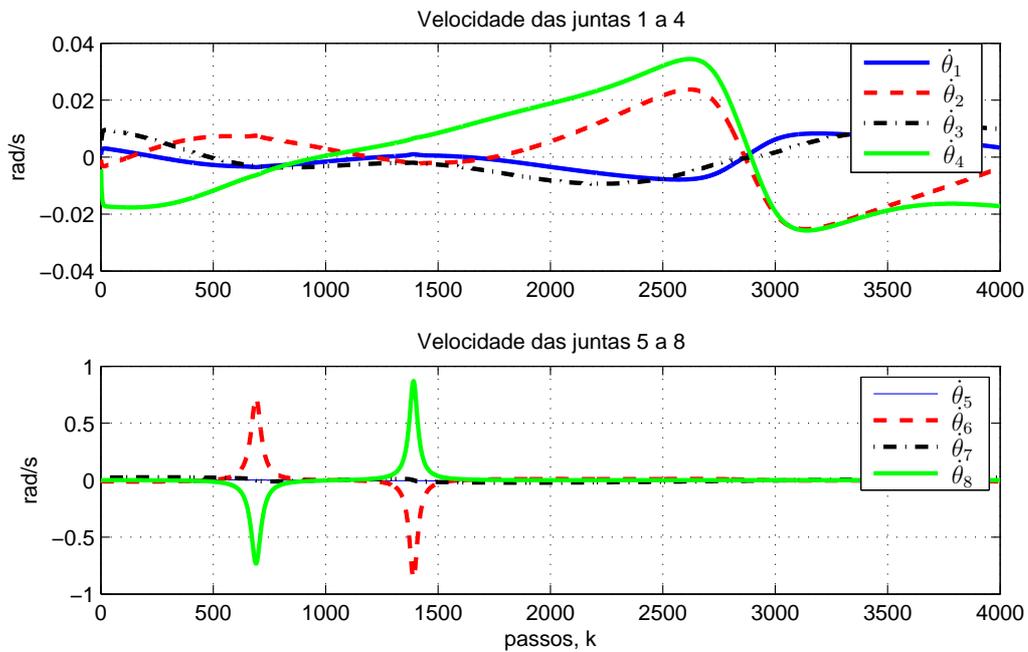


Figura 4.18: Velocidade das juntas do manipulador.

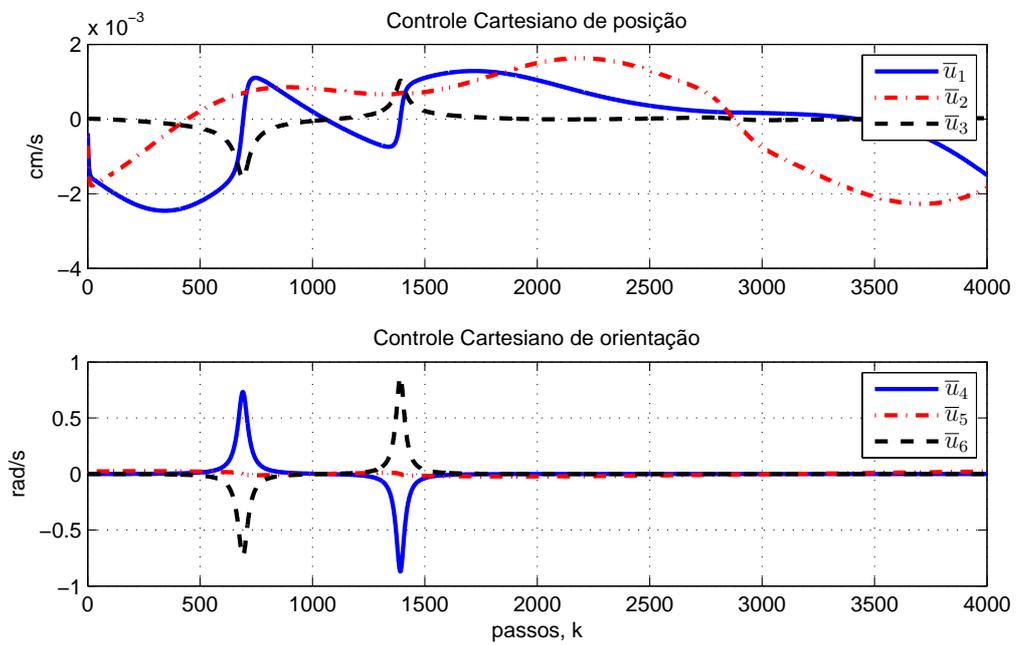


Figura 4.19: Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.

Simulação 4:

Para esta simulação, deseja-se controlar a posição do efetuador do manipulador de maneira a respeitar uma restrição imposta por um sinal de velocidade não-nulo ao ponto de incisão. A trajetória desejada do efetuador é dada por:

$${}^d p_{0e} = \begin{bmatrix} 0.5A \sin(\omega t) \\ -2.0A \sin(3\omega t - \pi/2) - 2.0A \\ 0.5A \sin(2\omega t) \end{bmatrix} cm, \quad (4.5)$$

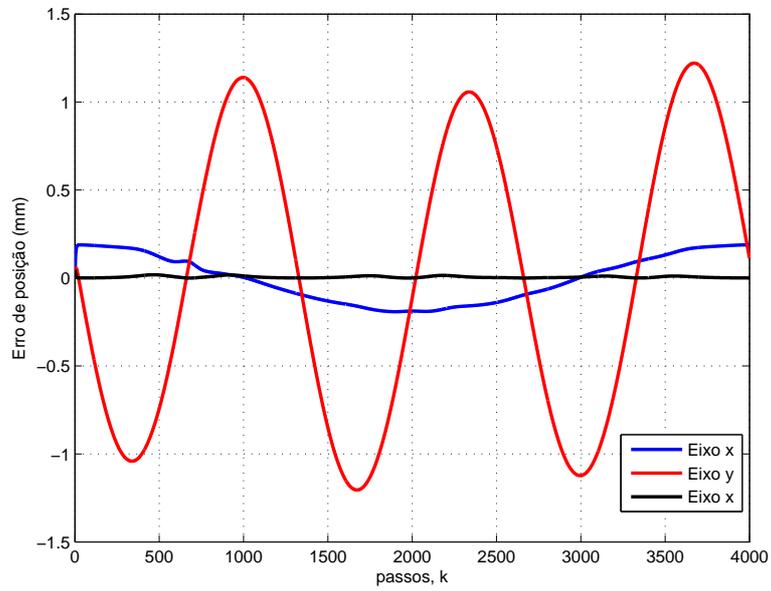
onde a amplitude $A = 3cm$, a frequência $\omega = 2\pi/200 \text{ rad s}^{-1}$ e t é o tempo. A velocidade linear desejada para restrição é dada por

$${}^d v_{0r}^B = 5 \begin{bmatrix} \sin(3\omega t) \\ 0 \\ -\sin(3\omega t) \end{bmatrix} mm s^{-1}. \quad (4.6)$$

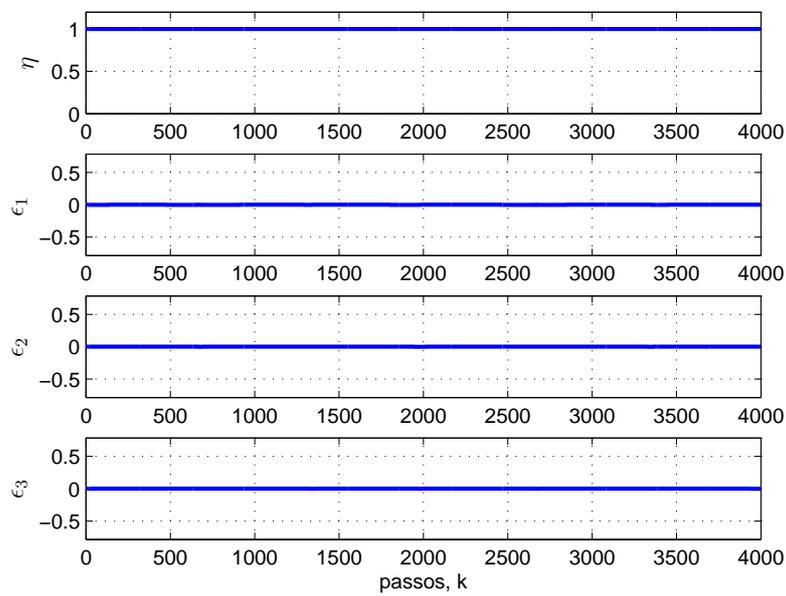
A orientação do sistema foi regulada de forma a manter a orientação inicial e os erros de posição e orientação do efetuador são mostrados na Figura 4.20.

A velocidade da restrição cumpre perfeitamente o desejado como pode-se observar na Figura 4.21 e a evolução da manipulabilidade do manipulador no tempo é ilustrado na Figura 4.22, tal como o ângulo da junta q_7 e o movimento da restrição ao longo do elo entre as juntas q_6 e q_7 durante a trajetória.

O rastreamento de trajetória no espaço das juntas e no espaço Cartesiano é descrito na Figura 4.23 e na Figura 4.24, onde pode-se observar que um desempenho satisfatório foi alcançado.



(a)



(b)

Figura 4.20: (a) Erro de posição. (b) Erro de orientação.

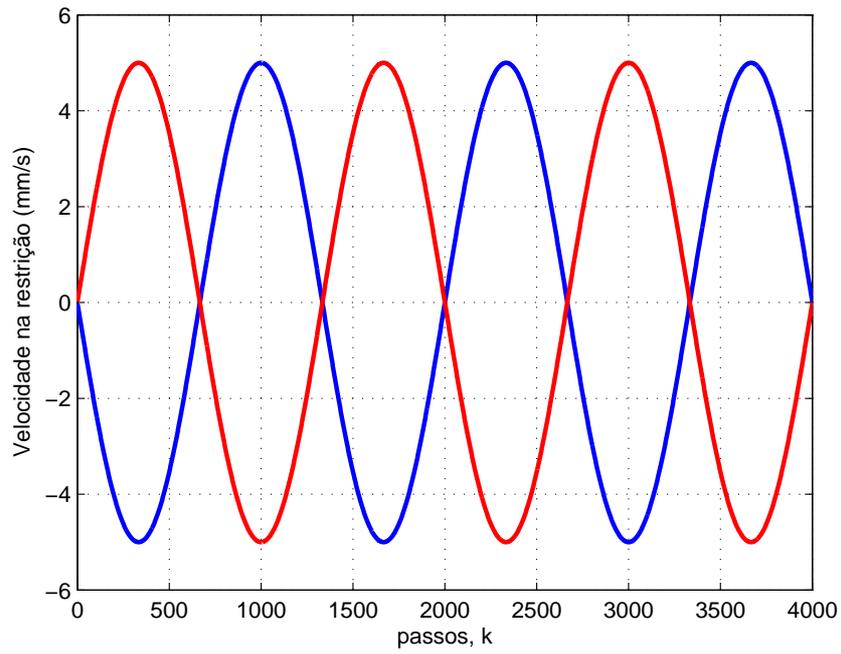


Figura 4.21: Velocidades na restrição. Legenda: v_x^r (—), v_z^r (—).

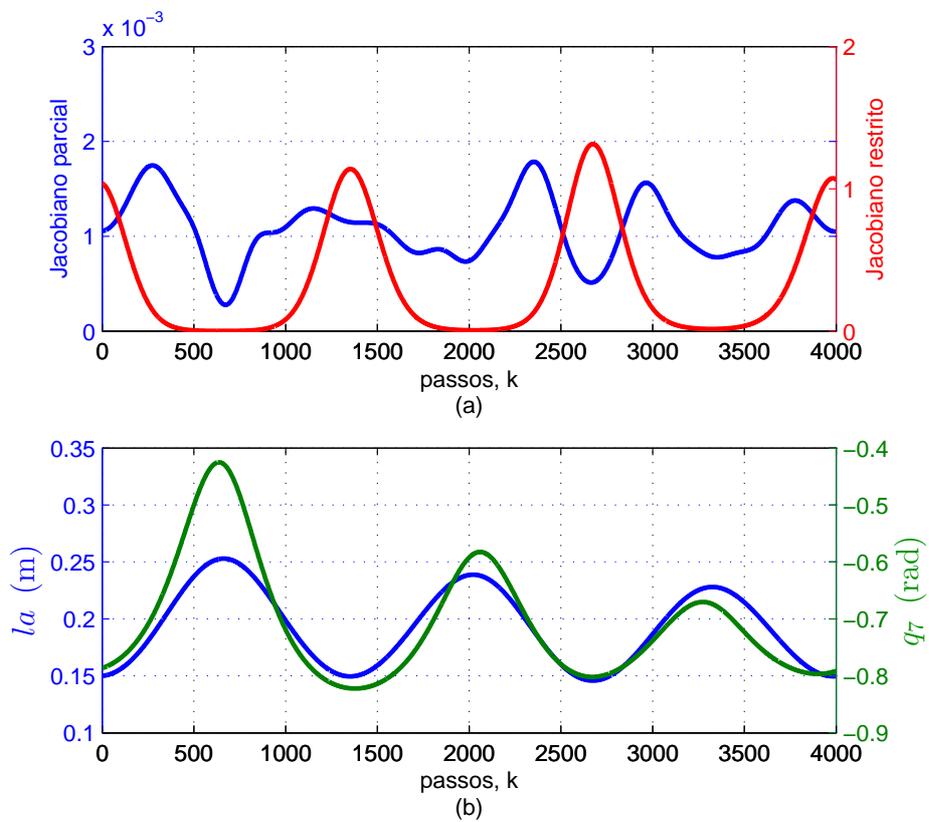


Figura 4.22: (a) Manipulabilidade dos Jacobianos. (b) Valores de l_a e q_7 .

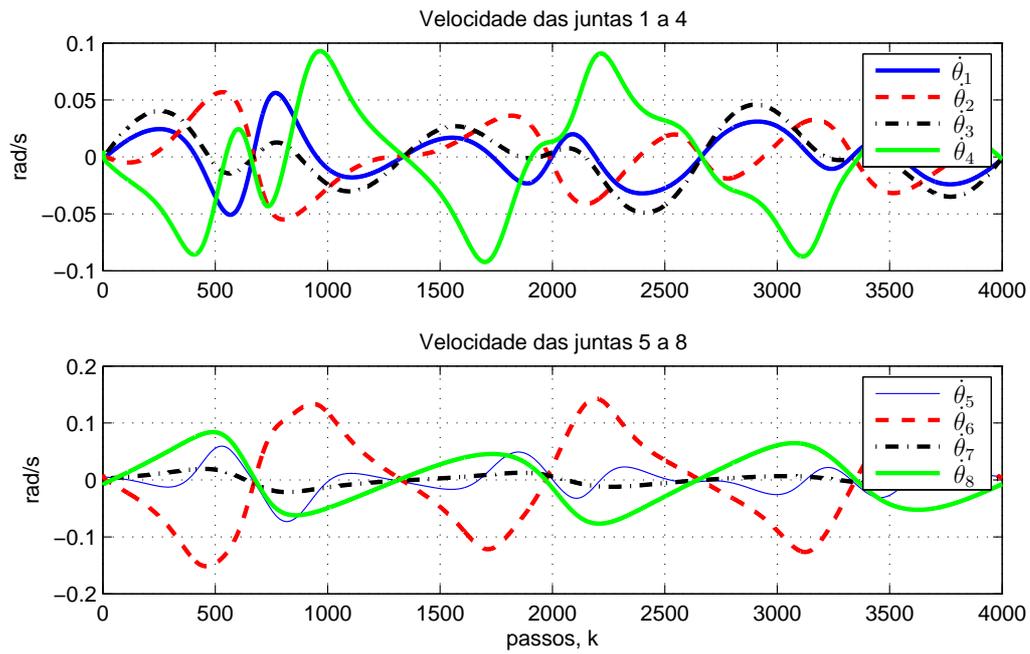


Figura 4.23: Velocidade das juntas do manipulador.

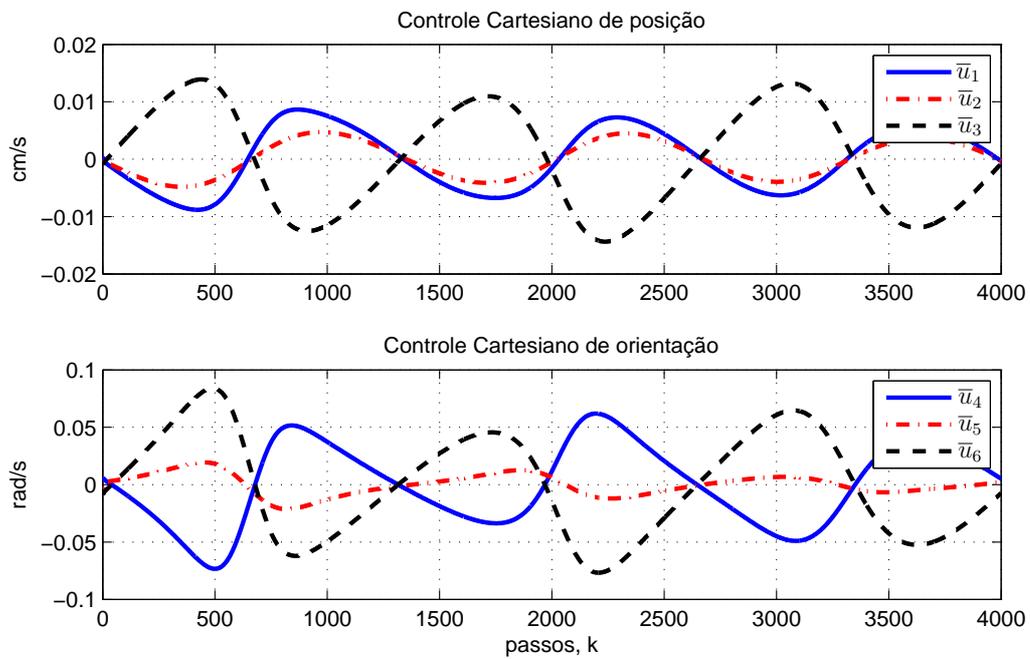


Figura 4.24: Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.

4.2 Resultados Experimentais

O robô manipulador utilizado nos experimentos foi um *Motoman DIA10* de dois braços (7 DOFs cada e um DOF no tronco) controlado a baixo nível por um controlador *NX100*. Utilizou-se somente um dos braços em conjunto com o tronco do *Motoman DIA10*, dispondo-se de 8-GDLs para serem controlados no espaço das juntas e assemelhando-se ao manipulador da Figura 3.2 composto de manipulador antropomórfico com pulso esférico (6-GDLs) mais um pulso zy referente ao *shaft* (2-GDLs). As referências são geradas por um computador externo conectado ao *NX100* através de um *Motoman high speed controller* (HSC). Como é comum em robôs industriais, a malha de controle é implementada a nível cinemático no espaço das juntas.

Para que o acesso ao HSC seja possível, utilizou-se o protocolo de comunicação disponível no Robot Raconteur (RR). O Robot Raconteur é uma biblioteca desenvolvida para aplicações de robótica e de automação com redes de comunicação distribuídas (Wason & Wen 2011). O servidor fornece informações sobre posição e velocidade das juntas e recebe as posições das juntas desejadas e projeta-se então uma malha de controle em nível intermediário. A malha de controle é desenvolvida no Simulink e então compilada para ser executada em um *thread* diferente do servidor com um tempo de amostragem de $2ms$.

Os sinais de referência foram gerados por um dispositivo háptico *Phantom Omni* de 6-GDLs, também acessado pelo Matlab através do nó servidor. O RR então, fornece a posição do efetuator no espaço Cartesiano a uma taxa de $1KHz$. A velocidade de referência enviada para o robô escravo é dada pela razão da diferença de posição entre duas amostragens consecutivas pelo período de amostragem. O esquema de comunicações da configuração abordada é esquematizada na Figura 4.25.

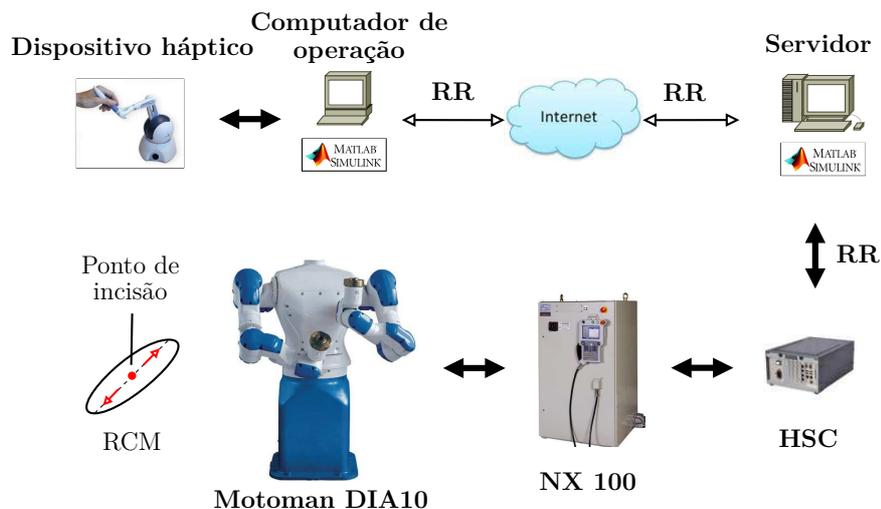


Figura 4.25: Diagrama esquemático da montagem experimental.

A formulação presente neste trabalho presume o elo de um robô cirúrgico de seção reta desprezível. Para fins de testes, ela não garante que a superfície do elo cortada pelo plano dos eixos x e y do sistema de coordenadas de \mathcal{F}_r permaneçam imóveis para um manipulador industrial em que o elo de inserção seja muito largo. Despreza-se assim, a seção reta do elo do manipulador. No intuito de visualizar que a restrição lateral esta sendo satisfeita durante os experimentos, utilizou-se um anel de acrílico para contornar o braço robótico nas direções em que o ponto de incisão não pode realizar movimentos (Figura 4.26).

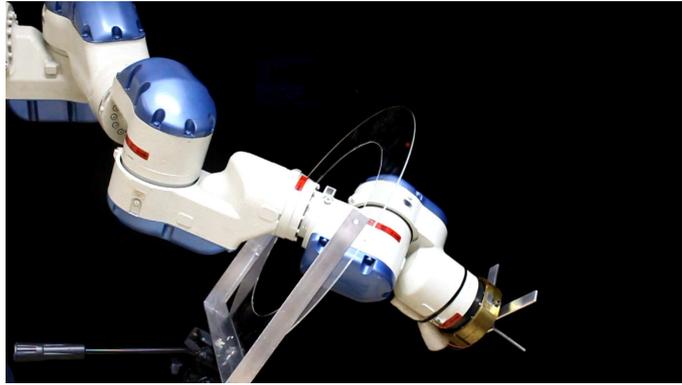


Figura 4.26: Montagem experimental do robô e a restrição.

Três experimentos foram realizados utilizando controle cinemático para a postura do efetuador. A lei de controle Castesiana de posição e orientação são baseadas em um ganho proporcional mais um termo *feedforward* que garante a convergência assintótica dos erros de rastreamento. O controle do manipulador foi realizado de acordo com os parâmetros da Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Parâmetros de controle utilizados nos experimentos.

Ganho de posição	$K_p = 270$
Ganho de orientação	$K_o = 1500$
Ganhos da Filtrada Inversa	$\Gamma_r = 5$ e $\Gamma_l = 5$
Amortecimento DLS	$\kappa = 0.01$

4.2.1 Comparação entre métodos para evitar singularidades

Para este experimento, o efetuador realiza uma trajetória em que o ângulo da junta posterior a restrição, q_7 , varie entre $[-\frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{4}] rad$, passando por 0, enquanto a restrição movimenta-se no eixo x de \mathcal{F}_r possibilitando avaliar o comportamento do manipulador quando o Jacobiano restrito esta próximo a uma das singularidades e a comparação entre os dois métodos para solução das singularidades propostos.

Para o efeito de comparação, considera-se que o efetuador realiza uma trajetória previamente programada de posição e orientação utilizando o controle cinemático proposto e comparando-se três métodos de inversão na cinemática diferencial, a inversa do Jacobiano restrito $(J_{0e}^r)^{-1}$, os métodos *Damped Least-Squares* (*DLS*) e a *Filtered Inverse* (*FI*).

A trajetória proposta submete o efetuador a um movimento linear ao longo do eixo x de \mathcal{F}_e dado por $r_{p_x}(k) = 0.03 \sin(\omega k)$ e um movimento angular referente a trajetória de orientação ao redor do mesmo eixo, dada por $r_{o_x}(k) = \frac{\pi}{18} \cos(\omega k) - \frac{\pi}{18}$, sendo k o número da iteração e $\omega = 2\pi/7000 \text{ rad s}^{-1}$ a frequência escolhida. Para o ponto de incisão é dada uma velocidade desejada senoidal somente no eixo x de \mathcal{F}_r dada por ${}^d v_{c_x}(k) = \sin(8\omega k) \text{ cm s}^{-1}$.

Os resultados para este primeiro experimento são ilustrados nas Figuras 4.27-4.29. Na Figura 4.27 pode-se observar o comportamento das velocidades do ponto de incisão no eixo x e z de \mathcal{F}_r . Como esperado, o controle cinemático baseado na inversão do Jacobiano restrito não se mostrou viável para os pontos próximos às singularidades. Por outro lado, a performance é satisfatória quando os métodos para solução de singularidade são utilizados e a trajetória desejada foi efetuada com sucesso.

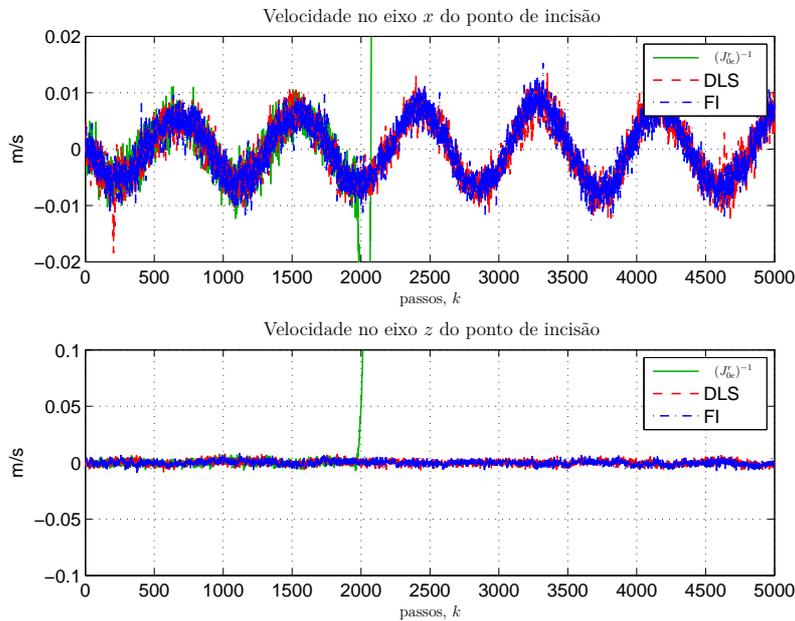


Figura 4.27: Velocidade ao longo dos eixos x e y no ponto de incisão.

A comparação de manipulabilidade do Jacobiano restrito J_{0e}^r entre a abordagem convencional de inversão da cinemática diferencial $(J_{0e}^r)^{-1}$ e os métodos alternativos de solução para as singularidade (*DLS* e *FI*) são mostrados na Figura 4.28(a), onde observa-se também a ocorrência de dois pontos de singularidade.

A evolução do sinal de velocidade das juntas gerado pelo controle cinemático é demonstrado na Figura 4.28(b). Pode-se observar a maior magnitude do sinal de controle utilizando a inversa do Jacobiano restrito se comparado aos métodos para solução de singularidades, demonstrando a viabilidade de ambos os métodos citados.

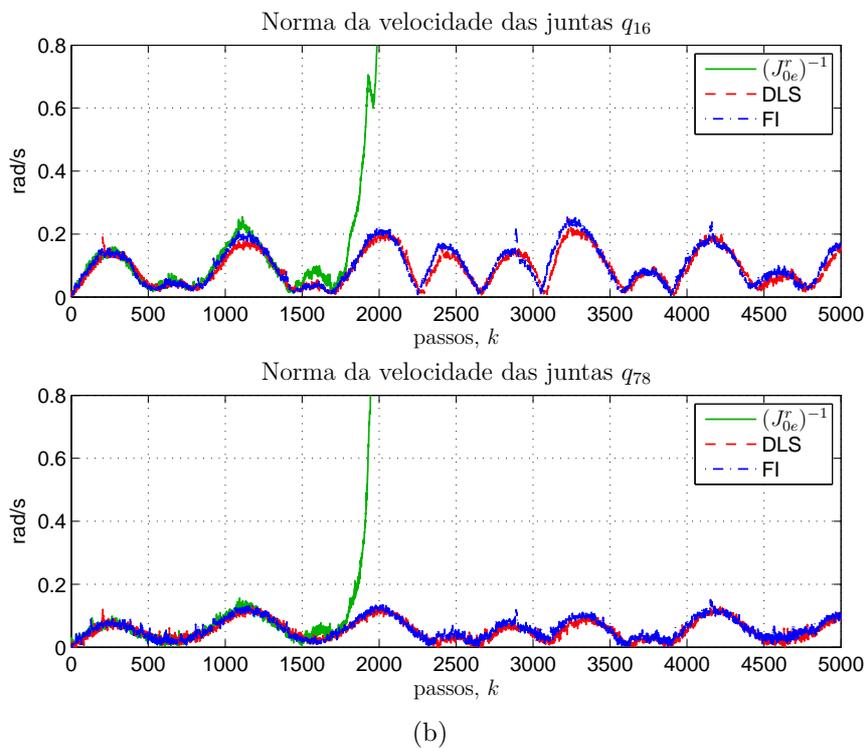
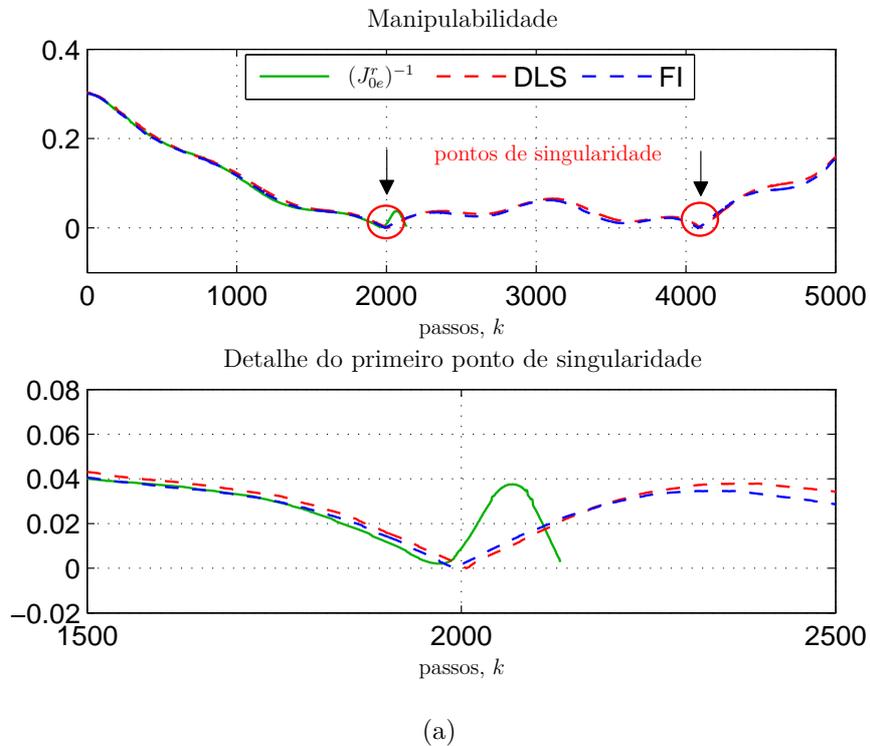


Figura 4.28: Comparação entre os métodos $(J_{0e}^r)^{-1}$, *DLS* e *FI*.

A Figura 4.29 reflete ao comportamento dos erros de posição e orientação do efetuador nos eixos x , y e z .

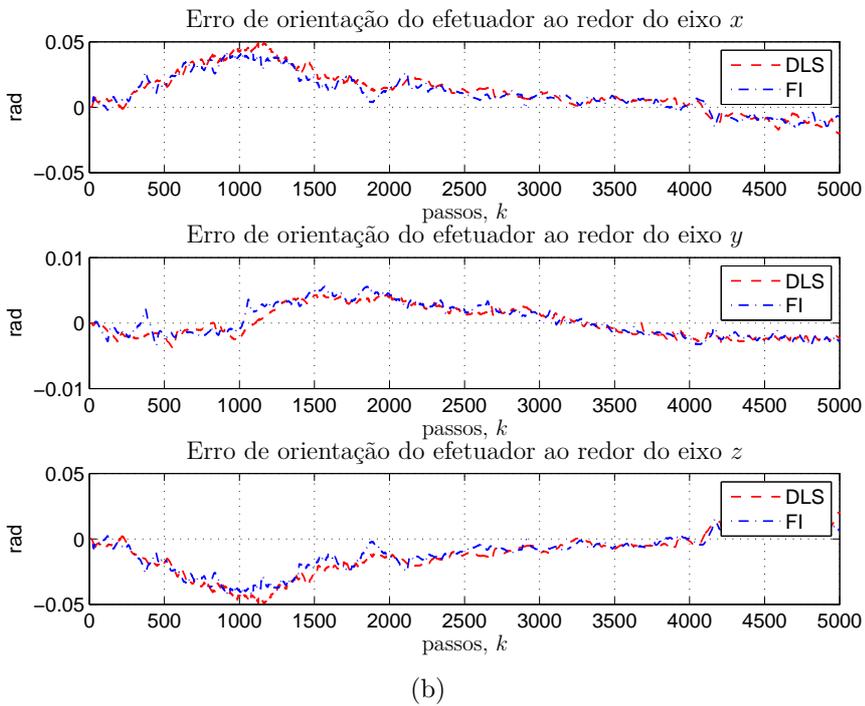
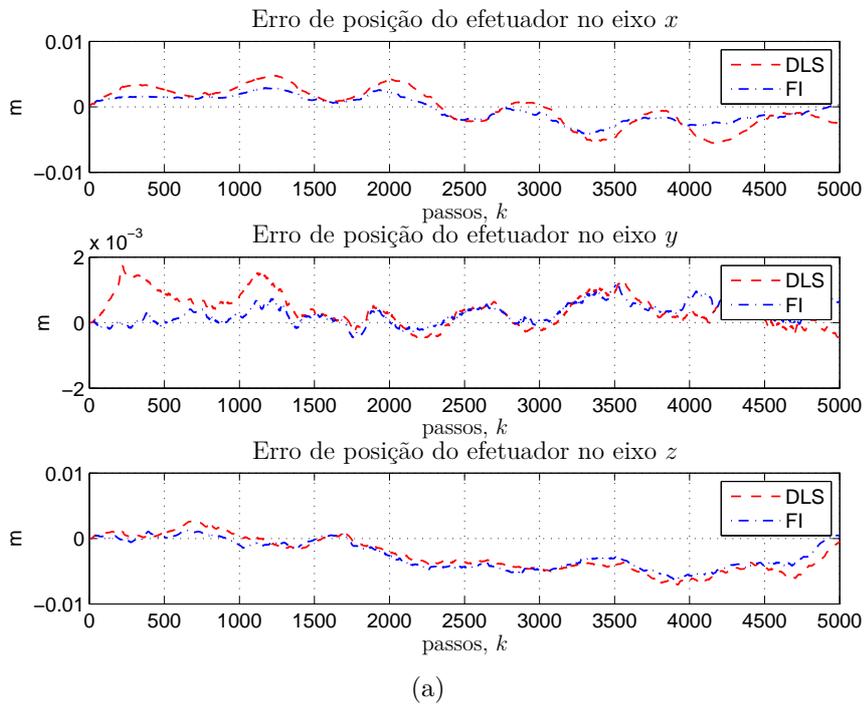


Figura 4.29: Erros de posição e orientação no efetuador.

Na Figura 4.30, observa-se o sinal de controle Cartesiano aplicado ao sistema. Nota-se a similaridade entre os sinais gerados pelos métodos DLS e FI.

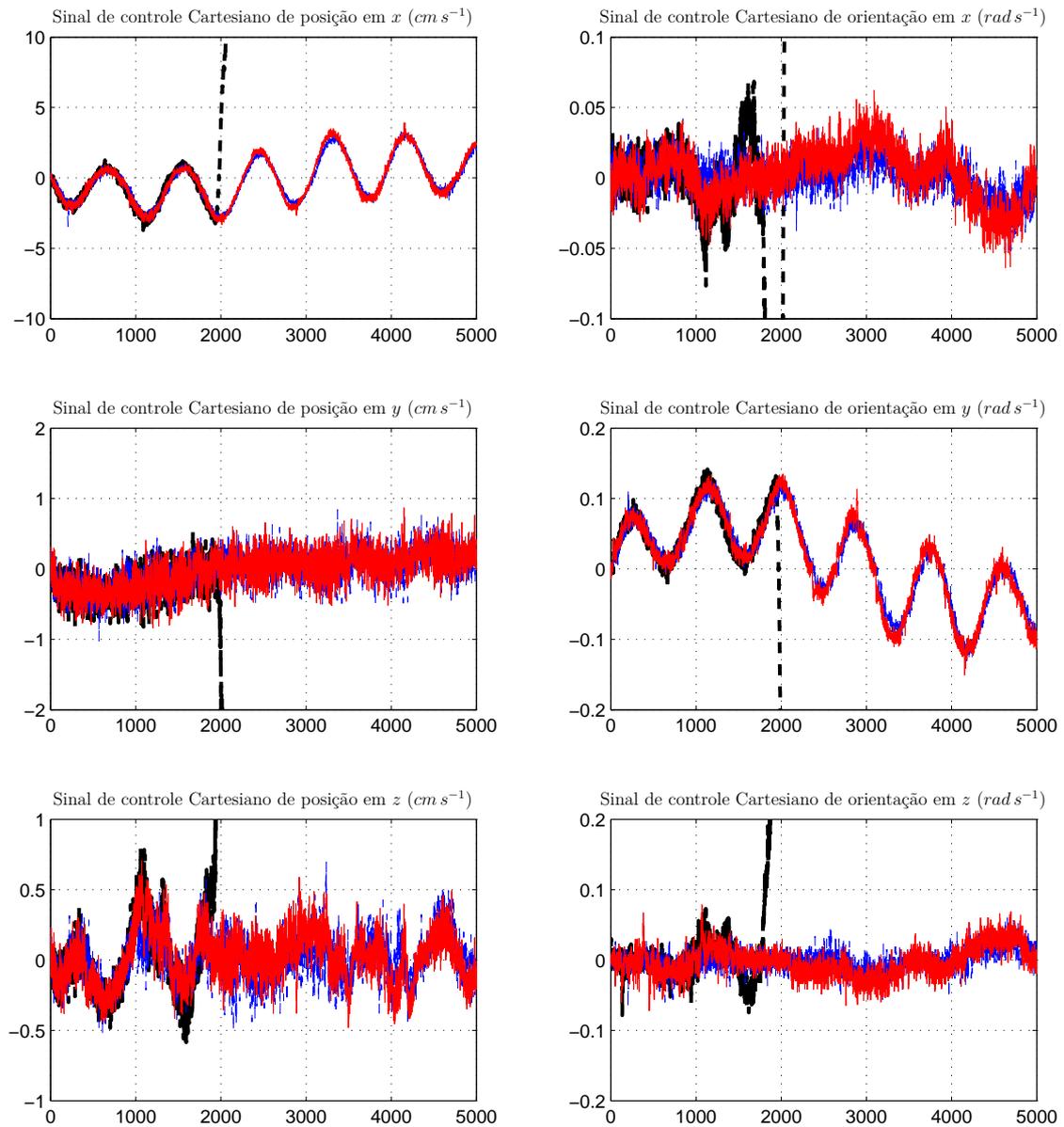


Figura 4.30: Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.
 Legenda: $(J_{0e}^r)^{-1}$ (—), DLS (—), FI (—).

O tempo de execução total da trajetória dada foi próximo de 45 s para 5000 iterações. As duas soluções para as singularidades dos Jacobianos foram analisadas no ponto de vista prático pois para o controle háptico dificilmente pode se impor uma trajetória completamente livre de singularidades. Desta forma, garante-se que o operador não necessita conhecer as singularidades geométricas do manipulador para que a trajetória seja realizada com segurança.

A trajetória realizada com a abordagem proposta pelo método da Inversa Filtrada apresentou um resultado levemente mais confiável, com menos erros ao longo da trajetória proposta e nos pontos próximos às singularidades.

4.2.2 Restrição bidirecional

Para este experimento, o efetuador a postura desejada do efetuador foi gerada através de um dispositivo háptico *Phantom Omni* e os movimentos laterais no ponto de incisão foram restringidos.

A velocidade do ponto de incisão nos eixos x e z é ilustrada na Figura 4.31. Pode-se observar que o elo restringido apresentou velocidades próximas de zero nas direções contingidas, apesar dos ruídos do *Motoman DIA10*.

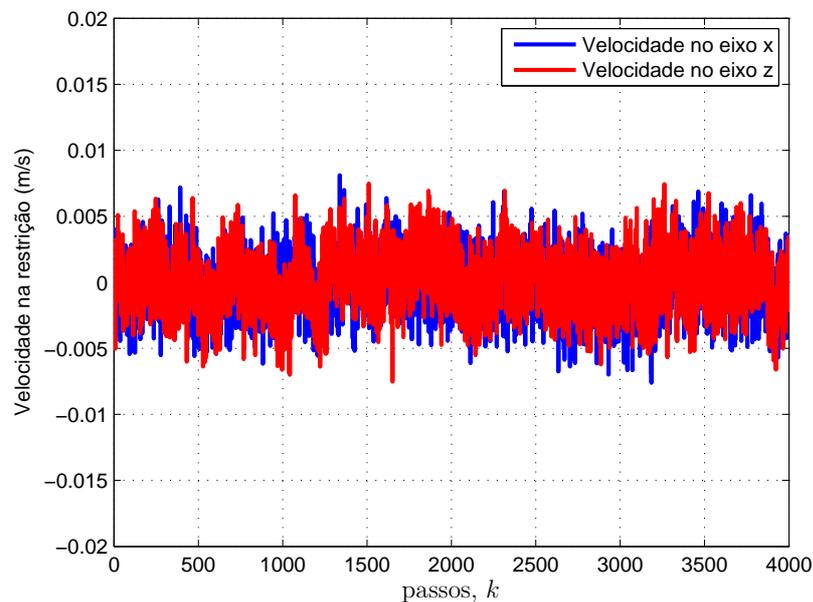


Figura 4.31: Velocidade nos eixos x e z no ponto de incisão e norma de velocidades das juntas

Pode se observar na Figura 4.32 o comportamento do robô durante os testes e constatar que a posição do ponto de incisão se manteve constante.

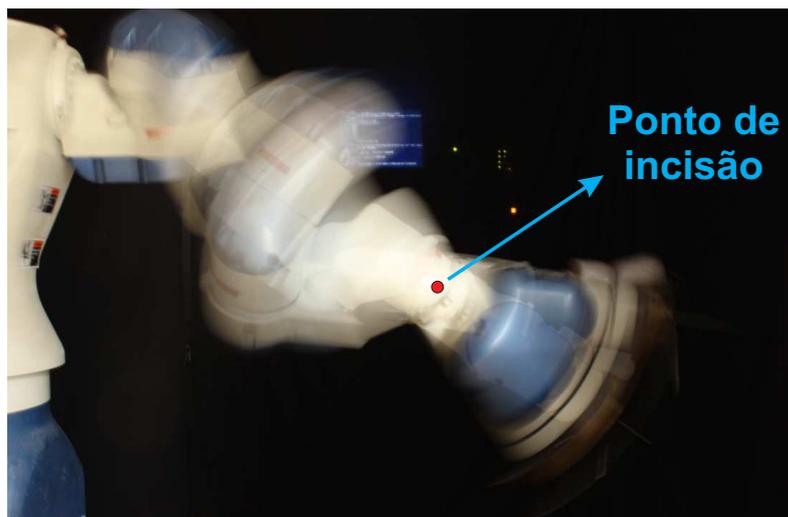


Figura 4.32: Imagens sobrepostas do manipulador restringido.

A variação do índice de manipulabilidade do Jacobiano restrito é ilustrado na Figura 4.33. Nota-se que a trajetória realizada não se aproximou de configurações singulares.

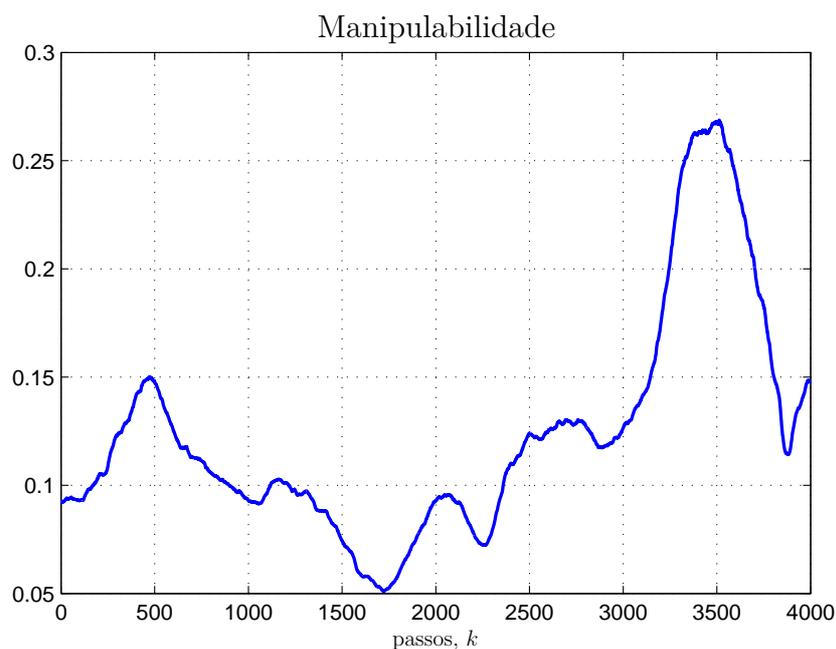
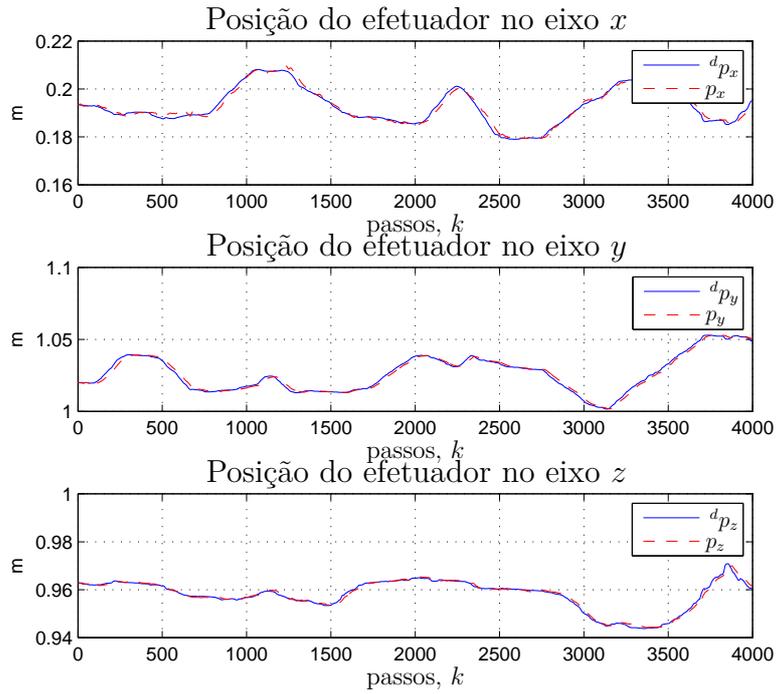
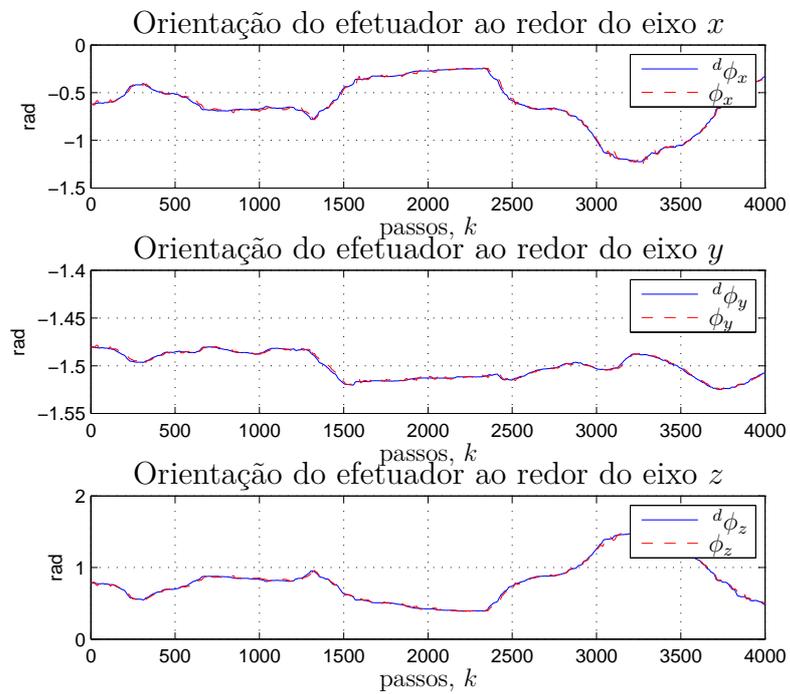


Figura 4.33: Índice de manipulabilidade do Jacobiano restrito.

A Figura 4.34 ilustra o comportamento da postura do efetuador durante o experimento. A posição e a orientação seguiram a trajetória desejada com baixos erros, estes mostrados na Figura 4.35, onde se observa a baixa magnitude dos sinais de erro mesmo para momentos de baixa manipulabilidade, devido ao método da Inversa Filtrada.



(a)



(b)

Figura 4.34: Posição e orientação no efetuator em coordenadas inerciais.

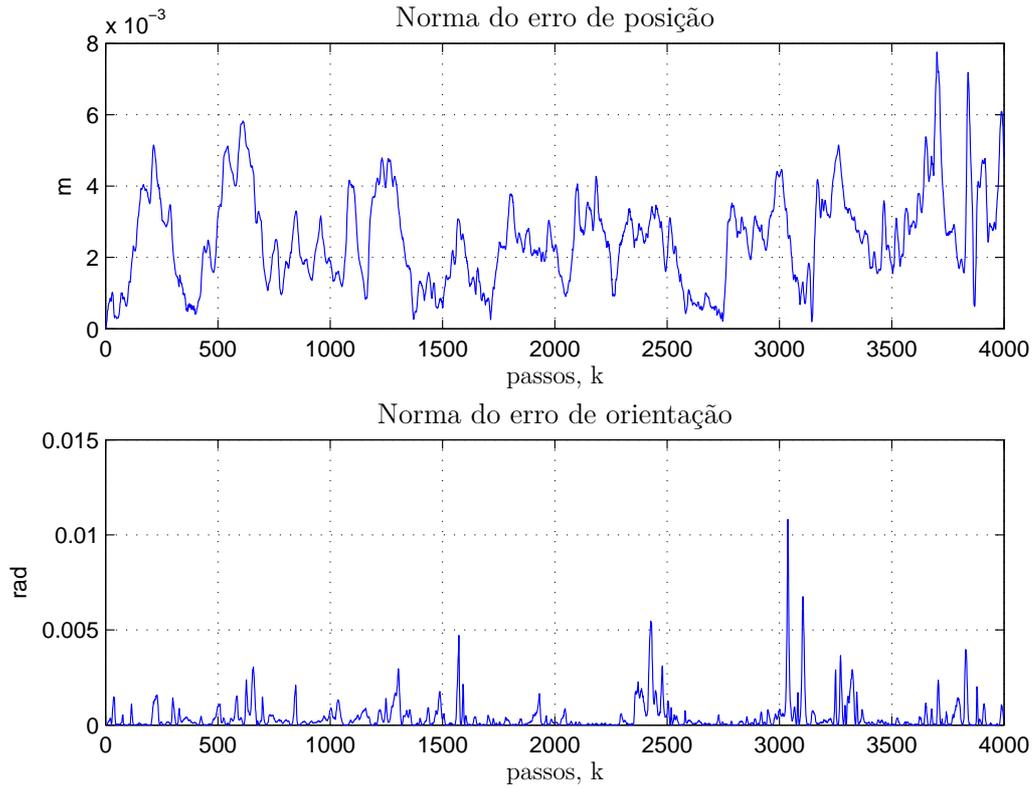


Figura 4.35: Norma do erro de posição e orientação do efetuador.

O comportamento da velocidade das juntas e dos sinais de controle Cartesiano são exibidos na Figura 4.36 e na Figura 4.37, respectivamente. Nota-se que o momentos em que estes sinais sofrem elevadas variações ocorrem nos momentos em que a postura a ser rastreada varia bruscamente, caracterizando um comportamento normal do sistema.

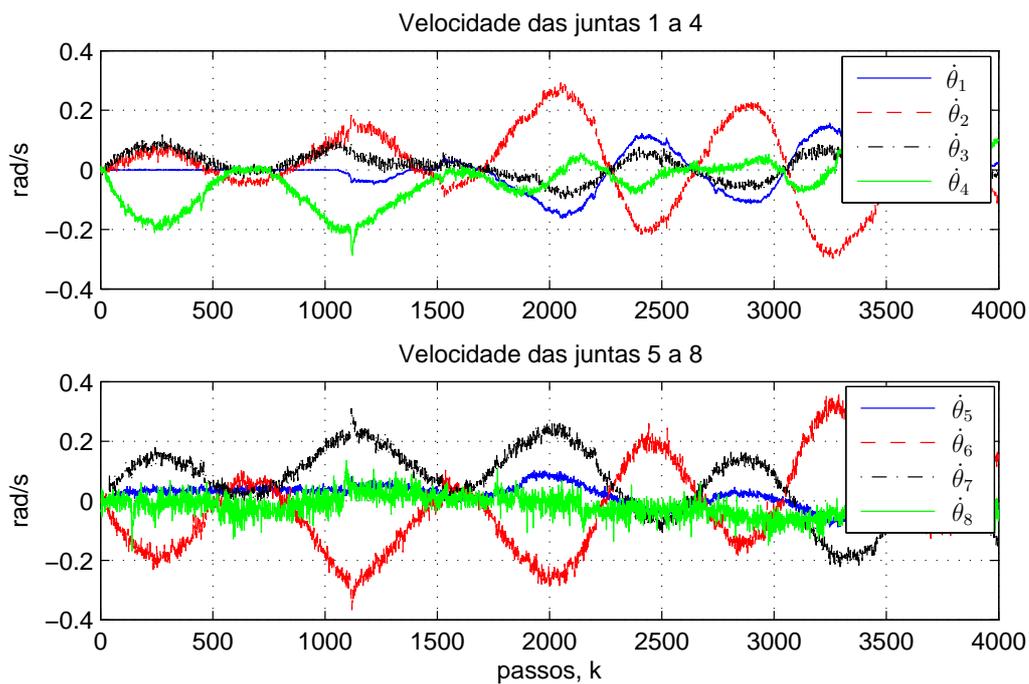


Figura 4.36: Velocidade das juntas do manipulador.

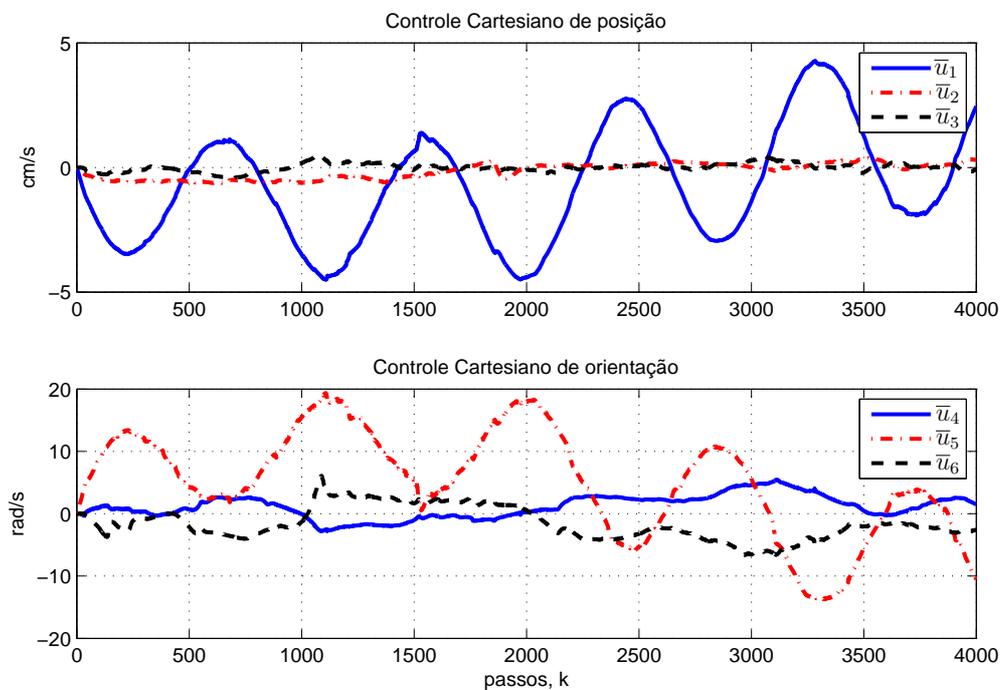


Figura 4.37: Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.

4.2.3 Restrição bidirecional com o ponto de incisão restrito a uma trajetória

Neste experimento, a postura desejada do efetuador também foi gerada por um operador através de um dispositivo háptico *Phantom Omni*. Por outro lado, a mesma trajetória definida na Seção 4.2.1 é utilizada para controlar a velocidade do ponto de incisão no eixo x . Vale ressaltar que, conhecendo a geometria e configurações singulares do robô restringido, o operador planejou a trajetória de modo a se aproximar as posições singulares em que a sétima junta do *Motoman DIA10* seja 0, para que então seja possível avaliar a eficácia do método da inversa filtrada.

A velocidade do ponto de incisão nos eixos x e z é ilustrada na Figura 4.38. Atesta-se novamente, a confiabilidade do método para trajetórias pré definidas, mesmo para teleoperação em que o efetuador realiza uma trajetória não periódica.

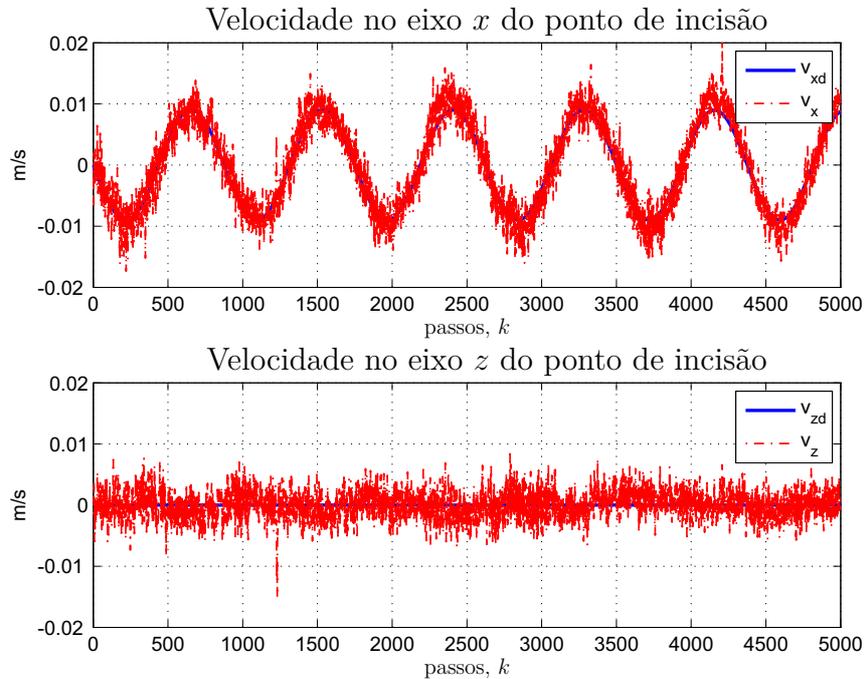


Figura 4.38: Velocidade nos eixos x e z no ponto de incisão.

O comportamento do índice de manipulabilidade é ilustrado na Figura 4.39. Destacam-se dois pontos em que, durante o experimento, o manipulador se aproximou de uma posição singular. Na Figura 4.39 também é mostrado o comportamento da norma da velocidade das juntas, onde observa-se uma baixa magnitude do sinal de controle das juntas mesmo para momentos em que a manipulabilidade do Jacobiano restrito se aproxima de zero.

A Figura 4.40 ilustra o comportamento da postura do efetuador durante o rastreamento da trajetória. A posição e a orientação seguiram a trajetória desejada.

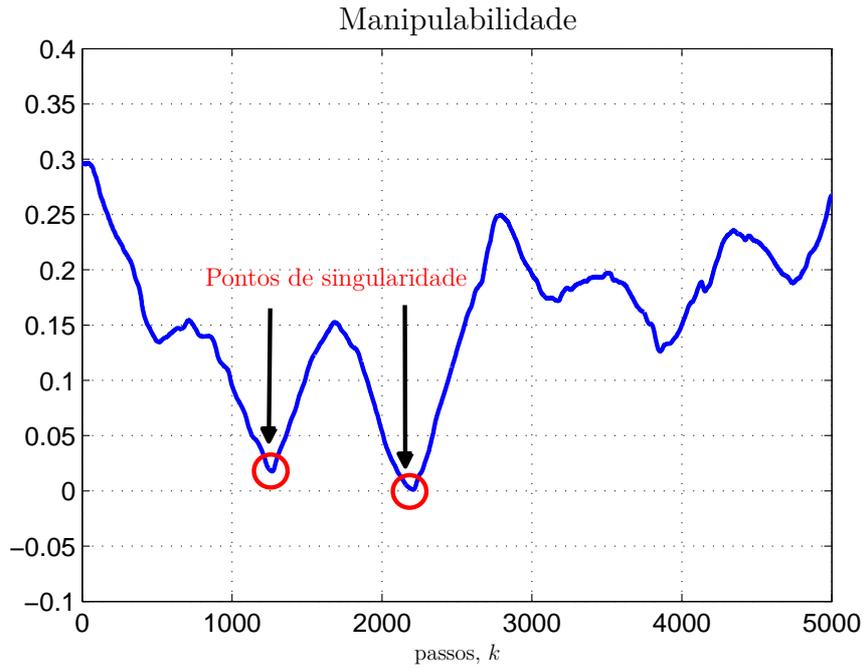


Figura 4.39: Índice de manipulabilidade do Jacobiano restrito.

com baixos erros, ilustrados na Figura 4.41. Destaca-se a maior magnitude dos erros para os momentos em que o manipulador se aproxima dos pontos de singularidade, apesar disto, estes erros permanecem pequenos devido ao método de solução de singularidades escolhido.

O comportamento da velocidade das juntas e dos sinais de controle Cartesiano são exibidos na Figura 4.42 e na Figura 4.43, respectivamente.

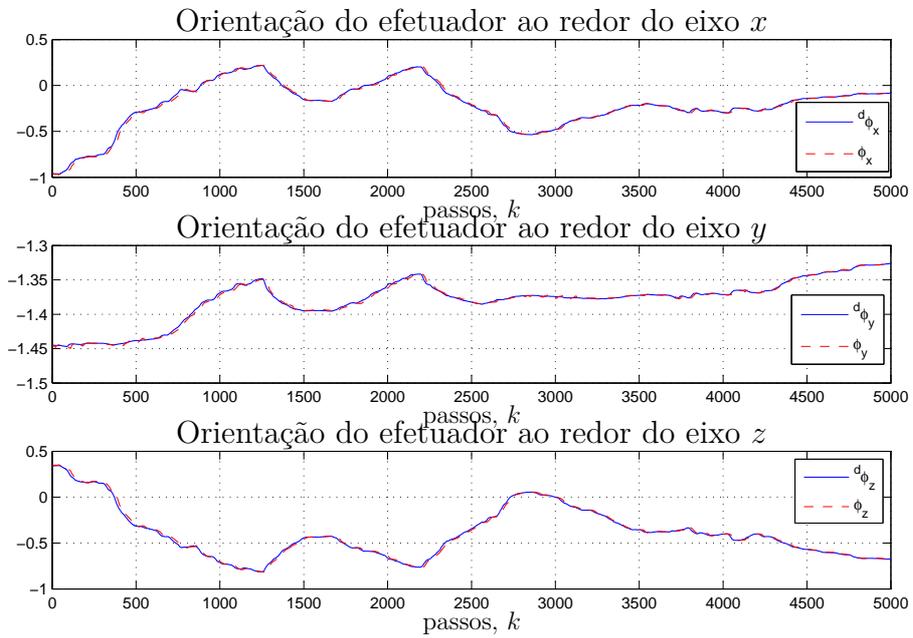
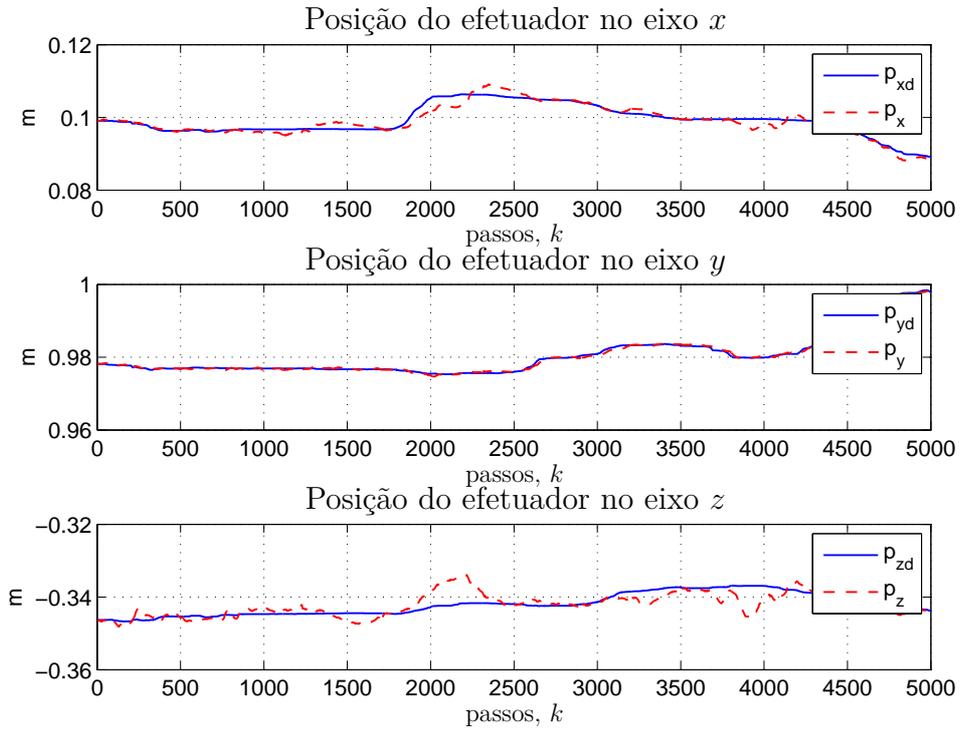
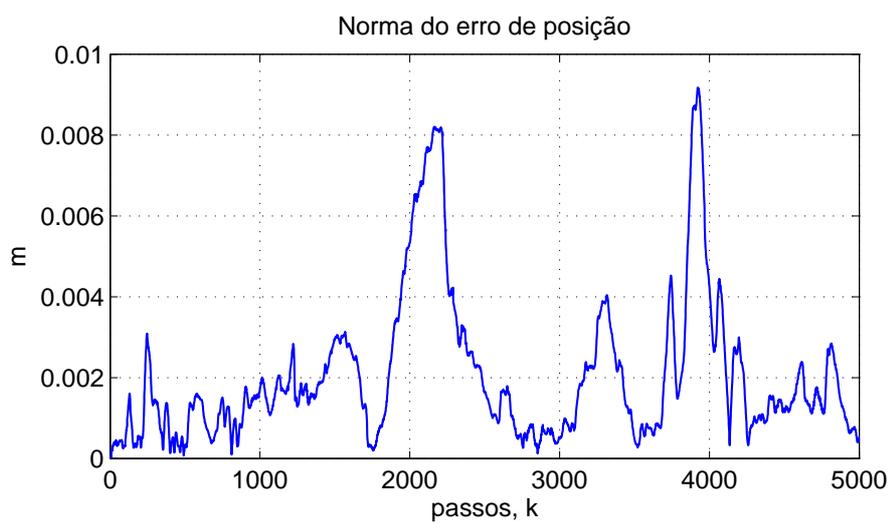
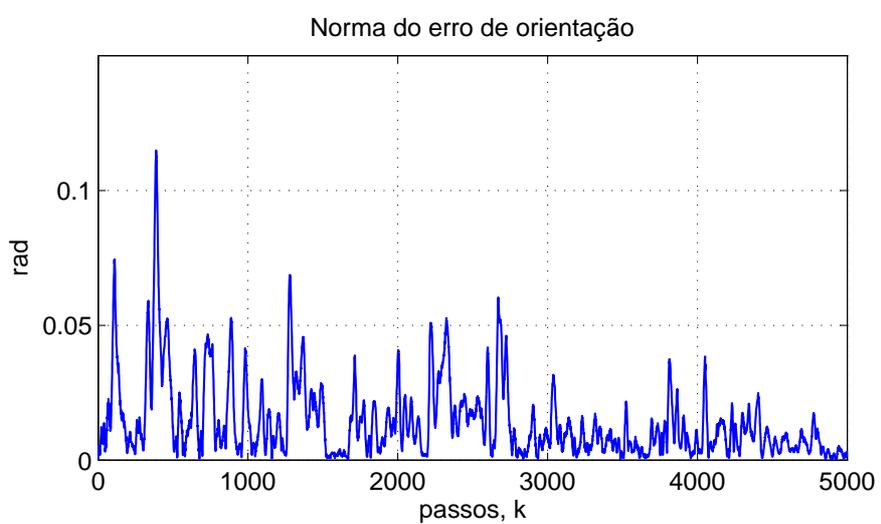


Figura 4.40: Posição e orientação no efetuador em coordenadas inerciais.



(a)



(b)

Figura 4.41: (a) Norma do erro de posição do efetuador. (b) Norma do erro de orientação do efetuador.

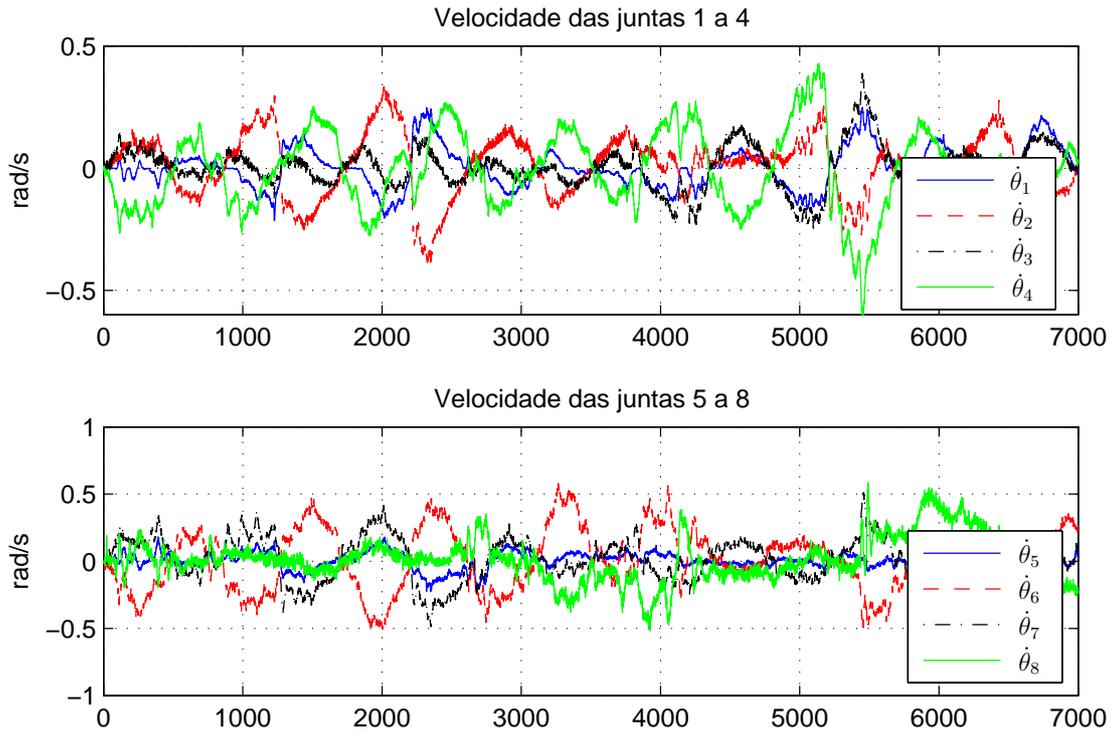


Figura 4.42: Velocidade das juntas do manipulador.

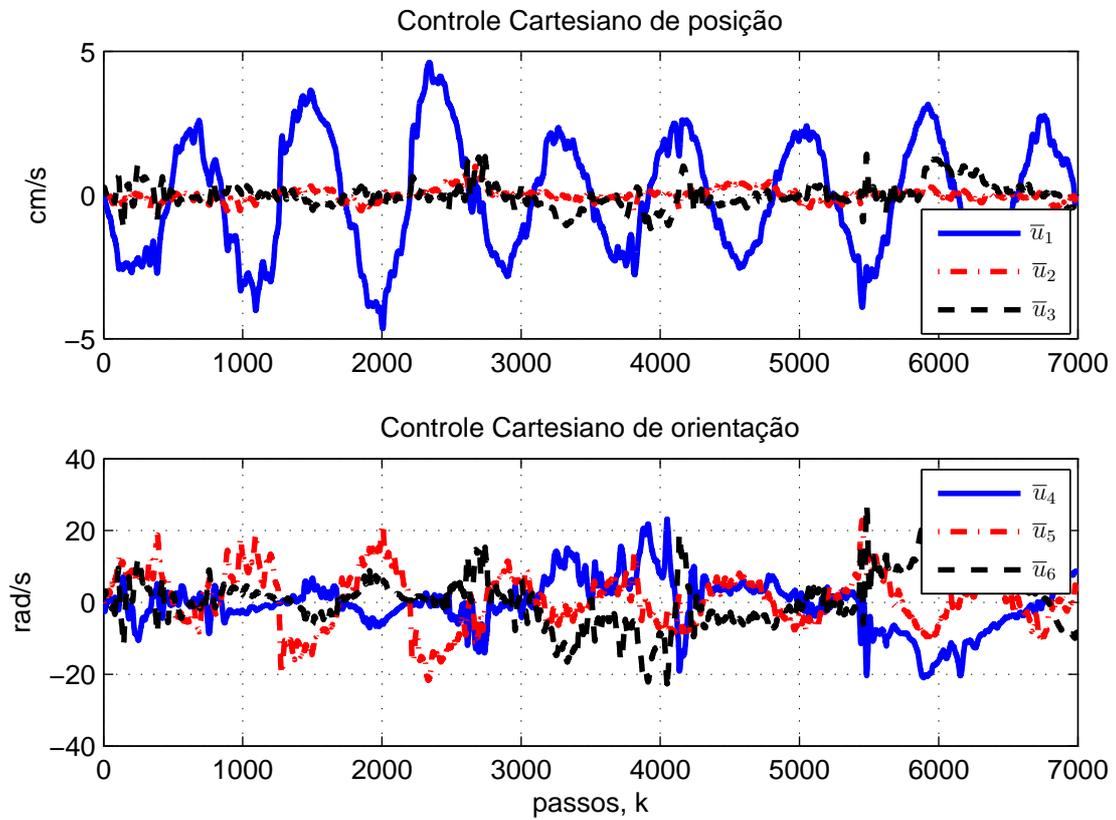


Figura 4.43: Sinais de controle Cartesiano de posição e orientação.

4.3 Conclusão

Nesta capítulo, realizou-se os testes simulados para o controle de um manipulador de oito graus de liberdade restringido cinematicamente utilizando a abordagem proposta pelo Jacobiano restrito.

Mostrou-se também, a eficácia dos métodos utilizados para evitar as singularidades mantendo os erros de postura, tal como a velocidade da restrição, dentro de um patamar aceitável.

Resultados experimentais obtidos com um manipulador *Motoman DIA10* foram apresentados, ilustrando tanto o uso do métodos para evitar singularidades, como o controle da postura do efetuador através de uma posição de referência gerada por um dispositivo háptico *Phantom Omni*.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

5.1 Conclusões

Neste trabalho é apresentado uma metodologia de controle para manipuladores redundantes com restrição cinemática para cirurgias minimamente invasivas assistidas roboticamente. Para garantir que o ponto de incisão não se movesse, foi utilizada uma estratégia de projeção do Jacobiano do manipulador no espaço nulo da restrição, modificando-se o mapeamento do espaço das juntas ao espaço de trabalho do manipulador através do Jacobiano restrito.

A estratégia estudada utilizou manipuladores série redundantes de n -GDLS. Constatou-se que a redundância do manipulador permite que o efetuador realize movimentos em 6-GDLs caso $n - r \geq 6$, onde r é a dimensão da restrição imposta. Uma limitação do uso de um manipulador série são as singularidades que podem ocorrer durante o uso da cinemática diferencial inversa. Assim, a análise da manipulabilidade do Jacobiano restrito foi estudada e foram apresentadas duas técnicas para lidar com estas singularidades: o amortecimento por mínimos quadrados (Nakamura & Hanafusa 1986) e a inversão filtrada do Jacobiano (Vargas et al. 2014).

Apresentou-se uma estratégia de controle cinemático utilizando o enfoque do corpo do efetuador e suas condições de convergência e estabilidade foram demonstradas. Utilizando a mesma estratégia de controle, uma metodologia em que o ponto de restrição se movimenta foi proposta para procedimento cirúrgicos minimamente invasivos em que o tecido no qual o instrumento foi inserido não permaneça estático.

Uma série de simulações e experimentos foram realizados utilizando um manipulador *Motoman DIA10*. Os procedimentos escolhidos envolviam o rastreamento de uma trajetória estabelecida e rastreamento de uma trajetória gerada

através um dispositivo háptico *Phantom Omni*, demonstrando a viabilidade da solução proposta para cirurgias robóticas.

Realizou-se uma breve comparação entre os dois métodos apresentados para lidar com as singularidades. Neste caso, notou-se que a trajetória foi realizada de maneira mais eficaz através da inversão filtrada do Jacobiano restrito. Apesar das limitações do método da Inversa Filtrada, conclui-se que ela seria a mais indicada para procedimentos cirúrgicos, considerando que o efetuador não realiza movimentos bruscos (o Jacobiano não se aproxima da singularidade mais rapidamente que uma exponencial) e o procedimento realizado com ela se mostrou mais preciso que aquele realizado com o método DLS.

5.2 Proposta de Trabalhos Futuros

No intuito de incentivar a continuidade da pesquisa apresentada nesta dissertação, seguem abaixo algumas propostas de desenvolvimento teórico ou levantamento de dados experimentais para serem exploradas em trabalhos futuros:

- É proposto a utilização de um sensor de força ou de um sensor tátil, visando uma realimentação háptica ao operador do robô. Em cirurgias minimamente invasivas, os cirurgiões sentem a interação dos instrumentos com o paciente. Alguns estudos têm relacionado a falta de uma realimentação háptica significativa em cirurgias robóticas, provocando inclusive, aumento de lesões intra-operatórias (Xin et al. 2006). A falta de realimentação háptica eficaz é muitas vezes relatado por cirurgiões e pesquisadores de robótica como uma das grandes limitações para sistemas de cirurgias robóticas assistidas atuais (Okamura 2009).
- Considerar o estudo de algoritmos de controle híbrido de posição e força, já que sistema de controle proposto é desenvolvido para que a lei de controle seja implementada no espaço Cartesiano (From 2013), tornando possível a implementação de um esquema de controle híbrido enquanto a tarefa de restrição do ponto de inserção é realizada pelo Jacobiano parcial do manipulador em conjunto com o Jacobiano restrito. Desta forma, é possível aplicar abordagens de controle de manipuladores robóticos no espaço Cartesiano encontradas na literatura (Leite 2011, Cho et al. 2012).
- Durante a realização deste trabalho, notou-se uma melhor eficácia quando se lida com as singularidades utilizando-se o método da Filtrada Inversa. É válido comentar que a inversa filtrada do Jacobiano restrito mostrou resultado, por vezes, melhores quando os valores das matrizes de ganho

estavam desbalanceados, por isso, propõe-se a investigação dessa característica peculiar.

- Em cirurgia robóticas minimamente invasivas, um dos procedimentos mais comuns é o corte por cauterização em que um dos braços do robô segura o tecido enquanto o outro realiza o corte. Propõe-se que os dois braços do Motoman sejam usados em conjunto com uma restrição cinemática em cada um deles para simular um ambiente cirúrgico.
- Para os casos em que o ponto de incisão se movimenta conforme o tecido do paciente, propõe-se que técnicas visuais sejam estudadas para que o ponto restringido possa acompanhar este movimento. Tal como sugere-se o estudo de uma estratégia de controle realimentada para os movimentos do ponto de incisão, diminuindo os danos que o tecido em movimento possa sofrer durante os procedimentos cirúrgicos.

Referências Bibliográficas

- Abbati-Marescotti, A., Bonivento, C. & Melchiorri, C. (1990), ‘On the invariance of the hybrid position/force control’, *J. Intell. Robot. Syst.* **3**(4), 233–250.
- Aghakhani, N., Geravand, M., Shahriari, N., Vendittelli, M. & Oriolo, G. (2013), Task control with remote center of motion constraint for minimally invasive robotic surgery, *in* ‘Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference on’, pp. 5807–5812.
- Avazpour, M. R., Piltan, F., Ghiasi, H., Hadi, M., Mazloom & Sahamijoo, A. (2015), ‘Intelligent trajectory tracking control of robot-assisted surgery’, *International Journal of Hybrid Information Technology* **8**(5), 73–90.
- Azimian, H. (2012), Preoperative Planning of Robotics-Assisted Minimally Invasive Cardiac Surgery Under Uncertainty, PhD thesis, University of Western Ontario.
URL: <http://ir.lib.uwo.ca/etd/848>
- Azimian, H., Patel, R. V. & Naish, M. D. (2010), On constrained manipulation in robotics-assisted minimally invasive surgery, *in* ‘Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob), 2010 3rd IEEE RAS and EMBS International Conference on’, pp. 650–655.
- Baillieul, J. (1985), ‘Kinematic programming alternatives for redundant manipulators’, *International Conference on Robotics and Automation* **2**, 722–728.
- Bauer, A., Borner, M. & Lahmer, A. (1999), Clinical experience with a medical robotic system for total hip replacement, *in* ‘Computer Assisted Orthopedic Surgery’, Hogrefe & Huber, pp. 128–133.
- Boullion, T. L. & Odell, P. L. (1972), Generalized inverse matrices., *in* ‘International Journal for Numerical Methods in Engineering’, Vol. 5, John Wiley & Sons, Ltd, pp. 147–148.

- Bro-Nielsen, M. & Cotin, S. (1996), ‘Real-time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation’, *Computer Graphics Forum* **15**.
- Bro-Nielsen, M., Lemke, H. U., Vannier, M. W., , Inamura, K. & Farman, A. G. (1996), ‘Interactive 2-4d medical image and graphics visualization software’, *International Symposium on Computer and Communication Systems* **15**.
- Bruyninckx, H. & De Schutter, J. (1996), ‘Specification of force-controlled actions in the “task frame formalism”-a synthesis’, *IEEE Trans. Robot.* **12**(4), 581–589.
- Cho, J. H., From, P. J., Annerstedt, M., Robertsson, A., & Johansson, R. (2012), ‘Design of an intermediate layer to enhance operator awareness and safety in telesurgical systems’, *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Vilamoura, Portugal* .
- Corke, P. (1996), ‘A robotics toolbox for MATLAB’, *IEEE Robotics and Automation Magazine* **3**(1), 24–32.
- Coutinho, F., Pham, C. D., Hsu, L., From, P. J. & Lizarralde, F. (2014), ‘Abordagem analítica para controle no espaço operacional de manipuladores com restrições cinemáticas’, *Congresso Brasileiro de Automática, Belo Horizonte, Brasil* .
- Craig, J. J. & Raibert, M. H. (1979), A systematic method of hybrid position/force control of a manipulator, *in* ‘Proc. COMPSAC ’79’, pp. 446 – 451.
- Dargahi, J., Sokhanvar, S., Najarian, S. & Arbatani, S. (2012), *Tactile Sensing and Display: Haptic Feedback For Minimally Invasive Surgery And Robotics*, Wiley.
URL: <https://books.google.com.br/books?id=jTUoFCc6vLAC>
- Davies, B. L., Hibberd, R. D., Coptcoat, M. J. & Wickham, J. E. (1989), ‘A surgeon robot prostatectomy a laboratory evaluation’, *Journal of Medical Engineering & Technology* **13**(6), 273–277.
- Fjellstad, O.-E. (1994), Control of Unmanned Underwater Vehicles in Six Degrees of Freedom: A Quaternion Feedback Approach, PhD thesis, University of Trondheim.
- From, P. J. (2013), ‘On the Kinematics of Robotic-assisted Minimally Invasive Surgery’, *Modeling, Identification and Control* **34**(2), 69–82.

- Funda, J., Taylor, R. H., Eldridge, B., Gomory, S. & Gruben, K. (1996), ‘Constrained cartesian motion control for teleoperated surgical robots’, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **12**(3), 453–465.
- Funda, J., Taylor, R. H., Gruben, K. & LaRose, D. (1993), ‘Optimal motion control for teleoperated surgical robots’, *Proc. SPIE* **2057**, 211–222.
URL: <http://dx.doi.org/10.1117/12.164902>
- Ginsberg, J. (2008), *Engineering Dynamics*, number v. 10 in ‘Engineering dynamics’, Cambridge University Press.
- Hägele, M., Nilsson, K. & Pires, J. N. (2008), Industrial robotics, in ‘Handbook of Robotics’, Springer, pp. 936–986.
- Ioannou, P. A. & Sun, J. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall Inc.
- Kang, H. (2002), Robotic Assisted Suturing in Minimally Invasive Surgery, PhD thesis, Faculty of Rensselaer Polytechnic Institute.
- Kapoor, A., Li, M. & Taylor, R. (2006), Constrained control for surgical assistant robots, in ‘Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on’, pp. 231–236.
- Kwoh, Y. S., Hou, E. A. J. J. & Hayati, S. (1988), ‘A robot with improved absolute positioning accuracy for ct guided stereotactic brain surgery’, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **35**(2), 153–160.
- Lanfranco, A. R., Castellanos, A. E., Desai, J. P. & Meyers, W. C. (2004), ‘Robotic surgery: A current perspective’, *Control Engineering Practice* **239**(1), 14 – 21.
URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1356187/#r1-3>
- Leite, A. C. (2011), Servovisão Adaptativa e Controle de Força para Robôs Manipuladores com Cinemática e Dinâmica Incertas Interagindo com Ambientes Não-estruturados, PhD thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, UFRJ.
- Li, M., Kapoor, A. & Taylor, R. H. (2005), A constrained optimization approach to virtual fixtures, in ‘International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005.’, pp. 1408–1413.
- Lipkin, H. & Duffy, J. (1988), ‘Hybrid twist and wrench control for a robotic manipulator’, *Trans. ASME J. Mech. Transm. Autom. Des.* **110**, 138–144.

- Locke, R. C. O. & Patel, R. V. (2007), Optimal remote center-of-motion location for robotics-assisted minimally-invasive surgery, *in* ‘Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on’, pp. 1900–1905.
- Lum, M. J. H., Rosen, J., Sinanan, M. N. & Hannaford, B. (2006), ‘Optimization of a spherical mechanism for a minimally invasive surgical robot: Theoretical and experimental approaches’, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **53**(7), 1440–1445.
- Maciejewski, A. A. & Klein, C. A. (1985), ‘Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments’, *The International Journal of Robotic Systems* **4**(3), 109–117.
- Marinho, M. M., Bernardes, M. C. & Bo, A. P. (2014), A programmable remote center-of-motion controller for minimally invasive surgery using the dual quaternion framework, *in* ‘Biomedical Robotics and Biomechatronics (2014 5th IEEE RAS EMBS International Conference on’, pp. 339–344.
- Mason, M. T. (1981), ‘Compliance and force control for computer controlled manipulators’, *IEEE Trans. Syst. Man. Cyb.* **11**(6), 418–432.
- Mayer, H., Nagy, I. & Knoll, A. (2004), Kinematics and modelling of a system for robotic surgery, *in* ‘On Advances in Robot Kinematics’, Springer.
- Mayorga, R. V., Milano, N. & Wong, A. K. C. (1993), ‘A fast procedure for manipulator inverse kinematics computation and singularities prevention’, *Journal of Robotic Systems* **10**(1), 45–72.
URL: <http://dx.doi.org/10.1002/rob.4620100104>
- Merlet, J.-P. (2007), Jacobian, manipulability, condition number and accuracy of parallel robots, *in* S. Thrun, R. Brooks & H. Durrant-Whyte, eds, ‘Robotics Research’, Vol. 28 of *Springer Tracts in Advanced Robotics*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 175–184.
- Mitsuishi, M., Watanabe, T., Nakanishi, B., Hori, T., Watanabe, H. & Kramer, B. (1995), ‘A tele-micro-surgery system across the internet with a fixed viewpoint/operation-point’, *Conference on Intelligent Robots and Systems. ‘Human Robot Interaction and Cooperative Robots’, Proceedings. 1995* **2**, 178–185.
URL: <http://dx.doi.org/10.1002/rob.4620110103>
- Murray, R. M., Li, Z. & Sastry, S. S. (1994), *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA.

- Nakamura, Y. & Hanafusa, H. (1986), ‘Inverse kinematics solutions with singularity robustness for robot manipulator control’, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **108**, 163–171.
- Natale, C. (2003), *Interaction Control of Robot Manipulators: Six-degrees-of-freedom Tasks*, Springer Tracts in Advanced Robotics, Springer.
- Okamura, A. (2009), ‘Haptic feedback in robot-assisted minimally invasive surgery’, *Current Opinion in Urology* **19**(1), 102–107.
- Ortmaier, T. & Hirzinger, G. (2000), Cartesian control issues for minimally invasive robot surgery, *in* ‘Intelligent Robots and Systems, 2000. (IROS 2000). Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International Conference on’, Vol. 1, pp. 565–571.
- Pham, C. D., Coutinho, F., Lizarralde, F., Hsu, L. & From, P. J. (2014), ‘An analytical approach to operational space control of robotic manipulators with kinematic constraints’, *IFAC World Congress, Cape Town, South Africa*.
- Prassler, E. & Kosuge, K. (2008), Domestic robotics, *in* B. Siciliano & O. Khatib, eds, ‘Springer Handbook of Robotics’, Springer Berlin Heidelberg, pp. 1253–1281.
- Sagar, M. A., Bullivant, D., Mallinson, G. D. & Hunter, P. J. (1994), ‘A virtual environment and model of the eye for surgical simulation’, *Annual Computer Graphic Conference*.
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L. & Oriolo, G. (2011), *Robotics: Modelling, Planning and Control*, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer.
- Slotine, J.-J. E. & Li, W. (1991), *Applied nonlinear control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (N.J.).
- Spong, M. W., Hutchinson, S. & Vidyasagar, M. (2005), *Robot Modeling and Control*, Wiley.
- Strang, G. (1988), *Linear Algebra and Its Applications*, Brooks Cole.
- Taylor, R. H. (2008), ‘Medical robotics and computer-integrated surgery’, *2014 IEEE 38th Annual Computer Software and Applications Conference* **0**, 1.

- Tendick, F. & Cavusoglu, M. (1997), ‘Human-machine interfaces for minimally invasive surgery’, *Engineering in Medicine and Biology Society* **6**.
- Tendick, F., Downes, M., Cavusoglu, M. C., Gantert, W. & Way, L. W. (1998), ‘Development of virtual environments for training skills and reducing errors in laparoscopic surgery’, *Medicine Meets Virtual Reality, San Diego, CA* .
- Trevelyan, J., Kang, S.-C. & Hamel, W. (2008), Robotics in hazardous applications, *in* B. Siciliano & O. Khatib, eds, ‘Springer Handbook of Robotics’, Springer Berlin Heidelberg, pp. 1101–1126.
- Vargas, L. V. (2013), Inversa filtrada: Uma solução alternativa para a cinemática inversa de manipuladores robóticos, Master’s thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, UFRJ.
- Vargas, L. V., Leite, A. C. & Costa, R. R. (2014), Overcoming kinematic singularities with the filtered inverse approach, *in* ‘19th World Congress of the International Federation of Automatic Control’, pp. 8496–8502.
- Wampler, C. (1986), ‘Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods’, *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on* **16**(1), 93–101.
- Wang, Y., Uecker, D., Laby, K., Wilson, J., Jordan, S. & Wright, J. (2006), ‘Method and apparatus for performing minimally invasive cardiac procedures’. US Patent 7,074,179.
URL: <http://www.google.com.ar/patents/US7074179>
- Wason, J. D. & Wen, J. T. (2011), ‘Robot raconteur: A communication architecture and library for robotic and automation systems’, *2011 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering, Trieste, Italy* pp. 761–766.
- Wei, W., Goldman, R. E., Fine, H., Chang, S. & Simaan, N. (2009), ‘Performance evaluation for multi-arm manipulation of hollow suspended organs’, *Robotics, IEEE Transactions on* **25**(1), 147–157.
- Wen, J. T.-Y. & Wilfinger, L. S. (1999), Kinematic manipulability of general constrained rigid multibody systems, *in* ‘Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation’, Vol. 5, pp. 558 – 567.

- Wen, J.-Y. & Kreutz-Delgado, K. (1991), 'The attitude control problem', *Automatic Control, IEEE Transactions on* **36**(10), 1148–1162.
- Xin, H., Zelek, J. S. & Carnahan, H. (2006), 'Laparoscopic surgery, perceptual limitations and force: A review.', *First Canadian Student Conference on Biomedical Computing* **144**.
- Yoshikawa, T. (1985*a*), 'Manipulability and redundancy control of robotic mechanisms', *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **2**, 1004–1009.
- Yoshikawa, T. (1985*b*), 'Manipulability of robotic mechanisms', *The International Journal of Robotics* **4**(2), 3–9.

Apêndice A

Conceitos matemáticos

A.1 Operador produto vetorial

Seja os vetores $v, u \in \mathcal{V}$ de componentes $v = [v_1 \dots v_n]^T \in \mathbb{R}^n$ e $u = [u_1 \dots u_n]^T \in \mathbb{R}^n$, o produto vetorial, ou produto cruzado entre eles é dado por $v \times u$. Como o produto cruzado de v é um operador linear que mapeia u da forma $u \mapsto v \times u$ ele pode ser representado de maneira matricial \hat{v} , tal que:

$$v \times u = \hat{v}u. \quad (\text{A.1})$$

Desta forma, define-se o operador produto vetorial ($\hat{\cdot}$) para duas álgebras de Lie.

- $\mathfrak{so}(2)$: O grupo especial ortonormal $SO(2)$ é o grupo de rotações planares com espaço de movimento \mathbb{S}^1 , apesar do grupo $SO(n)$ ser não comutativo, $SO(2)$ é um caso particular comutativo. Para uma rotação planar existe uma rotação de um grau de liberdade $v \in \mathbb{R}$, para a qual o operador produto vetorial é dado por.

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v \\ v & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

- $\mathfrak{so}(3)$:

$$v \times u = \hat{v}u = \begin{bmatrix} v_2u_3 - v_3u_2 \\ v_3u_1 - v_1u_3 \\ v_1u_2 - v_2u_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Desta forma pode-se definir o operador produto vetorial de uma rotação $SO(3)$ como:

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Dada uma matriz $R \in SO(n)$ e dois vetores $v, u \in \mathbb{R}^n$ e $n > 2$, as propriedades do operador produto vetorial são:

Propriedade 1: $R(\hat{v}u) = \widehat{Rv}Ru$.

Propriedade 2: $R\hat{v}R^T = \widehat{Rv}$.

Propriedade 3: $\hat{v}u = -\hat{u}v$.

A.2 Quatérnios

O quatérnio $Q \in \mathbb{H}$ é formalmente representado por:

$$Q = \eta + \epsilon_1 \vec{i} + \epsilon_2 \vec{j} + \epsilon_3 \vec{k} \in \mathbb{S}^3. \quad (\text{A.5})$$

O quatérnio unitário é uma generalização dos números complexos \mathbb{C} que forma o conjunto $\mathbb{H} = \{\eta, \epsilon\}$, composto de uma componente escalar $\eta \in \mathbb{R}$ e uma parte vetorial complexa $\epsilon \in \mathbb{R}^3$, o que representa uma rotação α em torno de um vetor k definida por:

$$\eta = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (\text{A.6})$$

$$\epsilon = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)k. \quad (\text{A.7})$$

A visualização desta rotação no espaço euclidiano pode ser observado na figura Figura A.1. Os quatérnios podem ser definidos também como pontos na superfície de uma hiper-esfera de raio unitário \mathbb{S}^3 .

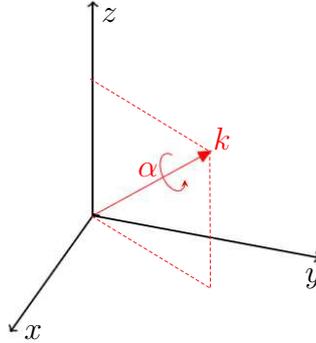


Figura A.1: Rotação em torno de um vetor

O conjugado do quatérnio $Q = \{\eta, \epsilon\}$ é dado pela relação $\bar{Q} = Q^{-1} = \{\eta, -\epsilon\}$, analogamente a relação entre as matrizes de rotação $R^T = R^{-1}$. Para um escalar $a \in \mathbb{R}$ e (\cdot) o operador produto, a multiplicação respeita as seguintes propriedades:

- $a \vec{i} = \vec{i} a$;
- $a \vec{j} = \vec{j} a$;
- $a \vec{k} = \vec{k} a$;
- $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{j}.\vec{k} = -1$;

- $\vec{i}.\vec{j} = -\vec{j}.\vec{i} = \vec{k}$;
- $\vec{j}.\vec{k} = -\vec{k}.\vec{j} = \vec{i}$;
- $\vec{k}.\vec{i} = -\vec{i}.\vec{k} = \vec{j}$.

A magnitude do quatérnio unitário define não somente seu nome mas também a restrição imposta entre suas variáveis:

$$\|Q\| = \sqrt{Q \bar{Q}} = \sqrt{\eta^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2} = 1. \quad (\text{A.8})$$

A soma de dois quatérnios Q e Q' é dada por:

$$Q + Q' = \{\eta + \eta', \epsilon_1 + \epsilon'_1, \epsilon_2 + \epsilon'_2, \epsilon_3 + \epsilon'_3\}. \quad (\text{A.9})$$

A multiplicação entre quatérnios é não comutativa, apesar de associativa e distributiva. O produto entre estes dois quatérnios é dado por:

$$\begin{aligned} Q \otimes Q' = \{ & \eta\eta' - \epsilon_1\epsilon'_1 - \epsilon_2\epsilon'_2 - \epsilon_3\epsilon'_3, \\ & \eta\epsilon'_1 + \epsilon_1\eta' + \epsilon_2\epsilon'_3 - \epsilon_3\epsilon'_2, \\ & \eta\epsilon'_2 - \epsilon_1\epsilon'_3 + \epsilon_2\eta' + \epsilon_3\epsilon'_1, \\ & \eta\epsilon'_3 + \epsilon_1\epsilon'_2 - \epsilon_2\epsilon'_1 + \epsilon_3\eta'\}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ou, para $Q = \{\eta, \epsilon\}$ e $Q' = \{\eta', \epsilon'\}$:

$$Q \otimes Q' = \{\eta\eta' - \epsilon\epsilon', \eta\epsilon' + \eta'\epsilon + \hat{\epsilon}\epsilon'\} \langle \rangle \quad (\text{A.11})$$

A.3 Decomposição em valores singulares

Na álgebra linear, a decomposição de valores singulares (DVS) é uma fatorização de uma matriz real ou complexa $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

A "DVS" está intimamente ligada a fatoração de autovalores e autovetores $Q\Lambda Q^T$ de uma matriz definida positiva. A matriz de autovetor Q é ortogonal ($Q \otimes Q^T = I$) porque os autovetores de uma matriz simétrica podem ser escolhidos de forma que sejam ortonormais. Para a maioria das matrizes isto não é verdadeiro, e para matrizes retangulares $m \neq n$ isto não é, de forma alguma válido, devido a seus autovalores indefinidos. Considerando que Q e Q^T sejam qualquer uma das matrizes ortogonais U e V^T , não necessariamente transpostas uma das outras, pode-se definir a decomposição de valores singulares por (Strang 1988):

$$A = U\Sigma V^T. \quad (\text{A.12})$$

Pode-se definir formalmente a decomposição de uma matriz $A_{m \times n}$ real ou complexa como uma fatorização da forma (A.12) onde, U é uma matriz quadrada e unitária $m \times m$ real ou complexa, V^T é uma matriz $n \times n$ real ou complexa, sendo a matriz a transposta conjugada de V , ou somente transposta, caso V seja real e Σ é uma matriz diagonal retangular $\in \mathbb{R}^{m \times n}$ com números reais não negativos em sua diagonal de forma que :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_p & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Os r valores singulares $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ da diagonal de Σ são as raízes quadradas dos autovalores não nulos de AA^T e $A^T A$.