



## DESEMPENHO DE ALGORITMOS DE QUANTIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO DE COMPLEXIDADE

Estevan Pereira Seraco

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: José Gabriel Rodríguez Carneiro  
Gomes

Rio de Janeiro  
Março de 2012

DESEMPENHO DE ALGORITMOS DE QUANTIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO DE  
COMPLEXIDADE

Estevan Pereira Seraco

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

---

Prof. José Gabriel Rodríguez Carneiro Gomes, Ph.D.

---

Prof. Eduardo Antônio Barros da Silva, Ph.D.

---

Prof. Murilo Bresciani de Carvalho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2012

Seraco, Estevan Pereira

Desempenho de algoritmos de quantização com restrição de complexidade/Estevan Pereira Seraco. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XIV, 48 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: José Gabriel Rodríguez Carneiro Gomes

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 36 – 38.

1. teoria da informação. 2. codificação da fonte. 3. quantização vetorial. 4. quantização em alta resolução. 5. complexidade. 6. distorção taxa complexidade. 7. lagrangiano. I. Gomes, José Gabriel Rodríguez Carneiro. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## DESEMPENHO DE ALGORITMOS DE QUANTIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO DE COMPLEXIDADE

Estevan Pereira Seraco

Março/2012

Orientador: José Gabriel Rodríguez Carneiro Gomes

Programa: Engenharia Elétrica

O desempenho de quantização de dados tradicionalmente é avaliado em termos do compromisso entre distorção e taxa de quantização. Neste trabalho, tal desempenho é modelado com a inclusão da restrição de complexidade, associada ao algoritmo que implementa a operação de quantização. A modelagem utiliza conceitos da teoria de quantização em alta resolução, propõe uma classe de propriedades matemáticas que devem ser admitidas pela medida de complexidade, e deriva funções distorção-taxa-complexidade que exprimem o desempenho ótimo de quantização. São calculadas, por meio de cálculo numérico, funções distorção-taxa-complexidade para a quantização vetorial de busca completa e para esquemas de codificação em transformada, sob a premissa de que a complexidade desses esquemas são função somente do tamanho do dicionário de quantização.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ON THE PERFORMANCE OF QUANTIZATION ALGORITHMS WITH  
COMPLEXITY CONSTRAINT

Estevan Pereira Seraco

March/2012

Advisor: José Gabriel Rodríguez Carneiro Gomes

Department: Electrical Engineering

Traditionally, quantization performance is evaluated in terms of the distortion-rate trade-off. In this work, such performance is modeled with inclusion of the quantization complexity. The proposed modeling is based on high-resolution quantization theory. Rate-distortion-complexity functions, which represent the optimal quantization performance, are evaluated for the cases that the complexity belongs to a defined class of mathematical functions. Numerical calculus is performed to evaluate distortion-rate-complexity functions of both full-search vector quantization and transform coding schemes, with the premise that the complexity is function of the codebook size only.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Definições</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Lemas</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Teoremas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Corolários</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentos de Quantização</b>	<b>3</b>
2.1 Fundamentos de Quantização Vetorial . . . . .	4
2.2 Desempenho de Algoritmos de Quantização . . . . .	6
2.3 Quantização em Alta Resolução . . . . .	9
2.3.1 Desenvolvimento Heurístico de Gersho . . . . .	10
<b>3 Análise de Complexidade</b>	<b>12</b>
3.1 Complexidade Avaliada pelo Método de Gray . . . . .	17
3.1.1 Avaliação Numérica . . . . .	19
3.2 Complexidade Avaliada pelo Método de Gersho . . . . .	20
3.2.1 Complexidade da quantização vetorial de busca completa . . . . .	24
3.2.2 Análise Numérica . . . . .	24
<b>4 Codificação em Transformada com Restrição de Complexidade</b>	<b>27</b>
4.1 Complexidade Avaliada pelo Método de Gray . . . . .	30
4.1.1 Avaliação Numérica . . . . .	32
4.2 Complexidade Avaliada pelo Método de Gersho . . . . .	33
<b>5 Conclusão</b>	<b>35</b>

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>36</b>
<b>A Algumas Demonstrações do Capítulo 3</b>	<b>39</b>
A.1 Demonstração do Lema 3.2 . . . . .	39
A.2 Demonstração do Lema 3.3 . . . . .	39
A.3 Demonstração do Teorema 3.2 . . . . .	40
A.4 Demonstração do Corolário 3.1 . . . . .	41
<b>B Cálculo Numérico do Funcional de Gersho</b>	<b>42</b>
<b>C Análise Particular de Complexidade pelo Método de Gersho para Codificação em Transformada</b>	<b>44</b>
C.1 Demonstração do Lema C.1 . . . . .	46
C.2 Demonstração do Corolário C.1 . . . . .	48

# Lista de Figuras

2.1	Partição de Voronoi. A partição do espaço é baseada nos centroides (pontos pretos). . . . .	8
3.1	Funções DRC avaliadas pelo método de Gray, para complexidade de quantização igual ao logaritmo do tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e de taxa fixa (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é unidimensional, gaussiana e de variância unitária. Ao invés da taxa, a função distorção-taxa para quantização de taxa fixa (linha tracejada) tem sua entropia de quantização considerada nos eixos das abscissas. . . . .	20
3.2	Funções DRC avaliadas pelo método de Gray, para complexidade de quantização igual ao logaritmo do tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e de taxa fixa (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é bidimensional e se relaciona a um processo de Gauss-Markov de primeira ordem, cujos parâmetros são $a = 0,9$ e $\sigma_\epsilon^2 = 0,19$ . Ao invés da taxa, a função distorção-taxa para quantização de taxa fixa (linha tracejada) tem sua entropia de quantização considerada nos eixos das abscissas. . . . .	21
3.3	Funções DRC avaliadas pelo método de Gersho, para complexidade de quantização igual ao tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e de taxa fixa (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é unidimensional, gaussiana e de variância unitária. Ao invés da taxa, a função distorção-taxa para quantização de taxa fixa (linha tracejada) tem sua entropia de quantização considerada nos eixos das abscissas. . . . .	25

3.4	Funções DRC avaliadas pelo método de Gersho, para complexidade de quantização igual ao tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e de taxa fixa (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é bidimensional e origina um processo de Gauss-Markov de primeira ordem, cujos parâmetros são $a = 0,9$ e $\sigma_\epsilon^2 = 0,19$ . Ao invés da taxa, a função distorção-taxa para quantização de taxa fixa (linha tracejada) tem sua entropia de quantização considerada nos eixos das abscissas.	26
4.1	Exemplo de partição de um esquema de codificação em transformada. . . . .	28
4.2	Funções DRC avaliadas pelo método de Gray, para complexidade de codificação em transformada igual ao logaritmo do tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e para codificação em transformada (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é bidimensional e origina um processo de Gauss-Markov de primeira ordem, cujos parâmetros são $a = 0,9$ e $\sigma_\epsilon^2 = 0,19$ . . . . .	32
4.3	Funções DRC para quantização vetorial de busca completa (linhas contínuas) e codificação em transformada (linhas tracejadas) e função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é bidimensional e origina um processo de Gauss-Markov de primeira ordem, cujos parâmetros são $a = 0,9$ e $\sigma_\epsilon^2 = 0,19$ . . . . .	33

# Lista de Abreviaturas

DRC	<i>distortion-rate-complexity</i> , p. 2
ECVQ	<i>entropy-constrained vector quantization</i> , p. 7
KLT	<i>Karhunen-Loève transform</i> , p. 27
MSE	<i>mean squared error</i> , p. 4
SQNR	<i>signal-to-quantization-noise ratio</i> , p. 19
p.d.f.	<i>probability density function</i> , p. 3

# Lista de Definições

Definição 2.1	Distorção de quantização, p. 4
Definição 2.2	Funções comprimento admissíveis, p. 4
Definição 2.3	Taxa de quantização, p. 5
Definição 2.4	Quantização de taxa fixa, p. 5
Definição 2.5	Quantização de taxa variável, p. 5
Definição 2.6	Entropia de quantização, p. 5
Definição 2.7	Partição, p. 6
Definição 2.8	Centroide, p. 6
Definição 2.9	Função distorção-taxa operacional, p. 8
Definição 2.10	Densidade de centroides, p. 10
Definição 3.1	Funcional de complexidade, p. 12
Definição 3.2	Função DRC operacional, p. 14
Definição 3.3	Custo lagrangiano de quantização, p. 14
Definição 3.4	Funcional de Gray, p. 16
Definição 3.5	Funcionais de Gersho, p. 17
Definição 3.6	Funcionais de Gersho com restrição de complexidade, p. 21
Definição 4.1	Funcional de complexidade de codificação em transformada, p. 29
Definição 4.2	Função DRC de codificação em transformada, p. 29
Definição 4.3	Custo lagrangiano de quantização de codificação em transformada, p. 30
Definição 4.4	Funcional de Gray de codificação em transformada, p. 30
Definição C.1	Funcional de Gersho de codificação em transformada, p. 44

# Lista de Lemas

Lema 2.1	Condição da partição para taxa fixa, p. 6
Lema 2.2	Condição da partição para quantização de taxa variável, p. 7
Lema 2.3	Condição do centroide, p. 7
Lema 3.1	p. 16
Lema 3.2	p. 16
Lema 3.3	p. 22
Lema C.1	p. 44

# Lista de Teoremas

Teorema 3.1      p. 17

Teorema 3.2      p. 22

# Lista de Corolários

Corolário 3.1      p. 24

Corolário C.1      p. 45

# Capítulo 1

## Introdução

Esquemas de quantização permitem levar para o mundo digital dados analógicos, como imagens e sons. Dispositivos portáteis que capturam esses sinais – como telefones móveis e câmeras fotográficas digitais – são projetados levando em conta a limitação de recursos de engenharia que tais aparelhos possuem, como memória e energia. Assim, é conveniente que se investigue a degradação do desempenho de quantização, em termos de taxa e distorção, gerada pela imposição de que tais recursos são escassos.

O presente trabalho investiga a operação de quantização para o caso em que há restrição da complexidade do algoritmo de quantização. A complexidade está relacionada ao consumo de memória e de energia em diversos dispositivos de interface analógica-digital [1]. Tradicionalmente a quantização é avaliada somente pelos parâmetros de taxa e distorção [2], uma abordagem que tem suas origens nos resultados de Shannon para a codificação da fonte [3]. O desempenho de quantização ótimo, em termos de taxa e distorção, foi modelado em [4], [5] e [6] com a premissa de que o tamanho do dicionário, um parâmetro de quantização diretamente relacionado por exemplo ao consumo de memória, tenha seu valor tendendo para o infinito.

A avaliação de quantização com a restrição adicional de complexidade tem sido realizada de acordo com cada aplicação prática, como por exemplo em [7]-[11]. O presente trabalho, no entanto, tem parte de sua análise de quantização baseada não em uma medida de complexidade específica, mas em uma classe de funções matemáticas às quais uma medida de complexidade admissível deve pertencer. Essa estratégia tem a desejável característica de permitir que parte dos resultados deste trabalho abranjam medidas de complexidade em diferentes cenários de aplicação, como por exemplo em esquemas de quantização localizados no plano focal de câmeras digitais [12].

O **Capítulo 2** apresenta os fundamentos da teoria de quantização vetorial. Parâmetros de quantização, como tamanho do dicionário, distorção e taxa são descritos. Utilizam-se noções de codificação de entropia para justificar a avaliação da taxa de quantização por meio da entropia de quantização. Por fim, são apresentados os conceitos da quantização em alta resolução, ferramentas recorrentes ao longo deste trabalho para o desenvolvimento

da análise de quantização com restrição de complexidade.

O **Capítulo 3** realiza uma análise da complexidade de quantização baseada na teoria de quantização em alta resolução. A derivação matemática segue o estilo das análises encontradas em [6] e [13]: o compromisso de distorção, taxa e complexidade é modelado por meio de um custo lagrangiano. Para uma classe de funções de complexidade proposta neste trabalho, é apresentada uma estratégia para calcular funções distorção-taxa-complexidade (DRC, de *distortion-rate-complexity*). Para isso, são utilizadas as premissas de que o algoritmo de quantização vetorial implementa busca completa [2], que é o esquema de quantização ótimo, e cuja complexidade é modelada como função do tamanho do dicionário.

O **Capítulo 4** aplica os resultados do Capítulo 3 para esquemas de codificação em transformada. É apresentada uma solução para a função DRC correspondente, com a premissa de que a complexidade é função somente do tamanho do dicionário. Será realizada uma comparação entre as funções DRC respectivas aos esquemas de quantização de busca completa e de codificação em transformada. Tal comparação confirmará a noção de que esquemas de codificação em transformada têm desempenho em termos de distorção e taxa comparáveis aos da quantização de busca completa, porém com uma significativa redução de complexidade.

## Capítulo 2

# Fundamentos de Quantização

Ao longo do século XX, uma vasta literatura modelou a compressão de dados, incluindo princípios de teoria da informação para codificação de fonte [14, 15] e princípios de quantização em alta resolução [16]. Através de análises matemáticas, buscou-se modelar, por exemplo, limites fundamentais de desempenho de esquemas de compressão de dados ou de transmissão de dados.

Esquemas de compressão de dados se fazem necessários no mundo digital, no qual dados analógicos devem ser amostrados para serem armazenados ou transmitidos. Nesse contexto, a compressão com perdas é respaldada, pois dados de natureza analógica requerem um número infinito de símbolos digitais para sua representação. Permite-se que parte da informação seja perdida em troca de uma diminuição do tamanho dos dados. A análise deste trabalho abrange a compressão com perdas implementada por esquemas de quantização. Sob certas premissas, são os algoritmos de quantização vetorial os esquemas de compressão que obtêm desempenho ótimo em termos de distorção e taxa [2].

Assim como apontou Shannon [3], informação está relacionada ao grau de aleatoriedade de uma *fonte de dados*, ou, simplesmente, *fonte*. Nessa abordagem, dados são representados por uma variável aleatória sorteada de acordo com uma função densidade de probabilidade (p.d.f., de *probability density function*). Para a especificação de uma fonte, portanto, a discriminação da p.d.f. é suficiente. Neste trabalho, uma p.d.f.  $f_X(x)$  – que recebe a notação mais simples  $f(x)$  ou somente  $f$  – está relacionada com o vetor aleatório  $X \in \mathbb{R}^k$ , que é o conjunto  $k$ -dimensional de vetores reais. Embora  $f_X(x)$  seja reconhecida como uma função densidade de probabilidade *conjunta*, devido à natureza multidimensional de  $x$ , ao longo do presente texto será adotado por simplicidade o termo “p.d.f.” para a sua menção.

No decorrer deste capítulo, são apresentados os fundamentos de quantização. Também se discutem as características que esquemas de quantização ótimos devem possuir para que possam ter desempenho ótimo em termos de taxa e distorção. Finalmente, expõem-se os conceitos da teoria de quantização em alta resolução, que serão ferramentas úteis para tecer a análise de complexidade proposta no Capítulo 3.

## 2.1 Fundamentos de Quantização Vetorial

Considere uma fonte de dados tal que dados são matematicamente modelados por um vetor aleatório  $X \in \mathbb{R}^k$ , sorteado de acordo com a p.d.f.  $f_X(x)$ . Seja *dicionário* um conjunto de vetores reais  $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  tal que qualquer *palavra*  $y_i \in \mathbb{R}^k$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . O tamanho do dicionário vale  $N$ .

Um *quantizador*  $q$  é definido como o mapa  $q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{Y}$ . Tal mapeamento é obrigatoriamente realizado em dois estágios. O primeiro estágio é o mapeamento do *codificador*  $\alpha : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{I}$ , onde  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ . O segundo estágio é o mapeamento do *decodificador*  $\beta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{Y}$ .

O termo *quantização vetorial* pode ser utilizado quando se deseja enfatizar a natureza da fonte cujo domínio é um conjunto de dimensão  $k \geq 2$ , porém em geral se aplica para qualquer  $k$ , inclusive  $k = 1$ . O termo “quantização” é genérico e frequentemente se confunde com “quantização vetorial”. Em contraste, o termo *quantização escalar* sempre se refere ao caso particular em que  $k = 1$ .

Se  $X$  é o vetor aleatório de entrada de um quantizador, então  $\alpha(X)$  é a variável codificada e  $\hat{X} = q(X) = \beta(\alpha(X))$  é o vetor decodificado. Uma vez que o dicionário é finito, em geral um vetor  $x$  não possui uma palavra igual presente no dicionário. Assim, a operação de quantização não pode ser revertida e ocasionará distorção entre as variáveis de entrada e de saída.

**Definição 2.1. Distorção de quantização:** seja  $d(x, q(x))$  a distorção ocasionada pela quantização do vetor  $x$  por  $q$ . A distorção de quantização correspondente é avaliada como

$$D_f(q) = E_f[d(X, q(X))].$$

Para o caso em que  $d(x, q(x)) = \|x - q(x)\|^2$ ,  $D_f(q)$  é o erro quadrático médio (MSE, de *mean squared error*) do quantizador.

Admitir uma distorção dos dados, bem como realizar a operação de quantização através de dois estágios (codificação seguida pela decodificação), são ações justificadas pela *taxa de quantização*. Para o armazenamento de um vetor real  $X$  em meio digital, por exemplo, seria necessário um número infinito de algarismos binários. O vetor quantizado  $\hat{X}$ , por sua vez, pertence a um conjunto contável de vetores reais,  $\mathcal{Y}$ , de modo que a quantidade de algarismos necessária para sua representação seria igualmente infinita. Em detrimento do vetor quantizado  $\hat{X}$ , os dois estágios de quantização permitem que se armazene o vetor codificado  $\alpha(X)$ , com um número finito de algarismos. Uma vez que se conhece o algoritmo de decodificação  $\beta$ , é imediata a obtenção de  $\hat{X}$  a partir da variável armazenada  $\alpha(X)$ . A quantidade de algarismos necessária para armazenamento de um conjunto de dados é diretamente proporcional à taxa de quantização.

**Definição 2.2. Funções comprimento admissíveis:** uma função comprimento  $\ell(i)$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , é admissível se ela satisfaz a desigualdade de Kraft [15]:

$$\sum_i^N b^{-\ell(i)} \leq 1,$$

onde  $b$  é a base de algarismos do código que associa para cada  $i$  um vetor de algarismos e de comprimento  $\ell(i)$ .

**Definição 2.3. Taxa de quantização:** a taxa de quantização  $R_f(q)$  do quantizador  $q$  é o comprimento esperado da variável codificada  $\alpha(X)$ , isto é,

$$R_f(q) = E_f[\ell(\alpha(X))].$$

**Definição 2.4. Quantização de taxa fixa:** um quantizador  $q$  é dito de taxa fixa se sua função comprimento  $\ell(i)$  é constante para todo  $i \in \mathcal{I}$  e igual a  $\ell(i) = \log_b N(q)$ . A base logarítmica  $b$  é a mesma base de algarismo do código de função comprimento  $\ell$ .

**Definição 2.5. Quantização de taxa variável:** um quantizador  $q$  é dito de taxa variável se sua função comprimento  $\ell(i)$  é admissível e não é constante em  $i$ .

**Definição 2.6. Entropia de quantização:** a entropia de quantização  $H_f(q)$  do quantizador  $q$  é dada por

$$H_f(q) = H(\alpha(X)),$$

onde

$$H(\alpha(X)) = -E_f[\log \text{Prob}(\alpha(X) = i)],$$

é a entropia [15] da variável codificada  $\alpha(X)$ .

O código adotado para representar cada inteiro do conjunto  $\mathcal{I}$  define a taxa de quantização. Associada a uma função comprimento admissível  $\ell$ , há a garantia de que existe um código unicamente decodificável para o qual  $\ell$  se aplica [15]. O uso de códigos unicamente decodificáveis é requisito necessário para assegurar a decodificação sem ambiguidade.

Embora o valor de  $R_f(q)$  associado à quantização de taxa fixa seja de imediata obtenção, dado pelo tamanho do dicionário do quantizador correspondente, o valor de  $R_f(q)$  associado à quantização de taxa variável depende do código de comprimento variável adotado para  $\alpha(X)$ . É possível avaliar a taxa ótima da quantização de taxa variável pelo valor da entropia de quantização. A codificação de Huffman [15] implementa tal taxa ótima, de modo que uma variável aleatória  $\alpha(X)$  codificada pelo código de Huffman tem o valor de  $R_f(q) = E_f[\ell(\alpha(X))]$  limitado por

$$H_f(\alpha(X)) \leq E_f[\ell(\alpha(X))] < H_f(\alpha(X)) + 1. \quad (2.1)$$

Caso se opte pela codificação de Huffman em blocos da variável aleatória  $(\alpha(X_1), \alpha(X_2), \dots, \alpha(X_n))$  (assumindo que  $\{\alpha(X_1), \alpha(X_2), \dots, \alpha(X_n)\}$  são independentes), o limite superior da Equação (2.1) é modificado de forma que

$$H_f(\alpha(X)) \leq E_f[\ell(\alpha(X))] < H_f(\alpha(X)) + 1/n. \quad (2.2)$$

Logo, a quantização de taxa variável pode ter o valor de  $R_f(q)$  arbitrariamente próximo do limite inferior da entropia de quantização, desde que se escolha um tamanho de bloco  $n$  suficientemente grande. Neste trabalho, a quantização de taxa variável tem o valor de  $R_f(q)$  avaliado pelo seu limite inferior  $H_f(\alpha(X))$ . Essa abordagem é coerente com a utilizada na literatura [4, 6].

A adoção de um quantizador de taxa fixa ou variável é uma escolha do projetista e impacta no desempenho de quantização. Como consequência da definição imposta pela entropia, é válida a desigualdade  $\log N(q) \geq H_f(\alpha(X))$ , com igualdade se e somente se a variável aleatória  $\alpha(X)$  for equiprovável. A quantização de taxa variável avaliada por  $H_f(q)$  também fornece, portanto, um limite inferior para o desempenho da quantização de taxa fixa. Assim, a análise de complexidade apresentada a partir do Capítulo 3 dá ênfase à quantização de taxa variável.

## 2.2 Desempenho de Algoritmos de Quantização

É intuitivo que projetos de algoritmos de quantização têm como objetivo encontrar quantizadores com valores de distorção e de taxa tão pequenos quanto possível. Um quantizador ótimo possui ambos o codificador e o decodificador ótimos. A seguir, são apresentadas condições necessárias (porém não suficientes) para a quantização ótima, em termos de taxa e distorção. A codificação ótima é descrita pela *condição da partição* (Lema 2.1), no caso de quantização de taxa fixa, e pela condição da partição com restrição de entropia, no caso de quantização de taxa variável (Lema 2.2). Para o caso de quantização de taxa variável, projeta-se o quantizador com vistas a minimizar o custo lagrangiano  $D_f(q) + \lambda R_f(q)$ , que exprime o compromisso entre distorção e a taxa de quantização. Já a decodificação ótima é descrita pela *condição do centroide* (Lema 2).

**Definição 2.7. Partição:** dado um codificador  $\alpha$ , os conjuntos  $\mathcal{S}_i = \{x : \alpha(x) = i\}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , definem uma partição do domínio  $\mathbb{R}^k$ .

**Definição 2.8. Centroide:** dado uma partição  $\{\mathcal{S}_i\}$ , o centroide associado ao conjunto  $\mathcal{S}_i$  é definido por  $\int_{\mathcal{S}_i} x f_i(x) dx$ , onde  $f_i(x)$  é a p.d.f. condicional de  $X$  dado que  $X \in \mathcal{S}_i$ , ou seja,  $f_i(x) = f_X(x) / \int_{\mathcal{S}_i} f_X(x') dx'$  para  $x \in \mathcal{S}_i$ .

**Lema 2.1. Condição da partição para quantização de taxa fixa [2]:** dado um dicionário  $\mathcal{Y}$ , o codificador  $\alpha$  que provê o menor distorção de quantização é tal que

$$\alpha(x) = \operatorname{argmin}_{i: y_i \in \mathcal{Y}} d(x, y_i),$$

para qualquer  $x$ .

**Lema 2.2. Condição da partição para quantização de taxa variável [2]:** Dada uma função de comprimento variável  $\ell(i)$  e dado um dicionário  $\mathcal{Y}$ , o codificador  $\alpha$  que provê o menor custo lagrangiano  $D_f(q) + \lambda R_f(q)$  é tal que

$$\alpha(x) = \operatorname{arg} \min_{i: y_i \in \mathcal{Y}} d(x, y_i) + \lambda \ell(i),$$

para qualquer  $x$ , onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange que exprime o relativo compromisso entre taxa e distorção.

**Lema 2.3. Condição do centroide [2]:** dada uma partição  $\{\mathcal{S}_i\}$  e dado que a distorção de quantização é avaliada com base no erro quadrático  $d(x, q(x)) = \|x - q(x)\|^2$ , o decodificador  $\beta$  ótimo é tal que

$$\beta(i) = y_i = \int_{\mathcal{S}_i} f_i(x) x dx$$

para  $i = 1, \dots, N$ .

Um quantizador pode ser geometricamente interpretado como a partição do espaço em regiões com os centroides correspondentes. A distorção igual ao erro quadrático,  $d(x, \hat{x}) = \|x - \hat{x}\|^2$  é geometricamente igual à distância euclidiana entre a variável  $x$  e o dado centroide eleito pelo codificador como  $\hat{x}$ . Logo, os conjuntos  $\mathcal{S}_i$  devem ser contínuos e contíguos. Uma partição particular, referente a um quantizador cujo codificador é definido pela condição da partição, é chamada de partição de Voronoi [2] (Figura 2.1).

O algoritmo de codificação de quantização vetorial de busca completa implementa o codificador ótimo conforme foi definido na condição da partição. O algoritmo de [17], que realiza uma otimização sujeita a mínimos locais, projeta quantizadores vetoriais de busca completa com base nos Lemas 2.1 e 2.3 (quantização de taxa fixa). Para quantização de taxa variável, a introdução do custo lagrangiano  $D_f(q) + \lambda H_f(q)$  foi utilizada por [18] para estender o algoritmo de [17] e, assim, projetar quantizadores de busca completa sub-ótimos que satisfazem às condições dos Lemas 2.2 e 2.3. O algoritmo de projeto correspondente a esse método, também sujeito a otimização com mínimos locais, é denominado quantização vetorial com restrição de entropia (ECVQ, de *entropy-constrained vector quantization*). De forma análoga ao codificador projetado por [17], a implementação da codificação projetada por ECVQ requer  $N$  cálculos no formato  $d(x, y_i) + \lambda \ell(i)$ ,

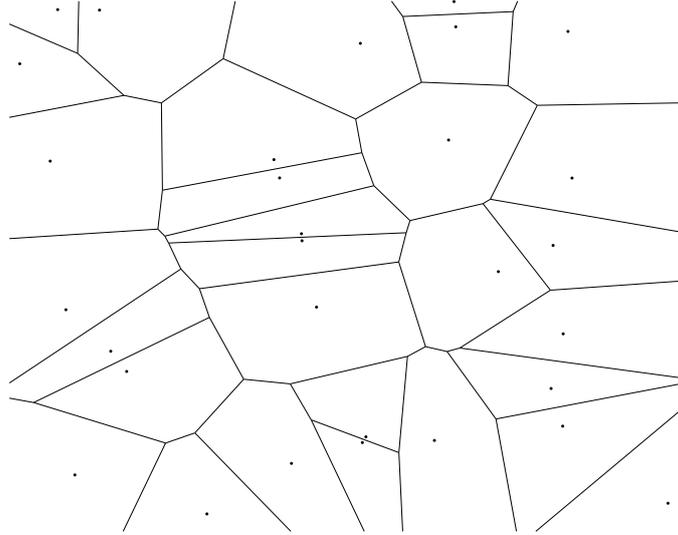


Figura 2.1: Partição de Voronoi. A partição do espaço é baseada nos centroides (pontos pretos).

seguidos pela eleição da palavra associada ao menor custo (veja equação do Lema 2.2). Em geral, essa tarefa é indesejada, pois o valor de  $N$  pode ser um número elevado, o que cria um algoritmo de codificação complexo – isto é, mais recursos computacionais são demandados. Codificadores sub-ótimos, como por exemplo os da quantização vetorial interpolativa [19] têm sua complexidade simplificada pela adoção de critérios de codificação dessemelhantes ao critério do Lema 2.2.

A avaliação do desempenho de quantização pode ser vista como o problema de se calcular uma função distorção-taxa, como definido a seguir.

**Definição 2.9. Função distorção-taxa operacional:** Sejam  $D_f(q)$  e  $R_f(q)$ , respectivamente, a distorção e a taxa de um quantizador  $q$ , quando avaliado com respeito à p.d.f.  $f$ . A função distorção-taxa é dada por

$$d_f(r) = \inf_{q : R_f(q) \leq r} D_f(q).$$

O termo “operacional” é empregado para diferenciar tal função da função distorção-taxa de Shannon, que é o limite fundamental de desempenho da codificação de fonte [14]. Em [16], por exemplo, é indicado que funções operacionais se aproximam da função de Shannon à medida que  $k$  tende ao infinito. A inclusão do símbolo de dimensão  $k$  na notação da função operacional –  $d_{f,k}(r)$  – em geral é utilizada para indicar que seu cálculo é realizado para um valor constante de  $k$ . Como a hipótese de que  $k$  é constante é assumida em toda a extensão deste trabalho, por simplicidade o símbolo  $k$  será omitido na notação. Também por simplicidade, funções distorção-taxa operacionais serão referidas sem o emprego do termo “operacional” enquanto que o limite fundamental será referido como “função de Shannon”.

## 2.3 Quantização em Alta Resolução

Limites de desempenho de quantização podem ser calculados a partir da teoria de quantização em *alta resolução* [16]. Permitindo que quantizadores tenham seus dicionários com tamanhos suficientemente altos, é possível aproximar funções distorção-taxa por curvas exponenciais. Há aproximações para  $d_f(r)$  para a quantização de taxa fixa e para a quantização de taxa variável.

Seja  $d_f^{(t.f.)}(n)$  a função operacional para o caso da quantização de taxa fixa ( $R_f(q) = \log N(q)$ ), e seja  $d_f^{(t.v.)}(r)$  a função para o caso da quantização de taxa variável, quando avaliada pela entropia de quantização ( $R_f(q) = H_f(q)$ ). As funções  $d_f^{(t.f.)}(n)$  e  $d_f^{(t.v.)}(r)$  podem ser re-escritas, a partir da Definição 2.9, pela simples particularização de suas respectivas taxas:

$$d_f^{(t.f.)}(r) = \inf_{q : \log N(q) \leq r} D_f(q), \quad (2.3)$$

$$d_f^{(t.v.)}(r) = \inf_{q : H_f(q) \leq r} D_f(q). \quad (2.4)$$

Sem perda de generalidade, considere que a taxa de quantização é calculada na base neperiana, ou seja, o codificador de quantização representa a variável  $\alpha(X)$  por um código de base  $e$ . As soluções para as equações (2.3) e (2.4) foram resolvidas por Zador [4]:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{2/k} d_f^{(t.f.)}(\ln N) = a_k \|f\|_{k/(k+2)}, \quad (2.5)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{2r/k} d_f^{(t.v.)}(r) = b_k e^{2h(f)/k}, \quad (2.6)$$

onde  $h(f) = - \int_{\mathbb{R}^k} f \ln(f) dx$  é a entropia diferencial de  $f$  [15] e  $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^k} f^p dx)^{1/p}$ . As *constantes de Zador*  $a_k$  e  $b_k$ , que dependem somente de  $k$ , não foram obtidas. No entanto, Zador apontou que

$$\frac{1}{k+2} \text{Vol(esfera)}^{-2/k} \leq b_k \leq a_k \leq \frac{\Gamma(1+2/k)}{k} \text{Vol(esfera)}^{-2/k}, \quad (2.7)$$

onde  $\text{Vol(esfera)} = \Gamma(1/2)^k / \Gamma(k/2 + 1)$ .

As soluções de Zador para as funções  $d_f^{(t.f.)}(\ln N)$  e  $d_f^{(t.v.)}(r)$  têm o formato de limite e portanto são assintóticas. As aproximações abaixo se tornam mais precisas à medida que a taxa tende ao infinito:

$$d_f^{(t.f.)}(\ln N) \approx a_k \|f\|_{k/(k+2)} N^{-2/k}, \quad (2.8)$$

$$d_f^{(t.v.)}(r) \approx b_k e^{2h(f)/k} e^{-2r/k}. \quad (2.9)$$

### 2.3.1 Desenvolvimento Heurístico de Gersho

Em [5], Gersho desenvolveu uma solução heurística para as funções  $d_f^{(t.f.)}(\ln N)$  e  $d_f^{(t.v.)}(r)$ . Em contraste à análise de Zador, Gersho baseou-se em uma modelagem mais intuitiva, com apelo geométrico, e menos rigorosa matematicamente. Na análise de Gersho, a premissa de que o tamanho do dicionário  $N(q)$  é alto permitiu a noção de *densidade de centroides*  $\Lambda_q(x)$ , ou simplesmente  $\Lambda(x)$ .

**Definição 2.10. Densidade de centroides:** dado um quantizador  $q$ , a quantidade  $N(\Omega, q)$  de palavras do dicionário  $q$  num subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  é aproximada por

$$N(\Omega, q) \approx N(q) \int_{\Omega} \Lambda(x) dx,$$

onde a função não-negativa  $\Lambda(x)$  que melhor aproxima tal integral é chamada de densidade de centroides. Em particular, a exemplo de uma p.d.f.,  $\Lambda(x)$  possui a propriedade

$$\int_{\mathbb{R}^k} \Lambda(x) dx = 1.$$

A efetiva distribuição de centroides, ou seja, de palavras, em  $\mathbb{R}^k$  é uma distribuição discreta, razão pela qual a sua avaliação por uma função contínua ( $\Lambda(x)$ ) é uma modelagem aproximada. No entanto, à medida que  $N(q)$  tende ao infinito, obtêm-se valores para  $N(\Omega, q)$  cada vez mais precisos, mantendo-se fixo o volume de  $\Omega$ .

A densidade  $\Lambda(x)$  permite uma avaliação em alto nível do quantizador  $q$ , já que os parâmetros  $N(q)$  e  $\Lambda(x)$  não são suficientes para definir, por exemplo, o dicionário de  $q$ . Eles são suficientes, entretanto, para a avaliação da distorção e da entropia atingidas com o uso de  $q$ . Gersho avaliou a entropia de quantização por:

$$H_f(q) \approx \ln N(q) - H(f||\Lambda), \quad (2.10)$$

onde  $H(f||\Lambda) = \int_{\mathbb{R}^k} f \ln(f/\Lambda) dx$  é a entropia relativa [15] de  $f$  e  $\Lambda$ .

Por sua vez, a distorção foi avaliada por uma generalização da conhecida integral de Bennett [16]:

$$D_f(q) \approx c_k N(q)^{-2/k} \int f(x) \Lambda(x)^{-2/k} dx = c_k N(q)^{-2/k} E_f[\Lambda(X)^{-2/k}], \quad (2.11)$$

onde  $c_k$  é a *constante de Gersho*, que depende somente de  $k$ . O valor de  $c_k$  é conhecido para os casos uni e bidimensionais. Para dimensões  $k > 2$ , não se conhecem as soluções, mas Gersho lançou a hipótese largamente aceita [16] de que elas existem. Para o caso em que a distorção de quantização é definida pelo MSE, a avaliação de  $c_k$  para dimensões

maiores se dá pelas desigualdades limites

$$\frac{1}{k+2} \text{Vol(esfera)}^{-2/k} \leq c_k \leq \frac{1}{12}. \quad (2.12)$$

A comparação entre as inequações que estimam as constantes de Zador e a constante de Gersho (Equações (2.7) e (2.12)) revela que ambas possuem em comum o mesmo limite inferior. As soluções de Gersho para as funções  $d_f^{(t.f.)}(r)$  e  $d_f^{(t.v.)}(r)$  são iguais às das Equações (2.5) e (2.6), exceto que, na versão de Gersho, ambas as constantes de Zador dão lugar a  $c_k$ . Neste trabalho, os valores de  $a_k$ ,  $b_k$  e  $c_k$  serão numericamente avaliados pelo limite inferior da Equação (2.12).

# Capítulo 3

## Análise de Complexidade

Esquemas práticos de compressão de dados são projetados levando-se em conta diversos limitantes de recursos. Por *recursos*, entende-se não somente a taxa, como também variáveis que definem o dispositivo de compressão: citam-se matéria-prima, dimensão física, capacidade computacional e tecnologia disponível. Este trabalho deseja incluir na avaliação de quantização a restrição de *complexidade*, para avaliar o dispêndio de outros recursos de engenharia que não sejam a taxa.

Em [13], foi avaliado o desempenho de algoritmos de quantização  $q$  com restrição de entropia e do logaritmo do tamanho do dicionário,  $\log N(q)$ , através de um enfoque de modelagem de funções custo com multiplicadores de Lagrange. A análise de complexidade proposta neste trabalho parte de uma extensão de tal análise lagrangiana, pela substituição da restrição de  $\log N(q)$ , originalmente utilizada em [13], pela restrição de complexidade de quantização  $C(q)$ .

Na Definição 3.1, introduz-se o conceito de funcional de complexidade.

**Definição 3.1. Funcional de complexidade:** seja  $\mathcal{Q}$  o conjunto de quantizadores  $q$  e seja um mapa  $C : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ . O funcional  $C(q)$  é um funcional de complexidade se:

- (i)  $C(q) \geq 0$ , para qualquer  $q \in \mathcal{Q}$ ;
- (ii)  $C(q_1) = C(q_2)$ , se  $q_2(x) = q_1(x - v) + v$ , para quaisquer  $\{q_1, q_2\} \in \mathcal{Q}$ , vetor constante  $v$  e  $x \in \mathbb{R}^k$ ;
- (iii)  $C(q_1) = C(q_2)$ , se  $q_2(x) = s \cdot q_1(x/s)$ , para quaisquer  $\{q_1, q_2\} \in \mathcal{Q}$ , escalar  $s > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^k$ ;
- (iv)  $\max_m C(q_m) \leq C(q) \leq \sum_m^M C(q_m)$ , para qualquer  $M$  tal que  $1 \leq M \leq N(q)$ . Qualquer conjunto de quantizadores  $\{q_m\}$  arbitrário é tal que o dicionário de  $q$  é a união dos dicionários de  $\{q_m\}$ .

Na definição acima, são listadas quatro propriedades que  $C(q)$  deve satisfazer. A primeira é a não-negatividade de complexidade: é intuitivo que recursos de engenharia

empregados para a realização de algoritmos de quantização sejam não-negativos. Observe que a a distorção e a taxa de quantização também são não-negativos.

As segunda e terceira propriedades exprimem que  $C(q)$  independe da translação ou do escalamento de seu dicionário. Assim, por exemplo, considera-se que a complexidade não é influenciada pela média e pelo escalamento da p.d.f. que modela a fonte. Sejam dois quantizadores  $q_1$  e  $q_2$  e duas fontes  $f_1$  e  $f_2$ . Sem perda de generalidade, considere por simplicidade que o suporte comum de  $f_1$  e  $f_2$  é um conjunto limitado. Considere também que  $f_1$  e  $f_2$  são iguais, exceto pela média e por um fator de escalamento se seu suporte. Os quantizadores  $q_1$  e  $q_2$  são projetados para serem aplicados, respectivamente, a  $f_1$  e  $f_2$ . Uma operação de codificação de  $q_2$ , representada por  $\alpha_2(X)$ , pode ser implementada através do codificador  $q_1$  desde que  $X$  seja previamente transladado e escalado. Raciocínio análogo pode ser atribuído para a implementação de decodificação de  $q_2$  pelo decodificador de  $q_1$ . Nesse caso, as complexidades de  $q_1$  e  $q_2$  serão iguais, se forem consideradas nulas as complexidades das operações necessárias de translação e de escalamento. Mesmo para casos práticos em que tais complexidades são não-nulas, o projetista poderá verificar se o modelo de complexidade da Definição 3.1 pode ser utilizado como uma aproximação em seu problema.

Por fim, a quarta propriedade estabelece uma relação entre a complexidade de um quantizador  $q$  e a complexidade de quantizadores  $\{q_m\}$ , cujos dicionários são partes do dicionário de  $q$ . Essa propriedade estabelece que a complexidade de  $q$  não pode ser menor do que a complexidade de qualquer  $q_m$ , bem como define como limite superior para complexidade a soma das complexidades  $\{C(q_m)\}$ .

As propriedades atribuídas na Definição 3.1 para complexidade são abrangentes, no sentido de que tornam admissível que diferentes funções de complexidade pertençam à classe de  $C(q)$ . Assim, uma análise do desempenho de quantização com base em  $C(q)$  é aplicável a diversos casos práticos.

Para a quantização vetorial de busca completa, a implementação do codificador como no Lema 2.2 é realizável através da eleição do índice  $i^*$  associado ao menor custo  $d(x, y_{i^*}) + \lambda \ell(i^*)$ , dentre os custos associados a cada palavra do dicionário, de modo que  $\alpha(x) = i^*$ . Para tanto, há necessidade de que se realizem  $N(q)$  cálculos do tipo  $d(x, y_i) + \lambda \ell(i)$ , seguidos pela determinação de qual é o menor. A complexidade desse algoritmo de codificação, baseado em uma varredura exaustiva das palavras do dicionário, é diretamente proporcional a  $N(q)$  e ocasionada pela inexistência de um padrão para a disposição espacial dos centroides que definem a partição de Voronoi correspondente (veja por exemplo a Figura 2.1). Para o caso em que  $C(q) = N(q)$ , é possível demonstrar que  $C(q)$  satisfaz as propriedades de complexidade da Definição 3.1.

Por outro lado, será demonstrado no Capítulo 4 que esquemas de codificação em transformada implementam mapas de quantização cuja complexidade, associada à operação de codificação, é proporcional a  $\log N(q)$ .

Com o conceito de complexidade matematicamente definido, é possível desenvolver uma análise de quantização estendendo o clássico compromisso entre distorção e taxa para o compromisso combinado de distorção, taxa e complexidade. A exemplo do caso distorção-taxa, a função DRC operacional é definida a seguir.

**Definição 3.2. Função DRC operacional:** sejam  $D_f(q)$ ,  $R_f(q)$  e  $C(q)$ , respectivamente, a distorção, taxa e complexidade de um quantizador  $q$ , quando avaliado com respeito à p.d.f.  $f$ . A função DRC operacional

$$d_{f,\eta}(r, c) = \inf_{q : (1-\eta)R_f(q) + \eta C(q) \leq (1-\eta)r + \eta c} D_f(q) \quad (3.1)$$

é avaliável para qualquer  $\eta \in [0, 1]$ .

O parâmetro  $\eta$  da função DRC representa o compromisso relativo entre taxa e complexidade. A restrição  $(1-\eta)R_f(q) + \eta C(q) \leq (1-\eta)r + \eta c$  segue o formato de restrição combinada introduzido em [13] para avaliar quantização com restrição de entropia e de tamanho logarítmico do dicionário ( $\log N(q)$ ). Fazer  $R_f(q) = H_f(q)$  e  $C(q) = \log N(q)$ , ou seja, considerar quantização de taxa variável igual a  $H_f(q)$  e considerar o caso específico em que o quantizador tem sua complexidade avaliada por  $\log N(q)$ , permite enquadrar a análise de [13] como uma solução particular para a função DRC como está definida neste trabalho.

Em [13], havia a intenção de analisar a restrição combinada de taxa variável ( $H_f(q)$ ) com taxa fixa ( $\log N(q)$ ), com a intenção de limitar o tamanho do dicionário. Para determinadas fontes, os quantizadores ótimos para o caso de quantização de taxa variável – ou seja, para o caso em que o parâmetro  $\eta$  vale zero e  $d_{f,\eta}(r, c)$  se resume à função  $d_f^{(t.v.)}(r)$  – podem ter dicionário de tamanho infinito [20].

Neste trabalho, é apresentada uma análise DRC para quantização que segue a análise introduzida em [6]. Nesse artigo, a função distorção-taxa para o caso de taxa variável foi analisada sob condições assintóticas da quantização de alta-resolução. A abordagem utilizada em [6] foi baseada no conceito de custo lagrangiano, para corrigir alguns passos da original análise de Zador [4].

Propõe-se neste trabalho que o custo lagrangiano de quantização com restrição de complexidade tenha o formato da Definição 3.3. É possível atribuir para cada  $q$  um custo  $\rho(f, \lambda, \eta, q)$ . Os parâmetros  $\lambda$  e  $\eta$  exprimem o compromisso combinado de taxa, distorção e complexidade.

**Definição 3.3. Custo lagrangiano de quantização:** sejam  $D_f(q)$ ,  $R_f(q)$  e  $C(q)$ , respectivamente, a distorção, taxa e complexidade de um quantizador  $q$ , quando avaliado com respeito à p.d.f.  $f$ . O custo lagrangiano

$$\rho(f, \lambda, \eta, q) = D_f(q) + \lambda[(1-\eta)R_f(q) + \eta C(q)]$$

tem os multiplicadores de Lagrange implicitamente definidos pelos fatores  $\lambda \geq 0$  e  $\eta \in [0, 1]$ . Os ínfimos de  $\rho(f, \lambda, \eta, q)$  com respeito a  $q$  e  $\lambda$  valem, respectivamente,

$$\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta) = \inf_q \rho(f, \lambda, \eta, q),$$

$$\rho^{(\lambda)}(f, \eta, q) = \inf_\lambda \rho(f, \lambda, \eta, q).$$

A simbologia utilizada neste trabalho denota tanto um funcional quanto o seu ínfimo através da mesma letra. A distinção, por exemplo, entre o funcional  $\rho(f, \lambda, \eta, q)$  e o seu ínfimo com respeito a  $q$ ,  $\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta)$ , ocorre pelo reposicionamento da letra  $q$ : ela é removida da lista de argumentos e sobrescrita junto ao símbolo do funcional.

A representação do custo em função dos parâmetros  $\eta$  e  $\lambda$  é menos intuitiva do que com a utilização explícita de multiplicadores de Lagrange, como por exemplo em  $\rho' = D + \lambda_1 R + \lambda_2 C$ . No entanto, tais representações são equivalentes, já que qualquer combinação de  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  tem uma correspondência biunívoca com o par  $\{\lambda, \eta\}$ . Optou-se por representar o custo como aparece na Definição 3.3 para permitir que se desenvolva uma análise nos moldes da análise que foi realizada em [13], onde o custo  $\rho(f, \lambda, \eta, q)$  proposto era tal que  $C(q) = \log N(q)$  (mas cujo propósito não era modelar complexidade).

A primeira propriedade da Definição 3.1 permite apontar que os ínfimos  $\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta)$  e  $\rho^{(\lambda)}(f, \eta, q)$  existem, como será brevemente demonstrado neste parágrafo. Uma vez que  $D_f(q)$ ,  $\lambda$ ,  $\eta$ ,  $R_f(q)$  e  $C(q)$ , inclusive, são não-negativos,  $\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta) \geq 0$  e  $\rho^{(\lambda)}(f, \eta, q) \geq 0$ . Por outro lado, há pelo menos um quantizador  $q'$  cujo custo correspondente  $\rho(f, \lambda, \eta, q')$  não vale infinito: considere  $q'$  tal que  $q'(X) = \mu_f$ , ou seja, a média de  $X$ . A distorção de  $q'$  é igual à variância de  $X$ ,  $D_f(q') = \sigma_f^2$ . Obviamente, a taxa e a complexidade valem zero, já que nenhum esquema de codificação é necessário para codificar  $X$ . Assim,  $\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta) \leq \sigma_f^2 < \infty$  e  $\rho^{(\lambda)}(f, \eta, q) \leq \sigma_f^2 < \infty$ . Logo, o fato de que tais ínfimos existem é justificado pela existência de seus limites inferior e superior.

Neste trabalho, é utilizada a conjectura de que a avaliação dos ínfimos  $\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta)$  implica a existência de quantizadores assintoticamente ótimos, e portanto, definem a função DRC. Ao longo do capítulo, será evidenciado que tal conjectura permite utilizar os conceitos de alta resolução introduzidos por Gersho para análise de quantização. Provas matemáticas rigorosas para demonstrar que a obtenção de  $\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta)$  é condição necessária e suficiente para a obtenção da função DRC existem somente para os casos particulares da quantização de taxa variável e da de taxa fixa, ambas sem restrição de complexidade, ou seja, para o caso das funções  $d_f^{(t.v.)}(r)$  e  $d_f^{(t.f.)}(r)$ . Em [13], houve conjectura análoga para o caso em que  $C(q) = \log N(q)$ .

Para a avaliação das expressões de ínfimo do custo lagrangiano, este trabalho utiliza o funcional auxiliar da Definição 3.4, apresentada a seguir. Essa estratégia segue a estratégia dos artigos [6] e [13]. Neste texto, tal funcional é denominado *funcional de Gray*, em

alusão ao primeiro autor comum de tais artigos.

**Definição 3.4. Funcional de Gray:** correspondente ao custo lagrangiano de quantização  $\rho(f, \lambda, \eta, q)$ , seja o funcional

$$\theta(f, \lambda, \eta, q) = \frac{\rho(f, \lambda, \eta, q)}{\lambda} + \frac{k}{2} \ln \lambda.$$

Os ínfimos de  $\theta(f, \lambda, \eta, q)$  com respeito a  $q$  e  $\lambda$  valem, respectivamente,

$$\theta^{(q)}(f, \lambda, \eta) = \inf_q \theta(f, \lambda, \eta, q), \quad (3.2)$$

$$\theta^{(\lambda)}(f, \eta, q) = \inf_\lambda \theta(f, \lambda, \eta, q). \quad (3.3)$$

O Lema 3.1 demonstra que a existência do ínfimo  $\theta^{(q)}(f, \lambda, \eta)$  – referente ao funcional de Gray – implica na existência do ínfimo  $\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta)$  do custo lagrangiano, e vice-versa, de modo que é possível trabalhar sobre  $\theta(f, \lambda, \eta, q)$  com o objetivo de se obter o ínfimo  $\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta)$ .

**Lema 3.1.** Para  $\lambda$  e  $\eta$  fixos,

$$\theta^{(q)}(f, \lambda, \eta) = \frac{\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta)}{\lambda} + \frac{k}{2} \ln \lambda.$$

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \theta^{(q)}(f, \lambda, \eta) &= \inf_q \theta(f, \lambda, \eta, q) \\ &= \inf_q \left( \frac{\rho(f, \lambda, \eta, q)}{\lambda} + \frac{k}{2} \ln \lambda \right) \\ &= \frac{\inf_q \rho(f, \lambda, \eta, q)}{\lambda} + \frac{k}{2} \ln \lambda \\ &= \frac{\rho^{(q)}(f, \lambda, \eta)}{\lambda} + \frac{k}{2} \ln \lambda. \end{aligned}$$

□

Por sua vez, o cálculo do ínfimo do funcional de Gray com respeito ao multiplicador de Lagrange,  $\theta^{(\lambda)}(f, \eta, q)$ , é apresentado no Lema 3.2.

**Lema 3.2.** Para um dado valor de  $\eta$  e um dado quantizador  $q$ ,

$$\theta^{(\lambda)}(f, \eta, q) = (1 - \eta)H_f(q) + \eta C(q) + \frac{k}{2} \ln \frac{eD_f(q)}{k/2}$$

O multiplicador de Lagrange ótimo  $\lambda^* = D_f(q)(k/2)$  é tal que  $\theta(f, \lambda^*, \eta, q) = \theta^{(\lambda)}(f, \eta, q)$ .

*Demonstração:* Veja o Apêndice A.1. □

Na Seção 3.1, são apresentados os resultados de [13] para a análise lagrangiana combinada entre entropia de quantização e tamanho do dicionário. Essa análise fornece importantes ferramentas para o desenvolvimento da Seção 3.2, onde resultados da presente pesquisa permitem que funções DRC sejam calculadas para funções de complexidade que não sejam o tamanho do dicionário.

### 3.1 Complexidade Avaliada pelo Método de Gray

Por *método de Gray*, refere-se ao método utilizado em [6] e [13] para a resolução dos funcionais de Gray. Em especial, esta seção analisará o Teorema 3.1, apresentado originalmente em [13]. Será demonstrado que tal teorema desdobra-se numa solução para o ínfimo  $\theta^{(\lambda)}(f, \eta, q)$ , mediante a adoção de certas premissas, e assim permite estimar funções DRC para o caso em que complexidade é avaliada como  $C(q) = \ln N(q)$ .

**Definição 3.5. Funcionais de Gersho:** ([13]) sejam as funções densidade de probabilidade  $f(x)$  e  $\Lambda(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$  e seja  $\eta \in [0, 1]$ . Os funcionais de Gersho  $\phi(f, \eta, \Lambda)$  e  $\phi^{(\Lambda)}(f, \eta)$  são tais que

$$\begin{aligned}\phi(f, \eta, \Lambda) &= \frac{k}{2} \ln (E_f[\Lambda(X)^{-2/k}]) - (1 - \eta)H(f||\Lambda), \\ \phi^{(\Lambda)}(f, \eta) &= \inf_{\Lambda} \phi(f, \eta, \Lambda).\end{aligned}$$

**Teorema 3.1.** ([13]) *Considere que  $C(q) = \ln N(q)$ . Sob as hipóteses de que  $E_f[||X||^{2+\epsilon}]$  existe para algum  $\epsilon > 0$  e de que  $h(f) > -\infty$ ,*

$$\begin{aligned}\limsup_{\lambda \rightarrow 0} \theta^{(q)}(f, \lambda, \eta) &\leq \vartheta(f, \eta) \\ &\triangleq \frac{k}{2} \ln \left( \frac{ec_k}{k/2} \right) + \phi^{(\Lambda)}(f, \eta) + A(\eta),\end{aligned}$$

onde  $A(\eta)$  em geral é igual a zero (há a possibilidade matemática de que exista um conjunto contável de valores de  $\eta$  para os quais  $A(\eta)$  é diferente de zero).

Em [13] é indicado que, caso sejam de fato válidos os resultados desenvolvidos por Gersho para quantização de alta resolução (Seção 2.3.1), o limite superior do Teorema 3.1 é simplificado para:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow 0} \theta^{(q)}(f, \lambda, \eta) &= \vartheta(f, \eta) \\ &= \frac{k}{2} \ln \left( \frac{ec_k}{k/2} \right) + \phi^{(\Lambda)}(f, \eta) + A(\eta),\end{aligned}\tag{3.4}$$

com  $A(\eta) = 0$ . Como será demonstrado em sequência, a conjectura de que a Equação (3.4) é válida permite estimar a função DRC para o caso em que  $C(q) = \ln N(q)$ .

Uma avaliação numérica da Equação (3.4) depende do cálculo do ínfimo do funcional de Gersho:

$$\phi^{(\Lambda)}(f, \eta) = \inf_{\Lambda} \phi(f, \eta, \Lambda).$$

Não se conhece a solução analítica de  $\phi^{(\Lambda)}(f, \eta)$  para o caso geral de  $f$ . Embora  $\phi(f, \eta, \Lambda)$  seja não-convexo em  $\Lambda$ , a mudança de variável

$$\nu(x) = \ln \frac{\Lambda(x)^{-2/k}}{E_f[\Lambda(X)]} \quad (3.5)$$

foi utilizada em [13] para tornar o problema convexo em  $\nu$ :

$$\phi^{(\Lambda)}(f, \eta) = \psi^{(\nu)}(f, \eta) = \inf_{\nu} \psi(f, \eta, \nu), \quad (3.6)$$

onde  $\psi(f, \eta, \nu)$  é obtido pela mudança de variável de  $\Lambda$  por  $\nu$  em  $\phi(f, \eta, \Lambda)$ . A partir de  $\nu(x)$ , é possível obter a densidade de centroides correspondente através da expressão inversa:

$$\Lambda(x) = \frac{e^{-k\nu(x)/2}}{\int e^{-k\nu(x')/2} dx'}. \quad (3.7)$$

Com o uso de técnicas de otimização para funções convexas, é possível avaliar o valor de  $\phi^{(\Lambda)}(f, \eta)$  – e por extensão o valor de  $\vartheta(f, \eta)$  – através de cálculo numérico, como implementado no Apêndice B.

Considere um quantizador  $q^*$  com desempenho aproximadamente ótimo em termos de distorção, taxa e complexidade. O tamanho do dicionário e a densidade de centroides de  $q^*$  são, respectivamente,  $N$  e  $\Lambda^*$ . A partir da Equação (3.4) e dos resultados de Gersho da Seção 2.3.1, obtém-se que

$$\begin{aligned} \vartheta(f, \eta) + \epsilon &\geq \theta^{(\lambda)}(f, \eta, q^*) \\ &= (1 - \eta)H_f(q^*) + \eta \ln N(q^*) + \frac{k}{2} \ln \frac{eD_f(q^*)}{k/2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde  $\epsilon$  é arbitrariamente pequeno e a segunda linha utiliza o resultado do Lema 3.2. A aproximação da Equação (3.8) é mais precisa à medida que  $N \rightarrow \infty$  e, equivalentemente,  $\lambda \rightarrow 0$ . Em [13], é demonstrado que o desempenho assintótico do quantizador  $q^*$  se confunde com o desempenho ótimo dado pela função DRC (Equação 3.1). Assim, as relações  $D_f(q^*) \approx d_{f,\eta}(r, c)$ ,  $H_f(q^*) \approx r$  e  $\ln N = c$  são substituídas na Equação (3.8) para estimar a função DRC como:

$$d_{f,\eta}(r, c) \approx \frac{k}{2} e^{2/k(\vartheta(f,\eta) - (1-\eta)r - \eta c) - 1}. \quad (3.9)$$

A Equação (3.9) é parametrizável, por exemplo, em  $N$ . Para tanto, reconhece-se que  $c = \ln N$  e que  $r \approx H_f(q^*) \approx \ln N - H(f||\Lambda^*)$ . A determinação da entropia relativa

$H(f||\Lambda^*)$  é possível com a especificação de  $\Lambda^*$ . Com o auxílio da Equação (3.7),  $\Lambda^*$  é obtido pela relação:

$$\Lambda^*(x) = \frac{e^{-k\nu^*(x)/2}}{\int e^{-k\nu^*(x')/2} dx'},$$

onde  $\nu^*(x)$  é o argumento que provê o ínfimo do funcional de Gersho, calculado como indicado na Equação (3.6).

### 3.1.1 Avaliação Numérica

Para ilustrar o resultado da Equação (3.9), esta seção calcula numericamente funções DRC para esquemas de quantização que, por hipótese, tem complexidade igual ao logaritmo do tamanho do dicionário. O cálculo numérico foi realizado de acordo com o Apêndice B. Dois cenários distintos são considerados: (1) uma fonte modelada por uma p.d.f. unidimensional,  $k = 1$ , e (2) uma fonte modelada por uma p.d.f. bidimensional,  $k = 2$ .

No cenário  $k = 1$ , a Figura 3.1 apresenta as funções DRC para uma p.d.f. gaussiana e de variância unitária. A distorção de quantização é representada pela razão sinal-ruído de quantização (SQNR, de *signal-to-quantization-noise ratio*), definida como igual a  $\sigma_f^2/D_f(q)$ , onde  $\sigma_f^2$  é a variância da fonte.

Por sua vez, o cenário  $k = 2$  foi implementado para um *processo de Gauss-Markov de primeira ordem*. Considere uma sequência de variáveis aleatórias (escalares)  $X'_0, X'_1, X'_2, \dots$ , tal que qualquer  $X'_i$  é gerada de acordo com uma mesma p.d.f., ou seja,  $f'_{X'_i}(x'_i)$  independe de  $i$ . Tal sequência é dita ser um processo de Gauss-Markov de primeira ordem se, para qualquer  $i > 0$  (confira por exemplo [21]),

$$X'_i = aX'_{i-1} + Z, \quad (3.10)$$

onde o coeficiente  $a$  é tal que  $|a| < 1$  e onde a variável aleatória  $Z$ , *independente e identicamente distribuída* [22], é gaussiana com média zero e com uma dada variância  $\sigma_\epsilon^2$ .

Seja uma fonte bidimensional  $f_X(x)$  cujo vetor aleatório  $X$  é formado por um bloco do processo de Gauss-Markov da Equação (3.10), ou seja, tal que  $X = [X'_i \ X'_{i+1}]^*$ . No regime estacionário,  $i \rightarrow \infty$ ,  $f_X(x)$  é aproximada como uma p.d.f. gaussiana de variância igual a  $\sigma_\epsilon^2/(1 - a^2)$ . Para um processo de Gauss-Markov tal que  $a = 0,9$  e  $\sigma_\epsilon^2 = 0,19$ ,  $f_X(x)$  possui variância unitária e funções DRC como apresentadas na Figura 3.2. O emprego de um processo de Gauss-Markov para modelar a fonte bidimensional analisada será adequado para comparar a quantização de busca completa com a codificação em transformada, como será enfatizado no Capítulo 4.

Como uma forma de validar o cálculo numérico, estão mostradas nas Figuras 3.1 e 3.2 as funções distorção-taxa para quantização de taxa fixa e variável. Essas funções são

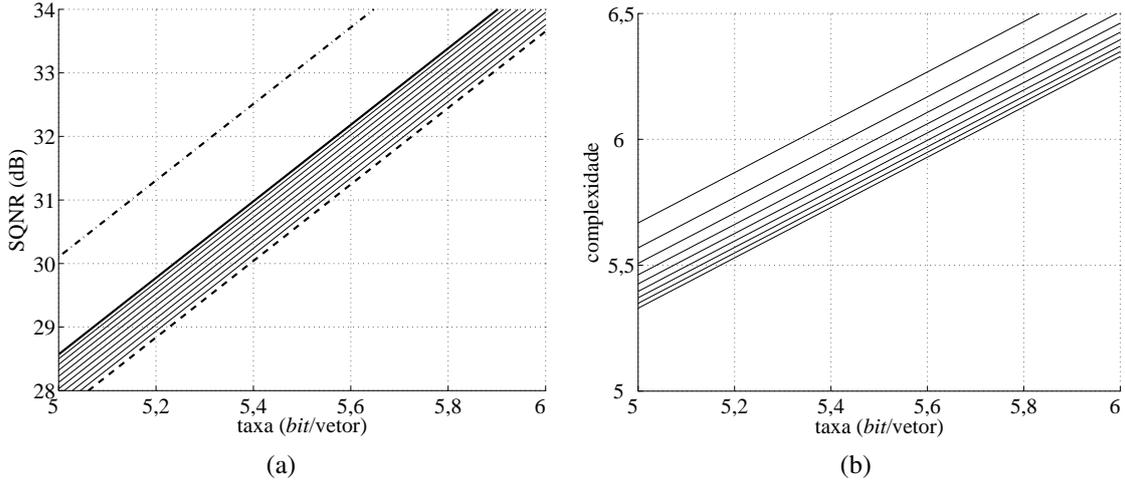


Figura 3.1: Funções DRC avaliadas pelo método de Gray, para complexidade de quantização igual ao logaritmo do tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e de taxa fixa (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é unidimensional, gaussiana e de variância unitária. Ao invés da taxa, a função distorção-taxa para quantização de taxa fixa (linha tracejada) tem sua entropia de quantização considerada nos eixos das abscissas.

expressões analíticas [16], calculadas de modo independente às funções DRC, e estabelecem os limites superior e inferior para as funções DRC. O limite superior é obtido para  $\eta = 0$ , cuja solução é a função distorção-taxa para taxa variável. O limite inferior, por sua vez, é obtido para  $\eta = 1$ , cuja solução é a função distorção-taxa para taxa fixa. Valores intermediários de  $\eta \in [0, 1]$  produzem funções DRC situadas entre tais limites.

## 3.2 Complexidade Avaliada pelo Método de Gersho

A principal abordagem para complexidade introduzida neste trabalho é apresentada nesta seção e utiliza noções de quantização em alta resolução para produzir resultados assintóticos para o desempenho de quantização, os quais são mais precisos à medida que o tamanho do dicionário de quantização cresce. Uma vez que esta abordagem utiliza os conceitos de alta resolução da Seção 2.3.1, diz-se que seus resultados são baseados no *método de Gersho*. Para um quantizador  $q$  cujo tamanho do dicionário é suficientemente grande, é possível aproximar os valores para a entropia e distorção através, respectivamente, das Equações (2.10) e (2.11). Pela análise dessas equações, percebe-se que os parâmetros de  $q$  que influenciam na taxa e na entropia são a densidade de centroides  $\Lambda_q(x)$  e o tamanho do dicionário  $N(q)$ . Este trabalho conjectura que, a exemplo da entropia e da distorção, a complexidade de quantização é função somente de  $\Lambda_q(x)$  e  $N(q)$ , para as mesmas condições em que são válidas as aproximações para distorção e taxa, ou seja, para o caso em que  $N(q)$  é suficientemente alto.

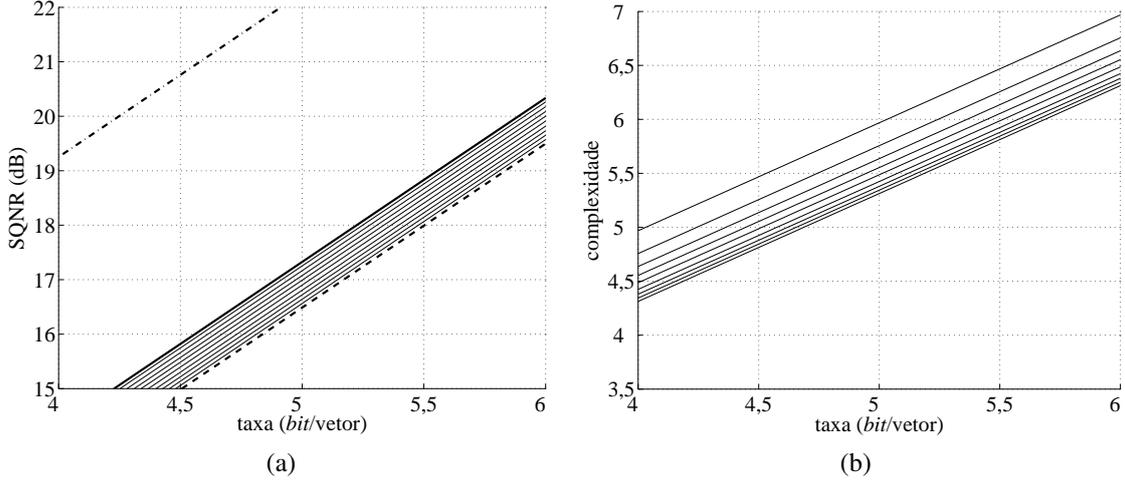


Figura 3.2: Funções DRC avaliadas pelo método de Gray, para complexidade de quantização igual ao logaritmo do tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e de taxa fixa (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é bidimensional e se relaciona a um processo de Gauss-Markov de primeira ordem, cujos parâmetros são  $a = 0,9$  e  $\sigma_\epsilon^2 = 0,19$ . Ao invés da taxa, a função distorção-taxa para quantização de taxa fixa (linha tracejada) tem sua entropia de quantização considerada nos eixos das abscissas.

A Definição 3.6 generaliza o funcional de Gersho para se adequar ao contexto generalizado de complexidade.

**Definição 3.6. Funcionais de Gersho com restrição de complexidade:** seja  $\eta \in [0, 1]$  e seja a complexidade de quantização  $C(q) = C(\Lambda_q, N(q))$  função somente dos parâmetros  $\Lambda_q(x)$  e  $N(q)$ . Os funcionais de Gersho com restrição de complexidade,  $\Phi(f, \eta, \Lambda, N)$  e  $\Phi^{(\Lambda)}(f, \eta, N)$ , são tais que

$$\begin{aligned} \Phi(f, \eta, \Lambda, N) &= \phi(f, \eta, \Lambda) + \eta C(\Lambda, N) \\ &= \frac{k}{2} \ln (E_f[\Lambda(X)^{-2/k}]) - (1 - \eta)H(f|\Lambda) + \eta C(\Lambda, N), \end{aligned}$$

$$\Phi^{(\Lambda)}(f, \eta, N) = \inf_{\Lambda} \Phi(f, \eta, \Lambda, N).$$

Uma vez que o ínfimo de  $\phi(f, \eta, \Lambda)$  existe e pode ser calculado por meio de cálculo numérico [13], o ínfimo de  $\Phi(f, \eta, \Lambda, N)$  também existe. Os funcionais de Gersho têm papel importante na análise desenvolvida neste trabalho, já que sua avaliação numérica permitirá o cálculo de funções DRC, como será demonstrado.

O Lema 3.3, apresentado neste trabalho, estabelece o valor assintótico do funcional de Gray para quantizadores com tamanho de dicionário tendendo ao infinito. O Lema 3.3 indica a solução para o funcional de Gray em função do funcional  $\Phi(f, \eta, \Lambda, N)$ . Esse resultado é genérico em termos de complexidade, porém é utilizada a conjectura de que  $C(q) = C(\Lambda_q, N(q))$ . Essa conjectura é uma extensão do método de Gersho, no qual

a distorção e entropia de quantização são avaliadas em termos de  $\Lambda_q$  e  $N(q)$ , ou seja,  $D_f(q) = D_f(\Lambda_q, N(q))$  e  $H_f(q) = H_f(\Lambda_q, N(q))$ .

**Lema 3.3.** *Considere uma seqüência de números reais  $N_n, n = 1, 2, \dots$ , tal que  $N_n \rightarrow \infty$  à medida que  $n$  cresce. Considere também uma seqüência de quantizadores  $q_n$  tais que  $N(q_n) = N_n$  e cuja densidade de centroides vale  $\Lambda_{q_n} = \Lambda_n$ . A complexidade,  $C_n$ , de  $q_n$  é função somente de  $\Lambda_n$  e de  $N_n$ . Existe uma seqüência de números reais positivos  $\lambda_n$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta(f, \lambda_n, \eta, q_n)}{\Theta_k(N_n) + (1 - \eta) \ln N_n + \Phi(f, \eta, \Lambda_n, N_n)} = 1,$$

onde

$$\Theta_k(N) \triangleq \frac{k}{2} \ln \frac{ec_k N^{-2/k}}{k/2}. \quad (3.11)$$

*Demonstração:* Veja Apêndice A.2. □

O Lema 3.3 estabelece um comportamento assintótico para o funcionais de Gray relacionados a quantizadores  $q$  em alta resolução: admitindo que  $N(q)$  é elevado, o limite que é expresso nesse lema permite a aproximação:

$$\theta(f, \lambda, \eta, q) \approx \Theta_k(N(q)) + (1 - \eta) \ln N(q) + \Phi(f, \eta, \Lambda, N(q)). \quad (3.12)$$

O Teorema 3.2, apresentado a seguir, é o principal resultado deste capítulo: ele sofisticava o raciocínio empregado na Equação (3.12) para estabelecer uma solução para o ínfimo do funcional de Gray, parametrizada pelo tamanho do dicionário  $N$ .

**Teorema 3.2.** *Seja a função de complexidade somente função do tamanho do dicionário e da densidade de centroides, isto é,  $C(q) = C(N(q), \Lambda_q)$ . Então, o ínfimo do funcional de Gray, dado que  $N(q) = N$ , é obtido por*

$$\zeta(f, \eta, N) \triangleq \inf_{q: N(q)=N} \theta^{(\lambda)}(f, \eta, q) = \Theta_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \Phi^{(\Lambda)}(f, \eta, N).$$

*Dado  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno, a função  $\Lambda^*$  tal que*

$$\Phi^{(\Lambda)}(f, \eta, N) \geq \Phi(f, \eta, N, \Lambda^*) - \epsilon,$$

*define o quantizador assintoticamente ótimo  $q^*$ , cuja densidade de centroides é  $\Lambda_{q^*} = \Lambda^*$  e cujo dicionário tem tamanho  $N$ .*

*Demonstração:* Veja o Apêndice A.3. □

Diferentemente da abordagem do Teorema 3.1, onde é calculado o ínfimo  $\vartheta(f, \eta)$ , o Teorema 3.2 resolve o valor do ínfimo  $\zeta(f, \eta, N)$ , ou seja, calcula-se um valor de ínfimo

para uma dada restrição de  $N$ . A análise a seguir demonstra que tal parametrização do ínfimo é suficiente para a avaliação da função DRC.

Seja o ínfimo do custo lagrangiano parametrizado pelo tamanho do dicionário:

$$\xi(f, \eta, N) \triangleq \inf_{q: N(q)=N} \rho^{(\lambda)}(f, \eta, q). \quad (3.13)$$

A exemplo da relação entre os ínfimos  $\rho^{(q)}(f, \eta, \lambda)$  e  $\theta^{(q)}(f, \eta, \lambda)$  dada pelo Lema 3.1, pode-se demonstrar que para se obter o ínfimo  $\xi(f, \eta, N)$  é suficiente obter o ínfimo  $\zeta(f, \eta, N)$ . Tal demonstração segue um raciocínio análogo ao encontrado no Lema 3.1.

Seja um quantizador assintoticamente ótimo  $q^*$ , de tamanho de dicionário  $N$  e tal que seu funcional de Gray  $\theta(f, \lambda, \eta, q^*)$  tem valor próximo ao valor ínfimo  $\xi(f, \eta, N)$ . O desempenho de quantização de  $q^*$  pode ser analisado de maneira análoga à Equação (3.8):

$$\begin{aligned} \zeta(f, \eta, N) + \epsilon &\geq \theta(f, \lambda, \eta, q^*) \\ &= (1 - \eta)H_f(q^*) + \eta C(\Lambda^*, N) + \frac{k}{2} \ln \frac{eD_f(q^*)}{k/2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde  $\epsilon$  é arbitrariamente pequeno. Dado  $N$ , o quantizador  $q^*$  tem entropia de quantização  $H_f(q^*) = \ln N - H(f||\Lambda^*)$  e complexidade dada por  $C(\Lambda^*, N)$ . A distorção de quantização é obtida a partir da última linha da Equação (3.14):

$$D_f(q^*) = \frac{k}{2} e^{2/k(\zeta(f, \eta, N) - (1-\eta)H_f(q^*) - \eta C(\Lambda^*, N)) - 1}$$

Finalmente, a função DRC é obtida fazendo  $r = r(N) = H_f(q^*)$ ,  $c = c(N) = C(\Lambda^*, N)$  e

$$d_{f, \eta}(r, c) = d_{f, \eta}(N) \approx \frac{k}{2} e^{2/k(\zeta(f, \eta, N) - (1-\eta)r(N) - \eta c(N)) - 1}, \quad (3.15)$$

parametrizada em  $N \geq 0$  e cuja aproximação é tão melhor quanto  $N$  é grande.

Um projetista tem a possibilidade de utilizar a Equação (3.15) para calcular a função DRC para um arbitrário funcional de complexidade, que pode ser ajustada para a específica implementação do projeto de quantização. Os valores de  $\Lambda^*$  e de  $\zeta(f, \eta, N)$ , necessários para a obtenção da Equação (3.15), devem ser calculados numericamente, através da resolução do ínfimo do funcional de Gersho com restrição de complexidade (Definição 3.6).

A função DRC aqui apresentada é desenvolvida a partir do método de Gersho. É possível comparar as soluções para a função DRC que são obtidas através dos métodos de Gray e de Gersho, para a medida de complexidade  $C(q) = \ln N(q)$ , único caso em que as funções DRC podem ser obtidas tanto por um método quanto pelo outro (confronte os Teoremas 3.1 e 3.2). Para efeito de avaliação numérica da função DRC, o desenvolvi-

mento pelo método de Gersho, introduzido neste trabalho, produz resultados aproximados tão bons quanto os análogos do Teorema 3.1. Isso ocorre porque, dado que se calcula o valor de  $\vartheta(f, \eta)$  (utilizando o método de Gray), uma avaliação da função DRC correspondente necessitará das aproximações de Gersho para  $D_f(q)$  e  $H_f(q)$  (confronte as Equações 3.8 e 3.14).

### 3.2.1 Complexidade da quantização vetorial de busca completa

Como apontado no Capítulo 2, um quantizador vetorial de busca completa é o esquema ótimo de quantização. Como o codificador é definido pela condição da partição, é comum que a complexidade seja identificada como diretamente proporcional ao tamanho do dicionário. Considere  $C(q) = N(q)$ .

O Corolário 3.1 apresenta uma particularização do resultado do Teorema 3.2, para o caso em que  $C(q) = C(\Lambda_q, N(q)) = C(N(q))$ , ou seja, para o caso em que a complexidade é função somente do tamanho do dicionário.

**Corolário 3.1.** *Considere que a função de complexidade é somente função do tamanho do dicionário, ou seja,  $C(q) = C(N(q))$ . Então,*

$$\inf_{q : N(q)=N} \theta^{(\lambda)}(f, \eta, q) = \Theta_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \eta C(N) + \phi^{(\Lambda)}(f, \eta).$$

*Demonstração:* Consultar Apêndice A.4. □

A função DRC correspondente, obtida analogamente à Equação 3.15, é dada por:

$$\begin{aligned} r(N) &\approx \ln N - H(f||\Lambda^*), \\ c(N) &= N, \\ d(N) &\approx \frac{k}{2} e^{2/k(\Theta_k(N) + \phi^{(\Lambda)}(f, \eta) + (1 - \eta)H(f||\Lambda^*)) - 1}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde  $N \geq 0$ .

Assim, um importante parâmetro da quantização vetorial de busca completa,  $N(q)$ , baliza o comportamento da distorção, taxa e complexidade de quantização. Essa dependência é explicitada em  $d(N)$ , por exemplo, pelo parâmetro  $N$ .

### 3.2.2 Análise Numérica

O cálculo da função DRC parametrizada pela Equação (3.16) envolve a avaliação numérica do funcional de Gersho, descrita no Apêndice B. Os mesmos cenários  $k = 1$  e  $k = 2$  da Seção 3.1.1 foram aqui considerados, porém com a substituição da medida de complexidade por  $C(q) = N(q)$ , que é adequada para descrever a complexidade da quantização vetorial de busca completa. As funções DRC para os cenários  $k = 1$  e  $k = 2$  estão

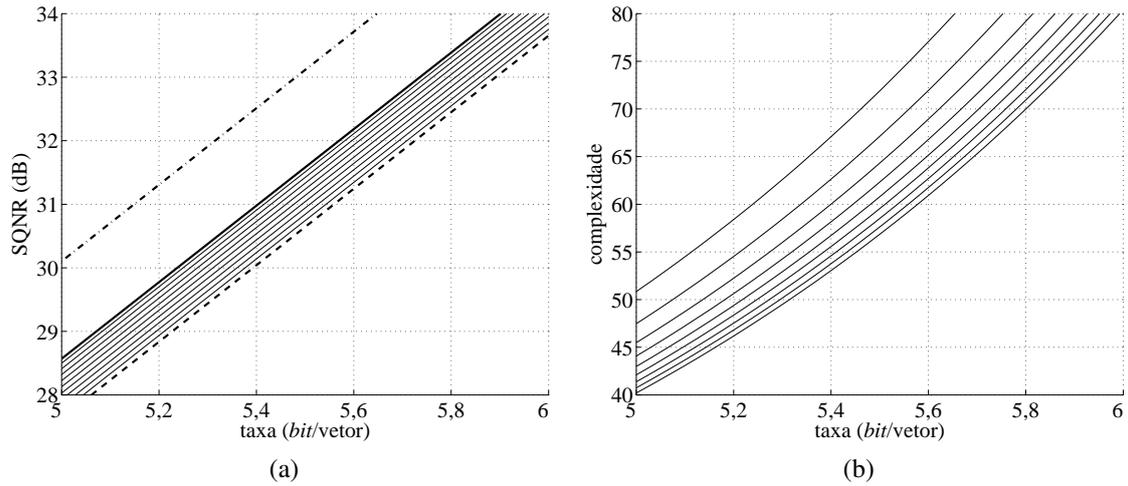


Figura 3.3: Funções DRC avaliadas pelo método de Gersho, para complexidade de quantização igual ao tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e de taxa fixa (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é unidimensional, gaussiana e de variância unitária. Ao invés da taxa, a função distorção-taxa para quantização de taxa fixa (linha tracejada) tem sua entropia de quantização considerada nos eixos das abscissas.

respectivamente apresentadas nas Figuras 3.3 e 3.4. Novamente, foram incluídas nessas figuras as funções distorção-taxa para quantização de taxa fixa e variável. Elas foram calculadas analiticamente, são limites inferior e superior das funções DRC e, portanto, cumprem o papel de validar a teoria desenvolvida neste trabalho.

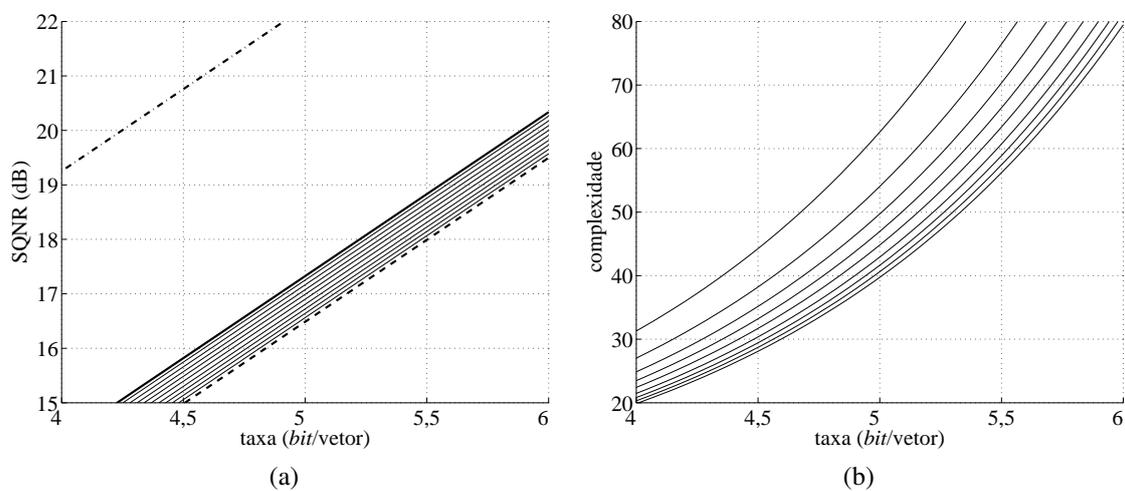


Figura 3.4: Funções DRC avaliadas pelo método de Gersho, para complexidade de quantização igual ao tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e de taxa fixa (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é bidimensional e origina um processo de Gauss-Markov de primeira ordem, cujos parâmetros são  $a = 0,9$  e  $\sigma_c^2 = 0,19$ . Ao invés da taxa, a função distorção-taxa para quantização de taxa fixa (linha tracejada) tem sua entropia de quantização considerada nos eixos das abscissas.

## Capítulo 4

# Codificação em Transformada com Restrição de Complexidade

A codificação em transformada é uma técnica de quantização sub-ótima que consiste em aplicar um quantizador escalar específico para cada componente do vetor de dados. Antes de se efetuar a quantização de codificação em transformada, é possível submeter o vetor de dados a uma transformação linear  $z = Tx$ , onde  $T$  é uma matriz de transformada, quadrada de ordem  $k$  e unitária. O projetista pode escolher uma transformação  $T$  que é ótima no sentido de prover a menor função distorção-taxa do codificador em transformada. No caso particular em que  $T$  é simplesmente a matriz identidade, a codificação em transformada se resume ao caso particular da quantização escalar em blocos [2]. A transformada ortogonal  $T$  que descorrelaciona as componentes de  $X$  é por definição a transformada de Karhunen-Loève (KLT, de *Karhunen-Loève transform*). Em [23], foi demonstrado que a KLT é ótima para codificação em transformada, para taxa de quantização variável.

Para modelar o desempenho de compressão por codificação em transformada em termos de taxa e distorção, considere que a fonte de vetores de dados  $X \in \mathbb{R}^k$  é modelada pela p.d.f.  $f$ . Considere que um quantizador  $q$  implementa codificação em transformada com a matriz de transformação ortonormal  $T$ . O vetor de entrada é inicialmente submetida à transformação  $z = Tx$ . O vetor transformado  $z$  tem cada uma de suas  $k$  componentes,  $z_i$ , submetidas ao quantizador escalar correspondente,  $q_i$ . Sejam  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , respectivamente, o codificador e o decodificador de  $q_i$ . As saídas  $\hat{z}_i$  de cada quantizador escalar formam a saída global  $\hat{z}$  que, por sua vez, define a versão quantizada para  $x$ , através da relação  $\hat{x} = T^* \hat{z}$ , onde  $T^*$  é a inversa de  $T$ .

Para cada quantizador escalar  $q_i$ , há um decodificador correspondente  $\beta_i$ . Uma vez que o objetivo final é quantizar  $x$ , ao invés de  $z$ , as operações de decodificação  $\hat{z}_i = \beta_i(z_i)$  podem ser substituídas por uma decodificação que produz diretamente  $\hat{x}$ , como no quantizador vetorial interpolativo [2]. Com isso, não é necessária a realização do cálculo da transformada inversa. Essa substituição pode ser implementada por uma simples substi-

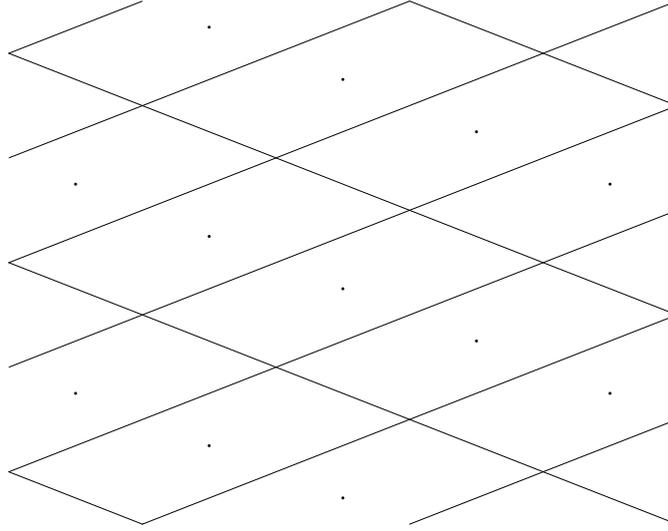


Figura 4.1: Exemplo de partição de um esquema de codificação em transformada.

tuição de decodificadores, que não interfere no efetivo mapeamento global  $\bar{q}$ .

O dicionário associado à operação de decodificação de  $\hat{z} = \bar{\beta}(z)$  é dado pelo produto cartesiano

$$\bar{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y}_1 \times \dots \times \mathcal{Y}_k, \quad (4.1)$$

onde  $\mathcal{Y}_i$  é o dicionário associado ao quantizador escalar  $q_i$ . Logo, o tamanho do dicionário  $\bar{\mathcal{Y}}$ ,  $N(\bar{q})$ , é igual ao produto do tamanho dos dicionários de cada componente:

$$N(\bar{q}) = \prod_i N(q_i). \quad (4.2)$$

A maneira como o dicionário é formado, dada pela Equação (4.1), se associa a uma partição com centroides dispostos como no exemplo bidimensional da Figura 4.1. Com isso, é possível implementar um codificador em transformada através de uma estrutura em árvore [2], o que provoca uma significativa redução da complexidade de quantização, quando comparada à quantização vetorial de busca completa. Cada quantizador escalar  $q_i$  tem sua codificação implementada em paralelo, por uma árvore com complexidade  $\log N(q_i)$ . Logo, a complexidade global de codificação, associada a  $\bar{q}$ , é proporcional à soma  $\sum_i \log N(q_i) = \log N(\bar{q})$ , onde utilizou-se a relação da Equação (4.2).

A distorção da codificação em transformada, avaliada como o MSE, vale

$$D_f(\bar{q}) = E_f[d(X - \hat{X})] = E_f[d(Z - \hat{Z})], \quad (4.3)$$

onde a última igualdade é alcançada pela propriedade de transformações ortonormais:  $d(z, \hat{z}) = \|z - \hat{z}\|^2 = \|z - \hat{z}\|^* \|z - \hat{z}\| = \|Tx - T\hat{x}\|^* \|Tx - T\hat{x}\| = \|x - \hat{x}\|^* T^* T \|x - \hat{x}\| = \|x - \hat{x}\|^* \|x - \hat{x}\| = d(x, \hat{x})$ .

Valendo-se da premissa de que  $T$  é ortonormal, a distorção global de quantização

$D_f(\bar{q})$  pode ser expressa como a soma das distorções  $D_i$  de cada componente:

$$D_f(\bar{q}) = \sum_{i=1}^k D_i. \quad (4.4)$$

A taxa global tem o comportamento análogo ao da distorção:

$$R_f(\bar{q}) = \sum_i R_i. \quad (4.5)$$

As variáveis codificadas para cada  $q_i$ ,  $\alpha_i(z)$ , definem o vetor codificado geral  $[\alpha_1(z_1) \cdots \alpha_k(z_k)]$ . Tal vetor pode ser submetido a codificação de entropia, como na Equação (2.1). Assim, o valor de  $R_f(\bar{q})$  para o caso da quantização de taxa variável também pode ser avaliado através da entropia de quantização  $H_f(\bar{q})$ . Especificamente, para o caso em que é utilizada a KLT, a decorrelação entre as componentes de  $z$  permite calcular a entropia de codificação em transformada por [15]

$$H_f(\bar{q}) = \sum_i H_i, \quad (4.6)$$

onde  $H_i$  é a entropia de quantização associada à componente  $i$ .

As Definições 4.1-4.4 particularizam os conceitos de complexidade introduzidos no Capítulo 3 à codificação em transformada. Para simplificar a notação e manter o foco na complexidade do esquema de quantização, será considerada zero a complexidade adicional referente à transformação linear  $z = Tx$ . No entanto, a teoria de complexidade pode ser estendida de forma trivial para a inclusão de uma constante no valor do funcional de complexidade, para representar as operações envolvidas no cálculo de  $T$ .

**Definição 4.1. Funcional de complexidade de codificação em transformada:** a complexidade de um esquema de quantização  $\bar{q}$  é igual à soma

$$C(\bar{q}) = \sum_{i=1}^k C(q_i)$$

onde  $q_i$  se refere ao quantizador escalar aplicado à  $i$ -ésima componente do vetor  $z = Tx$  e onde  $C(q_i)$  é definido como na Definição 3.1.

**Definição 4.2. Função DRC de codificação em transformada:** sejam  $D_f(\bar{q})$ ,  $R_f(\bar{q})$  e  $C(\bar{q})$ , respectivamente, a distorção, taxa e complexidade de um quantizador de codificação em transformada  $\bar{q}$ , de transformada  $T$ , quando avaliado com respeito à fonte  $f$ . A função distorção-taxa-complexidade

$$\bar{d}_{f,\eta,T}(\bar{r}, \bar{c}) = \inf_{\bar{q} : (1-\eta)R_f(\bar{q}) + \eta C(\bar{q}) \leq (1-\eta)\bar{r} + \eta\bar{c}} D_f(\bar{q})$$

é avaliável para qualquer  $\eta \in [0, 1]$  constante e qualquer  $T$  constante.

**Definição 4.3. Custo lagrangiano de quantização de codificação em transformada:** sejam  $D_f(\bar{q})$ ,  $R_f(\bar{q})$  e  $C(\bar{q})$ , respectivamente, a distorção, taxa e complexidade de um quantizador de codificação em transformada  $\bar{q}$ , de transformada  $T$ , quando avaliado com respeito à fonte  $f$ . O custo lagrangiano

$$\bar{\rho}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q}) = D_f(\bar{q}) + \lambda[(1 - \eta)R_f(\bar{q}) + \eta C(\bar{q})]$$

tem os multiplicadores de Lagrange implicitamente definidos pelos fatores  $\lambda \geq 0$  e  $\eta \in [0, 1]$ . O ínfimo de  $\bar{\rho}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q})$  com respeito a  $\bar{q}$  é representado por:

$$\bar{\rho}^{(\bar{q})}(f, \lambda, \eta, T) = \inf_{\bar{q}} \bar{\rho}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q}).$$

**Definição 4.4. Funcional de Gray de codificação em transformada:** o funcional de Gray, correspondente ao custo lagrangiano de quantização de codificação em transformada  $\bar{\rho}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q})$ , é representado por:

$$\bar{\theta}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q}) = \frac{\bar{\rho}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q})}{\lambda} + \frac{k}{2} \ln \lambda.$$

O ínfimo de  $\bar{\theta}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q})$  com respeito a  $\bar{q}$  e  $\lambda$  são representados respectivamente por:

$$\bar{\theta}^{(\bar{q})}(f, \lambda, \eta, T) = \inf_{\bar{q}} \bar{\theta}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q}).$$

$$\bar{\theta}^{(\lambda)}(f, \eta, T, \bar{q}) = \inf_{\lambda} \bar{\theta}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q}).$$

## 4.1 Complexidade Avaliada pelo Método de Gray

Esta seção desenvolve uma solução para a função DRC para codificação em transformada, para o caso de complexidade da codificação em transformada igual a  $C(\bar{q}) = \log N(\bar{q})$ . A presente análise baseia-se no método de Gray, apresentado na Seção 3.1. Seja  $q_i^*$  um quantizador escalar com desempenho assintoticamente ótimo em termos de distorção, taxa e complexidade e seja  $C(q_i^*) = \ln N(q_i^*)$ . Com a aplicação do Lema 3.2 a  $q_i^*$ , obtém-se que

$$\begin{aligned} \vartheta(g_i, \eta) + \epsilon &\geq \theta^{(\lambda)}(g_i, \eta, q_i^*) \\ &= (1 - \eta)H_{g_i}(q_i^*) + \eta \ln N(q_i^*) + \frac{k}{2} \ln \frac{eD_{g_i}(q_i^*)}{k/2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $g_i$  é a p.d.f. marginal da p.d.f.  $g_Z(z)$  e está relacionada à componente  $Z_i$  do vetor aleatório  $Z = TX$ .

A Equação (4.7) é um caso particular da Equação (3.8). Analogamente, as funções DRC associadas a cada fonte  $g_i$  são soluções particulares da Equação (3.9):

$$d_{g_i, \eta}(r_i, c_i) \approx \frac{k}{2} e^{2/k(\vartheta(g_i, \eta) - (1-\eta)r_i - \eta c_i) - 1}. \quad (4.8)$$

A partir das funções  $d_{g_i, \eta}(r_i, c_i)$ , a função DRC do esquema global de codificação em transformada é obtida pela equação:

$$\bar{d}_{f, \eta, T}(\bar{r}, \bar{c}) \triangleq \sum_i d_{g_i, \eta}(r_i, c_i) \geq k \left( \prod_i d_{g_i, \eta}(r_i, c_i) \right)^{1/k}. \quad (4.9)$$

A inequação das médias aritmética e geométrica, empregada na Equação (4.9), se resume a uma igualdade se e somente se todos os termos do produtório forem iguais. Como a condição de igualdade é a condição que minimiza o valor de  $\bar{d}_{f, \eta, T}(\bar{r}, \bar{c})$ , tal condição é reconhecida como solução e impõe que  $\bar{d}_{f, \eta, T}(\bar{r}, \bar{c})$  tenha iguais parcelas de distorção para cada componente. Esse resultado é uma extensão de resultado análogo observado para o problema de codificação em transformada com restrição somente de taxa [24, 25].

O requisito de que as parcelas de distorção referentes a cada quantizador contribuam de forma igual para  $\bar{d}_{f, \eta, T}(\bar{r}, \bar{c})$  permite calcular uma solução para  $\bar{d}_{f, \eta, T}(\bar{r}, \bar{c})$  parametrizada por uma única variável. Para simplificar a notação, denote  $\bar{d}_{f, \eta, T}(\bar{r}, \bar{c}) = \bar{d}$ , de modo que  $d_{g_i, \eta}(r_i, c_i) = \bar{d}/k$ . A Equação (4.7), escrita em termos de  $\bar{d}$ , assume o formato:

$$\begin{aligned} \ln \frac{e\bar{d}}{k^2/2} &\approx \frac{2}{k} (\vartheta(g_i, \eta) - (1-\eta)H_{g_i}(q_i^*) - \eta \ln N(q_i^*)) \\ &\approx \frac{2}{k} (\vartheta(g_i, \eta) - (1-\eta)(\ln N(q_i^*) - H(g_i||\Lambda_i^*)) - \eta \ln N(q_i)) \\ &= \frac{2}{k} (\vartheta(g_i, \eta) + (1-\eta)H(g_i||\Lambda_i^*) - \ln N(q_i^*)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde  $\Lambda_i^*$  é a densidade de centroides de  $q_i^*$ . Logo, o tamanho do dicionário  $N(q_i^*)$  pode ser escrito em função de  $\bar{d}$ :

$$\ln N(q_i^*) \approx \vartheta(g_i, \eta) + (1-\eta)H(g_i||\Lambda_i^*) + \frac{k}{2} \ln \frac{k^2/2}{e\bar{d}}. \quad (4.11)$$

A obtenção de  $N(q_i^*)$  permite que a taxa  $\bar{r}$  e a complexidade  $\bar{c}$  de  $\bar{d}_{f, \eta, T}(\bar{r}, \bar{c})$  sejam avaliadas, respectivamente, pelas fórmulas

$$\bar{r} \approx \sum_i H_{g_i}(q_i^*) \approx \sum_i (\ln N(q_i) - H(g_i||\Lambda_i^*)), \quad (4.12)$$

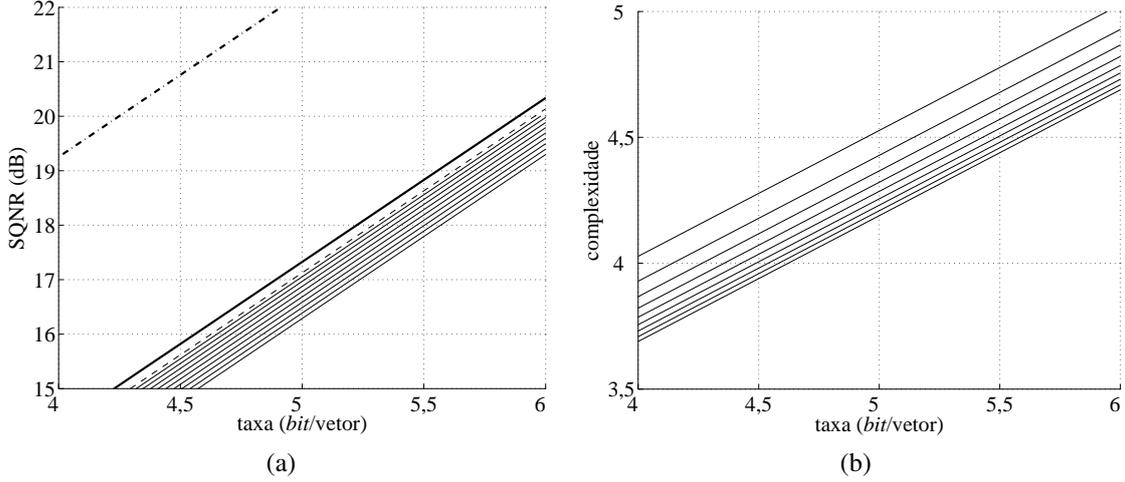


Figura 4.2: Funções DRC avaliadas pelo método de Gray, para complexidade de codificação em transformada igual ao logaritmo do tamanho do dicionário (linhas contínuas mais finas). Função distorção-taxa para quantização de taxa variável (linha contínua grossa) e para codificação em transformada (linha tracejada). Função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é bidimensional e origina um processo de Gauss-Markov de primeira ordem, cujos parâmetros são  $a = 0,9$  e  $\sigma_\epsilon^2 = 0,19$ .

$$\bar{c} = \sum_i C(q_i^*) = \sum_i \ln N(q_i). \quad (4.13)$$

A solução de  $\bar{d}_{f,\eta,T}(\bar{r}, \bar{c}) = \bar{d}$ , parametrizada em  $\bar{d}$ , é dada pelas Equações (4.11), (4.12) e (4.13).

#### 4.1.1 Avaliação Numérica

O cálculo numérico da função DRC parametrizada pelas Equações (4.11), (4.12) e (4.13) envolve a obtenção de funcionais de Gersho e segue raciocínio análogo ao apresentado no Apêndice B. Considere  $k = 2$ . Para modelar a fonte de dados, foi considerado o processo de Gauss-Markov de primeira ordem definido pela Equação (3.10). A fonte bidimensional  $f_X(x)$  correspondente possui componentes do vetor aleatório correlacionados, de modo que sua matriz de covariância [22],  $\mathcal{R}_X$ , tem tamanho  $2 \times 2$  e entrada na linha  $i$  e coluna  $j$  dada por [21]:

$$\frac{\sigma_\epsilon^2 a^{|i-j|}}{1 - a^2}, \quad (4.14)$$

para qualquer par  $(i, j)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  e  $j \in \{1, 2\}$ .

A fonte  $f_X(x)$  é gaussiana e tem um esquema de codificação em transformada cuja transformada ótima  $T$  é uma KLT. A matriz  $T$  é tal que  $T\mathcal{R}_X T^*$  é uma matriz diagonal [26]. As funções DRC para codificação em transformada de tal fonte são apresentadas na Figura 4.2.

É possível comparar o desempenho da codificação em transformada em relação a

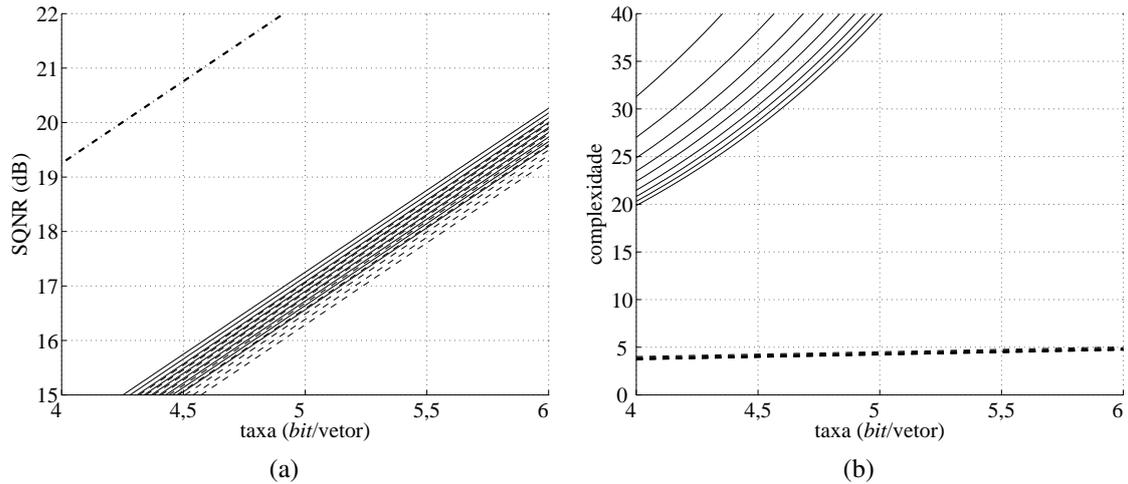


Figura 4.3: Funções DRC para quantização vetorial de busca completa (linhas contínuas) e codificação em transformada (linhas tracejadas) e função de Shannon (linha traço-ponto). A fonte é bidimensional e origina um processo de Gauss-Markov de primeira ordem, cujos parâmetros são  $a = 0,9$  e  $\sigma_\epsilon^2 = 0,19$ .

quantização vetorial de busca completa, quando a restrição de complexidade é levada em conta em ambos os projetos. Para isso, considere as funções DRC calculadas para o caso bidimensional da quantização vetorial de busca completa (Figura 4.2) e as funções DRC calculadas nesta seção. A Figura 4.3 reúne esses dois grupos de funções e revela que o desempenho da codificação em transformada, em termos de distorção e taxa, é comparável ao da quantização vetorial de busca completa, porém com o dispêndio de uma complexidade significativamente menor. Esse resultado, alcançado a partir de uma análise teórica, está de acordo com o resultado obtido de forma heurística em [27].

## 4.2 Complexidade Avaliada pelo Método de Gersho

É possível estender a análise apresentada na Seção 3.2 para aplicação em algoritmos de codificação em transformada. Uma extensão possível é apresentada no Apêndice C, para o caso particular em que a complexidade da codificação em transformada é igual à soma dos dicionários de quantização  $q_i$ ,  $C(\bar{q}) = \sum_i N(q_i)$ . Tal medida de complexidade é verificada na prática em esquemas de quantização no plano focal de câmeras fotográficas digitais [28].

Como exemplo, considere um esquema prático de codificação em transformada no plano focal, implementada por um microcircuito eletrônico analógico. Em [27], foi proposta uma medida de complexidade igual à quantidade de transistores necessários para implementar tal microcircuito, através da relação afim  $C(q) = a \sum_i N(q_i) + b$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes. É possível utilizar a teoria desenvolvida no Apêndice C para estimar a função DRC para o problema específico de [27], após uma adaptação para incluir na

medida de complexidade as constantes  $a$  e  $b$ .

Assim como no caso da quantização de busca completa, o método de Gersho para o caso da codificação em transformada permite calcular funções DRC para complexidade de quantização diferentes ao caso particular analisado no Apêndice C. Por exemplo, para a complexidade de quantização  $C(\bar{q}) = \log N(\bar{q})$ , é possível alcançar a mesma solução desenvolvida pelo método de Gray (Seção 4.1) através do método de Gersho, a partir de modificações na análise do Apêndice C.

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho, foi apresentado um método para a inclusão da restrição de complexidade na tradicional análise de quantização em alta resolução. Ao invés de se apoiar numa função de complexidade única, tal método pode ser empregado para diferentes medidas de complexidade, de modo a se ajustar a diferentes implementações práticas de quantização.

Para uma classe proposta de funções de complexidade, a noção de função distorção-taxa de quantização foi generalizada para a de função DRC. O Teorema 3.2 apresenta resultados assintóticos que permitem calcular uma solução aproximada da função DRC, sob as premissas da quantização em alta resolução. Sob tais premissas, o teorema também assume que a medida de complexidade pode ser aproximada como uma função do tamanho do dicionário  $N$  e da densidade de centroides  $\Lambda$ . Para o caso particular em que a complexidade é uma função do tamanho do dicionário, somente, foram calculadas funções DRC por meio de aproximações numéricas.

Para a codificação em transformada, a função DRC foi calculada para os casos particulares de medida de complexidade  $C(\bar{q}) = \log N(\bar{q})$  e  $C(\bar{q}) = \sum_i N_i$  e permitiu uma comparação de seu desempenho com o desempenho da quantização de busca completa. Nessa comparação, foi mostrado que é válida a noção de que codificação em transformada possui desempenho em termos de taxa e distorção semelhantes aos da quantização vetorial de busca completa, porém com uma redução significativa no valor de complexidade.

Em trabalhos futuros, a abordagem lagrangiana para quantização, com inclusão da restrição de complexidade, pode ser estudada para se desenvolver um algoritmo de projeto de quantização com restrição de complexidade. A inclusão da restrição de complexidade no algoritmo de ECVQ, por exemplo, pode ser investigada a partir de uma sofisticação do custo lagrangiano proposto em [18].

# Referências Bibliográficas

- [1] FOO, B., ANDREOPOULOS, Y., VAN DER SCHAAR, M. “Analytical rate-distortion-complexity modeling of wavelet-based video coders”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 56, n. 2, pp. 797–815, fev. 2008.
- [2] GERSHO, A., GRAY, R. M. *Vector Quantization and Signal Compression*. Boston, Kluwer, 1992.
- [3] SHANNON, C. E. “A mathematical theory of communication”, *The Bell System Technical Journal*, v. 27, pp. 379–423, jul. 1948.
- [4] ZADOR, P. L. “Asymptotic quantization error of continuous signals and the quantization dimension”, *IEEE Transactions on Informartion Theory*, v. IT-28, n. 2, pp. 139–149, mar. 1982.
- [5] GERSHO, A. “Asymptotically optimal block quantization”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT-25, n. 4, pp. 373–380, jul. 1979.
- [6] GRAY, R. M., LINDER, T., LI, J. “A Lagrangian formulation of Zador’s entropy-constrained quantization theorem”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 48, n. 3, pp. 695–707, mar. 2002.
- [7] DA FONSECA, T. A., DE QUEIROZ, R. L. “Complexity-constrained rate-distortion optimization for H.264/AVC video coding”. In: *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, pp. 2929–2912, Rio de Janeiro, maio 2011.
- [8] EFFROS, M. “Optical modeling for complex system design”, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 51–73, nov. 1998.
- [9] CHEUNG, N.-M., WANG, H., ORTEGA, A. “Sampling-based correlation estimation for distributed source coding under rate and complexity constraints”, *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 17, n. 11, pp. 2122–2137, nov. 2008.
- [10] FENG, H., EFFROS, M. “On the rate-distortion performance and computational efficiency of the Karhunen-Loève transform for lossy data compression”, *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 11, n. 2, pp. 113–122, fev. 2002.

- [11] VAN DER SCHAAAR, M., ANDREOPOULOS, Y. “Rate-distortion-complexity modeling for network and receiver aware adaptation”, *IEEE Transactions on Multimedia*, v. 7, n. 3, pp. 471–479, ago. 2005.
- [12] LEON-SALAS, W. D., BALKIR, S., SAYOOD, K., et al. “A CMOS imager with focal plane compression using predictive coding”, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, v. 42, n. 11, pp. 2555–2572, nov. 2007.
- [13] GRAY, R. M., LINDER, T., GILL, J. T. “Lagrangian vector quantization with combined entropy and codebook size constraints”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 54, n. 5, pp. 2220–2242, maio 2008.
- [14] BERGER, T. *Rate Distortion Theory: A Mathematical Basis for Data Compression*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1971.
- [15] COVER, T. M., THOMAS, J. A. *Elements of Information Theory*. Nova Iorque, Wiley-Interscience, 1991.
- [16] GRAY, R. M., NEUHOFF, D. L. “Quantization”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 44, n. 6, pp. 2325–2383, out. 1998.
- [17] LINDE, Y., BUZO, A., GRAY, R. M. “An algorithm for vector quantizer design”, *IEEE Transactions on Communications*, v. COM-28, n. 1, pp. 84–95, jan. 1980.
- [18] CHOU, P. A., LOOKABAUGH, T., GRAY, R. M. “Entropy-constrained vector quantization”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 37, n. 1, pp. 31–42, jan. 1989.
- [19] GERSHO, A. “Optimal nonlinear interpolative vector quantization”, *IEEE Transactions on Communications*, v. 38, n. 9, pp. 1285–1287, set. 1990.
- [20] GYÖRGY, A., LINDER, T., CHOU, P. A., et al. “Do optimal entropy-constrained quantizers have a finite or infinite number of codewords?” *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 49, n. 11, pp. 3031–3037, nov. 2003.
- [21] LOOKABAUGH, T. D., GRAY, R. M. “High-resolution quantization theory and the vector quantizer advantage”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 35, n. 5, pp. 1020–1033, set. 1989.
- [22] PEEBLES JR., P. N. Z. *Probability, Random Variables and Random Signal Principles*. 4 ed. Nova Iorque, McGraw-Hill, 2001.

- [23] EFFROS, M., FENG, H., ZEGER, K. “Suboptimality of the Karhunen-Loève transform for transform coding”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 50, n. 8, pp. 1605–1619, ago. 2004.
- [24] HUANG, J.-Y., SCHULTHEISS, P. M. “Block quantization of correlated Gaussian random variables”, *IEEE Transactions on Communications Systems*, v. COM-11, pp. 289–296, set. 1963.
- [25] GISH, H., PIERCE, J. N. “Asymptotically efficient quantizing”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT-14, n. 5, pp. 676–683, set. 1968.
- [26] GOYAL, V. K. “Theoretical foundations of transform coding”, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 9–21, set. 2001.
- [27] SERACO, E. P., GOMES, J. G. R. C. “Computation of the complexity of vector quantizers by affine modeling”, *Signal Processing*, v. 91, pp. 1134–1142, maio 2011.
- [28] GOMES, J. G. R. C., MITRA, S. K. “A comparative study of the complexities of neural networks based focal-plane image compression schemes”, *The IECE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, v. J88-A, n. 11, pp. 1185–1196, nov. 2005.
- [29] BOYD, S., VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge, Reino Unido, Cambridge University Press, 2004.

# Apêndice A

## Algumas Demonstrações do Capítulo 3

### A.1 Demonstração do Lema 3.2

Esta demonstração baseia-se em diferenciação analítica. Note que

$$\begin{aligned}\theta(f, \lambda, \eta, q) &= \frac{\rho(f, \lambda, \eta, q)}{\lambda} + \frac{k}{2} \ln \lambda \\ &= \frac{D_f(q)}{\lambda} + (1 - \eta)H_f(q) + \eta C + \frac{k}{2} \ln \lambda.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Como  $\theta(f, \lambda, \eta, q)$  é contínuo em relação a  $\lambda$  para  $\lambda > 0$ , a sua derivada parcial com respeito a  $\lambda$  pode ser obtida por:

$$\frac{\partial \theta(f, \lambda, \eta, q)}{\partial \lambda} = -\frac{D_f(q)}{\lambda^2} + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} = 0,$$

cujas soluções são  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = D_f(q_n)/(k/2)$ .

A solução  $\lambda_1 = 0$  não é adequada para a presente análise, pois está relacionada a um problema de quantização sem restrição de taxa e de complexidade. Logo, adota-se como solução  $\lambda^* = \lambda_2$ . Substituindo  $\lambda$  por  $\lambda^*$  na Equação (A.1), obtém-se o resultado do lema.

### A.2 Demonstração do Lema 3.3

$$\begin{aligned}\theta(f, \lambda_n, \eta, q_n) &= \frac{\rho(f, \lambda_n, \eta, q_n)}{\lambda_n} + \frac{k}{2} \lambda_n \\ &= \frac{D_f(q_n)}{\lambda_n} + (1 - \eta)H_f(q_n) + \eta C_n + \frac{k}{2} \lambda_n\end{aligned}\tag{A.2}$$

$$\frac{\partial \theta(f, \lambda_n, \eta, q_n)}{\partial \lambda_n} = -\frac{D_f(q_n)}{\lambda_n^2} + \frac{k}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_n} = 0\tag{A.3}$$

$$\lambda_n = \frac{D_f(q_n)}{k/2}\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(f, \lambda_n, \eta, q_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (1 - \eta)H_f(q_n) + \eta C_n + \frac{k}{2} \ln \frac{eD_f(q_n)}{k/2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (1 - \eta)(\ln N(q) - H(f|\Lambda)) + \eta C(q) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k}{2} \ln \frac{e c_k E_f[(N(q)\Lambda)^{-2/k}]}{k/2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (1 - \eta) \ln N(q) + \eta C(q) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k}{2} \ln \frac{e c_k N(q)^{-2/k}}{k/2} + \phi(f, \eta, \Lambda) \right)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

### A.3 Demonstração do Teorema 3.2

O Lema 3.3 indica que existe  $N(q)$  suficientemente alto e existe  $\lambda$  tal que

$$\theta(f, \lambda, \eta, q) - \epsilon \leq \Theta_k(N(q)) + (1 - \eta) \ln N(q) + \eta C(q) + \phi(f, \eta, \Lambda_q),$$

para  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno. Uma vez que, sob as condições assintóticas do teorema,  $\theta(f, \lambda, \eta, q)$  não depende de  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned}
\theta^{(\lambda)}(f, \eta, q) + \epsilon &= \inf_{\lambda} \theta(f, \lambda, \eta, q) + \epsilon \\
&= \Theta_k(N(q)) + (1 - \eta) \ln N(q) + \eta C(q) + \phi(f, \eta, \Lambda).
\end{aligned}$$

A princípio, a avaliação do ínfimo de  $\theta^{(\lambda)}(f, \eta, q)$  com respeito a  $q$  é uma tarefa difícil, pois  $q$  define os parâmetros  $N(q)$ ,  $\Lambda_q(x)$  e  $C(q)$ . No entanto, assumindo que  $C(q) = C(\Lambda_q, N(q))$  e impondo a restrição de que o tamanho do dicionário é constante, mantém-se apenas  $\Lambda_q(x)$  como variável de  $q$ . O ínfimo pode ser então avaliado por

$$\begin{aligned}
\inf_{q : N(q)=N} \theta^{(\lambda)}(f, \eta, q) + \epsilon &= \inf_{q : N(q)=N} \left( \Theta_k(N(q)) + (1 - \eta) \ln N(q) + \eta C(\Lambda_q, N(q)) \right. \\
&\quad \left. + \phi(f, \eta, \Lambda_q) \right) \\
&= \inf_{q : N(q)=N} \left( \Theta_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \eta C(\Lambda_q, N) + \phi(f, \eta, \Lambda_q) \right) \\
&= \inf_{q : N(q)=N} \left( \Theta_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \Phi(f, \eta, \Lambda_q, N) \right) \\
&= \inf_{\Lambda} \left( \Theta_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \Phi(f, \eta, \Lambda, N) \right) \\
&= \Theta_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \eta C(N) + \Phi^{(\Lambda)}(f, \eta, N).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

A última linha da equação acima é o resultado do teorema.

## A.4 Demonstração do Corolário 3.1

A prova segue raciocínio semelhante ao da demonstração do Teorema 3.2. O desenvolvimento da Equação (A.6) aqui é adaptado para incluir a hipótese de que  $C(\Lambda_q, N(q)) = C(N(q))$ :

$$\begin{aligned} \inf_{q : N(q)=N} \theta^{(\Lambda)}(f, \eta, q) + \epsilon &= \inf_{q : N(q)=N} \left( \Theta_k(N(q)) + (1 - \eta) \ln N(q) + \eta C(N(q)) \right. \\ &\quad \left. + \phi(f, \eta, \Lambda) \right) \\ &= \inf_{q : N(q)=N} \Theta_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \eta C(N) + \phi(f, \eta, \Lambda) \\ &= \inf_{\Lambda} \Theta_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \eta C(N) + \phi(f, \eta, \Lambda) \\ &= \Theta_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \eta C(N) + \phi^{(\Lambda)}(f, \eta). \end{aligned}$$

A última linha da equação acima é o resultado do corolário.

## Apêndice B

# Cálculo Numérico do Funcional de Gersho

A avaliação do ínfimo do funcional de Gersho com respeito a  $\Lambda$ ,  $\phi^{(\Lambda)}(f, \eta)$ , pode ser realizada de forma indireta: aplica-se a mudança de variável da Equação (3.5) em  $\phi(f, \eta, \Lambda)$  para se obter  $\psi(f, \eta, \nu)$ . Após alguma algebra, obtém-se que [13]:

$$\begin{aligned} \psi(f, \eta, \nu) = & \frac{k}{2} \left( \int_{\mathbb{R}^k} f(x) e^{\nu(x)} dx - (1 - \eta) \int_{\mathbb{R}^k} f(x) \nu(x) dx - 1 \right) \\ & + \eta \ln \left( \int_{\mathbb{R}^k} e^{-k\nu(x)/2} \right) + (1 - \eta)h(f). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

É possível demonstrar que a Equação (B.1) implica que  $\psi(f, \eta, \nu)$  é convexo em  $\nu$ . Assim a tarefa de se calcular  $\phi^{(\Lambda)}(f, \eta)$  através de  $\psi^{(\nu)}(f, \eta)$  (Equação 3.6) tem a vantagem de ser implementável através de cálculo numérico, com um algoritmo de otimização convexa.

A principal consideração para a implementação numérica é a aproximação discreta que deve ser realizada para a função da Equação (B.1). Neste trabalho, a avaliação das integrais dessa equação, originalmente sobre o suporte infinito  $x \in \mathbb{R}^k$ , é truncada em um suporte finito  $x \in [-a\sigma_f^2, a\sigma_f^2]^k$ , onde  $\sigma_f^2$  é a variância associada à fonte  $f$  e  $a$  uma constante. A escolha para o valor de  $a$  deve levar em conta o compromisso entre a quantidade de amostras de  $x$  e a precisão da avaliação das integrais. As integrais são avaliadas por

somatórios, de modo que é possível construir a aproximação para  $\psi(f, \eta, \nu)$ :

$$\begin{aligned} \psi(f, \eta, \nu) - (1 - \eta)h(f) &\approx \Psi(\{\nu(x^{(i)})\}, \{x^{(i)}\}) \\ &\triangleq \frac{k}{2} \left( \Delta \sum_i f(x^{(i)}) e^{\nu(x^{(i)})} - (1 - \eta) \Delta \sum_i f(x^{(i)}) \nu(x^{(i)}) - 1 \right) \\ &\quad + \eta \ln \left( \Delta \sum_i e^{-k\nu(x^{(i)})/2} \right), \end{aligned} \tag{B.2}$$

onde os vetores  $\{x^{(i)}\}$  são amostrados em  $[-a \cdot \sigma_f^2, a \cdot \sigma_f^2]^k$  de acordo com um padrão uniforme e onde  $\Delta = (x_1^{(i)} - x_1^{(i-1)})^k$ , para  $x_1^{(i)}$  e  $x_1^{(i-1)}$  como as respectivas primeiras componentes dos vetores adjacentes  $x^{(i)}$  e  $x^{(i-1)}$ . A aproximação da Equação (B.2) é mais precisa à medida que  $\Delta \rightarrow 0$  e  $a \rightarrow \infty$ . Note que um segundo compromisso entre precisão e quantidade de amostras baliza a escolha de  $\Delta$ . Devido aos parâmetros  $a$  e  $\Delta$ , a complexidade computacional para cálculo de  $\Psi(\{\nu(x^{(i)})\}, \{x^{(i)}\})$  cresce exponencialmente em  $k$ .

Para minimizar a Equação (B.2) com respeito a  $\{\nu(x^{(i)})\}$ , adotou-se neste trabalho um algoritmo de otimização baseado em gradiente descendente [29]. O gradiente em questão é obtido por meio da derivação de  $\Psi(\{\nu(x^{(i)})\}, \{x^{(i)}\})$  com relação a cada  $\nu(x^{(i)})$ .

## Apêndice C

# Análise Particular de Complexidade pelo Método de Gersho para Codificação em Transformada

Neste apêndice, calcula-se a função DRC para o caso particular em que a complexidade da codificação em transformada é igual à soma dos tamanhos dos dicionários de cada componente. Aplica-se para a codificação em transformada a mesma estratégia adotada para o caso de quantização vetorial de busca completa, apresentada na Seção 3.2.1. Recorda-se que o método de Gersho apresentado na Seção 2.3.1 permite avaliar quantização vetorial em alta resolução através dos parâmetros da densidade de níveis de reconstrução e do tamanho do dicionário.

**Definição C.1. Funcional de Gersho de codificação em transformada:** dado um esquema de codificação em transformada  $\bar{q}$  cuja transformada é  $T$ , sejam as funções densidade de probabilidade  $f_X(x)$  e  $\{\Lambda_i(x)\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $i = 1, \dots, k$ , e seja  $\eta \in [0, 1]$ . O vetor transformado  $Z = TX$  tem cada componente  $Z_i$  associado à p.d.f.  $g_i$ . Os funcionais de Gersho  $\bar{\phi}(f, \eta, \{\Lambda_i\}, T)$  e  $\bar{\phi}^{\{\Lambda_i\}}(f, \eta, T)$ , particulares para codificação em transformada no caso em que  $C(\bar{q}) = \sum_i N(q_i) = \bar{N}$ , são tais que

$$\bar{\phi}(f, \eta, \{\Lambda_i\}, T) = (1 - \eta) \left( \sum_i E_{g_i} [\ln \Lambda_i] + \sum_i \ln (E_{g_i} [\Lambda_i^{-2}])^{1/2} \right) + \eta k \ln \left( \sum_i (E_{g_i} \Lambda_i^{-2})^{1/2} \right),$$

$$\bar{\phi}^{\{\Lambda_i\}}(f, \eta, T) = \inf_{\{\Lambda_i\}} \bar{\phi}(f, \eta, \{\Lambda_i\}, T).$$

**Lema C.1.** *Seja  $\bar{q}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , uma sequência de codificadores em transformada associados aos vetores aleatórios  $X$  e  $Z = TX$ . Cada quantizador global  $\bar{q}_n$  é formado por um esquema de quantizadores escalares  $q_{n,i}$ , aplicados às componentes  $Z_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .*

Os quantizadores  $q_{n,i}$  têm complexidade  $C_{n,i}$ , tamanho do dicionário  $N_{n,i}$  e densidade de centroides  $\Lambda_{n,i}$ . A complexidade e o tamanho do dicionário de  $\bar{q}_n$  são dados respectivamente por  $C_n = \sum_i C_{n,i}$  e  $N_n = \sum_i N_{n,i}$ .

Se  $N_n \rightarrow \infty$  à medida que  $n$  cresce, então existe uma sequência de números reais positivos  $\lambda_n$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\theta}(f, \lambda_n, \eta, \bar{q}_n, T)}{\bar{\Theta}_k(N_n) + (1 - \eta)k \ln N_n + \eta C_n + \bar{\phi}(f, \eta, \{\Lambda_{n,i}\}, T)} = 1,$$

onde

$$\bar{\Theta}_k(N) \triangleq \frac{k}{2} \ln(c_1 N^{-2}) + \frac{k}{2} \ln \frac{e}{k/2}. \quad (\text{C.1})$$

*Demonstração:* Veja o Apêndice C.1. □

**Corolário C.1.** Sob as premissas do Lema C.1, considere que  $C(\bar{q}) = \bar{N}$ , onde  $\bar{N} = \sum_i N(q_i)$ . Dado  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno, existe  $\bar{N}$  suficientemente grande tal que

$$\inf_{\bar{q}: \bar{N}=\bar{N}} \bar{\theta}(f, \eta, T, \bar{q}) + \epsilon = \bar{\Theta}_k(N) + (1 - \eta)k \ln N + \eta \bar{N} + \bar{\phi}^{\{\Lambda_i\}}(f, \eta, T).$$

*Demonstração:* Veja o Apêndice C.2. □

A partir do Corolário C.1, é possível estender o raciocínio da Equação 3.14, para concluir que a função DRC tem parametrização  $(\bar{d}(N), \bar{r}(N), \bar{c}(N))$  tal que

$$\begin{aligned} \bar{r}(N) &= \sum_i \ln N_i - H(g_i || \Lambda_i^*), \\ \bar{c}(N) &= N, \\ \bar{d}(N) &= \frac{k}{2} e^{\bar{\Theta}(N, \eta) + \bar{\phi}^{\{\Lambda_i\}}(f, \eta, T) - (1 - \eta)\bar{r}(N) - \eta \bar{c}(N)}, \end{aligned}$$

parametrizada pelo fator  $N \geq 0$  e dada a hipótese de que a complexidade de quantização é  $C(\bar{q}) = \bar{N}$ . Para o cálculo de  $\bar{r}(N)$  e  $\bar{d}(N)$ , é necessário resolver o valor do ínfimo:

$$\inf_{\{\Lambda_i\}} (1 - \eta) \left( \sum_i (E_{g_i}[\ln \Lambda_i]) + \sum_i \ln (E_{g_i}[\Lambda_i^{-2}])^{1/2} \right) + \eta k \ln \left( \sum_i (E_{g_i}[\Lambda_i^{-2}])^{1/2} \right). \quad (\text{C.2})$$

O conjunto  $\{\Lambda_i^*\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , é definido como o argumento que provê o ínfimo da Equação (C.2).

A mudança de variável

$$e^{\nu_i(x)} = \frac{\Lambda_i(x)^{-2/k}}{\int f(x') \Lambda_i(x')^{-2/k} dx'}$$

é semelhante à utilizada originalmente em [13] para resolver o funcional de Gersho, já que tornava o problema da Equação (3.6) um problema convexo. Embora não seja aqui

demonstrado, tal mudança de variável também transforma o problema da Equação (C.2) em um problema convexo e que, portanto, tem resolução simplificada a partir de cálculo numérico.

## C.1 Demonstração do Lema C.1

Utilize a notação simplificada  $\bar{\theta}^{(\lambda)}(f, \eta, T, \bar{q}) = \theta$ ,  $D_f(\bar{q}) = D$ ,  $H_f(\bar{q}) = H$ ,  $C(\bar{q}) = C$  e  $\bar{N} = N$ .

A partir do Lema 3.2:

$$\begin{aligned}\theta &= \inf_{\lambda} \frac{D}{\lambda} + (1 - \eta)H + \eta C + \frac{k}{2} \ln \lambda \\ &= (1 - \eta)H + \eta C + \frac{k}{2} \ln \frac{eD}{k/2}.\end{aligned}$$

Exprimindo a distorção, taxa e entropia de codificação em transformada como um somatório da distorção, taxa e complexidade dos quantizadores escalares de cada componente, é possível re-escrever a Equação (3.2) por:

$$\begin{aligned}\theta &= (1 - \eta) \sum_i H_i + \eta \sum_i C_i + \frac{k}{2} \ln \frac{e \sum_i D_i}{k/2} \\ &= (1 - \eta) \sum_i (\ln N_i - H(g_i || \Lambda_i)) \\ &\quad + \eta \sum_i C_i + \frac{k}{2} \ln \left( \sum_i c_1 N_i^{-2} E_{g_i}[\Lambda_i^{-2}] \right) + \frac{k}{2} \ln \frac{e}{k/2} \\ &= (1 - \eta) \sum_i (\ln N \mu_i - H(g_i || \Lambda_i)) \\ &\quad + \eta \sum_i C_i + \frac{k}{2} \ln \left( \sum_i c_1 N^{-2} \mu_i^{-2} E_{g_i}[\Lambda_i^{-2}] \right) + \frac{k}{2} \ln \frac{e}{k/2},\end{aligned}$$

onde  $\sum_i \mu_i = 1$ . Para simplificar a notação, adote  $\Xi_i = E_{g_i}[\Lambda_i^{-2}]$  e adote

$$A = (1 - \eta)(k \ln N - \sum_i H(g_i || \Lambda_i)) + \eta \sum_i C_i + \frac{k}{2} \ln (c_1 N^{-2}) + \frac{k}{2} \ln \frac{e}{k/2}.$$

Logo,

$$\theta = A + (1 - \eta) \sum_i \ln \mu_i + \frac{k}{2} \ln \left( \sum_i \mu_i^{-2} \Xi_i \right). \quad (\text{C.3})$$

Para encontrar os  $\{\mu_i\}$  solução:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} = \frac{(1 - \eta)}{\mu_i} - \frac{k \mu_i^{-3} \Xi_i}{\sum_j \mu_j^{-2} \Xi_j} = 0.$$

Uma vez que  $\mu_i$  é não-negativo:

$$\mu_i = \left( \frac{k\Xi_i}{\sum_j \mu_j^{-2}\Xi_j(1-\eta)} \right)^{1/2}. \quad (\text{C.4})$$

Por definição,  $\sum_i \mu_i = 1$ , o que implica que:

$$\sum_i \mu_i = \sum_i \left( \frac{k\Xi_i}{\sum_j \mu_j^{-2}\Xi_j(1-\eta)} \right)^{1/2} = 1,$$

de modo que:

$$\sum_j \mu_j^{-2}\Xi_j = \left( \sum_i \left( \frac{k\Xi_i}{(1-\eta)} \right)^{1/2} \right)^2. \quad (\text{C.5})$$

Substituindo na Equação (C.4) o valor encontrado na Equação (C.5), tem-se como solução:

$$\mu_i = \frac{\Xi_i^{1/2}}{\sum_j \Xi_j^{1/2}}. \quad (\text{C.6})$$

Substituindo na Equação (C.3) a solução de  $\{\mu_i\}$ :

$$\begin{aligned} \theta &= A + (1-\eta) \sum_i \ln \left( \frac{\Xi_i^{1/2}}{\sum_j \Xi_j^{1/2}} \right) + \frac{k}{2} \ln \left( \sum_i \left( \frac{\Xi_i^{1/2}}{\sum_j \Xi_j^{1/2}} \right)^{-2} \Xi_i \right) \\ &= A + (1-\eta) \left( \sum_i \ln \Xi_i^{1/2} - k \ln \left( \sum_i \Xi_i^{1/2} \right) \right) + k \ln \left( \sum_i \Xi_i^{1/2} \right) \\ &= A + (1-\eta) \sum_i \ln \Xi_i^{1/2} + \eta k \ln \left( \sum_i \Xi_i^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Adote a notação

$$A = B - (1-\eta) \sum_i H(g_i|\Lambda_i), \quad (\text{C.8})$$

onde

$$B = (1-\eta)k \ln N + \eta \sum_i C_i + \frac{k}{2} \ln (c_1 N^{-2}) + \frac{k}{2} \ln \frac{e}{k/2}.$$

Logo, com o retorno da notação  $\Xi_i = E_{g_i}[\Lambda_i^{-2}]$  e a substituição de  $A$  pela notação da

Equação (C.8), a Equação (C.7) deixa explícita a dependência de  $\theta$  com  $\{\Lambda_i\}$ :

$$\begin{aligned}
\theta &= B - (1 - \eta) \sum_i H(g_i || \Lambda_i) + (1 - \eta) \sum_i \ln \Xi_i^{1/2} + \eta k \ln \left( \sum_i \Xi_i^{1/2} \right) \\
&= B + (1 - \eta) \sum_i h(g_i) + (1 - \eta) \sum_i (E_{g_i}[\ln \Lambda_i]) + (1 - \eta) \sum_i \ln (E_{g_i}[\Lambda_i^{-2}])^{1/2} \\
&\quad + \eta k \ln \left( \sum_i (E_{g_i}[\Lambda_i^{-2}])^{1/2} \right),
\end{aligned} \tag{C.9}$$

que é o resultado do lema.

## C.2 Demonstração do Corolário C.1

Esta análise é análoga à demonstração do Corolário 3.1. Pelo Lema C.1, existe  $\lambda$  e existe  $\bar{N}$  suficientemente alto tais que

$$\bar{\theta}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q}) + \epsilon \leq \bar{\Theta}_k(\bar{N}) + (1 - \eta) \ln \bar{N} + \eta C(\bar{q}) + \bar{\phi}(f, \eta, \{\Lambda_i\}, T),$$

para  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno. Uma vez que, sob as condições assintóticas do teorema,  $\bar{\theta}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q})$  não depende de  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}^{(\lambda)}(f, \eta, T, \bar{q}) - \epsilon &\leq \inf_{\lambda} \bar{\theta}(f, \lambda, \eta, T, \bar{q}) \\
&= \bar{\Theta}_k(\bar{N}) + (1 - \eta) \ln \bar{N} + \eta C(\bar{q}) + \bar{\phi}(f, \eta, \{\Lambda_i\}, T).
\end{aligned}$$

A princípio, a avaliação do ínfimo de  $\bar{\theta}^{(\lambda)}(f, \eta, T, \bar{q})$  com respeito a  $\bar{q}$  é uma tarefa difícil, pois  $\bar{q}$  define os parâmetros  $\bar{N}$ ,  $\{\Lambda_i\}$  e  $C(\bar{q})$ . No entanto, assumindo que  $C(\bar{q}) = C(\bar{N})$  e impondo a restrição de que o tamanho do dicionário é constante, mantém-se apenas  $\{\Lambda_i\}$  como variável de  $\bar{q}$ . O ínfimo pode ser então avaliado por

$$\begin{aligned}
\inf_{\bar{q} : \bar{N}=N} \bar{\theta}^{(\lambda)}(f, \eta, T, \bar{q}) + \epsilon &= \inf_{\bar{q} : \bar{N}=N} (\bar{\Theta}_k(\bar{N}) + (1 - \eta) \ln \bar{N} + \eta C(\bar{N}) \\
&\quad + \bar{\phi}(f, \eta, \{\Lambda_i\}, T)) \\
&= \inf_{\bar{q} : \bar{N}=N} \bar{\Theta}_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \eta C(N) \\
&\quad + \bar{\phi}(f, \eta, \{\Lambda_i\}, T) \\
&= \inf_{\{\Lambda_i\}} \bar{\Theta}_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \eta C(N) + \bar{\phi}(f, \eta, \{\Lambda_i\}, T) \\
&= \bar{\Theta}_k(N) + (1 - \eta) \ln N + \eta C(N) + \bar{\phi}^{\{\Lambda_i\}}(f, \eta, T),
\end{aligned}$$

que é o resultado do corolário.