

DECONVOLUÇÃO MULTICANAL EM DADOS SÍSMICOS BASEADA EM
ALGORITMOS DE EQUALIZAÇÃO CEGA DE SISTEMAS DE
COMUNICAÇÃO DIGITAL

Pedro Lemos Tavares

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

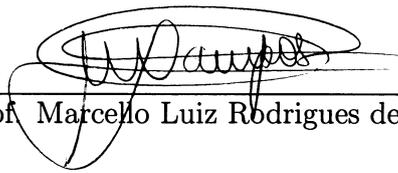
Aprovada por:



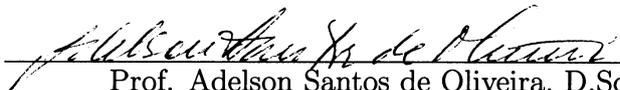
Prof. Eduardo Antônio Barros da Silva, Ph.D.



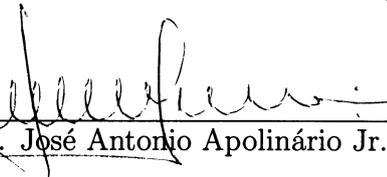
Prof. Paulo Sérgio Ramirez Diniz, Ph.D.



Prof. Marcelo Luiz Rodrigues de Campos, Ph.D.



Prof. Adelson Santos de Oliveira, D.Sc.



Prof. José Antonio Apolinário Jr., D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2007

TAVARES, PEDRO LEMOS

Deconvolução multicanal em dados
sísmicos baseada em algoritmos de
equalização cega de sistemas de
comunicação digital [Rio de Janeiro]
2007

XXVII, 299 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Elétrica, 2007)

Dissertação - Universidade Federal
do Rio de Janeiro, COPPE

1.Equalização cega

2.Deconvolução

3.Processamento de sinais

4.Dados sísmicos

5.Sistemas de comunicação digital

I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

Agradecimentos

Agradeço aqui a todos os que tornaram este trabalho possível. Aos meus pais Jorge e Fernanda, aos meus irmãos André e Daniel, aos meus avós, aos meus familiares, amigos e minha namorada Isabel. Ao meu orientador Eduardo da Silva por ter me concedido grande liberdade de pesquisa, sem praticamente nenhuma restrição quanto a temas fora de sua área de concentração. Ao meu orientador Paulo Diniz, por ter me iluminado quanto ao tema de sistemas SIMO, o núcleo deste trabalho. Ao meu colega e amigo de laboratório Tadeu Ferreira, pelas diversas discussões também no tema de sistemas SIMO. À toda a equipe de alunos e professores do Laboratório de Processamento de Sinais (LPS), por fornecer um ambiente extremamente rico para a pesquisa e desenvolvimento, pois o que cada professor e aluno do LPS é hoje se deve em grande parte a troca de experiências que só é possível num ambiente como este. À biblioteca do Centro de Pesquisas Leopoldo Américo Miguez de Mello (CENPES), com seu acervo fenomenal e seus funcionários exemplares, e em especial aos funcionários Roseny de Almeida e Danielle Peres. Ao amigo Marcello Artimos, por ter me incentivado quando ainda em dúvida sobre a viabilidade deste tema. Ao amigo Miguel Furtado Junior, por ter me ajudado em assuntos dos mais diversos neste trabalho. À colega de trabalho Cristina Bentz, por ter me recebido em minha primeira visita ao CENPES. Aos colegas de trabalho Carlos Cunha Filho e Neiva Zago, por terem me indicado a literatura recomendada na área de processamento de dados sísmicos. Ao colega de trabalho Evaldo Mundim, por ter me atendido prontamente quando necessário e por ter fornecido parte dos dados sísmicos aqui utilizados. À colega de traba-

lho Margarida Okahara, por ter também fornecido prontamente parte dos dados sísmicos aqui utilizados e a qual ainda não tive o prazer de conhecer pessoalmente. À todos que colaboraram de certa forma e que por restrições de espaço não foram mencionados.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DECONVOLUÇÃO MULTICANAL EM DADOS SÍSMICOS BASEADA EM
ALGORITMOS DE EQUALIZAÇÃO CEGA DE SISTEMAS DE
COMUNICAÇÃO DIGITAL

Pedro Lemos Tavares

Março/2007

Orientadores: Eduardo Antônio Barros da Silva

Paulo Sérgio Ramirez Diniz

Programa: Engenharia Elétrica

As áreas de processamento de dados sísmicos e de comunicação digital, apesar de imensa semelhança matemática, atualmente não possuem grande relacionamento técnico-científico. O objetivo aqui é o de aproximar estas duas áreas, inserindo algoritmos recentes de equalização cega de sistemas de comunicação digital no contexto de processamento de dados sísmicos. Inicialmente uma breve revisão e comparação dos problemas enfrentados em ambas as áreas é feito, seguida de um estudo de diversos algoritmos existentes mas ainda pouco difundidos de identificação e inversão cega de sistemas de uma entrada e múltiplas saídas com resposta ao impulso finita. É então apresentada a condição necessária e suficiente para a identificabilidade e inversão destes sistemas: que as transformadas-Z de suas respostas ao impulso não tenham zeros em comum e que uma janela de observação suficientemente grande seja utilizada. Algoritmos estatísticos e determinísticos são apresentados, demonstrando a possibilidade de recuperação de amplitude e fase do sistema e da entrada apenas pela observação da saída, seja por suas estatísticas de segunda ordem ou por tratamentos algébricos, e sem obrigatoriamente a necessidade da hipótese de entrada estacionária branca. Resultados experimentais demonstram o funcionamento destes algoritmos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SEISMIC DATA MULTICHANNEL DECONVOLUTION BASED ON DIGITAL
COMMUNICATION SYSTEMS' BLIND EQUALIZATION ALGORITHMS

Pedro Lemos Tavares

March/2007

Advisors: Eduardo Antônio Barros da Silva

Paulo Sérgio Ramirez Diniz

Department: Electrical Engineering

Seismic data processing and digital communications are two closely related areas which have great mathematical similarities but, as of today, do not present great technical and scientific exchange. The goal here is to close this gap by inserting recently developed digital communication equalization algorithms into the seismic data processing context. A brief revision and comparison of the problems faced in each area is thus provided, followed by a review of existing, but yet not in widespread use, blind single-input multiple-output finite impulse response identification and inversion algorithms. The necessary and sufficient conditions for the identifiability and inversibility of these systems is thus presented: Z-transforms of its impulse responses should not share common zeros and sufficiently large observation windows should be used. Statistical and deterministic algorithms are presented showing the possibility of input and system's amplitude and phase recovery only by output observation, by means of second order statistics or algebraic treatments, and possibly without the white stationary input hypothesis. Experimental data confirm the validity of these algorithms.

Sumário

Agradecimentos	iii
Notações	xii
Acrônimos	xvi
Lista de Figuras	xviii
Lista de Tabelas	xxvii
1 Introdução aos Problemas de Equalização e Deconvolução	1
1.1 Sistemas de comunicação digital	3
1.2 Processamento de dados sísmicos	6
1.2.1 Sismologia de exploração e o experimento sísmico	7
1.2.2 As etapas do processamento de dados sísmicos tradicional	32
1.2.3 A importância da deconvolução	38
1.2.4 Reflexões múltiplas	39
1.2.5 Deconvolução	40
1.2.6 Outras abordagens para a deconvolução	45

1.3	Comparação entre os problemas de equalização e deconvolução . . .	46
2	Identificação e Inversão Cega de Sistemas SIMO FIR	49
2.1	Sistemas SIMO FIR	49
2.2	Formulação do problema	50
2.3	Sistema inverso ZF MISO FIR	53
2.4	Sistema quase-inverso MISO FIR	56
2.5	Restrições quanto à inversibilidade da matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$. .	58
2.6	Potenciais aplicações da abordagem SIMO FIR	60
3	Algoritmos Baseados em Estatísticas de Segunda Ordem	63
3.1	Estatísticas de segunda ordem	63
3.2	Relações estatísticas entre entrada, saída e ruído aditivo	68
3.3	Sistema inverso MMSE MISO FIR	69
3.4	Algoritmo TXK	71
3.4.1	Modelo do sistema	71
3.4.2	Desenvolvimento	73
3.4.3	Descrição e pseudo-código	78
3.4.4	Deficiências	80
3.5	Algoritmo SSM	81
3.5.1	Modelo do sistema	81
3.5.2	Desenvolvimento	81
3.5.3	Descrição e pseudo-código	90

3.5.4	Deficiências	92
3.6	Algoritmo LP	92
3.6.1	Modelo do sistema	92
3.6.2	Desenvolvimento	93
3.6.3	Descrição e pseudo-código	98
3.7	Algoritmo OPD	100
3.7.1	Modelo do sistema	100
3.7.2	Desenvolvimento	101
3.7.3	Descrição e pseudo-código	106
3.8	Algoritmo MSLP	109
3.8.1	Modelo do sistema	109
3.8.2	Desenvolvimento	109
3.8.3	Descrição e pseudo-código	115
3.9	Algoritmo CMOE	117
3.9.1	Modelo do sistema	118
3.9.2	Desenvolvimento	118
3.9.3	Descrição e pseudo-código	121
4	Algoritmos Determinísticos	123
4.1	Algoritmo SCM	124
4.1.1	Desenvolvimento	124
4.1.2	Descrição e pseudo-código	128

4.2	Algoritmo LSS	129
4.2.1	Desenvolvimento	130
4.2.2	Descrição e pseudo-código	141
4.3	Algoritmo JLSS	143
4.3.1	Desenvolvimento	143
4.3.2	Descrição e pseudo-código	152
4.4	Algoritmo OP	154
4.4.1	Desenvolvimento	155
4.4.2	Descrição e pseudo-código	165
5	Comparações e Resultados Experimentais	169
5.1	Comparações	169
5.1.1	Identificação e inversão cega de sistemas SISO FIR	170
5.1.2	Restrições quanto ao sinal de entrada	171
5.1.3	Restrições quanto ao sistema SIMO FIR	172
5.1.4	Robustez quanto a erros na estimativa da ordem $M - 1$	173
5.1.5	Inversão direta ou indireta e ZF ou MMSE	174
5.1.6	Características de convergência e desempenho das estimativas com relação à SNR e à quantidade de amostras da saída	175
5.1.7	Janela de observação mínima	176
5.1.8	Requisitos computacionais	177
5.2	Figuras de mérito	181
5.3	Resultados experimentais	182

5.3.1	Sistema SIMO FIR sem zeros próximos ou em comum	184
5.3.2	Pulsos sísmicos reais e diferentes	193
6	Conclusões	203
A	Prova do Teorema 2.5.1	206
B	Critério MDL	211
C	Equivalência entre Sistemas SISO FIR Superamostrados com Entrada Cicloestacionária e Sistemas SIMO FIR	213
D	Experimentos Detalhados	216
D.1	Experimentos A.01 a A.12	218
D.2	Experimentos B.01 a B.03 e B.05 a B.07	222
D.3	Experimentos C.01 a C.04	223
D.4	Experimentos D.01 a D.03	225
D.5	Experimentos E.01 a E.03 e E.05 a E.08	227
D.6	Experimentos F.01 a F.04	228
D.7	Experimentos restantes	229
D.8	Gráficos	229
	Referências Bibliográficas	288
	Índice Remissivo	296

Notações

1. k representa o tempo discreto;
2. t representa o tempo contínuo;
3. \triangleq representa “igual por definição”;
4. Letras minúsculas i e de l a n em formato regular representam contadores (índices) inteiros;
5. Letras maiúsculas D e de K a N em formato regular representam constantes inteiras;
6. Letras minúsculas em negrito, \mathbf{a} por exemplo, representam vetores coluna (a menos que dito ao contrário);
7. Letras maiúsculas em negrito, \mathbf{A} por exemplo, representam matrizes;
8. Letras maiúsculas em negrito com um ponto acima e a esquerda, $\dot{\mathbf{A}}$ por exemplo, representam matrizes com estrutura toeplitz, toeplitz por blocos, hankel ou hankel por blocos;
9. Letras com (k) ao lado direito representam funções de k . Exemplos: $a(k)$, $\mathbf{a}(k)$, $\mathbf{A}(k)$ e $\dot{\mathbf{A}}(k)$ representam respectivamente uma função de k , um vetor coluna de funções de k , uma matriz de funções de k e uma matriz estruturada de funções de k ;
10. Letras com um ponto em cima e (z) ao lado direito representam transformadas-Z. Exemplos: $\dot{a}(z)$, $\dot{\mathbf{a}}(z)$, $\dot{\mathbf{A}}(z)$ e $\dot{\dot{\mathbf{A}}}(z)$ representam respectivamente a

transformada-Z de $a(k)$, um vetor coluna com as transformadas-Z das funções em $\mathbf{a}(k)$, uma matriz com as transformadas-Z das funções em $\mathbf{A}(k)$ e uma matriz estruturada com as transformadas-Z das funções em $\dot{\mathbf{A}}(k)$. Isto é

$$\dot{a}(z) = \sum_k a(k)z^{-k},$$

$$\dot{\mathbf{a}}(z) = \sum_k \mathbf{a}(k)z^{-k},$$

$$\dot{\mathbf{A}}(z) = \sum_k \mathbf{A}(k)z^{-k},$$

e

$$\dot{\hat{\mathbf{A}}}(z) = \sum_k \hat{\mathbf{A}}(k)z^{-k};$$

11. Letras com o acento circunflexo, \hat{a} , $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{A}}$, ou $\dot{\hat{\mathbf{A}}}$ por exemplo, representam estimativas;
12. Notações abaixo de letras que representem vetores ou matrizes, $\underset{(N \times 1)}{\mathbf{a}}$ e $\underset{(N \times M)}{\mathbf{A}}$ por exemplo, representam as dimensões das matrizes ou vetores respectivos.
13. $(\cdot)^\dagger$ simboliza a pseudo-inversa de Moore-Penrose;
14. $(\cdot)^H$ simboliza o hermitiano, ou seja, a transposição conjugada;
15. $(\cdot)^T$ simboliza a transposição;
16. $(\cdot)^*$ simboliza o conjugado;
17. $\text{tr}(\cdot)$ simboliza o traço de uma matriz;
18. $\text{posto}(\cdot)$ simboliza o posto de uma matriz;
19. $\|\cdot\|$ simboliza a norma-2;
20. $\|\cdot\|_F$ simboliza a norma de Frobenius;
21. $\lfloor a \rfloor$ simboliza o ínfimo de a , o único inteiro k tal que $k \leq a < k + 1$;
22. $\lceil a \rceil$ simboliza supremo de a , o único inteiro k tal que $k - 1 < a \leq k$;

23. $a \bmod b$ simboliza o resto da divisão de a por b ;
24. $\text{grau}\{\dot{a}(z)\}$ simboliza o grau do polinômio $\dot{a}(z)$;
25. \mathbf{I}_K simboliza a matriz identidade de tamanho $K \times K$;
26. \mathbf{J}_K simboliza a matriz de deslocamento de tamanho $K \times K$ definida por

$$\mathbf{J}_K \underset{(K \times K)}{\triangleq} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

27. $\tilde{\mathbf{I}}_K$ simboliza a matriz dada por

$$\tilde{\mathbf{I}}_K \underset{(K \times K)}{\triangleq} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

28. $\mathcal{C}\{\cdot\}$ simboliza o espaço gerado pelas colunas da matriz em questão. Ex.:
 $\mathcal{C}\{\mathbf{A}\}$ simboliza o espaço gerado pelas colunas de \mathbf{A} ;
29. $\mathcal{R}\{\cdot\}$ simboliza o espaço gerado pelas linhas da matriz em questão. Ex.:
 $\mathcal{R}\{\mathbf{A}\}$ simboliza o espaço gerado pelas linhas de \mathbf{A} ;
30. $\mathcal{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}(\mathbf{B})$ representa a projeção ortogonal dos vetores dados pelas linhas de \mathbf{B} no espaço gerado pelas linhas de \mathbf{A} . A matriz resultante deste operador contém os vetores projetados (resultantes) em suas linhas;
31. \mathbb{N} representa o conjunto dos números naturais;
32. \mathbb{Z} representa o conjunto dos números inteiros;
33. \mathbb{R} representa o conjunto dos números reais;

34. \mathbb{C} representa o conjunto dos números complexos;

35. $\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_K)$ simboliza uma matriz quadrada diagonal com $\sigma_1, \dots, \sigma_K$ na sua diagonal, isto é

$$\text{diag}_{(K \times K)}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_K) \triangleq \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_K \end{bmatrix};$$

36. A matriz

$$\begin{bmatrix} a(k) & \cdots & a(k+P-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ a(k-K+1) & & \end{bmatrix}$$

representa

$$\begin{bmatrix} a(k) & a(k+1) & \cdots & a(k+P-1) \\ a(k-1) & a(k) & & a(k+P-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(k-K+1) & a(k-K+2) & \cdots & a(k-K+P) \end{bmatrix};$$

37. A matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(k) & \cdots & \mathbf{a}(k+P-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{a}(k-K+1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}$$

representa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(k) & \mathbf{a}(k+1) & \cdots & \mathbf{a}(k+P-1) \\ \mathbf{a}(k-1) & \mathbf{a}(k) & & \mathbf{a}(k+P-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}(k-K+1) & \mathbf{a}(k-K+2) & \cdots & \mathbf{a}(k-K+P) \end{bmatrix};$$

38. $\text{sp}\{\mathbf{a}(k), \dots, \mathbf{a}(k-K+1)\}$ representa o espaço gerado pelos vetores $\mathbf{a}(k), \dots, \mathbf{a}(k-K+1)$;

39. $\text{sp}\{\mathbf{A}(k), \dots, \mathbf{A}(k-K+1)\}$ representa o espaço gerado pelas matrizes $\mathbf{A}(k), \dots, \mathbf{A}(k-K+1)$.

Acrônimos

2D Duas dimensões

3D Três dimensões

ADSL *Assimetric Digital Subscriber Line*

AR Autoregressivo (*autoregressive*)

CMOE Energia de saída mínima e restringida (*constrained minimum output energy*)

CMP Ponto médio comum (*common-midpoint*)

DMO Sobretempo de mergulho (*dip moveout*)

FIR Reposta ao impulso finita (*finite impulse response*)

ICA Análise em componentes independentes (*independent component analysis*)

JLSS Suavização por mínimos quadrados conjunta (*joint least squares smoothing*)

LP Predição linear (*linear prediction*)

LSS Suavização por mínimos quadrados (*least squares smoothing*) LSS - (*least squares smoothing*)

LVL Camada de baixa velocidade (*low velocity layer*)

MIMO Múltiplas entradas e múltiplas saídas (*multiple-input multiple-output*)

MISO Múltiplas entradas e uma saída (*multiple-input single-output*)

MMSE Mínimo erro médio quadrático (*minimum mean square error*)

MSLP Predição linear de múltiplos estágios (*Multi-step Linear Prediction*)

NMO Sobretempo normal (*normal moveout*)

NRMSE Raiz do erro médio quadrático normalizado (*normalized root mean square error*)

OP Projeções oblíquas (*oblique projections*)

OPD Decomposição em produto externo (*outer-product decomposition*)

PEF Filtro preditor de erro (*prediction error filter*)

PF Filtro preditor (*prediction filter*)

PSD Densidade espectral de potência (*power spectral density*)

SCM Casamento de subcanais (*subchannel matching*)

SIMO Uma entrada e múltiplas saídas (*single-input multiple-output*)

SISO Uma entrada e uma saída (*single-input single-output*)

SNR Relação sinal-ruído (*signal-to-noise ratio*)

SSM Método dos subespaços (*subspace method*)

TLS Mínimos quadrados totais (*total least squares*)

TXK Tong-Xu-Kailath

ZF Forçador de zeros (*zero forcing*)

Lista de Figuras

1.1	Elementos básicos de um sistema de comunicação digital.	4
1.2	Onda-P (a) e Onda-S (b) (SHERIFF; GELDART, 1995).	9
1.3	Espalhamento geométrico (SHERIFF; GELDART, 1995).	10
1.4	Ondas geradas em uma interface sólido-sólido por uma onda-P incidente (SHERIFF; GELDART, 1995).	12
1.5	Agrupamento de ponto médio comum.	13
1.6	Sobretempo normal.	13
1.7	Alcance das velocidades de propagação de ondas-P em diferentes tipos de rocha (SHERIFF; GELDART, 1995). Dados de (1)-(GRANT; WEST, 1965);(2)-(KEAREY; BROOKS, 1984);(3)-(LINDSETH, 1979);(4)-(MARES, 1984);(5)-(SHARMA, 1976);(6)-(SHERIFF; GELDART, 1983); e (7)-(WATERS, 1987).	15
1.8	Hidrofones. (a) Hidrofone em formato de disco e (b) cancelamento da aceleração (SHERIFF; GELDART, 1995).	23
1.9	Perfil sísmico final após processamento e migração.	24
1.10	Exemplos de linhas sísmicas (SHERIFF; GELDART, 1995).	25

1.11	Tipos de lanço. (a) Lanço simétrico, (b) lanço simétrico com lacuna, (c) lanço lateral, (d) lanço lateral com lacuna, (e) lanço com tiro lateral T, (f) lanço com tiro lateral L e (g) lanço cruzado (SHERIFF; GELDART, 1995).	27
1.12	Método do ponto médio comum (SHERIFF; GELDART, 1995).	29
1.13	Detonação periférica (SHERIFF; GELDART, 1995).	32
2.1	Sistema SIMO FIR.	50
4.1	Casamento de subcanais.	125
4.2	Projeção de $\check{\mathbf{X}}(k+i)$, para $i = 0, \dots, M-1$, em \mathcal{Z} (ZHAO; TONG, 1999).	136
4.3	Isomorfismo entre os subespaços de entrada e de saída (ZHAO; TONG, 1999).	138
4.4	Projeção oblíqua: a projeção oblíqua de \mathbf{y} em $\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}$ ao longo de $\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}$ é representada por $\mathbf{y}_{\mathcal{Z}_{\mathbf{R}} \mathcal{Z}_{\mathbf{N}}}$ (YU; TONG, 2001).	156
4.5	Decomposição da matriz de dados atuais $\mathbf{C}(k)$ (YU; TONG, 2001).	158
4.6	Subespaços de sinal e de interferência (YU; TONG, 2001).	159
4.7	Interferências do sistema e da entrada por projeções (YU; TONG, 2001).	162
5.1	Estimativas do sinal de entrada $s(k)$. Comparação entre os experimentos A.01 e A.02, realizados com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco e $N = 1000$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco respectivamente.	186
5.2	Estimativa do sistema SIMO FIR \mathbf{H} . Comparação entre os experimentos A.01 e A.02, realizados com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco e $N = 1000$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco respectivamente.	187

5.3	Estimativas do sinal de entrada $s(k)$. Comparação entre os experimentos A.03 e A.05, realizados com $N = 200$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ branco e $N = 200$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ branco respectivamente.	188
5.4	Estimativa do sistema SIMO FIR \mathbf{H} . Comparação entre os experimentos A.03 e A.05, realizados com $N = 200$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ branco e $N = 200$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ branco respectivamente.	189
5.5	Estimativa do sinal de entrada $s(k)$. Comparação entre os experimentos A.01 e A.07, realizados com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco e $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ colorido respectivamente.	191
5.6	Estimativa do sistema SIMO FIR \mathbf{H} . Comparação entre os experimentos A.01 e A.07, realizados com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco e $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ colorido respectivamente.	192
5.7	Sistema SIMO FIR amostrado a 2 ms e 4 ms.	194
5.8	Estimativa do sinal de entrada $s(k)$. Comparação entre os experimentos H.01 e J.01, realizados com taxas de amostragem de 4 ms e 2 ms respectivamente	196
5.9	Estimativa do sistema SIMO FIR \mathbf{H} . Comparação entre os experimentos H.01 e J.01, realizados com taxas de amostragem de 4 ms e 2 ms respectivamente	197
5.10	Comparação entre as estimativas do sinal de entrada determinístico $s(k)$ dos algoritmos LP-ZF e WIENER-MMSE-SISO, para 18 dB de relação sinal-ruído.	198
5.11	Realizações de $\mathbf{x}(k)$ utilizadas para a simulação do experimento H.01, a 18 dB de relação sinal-ruído.	199

5.12	Estimativa do sinal de entrada determinístico $s(k)$ pelo algoritmo LP-ZF, para 18 dB de relação sinal-ruído.	200
5.13	Estimativa do sinal de entrada determinístico $s(k)$ pelo algoritmo WIENER-MMSE-SISO, para 18 dB de relação sinal-ruído.	201
5.14	Estimativas de \mathbf{H} obtidas para uma realização do experimento H.01 com relação sinal-ruído de 18 dB, para os algoritmos MSLP e WIENER, comparadas com \mathbf{H} original.	202
D.1	Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos A.01 a A.12.	220
D.2	Filtro utilizado para gerar o sinal de entrada $s(k)$ colorido dos experimentos A.07 a A.12, B.05 a B.08, E.05 a E.08, G.05 a G.08 e I.05 a I.07.	221
D.3	Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos B.01 a B.08 e C.01 a C.04.	223
D.4	Perfil de poço utilizado para geração de entrada sintética determinística dos experimentos C.01 a C.04 e D.01 a D.03.	224
D.5	Entrada $s(k)$ determinística gerada a partir de filtro passa-baixas e reamostragem de perfil de poço, utilizada para os experimentos C.01 a C.04 e F.01 a F.04.	224
D.6	Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos D.01 a D.03.	226
D.7	Entrada $s(k)$ determinística gerada a partir de filtro passa-baixas e reamostragem de perfil de poço, utilizada para os experimentos D.01 a D.03 e H.01 a H.03.	226
D.8	Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos E.01 a E.03, E.05 a E.07 e F.01 a F.04.	228

D.9 Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos G.01 a G.08 e H.01 a H.04.	230
D.10 Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos I.01 a I.03, I.05 a I.07 e J.01 a J.03.	230
D.11 Entrada $s(k)$ determinística gerada a partir de filtro passa-baixas e reamostragem de perfil de poço, utilizada para os experimentos J.01 a J.03.	231
D.12 Experimento A.01, realizado com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco.	232
D.13 Experimento A.02, realizado com $N = 1000$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco.	233
D.14 Experimento A.03, realizado com $N = 200$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ branco.	234
D.15 Experimento A.04, realizado com $N = 1000$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ branco.	235
D.16 Experimento A.05, realizado com $N = 200$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ branco.	236
D.17 Experimento A.06, realizado com $N = 1000$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ branco.	237
D.18 Experimento A.07, realizado com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ colorido.	238
D.19 Experimento A.08, realizado com $N = 1000$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ colorido.	239
D.20 Experimento A.09, realizado com $N = 200$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ colorido.	240

D.21 Experimento A.10, realizado com $N = 1000$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ colorido.	241
D.22 Experimento A.11, realizado com $N = 200$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	242
D.23 Experimento A.12, realizado com $N = 1000$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	243
D.24 Experimento B.01, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ branco.	244
D.25 Experimento B.02, realizado com $N = 330$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ branco.	245
D.26 Experimento B.03, realizado com $N = 330$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ branco.	246
D.27 Experimento B.05, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	247
D.28 Experimento B.06, realizado com $N = 330$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	248
D.29 Experimento B.07, realizado com $N = 330$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ colorido.	249
D.30 Experimento C.01, realizado com $N = 144$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	250
D.31 Experimento C.02, realizado com $N = 144$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	251
D.32 Experimento C.03, realizado com $N = 144$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	252

D.33 Experimento C.04, realizado com $N = 144$, $M = 47$ (superestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	253
D.34 Experimento D.01, realizado com $N = 582$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	254
D.35 Experimento D.02, realizado com $N = 582$, $M = 100$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	255
D.36 Experimento D.03, realizado com $N = 582$, $M = 125$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	256
D.37 Experimento E.01, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ branco.	257
D.38 Experimento E.02, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ branco.	258
D.39 Experimento E.03, realizado com $N = 330$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ branco.	259
D.40 Experimento E.05, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	260
D.41 Experimento E.06, realizado com $N = 330$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	261
D.42 Experimento E.07, realizado com $N = 330$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ colorido.	262
D.43 Experimento F.01, realizado com $N = 144$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	263
D.44 Experimento F.02, realizado com $N = 144$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	264

D.45 Experimento F.03, realizado com $N = 144$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	265
D.46 Experimento F.04, realizado com $N = 144$, $M = 47$ (superestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	266
D.47 Experimento G.01, realizado com $N = 500$, $M = 15$ (subestimado), $s(k)$ branco.	267
D.48 Experimento G.02, realizado com $N = 500$, $M = 25$ (subestimado), $s(k)$ branco.	268
D.49 Experimento G.03, realizado com $N = 500$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ branco.	269
D.50 Experimento G.04, realizado com $N = 500$, $M = 90$ (exato), $s(k)$ branco.	270
D.51 Experimento G.05, realizado com $N = 500$, $M = 15$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	271
D.52 Experimento G.06, realizado com $N = 500$, $M = 25$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	272
D.53 Experimento G.07, realizado com $N = 500$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	273
D.54 Experimento G.08, realizado com $N = 500$, $M = 90$ (exato), $s(k)$ colorido.	274
D.55 Experimento H.01, realizado com $N = 582$, $M = 15$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	275
D.56 Experimento H.02, realizado com $N = 582$, $M = 25$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	276

D.57 Experimento H.03, realizado com $N = 582$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	277
D.58 Experimento H.04, realizado com $N = 582$, $M = 90$ (exato), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	278
D.59 Experimento I.01, realizado com $N = 1000$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ branco.	279
D.60 Experimento I.02, realizado com $N = 1000$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ branco.	280
D.61 Experimento I.03, realizado com $N = 1000$, $M = 100$ (subesti- mado), $s(k)$ branco.	281
D.62 Experimento I.05, realizado com $N = 1000$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	282
D.63 Experimento I.06, realizado com $N = 1000$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ colorido.	283
D.64 Experimento I.07, realizado com $N = 1000$, $M = 100$ (subesti- mado), $s(k)$ colorido.	284
D.65 Experimento J.01, realizado com $N = 1163$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	285
D.66 Experimento J.02, realizado com $N = 1163$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	286
D.67 Experimento J.03, realizado com $N = 1163$, $M = 100$ (subesti- mado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).	287

Lista de Tabelas

1.1	Hipóteses básicas dos algoritmos de processamento de dados sísmicos.	38
1.2	Comparação entre os problemas de equalização em comunicações digitais e deconvolução em processamento de dados sísmicos.	48
5.1	Comparação entre os algoritmos de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR apresentados (parte 1).	178
5.2	Comparação entre os algoritmos de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR apresentados (parte 2).	179
5.3	Comparação entre os algoritmos de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR apresentados (parte 3).	180
D.1	Resumo de todos os experimentos realizados.	219

Capítulo 1

Introdução aos Problemas de Equalização e Deconvolução

As áreas de processamento de dados sísmicos e de comunicação digital, muito embora tenham grandes semelhanças matemáticas, atualmente pouco se relacionam de forma técnico-científica. Esta dissertação se propõem a reduzir esta distância explorando para isso um problema similar em ambas as áreas, a deconvolução de dados sísmicos e a equalização de sistemas de comunicação digitais. Para isso inicialmente neste primeiro capítulo exploramos ambas as áreas de forma breve, com um leve aprofundamento na sismologia para exploração de petróleo. Em seguida o Capítulo 2 apresenta o problema de identificação e inversão cega de sistemas de uma entrada e múltiplas saídas (*single-input multiple-output*, SIMO) com resposta ao impulso finita (*finite impulse response*, FIR), uma área recentemente explorada em comunicações digitais e com potenciais aplicações em processamento de dados sísmicos. Durante esta apresentação conceitos são introduzidos referentes a sistemas SIMO FIR e suas inversas, além de notações matemáticas que serão posteriormente utilizadas para desenvolvimentos de algoritmos para a solução do problema. Já o Capítulo 3 apresenta notações referentes às estatísticas de segunda ordem destes sistemas, o problema de inversão de mínimo erro médio quadrático (*minimum mean square error*, MMSE) e finalmente seis diferentes algoritmos para

identificação e inversão de sistemas SIMO FIR. O Capítulo 4 então apresenta algoritmos determinísticos, capazes de resolver o problema de forma perfeita, quando da ausência de ruído, apenas com um número finito de amostras da saída e sem a necessidade de hipóteses de estacionariedade sobre o sinal de entrada. Estas características, a convergência para um número finito de amostras e a hipótese do sinal determinístico especificamente, são únicas do problema SIMO, isto é, não são encontradas no problema de uma entrada e uma saída (*single-input single-output*, SISO). Finalmente no Capítulo 5 temos uma comparação entre os diversos algoritmos com relação a hipóteses utilizadas em seus modelos e algumas características que diferenciam seus desempenhos frente a situações diferentes. Ainda neste capítulo, temos a apresentação dos principais experimentos conduzidos e das figuras de mérito utilizadas como indicadores de desempenho dos diversos algoritmos. Comentários considerados mais relevantes referentes a estes resultados encontram-se ao final da descrição de cada experimento. O Capítulo 6 conclui a dissertação ressaltando resultados teóricos e práticos importantes levantados ao longo do texto e indicando frentes de pesquisa não tradicionais para a melhoria da resolução do sinal sísmico utilizando os modelos SIMO e seus algoritmos de identificação e inversão cega.

Mais especificamente, este primeiro capítulo tem como objetivo situar o leitor nas duas áreas e posteriormente expor as semelhanças e diferenças entre dois problemas similares e altamente relacionados:

1. Equalização de canal em *sistemas de comunicação digital*;
2. Deconvolução em *processamento de dados sísmicos*.

Para tal, primeiramente, uma breve contextualização dos dois problemas em suas respectivas áreas é apresentado, e no caso da deconvolução em processamento de dados sísmicos, os conceitos básicos são descritos. Em seguida, nuances específicas e possibilidades de cada um dos problemas são apresentadas, criando assim caminho para a posterior introdução do problema de deconvolução visto sobre

uma abordagem diferente da usual, apresentada nos capítulos subseqüentes.

1.1 Sistemas de comunicação digital

Sistemas de comunicação digital são sistemas de transmissão de informação, normalmente bits, entre dois elementos: o transmissor e o receptor. É importante ressaltar que sua função é única: *levar informação digital de um ponto, o transmissor, a outro ponto, o receptor*. Apesar disso, diversas variantes existem pois o número de transmissores, o número de receptores, suas localizações e as exigências quanto à integridade das informações transmitidas são altamente variáveis, principalmente de acordo com a aplicação.

Por exemplo, em um sistema de televisão digital tem-se um transmissor, a estação de transmissão da rede de televisão, e vários receptores, os aparelhos de televisão. Neste caso há comunicação apenas em um sentido, pelo menos a princípio, e a mesma é feita de um ponto para muitos. Além disso, a perda de informação por alguns segundos não é vista como catastrófica se comparada com a perda de 1 bit em um arquivo de computador, pois uma interrupção na transmissão de um programa de televisão por alguns poucos segundos é perfeitamente aceitável, desde que a frequência de ocorrência deste evento seja relativamente baixa. Assim, um sistema de comunicação digital projetado para este problema deve levar em conta estes fatos, tornando-o extremamente diferente de outros sistemas de comunicação digital.

Já em um sistema de comunicação como o *Asymmetric Digital Subscriber Line* (ADSL), que utiliza o par trançado de linhas telefônicas para transmissão e recepção de dados, existe comunicação nos dois sentidos. Ambos os pontos de comunicação, o da casa do assinante e o da empresa provedora do serviço, são transmissores e receptores. Por outro lado, o tipo de informação que circula em um sistema de comunicação digital como este não é mais necessariamente o mesmo dos sistemas de televisão digital. Podem por aqui circular também arquivos de

1.1. SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL

computador ou outras informações que não admitem os graus de perda do sistema de televisão digital. Desta forma, o sistema de comunicação digital pode e utiliza os fatos de se ter transmissão nos dois sentidos e existirem apenas dois pontos envolvidos na comunicação.

Muitas outras variantes, que aqui não podem ser abordadas devido à sua abrangência, existem. Para os leitores mais interessados é sugerido o estudo de (HAYKIN, 2001) e (PROAKIS, 2001).

Mais precisamente, um sistema de comunicação digital é normalmente dividido em grandes elementos básicos de forma a tornar o sistema tratável e implementável. Tais blocos, para um sistema com apenas um transmissor e um receptor, podem ser observados na Figura 1.1 (PROAKIS, 2001).

A equalização, assunto deste texto, tem o objetivo de *inverter* o efeito do canal, um dos grandes elementos básicos de um sistema de comunicação digital, no sinal de comunicação e pode estar em um ou em ambos os blocos de modulação e demodulação digitais. O estudo da transmissão e recepção de sinais de comunicação é normalmente feito de forma analógica, no domínio contínuo do tempo, devido à necessidade de se modelar efeitos analógicos do sistema de comunicação. No entanto, nos casos que serão abordados nesta dissertação, o problema de equalização não precisa de uma formulação analógica. Por isso todas as equações a seguir tratam do

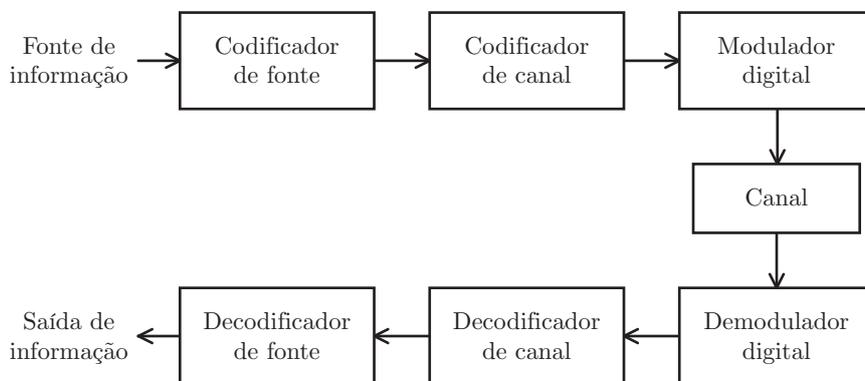


Figura 1.1: Elementos básicos de um sistema de comunicação digital.

1.1. SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL

problema puramente discreto apenas e fogem um pouco da notação tradicional que utiliza k como uma variável contínua de tempo, substituindo-a por um k discreto. Assim, matematicamente tem-se

$$x(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)h(k-m) + n(k) \quad (1.1)$$

onde $x(k)$ é o sinal discreto recebido, $s(k)$ é o sinal discreto transmitido, $h(k)$ é a resposta discreta ao impulso do canal de comunicação e $n(k)$ é o ruído aditivo discreto. Repare que neste modelo a resposta impulsional do canal é invariante com o tempo k . Isto não é verdade quando analisamos um período de tempo muito longo, mas quase sempre esta hipótese pode ser utilizada para intervalos de tempo curto, e assim o é na grande maioria dos sistemas de comunicação digitais. O sinal transmitido deve então ser montado de forma a transmitir uma sequência de símbolos, no caso $\check{s}(n)$. Uma possível solução, denominada em comunicações digitais de modulação por amplitude do pulso (*pulse amplitude modulation*, PAM), constrói no domínio do tempo k o sinal transmitido discreto $s(k)$ a partir de um pulso discreto básico $p(k)$ (com duração L e $p(k) = 0$ para $k < 0$ e $k \geq L$) e de uma sequência discreta de símbolos para transmissão $\check{s}(n)$, conforme

$$s(k) = \check{s} \left(\left\lfloor \frac{k}{L} \right\rfloor \right) p(k \bmod L) \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

É fácil perceber que a taxa de $s(k)$ é L vezes maior que a taxa de $\check{s}(n)$. Conforme já foi dito anteriormente esta não é a notação usual da área de comunicações digitais como um todo. Mas aqui é utilizada por aparecer com frequência na parte de comunicações digitais que trata especificamente de sistemas de uma entrada e múltiplas saídas e de múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Neste momento uma pequena ressalva deve ser feita. Em sistemas de comunicação digital o problema de equalização pode ser visto de duas maneiras diferentes. A primeira é a equalização pura do canal, que procura simplesmente inverter o efeito do canal discreto $h(k)$ e por isso obter uma estimativa de $s(k)$, o sinal discreto transmitido. A segunda é a equalização para obtenção de uma estimativa da sequência de símbolos $\check{s}(n)$, que inverte o efeito do canal discreto $h(k)$ junta-

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

mente com o efeito do pulso conformador discreto $p(k)$ e outros possíveis efeitos convolucionais presentes entre a sequência de símbolos realmente transmitida e a sequência de símbolos estimada. São problemas diferentes porém similares.

Logo, equalizar o canal discreto $h(k)$ pode significar criar um filtro discreto $f_i(k)$ que seja capaz de recuperar o sinal discreto transmitido $s(k)$ com um atraso i , isto é, que realize

$$s(k - i) \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_i(k - m) \sum_{l=-\infty}^{\infty} s(l)h(m - l) + n(m) \text{ para } k \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

ou pode significar criar um sistema capaz de recuperar a sequência de símbolos de entrada $\check{s}(n)$ diretamente.

As abordagens mais utilizadas para a solução deste problema estão baseadas na teoria de Wiener, para sistemas onde a entrada é conhecida. De forma simples e resumida o sistema de comunicação digital é projetado de forma que exista um período de treinamento do equalizador, o sistema inverso, a partir de um sinal de entrada conhecido que pode ser comparado com o sinal de saída. Esta comparação é utilizada para alterar o sistema, de forma dinâmica, até que o mesmo venha a convergir para o sistema inverso. Descrições mais detalhadas podem ser encontradas em (DINIZ, 2002). Passemos agora para o problema de deconvolução em problemas de processamento de dados sísmicos.

1.2 Processamento de dados sísmicos

Processamento de dados sísmicos é uma disciplina da geofísica que tem como principal objetivo a *visualização de feições geológicas na subsuperfície da terra através da diferença de parâmetros de elasticidade entre camadas*. Muitas são as razões para se utilizar as técnicas de processamento de dados sísmicos, sendo a mais usual para a localização de possíveis reservatórios de petróleo e gás natural. Mais que isso, as técnicas de processamento de dados sísmicos são o *principal método de prospecção de petróleo*, sendo seu produto combinado com informações provenientes

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

de outras técnicas. Atualmente, os métodos de processamento de dados sísmicos podem ser divididos em duas grandes áreas (CAMBOIS, 1991) (a) métodos geofísicos tradicionais, que resolvem o problema em diversas e pequenas etapas de processamento e (b) métodos de inversão direta dos dados que procuram resolver tudo em um único e complexo algoritmo, utilizando para isso um rigoroso tratamento dos dados através de complicada modelagem matemática dos fenômenos físicos. Muito embora as modelagens de (b) sejam extremamente rígidas, elas acabam sempre por esbarrar nos limites da quantidade de dados disponíveis já que o problema de processamento de dados sísmicos é estritamente um problema mal condicionado. Segundo (CAMBOIS, 1991) tais abordagens acabam sempre necessitando de algum tipo de pré-processamento, voltando por fim ao problema inicial de (a), o que de certa forma significa dividir o processamento em pequenas etapas. Duas ótimas referências para esta disciplina são (SHERIFF; GELDART, 1995) e (YILMAZ, 2001). Já uma visão histórica das origens do processamento de dados sísmicos e das suas ligações com a área de processamento de sinais é apresentada em (ROBINSON, 1997).

Nesta seção serão rapidamente apresentados os experimentos para aquisição de dados sísmicos, as etapas de processamento de dados sísmicos tradicionais e o porquê da utilização da deconvolução como um dos algoritmos base para todo o processamento de dados sísmicos.

1.2.1 Sismologia de exploração e o experimento sísmico

A sismologia de exploração está fortemente calcada na sismologia, a ciência que estuda a propagação das ondas sísmicas no interior da terra. Para a exploração de petróleo a aquisição de dados sísmicos, um experimento prático, é a fonte primária de dados deste tipo de estudo. Neste experimento excita-se o sistema, a terra, com uma fonte emissora de onda sísmica (uma onda mecânica), e por fim medem-se as saídas com sensores. O meio, a terra, responde a essa fonte devido às suas características elásticas, e as saídas do sistema dependem dos parâmetros de elasticidade das rochas que compõem as camadas da terra.

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

Ondas sísmicas

Ondas sísmicas, as ondas utilizadas para este tipo de experimento, possuem *três formas de propagação independentes* quando se propagando em meios isotrópicos (meios com suas propriedades elásticas independentes da direção de propagação) e estas são, por razões históricas, chamadas de *ondas primárias* (ondas-P) e *ondas secundárias* horizontais e verticais (ondas-SH e ondas-SV), ou mais comumente ondas secundárias apenas (ondas-S). Ondas-P se propagam pela compressão e posterior descompressão do meio e por isso são também conhecidas como *ondas compressionais*. Ondas-S, por outro lado, se propagam pelo cisalhamento no meio e por isso só existem em meios sólidos. São também conhecidas como *ondas cisalhantes*.

A direção de propagação das ondas-P é a da própria compressão e a direção de propagação das ondas-S é ortogonal ao plano de cisalhamento, composto pelas componentes horizontal e vertical da onda sísmica cisalhante. Exemplos de uma onda-P e uma onda-S estão na Figura 1.2. Tais ondas estão sujeitas à lei de Snell, mesma lei de reflexão e refração de outros tipos de onda, com os agravantes (a) da possível conversão, nas interfaces de reflexão, de ondas-P em ondas-S e vice-versa e (b) da variação da velocidade de propagação das ondas-P e ondas-S tanto em meios iguais como diferentes. O método mais eficiente de se conseguir informações precisas sobre as camadas da terra é o da *sísmica de reflexão*, alvo desta seção e que será explicada a seguir. Outro tipo de experimento sísmico, baseado nos princípios da refração, a *sísmica de refração*, também existe mas é secundário e de usos mais restritos.

A teoria de elasticidade de materiais é a base para as equações de ondas sísmicas, sendo ela quem prevê a existência tanto das ondas-P como das ondas-S. Com ela é possível prever alguns dos tipos de *onda superficial*: ondas Rayleigh, ondas Stoneley, ondas Love e ondas Tubulares. Segundo (DUARTE, 2003) uma onda superficial é uma “onda dispersiva que viaja paralelamente às camadas superiores do solo, caracterizada pela baixa velocidade, baixa frequência e grande amplitude.”

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

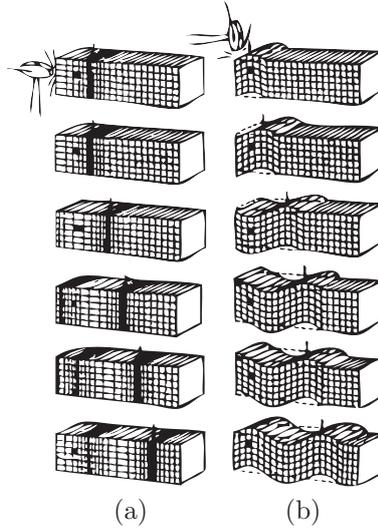


Figura 1.2: Onda-P (a) e Onda-S (b) (SHERIFF; GELDART, 1995).

Estas ondas são prejudiciais ao experimento da sismica de reflexão pois mascaram as ondas resultantes das reflexões primárias das interfaces da terra, as reflexões que devem ser visualizadas. Sendo assim, um dos objetivos do processamento de dados sísmicos é cancelar seu efeito nos sinais resultantes.

Outros problemas previstos nas equações de onda que o processamento de dados sísmicos deve contornar são o *espalhamento geométrico* (Figura 1.3) e as *perdas por absorção*. A atenuação da onda sísmica devido à expansão da frente de onda recebe o nome de espalhamento geométrico. No caso de uma frente de onda esférica a perda de energia acontece proporcionalmente ao quadrado da distância percorrida pela onda. Já as perdas por absorção acontecem principalmente devido à transformação da energia cinética da onda sísmica em calor.

Reflexão e refração em interfaces

A partir das equações de onda também é possível prever o particionamento da onda sísmica em uma interface entre dois meios, dados os parâmetros de elasticidade de cada um deles. Tais parâmetros são a velocidade da onda-P no meio

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

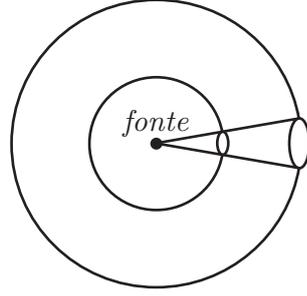


Figura 1.3: Espalhamento geométrico (SHERIFF; GELDART, 1995).

α , a velocidade da onda-S no meio β , e a densidade do meio ρ . As equações que prevêm o particionamento na interface são: a lei de Snell (1.4) para determinar os ângulos; e as equações de Zoeppritz (1.5 a 1.8) para determinar as amplitudes. São elas (Figura 1.4) (SHERIFF; GELDART, 1995):

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\alpha_1} = \frac{\text{sen } \delta_1}{\beta_1} = \frac{\text{sen } \theta_2}{\alpha_2} = \frac{\text{sen } \delta_2}{\beta_2}, \quad (1.4)$$

$$(-A_0 + A_1) \cos \theta_1 - B_1 \text{sen } \delta_1 = -A_2 \cos \theta_2 - B_2 \text{sen } \delta_2, \quad (1.5)$$

$$(A_0 + A_1) \text{sen } \theta_1 + B_1 \cos \delta_1 = A_2 \text{sen } \theta_2 - B_2 \cos \delta_2, \quad (1.6)$$

$$(A_0 + A_1) Z_1 \cos 2\delta_1 - B_1 W_1 \text{sen } 2\delta_1 = A_2 Z_2 \cos 2\delta_2 + B_2 W_2 \text{sen } 2\delta_2 \quad (1.7)$$

e

$$\begin{aligned} & (-A_0 + A_1) \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right) W_1 \text{sen } 2\theta_1 + B_1 W_1 \cos 2\delta_1 \\ & = -A_2 \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) W_2 \text{sen } 2\theta_2 + B_2 W_2 \cos 2\delta_2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde A_0 é a amplitude da onda-P incidente com um ângulo θ_1 em uma superfície plana separando o meio 1 do meio 2, ρ_n é a densidade do meio n , α_n é a velocidade de ondas-P no meio n , e β_n a velocidade de ondas-S no meio n . A_1 é a amplitude da onda-P refletida com ângulo θ_1 , B_1 é a amplitude da onda-S gerada no meio 1 com ângulo δ_1 , A_2 é a amplitude da onda-P refratada para o meio 2 com ângulo θ_2 e B_2 é a amplitude da onda-S gerada no meio 2 com ângulo δ_2 .

O conceito de impedância acústica aparece nas equações de Zoeppritz sendo similar ao conceito de impedância em linhas de transmissão elétrica. A impedância

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

acústica de uma onda-P é dada por $Z = \rho\alpha$ e a impedância acústica de uma onda-S é dada por $W = \rho\beta$. Com elas é possível determinar o quanto de energia é refletida e o quanto não é quando uma onda-P ou uma onda-S atingem uma interface perpendicularmente.

Refletores horizontais e com mergulho

A principal hipótese na qual todo o processamento de dados sísmicos se baseia é a do modelo de terra em camadas, onde se supõem que a terra é composta de camadas de rochas praticamente planas. Isto é verdade em muitos locais onde o modo de formação do solo se deu em etapas regulares, sem maiores eventos geológicos. Em alguns locais isto não é verdade e esta é talvez a principal limitação dos métodos tradicionais de processamento de dados sísmicos. Este modelo em camadas, que na maioria das vezes se confirma nas sísmicas sendo processadas, permite algumas interpretações rápidas diretamente dos dados sísmicos brutos.

Para que isso se torne intuitivo para as pessoas envolvidas com tais processamentos, o comportamento de feições comuns como refletores horizontais ou quase horizontais com camadas com velocidade constante em *agrupamentos de ponto médio comum* (*common-midpoint-gather*) e *agrupamentos de fonte comum* (*common-source-gather*) são estudados de forma analítica. Um agrupamento de ponto médio comum (Figura 1.5) é um agrupamento de traços sísmicos, também chamados de gravações, onde todos os traços possuem o mesmo ponto médio entre a posição da fonte e o grupo de receptores. Isto ficará mais claro na descrição do método de *ponto médio comum* (*common-midpoint*, CMP). Já um agrupamento de fonte comum é um agrupamento de traços com mesma fonte. Ao analisarem-se estes dois casos é que se prevê a forma hiperbólica que é mapeada nos agrupamentos de ponto médio comum e de fonte comum, por um refletor horizontal no caso de velocidade constante (Figura 1.6). Ao tempo de atraso adicional que um refletor horizontal leva para aparecer no sinal sísmico quando seu afastamento não é zero dá-se o nome de *sobretempo normal* (*normal moveout*, NMO). A forma hi-

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

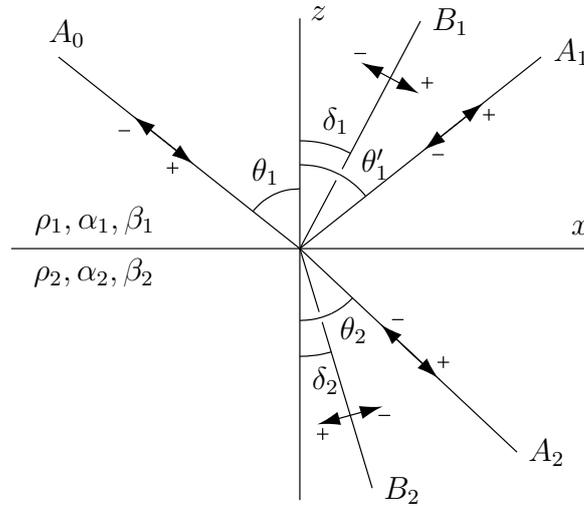


Figura 1.4: Ondas geradas em uma interface sólido-sólido por uma onda-P incidente (SHERIFF; GELDART, 1995).

perbólica pode ser facilmente entendida constatando-se que quando o afastamento tende para infinito, o tempo de aparição do evento correspondente a este refletor horizontal tende para o afastamento vezes a velocidade, que não é nada mais que o tempo de propagação de uma onda direta. Conforme este refletor horizontal se inclina outro efeito no agrupamento de fonte comum acontece, recebendo este o nome de *sobretempo de mergulho* (*dip moveout*, DMO). Tal efeito não aparece no agrupamento de ponto médio comum.

Velocidade sísmica

Como já foi dito anteriormente a velocidade sísmica varia ao longo da terra tanto em profundidade como com o *afastamento lateral* (*offset*). O estudo e a estimação da velocidade são imprescindíveis para a localização real dos eventos sísmicos da terra pois as medidas obtidas estão relacionadas aos tempos de chegada do sinal e o que se deseja é a posição real dos eventos. O comportamento normal da velocidade é que ela se mantenha razoavelmente constante ao longo do afastamento lateral e aumente conforme a profundidade aumenta. Este fenômeno, de aumento

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

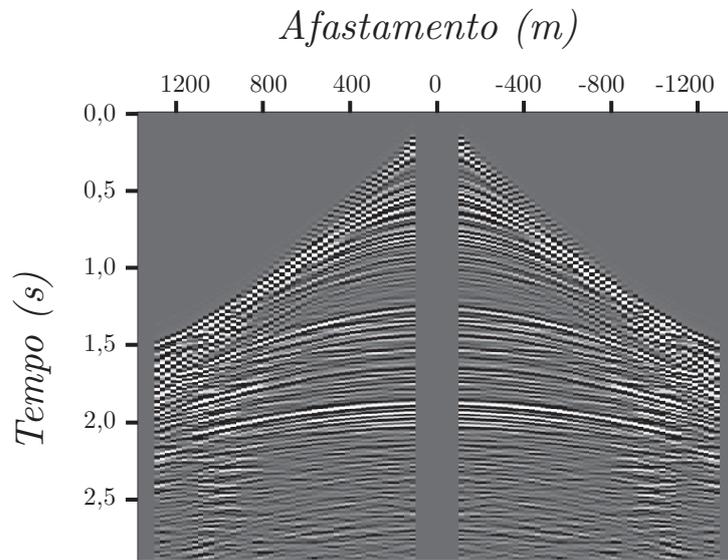


Figura 1.5: Agrupamento de ponto médio comum.

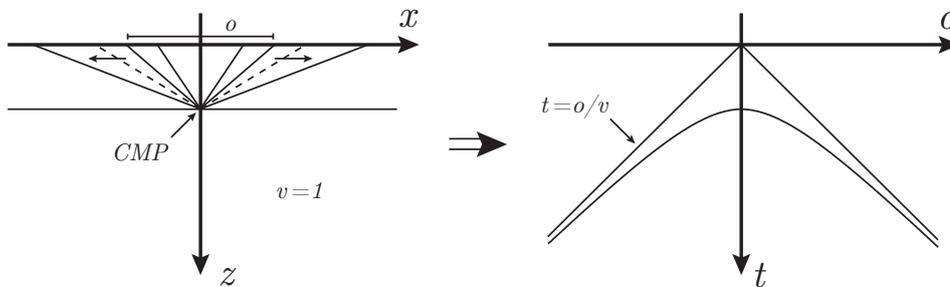


Figura 1.6: Sobretempo normal.

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

de velocidade conforme o aumento da profundidade se dá principalmente devido ao aumento de pressão conforme o aumento de profundidade. Mais precisamente, fatores que alteram a velocidade de propagação de ondas sísmicas nestas rochas são:

1. Litologia, isto é, o tipo de rocha, como pode ser visto na Figura 1.7;
2. Densidade;
3. Porosidade;
4. Profundidade de enterramento ou a pressão;
5. Idade da rocha;
6. Temperatura;
7. Fluido intersticial;
8. Freqüência do sinal sísmico.

Uma característica muito relevante para a aquisição de dados sísmicos com relação à velocidade de propagação é a chamada *camada de baixa velocidade* (*low velocity layer*, LVL) que normalmente está presente nos primeiros metros de solo e é caracterizada por velocidade de propagação de ondas-P abaixo de 1,5 km/s. Esta camada, devido a sua baixa velocidade, difrata os raios que a cruzam de forma muito intensa, diminuindo de forma considerável a energia da fonte que consegue penetrar nas camadas inferiores da terra e alterando os tempos de chegada das reflexões primárias nos receptores. Para atenuar seus efeitos na aquisição de dados sísmicos a fonte, sempre que possível, é enterrada a uma profundidade superior a da LVL. Para tornar seu efeito mais previsível a velocidade da LVL é medida através de métodos de sísmica de refração, sendo esta medida então usada como um dado auxiliar no posterior processamento e interpretação dos dados.

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

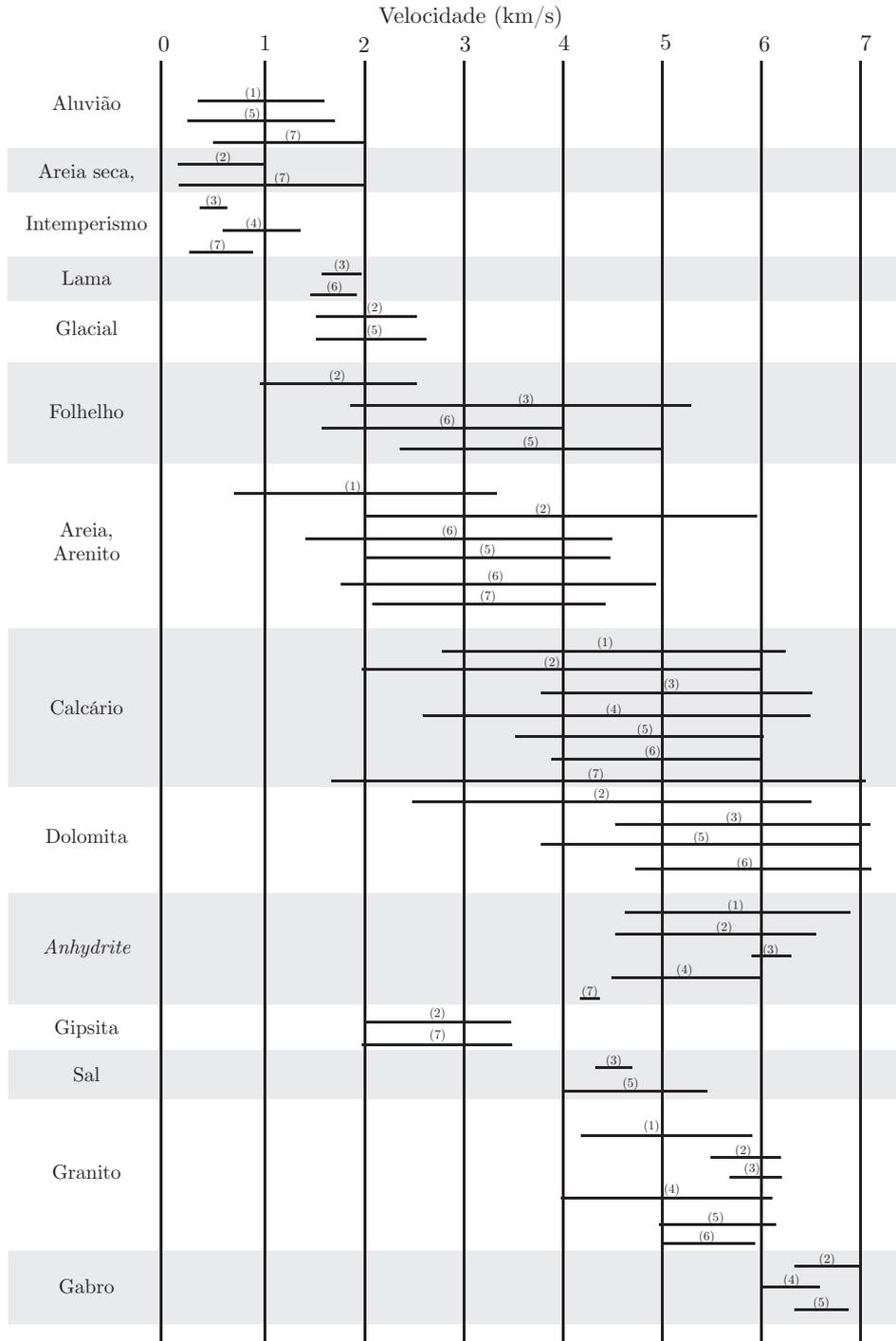


Figura 1.7: Alcance das velocidades de propagação de ondas-P em diferentes tipos de rocha (SHERIFF; GELDART, 1995). Dados de (1)-(GRANT; WEST, 1965);(2)-(KEAREY; BROOKS, 1984);(3)-(LINDSETH, 1979);(4)-(MARES, 1984);(5)-(SHARMA, 1976);(6)-(SHERIFF; GELDART, 1983); e (7)-(WATERS, 1987).

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

Já as velocidades de propagação das rochas abaixo da LVL são normalmente estimadas a partir dos próprios dados obtidos com a aquisição sísmica, algumas vezes com auxílio de dados de outras fontes. São elas (a) o testemunho e (b) os métodos *in situ*. O testemunho é a extração de amostras da rocha que possam ser analisadas em laboratório. Ele informa além da velocidade, diversos tipos de dados como porosidade, permeabilidade, densidade e tipo de rocha. Tem como principal limitação o fato da medição ser feita para uma determinada amostra apenas. Por outro lado a medição da velocidade de propagação por métodos *in situ* é mais precisa pois é medida diretamente nas condições locais de temperatura e pressão, sem os desgastes ocasionados pela retirada e transporte do testemunho. Os três métodos principais de medição *in situ* são:

1. Gerando um *tiro no poço*;
2. Traçando um *perfil sísmico vertical* (*vertical seismic profile*) de um poço;
3. Traçando um *perfil sônico* (*sonic log*) de um poço.

Muito embora todos sejam bastante eficientes, o custo de perfuração de um poço é extremamente alto e por isso a medição propriamente dita nunca é o motivo pelo qual o poço é aberto. Apesar disso, sempre que possível, um destes métodos é utilizado para gerar dados que auxiliem na calibração do modelo de velocidade da sísmica local. É interessante ressaltar que estes métodos geram o perfil de velocidade pela profundidade, o que não aparece linearmente nos traços sísmicos, que apresentam a resposta no tempo e por isso necessitam de uma conversão de tempo para profundidade. Por fim vale lembrar que um dos primeiros passos para exploração de petróleo é a sísmica, viabilizada anteriormente por estudos aprofundados de geólogos. Somente após muitos estudos dos dados adquiridos é que um poço é aberto.

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

Características de eventos sísmicos

Segundo (SHERIFF; GELDART, 1995) a “tarefa básica de interpretação de dados sísmicos é a de selecionar os eventos que representam reflexões primárias, traduzindo o tempo de chegada para estes eventos em profundidade e *mergulho* (*dip*), mapeando assim os refletores.” O processamento de dados sísmicos deve então maximizar as reflexões primárias e minimizar os outros efeitos contaminantes de forma a permitir ou facilitar a interpretação dos dados. Ainda segundo (SHERIFF; GELDART, 1995) existem basicamente cinco parâmetros que são utilizados para se distinguir e decidir quais são os eventos que representam reflexões primárias: (a) coerência, (b) destaque de amplitude, (c) assinatura, (d) DMO e (e) NMO.

A coerência diz respeito à similaridade na aparência traço a traço sendo ela a principal informação para o reconhecimento de um evento. O destaque de amplitude acontece quando o receptor capta grande quantidade de energia de forma coerente, saindo assim bastante do seu valor médio e indicando um evento. A assinatura se refere ao formato da onda associada a um evento. Esta assinatura pode ser curta e ter sua energia concentrada em um único pico, ou ser cíclica e mais parecida com uma série de ondas de curta duração na qual não é possível identificar vários eventos. Por fim o DMO, o sobretempo de mergulho, e o NMO, o sobretempo normal, são caracterizados por uma diferença sistemática traço a traço do tempo de chegada de um determinado evento e são ótimos indicadores da natureza do evento. Muitas das reflexões que não são primárias, as *múltiplas*, podem ser facilmente identificadas devido a estes dois parâmetros, o NMO e o DMO, pois os valores que as caracterizam se tornam tão absurdos que a única possibilidade é terem sido geradas por reflexões múltiplas. Outros tipos de eventos resultantes de ondas superficiais também são identificáveis a partir de sua não conformidade com os possíveis valores para o NMO e o DMO.

A visualização de refletores sísmicos também está sujeita a limites práticos. Em um experimento sísmico sempre estamos envolvidos com a amostragem tanto no espaço quanto no tempo. Estas amostragens estão sujeitas ao mesmo teorema

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

da amostragem de Nyquist e por isso as resoluções nestas diferentes dimensões são limitadas. No caso do tempo a limitação é facilmente contornável, bastando para isso o aumento da taxa de amostragem e a modificação do filtro *anti-aliasing*. Resta assim apenas a limitação da fonte e da resposta em frequência do meio que não são capazes de gerar sinais com energia suficientemente alta para se sobrepor ao ruído a partir de algumas poucas centenas de Hertz. Por outro lado, na dimensão do espaço o problema é de outra natureza pois não é possível o uso de um filtro *anti-aliasing* já que o sinal é adquirido de forma estritamente discreta. Apenas arranjos de receptores podem ser empregados para reduzir o efeito de *aliasing*, embora não de forma perfeita. Por isso surgem limitações na capacidade de captura de eventos com grande mergulho. A especificação de uma aquisição geofísica de dados sísmicos deve ser feita com estas limitações em mente. À parte da resolução correspondente ao tempo, que posteriormente é transformada em profundidade, se dá o nome de *resolução vertical* e à parte correspondente ao espaço se dá o nome de *resolução horizontal*.

Equipamentos

Existem equipamentos diferenciados para trabalho tanto em terra quanto no mar mas os princípios de funcionamento são basicamente os mesmos: geram-se ondas sísmicas com as *fontes (sources)* e captam-se ondas sísmicas com os *receptores (detectors)*. Abaixo estão descritos os principais tipos de fonte e receptor para os casos de aquisição em terra e no mar, juntamente com algumas peculiaridades para cada meio.

1. Aquisição em Terra

(a) Tipos de Fonte

- i. EXPLOSIVAS - são fontes impulsivas e compressionais onde a energia está concentrada em um pequeno intervalo de tempo. Tenta-se sempre gerar uma explosão com toda a energia concentrada no início

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

do impulso, gerando assim uma excitação de fase-mínima. Muito embora isto seja o ideal, muitas vezes não é factível. São as preferidas devido a estas características. Devem ser enterradas preferencialmente abaixo da LVL para melhor rendimento. Devido a este requisito equipamentos especiais para o enterramento adequado são necessários. A sua construção pode ser tal que maximize a direcionalidade da carga, construindo um *arranjo* (*array*) de cargas de forma que a onda sísmica resultante se combine construtivamente na vertical e destrutivamente na horizontal. Apesar disso, algumas vezes este arranjo pode detonar de maneira errada, gerando vários impulsos ao invés de um impulso somente. Existe também um comprometimento entre a quantidade de energia do impulso e sua largura de banda, limitando o uso de cargas muito grandes. A equação (1.9) (ZIOLKOWSKI, 1980) relaciona duas fontes explosivas de mesmo tipo, de respostas no tempo contínuo $w_A(t)$ e $w_B(t)$. Conforme se aumenta a amplitude α de $w_B(t)$ em relação a $w_A(t)$, aumenta-se tanto a energia da carga quanto o suporte temporal do impulso, demonstrando o compromisso entre energia e largura de banda. Devido às características explosivas destas fontes, normalmente a repetibilidade do experimento fica comprometida. Os locais onde a carga é detonada tendem a se modificar com o tiro, impossibilitando muitas vezes o uso do mesmo buraco caso seja necessária a repetição do tiro. Alguns exemplos de fontes impulsivas são dinamite e nitrato de amônia.

$$w_B(t) = \alpha w_A(t/\alpha) \quad (1.9)$$

- ii. VIBRADOR - esta é uma fonte compressional que realiza uma *varredura* (*sweep*) de frequência gerando uma senóide com frequência muito baixa, de alguns poucos Hertz, que é gradualmente aumentada em alguns poucos segundos para algumas centenas de Hertz, ou vice-versa, mantendo a amplitude dentro de uma curva pré-

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

configurada. Um sistema de controle na fonte mantém a varredura de frequência e a amplitude do sinal gerado dentro das especificações de projeto do experimento. Neste tipo de fonte existe a possibilidade de se combinar vários vibradores, normalmente entre 3 e 4, em um arranjo, gerando neles ao mesmo tempo sinais de entrada para a terra, de forma a melhorar a relação sinal/ruído da resposta. Devido ao carácter menos destrutivo, normalmente realiza-se mais de uma varredura por local de fonte de forma a combinar construtivamente os sinais destas varreduras, diferentemente das fontes explosivas onde preferencialmente apenas um tiro por local de fonte é realizado. Entre estas varreduras com mesmo local de fonte costuma-se mover as fontes alguns poucos metros para atenuar possíveis efeitos causados pelas camadas muito próximas da superfície, pertencentes à LVL. Também tem a vantagem de ser possível a sua utilização em área com maior densidade populacional se comparada às fontes explosivas. Por outro lado, necessitam de uma distância maior entre a fonte e os geofones, limitando seu uso para a visualização de reflexões de menor profundidade. A equação (1.10) nos dá o valor da pressão P no instante t para este tipo de fonte. $A(t)$ representa o envelope da amplitude, v_0 representa a frequência inicial e $\frac{dv}{dt}t$ a velocidade de varredura.

$$P(t) = A(t) \operatorname{sen} \left[2\pi t \left(v_0 + \frac{dv}{dt}t \right) \right] \quad (1.10)$$

(b) Tipos de Receptor

- i. GEOFONE - um geofone mede a velocidade do corpo ao qual ele está em contato. Devido a este contato direto com o corpo, a terra, ele é capaz de captar a onda sísmica com suas três componentes de propagação, a onda compressional e as duas componentes cisalhantes. Apesar disso o acoplamento mecânico entre o geofone e a terra pode variar dependendo do local e da forma como o mesmo foi ins-

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

talado. Em áreas onde existe uma variação razoável entre os tipos de solos presentes, como rios cruzando a região do experimento, em zonas litorâneas, ou em regiões pantanosas, estas variações influenciam muito a resposta do geofone, dificultando o processamento posterior.

2. Aquisição no Mar

(a) Tipos de Fonte

- i. CANHÃO DE AR (*Airgun*) - esta também é uma fonte impulsional mas possui limitações de potência devido ao efeito de cavitação. Este fenômeno é gerado pelo fato de que quando se reduz muito a pressão na água, a mesma passa para o estado gasoso, gerando bolhas. Isto limita a quantidade de energia que pode ser utilizada. Neste tipo de fonte são muito utilizados arranjos construtivos de vários canhões de ar, tipicamente entre 6 e 7, formando um arranjo, de forma a aumentar a direcionalidade da onda gerada. Devido ao efeito bolha, que acontece pela tendência oscilatória das bolhas de ar geradas pela injeção do ar na água, o impulso normalmente é prolongado, gerando assim um efeito de fase não-mínima no mesmo. Tenta-se minimizar isto construtivamente de forma que após o primeiro pico de pressão da bolha, a mesma passe para a superfície, a camada de ar da atmosfera. O uso de arranjos normalmente auxilia na geração de impulsos de fase mínima, muito embora nem sempre isto aconteça.

(b) Tipos de Receptor

- i. HIDROFONE - são cristais piezoelétricos sensíveis à variação de pressão. Não são afetados pela aceleração devido ao cancelamento de seu efeito, pois as duas faces do cristal estão em contato com o meio (Figura 1.8). Este tipo de sensor capta a propagação da onda mecânica na água do mar. Sua grande vantagem é sua possível

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

utilização próximo à superfície da água, sem a necessidade de instalação no fundo do mar. Isto permite aquisições por navios sonda que rebocam os canhões de ar e os hidrofones e realizam o experimento na superfície do mar. Em contrapartida, ao se captar a onda sísmica em meio líquido, apenas as ondas compressionais são observadas, visto que não há propagação de ondas cisalhantes neste meio. Por serem sensíveis a pressão obtém medidas diferentes dos geofones. Segundo (SHERIFF; GELDART, 1995), para reflexões vindas do interior da terra a diferença entre o sinal dos hidrofones e dos geofones é um adiantamento de fase de 90° do hidrofone com relação ao geofone. Para reflexões da superfície da terra esta diferença inverte, passando a ser um atraso de 90° . Este é um fato importante quando se trabalha em locais de transição, onde temos aquisição tanto na água quanto em terra.

- ii. GEOFONE - este tipo de sensor, quando aplicado em aquisições marítimas, deve ser instalado em contato com o fundo do oceano. Devido ao custo muito alto desta instalação, normalmente são sempre acompanhados de hidrofones. Devido aos custos seu uso é limitado a áreas com maiores certezas de retorno financeiro. Desta forma estão sendo muito utilizados em reservatórios de petróleo que já estão em produção, com o intuito de diminuir as incertezas de produção.

Cabe ressaltar que atualmente todos os sinais obtidos nos sensores são digitalizados. Devido à variação na quantidade de energia que cada receptor recebe durante o tempo do experimento, de alguns poucos segundos, esta digitalização precisa de um alcance dinâmico muito grande, da ordem de 140 dB, o que impõe sérios requisitos nos tipos de amplificadores e conversores A/D utilizados.

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

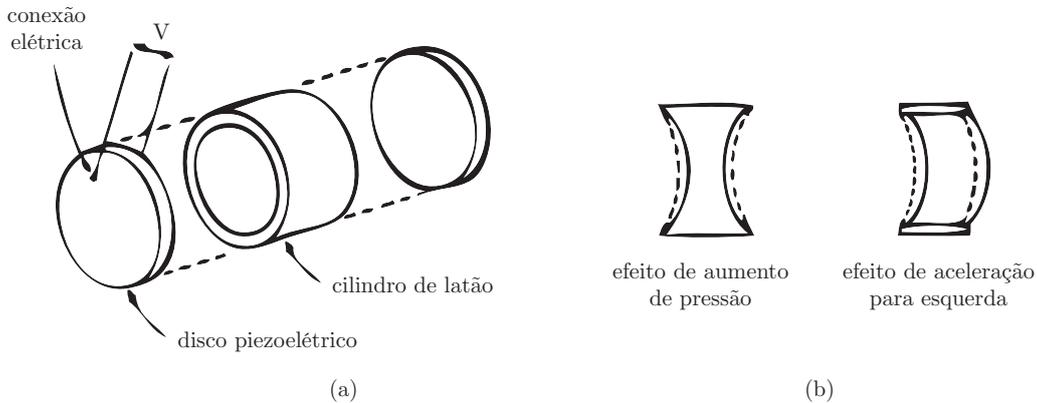


Figura 1.8: Hidrofones. (a) Hidrofone em formato de disco e (b) cancelamento da aceleração (SHERIFF; GELDART, 1995).

Métodos de campo por reflexão

Vistos os diferentes tipos de fontes e receptores passemos agora para um modelo simplificado do experimento. Basicamente são dois os tipos de experimentos sísmicos de reflexão, os 2D e os 3D. O uso de um ou outro em ambiente terrestre é normalmente determinado por questões financeiras pois um *experimento sísmico 2D* (sísmica 2D) é mais simples, rápido e barato do que um *experimento sísmico 3D* (sísmica 3D). Por outro lado, a sísmica 2D não consegue o mesmo grau de precisão que a sísmica 3D é capaz de atingir. Já em ambiente marítimo a sísmica 3D é praticamente o único tipo realizado atualmente pois sua relação benefício-custo supera em muito a sísmica 2D.

Numa sísmica 2D o objetivo final é traçar um perfil vertical que representa um plano perpendicular à superfície terrestre. A Figura 1.9 é um exemplo de uma imagem de um perfil resultante do processamento de uma sísmica 2D. Ela representa um corte na superfície da terra de forma que o eixo vertical represente a profundidade e o eixo horizontal a distância horizontal ou o afastamento lateral em relação ao ponto 0 na superfície.

Já numa sísmica 3D o objetivo final é gerar uma representação volumétrica em três dimensões da subsuperfície terrestre. A quantidade de dados envolvida

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

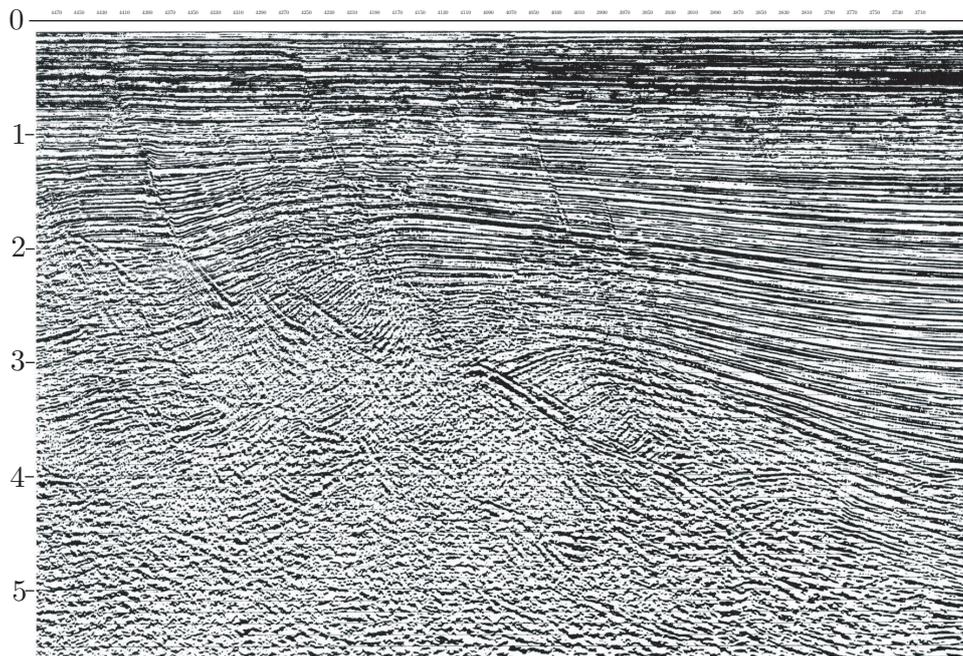


Figura 1.9: Perfil sísmico final após processamento e migração.

em tal experimento aumenta muito em relação a sísmica 2D, juntamente com a complexidade e os custos na aquisição.

Mas ambas têm muito em comum. O princípio físico básico para se chegar tanto em um perfil vertical de uma sísmica 2D quanto a uma representação volumétrica de uma sísmica 3D é o da reflexão de ondas sísmicas. Estas ondas são geradas por um dos diversos tipos de fontes descritos anteriormente, sendo as respostas da terra a estas ondas gravadas por receptores na superfície terrestre. Tais sinais gravados são então processados para gerar imagens como a da Figura 1.9.

Passemos aos detalhes agora. Uma sísmica 2D é realizada determinando-se primeiramente uma linha na superfície terrestre de onde se deseja traçar um perfil sísmico. A Figura 1.10 apresenta exemplos de possibilidades destas linhas, ali representadas pelas linhas mais grossas. Tais linhas devem interceptar feições geológicas importantes representadas na figura pelas linhas mais finas. Assim, a

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

linha de perfil sísmico deve ser definida por critérios geológicos, tentando sempre colocá-la de tal forma que a mesma seja perpendicular a possíveis falhas ou feições geológicas que se deseja visualizar, maximizando a qualidade do perfil gerado. Em cima de tal linha é que serão dispostos os grupos de sensores e as fontes. Repare que o que é gravado normalmente não é a resposta de cada sensor mas sim a resposta média de um grupo de sensores distribuídos com proximidade a um centro do grupo. Este grupo de sensores, o arranjo de sensores, pode e deve ser disposto de forma a aumentar na vertical a direcionalidade da resposta.

Existem várias formas de se posicionar os grupos de sensores em relação à fonte. A estas formas dá-se o nome de *lanço* (*spread*). As mais importantes são as seguintes:

1. Lanço simétrico (*split-dip spread*) - a fonte se localiza no meio de uma série de receptores regularmente espaçados ao longo de um segmento de reta (Figura 1.11a);
2. Lanço simétrico com lacuna (*gapped spread*) - a fonte se localiza no meio de uma série de receptores regularmente espaçados ao longo de um segmento de reta, mas os receptores mais próximos à fonte não são utilizados porque se tornam inúteis. Isto acontece porque o ruído gerado pela fonte é tão alto que inviabiliza a utilização dos receptores mais próximos (Figura 1.11b);

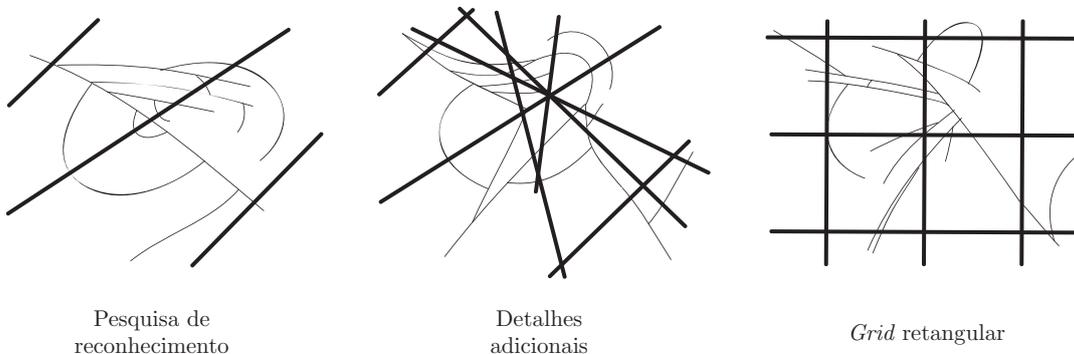


Figura 1.10: Exemplos de linhas sísmicas (SHERIFF; GELDART, 1995).

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

3. Lanço lateral (*end-on spread*) - a fonte se localiza ao final do lanço (Figura 1.11c);
4. Lanço lateral com lacuna (*in-line spread*) - a fonte se localiza ao final do lanço mas devido à intensidade da fonte, assim como no lanço simétrico com lacuna, os receptores próximos à fonte se tornam inúteis (Figura 1.11d);
5. Lanço com tiro lateral T (*broadside-T*) - algumas vezes é necessário deslocar razoavelmente a fonte em relação aos receptores de forma a conseguir-se registrar dados de reflexão antes que as ondas superficiais muito fortes cheguem. Nestes casos utilizam-se os lanços laterais. Este tipo de lanço posiciona a fonte com o objetivo de formar um T com a linha de grupos de receptores (Figura 1.11e);
6. Lanço com tiro lateral L (*broadside-L*) - seu uso é feito pelos mesmos motivos do lanço com tiro lateral T. Sua diferença está no fato da fonte formar um L com a linha de grupos de receptores (Figura 1.11f);
7. Lanço cruzado (*cross spread*) - quando se deseja informações em 3D sobre o mergulho no local pode-se utilizar este tipo de lanço, muito embora ele apenas não caracterize uma sísmica 3D (Figura 1.11g).

O método de ponto médio comum (*common-midpoint*, CMP) (MAYNE, 1962) também conhecido como *roll-along recording* é o método atualmente utilizado em sísmicas 2D sendo a base conceitual para sísmicas 3D. Ele está ilustrado na Figura 1.12 (SHERIFF; GELDART, 1995). Citando a explicação de (SHERIFF; GELDART, 1995): “Na linha superior da Figura 1.12a estão dispostos os grupos de receptores, numerados pela sua seqüência na linha sísmica. Os grupos de receptores 1 a 24 são gravados quando a fonte *A* é utilizada. Supondo um refletor horizontal temos então a cobertura da subsuperfície dos pontos *a* até *g*. Passando para a fonte *B* os grupos de receptores 3 a 26 são gravados. Desta forma passamos a ter uma cobertura de subsuperfície de *b* até *h*. A fonte *C* então é usada, gravando-se a resposta nos receptores 5 a 28 permitindo uma cobertura de subsuperfície de *c* a

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

i. Assim segue-se até o fim da linha sísmica. Note que o ponto de reflexão para a energia proveniente da fonte A no grupo de receptores 21 é o ponto f , que também é o ponto de reflexão da energia proveniente da fonte B no grupo de receptores 19, de C em 17, de D em 15, de E em 13, e de F em 11. Depois da remoção do NMO, estes seis traços podem ser empilhados (*stacked*) em uma etapa de processamento posterior. Neste caso o ponto de reflexão f é capturado seis vezes e a cobertura é então chamada de gravação de multiplicidade-6 (*6-fold*), algumas vezes chamada de 600%.” Obviamente a multiplicidade diminui no início e no final da linha sísmica. O nome CMP vem do fato das seis gravações do exemplo anterior possuírem o mesmo ponto médio, o ponto médio entre a localização da fonte e do grupo de receptores. A um agrupamento destas gravações, ou traços, com o mesmo ponto médio dá-se o nome de agrupamento de ponto médio comum.

O processo de empilhamento após as correções de NMO é realizado para aumentar a *relação sinal-ruído* (*signal-to-noise ratio*, SNR). Para auxiliar este processo diagramas de empilhamento (*stacking charts*) são utilizados, como os das figuras 1.12b e 1.12c. Um diagrama de empilhamento de superfície (Figura 1.12b) tem a localização dos grupos de receptores g , ou grupos de geofones no caso de sísmicas em terra, em um dos eixos e a localização das fontes s no outro. Assim um traço observado no receptor g em resposta a uma fonte s é indicado pela localização (g, s) . Uma variação deste tipo de diagrama, o diagrama de empilhamento de subsuperfície (Figura 1.12c) tem a indicação do traço marcada na posição $(\frac{g+s}{2}, s)$, onde $\frac{g+s}{2}$ é o ponto médio comum. Ambos os diagramas permitem que durante o processamento seja possível a visualização de possíveis implicações no processamento posterior devido a falhas nos dados por problemas enfrentados durante a aquisição. Muitas vezes não é possível em determinada posição se colocar uma fonte e os traços relativos a ela não podem ser capturados. Outras vezes problemas com os equipamentos impedem que um ou dois traços de um tiro possam ser gravados, novamente gerando buracos na aquisição. Por fim muitas vezes em aquisições marítimas, por problemas do sistema de controle de posicionamento das embarcações, os traços não são obtidos nas suas posições corretas e alguns ajustes

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

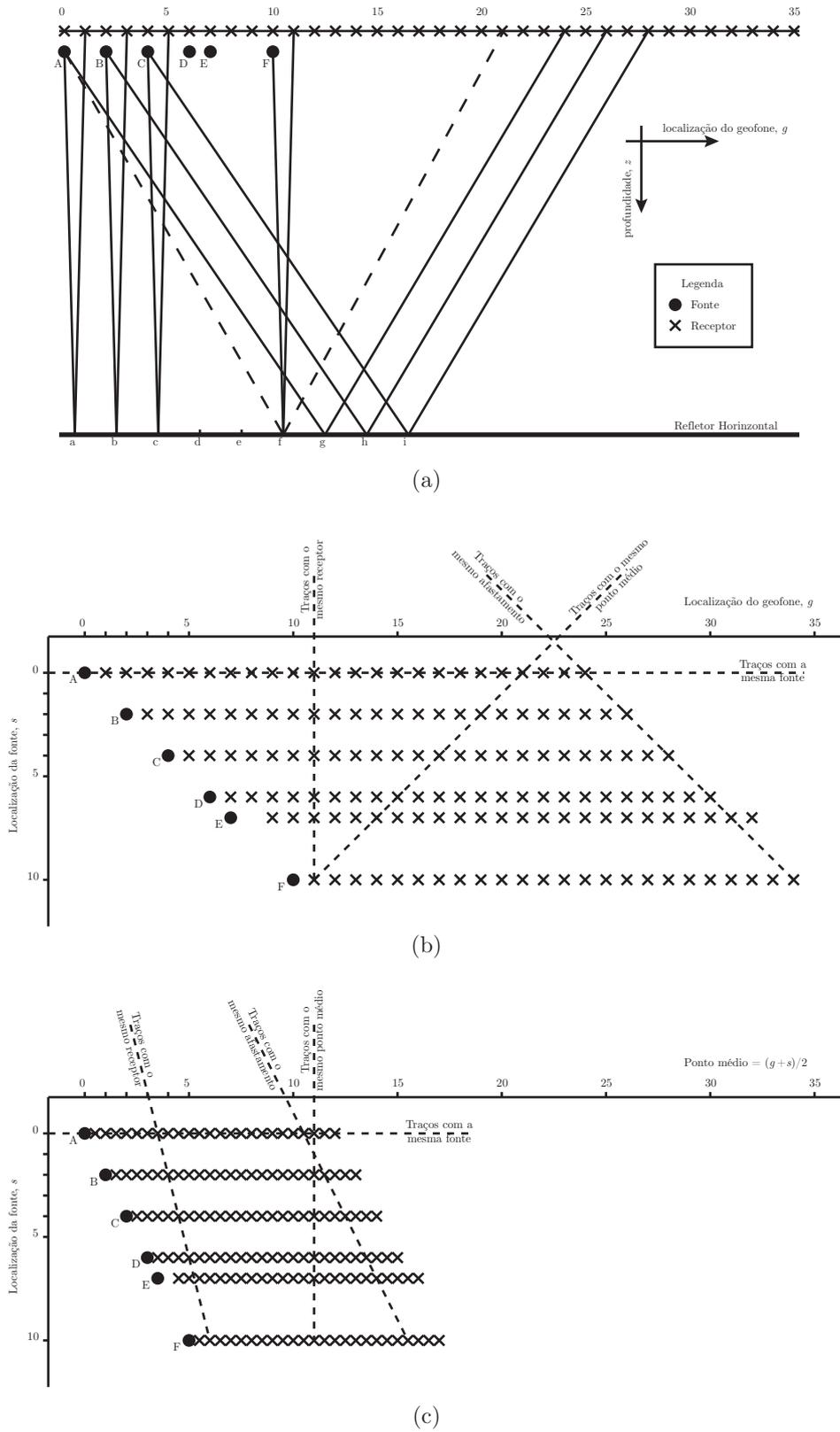


Figura 1.12: Método do ponto médio comum (SHERIFF; GELDART, 1995).

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

posteriores no processamento têm de ser feitos para se manter alguma regularidade. Utiliza-se então o conceito de faixas onde a posição dos grupos de receptores é regularizada por uma grade onde todos os receptores próximos aos centros da grade são ditos como pertencentes àquele ponto. Assim fica evidente a dificuldade em se manter uma regularidade na multiplicidade de cada CMP e técnicas de processamento posteriores têm de ser capazes de lidar com este fato.

Outro conceito importante que pode ser retirado dos diagramas de empilhamento é o dos *agrupamentos* (*gatherers*). Existem quatro tipos:

1. *Agrupamento de fonte comum* (*common-source gather*) - agrupamento de traços com mesma fonte (figuras 1.12b-c);
2. *Agrupamento de receptor (ou geofone) comum* (*common-geophone gather*) - agrupamento de traços com mesmo geofone ou receptor (figuras 1.12b-c);
3. *Agrupamento de afastamento comum* (*common-offset gather*) - agrupamento de traços com mesmo afastamento (do receptor em relação à fonte) (figuras 1.12b-c);
4. *Agrupamento de ponto médio comum* (*common-midpoint gather*) - agrupamento de traços com mesmo ponto médio (entre receptor e fonte) (figuras 1.12b-c);

Cada um dos agrupamentos acima possui características específicas que facilitam alguns tipos de processamento e visualização e dificultam outros.

Outras considerações

Uma variação do método CMP existe para se contornar estruturas que impeçam a condução do experimento sísmico ao longo da linha sísmica. Esta técnica, denominada de *detonação periférica* (*undershooting*) posiciona a fonte e

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

os receptores na periferia da linha sísmica de forma que os pontos médios entre a fonte e os receptores coincidam com a linha sísmica ideal (Figura 1.13).

Outra variação, a *linha sinuosa* (*crooked line*), traça um perfil sísmico da terra em cima de uma linha não mais reta. Tenta-se fazer curvas não muito bruscas na linha, escolhendo-se a posição das fontes e dos receptores de modo que os pontos médios comuns caiam sempre ao longo da linha sinuosa desejada, tentando manter a multiplicidade constante.

Já com relação aos grupos de receptores, eles são instalados no local de forma a maximizar as ondas verticais, provenientes do fundo da terra, atenuando as ondas laterais. Suas respostas em regime permanente são calculadas para a faixa de freqüências do experimento sísmico, mas como se trabalha com freqüências desde poucos Hertz até algumas poucas dezenas de Hertz tais respostas variam muito com a freqüência. A forma de combinação dos sinais destes arranjos ou grupos de receptores é bem simples, sendo todos somados sem pesos ou com pesos associados a cada receptor. Uma possibilidade ainda aparentemente não explorada é a aplicação de bancos de filtros com fase linear para a melhora na diretividade destes arranjos. Cabe ressaltar que os arranjos de receptores, muito embora pareçam muito úteis, têm limitações práticas. Devido à precisão de seu posicionamento, eles acabam atrapalhando a recepção do conteúdo de alta freqüência, pois os erros de posicionamento se tornam muito influentes na diretividade do arranjo em alta freqüência.

Por fim a resolução espacial máxima possível é limitada pelo teorema de Nyquist. Desta forma, mantendo-se inalterada a resolução temporal, a variação no espaçamento entre os grupos de receptores na superfície aumenta ou diminui a capacidade de se visualizar mergulhos mais elevados, e um compromisso entre estes dois parâmetros existe. O espaçamento entre os grupos de receptores é um fator fundamental no custo de uma aquisição sísmica.

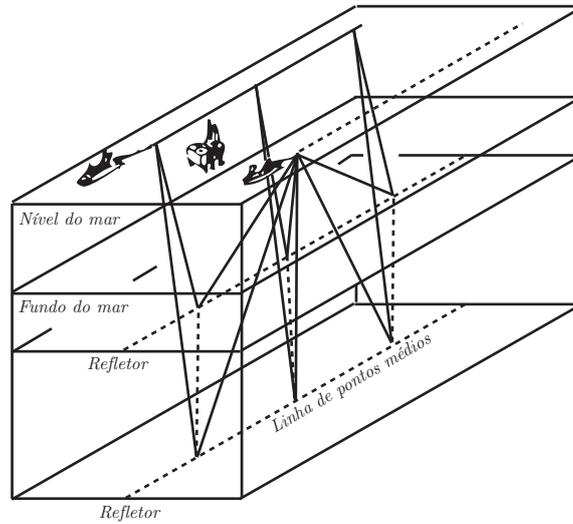


Figura 1.13: Detonação periférica (SHERIFF; GELDART, 1995).

1.2.2 As etapas do processamento de dados sísmicos tradicional

A teoria tradicional de processamento de dados sísmicos está baseada em três grandes algoritmos básicos. São eles:

1. Deconvolução
2. Empilhamento
3. Migração

Cada um destes algoritmos possui algumas utilidades básicas que os distinguem dos outros. Eles são algoritmos complementares que no caso da deconvolução e da migração possuem diversas variantes cada um, e suas utilizações variam de caso a caso, dependendo do tipo de dado que está sendo processado. Informações *a priori* sobre o tipo de formação, mais precisamente os tipos de refletores existentes e o campo de velocidade de propagação de ondas sísmicas, ou mais simplesmente campo de velocidade apenas, são dados que definem quais algoritmos e

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

seus variantes serão utilizados. É importante lembrar que cada conjunto de dados sísmicos é um caso de processamento e na maioria das vezes a seqüência e os parâmetros dos algoritmos que trazem o melhor resultado para um conjunto de dados não necessariamente irão trazer o melhor resultado para outro conjunto de dados. Sendo assim, segue a descrição dos três algoritmos. Para uma descrição alternativa (SHERIFF; GELDART, 1995) é uma ótima referência, com explicações básicas dos princípios envolvidos. Já (YILMAZ, 2001), outra ótima referência, apresenta explicações avançadas com indicações de implementação e uso prático principalmente.

Deconvolução

Os algoritmos de deconvolução no processamento de dados sísmicos têm como funções principais:

1. A retirada do efeito convolutivo causado pelas assinaturas da fonte e do receptor no sinal sísmico, isto é, a deconvolução de tais assinaturas do sinal sísmico;
2. A atenuação de reflexões múltiplas de forma preditiva utilizando a similaridade de assinatura da primária e das suas respectivas múltiplas.

Eles são de extrema importância como será visto adiante. São aplicados normalmente como o primeiro passo no processamento de dados sísmicos, mas também podem e muitas vezes são aplicados em etapas posteriores, com o intuito de aumentar a resolução temporal. Suas primeiras implementações foram desenvolvidas secretamente e em paralelo por diversas empresas de exploração de petróleo na década de 50 vindo finalmente a público na década de 60 através de diversas publicações.

Empilhamento

O empilhamento, um dos três algoritmos básicos, procura explorar a similaridade entre traços no mesmo agrupamento de ponto médio comum para gerar um único traço de afastamento nulo com SNR cerca de \sqrt{n} vezes mais alto que o SNR de apenas um dos traços do agrupamento, onde n é o número de traços no agrupamento. O empilhamento propriamente dito é simplesmente a soma de todos os traços no mesmo agrupamento de ponto médio comum. Como exemplo na equação (1.11) vê-se o sinal resultante do empilhamento, $x_{\text{stk}}(k)$, e os sinais a serem empilhados, $x_n(k)$. Infelizmente a simples soma não é uma solução muito boa. Para um empilhamento eficiente os traços devem sofrer algumas correções, possivelmente não lineares, anteriormente à soma. Tais correções são necessárias pois as ondas sísmicas percorrem distâncias diferentes para cada traço, possuindo estes traços afastamentos diferentes entre si, gerando eventos em tempos diferentes mesmo num modelo de terra com camadas puramente horizontais. Assim é necessário fazer-se uma compressão ou expansão e deslocamento dos sinais no tempo de forma que todos pareçam terem sido gerados com o mesmo afastamento, no caso o afastamento nulo, e no mesmo plano paralelo à terra, para que somente depois possam ser empilhados de forma eficiente. A correção devido ao afastamento, quando se usa como hipótese básica o modelo da terra em camadas horizontais, dá-se o nome de correção de NMO. A correção devida ao relevo dos terrenos que impede que os grupos de receptores estejam no mesmo plano, juntamente com as correções relativas à LVL, dá-se o nome de correção estática (*static correction*). Outras nuances ainda existem e devem ser resolvidas por estes algoritmos como a variação da velocidade de propagação sísmica ao longo do percurso da onda primária além da LVL, ou simplesmente a variação de velocidade, e a possibilidade de refletores com mergulho. Ambas, caso tenham valores elevados, também devem ser exploradas e corrigidas nos agrupamentos de afastamento comum para que o empilhamento produza resultados aceitáveis.

$$x_{\text{stk}}(k) = \sum_n x_n(k) \quad (1.11)$$

Migração

Por fim os algoritmos de migração procuram transformar os dados sísmicos no tempo para uma imagem com a verdadeira posição dos refletores no espaço, gerando uma imagem sísmica do corte vertical da terra no caso de uma sísmica 2D ou uma representação sísmica volumétrica da terra no caso de uma sísmica 3D. Estes algoritmos têm como insumos básicos os próprios traços sísmicos e estimativas do campo de velocidade. O campo de velocidade por sua vez também é gerado em grande parte a partir dos próprios dados sísmicos, em conjunto com outros dados geofísicos periféricos. São utilizadas as equações de onda e o campo de velocidades para determinar qual a verdadeira posição no espaço correspondente a cada instante de tempo amostrado em cada um dos traços sísmicos disponíveis. A esta operação se dá o nome de migração. Neste ponto deve ser ressaltada uma clara distinção entre dois tipos de algoritmos de migração, a migração em profundidade e a migração no tempo.

A migração no tempo gera uma representação de uma imagem (ou volume) com o eixo horizontal (ou eixos horizontais) representando o afastamento e o eixo vertical representando um tempo fictício. Este tempo fictício da migração no tempo pode ser interpretado como a resposta no tempo de uma sonda imaginária que está entrando na terra perpendicularmente ao plano horizontal, caminhando em direção ao centro da mesma com a velocidade definida pelo campo de velocidade, registrando a impedância ao longo do caminho. Este tipo de migração, apesar de parecer uma mera complicação, existe devido à falta de precisão no campo de velocidade utilizado para a migração. Como não se tem tanta precisão é mais seguro para os interpretadores da imagem sísmica trabalharem com a imagem no tempo fictício e com um campo de velocidade auxiliar, do que trabalhar diretamente com a imagem migrada em profundidade. Mas para que o algoritmo funcione

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

adequadamente, gerando uma imagem com a posição verdadeira dos refletores, as variações laterais no campo de velocidades têm de ser pequenas, pois somente assim a transformação dos traços para traços de incidência vertical se torna válida.

Já a migração em profundidade faz o que normalmente se imagina, mover o refletor para sua verdadeira posição do espaço. Para isso ela trabalha com as equações de onda de forma mais completa, evitando as simplificações que limitam o uso da migração no tempo em dados com variações laterais do campo de velocidade com maior intensidade. Mas por outro lado, devido à estas grandes variações os dados na migração em profundidade têm de ser visualizados em profundidade, o que pode tornar a interpretação menos precisa caso as incertezas quanto ao campo de velocidades sejam altas.

Outra distinção entre tipos de migração é a utilização de (a) uma migração pós-empilhamento, que usa os dados provenientes dos algoritmos de empilhamento, imagens de traços com afastamento nulo, ou de (b) uma migração pré-empilhamento, que trata de casos onde os algoritmos de correção da etapa de empilhamento não são suficientes por utilizarem modelos demasiadamente simples. Por exemplo, em alguns casos quando existem mergulhos muito abruptos ou conflito entre mergulhos, os algoritmos de correção pré-empilhamento se tornam simplesmente inúteis, pois não têm flexibilidade para lidar com as complexidades impostas. Se torna necessário então um tratamento a partir das próprias equações de onda antes do empilhamento para se conseguir gerar uma imagem ou volume sísmico útil. Este tratamento com base nas equações de onda antes do empilhamento é que recebe o nome de migração pré-empilhamento. É uma forma de correção mais precisa dos efeitos de afastamento e velocidade e muitas vezes é a única alternativa. Outra vantagem importante da migração pré-empilhamento é manter as características de amplitude referentes aos refletores. Estes valores são muito úteis para análises posteriores que necessitam destes dados físicos de forma precisa.

A última grande classificação, a escolha de uma migração 2D ou 3D, deve

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

ser feita com base nos dados adquiridos. Estes já são adquiridos tendo-se em mente que uma migração 2D utiliza equações de onda em duas dimensões, incapazes de tratar variações causadas por estruturas em três dimensões reais na subsuperfície. Isto é, uma migração 2D tem de ter como hipótese básica uma estrutura de subsuperfície simétrica e plana em relação ao perfil da terra a ser traçado pela linha sísmica adquirida. Sendo assim ela não é capaz de tratar de dados com estruturas essencialmente 3D como acontece em alguns casos reais.

Resumindo temos na migração as três grandes escolhas:

1. Migração no tempo x Migração em profundidade;
2. Migração pós-empilhamento x Migração pré-empilhamento;
3. Migração 2D x Migração 3D.

Comparação

Por fim uma comparação entre os três grandes algoritmos, a deconvolução, o empilhamento e a migração, é imprescindível para destacar as premissas utilizadas por cada um. Para isso um resumo das características de cada um dos três grandes algoritmos com seus variantes internos é apresentado na Tabela 1.1. Cabe ressaltar que o objetivo final do processamento de dados sísmicos para a indústria do petróleo é caracterizar reservatórios de óleo e gás. Para isso, caso seja necessário o ajuste de uma determinada estratégia de processamento ou até mesmo a criação de novos algoritmos, estes serão feitos. Não é nenhum absurdo termos uma estratégia de processamento ou algoritmo que foi útil em apenas um determinado conjunto de dados, desde que esta estratégia ou algoritmo *funcione*.

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

Algoritmo	Hipóteses	
Deconvolução	Determinística	Conhecimento do pulso sísmico (na abordagem tradicional)
	Estatística	Estacionariedade, incidência vertical, fase mínima, série de refletividade branca ou com alguma <i>densidade espectral de potência</i> (<i>power spectral density</i> , PSD) conhecida, ausência de ruído.
Empilhamento	Sobretempo hiperbólico	
Migração	Pós- x Pré-empilhamento	Traços com afastamento nulo x Traços com afastamento não-nulo
	2D x 3D	Estruturas de subsuperfície 2D x Estruturas de subsuperfície 3D
	Tempo x Profundidade	Pouca ou nenhuma variação lateral de velocidade x Muita variação lateral de velocidade

Tabela 1.1: Hipóteses básicas dos algoritmos de processamento de dados sísmicos.

1.2.3 A importância da deconvolução

Dos três grandes algoritmos a deconvolução é o mais básico por ser normalmente o primeiro a ser aplicado. Também por isso seus efeitos devem ser preferencialmente apenas a remoção das assinaturas contaminantes, sem nenhuma outra modificação do sinal original. Isto idealmente refere-se tanto à recuperação da amplitude como da fase do sinal sísmico.

Na deconvolução existem duas abordagens principais atualmente em uso, ambas para sistemas monocanal: a *determinística* e a *estatística*. Na estatística monocanal utiliza-se a teoria de Wiener juntamente com as hipóteses de que o pulso sísmico possui fase mínima e que a resposta ao impulso da terra pode ser modelada por um processo estocástico ergódico e estacionário. Gera-se então um traço sísmico deconvolvido, a partir de estatísticas de segunda ordem do traço original. Esta abordagem é capaz apenas de resolver a amplitude do sinal, e por isso a necessidade da hipótese de fase mínima. Mas, para se obter melhor resolução, o conhecimento da fase é essencial, não sendo possível pelo uso das estatísticas de segunda ordem de sistemas monocanal e impraticável pelo uso das estatísticas de ordem superior. Já a abordagem determinística monocanal utiliza-se de uma medição do pulso sísmico em campo distante (*far field*) para deconvolver o traço sísmico original deste pulso medido. Como a medição possui informações tanto da amplitude quanto da fase do

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

sinal recuperado, ambas as informações serão bem definidas. Mas, por outro lado, o pulso sísmico varia conforme o tempo, e caso esta variação seja abrupta o método apresentará deficiências. Uma abordagem mista também é possível, utilizando-se da informação de amplitude gerada pela abordagem estatística e da informação de fase gerada pela abordagem determinística.

Por fim cabe ressaltar que as hipóteses de estacionariedade e ergodicidade do sinal sísmico e do pulso de fase-mínima utilizadas na abordagem estatística, apesar de parecerem suposições fortes, são razoáveis e geram algoritmos extremamente robustos para muitas situações. Ainda assim, em casos específicos, estas hipóteses são severamente violadas, por exemplo, pela fuga da hipótese de fase mínima sobre o pulso sísmico, o sistema. Para isso os algoritmos de deconvolução apresentados nos capítulos 3 e 4 podem ser vistos como de extrema valia devido ao relaxamento da condição de fase-mínima, aumentando a resolução vertical (a possibilidade de se visualizar interfaces), e da possível convergência mais rápida, muito útil para lidar com a não-estacionariedade do sinal.

1.2.4 Reflexões múltiplas

Outra utilidade da deconvolução, além da eliminação do efeito convolutivo da assinatura de fonte e receptor é a remoção preditiva de reflexões múltiplas. Mas para poder falar melhor sobre esta aplicação devemos antes de mais nada esclarecer o que são reflexões múltiplas e quais os tipos de algoritmos existentes para sua remoção.

Citando (DUARTE, 2003) reflexão múltipla é “um evento que sofreu mais de uma reflexão em um registro de reflexão sísmica. Dependendo do tempo de separação, a reflexão múltipla é chamada de curto período ou de longo período. Nas de curto período, não é possível se discriminar os pulsos correspondentes à primária e à múltipla. Nas de longo período, as reflexões primária e múltipla aparecem como pulsos distintos. Um tipo importante de reflexões múltiplas, encontradas nos

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

levantamentos marinhos, são as reverberações.”

Reflexões múltiplas são prejudiciais à interpretação pois escondem ou misturam os verdadeiros eventos que devem ser mapeados. Além disso elas podem influenciar negativamente os algoritmos de migração caso influenciem nas primárias, principalmente no caso de múltiplas de curto período e reverberações. Para isso duas classes de algoritmos são utilizadas. São elas:

1. Filtragem preditiva que procura explorar estatisticamente a ocorrência dos eventos repetitivos;
2. Métodos de simulação e remoção de múltiplas através de modelagem dos fenômenos físicos ou inversão do campo de onda a partir das equações de onda.

Como exemplo para a primeira classe temos o filtro preditor baseado na teoria de Wiener. Já os algoritmos da segunda classe normalmente são divididos em duas partes, a simulação propriamente dita, que utiliza as equações de onda, e a remoção. Esta segunda etapa utiliza métodos de processamento de sinais para conseguir retirar o efeito previsto pelo algoritmo de simulação, uma imagem, da imagem original com as múltiplas. Métodos de mínimos quadrados são corriqueiramente utilizados mas uma abordagem por estatísticas de ordem superior e análise em componentes independentes (*independent component analysis*, ICA) (HYVÄRI-NEN; KARHUNEN; OJA, 2001) foi apenas recentemente explorada (LU et al., 2003), (LU, 2006).

1.2.5 Deconvolução

Matematicamente o problema de deconvolução em processamento de dados sísmicos é modelado por

$$x(k) = \sum_m s(m)h(k - m) + n(k) \quad (1.12)$$

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

onde $s(k)$ é a *resposta ao impulso da terra*, $h(k)$ é o *pulso sísmico* utilizado para excitar a terra, e que absorve também os efeitos dos arranjos de receptores, $x(k)$ é o *sismograma* ou *traço* medido e $n(k)$ é *ruído aditivo*. Repare que este modelo é monocanal e não leva em conta efeitos como o *espalhamento geométrico*, que reduz a energia de $x(k)$ conforme k aumenta, e as *perdas por absorção*, que modificam o pulso sísmico $h(k)$ conforme k aumenta. Estes efeitos devem ser considerados e, no caso específico do espalhamento geométrico, compensados, antes de qualquer algoritmo que procure deconvolver o pulso sísmico $h(k)$ do sismograma $x(k)$.

Supondo que o sismograma disponível $x(k)$ respeite o modelo de (1.12) temos algumas possibilidades para encontrar a resposta ao impulso da terra $s(k)$. A mais simples delas acontece quando temos disponível o pulso sísmico $h(k)$. Em sísmicas marítimas isto é muito comum pois é simples se posicionar hidrofones para gravação da assinatura de campo distante do pulso sísmico. Mas obviamente este é apenas o pulso como ele aparece apenas no início do sismograma, não sendo o modelo em (1.12) totalmente válido para todo o sismograma, visto que quando o pulso se propaga na subsuperfície seu formato no tempo e seu conteúdo espectral na frequência alteram-se. Mesmo assim ainda é útil supor que $h(k)$ não varia e proceder a chamada *deconvolução determinística* em muitos casos. Por questões de espaço e pela simplicidade da abordagem recomenda-se consultar (YILMAZ, 2001) para maiores esclarecimentos.

Mas quando não há disponibilidade do pulso sísmico $h(k)$, o que é verdade sempre se formos ligeiramente mais rigorosos ao analisarmos o problema de deconvolução, precisamos recorrer a outros métodos. No caso monocanal especificamente apenas é possível resolver este problema utilizando métodos estatísticos. Dois destes muito utilizados são a deconvolução impulsiva e a deconvolução preditiva, ambas baseadas em estatísticas de segunda ordem do sismograma $x(k)$.

Hipóteses para o problema estatístico

Tanto para a deconvolução impulsiva quanto para a deconvolução preditiva precisamos dispor de algumas hipóteses para que o problema possua solução pois tanto a resposta ao impulso da terra $s(k)$ quanto o pulso sísmico $h(k)$ não são conhecidos. Assim supomos que

1. $s(k)$ é um processo estocástico estacionário e ergódico, de média zero e branco;
2. $h(k)$ possui fase mínima e tem suporte temporal finito e de tamanho inferior a um valor conhecido K , isto é, $p(k) = 0$ para $k < 0$ e $k \geq K$;
3. $n(k)$ é um processo estocástico estacionário, de média zero, branco e descorrelacionado de $s(k)$.

Deconvolução impulsiva

O objetivo da deconvolução impulsiva é o de retirar unicamente o efeito convolutivo do pulso sísmico $h(k)$ em cima da resposta ao impulso da terra $s(k)$. Queremos então projetar um filtro $g_{\text{imp}}(k)$ que seja capaz de inverter o efeito convolutivo causado por $h(k)$ da melhor maneira possível. Para isso começamos definindo o erro $e(k)$ entre a resposta ao impulso da terra $s(k)$ e a resposta estimada ao impulso da terra $\hat{s}(k)$ por

$$e(k) \triangleq s(k) - \hat{s}(k), \quad (1.13)$$

onde a resposta estimada ao impulso da terra $\hat{s}(k)$ é obtida pela aplicação do filtro $g_{\text{imp}}(k)$ no sismograma $x(k)$, o único sinal disponível. Assim

$$\hat{s}(k) \triangleq g_{\text{imp}}(k) * x(k) = \sum_m g_{\text{imp}}(m)x(k-m). \quad (1.14)$$

O problema deve ser resolvido criando-se $g_{\text{imp}}(k)$ no sentido de minimizar o erro médio quadrático $\|e(k)\|^2$, onde $\|\cdot\|$ representa a norma-2. Para isso devemos

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

minimizar

$$E \{ \|e(k)\|^2 \} = E \{ \|s(k) - \hat{s}(k)\|^2 \} = E \{ \|s(k) - [g_{\text{imp}}(k) * x(k)]\|^2 \} \quad (1.15)$$

variando para isso $g_{\text{imp}}(k)$. Sabendo que o pulso sísmico $h(k)$ possui suporte temporal menor ou igual a \hat{K} , a solução é então dada por (ROBINSON; TREITEL, 1973)

$$\mathbf{R}_x^{(\hat{K})} \mathbf{g}_{\text{imp}} = \mathbf{e}_1, \quad (1.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x^{(\hat{K})} &\triangleq \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & \cdots & r_x(\hat{K}-1) \\ r_x^*(1) & r_x(0) & \cdots & r_x(\hat{K}-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x^*(\hat{K}-1) & r_x^*(\hat{K}-2) & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} E\{x(k)x^*(k)\} & E\{x(k)x^*(k-1)\} & \cdots & E\{x(k)x^*(k-\hat{K}+1)\} \\ E\{x(k)x^*(k+1)\} & E\{x(k)x^*(k)\} & \cdots & E\{x(k)x^*(k-\hat{K}+2)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{x(k)x^*(k+\hat{K}-1)\} & E\{x(k)x^*(k+\hat{K}-2)\} & \cdots & E\{x(k)x^*(k)\} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{g}_{\text{imp}}^{(K \times 1)} = \begin{bmatrix} g_{\text{imp}}(0) \\ g_{\text{imp}}(1) \\ \vdots \\ g_{\text{imp}}(\hat{K}-1) \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

e

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

A solução \mathbf{g}_{imp} que contém os coeficientes de $g_{\text{imp}}(k)$ pode ser então obtida pela recursão de Levinson-Durbin.

Finalmente a este processo de se deconvolver $h(k)$ de $x(k)$ dá-se o nome de deconvolução impulsiva. Seu nome vem do fato da saída da aplicação de $g_{\text{imp}}(k)$

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

sobre o sinal $x(k)$ ser branca, levando assim a função de autocorrelação da mesma para um impulso.

Deconvolução preditiva

Outro processo de deconvolução pode ser desejado. A deconvolução preditiva tem como objetivo remover múltiplas do traço sísmico $x(k)$. Para isso utiliza a similaridade entre os pulsos que contaminam as reflexões primárias e múltiplas. Seu efeito na prática é de apenas diminuir o efeito das múltiplas, mas não há garantias para o seu funcionamento. Denotando este novo filtro como $g_{\text{pf}}(k)$, o seu efeito desejado é o de remover toda a parte do sinal em $x(k + \alpha)$ que seja previsível a partir de $x(k), \dots, x(k - K + 1)$.

Este problema é normalmente resolvido em duas etapas. Primeiro encontramos um filtro $g_{\text{pf}}(k)$ (com $g_{\text{pf}}(k) = 0$ para $k < 0$ e $k \geq K - 1$) capaz de prever $x(k + \alpha)$ a partir de $x(k), \dots, x(k - K + 1)$. Este filtro pode ser encontrado resolvendo-se

$$g_{\text{pf}}(k) = \arg \min_{g_{\text{pf}}(k)} \{ \mathbb{E} [\|x(k + \alpha) - g_{\text{pf}}(k) * x(k)\|^2] \}. \quad (1.20)$$

Sua solução é similar a de $g_{\text{imp}}(k)$ e é encontrada pela equação

$$\mathbf{R}_x^{(K)} \mathbf{g}_{\text{pf}} = \begin{bmatrix} r_x(\alpha) \\ r_x(\alpha + 1) \\ \vdots \\ r_x(\alpha + K - 1) \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

onde

$$\mathbf{g}_{\text{pf}}^{(K \times 1)} = \begin{bmatrix} g_{\text{pf}}(0) \\ g_{\text{pf}}(1) \\ \vdots \\ g_{\text{pf}}(K - 1) \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

1.2. PROCESSAMENTO DE DADOS SÍSMICOS

e

$$\begin{bmatrix} r_x(\alpha) \\ r_x(\alpha + 1) \\ \vdots \\ r_x(\alpha + K - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\{x(k)x^*(k - \alpha)\} \\ E\{x(k)x^*(k - \alpha - 1)\} \\ \vdots \\ E\{x(k)x^*(k - \alpha - K + 1)\} \end{bmatrix}. \quad (1.23)$$

Novamente a solução desta equação pode ser encontrada pela recursão de Levinson-Durbin. O filtro preditor de erro $g_{\text{pef}}(k)$ é então encontrado colocando-se em evidência $x(k)$ no erro de predição

$$e_{\text{pre}}(k) = x(k + \alpha) - g_{\text{pf}}(k) * x(k) \triangleq g_{\text{pef}}(k) * x(k). \quad (1.24)$$

Logo obtemos

$$\mathbf{g}_{\text{pef}} \triangleq \begin{bmatrix} g_{\text{pef}}(0) \\ g_{\text{pef}}(1) \\ \vdots \\ g_{\text{pef}}(\alpha + K - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{\alpha-1,1} \\ -g_{\text{pf}}(0) \\ \vdots \\ -g_{\text{pf}}(K - 1) \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

lembrando que $g_{\text{pef}}(k) = 0$ para $k < 0$ e $k \geq \alpha + K - 1$.

1.2.6 Outras abordagens para a deconvolução

Outras abordagens para o problema da deconvolução existem e são aqui apenas citadas por questões de espaço. (HALE, 1982), (HARGREAVES; CALVERT, 1991) e (VARELA; ROSA; ULRICH, 1993) tratam o problema da não-estacionariedade e da correção de perdas por absorção através de um processo denominado *filtragem Q inversa*. (LU, 2005) e (SACCHI; ULRICH, 2000) tratam do problema de recuperação das informações de fase do problema monocalal através de uma abordagem por mínima entropia (estatísticas de ordem superior de forma implícita), mas têm sérias dificuldades devido ao número de amostras disponíveis para o problema monocalal. (LEVIN, 1989), (IDIER; GOUSSARD, 1993), (KAARESEN; TAXT, 1998) e (NSIRI; BOUCHER; CHONAVEL, 2003) tratam do problema multocalal. (TANER; KOEHLER,

1.3. COMPARAÇÃO ENTRE OS PROBLEMAS DE EQUALIZAÇÃO E DECONVOLUÇÃO

1981), (LEVIN, 1988), (CARY; LORENTZ, 1991), (CARY; LORENTZ, 1993), (CAMBOIS; STOFFA, 1990), (CAMBOIS, 1991), (CAMBOIS; STOFFA, 1992), (KIRCHHEIMER; FERBER, 2001), (GUO; ZHOU, 2001) e (RUJIE; YUN; XIANGYU, 2003) tratam do problema multicanal utilizando uma abordagem de consistência de superfície que procura agrupar diversos sismogramas pelas suas semelhanças quanto ao receptor, à fonte impulsiva ou ao afastamento lateral. Assim espera-se que a mesma assinatura referente a cada um destes efeitos esteja presente ao mesmo tempo em todo um grupo de sismogramas. Estes métodos exploram esta característica de forma a obter melhores estimativas das assinaturas de fonte, de receptor e da própria resposta ao impulso da terra. Por fim (OLIVEIRA, 1998), (OLIVEIRA, 2000) e (CARVALHO; WEGLEIN, 1994) tratam do problema de estimação e remoção do efeito da fonte impulsiva dadas medições da mesma. São por isso chamadas de abordagens determinísticas.

1.3 Comparação entre os problemas de equalização e deconvolução

Finalmente, como forma de apresentar didaticamente as semelhanças entre os problemas de equalização em sistemas de comunicação digital e de deconvolução em processamento de dados sísmicos, devemos ressaltar alguns pontos.

Ambos os problemas utilizam um modelo convolucional onde um sistema com resposta ao impulso finita é excitado por uma entrada, gerando assim uma saída. Relembrando as equações (1.1) e (1.12) temos

$$x(k) = \sum_m s(m)h(k-m) + n(k) \quad (1.26)$$

onde $x(k)$ é o sinal recebido, $s(k)$ é o sinal transmitido, $h(k)$ é o canal de comunicação de suporte temporal finito e $n(k)$ é ruído aditivo, e

$$x(k) = \sum_m s(m)h(k-m) + n(k) \quad (1.27)$$

1.3. COMPARAÇÃO ENTRE OS PROBLEMAS DE EQUALIZAÇÃO E DECONVOLUÇÃO

onde $x(k)$ é o sismograma ou traço, $h(k)$ é o pulso sísmico de suporte temporal finito, $s(k)$ é a resposta ao impulso da terra e $n(k)$ é ruído aditivo. Como estamos utilizando modelos convolucionais o sinal de entrada e a resposta ao impulso dos sistemas monocal são intercambiáveis e por isso podem ser confundidos. Nesta dissertação especificamente são chamados de sistemas os sinais, em ambos os modelos, que possuem suporte temporal finito, isto é, o canal de comunicação $h(k)$ e o pulso sísmico $h(k)$.

Por outro lado temos algumas diferenças quanto aos problemas de equalização e deconvolução. Primeiramente analisemos o problema de deconvolução em processamento de dados sísmicos. Três possibilidades básicas existem. São elas:

1. Temos disponível tanto o sistema $h(k)$, o pulso sísmico, quanto a saída $x(k)$, o sismograma. Resolve-se este caso monocal pela aplicação de um sistema inverso obtido deterministicamente, conforme mencionado anteriormente;
2. Temos disponível apenas a saída $x(k)$, o sismograma, e desejamos remover o efeito do sistema $h(k)$, o pulso sísmico. É resolvida pela deconvolução impulsiva conforme apresentado anteriormente.
3. Deseja-se remover reflexões múltiplas do sismograma $x(k)$ utilizando a propriedade de que estas aparecem de forma periódica e por isso podem ser removidas por filtros preditores de erro da teoria de Wiener. Cabe ressaltar que esta é uma aplicação um tanto quanto diferente do problema de equalização mas ainda assim merece ser mencionada pois utiliza o mesmo arcabouço teórico.

Já o problema de equalização apresenta duas possibilidades básicas. São elas

1. Temos disponível tanto a saída do sistema $x(k)$, o sinal recebido, quanto a entrada $s(k)$ e desejamos estimar o sistema $h(k)$, o canal de comunicação.
2. Temos disponível apenas $x(k)$ e desejamos estimar tanto o sistema $h(k)$, o canal de comunicação, quanto a entrada $s(k)$, o sinal transmitido.

1.3. COMPARAÇÃO ENTRE OS PROBLEMAS DE EQUALIZAÇÃO E DECONVOLUÇÃO

	Comunicação digital	Processamento de dados sísmicos
Nome	Equalização	Deconvolução
Sinal de entrada $s(k)$	Sinal transmitido (conhecido ou não e cicloestacionário)	Resposta ao impulso da terra (desconhecida e estacionária)
Sinal de saída $x(k)$	Sinal recebido (conhecido e cicloestacionário)	Sismograma ou traço (conhecido e estacionário)
Sistema $h(k)$	Canal de comunicação (desconhecido e de tamanho finito)	Pulso sísmico (conhecido ou não e de tamanho finito)

Tabela 1.2: Comparação entre os problemas de equalização em comunicações digitais e deconvolução em processamento de dados sísmicos.

O segundo problema é insolúvel por estatísticas de segunda ordem quando supomos que $s(k)$ é estacionário. Isto acontece pois o sistema $h(k)$, o canal de comunicação, não pode ser suposto de fase mínima, diferentemente do pulso sísmico $h(k)$. Recentemente, motivado por este fato, métodos de equalização que utilizam a cicloestacionariedade de $s(k)$ foram explorados, baseados na equivalência entre sistemas SISO FIR superamostrados com entrada cicloestacionária e sistemas SIMO FIR. Tal equivalência é apresentada no Apêndice C. Esta equivalência é importante pois o problema se torna solúvel quando analisado pelo modelo SIMO FIR, ou equivalentemente pela hipótese de cicloestacionariedade. Os capítulos seguintes desta dissertação apresentam diversos algoritmos de equalização de sistemas SIMO FIR que podem ser utilizados para a equalização de sistemas monocal de comunicações digitais a partir de estatísticas de segunda ordem apenas. A aplicação destes algoritmos para o problema de deconvolução também é possível pois o mesmo modelo SIMO FIR pode ser encontrado dentro do processamento de dados sísmicos quando estão disponíveis sismogramas ou traços que ao menos teoricamente possuam mesma resposta ao impulso da terra em seu modelo.

Como conclusão deste capítulo, a Tabela 1.2 procura resumir as semelhanças e diferenças entre os dois problemas, incluindo-se aí uma correspondência entre jargões de ambos.

Capítulo 2

Identificação e Inversão Cega de Sistemas SIMO FIR

Tendo a introdução aos problemas de equalização e deconvolução sido feita no capítulo anterior, passemos agora para a questão principal desta dissertação: a *identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR* com aplicação em ambos os problemas. Ao longo deste capítulo são introduzidos conceitos referentes a sistemas SIMO FIR, é apresentada a definição do problema de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR e é feita uma breve discussão sobre as potenciais aplicações deste ferramental teórico.

2.1 Sistemas SIMO FIR

Sistemas SIMO (*single-input multiple-output*) FIR (*finite impulse response*) são sistemas com uma entrada e múltiplas saídas e de resposta ao impulso finita. Dentro desta dissertação mais especificamente, são tratados apenas sistemas SIMO FIR discretos, lineares e invariantes no tempo, até que se diga o contrário. Sistemas deste tipo possuem uma redundância inerente devido ao fato do número de saídas ser maior do que o número de entradas. Tal redundância pode ser explorada para

2.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

a obtenção de melhores estimadores do sinal de entrada (inversão) ou do próprio sistema SIMO (identificação), se comparados com estimadores obtidos pelos casos de uma entrada e uma saída (*single-input single-output*, SISO).

2.2 Formulação do problema

Para um sistema SIMO FIR com L saídas, discreto, linear e invariante no tempo, representado pela Figura 2.1, defina-se para $l \in \{1, 2, \dots, L\}$ as suas L respostas ao impulso no tempo, com suporte temporal finito em $k = 0, 1, \dots, M-1$, por $h_l(k)$, a entrada do sistema como $s(k)$, as L saídas do sistema como $x_l(k)$ e os seus respectivos ruídos aditivos como $n_l(k)$. O sistema SIMO é expresso então por

$$x_l(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)h_l(k-m) + n_l(k), \quad l \in \{1, 2, \dots, L\} \quad (2.1)$$

ou

$$x_l(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_l(m)s(k-m) + n_l(k), \quad l \in \{1, 2, \dots, L\}. \quad (2.2)$$

Vetorialmente podemos expressar o mesmo sistema por L equações matriciais dadas por

$$\mathbf{x}_l^{(K)}(k) = \mathbf{H}_l^{(K)} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}_l^{(K)}(k), \quad l \in \{1, 2, \dots, L\}, \quad (2.3)$$

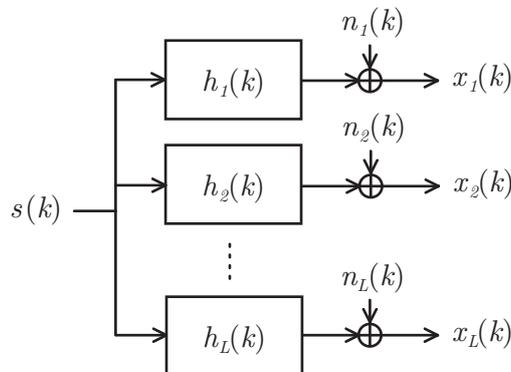


Figura 2.1: Sistema SIMO FIR.

2.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

onde K é um número inteiro positivo que representa uma janela de observação do sistema SIMO FIR. O vetor de entrada estendido $\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)$ é dado por

$$\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) \triangleq_{(K+M-1 \times 1)} [s(k) \quad s(k-1) \quad \cdots \quad s(k-K-M+2)]^T. \quad (2.4)$$

A matriz de filtragem $\mathbf{H}_l^{(K)}$, uma matriz toeplitz¹ formada a partir da resposta ao impulso do l -ésimo sistema SISO FIR que compõem o sistema SIMO FIR, é dada por

$$\mathbf{H}_l^{(K)} \triangleq_{(K \times K+M-1)} \begin{bmatrix} h_l(0) & \cdots & h_l(M-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_l(0) & \cdots & h_l(M-1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h_l(0) & \cdots & h_l(M-1) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

O vetor estendido da l -ésima saída do sistema SIMO $\mathbf{x}_l^{(K)}(k)$ é dado por

$$\mathbf{x}_l^{(K)}(k) \triangleq_{(K \times 1)} [x_l(k) \quad x_l(k-1) \quad \cdots \quad x_l(k-K+1)]^T. \quad (2.6)$$

E o vetor de ruídos aditivos estendido $\mathbf{n}_l^{(K)}(k)$ da l -ésima saída do sistema SIMO é dado por

$$\mathbf{n}_l^{(K)}(k) \triangleq_{(K \times 1)} [n_l(k) \quad n_l(k-1) \quad \cdots \quad n_l(k-K+1)]^T. \quad (2.7)$$

Agregando-se a representação vetorial por L equações é possível então definir uma única equação vetorial para todo o sistema, dada por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K)}(k), \quad (2.8)$$

onde o vetor estendido de entrada $\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)$ é dado por (2.4). A matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$, uma matriz toeplitz por blocos formada a partir das L respostas ao impulso do sistema SIMO FIR, é dada por

$$\mathbf{H}^{(K)} \triangleq_{(KL \times K+M-1)} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M-1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{h}(0) & \cdots & \mathbf{h}(M-1) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde

$$\mathbf{h}(k) \triangleq_{(L \times 1)} [h_1(k) \quad h_2(k) \quad \cdots \quad h_L(k)]^T. \quad (2.10)$$

¹Todas as matrizes estruturadas desta dissertação possuem um pequeno ponto em sua parte superior a esquerda. Esta notação procura evidenciar potenciais pontos para aplicação de algoritmos rápidos, que lidem explicitamente com estas estruturas.

2.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O vetor estendido das saídas do sistema SIMO FIR $\mathbf{x}^{(K)}(k)$ é dado por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) \underset{(KL \times 1)}{\triangleq} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{x}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k-K+1) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

onde

$$\mathbf{x}(k) \underset{(L \times 1)}{\triangleq} [x_1(k) \quad x_2(k) \quad \cdots \quad x_L(k)]^T. \quad (2.12)$$

E o vetor estendido de ruídos aditivos $\mathbf{n}^{(K)}(k)$ das L saídas do sistema SIMO FIR é dado por

$$\mathbf{n}^{(K)}(k) \underset{(KL \times 1)}{\triangleq} \begin{bmatrix} \mathbf{n}(k) \\ \mathbf{n}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{n}(k-K+1) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

onde

$$\mathbf{n}(k) \underset{(L \times 1)}{\triangleq} [n_1(k) \quad n_2(k) \quad \cdots \quad n_L(k)]^T. \quad (2.14)$$

Exemplo de sistema SIMO FIR

Como forma de clarificar as notações apresentadas até então, representemos um sistema SIMO FIR de respostas ao impulso com comprimento máximo $M = 2$ e com $L = 2$ saídas. Para uma janela $K = 2$ temos então

$$\mathbf{x}^{(2)}(k) = \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{s}^{(3)}(k) + \mathbf{n}^{(2)}(k) \quad (2.15)$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(0) & h_1(1) & 0 \\ h_2(0) & h_2(1) & 0 \\ 0 & h_1(0) & h_1(1) \\ 0 & h_2(0) & h_2(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(k) \\ s(k-1) \\ s(k-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ n_1(k-1) \\ n_2(k-1) \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Definição do problema

Por fim, define-se o problema da *identificação cega de sistemas SIMO FIR* como sendo a estimação da matriz de respostas ao impulso do sistema $\mathbf{H} \triangleq [\mathbf{h}(0) \quad \mathbf{h}(1) \quad \dots \quad \mathbf{h}(M-1)]$ observando apenas a saída $\mathbf{x}(k)$. Da mesma forma o problema de *inversão cega de sistemas SIMO FIR* consiste em, observando apenas a saída $\mathbf{x}(k)$, estimar a entrada $s(k)$. Existem duas alternativas para a inversão cega: a direta, onde se estima diretamente da saída $\mathbf{x}(k)$ a entrada $s(k)$; e a indireta, onde se estima primeiramente a matriz de respostas ao impulso \mathbf{H} para então se criar um sistema inverso capaz de calcular uma estimativa da entrada $s(k)$ a partir da saída $\mathbf{x}(k)$.

2.3 Sistema inverso ZF MISO FIR

Um sistema inverso, no caso dos sistemas SIMO FIR, deve ser capaz de recuperar o sinal de entrada a partir dos sinais de saída. Assim inicialmente, para um sistema SIMO FIR com L saídas descrito por (2.1), queremos encontrar um sistema inverso de múltiplas entradas e uma saída (*multiple-input single-output*, MISO) FIR capaz de recuperar perfeitamente $s(k)$ a partir de todas as saídas $x_l(k)$, $l \in \{1, 2, \dots, L\}$, ignorando qualquer ruído aditivo. Matematicamente este sistema pode ser representado por um conjunto de respostas ao impulso $f_l^{(i,K)}(k)$, $l \in \{1, 2, \dots, L\}$ com a relação

$$s(k-i) = \sum_{l=1}^L f_l^{(i,K)}(k) * x_l(k) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_l^{(i,K)}(m) x_l(k-m), \quad (2.17)$$

onde i é um número inteiro e finito conhecido representando o atraso no sinal de entrada $s(k)$ recuperado, e K é o comprimento das respostas ao impulso do sistema inverso MISO FIR. A este sistema inverso MISO FIR denominamos sistema inverso forçador de zeros (*zero forcing*, ZF) MISO FIR.

Utilizando o modelo matricial de (2.8), podemos também abordar o pro-

2.3. SISTEMA INVERSO ZF MISO FIR

blema do sistema MISO FIR inverso através de notação matricial. Relembrando, para ruído aditivo igual a zero, temos a saída $\mathbf{x}^{(K)}(k)$ dada por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \underset{(KL \times 1)}{\mathbf{H}^{(K)}} \underset{(KL \times M+K-1)}{\mathbf{H}^{(K)}} \underset{(K+M-1 \times 1)}{\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)}. \quad (2.18)$$

Podemos então supor que exista uma matriz $\mathbf{F}^{(K)}$ de dimensão $K + M - 1 \times KL$ capaz de inverter $\mathbf{H}^{(K)}$ pela esquerda, isto é, capaz de fazer

$$\mathbf{F}^{(K)} \mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{I}_{K+M-1}, \quad (2.19)$$

ou similarmente

$$\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) = \underset{(K+M-1 \times 1)}{\mathbf{F}^{(K)}} \underset{(M+K-1 \times KL)}{\mathbf{F}^{(K)}} \underset{(KL \times 1)}{\mathbf{x}^{(K)}(k)}. \quad (2.20)$$

Dizer que $\mathbf{F}^{(K)}$ existe é o mesmo que dizer que $\mathbf{H}^{(K)}$ tem posto completo por coluna (STRANG, 1988). Por outro lado $\mathbf{F}^{(K)}$ é único se e somente se $\mathbf{H}^{(K)}$ for uma matriz quadrada. Qualquer outra matriz que tenha posto completo por coluna, e por isso tenha obrigatoriamente mais linhas do que colunas, possui também obrigatoriamente um conjunto infinito de inversas à esquerda.

Mas ainda assim $\mathbf{F}^{(K)}$ não pode ser visto apenas como um sistema inverso. Esta matriz pode ser interpretada como uma matriz onde cada uma de suas $K + M - 1$ linhas de comprimento KL são na verdade um sistema inverso MISO FIR com tamanho de resposta ao impulso K . A diferença básica entre estes $K + M - 1$ sistemas inversos MISO FIR é a variação no atraso do sinal $s(k)$ na sua saída, dado na equação (2.17) pela variável i .

Utilizando uma notação que explicita as linhas de $\mathbf{F}^{(K)}$ temos

$$\mathbf{F}^{(K)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0^{(K)T} \\ \mathbf{f}_1^{(K)T} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{K+M-2}^{(K)T} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2.3. SISTEMA INVERSO ZF MISO FIR

onde

$$\mathbf{f}_i^{(K)} \triangleq \begin{bmatrix} f_1^{(i,K)}(0) \\ f_2^{(i,K)}(0) \\ \vdots \\ f_L^{(i,K)}(0) \\ \hline f_1^{(i,K)}(1) \\ f_2^{(i,K)}(1) \\ \vdots \\ f_L^{(i,K)}(1) \\ \hline \vdots \\ \hline f_1^{(i,K)}(K-1) \\ f_2^{(i,K)}(K-1) \\ \vdots \\ f_L^{(i,K)}(K-1) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Assim, ao se multiplicar a $i+1$ -ésima linha de $\mathbf{F}^{(K)}$, representada pelo vetor $\mathbf{f}_i^{(K)T}$, por $\mathbf{H}^{(K)}$, teremos como resposta um vetor de dimensão $KL \times 1$ com o valor 1 no seu $(i+1)$ -ésimo elemento e zero nos demais. Isto é

$$\mathbf{f}_i^{(K)T} \mathbf{H}^{(K)} = [\mathbf{0}_{1,i} \quad 1 \quad \mathbf{0}_{1,KL-i-1}]^T. \quad (2.23)$$

Para exemplificar a afirmação acima, observemos o caso onde $M = 2$ e $K = 2$. Para a equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{F}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)} \\ = \begin{bmatrix} f_1^{(0,2)}(0) & f_2^{(0,2)}(0) & f_1^{(0,2)}(1) & f_2^{(0,2)}(1) \\ f_1^{(1,2)}(0) & f_2^{(1,2)}(0) & f_1^{(1,2)}(1) & f_2^{(1,2)}(1) \\ f_1^{(2,2)}(0) & f_2^{(2,2)}(0) & f_1^{(2,2)}(1) & f_2^{(2,2)}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(0) & h_1(1) & 0 \\ h_2(0) & h_2(1) & 0 \\ 0 & h_1(0) & h_1(1) \\ 0 & h_2(0) & h_2(1) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

as colunas da matriz identidade à esquerda são a multiplicação das linhas de $\mathbf{F}^{(2)}$ com a matriz $\mathbf{H}^{(2)}$. Esta multiplicação de $\mathbf{f}_i^{(2)T} \mathbf{H}^{(2)}$ é exatamente a equação inicial

2.4. SISTEMA QUASE-INVERSO MISO FIR

(2.17) para $M = 2$ e $K = 2$ e por isso representa a aplicação do sistema inverso MISO FIR dado por $\mathbf{f}_i^{(2)T}$ no sistema SIMO FIR original.

Com isso agora sabemos que cada linha de $\mathbf{F}^{(K)}$ é um sistema inverso MISO FIR, mas ainda resta saber o que significa K neste contexto.

Para $K = K_0, K_0 + 1, \dots$, respeitando-se a limitação de que a matriz $\mathbf{H}^{(K)}$ possua ao menos o mesmo número de linhas do que de colunas ($K \geq K_0 = \frac{M-1}{L-1}$), encontraremos diversas matrizes $\mathbf{F}^{(K)}$ capazes de inverter sua matriz $\mathbf{H}^{(K)}$ de mesmo K . Como o sistema SIMO FIR não varia variando-se K pois o mesmo não é um parâmetro interno do sistema mas apenas uma abstração matemática referente a janela de observação do modelo, encontramos então mais um grau de liberdade: K representa o tamanho das respostas ao impulso do sistema inverso MISO FIR. Logo temos que o sistema inverso MISO FIR não é único. Não apenas isso, mas agora sabemos que mesmo fixando o tamanho das respostas ao impulso K do sistema inverso MISO FIR e o atraso i gerado pelo sistema inverso, para $K > K_0$, ainda temos $(K - K_0)L$ variáveis livres que possibilitam toda uma gama de soluções. Tudo isso devido ao fato de $\mathbf{H}^{(K)}$ não ser uma matriz quadrada para $K > K_0 = \frac{M-1}{L-1}$.

Por fim, a este tipo de sistema que força a recuperação exata de $s(k)$ a partir do conhecimento de $\mathbf{h}(k)$ apenas supondo para isso ruído aditivo igual a zero, dá-se o nome em comunicações digitais de equalizador forçador de zeros (*zero-forcing equalizer*, equalizador ZF). Por este motivo iremos chamar este tipo de sistema por sistema inverso ZF MISO FIR ou simplesmente sistema inverso ZF.

2.4 Sistema quase-inverso MISO FIR

Tanto em sismologia quanto em comunicações digitais, pode ser desejável não se criar um sistema inverso tão rigoroso, que procure, no caso de sismologia, comprimir o pulso sísmico até um impulso ou, no caso de comunicações digitais, re-

2.4. SISTEMA QUASE-INVERSO MISO FIR

duzir a interferência intersimbólica a zero. Tendo-se uma matriz inversa à esquerda $\mathbf{F}^{(K)}$ de $\mathbf{H}^{(K)}$, pode-se realizar uma combinação linear das linhas de $\mathbf{F}^{(K)}$ de forma a gerar qualquer tipo de onda com comprimento máximo $K + M - 1$. Fazendo

$$\mathbf{a}_{(M+K-1 \times 1)} \triangleq [a(0) \quad a(1) \quad \cdots \quad a(M+K-2)]^T \quad (2.25)$$

podemos então escrever

$$\tilde{\mathbf{s}}^{(K+M-1)}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{s}(k) \\ \tilde{s}(k-1) \\ \vdots \\ \tilde{s}(k-K-M+2) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{a}^T \mathbf{F}^{(K)} \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{s}^{(K)}(k) = \mathbf{a}^T \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k). \quad (2.26)$$

Logo \mathbf{a} representa qual a resposta ao impulso desejada pela aplicação de um impulso no sistema SISO correspondente à concatenação do sistema SIMO FIR original com o seu sistema quase-inverso MISO FIR dado por $\mathbf{a}^T \mathbf{F}^{(K)}$. Finalmente, para clarificar a questão, podemos representar os mesmos sistemas utilizando uma notação não-matricial. Temos então

$$\tilde{s}(k-i) = a(k) * s(k-i) = a(k) * \sum_{l=1}^L f_l^{(i,K)}(k) * x_l(k). \quad (2.27)$$

Exemplo

Voltando ao exemplo onde $M = 2$ e $K = 2$ temos

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(0) & h_1(1) & 0 \\ h_2(0) & h_2(1) & 0 \\ 0 & h_1(0) & h_1(1) \\ 0 & h_2(0) & h_2(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(k) \\ s(k-1) \\ s(k-2) \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

2.5. RESTRIÇÕES QUANTO À INVERSIBILIDADE DA MATRIZ DE FILTRAGEM $\mathbf{H}^{(K)}$

Se desejarmos um sistema inverso ZF MISO FIR, faremos

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} s(k) \\ s(k-1) \\ s(k-2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1^{(0,2)}(0) & f_2^{(0,2)}(0) & f_1^{(0,2)}(1) & f_2^{(0,2)}(1) \\ f_1^{(1,2)}(0) & f_2^{(1,2)}(0) & f_1^{(1,2)}(1) & f_2^{(1,2)}(1) \\ f_1^{(2,2)}(0) & f_2^{(2,2)}(0) & f_1^{(2,2)}(1) & f_2^{(2,2)}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0^{(2)T} \\ \mathbf{f}_1^{(2)T} \\ \mathbf{f}_2^{(2)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{F}^{(2)} \mathbf{x}^{(2)}(k).
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $\mathbf{F}^{(2)}$ não é uma matriz única.

Por outro lado, caso seja preferido um sistema quase-inverso MISO FIR basta escolhermos a resposta desejada \mathbf{a} e teremos o sistema quase-inverso dado por

$$\mathbf{a}^T \mathbf{F}^{(K)} = [a(0) \quad a(1) \quad a(2)] \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0^{(2)T} \\ \mathbf{f}_1^{(2)T} \\ \mathbf{f}_2^{(2)T} \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

2.5 Restrições quanto à inversibilidade da matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$

Conforme visto na seção anterior, para que uma matriz inversa à esquerda de $\mathbf{H}^{(K)}$ exista, é necessário que $\mathbf{H}^{(K)}$ possua posto completo por coluna. Esta necessidade possui uma equivalência muito importante com a transformada-Z das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR. O teorema seguinte nos fornece esta equivalência.

Teorema 2.5.1. *Os polinômios $\hat{h}_l(z)$, para $l = 1, \dots, L$ e de grau máximo $M - 1$,*

2.5. RESTRIÇÕES QUANTO À INVERSIBILIDADE DA MATRIZ DE FILTRAGEM $\mathbf{H}^{(K)}$

são coprimos, isto é, respeitam

$$\dot{\mathbf{h}}(z) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{h}_1(z) \\ \vdots \\ \dot{h}_L(z) \end{bmatrix} \triangleq \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{h}(k)z^{-k} \neq 0, \forall z. \quad (2.31)$$

onde

$$\mathbf{h}(k) = 0, \quad k > M - 1 \text{ e } k < 0, \quad (2.32)$$

se e somente se $\mathbf{H}^{(K)}$, uma matriz de dimensão $KL \times K + M - 1$ dada por (2.9), possui posto completo por coluna para todo $K \geq M - 1$.

Demonstração. Consultar o Apêndice A. □

A primeira prova deste teorema foi demonstrada numa série de artigos, de forma difusa, e encontra-se espalhada em (TONG; XU; KAILATH, 1993), (TONG; XU; KAILATH, 1994), (TONG et al., 1995), (BITMEAD et al., 1978) e (KUNG; KAILATH; MORF, 1976). Uma prova alternativa mas bastante similar foi demonstrada em (LI; DING, 1993). Ambas utilizam hipóteses estatísticas, que na presente dissertação serão postergadas para o próximo capítulo. Por fim, uma prova simples e determinística foi proposta em (SERPEDIN; GIANNAKIS, 1999) e encontra-se no Apêndice A para satisfação dos leitores mais ávidos.

Uma observação importante sobre este teorema se refere ao valor de K . Conforme constatado anteriormente neste capítulo, para que $\mathbf{H}^{(K)}$ possua mais linhas do que colunas temos que $K \geq \frac{M-1}{L-1}$. Mas as condições do Teorema 2.5.1 somente são válidas para $K \geq M - 1$. O que acontece para $\frac{M-1}{L-1} \leq K < M - 1$? Não há garantias de que a relação do teorema seja válida. Um exemplo são três sistemas dados por $\dot{h}_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4}$, $\dot{h}_2(z) = 1 + 0,5z^{-1} + 0,3z^{-2} + 0,2z^{-3} + 0,1z^{-4}$ e $\dot{h}_3(z) = \dot{h}_1(z) - 3\dot{h}_2(z)$, onde $M = 5$ e $L = 3$. Para $K = \frac{M-1}{L-1} = 2$ a matriz $\mathbf{H}^{(2)}$ dada por

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0 \\ -2 & 0,5 & 2,1 & 3,4 & 4,7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & -2 & 0,5 & 2,1 & 3,4 & 4,7 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

não possui posto completo por coluna.

Conforme será visto nos capítulos seguintes, a condição deste teorema para a existência de uma matriz inversa a esquerda de $\mathbf{H}^{(K)}$ desempenha um papel *fundamental* em praticamente *todos* os algoritmos de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR.

2.6 Potenciais aplicações da abordagem SIMO FIR

Conforme abordado neste texto, o estudo mais aprofundado da identificação e inversão de sistemas SIMO FIR tem seu surgimento relativamente recente. O principal marco no seu desenvolvimento é o trabalho por (TONG; XU; KAILATH, 1991), que pela primeira vez provou ser possível identificar completamente um sistema SIMO FIR apenas a partir de suas estatísticas de segunda ordem, desde que sua matriz $\mathbf{H}^{(K)}$ tenha posto completo por coluna, a condição do Teorema 2.5.1. Além disso, mais especificamente dentro da área de sistemas de comunicação digital, foi provado neste mesmo trabalho que é possível se equalizar (inverter) o canal (o sistema) de comunicação SISO FIR apenas pelas estatísticas de segunda ordem. Para tal, aproveita-se das propriedades de cicloestacionariedade do sinal de entrada e da possibilidade de diversidade espacial do sinal de saída para se produzir um sistema SIMO FIR equivalente, que atenda a hipótese de $\mathbf{H}^{(K)}$ com posto por coluna completo². Diversos algoritmos, utilizando-se da mesma hipótese foram apresentados e estudados nos últimos anos tanto para identificação quanto para inversão do sistema SIMO FIR, gerando atualmente uma quantidade de conhecimento suficiente para se justificar um trabalho como este, de consolidação e tentativa de aplicação prática da teoria consolidada.

²Para uma explicação sucinta da equivalência entre um sistema SISO FIR superamostrado com entrada cicloestacionária e um sistema SIMO FIR, consultar o Apêndice C.

2.6. POTENCIAIS APLICAÇÕES DA ABORDAGEM SIMO FIR

Alguns esclarecimentos quanto aos jargões das duas áreas tratadas por esta dissertação são importantes. Primeiramente em sistemas de comunicação digital os problemas de identificação cega de sistemas SIMO e de inversão cega de sistemas SIMO também são conhecidos respectivamente como *identificação cega de canal* e *equalização cega*. Quando se utiliza a amostragem da saída do sistema com taxa superior à taxa do símbolo um nome também utilizado é *equalização cega fracionária*, que pode ser então utilizada para viabilizar a abordagem SIMO. Vale por fim ressaltar que variações da metodologia SIMO FIR apresentadas dentro desta dissertação existem para tratar especificamente de sistemas de comunicação digital, utilizando a informação de que os sinais de entrada em tais sistemas possuem uma natureza discreta relacionada ao alfabeto de transmissão. Estas metodologias infelizmente não são diretamente aplicáveis em problemas de processamento de dados sísmicos devido à natureza contínua dos sinais de entrada nesta outra aplicação, muito embora possam servir de inspiração para possíveis novos métodos com hipóteses mais relaxadas.

Por outro lado, para aplicações em processamento de dados sísmicos, a abordagem SIMO FIR aqui descrita pode ser classificada como uma sub-classe dos problemas de *deconvolução multicanal*. Supondo-se que um grupo de sinais de saída possui o mesmo sinal de entrada, isto é, supondo-se um problema SIMO, e supondo-se que $\mathbf{H}^{(K)}$ possui posto por coluna completo, é possível se recuperar todo o sistema e todo o sinal de entrada, exceto por uma constante multiplicativa, uma deficiência facilmente contornável. Conforme ficará claro mais adiante, as duas principais vantagens desta abordagem são, a partir de estatísticas de segunda ordem ou por métodos algébricos determinísticos, possibilitar:

1. A *convergência rápida* tanto da estimativa do sistema quanto do sinal de entrada, se comparado com os métodos baseados em modelos SISO tradicionais (teoria de Wiener), com convergência comparável e possivelmente superior no caso dos algoritmos estatísticos e muito provavelmente superior no caso dos algoritmos determinísticos;

2.6. POTENCIAIS APLICAÇÕES DA ABORDAGEM SIMO FIR

2. A *recuperação da informação de fase* da resposta ao impulso do sistema e do sinal de entrada, que não é possível a partir de metodologias baseadas em estatísticas de segunda ordem do modelo SISO, e sendo de convergência lenta e problemática nas metodologias baseadas em estatísticas de ordem superior (conhecidas na área de sismologia como deconvolução de entropia mínima) também do modelo SISO.

Capítulo 3

Algoritmos Baseados em Estatísticas de Segunda Ordem

No capítulo anterior o problema de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR foi apresentado. Algoritmos estatísticos para solução deste problema utilizando-se tanto de estatísticas de segunda ordem como de estatísticas de ordem superior existem. Nesta dissertação e neste capítulo particularmente apenas os algoritmos baseados em estatísticas de segunda ordem são abordados. Estes foram escolhidos pois possuem capacidade de convergência com um número muito menor de amostras do sinal de saída se comparados com algoritmos baseados em estatísticas de ordem superior.

3.1 Estatísticas de segunda ordem

Supondo-se que $\{s(k)\}$, $\{\mathbf{x}(k)\}$, e $\{\mathbf{n}(k)\}$ são processos estocásticos estacionários no sentido amplo, define-se a correlação entre $x_q(k)$ e $x_l(k)$ para um atraso m como sendo $r_{x_q x_l}(m)$, dada por

$$r_{x_q x_l}(m) \triangleq \text{E}[x_q(k)x_l^*(k-m)], \quad q \text{ e } l \in \{1, 2, \dots, L\}. \quad (3.1)$$

3.1. ESTATÍSTICAS DE SEGUNDA ORDEM

A matriz de autocorrelação de $\mathbf{x}(k)$ para um atraso m representada por $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m)$, e dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m) &\triangleq \underset{(L \times L)}{\text{E}} [\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k-m)] \\ &= \begin{bmatrix} r_{x_1}(m) & r_{x_1x_2}(m) & \cdots & r_{x_1x_L}(m) \\ r_{x_2x_1}(m) & r_{x_2}(m) & & r_{x_2x_L}(m) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{x_Lx_1}(m) & r_{x_Lx_2}(m) & \cdots & r_{x_L}(m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

E a matriz de autocorrelação estendida de $\mathbf{x}(k)$ para um atraso m como sendo $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(m)$, toeplitz por blocos, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(m) &\triangleq \underset{(KL \times KL)}{\text{E}} [\mathbf{x}^{(K)}(k)\mathbf{x}^{(K)H}(k-m)] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m) & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m+1) & \cdots & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m+K-1) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m-1) & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m) & & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m+K-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m-K+1) & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m-K+2) & \cdots & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Similarmente define-se a correlação entre $n_q(k)$ e $n_l(k)$ para um atraso m como sendo $r_{n_q n_l}(m)$, dada por

$$r_{n_q n_l}(m) \triangleq \text{E} [n_q(k)n_l^*(k-m)], \quad q \text{ e } l \in \{1, 2, \dots, L\}. \quad (3.4)$$

A matriz de autocorrelação de $\mathbf{n}(k)$ para um atraso m como sendo $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}(m)$, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{n}}(m) &\triangleq \underset{(L \times L)}{\text{E}} [\mathbf{n}(k)\mathbf{n}^H(k-m)] \\ &= \begin{bmatrix} r_{n_1}(m) & r_{n_1n_2}(m) & \cdots & r_{n_1n_L}(m) \\ r_{n_2n_1}(m) & r_{n_2}(m) & & r_{n_2n_L}(m) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{n_Ln_1}(m) & r_{n_Ln_2}(m) & \cdots & r_{n_L}(m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

E a matriz de autocorrelação estendida de $\mathbf{n}(k)$ para um atraso m como sendo

3.1. ESTATÍSTICAS DE SEGUNDA ORDEM

$\mathbf{R}_n^{(K)}(m)$, uma matriz toeplitz por blocos, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n^{(K)}(m) &\triangleq \underset{(KL \times KL)}{\text{E}} \left[\mathbf{n}^{(K)}(k) \mathbf{n}^{(K)H}(k-m) \right] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n(m) & \mathbf{R}_n(m+1) & \cdots & \mathbf{R}_n(m+K-1) \\ \mathbf{R}_n(m-1) & \mathbf{R}_n(m) & & \mathbf{R}_n(m+K-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_n(m-K+1) & \mathbf{R}_n(m-K+2) & \cdots & \mathbf{R}_n(m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por fim define-se a autocorrelação de $s(k)$ para um atraso m como sendo $r_s(m)$, dada por

$$r_s(m) \triangleq \text{E} [s(k)s^*(k-m)] \quad (3.7)$$

e a matriz de autocorrelação estendida $K+M-1$ de $s(k)$ para um atraso m como sendo $\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(m)$, dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(m) &\triangleq \underset{(K+M-1 \times K+M-1)}{\text{E}} \left[\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) \mathbf{s}^{(K+M-1)H}(k-m) \right] \\ &= \begin{bmatrix} r_s(m) & r_s(m+1) & \cdots & r_s(m+K+M-2) \\ r_s(m-1) & r_s(m) & & r_s(m+K+M-3) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_s(m-K-M+2) & r_s(m-K-M+1) & \cdots & r_s(m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Propriedades

Duas propriedades importantes merecem ser mencionadas. Primeiramente temos que

$$r_{x_q x_l}(m) = r_{x_l x_q}^*(-m) \quad (3.9)$$

implicando em

$$\mathbf{R}_x(m) = \mathbf{R}_x^H(-m). \quad (3.10)$$

Por fim temos que $\mathbf{R}_x(0)$, $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$, $\mathbf{R}_n(0)$, $\mathbf{R}_n^{(K)}(0)$ e $\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(0)$ são ma-

3.1. ESTATÍSTICAS DE SEGUNDA ORDEM

trizes hermitianas, isto é

$$\mathbf{R}_x(0) = \mathbf{R}_x^H(0), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{R}_x^{(K)}(0) = \mathbf{R}_x^{(K)H}(0), \quad (3.12)$$

$$\mathbf{R}_n(0) = \mathbf{R}_n^H(0), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{R}_n^{(K)}(0) = \mathbf{R}_n^{(K)H}(0), \quad (3.14)$$

$$\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(0) = \mathbf{R}_s^{(K+M-1)H}(0). \quad (3.15)$$

No caso específico da matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$ e do sinal de entrada $s(k)$ serem reais, tais matrizes são simétricas, isto é

$$\mathbf{R}_x(0) = \mathbf{R}_x^T(0), \quad (3.16)$$

$$\mathbf{R}_x^{(K)}(0) = \mathbf{R}_x^{(K)T}(0), \quad (3.17)$$

$$\mathbf{R}_n(0) = \mathbf{R}_n^T(0), \quad (3.18)$$

$$\mathbf{R}_n^{(K)}(0) = \mathbf{R}_n^{(K)T}(0), \quad (3.19)$$

$$\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(0) = \mathbf{R}_s^{(K+M-1)T}(0). \quad (3.20)$$

Como ao longo deste capítulo as matrizes de autocorrelação utilizadas serão na sua maioria com o atraso $m = 0$, uma notação simplificada poderá ser utilizada, retirando-se o índice (0) da notação. Assim poderá ser utilizado $\mathbf{R}_x^{(K)}$, $\mathbf{R}_n^{(K)}$, $\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}$ para se denotar $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$, $\mathbf{R}_n^{(K)}(0)$ e $\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(0)$ respectivamente.

Exemplo

Para o exemplo do capítulo anterior, dado pela equação (2.16), as estatísticas de segunda ordem de $s(k)$, $\mathbf{x}(k)$ e $\mathbf{n}(k)$ são dadas respectivamente por

$$\mathbf{R}_s^{(3)}(m) = \begin{bmatrix} r_s(m) & r_s(m+1) & r_s(m+2) \\ r_s(m-1) & r_s(m) & r_s(m+1) \\ r_s(m-2) & r_s(m-1) & r_s(m) \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

3.1. ESTADÍSTICAS DE SEGUNDA ORDEM

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x^{(2)}(m) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x(m) & \mathbf{R}_x(m+1) \\ \mathbf{R}_x(m-1) & \mathbf{R}_x(m) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{x_1}(m) & r_{x_1x_2}(m) & r_{x_1}(m+1) & r_{x_1x_2}(m+1) \\ r_{x_2x_1}(m) & r_{x_2}(m) & r_{x_2x_1}(m+1) & r_{x_2}(m+1) \\ r_{x_1}(m-1) & r_{x_1x_2}(m-1) & r_{x_1}(m) & r_{x_1x_2}(m) \\ r_{x_2x_1}(m-1) & r_{x_2}(m-1) & r_{x_2x_1}(m) & r_{x_2}(m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n^{(2)}(m) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n(m) & \mathbf{R}_n(m+1) \\ \mathbf{R}_n(m-1) & \mathbf{R}_n(m) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{n_1}(m) & r_{n_1n_2}(m) & r_{n_1}(m+1) & r_{n_1n_2}(m+1) \\ r_{n_2n_1}(m) & r_{n_2}(m) & r_{n_2n_1}(m+1) & r_{n_2}(m+1) \\ r_{n_1}(m-1) & r_{n_1n_2}(m-1) & r_{n_1}(m) & r_{n_1n_2}(m) \\ r_{n_2n_1}(m-1) & r_{n_2}(m-1) & r_{n_2n_1}(m) & r_{n_2}(m) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ainda mais especificamente, para um atraso de $m = 0$, temos

$$\mathbf{R}_s^{(3)} = \mathbf{R}_s^{(3)}(0) = \begin{bmatrix} r_s(0) & r_s(1) & r_s(2) \\ r_s^*(1) & r_s(0) & r_s(1) \\ r_s^*(2) & r_s^*(1) & r_s(0) \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x^{(2)} = \mathbf{R}_x^{(2)}(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x(0) & \mathbf{R}_x(1) \\ \mathbf{R}_x^H(1) & \mathbf{R}_x(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{x_1}(0) & r_{x_1x_2}(0) & r_{x_1}(1) & r_{x_1x_2}(1) \\ r_{x_1x_2}^*(0) & r_{x_2}(0) & r_{x_2x_1}(1) & r_{x_2}(1) \\ r_{x_1}^*(1) & r_{x_2x_1}^*(1) & r_{x_1}(0) & r_{x_1x_2}(0) \\ r_{x_1x_2}^*(1) & r_{x_2}^*(1) & r_{x_1x_2}^*(0) & r_{x_2}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n^{(2)} = \mathbf{R}_n^{(2)}(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n(0) & \mathbf{R}_n(1) \\ \mathbf{R}_n^H(1) & \mathbf{R}_n(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_{n_1}(0) & r_{n_1n_2}(0) & r_{n_1}(1) & r_{n_1n_2}(1) \\ r_{n_1n_2}^*(0) & r_{n_2}(0) & r_{n_2n_1}(1) & r_{n_2}(1) \\ r_{n_1}^*(1) & r_{n_2n_1}^*(1) & r_{n_1}(0) & r_{n_1n_2}(0) \\ r_{n_1n_2}^*(1) & r_{n_2}^*(1) & r_{n_1n_2}^*(0) & r_{n_2}(0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.2 Relações estatísticas entre entrada, saída e ruído aditivo

Uma vez definidas as matrizes de autocorrelação dos sinais de entrada e saída e do ruído aditivo podemos estabelecer as suas relações. Para isso voltamos à equação matricial do sistema dada por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K)}(k). \quad (3.27)$$

Podemos facilmente calcular o valor esperado de $\mathbf{x}^{(K)}(k)\mathbf{x}^{(K)H}(k-m)$. Teremos então

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(m) &= E \left\{ \mathbf{x}^{(K)}(k)\mathbf{x}^{(K)H}(k-m) \right\} \\ &= E \left\{ \left[\mathbf{H}^{(K)}\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K)}(k) \right] \left[\mathbf{s}^{(K+M-1)H}(k-m)\mathbf{H}^{(K)H} + \mathbf{n}^{(K)H}(k-m) \right] \right\} \\ &= \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{R}_{\mathbf{s}}^{(K+M-1)}(m)\mathbf{H}^{(K)H} + \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{(K)}(m) \\ &\quad + \mathbf{H}^{(K)}E \left\{ \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)\mathbf{n}^{(K)H}(k-m) \right\} + E \left\{ \mathbf{n}^{(K)}(k)\mathbf{s}^{(K+M-1)H}(k-m) \right\} \mathbf{H}^{(K)H}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Quando o ruído aditivo é independente do sinal de entrada finalmente obtemos

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(m) = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{R}_{\mathbf{s}}^{(K+M-1)}(m)\mathbf{H}^{(K)H} + \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{(K)}(m). \quad (3.29)$$

Esta equação se mostrará muito importante no desenvolvimento dos algoritmos deste capítulo e carrega importantes informações sobre o posto de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(m)$.

Exemplo

Exemplificando a equação (3.29) para $K = 2$, $M = 2$ e $L = 2$ temos

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} r_{x_1}(m) & r_{x_1x_2}(m) & r_{x_1}(m+1) & r_{x_1x_2}(m+1) \\ r_{x_2x_1}(m) & r_{x_2}(m) & r_{x_2x_1}(m+1) & r_{x_2}(m+1) \\ r_{x_1}(m-1) & r_{x_1x_2}(m-1) & r_{x_1}(m) & r_{x_1x_2}(m) \\ r_{x_2x_1}(m-1) & r_{x_2}(m-1) & r_{x_2x_1}(m) & r_{x_2}(m) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_1(0) & h_1(1) & 0 \\ h_2(0) & h_2(1) & 0 \\ 0 & h_1(0) & h_1(1) \\ 0 & h_2(0) & h_2(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s(m) & r_s(m+1) & r_s(m+2) \\ r_s(m-1) & r_s(m) & r_s(m+1) \\ r_s(m-2) & r_s(m-1) & r_s(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^*(0) & h_2^*(0) & 0 & 0 \\ h_1^*(1) & h_2^*(1) & h_1^*(0) & h_2^*(0) \\ 0 & 0 & h_1^*(1) & h_2^*(1) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} r_{n_1}(m) & r_{n_1n_2}(m) & r_{n_1}(m+1) & r_{n_1n_2}(m+1) \\ r_{n_2n_1}(m) & r_{n_2}(m) & r_{n_2n_1}(m+1) & r_{n_2}(m+1) \\ r_{n_1}(m-1) & r_{n_1n_2}(m-1) & r_{n_1}(m) & r_{n_1n_2}(m) \\ r_{n_2n_1}(m-1) & r_{n_2}(m-1) & r_{n_2n_1}(m) & r_{n_2}(m) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.3. SISTEMA INVERSO MMSE MISO FIR

Mais especificamente para $m = 0$ temos

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} r_{x_1}(0) & r_{x_1x_2}(0) & r_{x_1}(1) & r_{x_1x_2}(1) \\ r_{x_1x_2}^*(0) & r_{x_2}(0) & r_{x_2x_1}(1) & r_{x_2}(1) \\ r_{x_1}^*(1) & r_{x_2x_1}^*(1) & r_{x_1}(0) & r_{x_1x_2}(0) \\ r_{x_1x_2}^*(1) & r_{x_2}^*(1) & r_{x_1x_2}^*(0) & r_{x_2}(0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} h_1(0) & h_1(1) & 0 \\ h_2(0) & h_2(1) & 0 \\ 0 & h_1(0) & h_1(1) \\ 0 & h_2(0) & h_2(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_s(0) & r_s(1) & r_s(2) \\ r_s^*(1) & r_s(0) & r_s(1) \\ r_s^*(2) & r_s^*(1) & r_s(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^*(0) & h_2^*(0) & 0 & 0 \\ h_1^*(1) & h_2^*(1) & h_1^*(0) & h_2^*(0) \\ 0 & 0 & h_1^*(1) & h_2^*(1) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} r_{n_1}(0) & r_{n_1n_2}(0) & r_{n_1}(1) & r_{n_1n_2}(1) \\ r_{n_1n_2}^*(0) & r_{n_2}(0) & r_{n_2n_1}(1) & r_{n_2}(1) \\ r_{n_1}^*(1) & r_{n_2n_1}^*(1) & r_{n_1}(0) & r_{n_1n_2}(0) \\ r_{n_1n_2}^*(1) & r_{n_2}^*(1) & r_{n_1n_2}^*(0) & r_{n_2}(0) \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

3.3 Sistema inverso MMSE MISO FIR

Após apresentadas as notações para as estatísticas de segunda ordem de sistemas SIMO e as relações entre as mesmas, podemos agora estender o nosso estudo de sistemas inversos MISO FIR para o caso estatístico. Conforme apresentado anteriormente na seção 2.3 do Capítulo 2, alguns autores chamam o sistema inverso MISO FIR perfeito de sistema inverso ZF (ou em comunicações digitais de equalizador ZF). Este obviamente não é o sistema inverso estatisticamente mais adequado quando há presença de ruído aditivo. Podemos então definir o sistema inverso MISO FIR que minimize o erro médio quadrático da estimação da entrada. Seu nome é simplesmente sistema inverso de mínimo erro médio quadrático (*minimum mean square error*, MMSE) sendo dado por

$$\mathbf{g}_i^{(K)} = \arg \min_{\mathbf{g}^{(K)}} \mathbb{E} \left[\left\| s(k-i) - \mathbf{g}^{(K)H} \mathbf{x}^{(K)}(k) \right\|^2 \right]. \tag{3.32}$$

Em comunicações digitais este sistema também é conhecido como *equalizador de mínimo erro médio quadrático* (*minimum mean square error equalizer*, equalizador MMSE). Iremos aqui desenvolver a solução de (3.32) e uma relação fechada entre esta solução, o sistema inverso MMSE MISO FIR $\mathbf{g}_i^{(K)}$, e o sistema inverso ZF MISO FIR $\mathbf{f}_i^{(K)}$ do capítulo anterior. Para isso primeiramente devemos reescrever

3.3. SISTEMA INVERSO MMSE MISO FIR

o termo a ser minimizado. Após algumas manipulações obtemos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\{ \left\| s(k-i) - \mathbf{g}^{(K)H} \mathbf{x}^{(K)}(k) \right\|^2 \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \left[s(k-i) - \mathbf{g}^{(K)H} \mathbf{x}^{(K)}(k) \right] \left[s^*(k-i) - \mathbf{x}^{(K)H}(k) \mathbf{g}^{(K)} \right] \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ s(k-i) s^*(k-i) \right\} + \mathbf{g}^{(K)H} \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}^{(K)}(k) \mathbf{x}^{(K)H}(k) \right\} \mathbf{g}^{(K)} \\
&\quad - \mathbf{g}^{(K)H} \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}^{(K)}(k) s^*(k-i) \right\} - \left\{ \mathbf{g}^{(K)H} \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}^{(K)}(k) s^*(k-i) \right\} \right\}^*
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Podemos resolver este problema de minimização derivando (3.33) com relação a $\mathbf{g}^{(K)}$ e igualando a zero. Temos então a solução fechada

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_i^{(K)} &= \mathbb{E} \left[s(k-i) \mathbf{x}^{(K)H}(k) \right] \left(\mathbb{E} \left[\mathbf{x}^{(K)}(k) \mathbf{x}^{(K)H}(k) \right] \right)^{-1} \\
&= \mathbb{E} \left[s(k-i) \mathbf{x}^{(K)H}(k) \right] \left(\mathbf{R}_x^{(K)} \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Utilizando

$$\mathbb{E} \left[s(k-m) \mathbf{x}^{(K)H}(k) \right] = \mathbf{f}_i^{(K)H} \left(\mathbf{R}_x^{(K)} - \mathbf{R}_n^{(K)} \right) \tag{3.35}$$

que pode ser facilmente provado, e supondo que temos ruído aditivo e branco, obtemos então a relação entre o sistema inverso ZF $\mathbf{f}_i^{(K)}$ de atraso i e o sistema inverso MMSE $\mathbf{g}_i^{(K)}$ de atraso i , dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_i^{(K)H} &= \mathbf{f}_i^{(K)H} \left(\mathbf{R}_x^{(K)} - \sigma_n^2 \mathbf{I}_{KL} \right) \left(\mathbf{R}_x^{(K)} \right)^{-1} \\
&= \mathbf{f}_i^{(K)H} \left[\mathbf{I}_{KL} - \sigma_n^2 \left(\mathbf{R}_x^{(K)} \right)^{-1} \right].
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Um fato importante a ser ressaltado é que esta relação pode ser expressa apenas pela inversa da matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_x^{(K)}$ do sinal de saída $\mathbf{x}^{(K)}(k)$ e pela variância σ_n^2 do ruído branco e aditivo. Ainda mais importante é o fato de que quando há ruído aditivo suficiente temos sempre $\mathbf{R}_x^{(K)}$ com posto completo, inversível e bem condicionada.

Recapitulando, até o momento foram apresentadas:

1. Notações matricias que representam sistemas SIMO FIR em uma janela de tempo K (seção 2.2 do Capítulo 2);
2. As soluções de sistemas inversos ZF MISO FIR para um sistema SIMO FIR conhecido (seção 2.3 do Capítulo 2);

3.4. ALGORITMO TXK

3. As soluções de sistemas quase-inversos MISO FIR a partir de um conjunto de sistemas inversos ZF MISO FIR (seção 2.4 do Capítulo 2);
4. As soluções de sistemas inversos MMSE MISO FIR para um sistema SIMO FIR conhecido incluindo-se aí suas estatísticas de entrada (seção atual);
5. A relação entre os sistemas inversos ZF MISO FIR e os sistemas inversos MMSE MISO FIR (seção atual).

Por fim em nenhum momento foram resolvidos os problemas de identificação e inversão *cega* (sem conhecimento da entrada e do próprio sistema) de sistemas SIMO FIR. Iniciaremos finalmente a apresentação de algoritmos que resolvam este problema. Na seção seguinte e no restante deste capítulo são apresentadas soluções estatísticas. No capítulo seguinte passamos para as soluções determinísticas.

3.4 Algoritmo TXK

O algoritmo Tong-Xu-Kailath (TXK), desenvolvido por (TONG; XU; KAILATH, 1991) e posteriormente detalhado por (TONG; XU; KAILATH, 1994), se destaca por ser o primeiro método de equalização cega a conseguir identificar e inverter um sistema SIMO FIR apenas com base nas estatísticas de segunda ordem das saídas do sistema e sem a imposição de fase-mínima. Por representar uma quebra de paradigma, tal algoritmo é aqui descrito e serve como base de comparação com outros.

3.4.1 Modelo do sistema

O modelo do sistema SIMO FIR utilizado pelo algoritmo TXK é dado por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K)}(k) \quad (3.37)$$

onde é suposto que:

3.4. ALGORITMO TXK

1. A entrada $\{s(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco e ergódico, e de variância unitária;
2. O ruído aditivo $\{\mathbf{n}(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco, ergódico e decorrelacionado de $\{s(k)\}$ e entre seus L termos;
3. A matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$ tem posto completo por coluna.

Logo a matriz de autocorrelação estendida $K + M - 1$ de $s(k)$ é

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(m) &= \mathbb{E}[\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)\mathbf{s}^{(K+M-1)H}(k-m)] \\ &= \begin{cases} (\mathbf{J}_{K+M-1})^m, & m \geq 0 \\ (\mathbf{J}_{K+M-1}^T)^m, & m < 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

a matriz de autocorrelação estendida K de $\mathbf{n}(k)$ é

$$\mathbf{R}_n^{(K)}(m) = \begin{cases} (\mathbf{J}_{KL})^m, & m \geq 0 \\ (\mathbf{J}_{KL}^T)^m, & m < 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

e a correlação de $\mathbf{n}(k)$ com $s(k)$ é

$$\mathbb{E}[\mathbf{n}(k)s^*(k-m)] = 0, \quad \forall m, \quad (3.40)$$

onde

$$\mathbf{J}_K \stackrel{\triangle}{=} \begin{matrix} (K \times K) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.41)$$

É importante, por fim, lembrar que a hipótese de que a matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$ tem posto completo por coluna quando K é maior ou igual a $M - 1$, corresponde, segundo o Teorema 2.5.1, a que as respostas ao impulso $h_1(k), h_2(k), \dots, h_L(k)$ não possuam nenhum zero em comum no domínio da transformada-Z, conforme a equação (2.31).

3.4.2 Desenvolvimento

As deduções do algoritmo TXK encontram-se em (TONG; XU; KAILATH, 1994) e seguem aqui reproduzidas com suas devidas simplificações e adaptações de nomenclatura.

Teorema 3.4.1. *Suponha que $\mathbf{H}^{(K)}$ e $\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)$ façam parte do modelo linear $\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)$, que $\mathbf{H}^{(K)}$ tenha posto completo por coluna e que $\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)$ seja um processo estacionário com média zero, branco e de variância unitária respeitando (3.38). Então $\mathbf{H}^{(K)}$ é determinado unicamente, exceto por uma constante multiplicativa, a partir de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(1)$.*

Prova. Suponha que existam dois conjuntos de fontes e sistemas SIMO FIR, por exemplo $\mathbf{H}^{(K)}$, $\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)$ e $\tilde{\mathbf{H}}^{(K)}$, $\tilde{\mathbf{s}}^{(K+M-1)}(k)$, satisfazendo o modelo linear e suas restrições conforme descrito no Teorema 3.4.1¹. Então temos que

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0) = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{R}_{\mathbf{s}}^{(K+M-1)}(0)\mathbf{H}^{(K)H} = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{H}^{(K)H} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(1) = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{R}_{\mathbf{s}}^{(K+M-1)}(1)\mathbf{H}^{(K)H} = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{J}\mathbf{H}^{(K)H} \quad (3.43)$$

e

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0) = \tilde{\mathbf{H}}^{(K)}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{s}}}^{(K+M-1)}(0)\tilde{\mathbf{H}}^{(K)H} = \tilde{\mathbf{H}}^{(K)}\tilde{\mathbf{H}}^{(K)H} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(1) = \tilde{\mathbf{H}}^{(K)}\mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{s}}}^{(K+M-1)}(1)\tilde{\mathbf{H}}^{(K)H} = \tilde{\mathbf{H}}^{(K)}\mathbf{J}\tilde{\mathbf{H}}^{(K)H}. \quad (3.45)$$

Logo

$$\mathbf{H}^{(K)}\mathbf{H}^{(K)H} = \tilde{\mathbf{H}}^{(K)}\tilde{\mathbf{H}}^{(K)H}, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{H}^{(K)}\mathbf{J}\mathbf{H}^{(K)H} = \tilde{\mathbf{H}}^{(K)}\mathbf{J}\tilde{\mathbf{H}}^{(K)H}. \quad (3.47)$$

A equação (3.46) implica em (VINOGRAD, 1950)

$$\tilde{\mathbf{H}}^{(K)} = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{Q} \quad (3.48)$$

¹Isto é, que $\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) = \tilde{\mathbf{H}}^{(K)}\tilde{\mathbf{s}}^{(K+M-1)}(k)$.

3.4. ALGORITMO TXK

onde \mathbf{Q} é uma matriz ortogonal. Substituindo (3.48) em (3.47) temos

$$\mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^H = \mathbf{J}. \quad (3.49)$$

Denotando a i -ésima coluna de \mathbf{Q} como \mathbf{q}_i , a equação (3.49) nos dá uma cadeia de Jordan de tamanho $D = K + M - 1$ associada ao autovalor zero da matriz de deslocamento \mathbf{J} e dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_2, \\ &\vdots \\ \mathbf{J}\mathbf{q}_{n-1} &= \mathbf{q}_n, \\ \mathbf{J}\mathbf{q}_n &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Como $\|\mathbf{q}_n\| = 1$, a última equação em (3.50) implica em $\mathbf{q}_n = [0 \ \cdots \ 0 \ e^{j\phi}]^T$ para algum ϕ real, e conseqüentemente $\mathbf{Q} = e^{j\phi}\mathbf{I}$. Assim temos finalmente, de (3.48), que $\mathbf{H}^{(K)} = \tilde{\mathbf{H}}^{(K)}e^{j\phi}$. \square

Sendo uma prova alternativa do teorema acima, o lema a seguir fornece um método computacional para a identificação de $\mathbf{H}^{(K)}$ a partir de $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$ e $\mathbf{R}_x^{(K)}(1)$.

Lema 3.4.1. *Faça com que $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$ tenha a seguinte decomposição em valores singulares,*

$$\mathbf{U}^H \mathbf{R}_x^{(K)}(0) \mathbf{U} = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_D^2, 0, \dots, 0). \quad (3.51)$$

Fazendo \mathbf{u}_i denotar a i -ésima coluna de \mathbf{U} , e fazendo

$$\mathbf{U}_s = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_D], \quad (3.52)$$

$$\mathbf{\Sigma}_s = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_D), \quad (3.53)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Sigma}_s^{-1} \mathbf{U}_s^H. \quad (3.54)$$

Suponha que

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{R}_x^{(K)}(1) \mathbf{F}^H \quad (3.55)$$

tenha a decomposição em valores singulares com a forma

$$[\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_D]^H \mathbf{R} [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \cdots \ \mathbf{z}_D] = \text{diag}(\gamma_1^2, \dots, \gamma_D^2). \quad (3.56)$$

3.4. ALGORITMO TXK

Então existe uma fase ϕ de tal forma que

$$\mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{Q} e^{j\phi} \quad (3.57)$$

onde

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{y}_D \quad \mathbf{R}\mathbf{y}_D \quad \cdots \quad \mathbf{R}^{D-1}\mathbf{y}_D], \quad (3.58)$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{Q} = [(\mathbf{R}^\dagger)^{D-1} \mathbf{z}_D \quad (\mathbf{R}^\dagger)^{(D-2)} \mathbf{z}_D \quad \cdots \quad \mathbf{z}_D]. \quad (3.59)$$

Prova. $\mathbf{H}^{(K)}$ satisfaz a restrição imposta por $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$

$$\mathbf{H}^{(K)} \mathbf{H}^{(K)H} = \mathbf{R}_x^{(K)}(0). \quad (3.60)$$

A partir de (3.51), temos que

$$\mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{V} \quad (3.61)$$

onde $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_D]$ é uma matriz ortogonal. Então temos

$$\mathbf{F} \mathbf{H}^{(K)} = \Sigma_s^{-1} \mathbf{U}_s^H \mathbf{U}_s \Sigma_s \mathbf{V} = \mathbf{V}. \quad (3.62)$$

Como $\mathbf{R}_x^{(K)}(1) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{J} \mathbf{H}^{(K)H}$, obtem-se

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{R}_x^{(K)}(1) \mathbf{F}^H = \mathbf{F} \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{J} \mathbf{H}^{(K)H} \mathbf{F}^H = \mathbf{V} \mathbf{J} \mathbf{V}^H. \quad (3.63)$$

Lembrando-se que \mathbf{V} é uma matriz ortogonal, a parte à direita da equação acima é uma decomposição de Jordan de \mathbf{R} que nos remete a familiar cadeia de Jordan

$$\mathbf{R} \mathbf{v}_q = \mathbf{v}_{q+1}, \quad q = 1, \dots, D-1, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{v}_D = 0. \quad (3.65)$$

Infelizmente não é computacionalmente confiável se obter \mathbf{V} a partir da decomposição de Jordan de \mathbf{R} . Esta dificuldade é contornada pelo fato de \mathbf{v}_D ser também um vetor singular de \mathbf{R} . Calculando $\mathbf{R}^H \mathbf{R}$ temos

$$\mathbf{R}^H \mathbf{R} = \mathbf{V} \text{diag}(1, \dots, 1, 0) \mathbf{V}^H. \quad (3.66)$$

3.4. ALGORITMO TXK

Fica claro pela equação anterior que a matriz \mathbf{R} tem um e apenas um valor singular igual a zero e que \mathbf{v}_D é um vetor singular à direita de \mathbf{R} associado ao valor singular zero. Logo se \mathbf{R} tem uma decomposição em valores singulares como em (3.56), isto é, se

$$[\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_D]^H \mathbf{R} [\mathbf{z}_1 \ \cdots \ \mathbf{z}_D] = \text{diag}(\gamma_1^2, \dots, \gamma_D^2). \quad (3.67)$$

então existe uma fase ϕ de tal forma que

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{z}_D e^{j\phi} \quad (3.68)$$

Agora o problema é resolver (3.64) e (3.65) para \mathbf{v}_i dado \mathbf{v}_D como em (3.68). Considere a equação envolvendo \mathbf{v}_D e \mathbf{v}_{D-1} ,

$$\mathbf{R} \mathbf{v}_{D-1} = \mathbf{v}_D. \quad (3.69)$$

Apesar de \mathbf{R} ser singular (posto $D - 1$), duas observações implicam em \mathbf{v}_M ser *unicamente* determinado pela equação acima. São elas

$$\|\mathbf{R}\| = 1, \quad (3.70)$$

que é evidente a partir de (3.66), e \mathbf{V} ser ortonormal, logo

$$\|\mathbf{v}_D\| = \|\mathbf{v}_{D-1}\| = 1. \quad (3.71)$$

Estas duas observações levam a (3.59). A dedução de (3.58) é similar. Calculando $\mathbf{R}\mathbf{R}^H$ temos

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^H = \mathbf{V} \text{diag}(0, 1, \dots, 1) \mathbf{V}^H. \quad (3.72)$$

É então fácil provar que \mathbf{v}_1 é um vetor singular à esquerda de \mathbf{R} associado ao valor singular zero, deixando por fim (3.58) evidente. \square

Ruído branco aditivo

O lema anterior nos fornece as partes essenciais do algoritmo TXK, restando apenas o tratamento dos dados quando há presença de ruído branco aditivo. Assim, considere o processo estacionário $\mathbf{x}(k)$ satisfazendo

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K)}(k). \quad (3.73)$$

3.4. ALGORITMO TXK

A matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_x^{(K)}(m)$ satisfaz

$$\mathbf{R}_x^{(K)}(m) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(m) \mathbf{H}^{(K)H} + \mathbf{R}_n^{(K)}(m). \quad (3.74)$$

Quando se utiliza a hipótese de ruído branco, $\mathbf{R}_n^{(K)}(m)$ tem a forma

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n^{(K)}(m) &= \text{E} [\mathbf{n}(k) \mathbf{n}^H(k-m)] \\ &= \sigma_n^2 \mathbf{J}_{KL}^m \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde σ_n^2 é a variância *desconhecida* do ruído aditivo e \mathbf{J} é a matriz de deslocamento.

Apesar da matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_x^{(K)}(m)$ e do máximo tamanho da resposta ao impulso do sistema SIMO FIR M não serem conhecidos *a priori*, eles podem ser estimados a partir da matriz de covariância $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$. Pode ser mostrado que a decomposição em valores singulares de $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$ tem de ter a forma

$$\mathbf{U}^H \mathbf{R}_x^{(K)}(0) \mathbf{U} = \text{diag}(\rho_1 + \sigma_n^2, \dots, \rho_D + \sigma_n^2, \sigma_n^2, \dots, \sigma_n^2) \quad (3.76)$$

onde $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_D \geq 0$. Logo tanto σ_n^2 quanto D podem em teoria ser obtidos pela determinação dos valores singulares mais significativos de $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$. Na prática um teste de limiar pode ser empregado para determinar D . O resultado desta estimação pode ser então utilizado para se estimar σ_n^2 a partir dos $KL - D$ valores singulares menos significativos da matriz de covariância $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$. Outra possibilidade mais simples é utilizar o menor autovalor de $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$. Já M é simplesmente dado por

$$M = D - K + 1, \quad (3.77)$$

como pode ser facilmente demonstrado.

Um exemplo de estimação do sub-espaço de sinal é obtido pela aplicação do critério MDL (WAX; KAILATH, 1985), apresentado no Apêndice B.

Finalmente, com a obtenção da estimativa $\hat{\sigma}_n^2$, o procedimento de identificação do sistema proposto no lema anterior pode ser facilmente adaptado para incluir o tratamento do ruído, subtraindo da matriz de autocorrelação estimada dos dados observados o efeito do ruído branco aditivo, conforme

$$\mathbf{R}_0 \underset{(KL \times KL)}{=} \hat{\mathbf{R}}_x^{(K)}(0) - \hat{\sigma}_n^2 \mathbf{I}_{KL}. \quad (3.78)$$

3.4.3 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N-1) = [\mathbf{x}^T(N-1) \quad \mathbf{x}^T(N-2) \quad \dots \quad \mathbf{x}^T(0)]^T$ do sistema SIMO FIR;
2. Tamanho K da janela escolhida para o modelo do sistema SIMO FIR dado pela equação (3.37) (deve ser maior ou igual a $M-1$ para garantir que $\mathbf{H}^{(K)}$ tenha posto completo por coluna sempre que as respostas ao impulso do sistema não possuam zeros em comum);
3. (Opcional, pois pode ser estimado) Tamanho M das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR;
4. (Opcional, pois pode ser estimado) Variância $\sigma_{\mathbf{n}}^2$ do ruído aditivo presente em $\mathbf{x}^{(N)}(N-1)$.

Saída

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}^{(K)}$ da matriz de filtragem das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR.

Pseudo-código

1. Estimar $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(1)$ a partir de $\mathbf{x}^{(N)}(N-1)$;
2. (Opcional) Estimar a dimensão do subespaço de sinal $D = M + K - 1$ e a variância do ruído aditivo gaussiano $\sigma_{\mathbf{n}}^2$ a partir de $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$, utilizando por exemplo o critério MDL² (WAX; KAILATH, 1985);

²Para descrição sucinta do critério MDL, consultar Apêndice B.

3.4. ALGORITMO TXK

3. Retirar de $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$ o efeito do ruído aditivo presente em $\mathbf{x}^{(N)}(N-1)$, gerando assim \mathbf{R}_0 por

$$\mathbf{R}_0 = \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)} - \hat{\sigma}_{\mathbf{n}}^2 \mathbf{I}_{KL}; \quad (3.79)$$

4. Calcular a decomposição em valores singulares de \mathbf{R}_0 conforme

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H; \quad (3.80)$$

5. Denotando os \hat{D} maiores valores singulares de \mathbf{R}_0 como $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_{\hat{D}} \geq 0$ e seus respectivos vetores singulares à esquerda como $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{\hat{D}}$, montar as matrizes \mathbf{U}_s e $\mathbf{\Sigma}_s$ conforme

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_{\hat{D}} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

e

$$\mathbf{\Sigma}_s = \text{diag}(\sqrt{\rho_1}, \sqrt{\rho_2}, \dots, \sqrt{\rho_{\hat{D}}}) \quad (3.82)$$

e calcular

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Sigma}_s^{-1} \mathbf{U}_s^H; \quad (3.83)$$

6. Calcular \mathbf{R} segundo

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \left[\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)}(1) - \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{n}}^{(K)}(1) \right] \mathbf{F}^H, \quad (3.84)$$

onde

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{n}}^{(K)}(1) = \hat{\sigma}_{\mathbf{n}}^2 \mathbf{J}_{KL}^L. \quad (3.85)$$

7. Denotando $\mathbf{y}_{\hat{D}}$ como o vetor singular à esquerda associado ao menor valor singular de \mathbf{R} e $\mathbf{z}_{\hat{D}}$ como o vetor singular à direita associado ao menor valor singular de \mathbf{R} , calcular uma estimativa de $\mathbf{H}^{(K)}$ por

$$\hat{\mathbf{H}}^{(K)} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s \mathbf{Q} \quad (3.86)$$

onde \mathbf{Q} pode ser calculado por

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{y}_{\hat{D}} \quad \mathbf{R}\mathbf{y}_{\hat{D}} \quad \dots \quad \mathbf{R}^{\hat{D}-1}\mathbf{y}_{\hat{D}}], \quad (3.87)$$

ou

$$\mathbf{Q} = [(\mathbf{R}^\dagger)^{\hat{D}-1} \mathbf{z}_{\hat{D}} \quad (\mathbf{R}^\dagger)^{\hat{D}-2} \mathbf{z}_{\hat{D}} \quad \dots \quad \mathbf{z}_{\hat{D}}], \quad (3.88)$$

ou alguma combinação dos dois.

3.4.4 Deficiências

Ausência da estrutura toeplitz por blocos em $\mathbf{H}^{(K)}$

Cabe ressaltar que muito embora o algoritmo TXK seja o pioneiro na solução do problema de identificação de sistemas SIMO FIR, ele não utiliza a estrutura toeplitz por blocos presente na matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$. Ao invés disso o algoritmo TXK estima uma matriz $\mathbf{H}^{(K)}$ cheia, sem a estrutura toeplitz por blocos perfeitamente imposta. Isto gera por exemplo coeficientes diferentes de zero onde se sabe de antemão que o coeficiente é obrigatoriamente zero devido as valores de M e de K . Uma solução simples e possível é zerar os elementos que obrigatoriamente se sabe serem zero e retirar uma média aritmética dos coeficientes estimados para cada resposta ao impulso do sistema SIMO FIR. Como exemplo poderíamos ter uma matriz original com sendo

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

e a mesma matriz estimada pelo algoritmo TXK com sendo

$$\hat{\mathbf{H}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,012 & 0,987 & 0,045 \\ 0,959 & -1,023 & -0,121 \\ 0,098 & 1,012 & 0,992 \\ 0,023 & 0,912 & -0,945 \end{bmatrix}. \quad (3.90)$$

Diferentemente do algoritmo TXK, os algoritmos seguintes exploram esta estrutura toeplitz por blocos para melhor estimar a matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$ e, por consequência, as respostas ao impulso do sistema SIMO FIR.

Ausência de robustez quanto ao máximo tamanho das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR, M

O algoritmo TXK ainda necessita de uma estimativa muito boa de M pois variações pequenas, de uma unidade apenas, são geralmente catastróficas na estimação de $\mathbf{H}^{(K)}$ (MERAİM et al., 1995). Principalmente esta deficiência motivou o posterior desenvolvimento de vários algoritmos, alguns dos quais apresentados aqui.

3.5 Algoritmo SSM

O algoritmo do Método dos Subespaços (*Subspace Method*, SSM), desenvolvido por (MOULINES et al., 1994) e (MOULINES et al., 1995), utiliza a ortogonalidade entre o subespaço de sinal e de ruído para, a partir de $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$ apenas, encontrar $\mathbf{H} = [\mathbf{h}(0) \quad \mathbf{h}(1) \quad \dots \quad \mathbf{h}(M-1)]$. Tem como principais vantagens em relação ao algoritmo TXK ser menos restritivo quanto ao sinal de entrada, que pode ser colorido, e utilizar o conhecimento da estrutura toeplitz por blocos de $\mathbf{H}^{(K)}$, isto é, tem como variáveis desconhecidas explicitamente apenas os valores em \mathbf{H} .

3.5.1 Modelo do sistema

Da mesma forma que o algoritmo TXK, o modelo do sistema SIMO FIR utilizado pelo algoritmo SSM é também dado por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K)}(k) \quad (3.91)$$

onde, neste caso, é suposto que:

1. $\{s(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, *colorido* ($\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(0)$ tem posto completo) e ergódico;
2. $\{\mathbf{n}(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco, ergódico e decorrelacionado de $\{s(k)\}$ e entre seus L termos;
3. A matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K-1)}$ tem posto completo por coluna;

Cabe ressaltar que diferentemente do algoritmo TXK, o algoritmo SSM permite um sinal de entrada *colorido*.

3.5.2 Desenvolvimento

Segue aqui reproduzido o desenvolvimento do algoritmo SSM, originalmente exposto por (MOULINES et al., 1994) e (MOULINES et al., 1995). De forma a simpli-

3.5. ALGORITMO SSM

ficar a notação nesta seção foi retirado o índice (0) de todas as matrizes de correlação visto que aqui não são utilizadas outras matrizes senão $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$, $\mathbf{R}_n^{(K)}(0)$ e $\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(0)$.

Como $\mathbf{n}(k)$ é decorrelacionado de $s(k)$, temos que

$$\mathbf{R}_x^{(K)} = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{R}_s^{(K+M-1)} \mathbf{H}^{(K)H} + \mathbf{R}_n^{(K)}. \quad (3.92)$$

Decomposição em subespaços

Denote os autovalores de $\mathbf{R}_x^{(K)}$ como $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{KL}$. Como $\mathbf{H}^{(K)}$ tem posto completo por coluna e $\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}$ tem posto completo, o subespaço de sinal de $\mathbf{R}_x^{(K)}$ tem posto $K + M - 1$. Supondo ainda que $\{\mathbf{n}(k)\}$ é branco com variância σ_n^2 , temos

$$\begin{aligned} \lambda_i &> \sigma_n^2, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, K + M - 1 \\ \lambda_i &= \sigma_n^2, \quad \text{para } i = K + M, K + M + 1, \dots, KL. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Denote agora os autovetores associados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{K+M-1}$ como sendo $\mathbf{u}_1^{(K)}, \mathbf{u}_2^{(K)}, \dots, \mathbf{u}_{K+M-1}^{(K)}$, e os autovetores associados a $\lambda_{K+M}, \lambda_{K+M+1}, \dots, \lambda_{KL}$ como sendo $\mathbf{v}_1^{(K)}, \mathbf{v}_2^{(K)}, \dots, \mathbf{v}_{KL-K-M+1}^{(K)}$. Defina-se então

$$\mathbf{U}_{(KL \times K+M-1)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(K)} & \mathbf{u}_2^{(K)} & \dots & \mathbf{u}_{K+M-1}^{(K)} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

e

$$\mathbf{V}_{(KL \times KL-K-M+1)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{(K)} & \mathbf{v}_2^{(K)} & \dots & \mathbf{v}_{KL-K-M+1}^{(K)} \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

Logo, a matriz de correlação estendida $\mathbf{R}_x^{(K)}$ pode ser expressa por

$$\mathbf{R}_x^{(K)} = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{K+M-1}) \mathbf{U}^H + \sigma_n^2 \mathbf{V} \mathbf{V}^H. \quad (3.96)$$

As colunas da matriz \mathbf{U} geram o assim chamado subespaço de sinal, de dimensão $K + M - 1$, enquanto as colunas de \mathbf{V} geram o seu complemento ortogonal, o subespaço de ruído. O mesmo subespaço de sinal também é gerado pelas colunas da matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$. Pela ortogonalidade do subespaço de sinal e de ruído,

3.5. ALGORITMO SSM

as colunas de $\mathbf{H}^{(K)}$ são ortogonais a qualquer vetor no subespaço de ruído, logo temos que

$$\mathbf{v}_i^{(K)} \mathbf{H}^{(K)} = 0, \quad 1 \leq i \leq KL - K - M + 1, \quad (3.97)$$

a equação na qual o algoritmo se baseia. Vale ressaltar que a equação (3.97) é linear para as variáveis desconhecidas em $\mathbf{H}^{(K)}$. Isto então nos permite a utilização de procedimentos de identificação simples desde que esta equação realmente caracterize os coeficientes das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR. O teorema a seguir estabelece as condições sobre as quais o subespaço de ruído determina as respostas ao impulso do sistema SIMO FIR até uma constante multiplicativa, restrição inerente ao problema.

Teorema 3.5.1. *Suponha que $\tilde{\mathbf{H}}^{(K)}$ seja uma matriz de filtragem diferente de zero com as mesmas dimensões de $\mathbf{H}^{(K)}$. Suponha que $\tilde{\mathbf{h}}^{(M)}$ e $\mathbf{h}^{(M)}$ sejam vetores com os coeficientes das respostas ao impulso presentes em $\tilde{\mathbf{H}}^{(K)}$ e $\mathbf{H}^{(K)}$ respectivamente, isto é, suponha que*

$$\underset{(KL \times K+M-1)}{\mathbf{H}^{(K)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \dots & \mathbf{h}^{(M-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}(0) & \dots & \mathbf{h}^{(M-1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathbf{h}(0) & \dots & \mathbf{h}^{(M-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

$$\underset{(KL \times K+M-1)}{\tilde{\mathbf{H}}^{(K)}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}(0) & \dots & \tilde{\mathbf{h}}^{(M-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{h}}(0) & \dots & \tilde{\mathbf{h}}^{(M-1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \tilde{\mathbf{h}}(0) & \dots & \tilde{\mathbf{h}}^{(M-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.99)$$

$$\mathbf{h}^{(M)} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{(M-1)} \\ \mathbf{h}^{(M-2)} \\ \vdots \\ \mathbf{h}(0) \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

e

$$\tilde{\mathbf{h}}^{(M)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}^{(M-1)} \\ \tilde{\mathbf{h}}^{(M-2)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix}. \quad (3.101)$$

Caso $K \geq M - 1$ e a matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K-1)}$ tenha posto completo por coluna (i.e. $\text{posto}(\mathbf{H}^{(K-1)}) = K + M - 2$), então o espaço gerado pelas colunas de

3.5. ALGORITMO SSM

$\tilde{\mathbf{H}}^{(K)}$ esta incluído no espaço gerado pelas colunas de $\mathbf{H}^{(K)}$ se e somente se $\tilde{\mathbf{h}}^{(M)}$ e $\mathbf{h}^{(M)}$ forem proporcionais, isto é, se e somente se

$$\tilde{\mathbf{h}}^{(M)} = \alpha \mathbf{h}^{(M)}. \quad (3.102)$$

Demonstração. Segue a demonstração conforme (MOULINES et al., 1995). Como $\mathbf{H}^{(K)}$ é toeplitz por blocos, podemos escrever

$$\mathbf{H}^{(K)} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{U} \\ \mathbf{0}_{(K-1)L,1} & \mathbf{H}^{(K-1)} \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

onde

$$\mathbf{U} = [\mathbf{h}(1) \quad \cdots \quad \mathbf{h}(M-1) \quad \mathbf{0}_{L,K-1}], \quad (3.104)$$

e

$$\mathbf{H}^{(K)} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(K-1)} & \mathbf{0}_{(K-1)L,1} \\ \mathbf{L} & \mathbf{h}(M-1) \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

onde

$$\mathbf{L} = [\mathbf{0}_{L,K-1} \quad \mathbf{h}(0) \quad \cdots \quad \mathbf{h}(M-2)]. \quad (3.106)$$

Temos duas condições equivalentes dentro do teorema. São elas:

1. O espaço gerado pelas colunas de $\tilde{\mathbf{H}}^{(K)}$ está incluído no espaço gerado pelas colunas de $\mathbf{H}^{(K)}$;
2. $\tilde{\mathbf{h}}^{(M)}$ e $\mathbf{h}^{(M)}$ são proporcionais.

A única dificuldade encontra-se em provar que a primeira condição implica na segunda. Sob a primeira condição o vetor $[\tilde{\mathbf{h}}^T(0) \quad \mathbf{0}_{1,(K-1)L}]^T$ está tanto no espaço gerado pelas linhas³ de $\mathbf{H}^{(K)}$ quando consideramos por exemplo uma função $f(\mathbf{z}) = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{z}$ quanto no espaço gerado pelas linhas⁴ de $\tilde{\mathbf{H}}^{(K)}$. Logo, existe um escalar complexo α_0 e um vetor \mathbf{x}_0 de dimensão $K + M - 2$, de forma que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{h}}(0) \\ \mathbf{0}_{(K-1)L,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{U} \\ \mathbf{0}_{(K-1)L,1} & \mathbf{H}^{(K-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix}. \quad (3.107)$$

³Isto é, a imagem de $\mathbf{H}^{(K)}$ conforme chamado em álgebra linear

⁴A imagem de $\tilde{\mathbf{H}}^{(K)}$

3.5. ALGORITMO SSM

Podemos reescrever este sistema sob a forma

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{h}}(0) &= \alpha_0 \mathbf{h}(0) + \mathbf{U} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0}_{(K-1)L,1} &= \mathbf{H}^{(K-1)} \mathbf{x}_0.\end{aligned}\tag{3.108}$$

Como supomos que a matriz $\mathbf{H}^{(K-1)}$ tem posto completo por coluna, a segunda relação implica em $\mathbf{x}_0 = 0$. Este resultado nos leva então a

$$\tilde{\mathbf{h}}(0) = \alpha_0 \mathbf{h}(0),\tag{3.109}$$

isto é, os vetores $\mathbf{h}(0)$ e $\tilde{\mathbf{h}}(0)$ são colineares. Da mesma forma $\left[\tilde{\mathbf{h}}^T(1) \quad \tilde{\mathbf{h}}^T(0) \quad \mathbf{0}_{1,(K-2)L} \right]^T$ pertence à imagem de $\mathbf{H}^{(K)}$ de forma que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{h}}(1) &= \alpha_1 \mathbf{h}(0) + \mathbf{U} \mathbf{x}_1 \\ \alpha_0 \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \mathbf{0}_{(K-2)L,1} \end{bmatrix} &= \mathbf{H}^{(K-1)} \mathbf{x}_1.\end{aligned}\tag{3.110}$$

Mais uma vez por hipótese temos que $\mathbf{H}^{(K-1)}$ tem posto completo por coluna. Como o vetor $\left[\tilde{\mathbf{h}}^T(0) \quad \mathbf{0}_{1,(K-2)L} \right]^T$ também é a primeira coluna de $\mathbf{H}^{(K-1)}$ temos que $\mathbf{x}_1 = [\alpha_0 \quad \mathbf{0}_{1,K+M-2}]^T$. Substituindo esta relação na equação $\tilde{\mathbf{h}}(1) = \alpha_1 \mathbf{h}(0) + \mathbf{U} \mathbf{x}_1$, temos

$$\tilde{\mathbf{h}}(1) = \alpha_1 \mathbf{h}(0) + \alpha_0 \mathbf{h}(1).\tag{3.111}$$

Logo o vetor $\tilde{\mathbf{h}}(1)$ pertence ao espaço gerado por $\mathbf{h}(0)$ e $\mathbf{h}(1)$. Iterando M vezes esta construção podemos evidenciar M fatores complexos $\alpha_0, \dots, \alpha_{M-1}$ de forma que

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{h}}(0) &= \alpha_0 \mathbf{h}(0) \\ \tilde{\mathbf{h}}(1) &= \alpha_1 \mathbf{h}(0) + \alpha_0 \mathbf{h}(1) \\ &\vdots \\ \tilde{\mathbf{h}}(M-1) &= \alpha_{M-1} \mathbf{h}(0) + \alpha_{M-2} \mathbf{h}(1) + \dots + \alpha_0 \mathbf{h}(M-1).\end{aligned}\tag{3.112}$$

Fazendo o mesmo desenvolvimento na direção oposta, isto é, de baixo para cima, começando por $\tilde{\mathbf{h}}(M-1)$, chegamos a outras M constantes $\beta_0, \dots, \beta_{M-1}$ de forma

3.5. ALGORITMO SSM

que

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{h}}(0) &= \beta_0 \mathbf{h}(M-1) + \alpha_1 \mathbf{h}(M-2) + \cdots + \beta_{M-1} \mathbf{h}(0) \\
 \tilde{\mathbf{h}}(1) &= \beta_1 \mathbf{h}(M-1) + \cdots + \beta_{M-1} \mathbf{h}(1) \\
 &\vdots \\
 \tilde{\mathbf{h}}(M-1) &= \beta_{M-1} \mathbf{h}(M-1).
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

As relações em (3.112) e (3.113) são simultaneamente satisfeitas e podem ser expressas conjuntamente em forma matricial por

$$\mathbf{H}^{(M)} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{H}^{(M)} \boldsymbol{\beta} \tag{3.114}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \underset{(2M-1 \times 1)}{\boldsymbol{\alpha}} &= [\alpha_{M-1} \quad \alpha_{M-2} \quad \cdots \quad \alpha_0 \quad \mathbf{0}_{1,M-1}]^T \\
 \underset{(2M-1 \times 1)}{\boldsymbol{\beta}} &= [\mathbf{0}_{1,M-1} \quad \beta_{M-1} \quad \beta_{M-2} \quad \cdots \quad \beta_0]^T
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

Como $\mathbf{H}^{(M)}$ tem posto completo por coluna, a única solução para o sistema é $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$. Esta última condição implica em

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \beta_{M-1} \\
 \alpha_i &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, M-1 \\
 \beta_i &= 0 \quad \forall i = 0, \dots, M-2.
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

Isto significa, juntamente com (3.112), que todos os vetores $\mathbf{h}(i)$, para $i = 0, \dots, M-1$, são colineares aos vetores $\tilde{\mathbf{h}}(i)$, para $i = 0, \dots, M-1$. \square

Sendo assim, a equação (3.97) é suficiente para determinar $\mathbf{H}^{(K)}$ pelo método SSM se e somente se $\mathbf{H}^{(K-1)}$ tenha posto completo por coluna.

Estimação de $\mathbf{H}^{(K)}$ pelo subespaço de ruído

A condição de ortogonalidade imposta pela equação (3.97) é linear para os coeficientes das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR e pode ser utilizada

3.5. ALGORITMO SSM

para determinar $\mathbf{H}^{(K)}$ no sentido dos mínimos quadrados, muito embora esta não seja uma abordagem ótima sob o ponto de vista estatístico. Para isso são utilizadas estimativas $\hat{\mathbf{v}}_i^{(K)}$ dos autovetores que geram o subespaço de ruído de $\mathbf{H}^{(K)}$. Logo, para resolvermos este problema, basta minimizar a forma quadrática

$$q(\mathbf{h}^{(M)}) \triangleq \sum_{i=1}^{KL-M-K+1} \left\| \mathbf{v}_i^{(K)H} \mathbf{H}^{(K)} \right\|^2 \quad (3.117)$$

onde a notação acima tem a intenção de explicitar que o critério de mínimos quadrados está em função dos coeficientes das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR. O lema abaixo é uma forma de explicitar a dependência da função $q(\mathbf{h}^{(M)})$ de $\mathbf{h}^{(M)}$ através de uma relação similar à propriedade de comutatividade no operador de convolução.

Lema 3.5.1. *A relação estrutural abaixo é válida:*

$$\mathbf{f}^{(K)T} \mathbf{G}^{(K)} = \mathbf{g}^{(M)T} \mathbf{F}^{(M)}, \quad (3.118)$$

onde

$$\mathbf{G}^{(K)}_{(KL \times K+M-1)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{(0)} & \dots & \mathbf{g}^{(M-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{g}^{(0)} & \dots & \mathbf{g}^{(M-1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathbf{g}^{(0)} & \dots & \mathbf{g}^{(M-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.119)$$

$$\mathbf{g}^{(M)}_{(ML \times 1)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{(M-1)} \\ \mathbf{g}^{(M-2)} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad (3.120)$$

$$\mathbf{g}^{(m)}_{(L \times 1)} \triangleq \begin{bmatrix} g_1(m) & g_2(m) & \dots & g_L(m) \end{bmatrix}^T, \quad (3.121)$$

$$\mathbf{F}^{(M)}_{(ML \times K+M-1)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(0)} & \dots & \mathbf{f}^{(K-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{f}^{(0)} & \dots & \mathbf{f}^{(K-1)} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathbf{f}^{(0)} & \dots & \mathbf{f}^{(K-1)} \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

$$\mathbf{f}^{(K)}_{(KL \times 1)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(K-1)} \\ \mathbf{f}^{(K-2)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

3.5. ALGORITMO SSM

e

$$\mathbf{f}(m) \stackrel{\triangle}{=} \begin{bmatrix} f_1(m) & f_2(m) & \cdots & f_L(m) \end{bmatrix}^T. \quad (3.124)$$

Assim, o quadrado da norma quadrática de $\mathbf{v}_i^{(K)H} \mathbf{H}^{(K)}$ pode ser expresso por

$$\left\| \mathbf{v}_i^{(K)H} \mathbf{H}^{(K)} \right\|^2 = \mathbf{v}_i^{(K)H} \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{H}^{(K)H} \mathbf{v}_i^{(K)} = \mathbf{h}^{(M)H} \mathbf{V}_i^{(M)} \mathbf{V}_i^{(M)H} \mathbf{h}^{(M)} \quad (3.125)$$

onde $\mathbf{V}_i^{(M)}$ é a matriz de filtragem $ML \times K + M - 1$ associada ao vetor $\mathbf{v}_i^{(K)}$, conforme o Lema 3.5.1. A equação (3.117) pode então ser escrita como

$$q(\mathbf{h}^{(M)}) = \mathbf{h}^{(M)H} \mathbf{Q} \mathbf{h}^{(M)} \quad (3.126)$$

onde

$$\mathbf{Q}_{(ML \times ML)} = \sum_{i=1}^{KL-K-M+1} \mathbf{V}_i^{(M)} \mathbf{V}_i^{(M)H}. \quad (3.127)$$

De acordo com o Teorema 3.5.1, se a forma quadrática for construída a partir da matriz de correlação estendida $\mathbf{R}_x^{(K)}$ verdadeira, então os coeficientes das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR podem ser recuperados até um fator escalar. Por outro lado, caso apenas uma estimativa ruidosa da matriz de correlação estendida $\hat{\mathbf{R}}_x^{(K)}$ esteja disponível, a forma quadrática $q(\mathbf{h}^{(M)})$ não terá exatamente posto KL . Logo estimativas de $\mathbf{h}^{(M)}$ podem ser obtidas minimizando $q(\mathbf{h}^{(M)})$ com alguma restrição devidamente escolhida que impeça a solução trivial $\mathbf{h}^{(M)} = 0$. Diferentes restrições resultam em diferentes soluções. Em (MOULINES et al., 1995) foram consideradas minimizações sujeitas a:

1. *Restrição quadrática* – Minimizar $q(\mathbf{h}^{(M)})$ sujeito a $\|\mathbf{h}^{(M)}\| = 1$. A solução é o autovetor associado ao menor autovalor de \mathbf{Q} .
2. *Restrição linear* – Minimizar $q(\mathbf{h}^{(M)})$ sujeito a $\mathbf{c}^{(M)H} \mathbf{h}^{(M)} = 1$ onde $\mathbf{c}^{(M)}$ é um vetor coluna $ML \times 1$ qualquer. A solução é então proporcional à $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{c}^{(M)}$.

Segundo (MOULINES et al., 1995), a primeira solução é mais natural mas necessita do cálculo de um autovetor adicional. Já a segunda solução depende da

3.5. ALGORITMO SSM

escolha de um vetor arbitrário $\mathbf{c}^{(M)}$ de restrição. No entanto, quanto mais próximo \mathbf{Q} estiver da singularidade, mais robusta a segunda solução será para escolhas ruins da restrição (onde restrições ruins são caracterizadas por $\mathbf{c}^{(M)}$ ser escolhido como aproximadamente ortogonal ao autovetor associado ao menor autovalor de \mathbf{Q}). O custo computacional da segunda solução é menor pois é necessária apenas a solução de um sistema linear, ao invés do cálculo de um autovetor de \mathbf{Q} .

Estimação de $\mathbf{H}^{(K)}$ pelo subespaço de sinal

É possível, conforme demonstrado por (MOULINES et al., 1995), expressar a forma quadrática da equação (3.117) em função dos autovetores que geram o subespaço de sinal, pela expressão

$$\begin{aligned} q(\mathbf{h}^{(M)}) &= N \|\mathbf{h}^{(M)}\|^2 - \sum_{i=1}^{K+M-1} \left\| \mathbf{u}_i^{(K)H} \mathbf{H}^{(K)} \right\|^2 \\ &= N \|\mathbf{h}^{(M)}\|^2 - \mathbf{h}^{(M)H} \left(\sum_{i=1}^{K+M-1} \mathbf{U}_i^{(M)} \mathbf{U}_i^{(M)H} \right) \mathbf{h}^{(M)} \\ &= N \|\mathbf{h}^{(M)}\|^2 - \mathbf{h}^{(M)H} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h}^{(M)} \end{aligned} \quad (3.128)$$

onde $\mathbf{U}_i^{(M)}$ representa a matriz de filtragem de dimensão $ML \times K + M - 1$ associada ao autovetor $\mathbf{u}_i^{(K)}$. A minimização de (3.117) com a restrição $\|\mathbf{h}^{(M)}\| = 1$ é então equivalente a maximização de

$$\tilde{q}(\mathbf{h}^{(M)}) \triangleq \mathbf{h}^{(M)H} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{h}^{(M)} \quad \text{com a restrição } \|\mathbf{h}^{(M)}\| = 1. \quad (3.129)$$

Esta maximização é facilmente implementável buscando-se o autovetor associado ao maior autovalor de $\tilde{\mathbf{Q}}$. Sob a restrição quadrática tanto a função custo baseada no subespaço de ruído quanto a função custo baseada no subespaço de sinal nos dão resultados idênticos. No entanto a primeira, baseada no subespaço de ruído, utiliza $KL - K - M + 1$ termos enquanto a segunda, baseada no subespaço de sinal, utiliza apenas $K + M - 1$ termos, o que acelera e simplifica razoavelmente os cálculos.

3.5.3 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N-1) = [\mathbf{x}^T(N-1) \quad \mathbf{x}^T(N-2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}^T(0)]^T$ do sistema SIMO FIR;
2. Tamanho K da janela de levantamento das estatísticas de segunda ordem (deve ser maior ou igual a M);
3. (Opcional, pois pode ser estimado) Tamanho M das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR;

Saída

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ da matriz de respostas ao impulso do sistema SIMO FIR.

Pseudo-código

1. Estimar $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$ a partir de $\mathbf{x}^{(N)}(N-1)$;
2. (Opcional) Estimar M a partir de $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$, utilizando, por exemplo, o critério MDL (WAX; KAILATH, 1985)⁵;
3. Calcular, de $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$, os seus $K+M-1$ maiores autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{K+M-1}$ e seus respectivos autovetores associados $\mathbf{u}_1^{(K)}, \mathbf{u}_2^{(K)}, \dots, \mathbf{u}_{K+M-1}^{(K)}$, ou os seus $KL - K - M + 1$ menores autovalores $\lambda_{K+M} \geq \lambda_{K+M+1} \geq \cdots \geq \lambda_{KL-K-M+1}$ e seus respectivos autovetores associados $\mathbf{v}_1^{(K)}, \mathbf{v}_2^{(K)}, \dots, \mathbf{v}_{KL-K-M+1}^{(K)}$.
4. Montar as matrizes $\mathbf{U}_1^{(M)}, \mathbf{U}_2^{(M)}, \dots, \mathbf{U}_{K+M-1}^{(M)}$ ou $\mathbf{V}_1^{(M)}, \mathbf{V}_2^{(M)}, \dots, \mathbf{V}_{KL-K-M+1}^{(M)}$

⁵Consultar Apêndice B para descrição sucinta.

3.5. ALGORITMO SSM

dadas por

$$\mathbf{U}_i^{(M)} \underset{(ML \times K+M-1)}{\triangleq} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i(0) & \cdots & \mathbf{u}_i(K-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{u}_i(0) & \cdots & \mathbf{u}_i(K-1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{u}_i(0) & \cdots & \mathbf{u}_i(K-1) \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

e

$$\mathbf{V}_i^{(M)} \underset{(ML \times KL-K-M+1)}{\triangleq} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i(0) & \cdots & \mathbf{v}_i(K-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{v}_i(0) & \cdots & \mathbf{v}_i(K-1) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{v}_i(0) & \cdots & \mathbf{v}_i(K-1) \end{bmatrix}, \quad (3.131)$$

onde

$$\mathbf{u}_i^{(K)} \underset{(KL \times 1)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i(0) \\ \mathbf{u}_i(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i(K-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_i(m) \text{ é } L \times 1, \quad m = 0, 1, \dots, K-1 \quad (3.132)$$

e

$$\mathbf{v}_i^{(K)} \underset{(KL \times 1)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i(0) \\ \mathbf{v}_i(1) \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i(K-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_i(m) \text{ é } L \times 1, \quad m = 0, 1, \dots, K-1; \quad (3.133)$$

5. Calcular

$$\mathbf{Q} \underset{(ML \times ML)}{=} \sum_{i=1}^{K+M-1} \mathbf{U}_i^{(M)} \mathbf{U}_i^{(M)H} \quad (3.134)$$

ou

$$\tilde{\mathbf{Q}} \underset{(ML \times ML)}{=} \sum_{i=1}^{KL-K-M+1} \mathbf{V}_i^{(M)} \mathbf{V}_i^{(M)H}; \quad (3.135)$$

6. Calcular $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$ fazendo:

- (a) $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$ igual ao autovetor associado ao menor autovalor de \mathbf{Q} ou;
- (b) $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$ igual ao autovetor associado ao maior autovalor de $\tilde{\mathbf{Q}}$ ou;
- (c) $\hat{\mathbf{h}}^{(M)} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{c}^{(M)}$ onde $\mathbf{c}^{(M)}$ é um vetor de dimensão $ML \times 1$ que deve ser escolhido de forma a não ser próximo de ser ortogonal ao autovetor associado ao menor autovalor de \mathbf{Q} (MOULINES et al., 1995);

3.6. ALGORITMO LP

7. Rearrumar $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$, a partir de

$$\hat{\mathbf{h}}_{(ML \times 1)}^{(M)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(M-1) \\ \hat{\mathbf{h}}(M-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

e

$$\hat{\mathbf{H}}_{(L \times M)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(0) & \hat{\mathbf{h}}(1) & \cdots & \hat{\mathbf{h}}(M-1) \end{bmatrix}^T, \quad (3.137)$$

para obter $\hat{\mathbf{H}}$.

3.5.4 Deficiências

Da mesma forma que o algoritmo TXK, o algoritmo SSM não é robusto a estimativas incorretas de M .

3.6 Algoritmo LP

O algoritmo de Predição Linear (*Linear Prediction*, LP), desenvolvido inicialmente por (SLOCK, 1994) para o caso de uma entrada e duas saídas e posteriormente generalizado por (MERAİM et al., 1995) para o caso de L saídas, traz a vantagem de ser menos dependente da estimativa do tamanho máximo M das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR se comparado com os algoritmos TXK e SSM.

3.6.1 Modelo do sistema

Da mesma forma que o algoritmo TXK e que o algoritmo SSM, o modelo do sistema SIMO FIR utilizado pelo algoritmo LP é também dado por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K)}(k), \quad (3.138)$$

3.6. ALGORITMO LP

onde aqui é suposto que:

1. $\{s(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco e ergódico, com variância unitária;
2. $\{\mathbf{n}(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco, ergódico e decorrelacionado de $\{\mathbf{s}(k)\}$ e entre seus L termos;
3. A matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$ tem posto completo por coluna;
4. O intervalo K é maior ou igual à ordem $M - 1$ das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR.

Cabe lembrar as restrições 3 e 4 equivalentes à condição de que as respostas ao impulso $h_1(k), h_2(k), \dots, h_L(k)$ não possuam nenhum zero em comum, conforme a equação (2.31).

Por outro lado, assim como no algoritmo TXK e diferentemente do algoritmo SSM, o algoritmo LP supõe o sinal de entrada $s(k)$ como sendo *branco*.

3.6.2 Desenvolvimento

Aqui é apresentado o desenvolvimento do algoritmo LP, primeiramente realizado por (SLOCK, 1994) para o caso de duas saídas e posteriormente generalizado para o caso de L saídas por (MERAİM et al., 1995), com as suas devidas alterações de notação.

A idéia básica consiste em se saber que um processo de média móvel (*moving average*, MA) $\mathbf{x}(k) = \sum_m \mathbf{h}(m)s(k - m)$ é também um processo autoregressivo (*autoregressive*, AR) de ordem finita. Esta propriedade está relacionada à identidade generalizada de Bezout (KAILATH, 1979). Quando $\dot{\mathbf{h}}(z) = \sum_k \mathbf{h}(k)z^{-k}$, a transformada-Z de $\mathbf{h}(k)$, é irredutível⁶, sabe-se que existe um vetor polinomial

⁶Isto é o mesmo que $\mathbf{H}^{(K)}$ possuir posto completo por coluna para $K \geq M - 1$.

3.6. ALGORITMO LP

$\dot{\mathbf{f}}(z) = \sum_k \mathbf{f}(k)z^{-k}$ de forma que $\dot{\mathbf{f}}^T(z)\dot{\mathbf{h}}(z) = 1$. Aplicando-se $\dot{\mathbf{f}}(z)$ em $\mathbf{x}(k)$, temos que $\sum_m \mathbf{f}^T(m)\mathbf{x}(k-m) = s(k)$, isto é, $\dot{\mathbf{h}}(z)$ pode ser invertido de forma exata por um filtro FIR causal $\dot{\mathbf{f}}(z)$. Esta relação é a chave do algoritmo LP.

Defina-se o espaço de Hilbert de $\{\mathbf{x}(k)\}$ de todo o passado até o instante $k-1$ como

$$\mathfrak{H}_{k-1}\{\mathbf{x}\} = \text{sp}\{\mathbf{x}(k-m)|m \geq 1\}. \quad (3.139)$$

onde $\text{sp}\{\mathbf{x}(k-m)|m \geq 1\}$ representa o espaço gerado pelos vetores $\mathbf{x}(k-m)$ para $m \geq 1$. Defina-se similarmente o passado finito de $\{\mathbf{x}(k)\}$ do instante $k-1$ até o instante $k-(K-1)$ como

$$\mathfrak{H}_{k-1,k-(K-1)}\{\mathbf{x}\} = \text{sp}\{\mathbf{x}(k-m)|1 \leq m \leq K-1\}. \quad (3.140)$$

O processo de inovação vetorial $\{\mathbf{i}(k)\}$ de $\{\mathbf{x}(k)\}$ é então o processo estacionário vetorial branco definido por

$$\mathbf{i}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)|_{\mathfrak{H}_{k-1}\{\mathbf{x}\}}, \quad (3.141)$$

onde $|_{\mathfrak{H}_{k-1}\{\mathbf{x}\}}$ denota a projeção ortogonal de $\mathbf{x}(k)$ em $\mathfrak{H}_{k-1}\{\mathbf{x}\}$. O processo estacionário $\{\mathbf{x}(k)\}$ é dito AR de ordem $K-1$ se $\mathbf{i}(k)$ coincidir com a sequência de inovação de ordem finita $\mathbf{i}_{K-1}(k)$ dada por

$$\mathbf{i}_{K-1}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k)|_{\mathfrak{H}_{k-1,k-(K-1)}\{\mathbf{x}\}}. \quad (3.142)$$

Temos ainda o seguinte teorema.

Teorema 3.6.1. *Caso $\mathbf{H}^{(K)}$ tenha posto completo por coluna para $K \geq M-1$, então $\mathbf{x}(k)$ é um processo estacionário AR de ordem $M-1$ e seu processo de inovação é dado por*

$$\mathbf{i}(k) = \mathbf{h}(0)s(k). \quad (3.143)$$

Demonstração. Considerando a hipótese de que as L respostas ao impulso do sistema SIMO FIR não possuem zeros em comum, temos que $\mathbf{H}^{(K)}$ tem posto completo

3.6. ALGORITMO LP

por coluna para todo $K \geq M - 1$. Sendo assim $\mathbf{H}^{(K)}$ é inversível pela esquerda (i.e. existe $\mathbf{F}^{(K)}$ de forma que $\mathbf{F}^{(K)}\mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{I}$) e por isso

$$\mathfrak{H}_{k,k-(M-1)}\{\mathbf{x}\} = \mathfrak{H}_{k,k-(2M-2)}\{s\} \quad (3.144)$$

de forma que o passado infinito (quando K tende para infinito) coincide conforme

$$\mathfrak{H}_k\{\mathbf{x}\} = \mathfrak{H}_k\{s\}. \quad (3.145)$$

Como

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{h}(0)s(k) + \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{h}(m)s(k-m), \quad (3.146)$$

$s(k)$ é branco e

$$-\sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{h}(m)s(k-m) = \mathbf{x}(k)|_{\mathfrak{H}_{k-1}\{\mathbf{x}\}}, \quad (3.147)$$

a inovação de $\mathbf{x}(k)$ é dada por

$$\mathbf{i}(k) = \mathbf{h}(0)s(k). \quad (3.148)$$

□

Continuando, como $\mathfrak{H}_{k,k-(M-1)}\{\mathbf{x}\} = \mathfrak{H}_{k,k-(2M-2)}\{s\}$ (3.144), temos obviamente que $\mathfrak{H}_{k-1,k-(M-1)-1}\{\mathbf{x}\} = \mathfrak{H}_{k-1,k-(2M-1)-1}\{s\}$. Por estes resultados temos que as variáveis $s(k-m)$, $1 \leq m \leq M-1$ pertencem ao espaço $\mathfrak{H}_{k-1,k-(M-1)-1}\{\mathbf{x}\}$ e por consequência

$$-\sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{h}(m)s(k-m) = \mathbf{x}|_{\mathfrak{H}_{k-1}\{\mathbf{x}\}} \in \mathfrak{H}_{k-1,k-(M-1)-1}\{\mathbf{x}\}. \quad (3.149)$$

Logo, em algum sentido $s(k)$ representa a inovação normalizada de $\mathbf{x}(k)$, e o filtro vetorial polinomial $\mathbf{f}(k)$ que faça $\sum_{m=0}^{K-1} \mathbf{f}^T(m)\mathbf{x}(k-m) = s(k)$ pode ser visto como o filtro preditor de erro (*prediction error filter*, PEF). Este filtro pode ser facilmente calculado pelas equações generalizadas de Yule-Walker, conforme mostrado abaixo. A questão mais importante é que a função de transferência polinomial $\hat{\mathbf{h}}(z)$ pode ser recuperada por qualquer filtro de predição de erro $\mathbf{f}(k)$ utilizando-se

$$\mathbf{h}(m) = \mathbf{E} \left\{ \mathbf{x}(k) \sum_m \mathbf{f}^T(m)\mathbf{x}(k-m) \right\}. \quad (3.150)$$

3.6. ALGORITMO LP

A inovação $\mathbf{i}(k)$ é calculada projetando-se $\mathbf{x}(k)$ no espaço gerado pelas variáveis aleatórias vetoriais $\{\mathbf{x}(k-m)|m=1,\dots,K\}$, onde $K \geq M-1$. Denote então $[\mathbf{A}(1) \ \mathbf{A}(2) \ \dots \ \mathbf{A}(K)]$ como sendo matrizes de dimensão $L \times L$ de forma que

$$\mathbf{x}(k) + \sum_{m=1}^K \mathbf{A}(m)\mathbf{x}(k-m) = \mathbf{i}(k). \quad (3.151)$$

Pós-multiplicando ambos os lados por $\mathbf{x}^H(k-l)$ temos

$$\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k-l) + \sum_{m=1}^K \mathbf{A}(m)\mathbf{x}(k-m)\mathbf{x}^H(k-l) = \mathbf{i}(k)\mathbf{x}^H(k-l). \quad (3.152)$$

Aplicando o valor esperado temos

$$E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^H(k-l)\} + \sum_{m=1}^K \mathbf{A}(m)E\{\mathbf{x}(k-m)\mathbf{x}^H(k-l)\} = E\{\mathbf{i}(k)\mathbf{x}^H(k-l)\}. \quad (3.153)$$

Como $E\{\mathbf{i}(k)\mathbf{x}^H(k-l)\}$ é zero, podemos escrever a equação acima de forma matricial conforme

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}(1) \ \mathbf{A}(2) \ \dots \ \mathbf{A}(K)] \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)} \\ & = -[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(1) \ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(2) \ \dots \ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(K)], \end{aligned} \quad (3.154)$$

onde $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}$ é uma notação simplificada de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$. Como a inovação não possui posto completo por coluna, estes coeficientes não são unicamente determináveis. Um conjunto particular de coeficientes pode ser obtido por

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A}(1) \ \mathbf{A}(2) \ \dots \ \mathbf{A}(K)] \\ & = -[\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(1) \ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(2) \ \dots \ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(K)] (\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)})^\dagger. \end{aligned} \quad (3.155)$$

De acordo com o teorema 3.6.1 $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}(0) = \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) + \sum_{m=1}^K \mathbf{A}(m)\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^T(m)$, a correlação da inovação, tem posto 1. O autovalor diferente de zero de $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}(0)$ é igual a $\lambda_{\mathbf{i}} = \|\mathbf{h}(0)\|^2$, e o autovetor associado \mathbf{d} é o vetor de norma unitária $\mathbf{d} = \pm \frac{\mathbf{h}(0)}{\|\mathbf{h}(0)\|}$ (o sinal não pode ser identificado pelas estatísticas de segunda ordem). Faça finalmente $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{d}}{\sqrt{\lambda_{\mathbf{i}}}}$. Então temos o seguinte lema (MERAİM et al., 1995).

Lema 3.6.1. $\mathbf{f}^T(z) = \mathbf{l}^T \left(\mathbf{I} + \sum_{m=1}^K \mathbf{A}(m)z^{-m} \right)$ é um vetor polinomial de dimensão $L \times 1$ de forma que $\sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{f}^T(m)\mathbf{x}(k-m) = s(k)$.

Erros na ordem de predição

Conforme (MERAİM et al., 1995), para este método de predição, quando $K \geq M - 1$, temos os coeficientes vectoriais $\mathbf{h}(M), \mathbf{h}(M + 1), \dots, \mathbf{h}(K)$ iguais a zero. Assim, quando estatísticas exatas estão disponíveis, uma identificação exata dos coeficientes do filtro é realizada apenas utilizando-se a hipótese de que a ordem de predição K é maior ou igual à verdadeira ordem do modelo $M - 1$. Na prática, como apenas estimativas das estatísticas de segunda ordem estão disponíveis, é necessário se utilizar uma pseudo-inversa (no caso a de Moore-Penrose) de $\mathbf{R}_x^{(K)}$. Apesar disso uma falha na determinação da ordem do modelo não afeta seriamente o desempenho do método.

Um motivo heurístico segue, segundo (MERAİM et al., 1995). Supondo que $K \geq M - 1$ e que \mathbf{u} representa um vetor do subespaço de ruído da matriz $\mathbf{R}_x^{(K)}$, temos então que

$$\mathbf{R}_x^{(K)} \mathbf{u} = \mathbf{0}_{KL,1}. \quad (3.156)$$

Multiplicando (3.154) por \mathbf{u} pela esquerda e depois substituindo $\mathbf{R}_x^{(K)} \mathbf{u}$ por $\mathbf{0}_{(K)L,1}$, conforme (3.156), temos que

$$[\mathbf{R}_x(1) \quad \mathbf{R}_x(2) \quad \dots \quad \mathbf{R}_x(K)] \mathbf{u} = \mathbf{0}_{L,1}, \quad (3.157)$$

isto é, $[\mathbf{R}_x(1) \quad \mathbf{R}_x(2) \quad \dots \quad \mathbf{R}_x(K)]^T$ é ortogonal aos vetores no subespaço de ruído.

Ruído branco aditivo

Finalmente, é muito fácil estender o método para lidar com ruído branco aditivo. Basta estimar σ_n^2 e retirar seu efeito das matrizes de correlação $\mathbf{R}_x(0)$ e $\mathbf{R}_x^{(K)}$.

3.6.3 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N-1) = [\mathbf{x}^T(N-1) \quad \mathbf{x}^T(N-2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}^T(0)]^T$ do sistema SIMO FIR;
2. Tamanho K da janela de levantamento das estatísticas de segunda ordem (K deve ser maior ou igual a $M-1$);
3. Estimativa $\hat{\sigma}_n^2$ da variância do ruído aditivo presente em $\mathbf{x}^{(N)}(N-1)$.

Saídas

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ da matriz de respostas ao impulso do sistema SIMO FIR;
2. Estimativa $\hat{\mathbf{F}} \triangleq [\hat{\mathbf{f}}(0) \quad \hat{\mathbf{f}}(1) \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{f}}(K)]^T$ da matriz de respostas ao impulso de um sistema inverso MISO FIR.

Pseudo-código

1. Estimar $\mathbf{R}_x(m)$ para $m = 0, 1, \dots, K$ utilizando para isso a realização $\mathbf{x}^{(N)}(N-1)$;
2. Calcular o filtro preditor vetorial \mathbf{A} como

$$\underset{(L \times (K+1)L)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}(1) & \mathbf{A}(2) & \cdots & \mathbf{A}(K) \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

onde

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1) & \mathbf{A}(2) & \cdots & \mathbf{A}(K) \end{bmatrix} = \\ & = - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_x(1) & \hat{\mathbf{R}}_x(2) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_x(K) \end{bmatrix} \left(\hat{\mathbf{R}}_x^{(K)}(0) - \hat{\sigma}_n^2 \mathbf{I}_{KL} \right)^\dagger \end{aligned} \quad (3.159)$$

e

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0) = \begin{matrix} (KL \times KL) \\ \left[\begin{array}{cccc} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(0) & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(1) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(K-1) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^H(1) & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(0) & & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(K-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^H(K-1) & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^H(K-2) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(0) \end{array} \right] \end{matrix}; \quad (3.160)$$

3. Calcular $\mathbf{R}_i(0)$, dado por

$$\mathbf{R}_i(0) = \begin{matrix} (L \times L) \\ \left[\mathbf{A}(1) \quad \mathbf{A}(2) \quad \cdots \quad \mathbf{A}(K) \right] \end{matrix} \begin{matrix} \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^H(1) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^H(2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^H(K) \end{array} \right] \end{matrix} + \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(0) - \hat{\sigma}_{\mathbf{n}}^2 \mathbf{I}_L; \quad (3.161)$$

4. Estimar o coeficiente inicial $\mathbf{l} = \mathbf{h}(0)/\|\mathbf{h}(0)\|^2$ do filtro preditor por

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{d} \quad (3.162)$$

onde λ_i é o maior autovalor de $\mathbf{R}_i(0)$ e \mathbf{d} é o autovetor associado a este autovalor;

5. Calcular o filtro de predição do erro $\hat{\mathbf{f}}^{(K+1)}$ como

$$\hat{\mathbf{f}}^{(K+1)} = \mathbf{A}^T \mathbf{l}; \quad (3.163)$$

6. Estimar o vetor de coeficientes do sistema SIMO $\hat{\mathbf{h}}^{(K+1)}$ por

$$\hat{\mathbf{h}}^{(K+1)} = \begin{matrix} (L(K+1) \times 1) \\ \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{h}}(K) \\ \hat{\mathbf{h}}(K-1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{array} \right] \end{matrix} = \mathbf{S}(K+1) \hat{\mathbf{f}}^{(K+1)} \quad (3.164)$$

onde

$$\mathbf{S}(K+1) = \begin{matrix} (L(K+1) \times (K+1)L) \\ \left[\begin{array}{ccccc} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(0) - \sigma_{\mathbf{n}}^2 \mathbf{I}_L & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(1) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(K-1) & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(K) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(1) & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(2) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(K) & \mathbf{0}_{L,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(K-1) & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(K) & \cdots & \mathbf{0}_{L,L} & \mathbf{0}_{L,L} \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(K) & \mathbf{0}_{L,L} & \cdots & \mathbf{0}_{L,L} & \mathbf{0}_{L,L} \end{array} \right] \end{matrix}; \quad (3.165)$$

3.7. ALGORITMO OPD

7. Rearrumar $\hat{\mathbf{h}}^{(K+1)}$ e $\hat{\mathbf{f}}^{(K+1)}$, a partir de

$$\hat{\mathbf{h}}^{(K+1)}_{(L(K+1) \times 1)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(K) \\ \hat{\mathbf{h}}(K-1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix}, \quad (3.166)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{(L \times K+1)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(0) & \hat{\mathbf{h}}(1) & \dots & \hat{\mathbf{h}}(K) \end{bmatrix}^T, \quad (3.167)$$

$$\hat{\mathbf{f}}^{(K+1)}_{(L(K+1) \times 1)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}(K) \\ \hat{\mathbf{f}}(K-1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}(0) \end{bmatrix} \quad (3.168)$$

e

$$\hat{\mathbf{F}}_{(L \times K+1)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}(0) & \hat{\mathbf{f}}(1) & \dots & \hat{\mathbf{f}}(K) \end{bmatrix}^T, \quad (3.169)$$

para obter $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{F}}$.

3.7 Algoritmo OPD

O algoritmo de Decomposição em Produto Externo (*Outer-Product Decomposition*, OPD), desenvolvido por (DING, 1996) e (DING, 1997), utiliza uma estimativa do produto externo $\mathbf{h}^{(M)}\mathbf{h}^{(M)H}$ para estimar $\mathbf{h}^{(M)}$ de forma menos dependente de $\mathbf{h}(0)$, pelo menos se comparado ao algoritmo LP.

3.7.1 Modelo do sistema

Da mesma forma que os algoritmos anteriores, o modelo do sistema SIMO FIR utilizado pelo algoritmo OPD é também dado por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)}\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K)}(k), \quad (3.170)$$

onde aqui é suposto que:

3.7. ALGORITMO OPD

1. $\{s(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco e ergódico, de variância 1;
2. $\{\mathbf{n}(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco, ergódico e decorrelacionado de $\{s(k)\}$ e entre seus L termos;
3. A matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$ tem posto completo por coluna;
4. O intervalo K é maior ou igual à ordem $M - 1$ das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR.

Por fim as restrições 3 e 4 são equivalentes à condição de que as respostas ao impulso $h_1(k), h_2(k), \dots, h_L(k)$ não possuam nenhum zero em comum, conforme a equação (2.31).

3.7.2 Desenvolvimento

O desenvolvimento do algoritmo OPD, originalmente exposto por (DING, 1996) e (DING, 1997), segue aqui reproduzido com as devidas simplificações e mudanças de notação.

Construção do produto externo

Todo o algoritmo se baseia no produto externo $\mathbf{h}^{(M)}\mathbf{h}^{(M)H}$. O objetivo aqui é encontrar um método que possa formar o produto externo $\mathbf{h}^{(M)}\mathbf{h}^{(M)H}$ a partir das estatísticas de segunda ordem das saídas do sistema SIMO FIR.

Primeiramente supomos que a ordem $M - 1$ das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR é conhecida. Definimos então a matriz \mathbf{H}_a por

$$\mathbf{H}_a \stackrel{\triangle}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) & \mathbf{h}(1) & \cdots & \mathbf{h}(M-1) & \mathbf{0}_{L,1} & \cdots & \mathbf{0}_{L,1} \\ \mathbf{h}(1) & \mathbf{h}(2) & \cdots & \mathbf{0}_{L,1} & \mathbf{0}_{L,1} & \cdots & \mathbf{0}_{L,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{h}(M-1) & \mathbf{0}_{L,1} & \cdots & \mathbf{0}_{L,1} & \mathbf{0}_{L,1} & \cdots & \mathbf{0}_{L,1} \end{bmatrix}. \quad (3.171)$$

3.7. ALGORITMO OPD

Repare que as primeiras L linhas de \mathbf{H}_a e $\mathbf{H}^{(M)}$ são idênticas. Também é fácil calcular o produto $\mathbf{H}_a \mathbf{H}_a^H$, dado por

$$\mathbf{H}_a \mathbf{H}_a^H = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1,1} & \mathbf{D}_{1,2} & \cdots & \mathbf{D}_{1,M} \\ \mathbf{D}_{2,1} & \mathbf{D}_{2,2} & \cdots & \mathbf{D}_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{M,1} & \mathbf{D}_{M,2} & \cdots & \mathbf{D}_{M,M} \end{bmatrix}, \quad (3.172)$$

onde

$$\mathbf{D}_{i,j} \underset{(L \times L)}{\triangleq} \sum_{m=i-1}^{M-1} \mathbf{h}(m) \mathbf{h}^H(m+j-i), \quad 1 \leq i, j \leq M \quad (3.173)$$

e $\mathbf{h}(m) = 0$ para todo $m > M$ e $M < 0$. Chamemos então a este produto de

$$\mathbf{D}_1 \underset{(ML \times ML)}{\triangleq} \mathbf{H}_a \mathbf{H}_a^H. \quad (3.174)$$

Temos então que \mathbf{D}_1 é uma matriz hermitiana. Agora definimos outra matriz, \mathbf{D}_2 a partir do bloco inferior à direita de $\mathbf{H}_a \mathbf{H}_a^H$ como

$$\mathbf{D}_2 \underset{(ML \times ML)}{\triangleq} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{2,2} & \cdots & \mathbf{D}_{2,M} & \mathbf{0}_{L,L} \\ \mathbf{D}_{3,2} & \cdots & \mathbf{D}_{3,M} & \mathbf{0}_{L,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{M,2} & \cdots & \mathbf{D}_{M,M} & \mathbf{0}_{L,L} \\ \mathbf{0}_{L,L} & \cdots & \mathbf{0}_{L,L} & \mathbf{0}_{L,L} \end{bmatrix}. \quad (3.175)$$

3.7. ALGORITMO OPD

Podemos então formar uma outra matriz hermitiana $\Delta \mathbf{D}$ a partir de

$$\begin{aligned}
 \underset{(ML \times ML)}{\Delta \mathbf{D}} &\triangleq \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0)\mathbf{h}^H(0) & \mathbf{h}(0)\mathbf{h}^H(1) & \cdots & \mathbf{h}(0)\mathbf{h}^H(M-1) \\ \mathbf{h}(1)\mathbf{h}^H(0) & \mathbf{h}(1)\mathbf{h}^H(1) & \cdots & \mathbf{h}(1)\mathbf{h}^H(M-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}(M-1)\mathbf{h}^H(0) & \mathbf{h}(M-1)\mathbf{h}^H(1) & \cdots & \mathbf{h}(M-1)\mathbf{h}^H(M-1) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}(0) \\ \mathbf{h}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}^H(0) & \mathbf{h}^H(1) & \cdots & \mathbf{h}^H(M-1) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{h}^{(M)} \mathbf{h}^{(M)H}.
 \end{aligned} \tag{3.176}$$

Isto é fácil de se visualizar quando as matrizes \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 são escritas por completo, conforme

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_1 &= \mathbf{H}_a \mathbf{H}_a^H \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m) & \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m+1) & \cdots & \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m+M-1) \\ \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m-1) & \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m) & \cdots & \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m+M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=M-1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m-M+1) & \sum_{m=M-1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m-M+2) & \cdots & \sum_{m=M-1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m) \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.177}$$

e

$$\mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m-1) & \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m) & \cdots & \sum_{m=1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m+M-2) & \mathbf{0}_{L,L} \\ \sum_{m=2}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m-2) & \sum_{m=2}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m-1) & \cdots & \sum_{m=2}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m+M-3) & \mathbf{0}_{L,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{m=M-1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m-M+1) & \sum_{m=M-1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m-M+2) & \cdots & \sum_{m=M-1}^{M-1} \mathbf{h}(m)\mathbf{h}^H(m) & \mathbf{0}_{L,L} \\ \mathbf{0}_{L,L} & \mathbf{0}_{L,L} & \cdots & \mathbf{0}_{L,L} & \mathbf{0}_{L,L} \end{bmatrix}. \tag{3.178}$$

Logo a matriz $\Delta \mathbf{D}$ forma o produto externo do vetor $\mathbf{h}^{(M)}$ que contém os coeficientes das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR. A decomposição em valores singulares pode ser utilizada para gerar uma estimativa

$$e^{-j\theta} \mathbf{h}^{(M)}, \tag{3.179}$$

3.7. ALGORITMO OPD

onde θ é um ângulo qualquer para um sistema SIMO FIR complexo e 0 ou π para um sistema SIMO FIR real.

Estimação do produto externo

Uma vez demonstrado que o produto externo pode ser utilizado para se recuperar $\mathbf{h}^{(M)}$, agora resta descobrirmos como estimá-lo. Utilizando o desenvolvimento matemático anterior, sabemos que estimando \mathbf{D}_1 , teremos uma estimativa de \mathbf{D}_2 e conseqüentemente do produto externo. Devemos conseguir esta estimativa a partir das observações de $\mathbf{x}(k)$ disponíveis. Façamos isto utilizando estatísticas de segunda ordem.

Relembrando, temos que a matriz de correlação estendida M de $\mathbf{x}(k)$ para um atraso 0 é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(M)} &\triangleq E [\mathbf{x}^{(M)}(k)\mathbf{x}^{(M)H}(k)] \\ &\underset{(KL \times KL)}{\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(M)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(1) & \cdots & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(M-1) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(-1) & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) & & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(M-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(-M+1) & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(-M+2) & \cdots & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.180)$$

onde $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(M)}$ é uma notação simplificada de $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(M)}(0)$.

Supondo o sinal de entrada $s(k)$ como branco com variância σ_s^2 e a presença de ruído aditivo branco $\mathbf{n}(k)$ com variância σ_n^2 temos que

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(M)} = \sigma_s^2 \mathbf{H}^{(M)} \mathbf{H}^{(M)H} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{ML} \quad (3.181)$$

É fácil verificar que outra matriz Hankel por blocos também satisfaz a

3.7. ALGORITMO OPD

relação

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x(0) - \sigma_n^2 \mathbf{I}_{ML} & \mathbf{R}_x(1) & \cdots & \mathbf{R}_x(M-1) \\ \mathbf{R}_x(1) & \mathbf{R}_x(2) & & \mathbf{0}_{L,L} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_x(M-1) & \mathbf{0}_{L,L} & \cdots & \mathbf{0}_{L,L} \end{bmatrix} \\ &= \sigma_s^2 \mathbf{H}_a \mathbf{H}^{(M)H}. \end{aligned} \quad (3.182)$$

Além disso temos que

$$\mathbf{R}_x^{(M)} - \sigma_n^2 \mathbf{I}_{ML} = \sigma_s^2 \mathbf{H}^{(M)} \mathbf{H}^{(M)H}. \quad (3.183)$$

Por fim, é importante ressaltar que quando $\mathbf{H}^{(M)}$ tem posto completo por coluna, a seguinte relação é válida:

$$\mathbf{H}^{(M)H} (\mathbf{H}^{(M)} \mathbf{H}^{(M)H})^\dagger \mathbf{H}^{(M)} = \mathbf{I}_{2M-1}. \quad (3.184)$$

Relembrando que a condição necessária e suficiente para que o sistema SIMO FIR seja identificável pelas estatísticas de segunda ordem é exatamente esta, que $\mathbf{H}^{(M)}$ tenha posto completo por coluna, temos que \mathbf{D}_1 poderá ser estimado pela equação

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_1 &= \mathbf{R}_a (\mathbf{R}_x^{(M)} - \sigma_n^2 \mathbf{I}_{ML})^\dagger \mathbf{R}_a^H \\ &= \sigma_s^2 \mathbf{H}_a \mathbf{H}^{(M)H} \sigma_s^{-2} (\mathbf{H}^{(M)} \mathbf{H}^{(M)H})^\dagger \sigma_s^2 \mathbf{H}^{(M)} \mathbf{H}_a^H \\ &= \sigma_s^2 \mathbf{H}_a \mathbf{H}_a^H. \end{aligned} \quad (3.185)$$

Caso σ_s^2 seja conhecido, como é o caso em muitos sistemas de comunicação digital, pode-se inclusive obter uma estimativa de $\mathbf{H}_a \mathbf{H}_a^H$ retirando-se a indefinição introduzida por σ_s^2 , simplesmente através de

$$\hat{\mathbf{D}}_1 = \sigma_s^{-2} \mathbf{R}_a (\mathbf{R}_x^{(M)} - \sigma_n^2 \mathbf{I}_{ML})^\dagger \mathbf{R}_a^H. \quad (3.186)$$

Consequentemente $\mathbf{h}^{(M)}$, que contém os coeficientes das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR, pode ser obtido através do vetor singular associado ao maior valor singular de $\Delta \mathbf{D}$.

Determinação da ordem do sistema pelo fator de dominância

O algoritmo OPD, assim como outros algoritmos deste capítulo, é influenciado pela qualidade da estimativa de $M - 1$, a ordem do sistema. A variação da estimativa \hat{M} modifica de forma significativa a matriz $\Delta\mathbf{D}$. Quando M é subestimado, isto é, quando $\hat{M} < M$, estamos na prática distanciando drasticamente $\Delta\mathbf{D}$ de uma matriz de posto 1. Estamos dificultando a possibilidade de $\Delta\mathbf{D}$ ser expressa por um produto externo de um vetor de dimensão $\hat{M}L \times 1$. Já quando superestimamos M , isto é, quando $\hat{M} > M$, também estamos distanciando $\Delta\mathbf{D}$ de uma matriz que possa ser expressa por um produto externo, mas de forma menos drástica, pois apenas o ruído influencia na qualidade de $\Delta\mathbf{D}$.

Voltamos novamente para o problema da estimação de M . Uma das maneiras de se realizar esta estimação é através do critério MDL, conforme já citado anteriormente e brevemente apresentado no Apêndice B. Mas, intrinsecamente à estrutura do produto externo $\Delta\mathbf{D}$, também é possível se extrair esta estimativa (DING, 1997). Podemos para isso utilizar uma medida de o quão distante $\Delta\mathbf{D}$ está de ser posto 1, o fator de dominância, dado por

$$f_d(M) \triangleq \frac{\lambda_d}{\text{tr}(\widehat{\Delta\mathbf{D}}(M))}, \quad (3.187)$$

onde λ_d representa o maior autovalor de $\Delta\mathbf{D}$ e (M) procura explicitar a variação do mesmo quando se utiliza diferentes estimativas de M . Basta então se escolher M de forma que $f_d(M)$ seja máximo. Este índice também pode ser utilizado para sinalizar a confiabilidade da estimativa de \mathbf{H} .

3.7.3 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N - 1) = [\mathbf{x}^T(N - 1) \quad \mathbf{x}^T(N - 2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}^T(0)]^T$ do sistema SIMO FIR;

3.7. ALGORITMO OPD

2. Tamanho M das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR (ao menos uma estimativa);
3. Variância $\sigma_{\mathbf{n}}^2$ do ruído aditivo presente em $\mathbf{x}^{(N)}(N-1)$ (ao menos uma estimativa).

Saídas

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ da matriz de respostas ao impulso do sistema SIMO FIR;
2. Fator de dominância $f_d(M)$ da matriz $\widehat{\Delta \mathbf{D}}(M)$ (pode ser utilizado para se medir a qualidade da estimativa de $\hat{\mathbf{H}}$ ou até mesmo para estimar o próprio M).

Pseudo-código

1. Estimar $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m)$ para $m = 0, 1, \dots, 2M-2$ a partir de $\mathbf{x}^{(N)}(N-1) = [\mathbf{x}^T(N-1) \ \mathbf{x}^T(N-2) \ \dots \ \mathbf{x}^T(0)]^T$;
2. Formar as matrizes $\hat{\mathbf{R}}_{\alpha}$ e $\hat{\mathbf{D}}_1$ dadas por

$$\hat{\mathbf{R}}_{\alpha} \underset{(ML \times ML)}{=} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(0) & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(1) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(M-1) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(1) & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(2) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(M) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(M-1) & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(M) & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(2M-2) \end{bmatrix} \quad (3.188)$$

e

$$\hat{\mathbf{D}}_1 = \hat{\mathbf{R}}_{\alpha} (\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(M)}(0) - \sigma_{\mathbf{n}}^2 \mathbf{I}_{ML})^{\dagger} \hat{\mathbf{R}}_{\alpha}^H, \quad (3.189)$$

onde

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(M)}(0) \underset{(ML \times ML)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(1) & \cdots & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(K-1) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^H(1) & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) & & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(K-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^H(K-1) & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^H(K-2) & \cdots & \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix}; \quad (3.190)$$

3.7. ALGORITMO OPD

3. Calcular a estimativa $\mathbf{h}^{(\hat{M})}$ dada pelo autovetor associado ao maior autovalor de

$$\Delta \mathbf{D}_{(ML \times ML)} = \hat{\mathbf{D}}_1 - \hat{\mathbf{D}}_2 \quad (3.191)$$

onde

$$\hat{\mathbf{D}}_1_{(ML \times ML)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{1,1} & \hat{\mathbf{D}}_{1,2} & \cdots & \hat{\mathbf{D}}_{1,M} \\ \hat{\mathbf{D}}_{2,1} & \hat{\mathbf{D}}_{2,2} & & \hat{\mathbf{D}}_{2,M} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{D}}_{M,1} & \hat{\mathbf{D}}_{M,2} & \cdots & \hat{\mathbf{D}}_{M,M} \end{bmatrix} \quad (3.192)$$

e

$$\hat{\mathbf{D}}_2_{(ML \times ML)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{2,2} & \hat{\mathbf{D}}_{2,3} & \cdots & \hat{\mathbf{D}}_{2,M} & \mathbf{0}_{L,L} \\ \hat{\mathbf{D}}_{3,2} & \hat{\mathbf{D}}_{3,3} & & \hat{\mathbf{D}}_{3,M} & \mathbf{0}_{L,L} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{\mathbf{D}}_{M,2} & \hat{\mathbf{D}}_{M,3} & \cdots & \hat{\mathbf{D}}_{M,M} & \mathbf{0}_{L,L} \\ \mathbf{0}_{L,L} & \mathbf{0}_{L,L} & \cdots & \mathbf{0}_{L,L} & \mathbf{0}_{L,L} \end{bmatrix}. \quad (3.193)$$

4. Rearrumar $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$, a partir de

$$\hat{\mathbf{h}}^{(M)}_{(ML \times 1)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(M-1) \\ \hat{\mathbf{h}}(M-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix} \quad (3.194)$$

e

$$\hat{\mathbf{H}}_{(L \times M)} = \left[\hat{\mathbf{h}}(0) \quad \hat{\mathbf{h}}(1) \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{h}}(M-1) \right]^T, \quad (3.195)$$

para obter $\hat{\mathbf{H}}$;

5. Calcular o fator de dominância $f_d(M)$, dado por

$$f_d(M) \triangleq \frac{\lambda_d}{\widehat{\text{tr}(\Delta \mathbf{D}(M))}}, \quad (3.196)$$

onde λ_d representa o maior autovalor de $\Delta \mathbf{D}$.

Observação: Caso seja desejável, pode-se utilizar o fator de dominância f_d para se comparar várias execuções do algoritmo para diferentes valores de M e escolher com base nestes valores a melhor estimativa. Esta estará associada ao maior fator de dominância.

3.8 Algoritmo MSLP

Similarmente ao algoritmo LP, o algoritmo de Predição Linear de Múltiplos Estágios (*Multi-step Linear Prediction*, MSLP) (GESBERT; DUHAMEL, 1997) é uma modificação da metodologia de predição linear que baseia a estimativa das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR, $\hat{\mathbf{H}}$, não mais em apenas um preditor, mas em vários. Desta forma ele procura retirar a dependência da estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ do primeiro elemento das respostas ao impulso, $\mathbf{h}(0)$. Isto possibilita melhores resultados quando a energia de $\mathbf{h}(k)$ não está concentrada no primeiro termo das respostas ao impulso, $\mathbf{h}(0)$.

3.8.1 Modelo do sistema

O modelo do sistema é ligeiramente diferente do algoritmo LP. Temos

$$\mathbf{x}^{(K+M)}(k) = \mathbf{H}^{(K+M)} \mathbf{s}^{(K+2M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K+M)}(k), \quad (3.197)$$

onde é suposto que:

1. $\{s(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco e ergódico;
2. $\{\mathbf{n}(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco, ergódico e decorrelacionado de $\{s(k)\}$ e entre seus L termos;
3. A matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(M-1)}$ tem posto completo por coluna;
4. $K \geq M - 1$.

3.8.2 Desenvolvimento

Segue aqui reproduzido o desenvolvimento do algoritmo MSLP por (GESBERT; DUHAMEL, 1997), com as devidas modificações de notação. Interpretando

3.8. ALGORITMO MSLP

$\hat{M} - 1$ como a ordem estimada das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR, considere o problema do preditor de i -ésimo estágio na saída $\mathbf{x}(k)$ do sistema correspondente a estimativa de mínima variância de $\mathbf{x}(k)$, dadas as amostras passadas $\mathbf{x}(k - i - 1), \mathbf{x}(k - i - 2), \dots, \mathbf{x}(k - K + 1)$, onde K é escolhido de forma que $K \geq M - 1$.

Um preditor de i -ésimo estágio, denotado por \mathbf{P}_i , é uma matriz complexa $L(K - i + 1) \times L$ que minimiza

$$J_i(\mathbf{P}_i) = E\{(\mathbf{x}(k) - \mathbf{P}_i^H \mathbf{x}^{(K-i+1)}(k - i))^2\}. \quad (3.198)$$

Temos então o seguinte lema.

Lema 3.8.1. (*Triangularização do Sistema*) *Faça com que o i -ésimo filtro preditor de erro (prediction error filter, PEF), para $i = 1, 2, \dots, \hat{M}$, seja definido por*

$$\underset{((K+1)L \times L)}{\boldsymbol{\Omega}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L & \mathbf{0}_{L,L(i-1)} & -\mathbf{P}_i^T \end{bmatrix}^T. \quad (3.199)$$

Supomos temporariamente um modelo sem ruído, isto é, $\sigma_{\mathbf{n}}^2 = 0$, e que $K \geq M - 1$.

Então o i -ésimo sinal de predição de erro é dado, para todo $i = 1, 2, \dots, \hat{M}$, por

$$\underset{(L \times 1)}{\tilde{\mathbf{x}}_i(k)} \triangleq \underset{(L \times 1)}{\boldsymbol{\Omega}_i^H} \mathbf{x}^{(K+1)}(k) = \sum_{m=0}^{i-1} \mathbf{h}(m)s(k - m). \quad (3.200)$$

Demonstração. Para $i \geq M$, isto é i sendo maior ou igual ao tamanho da resposta ao impulso do sistema SIMO FIR, a predição claramente não tem nenhum efeito e por isso $\tilde{\mathbf{x}}_i(k) = \mathbf{x}(k)$ já que não há correlação entre a variável estimada na predição e a variável propriamente dita. Já a prova para $i \leq M - 1$ vem da aplicação do princípio de ortogonalidade. Manipulando

$$E[\mathbf{x}^{(K-i+1)}(k - i)\tilde{\mathbf{x}}_i^H(k)] = \mathbf{0}_{(K-i+1)L,L} \quad (3.201)$$

temos, após substituir $\mathbf{x}^{(K-i+1)}(k - i)$ e $\tilde{\mathbf{x}}_i^H(k)$,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(K-i+1)L,iL} & \mathbf{I}_{(K-i+1)L} \end{bmatrix} \mathbf{H}^{(K+1)} E[\mathbf{s}^{(K+M)}(k)\mathbf{x}^{(K+1)H}(k)] \boldsymbol{\Omega}_i = \mathbf{0}_{(K-i+1)L,L}. \quad (3.202)$$

3.8. ALGORITMO MSLP

Substituindo agora $\mathbf{x}^{(K+1)H}(k)$ temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(K-i+1)L,iL} & \mathbf{I}_{(K-i+1)L} \end{bmatrix} \mathbf{H}^{(K+1)} \mathbf{E} [\mathbf{s}^{(K+M)}(k) \mathbf{s}^{(K+M)H}(k)] \mathbf{H}^{(K+1)H} \boldsymbol{\Omega}_i = \mathbf{0}_{(K-i+1)L,L}. \quad (3.203)$$

Como $\mathbf{s}(k)$ é branco temos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(K-i+1)L,iL} & \mathbf{I}_{(K-i+1)L} \end{bmatrix} \mathbf{H}^{(K+1)} \mathbf{H}^{(K+1)H} \boldsymbol{\Omega}_i = \mathbf{0}_{(K-i+1)L,L}. \quad (3.204)$$

Como estamos utilizando a hipótese de que $\mathbf{H}^{(K+1)}$ tem posto completo por coluna, uma vez que $\mathbf{H}^{(M-1)}$ o tem, podemos a partir de (3.204) deduzir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(K-i+1)L,iL} & \mathbf{I}_{(K-i+1)L} \end{bmatrix} \mathbf{H}^{(K+1)H} \boldsymbol{\Omega}_i &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Omega}_i^H \mathbf{H}^{(K+1)} &= [\mathbf{h}(0) \quad \dots \quad \mathbf{h}(i-1) \quad \mathbf{0}_{L,K+M-i}] \end{aligned} \quad (3.205)$$

e então

$$\boldsymbol{\Omega}_i^H \mathbf{x}^{(K+1)}(k) = \sum_{m=0}^{i-1} \mathbf{h}(m) s(k-m). \quad (3.206)$$

□

Processamento em batelada

Cabe ressaltar que numa implementação para processamento em batelada os preditores devem ser obtidos pela solução de diversas equações de Yule-Walker ao invés de somente uma como é o caso do algoritmo LP. Para o problema do i -ésimo estágio, as equações de Yule-Walker são

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K-i+1)} \mathbf{P}_i = \mathbf{E} \{ \mathbf{x}^{(K-i+1)}(k-i) \mathbf{x}^H(k) \}, \quad (3.207)$$

onde $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K-i+1)}$ é a matriz de correlação estendida $K-i+1$ para um atraso 0 de $\mathbf{x}^{(K-i+1)}(k)$ e da qual a contribuição do ruído aditivo deve ser retirada de alguma forma (i.e. da mesma forma que no algoritmo LP) para que seja possível estimar preditores não tendenciosos em uma situação de ruído.

Apenas como esclarecimento, ainda podemos reescrever a equação (3.207)

3.8. ALGORITMO MSLP

como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_x(0) & \mathbf{R}_x(1) & \cdots & \mathbf{R}_x(K-i) \\ \mathbf{R}_x^H(1) & \mathbf{R}_x(0) & \cdots & \mathbf{R}_x(K-i-1) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_x^H(K-i) & \mathbf{R}_x^H(K-i-1) & \cdots & \mathbf{R}_x(0) \end{bmatrix} \mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_x(i) \\ \mathbf{R}_x(i+1) \\ \vdots \\ \mathbf{R}_x(K) \end{bmatrix}. \quad (3.208)$$

Utilização dos preditores

Para o algoritmo LP apenas um preditor de Yule-Walker existia. Segundo a notação utilizada para o desenvolvimento do algoritmo MSLP, a inovação $\mathbf{i}(k)$ do algoritmo LP é simplesmente $\tilde{\mathbf{x}}_1(k)$, ou seja

$$\underset{(L \times 1)}{\mathbf{i}(k)} = \tilde{\mathbf{x}}_1(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_L & -\mathbf{P}_1^H \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(K+1)}(k) = \mathbf{h}(0)s(k). \quad (3.209)$$

Logo a equação (3.200) nos mostra uma simples generalização de (3.209), onde no caso de (3.200) o preditor de 1º estágio elimina completamente a interferência intersimbólica (ou comprime perfeitamente o pulso sísmico), e no caso de (3.209) o filtro de predição de erro do i -ésimo estágio reduz a ordem da interferência intersimbólica (ou do filtro associado ao pulso sísmico) de $M-1$ para $i-1$. Assim a ação dos filtros de predição de múltiplos estágios pode ser vista como uma triangularização do sistema SIMO FIR. Os vários filtros podem então ser utilizados em pares conforme o desenvolvimento a seguir.

Faça com que $\mathbf{z}(k)$ seja um vetor de sinais de dimensão $\hat{M}L \times 1$ definido conforme

$$\begin{aligned} \underset{(\hat{M}L \times 1)}{\mathbf{z}^{(\hat{M})}(k)} &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{x}^{(K+1)}(k) \\ (\mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{\Omega}_1)^H \mathbf{x}^{(K+1)}(k+1) \\ \vdots \\ (\mathbf{\Omega}_{\hat{M}} - \mathbf{\Omega}_{\hat{M}-1})^H \mathbf{x}^{(K+1)}(k + \hat{M} - 1) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{\Omega} \mathbf{x}^{(K+\hat{M})}(k + \hat{M} - 1) \end{aligned} \quad (3.210)$$

3.8. ALGORITMO MSLP

envolvendo assim versões atrasadas de todos os sinais de erro de predição, onde

$$\underset{(\hat{M}L \times (K+\hat{M})L)}{\mathbf{\Omega}} \triangleq \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L,(\hat{M}-1)L} & \mathbf{\Omega}_1^H \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L,(\hat{M}-2)L} & (\mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{\Omega}_1)^H & \mathbf{0}_{L,L} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L,(\hat{M}-i)L} & (\mathbf{\Omega}_i - \mathbf{\Omega}_{i-1})^H & \mathbf{0}_{L,(i-1)L} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} (\mathbf{\Omega}_{\hat{M}} - \mathbf{\Omega}_{\hat{M}-1})^H & \mathbf{0}_{L,(\hat{M}-1)L} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.211)$$

e $\mathbf{\Omega}_0 \triangleq \mathbf{0}_{(K+1)L,L}$. Substituindo (3.206) em (3.210) e supondo ausência de ruído temos

$$\mathbf{z}^{(\hat{M})}(k) = \tilde{\mathbf{h}}^{(\hat{M})} s(k), \quad (3.212)$$

onde $\underset{(\hat{M}L \times 1)}{\tilde{\mathbf{h}}^{(\hat{M})}} = \left[\mathbf{h}^T(0) \quad \mathbf{h}^T(1) \quad \cdots \quad \mathbf{h}^T(\hat{M}-1) \quad \mathbf{0}_{1,(\hat{M}-M)L} \right]^T$ é a resposta ao impulso do sistema SIMO FIR $\mathbf{h}^{(M)}$ com zeros adicionados. Aqui está a grande diferença do algoritmo MSLP para o algoritmo LP: $\mathbf{z}^{(\hat{M})}(k)$ depende de todos os coeficientes das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR, diferentemente do algoritmo LP onde o erro de predição possui uma dependência exclusiva e problemática de $\mathbf{h}(0)$.

Em uma situação prática temos então $\mathbf{z}^{(\hat{M})}(k)$ contaminado por ruído, isto é

$$\mathbf{z}^{(\hat{M})}(k) = \tilde{\mathbf{h}}^{(\hat{M})} \mathbf{s}^{(\hat{M})}(k) + \tilde{\mathbf{n}}^{(\hat{M})}(k), \quad (3.213)$$

onde $\tilde{\mathbf{n}}^{(\hat{M})}(k)$ é ruído colorido obtido através da filtragem

$$\underset{(\hat{M}L \times 1)}{\tilde{\mathbf{n}}^{(\hat{M})}(k)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_1^H \mathbf{n}^{(K+1)}(k) \\ (\mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{\Omega}_1)^H \mathbf{n}^{(K+1)}(k+1) \\ \vdots \\ (\mathbf{\Omega}_{\hat{M}} - \mathbf{\Omega}_{\hat{M}-1})^H \mathbf{n}^{(K+1)}(k + \hat{M} - 1) \end{bmatrix} \quad (3.214)$$

$$= \mathbf{\Omega} \mathbf{n}^{(K+\hat{M})}(k + \hat{M} - 1),$$

da mesma maneira que (3.210).

Identificação do sistema SIMO FIR

Utilizando-se das estatísticas de segunda ordem de $\mathbf{z}^{(\hat{M})}(k)$ temos que

$$\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{(\hat{M})} \triangleq \mathbb{E} \left[\mathbf{z}^{(\hat{M})}(k) \mathbf{z}^{(\hat{M})H}(k) \right] = \tilde{\mathbf{h}}^{(\hat{M})} \tilde{\mathbf{h}}^{(\hat{M})H} + \sigma_{\mathbf{n}}^2 \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{(\hat{M})}, \quad (3.215)$$

$(\hat{M}L \times \hat{M}L)$

onde $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{(\hat{M})}$ é a matriz de correlação normalizada de $\tilde{\mathbf{n}}^{(\hat{M})}(k)$ para um atraso 0 e de dimensão $\hat{M}L \times \hat{M}L$. Vale ressaltar que $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{(\hat{M})}$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{(\hat{M})}$ são facilmente escritos em função dos coeficientes dos preditores e dos coeficientes de correlação do sinal e do ruído respectivamente. Como $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{(\hat{M})}$ contém o produto externo $\tilde{\mathbf{h}}^{(\hat{M})} \tilde{\mathbf{h}}^{(\hat{M})H}$, um procedimento direto consiste em extrair o autovetor dominante da matriz de correlação subtraída do efeito gerado pelo ruído, $\mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{(\hat{M})} - \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{(\hat{M})} = \mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{(\hat{M})} - \sigma_{\mathbf{n}}^2 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^H$ de forma a obter-se uma estimativa das respostas ao impulso do sistema.

Filtro inverso

Denote $\mathbf{u}^{(\hat{M})}$ como sendo um combinador complexo de dimensão $\hat{M}L \times 1$ que respeite

$$\mathbf{u}^{(\hat{M})H} \mathbf{z}^{(\hat{M})}(k) = \mathbf{u}^{(\hat{M})H} \mathbf{\Omega} \mathbf{x}^{(K+\hat{M})}(k + \hat{M} - 1) = \rho \hat{s}(k), \quad (3.216)$$

onde ρ é uma indeterminação escalar. Possíveis soluções são:

1. A solução ótima em termos de SNR, que é dada por

$$\arg \max_{\mathbf{u}^{(\hat{M})}} \frac{\mathbf{u}^{(\hat{M})H} \mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{(\hat{M})} \mathbf{u}^{(\hat{M})}}{\mathbf{u}^{(\hat{M})H} \mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{(\hat{M})} \mathbf{u}^{(\hat{M})}}; \quad (3.217)$$

2. A solução sub-ótima de máxima potência na saída, que é dada por

$$\arg \max_{\mathbf{u}^{(\hat{M})}} \frac{\mathbf{u}^{(\hat{M})H} \mathbf{R}_{\mathbf{z}}^{(\hat{M})} \mathbf{u}^{(\hat{M})}}{\mathbf{u}^{(\hat{M})H} \mathbf{u}^{(\hat{M})}}. \quad (3.218)$$

A primeira solução, apesar de ótima, é mal condicionada devido à deficiência de posto de $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}^{(\hat{M})}$ que vem da redundância presente em $\tilde{\mathbf{n}}(k)$. Já a segunda solução

3.8. ALGORITMO MSLP

é mais apropriada pois possui melhor condicionamento. É também simples verificar que na segunda solução $\mathbf{u}^{(\hat{M})}$ tende a $\tilde{\mathbf{h}}^{(\hat{M})} = \left[\mathbf{h}^T(0) \quad \dots \quad \mathbf{h}^T(\hat{M} - 1) \quad \mathbf{0}_{1, \hat{M} - M} \right]^T$ conforme $\sigma_{\mathbf{n}}^2$ tende a zero.

Por fim, reescrevendo (3.216) de forma a explicitar o atraso na estimativa $\hat{s}(k)$, temos

$$\rho \hat{s}(k - \hat{M} + 1) = \mathbf{u}^{(\hat{M})H} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}^{(K + \hat{M})}(k) = \mathbf{f}^{(K + \hat{M})H} \mathbf{x}^{(K + \hat{M})}(k), \quad (3.219)$$

onde $\mathbf{f}^{(K + \hat{M})} = \boldsymbol{\Omega}^H \mathbf{u}^{(\hat{M})}$, de dimensão $(K + \hat{M})L \times 1$, representa então um sistema inverso MISO FIR.

3.8.3 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N - 1) = [\mathbf{x}^T(N - 1) \quad \mathbf{x}^T(N - 2) \quad \dots \quad \mathbf{x}^T(0)]^T$ do sistema SIMO FIR;
2. Tamanho K da janela de predição (deve ser maior ou igual a $M - 1$);
3. Tamanho M das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR;
4. Variância $\sigma_{\mathbf{n}}^2$ do ruído aditivo presente em $\mathbf{x}^{(N)}(N - 1)$.

Saídas

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ da matriz de respostas ao impulso do sistema SIMO;
2. Estimativa de um sistema inverso MISO FIR $\hat{\mathbf{F}} \triangleq \left[\hat{\mathbf{f}}(0) \quad \hat{\mathbf{f}}(1) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{f}}(K + M - 1) \right]^T$.

Pseudo-código

1. Estimar $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(m)$ para $m = 0, 1, \dots, K + M$;

3.8. ALGORITMO MSLP

2. Calcular \mathbf{P}_i , $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, dado por

$$\mathbf{P}_i \underset{((K-i+1)L \times L)}{=} \left[\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K-i)}(0) \right]^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(i) \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(i+1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(K) \end{bmatrix}; \quad (3.220)$$

3. Calcular $\mathbf{\Omega}_i$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, dado por

$$\mathbf{\Omega}_i \underset{((K+1)L \times L)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{L \times L} \\ \mathbf{0}_{(M-i+1)L \times L} \\ -\mathbf{P}_i \end{bmatrix}; \quad (3.221)$$

4. Calcular $\mathbf{\Omega}$ dado por

$$\mathbf{\Omega} \underset{(ML \times (K+M)L)}{=} \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{L \times (M-1)L} \quad \mathbf{\Omega}_1^H] \\ [\mathbf{0}_{L \times (M-2)L} \quad (\mathbf{\Omega}_2 - \mathbf{\Omega}_1)^H \quad \mathbf{0}_{L \times L}] \\ \vdots \\ [\mathbf{0}_{L \times (M-i)L} \quad (\mathbf{\Omega}_i - \mathbf{\Omega}_{i-1})^H \quad \mathbf{0}_{L \times (i-1)L}] \\ \vdots \\ [(\mathbf{\Omega}_M - \mathbf{\Omega}_{M-1})^H \quad \mathbf{0}_{L \times ML}] \end{bmatrix}, \quad (3.222)$$

onde i indica a i -ésima linha de $\mathbf{\Omega}$;

5. Calcular \mathbf{R}_z , dado por

$$\mathbf{R}_z = \mathbf{\Omega} \mathbf{R}_x^{(K+M)} \mathbf{\Omega}^H; \quad (3.223)$$

6. Calcular a estimativa de $\mathbf{h}^{(M)}$, o autovetor associado ao maior autovalor de $\tilde{\mathbf{R}}_z^{(M)} = \mathbf{R}_z^{(M)} - \sigma_n^2 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^H$;

7. Calcular um sistema inverso $\mathbf{f}^{(K+M)}$ MISO FIR fazendo

$$\mathbf{u}^{(M)} \underset{(ML \times 1)}{=} \arg \max_{\mathbf{u}^{(M)}} \frac{\mathbf{u}^{(M)H} \mathbf{R}_z^{(M)} \mathbf{u}^{(M)}}{\mathbf{u}^{(M)H} \sigma_n^2 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{u}^{(M)}}, \quad (3.224)$$

ou

$$\mathbf{u}^{(M)} \underset{(ML \times 1)}{=} \arg \max_{\mathbf{u}^{(M)}} \frac{\mathbf{u}^{(M)H} \mathbf{R}_z^{(M)} \mathbf{u}^{(M)}}{\mathbf{u}^{(M)H} \mathbf{u}^{(M)}} \quad (3.225)$$

e por fim

$$\mathbf{f}^{(K+\hat{M})} \underset{((K+M)L \times 1)}{=} \mathbf{\Omega}^H \mathbf{u}^{(\hat{M})}. \quad (3.226)$$

3.9. ALGORITMO CMOE

8. Rearrumar $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$ e $\hat{\mathbf{f}}^{(K+M)}$, a partir de

$$\hat{\mathbf{h}}_{(ML \times 1)}^{(M)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(M-1) \\ \hat{\mathbf{h}}(M-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix}, \quad (3.227)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{(L \times M)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(0) & \hat{\mathbf{h}}(1) & \cdots & \hat{\mathbf{h}}(M-1) \end{bmatrix}^T, \quad (3.228)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{((K+M)L \times 1)}^{(K+M)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}(K+M-1) \\ \hat{\mathbf{f}}(K+M-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}(0) \end{bmatrix} \quad (3.229)$$

e

$$\hat{\mathbf{F}}_{(L \times K+M)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}(0) & \hat{\mathbf{f}}(1) & \cdots & \hat{\mathbf{f}}(K+M-1) \end{bmatrix}^T, \quad (3.230)$$

para obter $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{F}}$.

3.9 Algoritmo CMOE

O algoritmo de Energia de Saída Mínima e Restringida (*constrained minimum output energy*, CMOE), desenvolvido originalmente por (TSATSANIS; XU, 1997), utiliza como base idéias similares às de conformação de feixe (*beamforming*), uma área de pesquisa específica de comunicações digitais. Tem como grandes vantagens ser capaz de estimar um sistema inverso MISO FIR que tende para o sistema inverso MISO FIR de erro médio quadrático mínimo (*Minimum Mean Square Error*, MMSE) na medida em que o ruído aditivo tende para zero. Assim como o algoritmo SSM, permite que o sinal de entrada do sistema SIMO FIR seja modelado por ruído colorido.

3.9.1 Modelo do sistema

De maneira similar a todos os algoritmos apresentados neste capítulo, o modelo de sistema SIMO FIR utilizado pelo algoritmo CMOE é também dado por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) + \mathbf{n}^{(K)}(k) \quad (3.231)$$

onde neste caso é suposto que:

1. $\{s(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, *colorido* ($\mathbf{R}_s^{(K+M-1)}(0)$ tem posto completo por coluna) e ergódico;
2. $\{\mathbf{n}(k)\}$ é um processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco, ergódico e decorrelacionado de $\{s(k)\}$ e entre seus L termos;
3. A matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$ tem posto completo por coluna;
4. O intervalo K é maior ou igual ao tamanho M da maior resposta ao impulso do sistema SIMO FIR.

Temos aqui novamente a equivalência das suposições 3 e 4 com a condição de que as respostas ao impulso $h_1(k), h_2(k), \dots, h_L(k)$ não possuam nenhum zero em comum, conforme a equação (2.31). É importante ressaltar, por fim, a capacidade deste algoritmo de lidar com sinais de entrada $s(k)$ *coloridos*, assim como o algoritmo SSM.

3.9.2 Desenvolvimento

Defina-se um sistema inverso $\mathbf{f}^{(K)}$ MISO FIR através de

$$\mathbf{f}^{(K)H} \mathbf{x}^{(K)}(k) = s(k - D). \quad (3.232)$$

Tratamos primeiramente do problema não-cego, isto é, temos o conhecimento de $\mathbf{H}^{(K)}$. Denote-se as colunas de $\mathbf{H}^{(K)}$ por

$$\left[\tilde{\mathbf{h}}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{h}}_{K+M-1} \right] \triangleq \mathbf{H}^{(K)}, \quad (3.233)$$

3.9. ALGORITMO CMOE

onde $\tilde{\mathbf{h}}_i$ para $i = 1, \dots, K + M - 1$ é um vetor coluna de dimensão $KL \times 1$.

Podemos então definir uma função objetivo de forma que, variando-se o sistema inverso $\mathbf{f}^{(K)}$, minimizemos a energia (variância) do sinal $s(k - d)$ para todos os atrasos d , com a exceção de $s(k - D)$, que deve possuir energia (variância) unitária. Esta função é

$$\min_{\mathbf{f}^{(K)}} E\{\|s(k - D)\|^2\} \text{ sujeito a } \mathbf{f}^{(K)H} \tilde{\mathbf{h}}_{D+1} = 1, \quad (3.234)$$

que pode ser reescrita, utilizando (3.232), por

$$\min_{\mathbf{f}^{(K)}} \mathbf{f}^{(K)H} \mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)} \mathbf{f}^{(K)} \text{ sujeito a } \mathbf{f}^{(K)H} \tilde{\mathbf{h}}_{D+1} = 1. \quad (3.235)$$

A solução então pode ser encontrada de forma fechada utilizando multiplicadores de Lagrange (TSATSANIS; XU, 1997) sendo dada por

$$\mathbf{f}_{MV}^{(K)} = \left[\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}^H (\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)})^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_{D+1} \right]^{-1} (\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)})^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_{D+1} \quad (3.236)$$

onde a mínima variância obtida é

$$MV(\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}) = \left[\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}^H (\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)})^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_{D+1} \right]^{-1}. \quad (3.237)$$

Cabe ressaltar que esta solução difere da solução ótima MMSE apenas de um múltiplo escalar visto que $\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}$ é um múltiplo do vetor de correlação $E\{s(k - D)\mathbf{x}^H(k)\}$ (TSATSANIS; XU, 1997). Logo este sistema inverso possui o mesmo efeito que o sistema inverso MMSE para a relação sinal-ruído mais interferência (*Signal to Interference plus Noise Ratio*, SINR) na saída $\mathbf{x}(k)$. Mas, conforme dito anteriormente, esta não é uma solução cega pois necessitamos do conhecimento de $\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}$.

A solução cega é então desenvolvida considerando-se que se deseja maximizar a energia de $s(k - D)$ variando $\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}$ na função custo original. Assim a procura na função custo será feita de forma que dentro do conjunto de todos os possíveis $\tilde{\mathbf{f}}^{(K)}$ ótimos para todos os possíveis sistemas $\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}$, se encontre o par que seja capaz de maximizar a energia de $s(k - D)$. Mas, para escrever esta função custo, primeiro é

3.9. ALGORITMO CMOE

preciso esclarecer algumas questões de notação. Sabemos que a $D + 1$ -ésima coluna de $\mathbf{H}^{(K)}$ tem a forma

$$\tilde{\mathbf{h}}_{D+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(D-M+1)L,1} \\ \mathbf{h}(M-1) \\ \mathbf{h}(M-2) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(0) \\ \mathbf{0}_{(K-D-1)L,1} \end{bmatrix} \quad (3.238)$$

para todo $K \geq D + 1 \geq M$. Logo, $\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}$ pode ser linearmente parametrizado por $\mathbf{h}^{(M)} = [\mathbf{h}^T(M-1) \ \mathbf{h}^T(M-2) \ \cdots \ \mathbf{h}^T(0)]^T$, os coeficientes das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR. Podemos então escrever

$$\tilde{\mathbf{h}}_{D+1} = \mathbf{C}_{D+1} \mathbf{h}^{(M)}, \quad \mathbf{C}_{D+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(D-M+1)L,ML} \\ \mathbf{I}_{ML} \\ \mathbf{0}_{(K-D-1)L,L} \end{bmatrix}. \quad (3.239)$$

Logo a função custo cega sugerida pode ser expressa por

$$\left[\begin{array}{c} \max \\ \tilde{\mathbf{h}}_{D+1} = \mathbf{C}_{D+1} \mathbf{h}^{(M)} \\ \|\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}\| = 1 \end{array} \right] \left[\min_{\mathbf{f}^{(K)}} \mathbf{f}^{(K)H} \mathbf{R}_x^{(K)} \mathbf{f}^{(K)} \right] \text{ sujeito a } \mathbf{f}^{(K)H} \tilde{\mathbf{h}}_{D+1} = 1. \quad (3.240)$$

Agora encontraremos uma solução fechada. Substituindo a solução ótima de (3.237), o valor da mínima variância, em (3.240) e eliminando a restrição $\|\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}\| = 1$ pela multiplicação da função custo pela norma $\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}^H \tilde{\mathbf{h}}_{D+1}$, obtemos

$$\min_{\tilde{\mathbf{h}}_{D+1} = \mathbf{C}_{D+1} \mathbf{h}^{(M)}} \frac{\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}^H \tilde{\mathbf{h}}_{D+1}}{\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}^H \mathbf{R}_x^{(K)} \tilde{\mathbf{h}}_{D+1}}. \quad (3.241)$$

Substituindo (3.239) em (3.241) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(M)} &= \arg \max_{\mathbf{h}^{(M)}} \frac{\mathbf{h}^{(M)H} \mathbf{C}_{D+1}^H \mathbf{C}_{D+1} \mathbf{h}^{(M)}}{\mathbf{h}^{(M)H} \mathbf{C}_{D+1}^H \left(\mathbf{R}_x^{(K)} \right)^{-1} \mathbf{C}_{D+1} \mathbf{h}^{(M)}} \\ &= \arg \min_{\mathbf{h}^{(M)}} \frac{\mathbf{h}^{(M)H} \mathbf{C}_{D+1}^H \left(\mathbf{R}_x^{(K)} \right)^{-1} \mathbf{C}_{D+1} \mathbf{h}^{(M)}}{\mathbf{h}^{(M)H} \mathbf{h}^{(M)}} \end{aligned} \quad (3.242)$$

onde a última igualdade vem de que $\mathbf{C}_{D+1}^H \mathbf{C}_{D+1} = \mathbf{I}_{ML}$. A função custo, um quociente de Rayleigh, pode ser então facilmente resolvida procurando-se pelo autovetor

3.9. ALGORITMO CMOE

associado ao menor autovalor de $\mathbf{C}_{D+1}^H (\mathbf{R}_x^{(K)})^{-1} \mathbf{C}_{D+1}$. Por fim, o sistema inverso $\mathbf{f}^{(K)}$ MISO FIR é dado por (3.236), isto é

$$\mathbf{f}^{(K)} = \left[\tilde{\mathbf{h}}_{D+1}^H (\mathbf{R}_x^{(K)})^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_{D+1} \right]^{-1} (\mathbf{R}_x^{(K)})^{-1} \tilde{\mathbf{h}}_{D+1}, \quad (3.243)$$

onde $\tilde{\mathbf{h}}_{D+1} = \mathbf{C}_{D+1} \mathbf{h}^{(M)}$.

3.9.3 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N-1) = [\mathbf{x}^T(N-1) \ \mathbf{x}^T(N-2) \ \dots \ \mathbf{x}^T(0)]^T$ do sistema SIMO FIR;
2. Tamanho K das respostas ao impulso do sistema inverso MISO FIR a ser estimado;
3. Atraso D para a estimativa de $s(k)$;
4. Tamanho M das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR.

Observação: Deve-se respeitar obrigatoriamente $K \geq D + 1 \geq M$.

Saídas

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ da matriz de respostas ao impulso do sistema SIMO;
2. Estimativa de um sistema inverso MISO FIR $\hat{\mathbf{F}} \triangleq \left[\hat{\mathbf{f}}(0) \ \hat{\mathbf{f}}(1) \ \dots \ \hat{\mathbf{f}}(K+M-1) \right]^T$.

Pseudo-código

1. Calcular a estimativa $\hat{\mathbf{R}}_x^{(K)}(0)$ a partir de $\mathbf{x}^{(N)}(N-1)$;

3.9. ALGORITMO CMOE

2. Calcular \mathbf{A} dado por

$$\underset{(ML \times ML)}{\mathbf{A}} = \mathbf{C}_{D+1}^H \left(\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0) \right)^{-1} \mathbf{C}_{D+1}, \quad (3.244)$$

onde

$$\underset{(KL \times ML)}{\mathbf{C}_{D+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(D-M+1)L, ML} \\ \mathbf{I}_{ML} \\ \mathbf{0}_{L(K-D-1), ML} \end{bmatrix}; \quad (3.245)$$

3. Calcular a estimativa $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$ como o autovetor correspondente ao menor autovalor de \mathbf{A} ;

4. Calcular a estimativa do sistema inverso $\hat{\mathbf{f}}^{(K)}$ dada por

$$\underset{(KL \times 1)}{\hat{\mathbf{f}}^{(K)}} = \left[\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0) \right]^{-1} \mathbf{C}_{D+1} \mathbf{A}^{-1} \hat{\mathbf{h}}^{(M)}; \quad (3.246)$$

5. Rearrumar $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$ e $\hat{\mathbf{f}}^{(K)}$, a partir de

$$\underset{(ML \times 1)}{\hat{\mathbf{h}}^{(M)}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(M-1) \\ \hat{\mathbf{h}}(M-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix}, \quad (3.247)$$

$$\underset{(L \times M)}{\hat{\mathbf{H}}} = \left[\hat{\mathbf{h}}(0) \quad \hat{\mathbf{h}}(1) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{h}}(M-1) \right]^T, \quad (3.248)$$

$$\underset{(KL \times 1)}{\hat{\mathbf{f}}^{(K)}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}(K-1) \\ \hat{\mathbf{f}}(K-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}(0) \end{bmatrix} \quad (3.249)$$

e

$$\underset{(L \times K)}{\hat{\mathbf{F}}} = \left[\hat{\mathbf{f}}(0) \quad \hat{\mathbf{f}}(1) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{f}}(K-1) \right]^T, \quad (3.250)$$

para obter $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{F}}$.

Capítulo 4

Algoritmos Determinísticos

Complementando os algoritmos estatísticos do capítulo anterior, neste capítulo são apresentados algoritmos determinísticos que procuram estimar o sistema SIMO FIR e a sua entrada. Estes algoritmos possuem uma vantagem em particular: a capacidade de *convergência, tanto para a estimativa do sistema quanto para a estimativa da entrada, para um número finito¹ de amostras da saída*. Tal característica é única destes pois os algoritmos estatísticos do capítulo anterior obrigatoriamente precisam estimar estatísticas de segunda ordem, possuindo convergência garantida apenas quando o número de amostras tende para infinito. Assim, a classe de algoritmos determinísticos deste capítulo se torna particularmente atraente para problemas onde o número de amostras da saída disponíveis seja severamente limitado, o caso do problema sísmico por exemplo. Por outro lado, devido à abordagem determinística, o ruído aditivo normalmente não é considerado nos desenvolvimentos iniciais de tais algoritmos. Assim, o tratamento do mesmo não é feito de forma ótima e, como consequência, uma exigência comum destes algoritmos é a de que o ruído aditivo seja relativamente baixo (SNR alta). No entanto, técnicas para se contornar esta situação existem, baseadas em abordagens de mínimos quadrados totais. Esta abordagem em particular é brevemente apresentada no algoritmo por

¹Uma amostra finita de um sinal é uma amostra para um bloco de tempo determinado. Por exemplo, podemos ter uma amostra finita de $\mathbf{x}(k)$ de $k = 0$ até $k = N - 1$.

projeções oblíquias (*oblique projections*, OP), mas sua utilização pode ser estendida para outros casos.

4.1 Algoritmo SCM

O algoritmo de casamento de subcanais (*Subchannel Matching*, SCM), desenvolvido por (LIU; XU; TONG, 1994), foi o primeiro a tratar o problema de identificação de sistemas SIMO FIR através de uma abordagem determinística, supondo a *ausência de ruído aditivo*. Devido a este tratamento ele tem uma característica única dos algoritmos determinísticos deste capítulo: possui a capacidade de *convergir, para uma amostra finita da saída do sistema, para o valor exato das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR, a menos de uma constante multiplicativa*.

4.1.1 Desenvolvimento

Segue aqui o desenvolvimento do algoritmo SCM (LIU; XU; TONG, 1994), com as devidas alterações de notação. Sabemos que o sistema SIMO FIR pode ser expresso por

$$x_l(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s(m)h_l(k-m) = s(k) * h_l(k), \quad l \in \{1, 2, \dots, L\}, \quad (4.1)$$

onde $*$ denota a convolução e supomos que *não há ruído aditivo*. Assim, para qualquer par de saídas $x_q(k)$ e $x_p(k)$, p e $q \in \{1, 2, \dots, L\}$, temos

$$x_q(k) = h_q(k) * s(k) \quad \text{e} \quad x_p(k) = h_p(k) * s(k). \quad (4.2)$$

Podemos ainda escrever

$$h_p(k) * x_q(k) = h_p(k) * h_q(k) * s(k) = h_q(k) * x_p(k), \quad (4.3)$$

que pode ser interpretado graficamente na Figura 4.1. Denotando as respostas ao impulso estimadas como $\hat{h}_p(k)$ e $\hat{h}_q(k)$, podemos escolher ambas de forma que a

4.1. ALGORITMO SCM

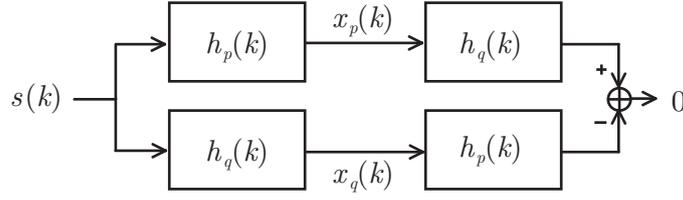


Figura 4.1: Casamento de subcanais.

equação

$$h_p(k) * \hat{h}_q(k) = \hat{h}_p(k) * h_q(k) \quad (4.4)$$

seja respeitada para todos os valores de $x_p(k)$ e $x_q(k)$ medidos. Caso $h_p(k)$ e $h_q(k)$ não tenham nenhum zero em comum nas suas respectivas transformadas-Z $\hat{h}_p(z) = \sum_k h_p(k)z^{-k}$ e $\hat{h}_q(z) = \sum_k h_q(k)z^{-k}$, então

$$\begin{aligned} \hat{h}_p(z) &= \hat{h}_p(z)\dot{c}(z) \\ \hat{h}_q(z) &= \hat{h}_q(z)\dot{c}(z), \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $\dot{c}(z)$ é um fator polinomial comum. Por fim, caso as ordens de $\hat{h}_p(z)$ e $\hat{h}_q(z)$ sejam as mesmas de $\hat{h}_p(z)$ e $\hat{h}_q(z)$ respectivamente, então $\dot{c}(z)$ será uma constante e as duas respostas ao impulso serão identificáveis até um fator constante multiplicativo.

De forma a explorar esta relação podemos montar um sistema de equações superdeterminado com $h_p(k)$ e $h_q(k)$ como incógnitas. Mais especificamente, para saídas observadas $x_p(k)$ e $x_q(k)$ para $k = 1, 2, \dots, N$ a equação (4.3) se torna um sistema de equações dado por

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_p & -\tilde{\mathbf{X}}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_q^{(M)} \\ \mathbf{h}_p^{(M)} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{N-M,1} \quad (4.6)$$

onde

$$\mathbf{h}_l^{(M)} = [h_l(M-1) \quad h_l(M-2) \quad \dots \quad h_l(0)]^T, \quad (4.7)$$

$(M \times 1)$

4.1. ALGORITMO SCM

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}_l \underset{(N-M \times M)}{\triangleq} & \begin{bmatrix} x_l(1) & x_l(2) & \cdots & x_l(M) \\ x_l(2) & x_l(3) & \cdots & x_l(M+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l(N-M) & x_l(N-M+1) & \cdots & x_l(N) \end{bmatrix} \\ & = \tilde{\mathbf{I}}_{N-M} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_l^{(N-M)}(N-M) & \cdots & \mathbf{x}_l^{(N-M)}(N) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

para $l \in \{p, q\}$ e $\tilde{\mathbf{I}}_{N-M}$ representa a matriz identidade antidiagonal dada por

$$\tilde{\mathbf{I}}_{N-M} \underset{(N-M \times N-M)}{\triangleq} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Ainda, para cada par (p, q) podemos escrever um conjunto de equações lineares que podem ser agrupadas conforme

$$\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{h}^{(M)} = \mathbf{0}_{\frac{L(L-1)}{2}(N-M),1} \quad (4.10)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{X}} \underset{\left(\frac{L(L-1)}{2}(N-M) \times ML\right)}{=} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{X}}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}^{(L)} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

e

$$\tilde{\mathbf{X}}^{(l)} \underset{\left((L-l)(N-M) \times ML\right)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(L-l)(N-M), (l-1)M} & \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_{l+1} & -\tilde{\mathbf{X}}_l & \mathbf{0}_{N-M,M} & \cdots & \mathbf{0}_{N-M,M} \\ \tilde{\mathbf{X}}_{l+2} & \mathbf{0}_{N-M,M} & -\tilde{\mathbf{X}}_l & \cdots & \mathbf{0}_{N-M,M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}_L & \mathbf{0}_{N-M,M} & \mathbf{0}_{N-M,M} & \cdots & -\tilde{\mathbf{X}}_l \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Sendo assim, quando não há ruído, a equação (4.10) determina os coeficientes $\mathbf{h}^{(M)}$ das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR de maneira exata. Em condições de ruído não severas, ainda podemos resolver o sistema no sentido dos mínimos quadrados. Temos então

$$\hat{\mathbf{h}}^{(M)} = \arg \min_{\|\mathbf{h}^{(M)}\|=1} \|\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{h}^{(M)}\|^2, \quad (4.13)$$

4.1. ALGORITMO SCM

onde a restrição foi escolhida de forma a evitar a resposta trivial $\mathbf{h}^{(M)} = \mathbf{0}_{ML,1}$. Cabe ressaltar que outras restrições como $\mathbf{c}^{(M)H} \mathbf{h}^{(M)} = 1$ para $\mathbf{c}^{(M)}$ qualquer podem ser escolhidas.

Complexidade linear do sinal de entrada

Até agora o algoritmo foi baseado na idéia de que o sinal de entrada $s(k)$ é capaz de gerar saídas que permitam que o sistema de equações em (4.10) seja superdeterminado. Mas, claramente, isto não é verdade sempre. Um exemplo simples seria uma entrada $s(k)$ constante, que simplesmente não permite que o sistema em (4.10) seja superdeterminado.

Define-se então a *complexidade linear* (ZHAO; TONG, 1999) para um bloco de N amostras do sinal de entrada $s(N-1), s(N-2), \dots, s(0)$ como sendo o menor valor c para o qual a recursão de forma $s(k) = -\sum_{m=1}^c a(m)s(k-m)$, para $i = c, \dots, n-1$, exista de forma a gerar $s(N-1), s(N-2), \dots, s(c)$ a partir das primeiras c amostras de $s(k)$, isto é $s(c-1), s(c-2), \dots, s(0)$.

Assim, temos como condição necessária para que a equação (4.10) tenha solução, que $s(k)$ tenha complexidade linear igual ou superior a $L_* = 2M - 1$ (LIU; XU; TONG, 1994). Cabe ressaltar que esta é uma restrição pequena visto que em sismologia estamos lidando com sinais $s(k)$ contínuos e em comunicações digitais normalmente temos $s(k)$ como sendo branco, independente e identicamente distribuído para $s(k-m)$ com $m = -\infty, \dots, \infty$.

Convergência para amostra finita da saída

Uma característica importante deste e de todos os algoritmos deste capítulo é a convergência para o sistema SIMO FIR, de forma exata, para uma amostra finita da saída. Devido ao sistema superdeterminado que é construído, quando há ausência de ruído a estimativa do algoritmo é exata, a menos de uma constante multiplicativa intrínseca ao problema. Em condições de ruído pouco severas a es-

4.1. ALGORITMO SCM

timativa ainda será muito boa, principalmente se comparada com os algoritmos estatísticos do Capítulo 3 diante de uma quantidade de amostras da saída disponíveis muito pequena. Isto será explicitamente explorado durante a apresentação dos resultados experimentais, no Capítulo 5.

4.1.2 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Tamanho M das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR;
2. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N-1) = [\mathbf{x}^T(N-1) \quad \mathbf{x}^T(N-2) \quad \dots \quad \mathbf{x}^T(0)]^T$ do sistema SIMO FIR.

Saída

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ da matriz de respostas ao impulso do sistema SIMO FIR.

Pseudo-código

1. A partir de $\mathbf{x}^{(N)}(N-1)$, montar $\tilde{\mathbf{X}}$ dado por

$$\underset{\left(\frac{L(L-1)}{2}\right)(N-M+1) \times ML}{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^{(1)} \\ \tilde{\mathbf{X}}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{((L-l)(N-M+1) \times (L+1)M)}{\tilde{\mathbf{X}}^{(l)}} \\ \mathbf{0}_{(L-l)(N-M+1), (l-1)M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_{l+1} & -\tilde{\mathbf{X}}_l & \mathbf{0}_{N-M+1, M} & \cdots & \mathbf{0}_{N-M+1, M} \\ \tilde{\mathbf{X}}_{l+2} & \mathbf{0}_{N-M+1, M} & -\tilde{\mathbf{X}}_l & \cdots & \mathbf{0}_{N-M+1, M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}_L & \mathbf{0}_{N-M+1, M} & \mathbf{0}_{N-M+1, M} & \cdots & -\tilde{\mathbf{X}}_l \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.2. ALGORITMO LSS

e

$$\tilde{\mathbf{X}}_l \underset{(N-M+1 \times M)}{\triangleq} \begin{bmatrix} x_l(0) & x_l(1) & \cdots & x_l(M-1) \\ x_l(1) & x_l(2) & \cdots & x_l(M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l(N-M) & x_l(N-M+1) & \cdots & x_l(N-1) \end{bmatrix}; \quad (4.16)$$

2. Encontrar o vetor singular à direita $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$ associado ao menor valor singular de $\tilde{\mathbf{X}}$;
3. Rearrumar $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$, a partir de

$$\hat{\mathbf{h}}^{(M)} \underset{(ML \times 1)}{=} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(M-1) \\ \hat{\mathbf{h}}(M-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

e

$$\hat{\mathbf{H}} \underset{(L \times M)}{=} \left[\hat{\mathbf{h}}(0) \quad \hat{\mathbf{h}}(1) \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{h}}(M-1) \right]^T, \quad (4.18)$$

para obter $\hat{\mathbf{H}}$.

Observação: A matriz $\tilde{\mathbf{X}}$ pode ser utilizada para se determinar a ordem $M-1$ das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR. Para isso basta montarmos uma matriz $\tilde{\mathbf{X}}$ utilizando desta vez não $M-1$ mas M_e-1 como a ordem das respostas ao impulso do sistema, de forma que $M_e > M$. Teremos então valores singulares próximos de zero para os $(M_e - M)L$ menores valores singulares, que serão então razoavelmente distantes dos ML valores singulares que dominam a matriz e indicam a ordem $M-1$.

4.2 Algoritmo LSS

O algoritmo de suavização por mínimos quadrados (*Least Squares Smoothing*, LSS) desenvolvido por (TONG; ZHAO, 1998) e (ZHAO; TONG, 1999) é aqui

4.2. ALGORITMO LSS

apresentado. Assim como o algoritmo SCM, ele se caracteriza por ser um algoritmo determinístico que é capaz de identificar o sistema de forma exata, com uma *quantidade finita de amostras da saída*, supondo para isso a *ausência de ruído*. Mas, relativamente ao algoritmo SCM, possui um desempenho melhor quando exposto a ruído aditivo devido ao tratamento de suavização por ele realizado.

4.2.1 Desenvolvimento

Segue nesta seção a reprodução do desenvolvimento do algoritmo LSS, encontrado em (ZHAO; TONG, 1999), com as devidas adaptações de notação.

Notações especiais

Devido às manipulações algébricas no restante deste capítulo, uma forma de notação reduzida de matrizes toeplitz e toeplitz por blocos será utilizada. Assim a matriz

$$\begin{bmatrix} a(k) & \cdots & a(k+P-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ a(k-K+1) & & \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

representa

$$\begin{bmatrix} a(k) & a(k+1) & \cdots & a(k+P-1) \\ a(k-1) & a(k) & & a(k+P-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(k-K+1) & a(k-K+2) & \cdots & a(k-K+P) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

e a matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(k) & \cdots & \mathbf{a}(k+P-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{a}(k-K+1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

4.2. ALGORITMO LSS

representa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}(k) & \mathbf{a}(k+1) & \cdots & \mathbf{a}(k+P-1) \\ \mathbf{a}(k-1) & \mathbf{a}(k) & & \mathbf{a}(k+P-2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}(k-K+1) & \mathbf{a}(k-K+2) & \cdots & \mathbf{a}(k-K+P) \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Definições iniciais

De forma simples podemos escrever o modelo livre de ruído dado por

$$\mathbf{x}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k), \quad (4.23)$$

de forma ligeiramente diferente. Tomando-se como base uma série de equações que capturem instantes de tempo além do instante k , por exemplo, de k a $k+P-1$, podemos representar todas estas equações em uma equação apenas, através de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(K)}(k) & \cdots & \mathbf{x}^{(K)}(k+P-1) \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{(K)} \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) & \cdots & \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k+P-1) \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

De forma a simplificar a notação definam-se as matrizes

$$\mathbf{X}^{(K)}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(K)}(k) & \cdots & \mathbf{x}^{(K)}(k+P-1) \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$(KL \times P)$

e

$$\mathbf{S}^{(K+M-1)}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k) & \cdots & \mathbf{s}^{(K+M-1)}(k+P-1) \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

$(K+M-1 \times P)$

Podemos então escrever (4.24) como

$$\mathbf{X}^{(K)}(k) = \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{S}^{(K+M-1)}(k). \quad (4.27)$$

Como iremos trabalhar intensamente com as linhas das matrizes $\mathbf{X}^{(K)}(k)$ e $\mathbf{S}^{(K+M-1)}(k)$ também é necessário definir o vetor *linha*

$$\check{\mathbf{s}}(k) \triangleq \begin{bmatrix} s(k) & s(k+1) & \cdots & s(k+P-1) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$(1 \times P)$

4.2. ALGORITMO LSS

e a matriz

$$\check{\mathbf{X}}(k) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) & \mathbf{x}(k+1) & \cdots & \mathbf{x}(k+P-1) \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(K+M-1)}(k) &= \begin{bmatrix} s(k) & \cdots & s(k+P-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ s(k-K-M+2) & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{(K)}(k) & \cdots & \mathbf{s}^{(K)}(k+P-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \check{\mathbf{s}}(k) \\ \vdots \\ \check{\mathbf{s}}(k-K-M+2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(K)}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) & \cdots & \mathbf{x}(k+P-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(k-K+1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(K)}(k) & \cdots & \mathbf{x}^{(K)}(k+P-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \check{\mathbf{X}}(k) \\ \vdots \\ \check{\mathbf{X}}(k-K+1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Premissas e propriedades

O algoritmo LSS baseia seu desenvolvimento em três premissas básicas. A primeira é comum aos algoritmos estatísticos do Capítulo 3 e refere-se a não existência de zeros em comum no domínio da transformada-Z dos diversos sistemas SISO FIR que compõe o sistema SIMO FIR. A segunda refere-se à complexidade linear² da entrada $s(k)$. E a terceira é a ausência de ruído aditivo.

Defina-se o subespaço de entrada gerado por $|q|$ vetores linha consecutivos

²Definição apresentada na página 127

4.2. ALGORITMO LSS

de amostras em bloco da entrada como

$$\mathcal{S}_{k,q} \triangleq \text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k), \dots, \check{\mathbf{s}}(k - q + 1)\} \quad (4.32)$$

onde $\text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k), \dots, \check{\mathbf{s}}(k - q + 1)\}$ representa o espaço gerado pelos vetores $\check{\mathbf{s}}(k), \dots, \check{\mathbf{s}}(k - q + 1)$. Similarmente defina-se o subespaço de saída gerado por $|Lq|$ linhas de matrizes da saída $\check{\mathbf{X}}(k)$ para q instantes de tempo seguidos de k a $k - q + 1$.

$$\mathcal{X}_{k,q} \triangleq \text{sp}\{\check{\mathbf{X}}(k), \dots, \check{\mathbf{X}}(k - q + 1)\}. \quad (4.33)$$

Observe que para q positivo os subespaços de saída ou de entrada são definidos por instantes passados e para q negativo por instantes futuros. O seguinte lema é então verdadeiro.

Lema 4.2.1. *Quando as respostas ao impulso do sistema SIMO FIR não compartilham nenhum zero, existe então um valor mínimo $K_0 \geq M - 1$ de forma que para qualquer $K \geq K_0$ a relação isomórfica entre os subespaços de entrada e de saída*

$$\mathcal{X}_{k,K} = \mathcal{S}_{k,K+M-1} \quad (4.34)$$

é válida.

Demonstração. Conforme o Capítulo 2, temos que a condição de que as respostas ao impulso do sistema SIMO FIR não possuam zeros em comum implica na existência de um valor mínimo $K_0 \geq M - 1$ de forma que para qualquer $K \geq K_0$, $\mathbf{H}^{(K)}$ possui posto completo por coluna. Assim, a partir de (4.27), temos

$$\mathcal{R}\{\mathbf{X}^{(K)}(k)\} = \mathcal{R}\{\mathbf{S}^{(K+M-1)}(k)\}, \quad (4.35)$$

levando à (4.34). □

O Lema 4.2.1 possui um papel importantíssimo na estimação cega do sistema SIMO FIR pois é esta relação isomórfica entre a entrada e a saída que permite a estimativa do sistema pelo algoritmo LSS, diretamente a partir da saída apenas.

Para garantir a identificabilidade do sistema, ainda é necessário que a entrada seja capaz de excitar todos os modos do mesmo. No caso específico do

4.2. ALGORITMO LSS

algoritmo LSS temos a necessidade de que a seqüência de entrada $s(k)$ possua complexidade linear igual ou superior a $L_* = 2K_0 + 2(M - 1) + 1$. Isto implica em que para qualquer $N \geq 2L_* - M + 2$ temos

$$\text{posto} \left\{ \begin{bmatrix} s(L_* - M + 1) & \cdots & s(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ s(1 - M + 1) & & \end{bmatrix} \right\} = L_*. \quad (4.36)$$

Esta implicação será útil mais a frente.

Identificação do sistema pelo subespaço de entrada

O isomorfismo entre os subespaços de entrada e de saída implica na possibilidade de construção do subespaço de entrada pelo subespaço de saída. Precisamos então saber agora se podemos identificar o sistema a partir do subespaço de entrada. Assim poderemos reconstruir o subespaço de entrada a partir do subespaço de saída e depois utilizá-lo para obter o sistema SIMO FIR.

Considere M matrizes de dimensão $L \times P$ dadas por $\check{\mathbf{X}}(k + M - 1), \dots, \check{\mathbf{X}}(k)$ contendo amostras em bloco da saída. Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{X}}(k + M - 1) &= \mathbf{h}(0)\check{\mathbf{s}}(k + M - 1) + \mathbf{h}(1)\check{\mathbf{s}}(k + M - 2) + \cdots + \mathbf{h}(M - 1)\check{\mathbf{s}}(k) \\ \check{\mathbf{X}}(k + M - 2) &= \mathbf{h}(0)\check{\mathbf{s}}(k + M - 2) + \cdots + \mathbf{h}(M - 2)\check{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{h}_{M-1}\check{\mathbf{s}}(k - 1) \\ &\vdots \\ \check{\mathbf{X}}(k) &= \mathbf{h}(0)\check{\mathbf{s}}(k) + \cdots + \mathbf{h}(M - 1)\check{\mathbf{s}}(k - M + 1) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Suponha que desejamos identificar $\mathbf{h}(M - 1), \dots, \mathbf{h}(0)$, exceto por uma constante multiplicativa, a partir $\check{\mathbf{X}}(k + M - 1), \dots, \check{\mathbf{X}}(k)$. Uma possibilidade é eliminar em todas as equações de (4.37) todos os termos excetuando-se os associados a $\check{\mathbf{s}}(k)$. Considere agora projetar os vetores linha (as linhas) de $\check{\mathbf{X}}(k + i)$, para $i = 0, \dots, M - 1$, em um subespaço *pontuado*³ da entrada \mathcal{Z} que satisfaça às condições

$$\text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k + M - 1), \dots, \check{\mathbf{s}}(k + 1), \check{\mathbf{s}}(k - 1), \dots, \check{\mathbf{s}}(k - M + 1)\} \subset \mathcal{Z} \quad (4.38)$$

³O termo *pontuado* se refere ao subespaço da entrada pontuado possuir uma componente a menos, $\check{\mathbf{s}}(k)$ no caso, do que o subespaço da entrada (completo) $\text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k + M - 1), \dots, \check{\mathbf{s}}(k - M + 1)\}$.

4.2. ALGORITMO LSS

e

$$\check{\mathbf{s}}(k) \notin \mathcal{Z}. \quad (4.39)$$

Perceba que o fato da complexidade linear de $s(k)$ ser maior que $L_* = 2K_0 + 2(M - 1)$ garante que $\check{\mathbf{s}}(k) \notin \text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k + M - 1), \dots, \check{\mathbf{s}}(k + 1), \check{\mathbf{s}}(k - 1), \dots, \check{\mathbf{s}}(k - M + 1)\}$. Logo, o subespaço pontuado \mathcal{Z} existe. Podemos também verificar que $\check{\mathbf{X}}(k + i)$ é a soma de $\mathbf{h}(i)\check{\mathbf{s}}(k + i - l)$, um vetor fora de \mathcal{Z} , com $\sum_{l=0}^{i-1} \mathbf{h}(l)\check{\mathbf{s}}(k + i - l) + \sum_{l=i+1}^L \mathbf{h}(l)\check{\mathbf{s}}(k + i - l)$, um vetor dentro de \mathcal{Z} . Uma representação geométrica da relação entre $\check{\mathbf{X}}(k + i)$ e \mathcal{Z} encontra-se na Figura 4.2. A partir dela é direto que

$$\check{\mathbf{X}}(k + i)|_{\mathcal{Z}} = \mathbf{h}(i)\check{\mathbf{s}}(k)|_{\mathcal{Z}} \quad (4.40)$$

Como $\check{\mathbf{s}}(k)|_{\mathcal{Z}}$ é independente de i , podemos escrever a matriz de erro de projeção conforme

$$\mathbf{E}_{(ML \times P)} \triangleq \begin{bmatrix} \check{\mathbf{X}}(k + M - 1)|_{\mathcal{Z}} \\ \vdots \\ \check{\mathbf{X}}(k)|_{\mathcal{Z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(M - 1) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(0) \end{bmatrix} \check{\mathbf{s}}(k)|_{\mathcal{Z}} = \mathbf{h}^{(M)}\check{\mathbf{s}}(k)|_{\mathcal{Z}}. \quad (4.41)$$

Esta matriz possui posto 1 com o espaço gerado pelas colunas e o espaço gerado pelas linhas sendo respectivamente $\mathbf{h}^{(M)}$ e $\check{\mathbf{s}}(k)|_{\mathcal{Z}}$. Logo, a partir de \mathbf{E} o sistema $\mathbf{h}^{(M)}$ pode ser diretamente identificado. Duas possíveis soluções são sugeridas em (ZHAO; TONG, 1999). A primeira utiliza uma abordagem de mínimos quadrados pelo espaço gerado pelas colunas de \mathbf{E} e é dada por

$$\hat{\mathbf{h}}^{(M)} = \arg \max_{\|\mathbf{h}^{(M)}\|=1} \|\mathbf{h}^{(M)H} \mathbf{E}\|^2, \quad (4.42)$$

podendo ser facilmente resolvida procurando-se pelo vetor singular associado ao maior valor singular de \mathbf{E} . Uma segunda solução, de custo computacional menor, é utilizar a linha \mathbf{e}_m de máxima norma-2 em \mathbf{E} como uma estimativa de $\check{\mathbf{s}}(k)|_{\mathcal{Z}}$. Então, a partir (4.41), temos que

$$\hat{\mathbf{h}}^{(M)} = \mathbf{E} \mathbf{e}_m^H = \|\check{\mathbf{s}}(k)|_{\mathcal{Z}}\|^2 \mathbf{h}^{(M)}. \quad (4.43)$$

Algumas conclusões importantes podem ser feitas neste momento. Primeiramente, quando $\check{\mathbf{s}}(k)$ é ortogonal a \mathcal{Z} , o que é assintoticamente verdadeiro para

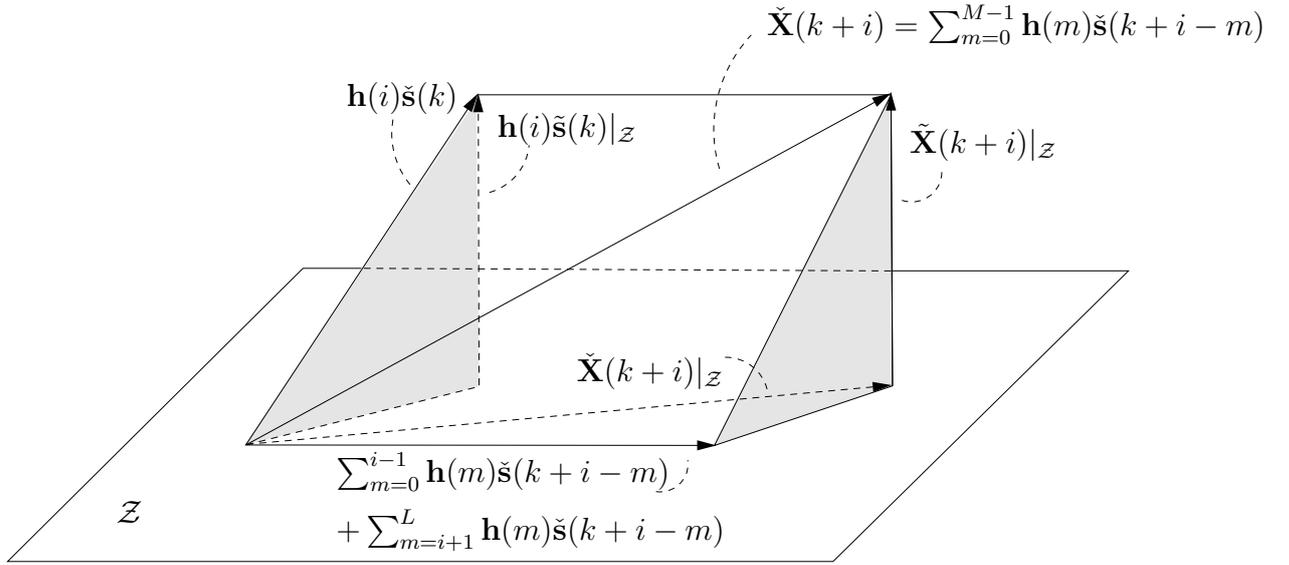


Figura 4.2: Projeção de $\tilde{\mathbf{X}}(k+i)$, para $i = 0, \dots, M-1$, em \mathcal{Z} (ZHAO; TONG, 1999).

uma seqüência de entrada branca e de média zero, o erro de projeção $\tilde{s}(k)|_{\mathcal{Z}}$ converge para $\tilde{s}(k)$, conforme a Figura 4.2. Neste caso a decomposição da matriz de projeção \mathbf{E} de posto 1 no seu produto externo nos fornece não somente o sistema $\mathbf{h}^{(M)}$ como também a própria seqüência de entrada $s(k)$ (mas lembre-se que esta estimativa de $s(k)$ não possui a propriedade de convergência com um número finito de amostras).

Em segundo lugar, as projeções $\tilde{\mathbf{X}}(k+i)$ em \mathcal{Z} para diferentes valores de i são independentes de cada uma e podem ser calculadas em paralelo. Isto pode ser explorado para acelerar uma implementação prática do algoritmo.

Identificação do sistema pelo subespaço de saída

Anteriormente foi mostrado como se recuperar o sistema $\mathbf{h}^{(M)}$ a partir dos erros de projeção de $\tilde{\mathbf{X}}(k+M-1), \dots, \tilde{\mathbf{X}}(k)$ no subespaço de entrada \mathcal{Z} que satisfaz (4.38) e (4.39). Agora, para evitar o uso direto da seqüência de entrada, devemos contruir \mathcal{Z} a partir do sinal de saída explorando para isso a relação isomórfica entre

4.2. ALGORITMO LSS

os subespaços de entrada e de saída dada por (4.34). Podemos para isso reescrever (4.38) e (4.39) na forma

$$\mathcal{Z} = \mathcal{S}_{k-1,q} \cup \mathcal{S}_{k+1,q} \quad (4.44)$$

para qualquer $q \geq M - 1$. Com a relação isomórfica entre o subespaço de entrada e de saída dada por (4.34), temos que, para $K = q - M + 1 \geq K_0$,

$$\mathcal{Z} = \mathcal{S}_{k-1,K+M-1} \cup \mathcal{S}_{k+1,-(K+M-1)} = \mathcal{X}_{k-1,K} \cup \mathcal{X}_{k+M,-K}. \quad (4.45)$$

Assim, a projeção de $\check{\mathbf{X}}(k+M-1), \dots, \check{\mathbf{X}}(k)$ em \mathcal{Z} é convertida para a suavização dos dados atuais $\check{\mathbf{X}}(k+M-1), \dots, \check{\mathbf{X}}(k)$ pelos dados passados $\check{\mathbf{X}}(k-1), \dots, \check{\mathbf{X}}(k-K)$ e pelos dados futuros $\check{\mathbf{X}}(k+M), \dots, \check{\mathbf{X}}(k+K+M-1)$. O erro de projeção \mathbf{E} utilizado para a identificação do sistema agora se torna o erro de suavização, que pode ser obtido observando-se a saída apenas. Por causa do critério de mínimos quadrados usado pela projeção, este algoritmo é chamado de suavização de mínimos quadrados (*Least Squares Smoothing*, LSS).

Precisamos introduzir ainda dois novos termos: o *tamanho da janela de suavização* e a *ordem de suavização*. O tamanho da janela de suavização é definido como o número de símbolos presentes nos dados atuais, M neste caso, e a ordem de suavização K é definida como o número de símbolos presentes nos dados passados.

Finalmente, devido ao fato de utilizarmos a saída do sistema, o número de símbolos necessários para a identificação do sistema é maior do que o necessário quando se tem o conhecimento da entrada do sistema. O subespaço \mathcal{Z} e os dados atuais $\check{\mathbf{X}}(k+M-1), \dots, \check{\mathbf{X}}(k)$ geram o subespaço de entrada \mathcal{V} , de dimensão $2K + 2M - 1$, conforme

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k-K-M+1), \dots, \check{\mathbf{s}}(k+K+M-1)\} \\ &= \mathcal{R} \left\{ \begin{bmatrix} s(k+K+M-1) & \dots & s(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ s(k-K-M+1) & & \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

A forma como \mathcal{V} é construído impõe o posto completo por linha na matriz acima. Como resultado temos a necessidade de $4K + 4(M - 1) + 1$ símbolos de entrada

4.2. ALGORITMO LSS

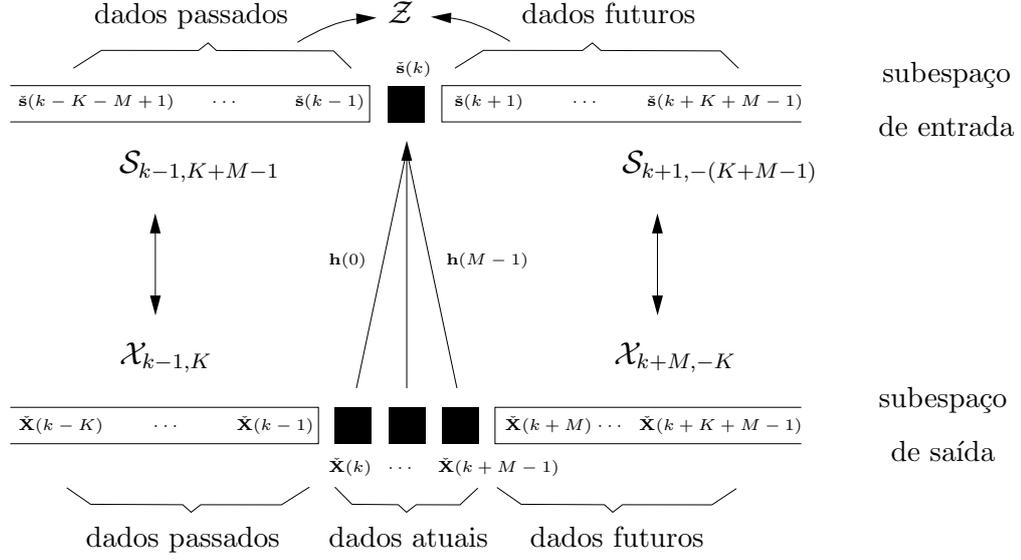


Figura 4.3: Isomorfismo entre os subespaços de entrada e de saída (ZHAO; TONG, 1999).

(e $4K + 3(M - 1) + 1$ símbolos de saída) disponíveis e da complexidade linear da entrada ser superior a $2K + 2(M - 1)$, conforme (4.36).

Implementação

Consideremos agora o problema de estimação do sistema de ordem $M - 1$ a partir da observação de N amostras da saída. Dadas $N \geq 4K + 3(M - 1) + 1$ amostras da saída $\mathbf{x}(k)$, para $k = 1, \dots, N$ para uma ordem de suavização K fixa e

4.2. ALGORITMO LSS

à ordem do sistema $M - 1$ conhecida, definimos a matriz de dados completa como

$$\underset{(2KL+ML) \times (N-2K-M+1)}{\mathbf{D}} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{x}(2K+M) & \cdots & \mathbf{x}(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+M+1) & \text{por blocos} & \\ \hline \mathbf{x}(K+M) & \cdots & \mathbf{x}(N-K) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+1) & \text{por blocos} & \\ \hline \mathbf{x}(K) & \cdots & \mathbf{x}(N-K-M) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

de onde são definidas a matriz de dados passados

$$\underset{(KL \times N-2K-M+1)}{\mathbf{P}} \triangleq \begin{bmatrix} \check{\mathbf{X}}(K) \\ \vdots \\ \check{\mathbf{X}}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K) & \cdots & \mathbf{x}(N-K-M) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

a matriz de dados atuais

$$\underset{(ML \times N-2K-M+1)}{\mathbf{A}} \triangleq \begin{bmatrix} \check{\mathbf{X}}(K+M) \\ \vdots \\ \check{\mathbf{X}}(K+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K+M) & \cdots & \mathbf{x}(N-K) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

a matriz de dados futuros

$$\underset{(KL \times N-2K-M+1)}{\mathbf{F}} \triangleq \begin{bmatrix} \check{\mathbf{X}}(2K+M) \\ \vdots \\ \check{\mathbf{X}}(K+M+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(2K+M) & \cdots & \mathbf{x}(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+M+1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

e a matriz de dados futuros e passados

$$\underset{(2KL \times N-2K-M+1)}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

4.2. ALGORITMO LSS

onde fizemos $P = N - 2K - M + 1$. Podemos ainda escrever

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Quando há ausência de ruído a matriz de dados completa \mathbf{D} tem a seguinte relação com o sinal de entrada:

$$\mathbf{D} = \mathbf{H}^{(2K+M)} \begin{bmatrix} s(2K+M) & \cdots & s(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ s(1-M+1) & & \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Como conseqüências diretas da equação (4.53) e do Lema 4.2.1, temos as relações entre as matrizes de dados em (4.47) e os vários subespaços descritas no Lema 4.2.2.

Lema 4.2.2. *Suponha que a seqüência de entrada tenha complexidade linear igual ou superior a $L_* = 2(K + M - 1) + 1$, que $K \geq K_0$ e que $N \geq 4K + 3(M - 1) + 1$. Temos então as seguintes propriedades na ausência de ruído:*

1. *Matriz completa de dados \mathbf{D} :*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{\mathbf{D}\} &= \mathcal{X}_{2K+M, 2K+M} = \mathcal{S}_{2K+M, 2K+2M-1}, \\ \text{posto}(\mathbf{D}) &= 2K + 2M - 1; \end{aligned} \quad (4.54)$$

2. *Matriz de dados passados \mathbf{P} :*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{\mathbf{P}\} &= \mathcal{X}_{K, K} = \mathcal{S}_{K, K+M-1}, \\ \text{posto}(\mathbf{P}) &= K + M - 1; \end{aligned} \quad (4.55)$$

3. *Matriz de dados futuros \mathbf{F} :*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{\mathbf{F}\} &= \mathcal{X}_{K+M+1, -K} = \mathcal{S}_{K+2, -(K+M+1)}, \\ \text{posto}(\mathbf{F}) &= \text{posto}(\mathbf{P}) = K + M - 1; \end{aligned} \quad (4.56)$$

4.2. ALGORITMO LSS

4. *Matriz de dados futuros e passados \mathbf{Z} :*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\{\mathbf{Z}\} &= \mathcal{X}_{K,K} \cup \mathcal{X}_{K+M+1,-K} \\ &= \mathcal{S}_{K,K+M-1} \cup \mathcal{S}_{K+2,-(K+M-1)}, \\ \text{posto}(\mathbf{Z}) &= 2(K+M-1).\end{aligned}\tag{4.57}$$

Conforme mencionado no lema acima os vetores linha da matriz de dados futuros e passados \mathbf{Z} geram o espaço de projeção \mathcal{Z} de dimensão $2(K+M-1)$. Logo, o erro de projeção \mathbf{E} em (4.41) pode ser obtido pelo erro mínimo médio quadrático de suavização da matriz de dados atuais \mathbf{A} pela matriz de dados futuros e passados \mathbf{Z} . Especificamente na ausência de ruído temos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(ML \times N - 2K - M + 1)} &\triangleq \mathcal{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}(\mathbf{A}) \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}(K+M)|_{\mathcal{Z}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}(K+1)|_{\mathcal{Z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(M-1) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(0) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{s}}(K+1)|_{\mathcal{Z}} \\ &= \mathbf{h}^{(M)} \tilde{\mathbf{s}}(K+1)|_{\mathcal{Z}}\end{aligned}\tag{4.58}$$

do qual podemos finalmente estimar o sistema $\mathbf{h}^{(M)}$ diretamente a partir da saída.

4.2.2 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Tamanho M das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR;
2. Tamanho K da ordem de suavização do algoritmo (deve ser maior ou igual a $M-1$);
3. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N) = [\mathbf{x}^T(N) \quad \mathbf{x}^T(N-1) \quad \dots \quad \mathbf{x}^T(1)]^T$ do sistema SIMO FIR.

Saída

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ da matriz de respostas ao impulso do sistema SIMO FIR.

Pseudo-código

1. Formar as matrizes \mathbf{Z} e \mathbf{A} dadas por

$$\underset{(2KL \times N-2K-M+1)}{\mathbf{Z}} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{x}(2K+M) & \cdots & \mathbf{x}(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+M+1) & \text{por blocos} & \\ \hline \mathbf{x}(K) & \cdots & \mathbf{x}(N-K-M) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(1) & \text{por blocos} & \end{array} \right] \quad (4.59)$$

e

$$\underset{(ML \times N-2K-M+1)}{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{x}(K+M) & \cdots & \mathbf{x}(N-K) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+1) & \text{por blocos} & \end{array} \right]; \quad (4.60)$$

2. Obter a base ortogonal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{2(K+M-1)}\}$ de vetores *linha* que gera o espaço de sinal das linhas de \mathbf{Z} , de dimensão $2(K+M-1)$. Para isso realizar a decomposição QR de \mathbf{Z}^T ($\mathbf{Z}^T \mathbf{E}_Z = \mathbf{Q}_Z \mathbf{R}_Z$) e utilizar as primeiras $2(K+M-1)$ linhas de \mathbf{Q}_Z^T como os vetores linha que geram o espaço de sinal das linhas de \mathbf{Z} . Erros numéricos podem surgir caso não seja feito um tratamento com pivôs no algoritmo QR (utilizando a matriz de permutação \mathbf{E}_Z).
3. Calcular a matriz \mathbf{E} do erro de projeção de \mathbf{A} em $\text{sp}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{2(K+M-1)}\}$ por

$$\underset{(ML \times N-2K-M+1)}{\mathbf{E}} = \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{U}^H \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{2(K+M-1)} \end{array} \right]; \quad (4.61)$$

4. Identificar o sistema SIMO FIR a partir do espaço gerado pelas colunas da

4.3. ALGORITMO JLSS

matriz de erro de projeção \mathbf{E} :

$$\hat{\mathbf{h}}^{(M)} = \arg \max_{\|\mathbf{h}^{(M)}\|=1} \|\mathbf{h}^{(M)H} \mathbf{E}\|^2. \quad (4.62)$$

Para isso fazer com que $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$ seja o vetor singular à esquerda associado ao maior valor singular de \mathbf{E} ;

5. Rearrumar $\hat{\mathbf{h}}^{(M)}$, a partir de

$$\hat{\mathbf{h}}^{(M)}_{(ML \times 1)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(M-1) \\ \hat{\mathbf{h}}(M-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

e

$$\hat{\mathbf{H}}_{(L \times M)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(0) & \hat{\mathbf{h}}(1) & \cdots & \hat{\mathbf{h}}(M-1) \end{bmatrix}^T, \quad (4.64)$$

para obter $\hat{\mathbf{H}}$.

4.3 Algoritmo JLSS

O algoritmo de suavização de mínimos quadrados conjunta (*joint least squares smoothing*, JLSS) é uma modificação do algoritmo LSS. Apresentada por (TONG; ZHAO, 1999), esta modificação permite a identificação conjunta do sistema SIMO FIR e de sua ordem. Foi o primeiro algoritmo determinístico a ser capaz de realizar a identificação do sistema SIMO FIR sem o conhecimento da ordem do mesmo.

4.3.1 Desenvolvimento

Segue aqui reproduzido o desenvolvimento do algoritmo JLSS apresentado por (TONG; ZHAO, 1999), com as devidas alterações de notação. De forma a facilitar o entendimento do leitor, o desenvolvimento deste algoritmo é apresentado sob a forma de uma extensão do algoritmo LSS.

4.3. ALGORITMO JLSS

Formulação dos subespaços

Para utilizarmos o método de suavização de mínimos quadrados sem o conhecimento da ordem do sistema SIMO FIR, uma possível abordagem é modificar ligeiramente o subespaço no qual o algoritmo LSS se baseia. O subespaço de projeção utilizado em (4.45) necessita do conhecimento da ordem do sistema $M - 1$. Podemos modificar este subespaço considerando a suavização de $l + 1$ observações $\tilde{\mathbf{X}}(k + i)$ para $i = 0, \dots, l$ por preditores para frente (*forward*) e para trás (*backward*) de ordem $K \geq K_0$. Este espaço de projeção modificado é dado por

$$\dot{\mathcal{X}}_{k,l} \triangleq \mathcal{X}_{k-1,K} \cup \mathcal{X}_{k+l+1,-K} = \mathcal{X}_{k-1,K} \cup \mathcal{X}_{k+l+K,K}. \quad (4.65)$$

Este novo subespaço é essencialmente o mesmo de (4.45). A única diferença é que l é visto como uma variável que não é necessariamente igual a ordem do sistema $M - 1$. Devido a relação isomórfica entre os subespaços de saída e de entrada apresentada em (4.34), temos que

$$\dot{\mathcal{X}}_{k,l} = \mathcal{S}_{k-1,K+M-1} \cup \mathcal{S}_{k+l+K,K+M-1} \triangleq \dot{\mathcal{S}}_{k,l}. \quad (4.66)$$

Logo

$$\dot{\mathcal{S}}_{k,l} = \begin{cases} \text{sp}\{\tilde{\mathbf{s}}(k - K - M + 1), \dots, \tilde{\mathbf{s}}(k), \dots, \tilde{\mathbf{s}}(k + l + K)\}, & l < M - 1 \\ \text{sp}\{\tilde{\mathbf{s}}(k - K - M + 1), \dots, \tilde{\mathbf{s}}(k - 1)\} \cup \text{sp}\{\tilde{\mathbf{s}}(k + l - M + 2), \dots, \tilde{\mathbf{s}}(k + l + K)\}, & l \geq M - 1 \end{cases}. \quad (4.67)$$

Projetando $\tilde{\mathbf{X}}(k + i)$ para $i = 0, \dots, l$ em $\dot{\mathcal{X}}_{k,l} = \dot{\mathcal{S}}_{k,l}$, temos então a seguinte generalização dos resultados de (4.41).

Teorema 4.3.1. *Seja a ordem dos preditores backward e forward igual a $K \geq K_0$. Faça com que $\dot{\mathcal{X}}_{k,l}$ seja definido por (4.66) e faça com que $\mathbf{E}_{l,k}$ seja a matriz do erro de projeção definida por*

$$\mathbf{E}_{l,k} \stackrel{\triangleq}{(L(l+1) \times N - 2K - l)} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}(k + l)|_{\dot{\mathcal{X}}_{k,l}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{X}}(k)|_{\dot{\mathcal{X}}_{k,l}} \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

4.3. ALGORITMO JLSS

Então

$$\mathbf{E}_{l,k} = \begin{cases} \mathbf{0}, & l < M - 1 \\ \check{\mathbf{H}}^{(l)} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{s}}(k+l-M+1)|_{\dot{s}_{k,l}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{s}}(k)|_{\dot{s}_{k,l}} \end{bmatrix}, & l \geq M - 1 \end{cases}, \quad (4.69)$$

onde

$$\check{\mathbf{H}}^{(l)}_{(L(l-1) \times l-M+2)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{h}(M-1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{h}(0) & & \mathbf{h}(M-1) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbf{h}(0) \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

Ademais, se $\{s(k)\}$ possui complexidade linear⁴ igual ou superior a $2K + l + M$ e se $l \geq M - 1$ temos que

$$\mathcal{C}\{\mathbf{E}_{l,K+1}\} = \mathcal{C}\{\check{\mathbf{H}}^{(l)}\}. \quad (4.71)$$

Demonstração. A partir de (4.37), (4.65) e (4.67) temos, para $0 \leq i \leq l$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}(k+i)|_{\dot{x}_{k,l}} &= \tilde{\mathbf{X}}(k+i)|_{\dot{s}_{k,l}} \\ &= \begin{cases} \mathbf{0}, & l < M - 1 \\ \sum_{m=i-l+L}^i \mathbf{h}(m)\tilde{\mathbf{s}}(k+i-m)|_{\dot{s}_{k,l}}, & l \geq M - 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Como $\mathbf{h}(m) = 0$ para todo $m < 0$ e $m > M - 1$, a equação acima nos leva a (4.70). Por fim, para provar (4.71) precisamos demonstrar que a matriz do erro de projeção da seqüência de entrada em (4.70) tem posto completo por linha. Dada

⁴Definição apresentada na página 127

4.3. ALGORITMO JLSS

a matriz Toeplitz

$$\mathbf{S} \triangleq \begin{bmatrix} s(2K+l+1) & \cdots & s(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ s(K+l-M+3) & \cdots & \\ \hline s(K+l-M+2) & \cdots & s(N-K-M+1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ s(K+1) & & \\ \hline s(K) & \cdots & s(N-K-l-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ s(1-L) & & \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{S}_F \\ (K+M-1 \times N-2m-l) \\ \mathbf{S}_A \\ (l-M+3 \times N-2m-l) \\ \mathbf{S}_P \\ (K+M-1 \times N-2m-l) \end{bmatrix}$$

e fazendo $k = K + 1$, podemos então escrever

$$\begin{bmatrix} \tilde{s}(K+l-M+2)|_{\dot{s}_{K+1,l}} \\ \vdots \\ \tilde{s}(K+1)|_{\dot{s}_{K+1,l}} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{\mathbf{S}_Z}^\perp(\mathbf{A}_A), \quad (4.74)$$

onde

$$\mathbf{S}_Z \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{S}_F \\ \mathbf{S}_P \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

$(2K+2M-2 \times N-2m-l)$

Quando $\{s(k)\}$ tem complexidade linear igual ou superior a $2K + l + M$, \mathbf{S} tem posto completo por linha, o que implica em que $\mathcal{P}_{\mathbf{S}_Z}^\perp(\mathbf{A}_A)$ tenha posto completo por linha também. Temos então (4.71).

□

Estruturas de dados

Consideremos agora o problema de estimação do sistema de ordem $M - 1$ a partir da observação de N amostras da saída. Dadas $N \geq 4K + 3(M - 1) + 1$

4.3. ALGORITMO JLSS

amostras da saída $\mathbf{x}(k)$, para $k = 1, \dots, N$, para um tamanho fixo do preditor $K \geq K_0$ e uma janela de suavização $l \geq 0$, definimos a matriz de dados completa como

$$\mathbf{D}_{K,l} \stackrel{\triangle}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(2K+l+1) & \cdots & \mathbf{x}(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+l+2) & \text{por blocos} & \\ \hline \mathbf{x}(K+l+1) & \cdots & x(N-K) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+1) & \text{por blocos} & \\ \hline \mathbf{x}(K) & \cdots & x(N-K-l-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

$$\stackrel{\triangle}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{K,l} \\ (KL \times N-2K-l) \\ \mathbf{A}_{K,l} \\ (L(l+1) \times N-2K-l) \\ \mathbf{P}_{K,l} \\ (KL \times N-2K-l) \end{bmatrix}$$

de onde definimos a matriz de dados atuais como

$$\mathbf{A}_{K,l} \stackrel{\triangle}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K+l+1) & \cdots & x(N-K) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}, \quad (4.77)$$

a matriz de dados passados como

$$\mathbf{P}_{K,l} \stackrel{\triangle}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K) & \cdots & x(N-K-l-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

a matriz de dados futuros como

$$\mathbf{F}_{K,l} \stackrel{\triangle}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(2K+l+1) & \cdots & \mathbf{x}(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+l+2) & \text{por blocos} & \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

4.3. ALGORITMO JLSS

e a matriz de dados futuros e passados como

$$\mathbf{Z}_{K,l} \underset{(2KL \times N - 2K - l)}{\triangleq} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{K,l} \\ \mathbf{P}_{K,l} \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

De forma a melhor visualizar a relação destas matrizes e seus vários subespaços temos algumas propriedades resumidas no lema seguinte. As condições de posto neste lema são úteis quando se lida com ruído pois permitem a aproximação por mínimos quadrados da matriz de dados $\mathbf{Z}_{K,l}$ quando a mesma contém ruído.

Lema 4.3.1. *Suponha que a seqüência de entrada tenha complexidade linear igual ou superior a $2K + l + M$ e que não exista ruído. Para todo $K \geq K_0$ temos as seguintes propriedades:*

1. *Matriz de dados completa $\mathbf{D}_{K,l}$:*

$$\text{posto}(\mathbf{D}_{K,l}) = 2K + l + M; \quad (4.81)$$

2. *Matriz de dados passados $\mathbf{P}_{K,l}$:*

$$\mathcal{R}\{\mathbf{P}_{K,l}\} = \mathcal{X}_{K,K} = \mathcal{S}_{K,K+M-1}, \quad (4.82)$$

$$\text{posto}(\mathbf{P}_{K,l}) = K + M - 1; \quad (4.83)$$

3. *Matriz de dados futuros $\mathbf{F}_{K,l}$:*

$$\mathcal{R}\{\mathbf{F}_{K,l}\} = \mathcal{X}_{2K+l+1,K} = \mathcal{S}_{2K+l+1,K+M-1}, \quad (4.84)$$

$$\text{posto}(\mathbf{F}_{K,l}) = K + M - 1; \quad (4.85)$$

4. *Matriz de dados futuros e passados $\mathbf{Z}_{K,l}$:*

$$\mathcal{R}\{\mathbf{Z}_{K,l}\} = \mathcal{S}_{K,K+M-1} \cup \mathcal{S}_{K+l-M,-K-M+1} = \dot{\mathcal{S}}_{K+1,l}, \quad (4.86)$$

$$\text{posto}(\mathbf{Z}_{K,l}) = \begin{cases} 2K + l + M, & l < M - 1 \\ 2K + 2(M - 1), & M - 1 \leq l \leq K \end{cases}; \quad (4.87)$$

4.3. ALGORITMO JLSS

Demonstração. Quando $\{s(k)\}$ possui complexidade linear igual ou superior a $2K + l + M$, temos que

$$\text{posto}\{\mathbf{S}^{(2K+l+M)}(2K+l+1)\} = 2K+l+M-1. \quad (4.88)$$

A partir do modelo do sistema em (4.23), quando não há ruído, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{K,l} &= \mathbf{H}^{(2K+l+1)} \mathbf{S}^{(2K+l+M)}(2K+l+1) \\ \mathbf{F}_{K,l} &= \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{S}^{(K+M-1)}(2K+l+1) \\ \mathbf{P}_{K,l} &= \mathbf{H}^{(K)} \mathbf{S}^{(K+M-1)}(K). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Devido às respostas ao impulso do sistema SIMO FIR não possuírem zeros em comum no domínio-Z e devido a (4.88), temos (4.81)-(4.85).

Por fim, para provar (4.86) e (4.87), escrevemos

$$\mathbf{Z}_{K,l} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(K)} & \mathbf{0}_{Kp, K+M-1} \\ \mathbf{0}_{Kp, K+M-1} & \mathbf{H}^{(K)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{(K+M-1)}(2K+l+1) \\ \mathbf{S}^{(K+M-1)}(K) \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

Quando $K \geq K_0$ ($\mathbf{H}^{(K)}$ possui posto completo por coluna) temos que

$$\mathcal{R}\{\mathbf{Z}_{K,l}\} = \mathcal{R}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{(K+M-1)}(2K+l+1) \\ \mathbf{S}^{(K+M-1)}(2K+l+1) \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.91)$$

Devido a (4.88) temos (4.87). □

Estimação conjunta de ordem e sistema

Passemos agora para a estimação do sistema. Para isso iremos minimizar o erro de suavização na matriz $\mathbf{E}_{l,K}$ escolhendo tanto a ordem do sistema SIMO FIR como suas respostas ao impulso.

Desta forma utilizaremos um l fixo que seja um limite superior da ordem do sistema $M - 1$. Considerando a matriz de erro de suavização $\mathbf{E}_{l,l} = \mathcal{P}_{\mathbf{Z}_{l,l}}^\perp(\mathbf{A}_{l,l})$

4.3. ALGORITMO JLSS

obtida pela projeção de $\mathbf{A}_{l,l}$ no espaço gerado pelas linhas de $\mathbf{Z}_{l,l}$, podemos, a partir de (4.71) (Teorema 4.3.1), para $l > M - 1$ e na ausência de ruído, escrever

$$\mathcal{C}\{\mathbf{E}_{l,l}\} = \mathcal{C}\{\check{\mathbf{H}}^{(l)}\}. \quad (4.92)$$

Fazendo com que $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_0 \ \cdots \ \mathbf{Q}_l]$ seja a matriz cujas linhas sejam ortogonais ao espaço gerado pelas colunas de $\mathbf{E}_{l,l}$, temos então que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \cdots & \mathbf{Q}_l \end{bmatrix} \mathbf{E}_{l,l} = \mathbf{0} \quad (4.93)$$

que implica em

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \cdots & \mathbf{Q}_L \\ \text{Hankel} & & \vdots \\ \text{por blocos} & & \mathbf{Q}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(M-1) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{(M-1)} \mathbf{h}^{(M-1)} = \mathbf{0}. \quad (4.94)$$

Em outras palavras, os coeficientes das respostas ao impulso satisfazem uma equação linear homogênea. O que resta é descobrir se esta resposta é única a menos de uma constante multiplicativa. Passamos então para o teorema seguinte.

Teorema 4.3.2. *Suponha que não há ruído e que a entrada seja uma seqüência com complexidade linear igual ou superior a $L_* = 3l + M + 1$. Suponha também que as respostas ao impulso do sistema SIMO FIR não possuam zeros em comum no domínio- Z . Faça com que $\mathbf{E}_{l,l} = \mathcal{P}_{\mathbf{Z}_{l,l}}^\perp(\mathbf{A}_{l,l})$ seja a matriz de erro de projeção e que*

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{E}} \triangleq \left(\frac{1}{N} - 3l \right) \mathbf{E}_{l,l} \mathbf{E}_{l,l}^H \quad (4.95)$$

seja a matriz de covariância determinística da seqüência de erros suavizada. Sejam as linhas de \mathbf{Q} os vetores singulares associados aos $L(l+1) - l + m - 1$ menores valores singulares de $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{E}}$ e seja \mathbf{Q} particionado de forma que

$$\mathbf{Q} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \cdots & \mathbf{Q}_l \\ \text{por blocos} & & \mathbf{Q}_l \end{bmatrix}. \quad (4.96)$$

Defina-se

$$\mathbf{T}^{(m)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \cdots & \mathbf{Q}_m \\ \text{Hankel} & & \vdots \\ \text{por blocos} & & \mathbf{Q}_l \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

4.3. ALGORITMO JLSS

para $l \geq m \geq 0$. Então a equação linear homogênea

$$\mathbf{T}^{(m)}\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.98)$$

tem solução única $\mathbf{z} = \alpha \mathbf{h}^{(M)}$ quando $m = M - 1$ e soluções triviais caso contrário.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (TONG; ZHAO, 1999). \square

Repare que o resultado acima é diferente do resultado desenvolvido para o algoritmo SSM. Segundo (TONG; ZHAO, 1999), quando $m = M - 1$ a equação (4.98) define um estimador que se assemelha ao do algoritmo SSM. Nos dois casos o subespaço de ruído é utilizado para construir a equação linear homogênea da qual o vetor $\mathbf{h}^{(M)}$ de respostas ao impulso é a solução única. No entanto existem diversas diferenças importantes. Primeiramente a matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$ é diferente da matriz de erro de suavização $\mathbf{E}_{l,l}$. Em segundo lugar, a equação homogênea usada no algoritmo SSM tem soluções não-triviais quando a ordem estimada do sistema é maior que a ordem verdadeira do sistema, sendo esta a razão da idéia de estimação conjunta da ordem e do sistema não ser aplicável ao algoritmo SSM.

Pode ser também surpreendente que quando $m \neq M - 1$, (4.98) tenha apenas soluções triviais. Intuitivamente, também segundo (TONG; ZHAO, 1999), podemos interpretar isto de forma simples. Quando a ordem do sistema é superestimada ($m > M - 1$) temos de incluir na construção de \mathbf{Q} autovetores que estão no espaço gerado pelas colunas de $\check{\mathbf{H}}^{(l)}$ levando assim a uma inconsistência de $\mathbf{Q}\mathbf{E}_{l,l} = \mathbf{0}$. Isto não ocorre no algoritmo SSM. Para qualquer sistema $\mathbf{T}^{(m)}$ tem posto completo por coluna. Por outro lado, quando a ordem do sistema é subestimada ($m < M - 1$) temos um número insuficiente de parâmetros para especificar o espaço nulo de $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{E}}$.

Assim o Teorema 4.3.2 permite que utilizemos

$$\{\hat{M}, \hat{\mathbf{h}}^{(\hat{M})}\} = \arg \min_{m, \|\mathbf{h}^{(m)}\|=1} \|\mathbf{T}^{(m)}\mathbf{h}^{(m)}\|^2 \quad (4.99)$$

para determinar conjuntamente a ordem e o próprio sistema SIMO FIR. Este problema de otimização, assim como outros encontrados neste e no capítulo anterior,

4.3. ALGORITMO JLSS

possui solução em forma fechada dada pelo vetor singular à direita associado ao menor valor singular de $\mathbf{T}^{(m)}$.

Finalmente temos algumas questões básicas de implementação relativas ao tamanho da janela de suavização l e a ordem dos preditores K . Para o tamanho da janela de suavização l é claramente possível implementar o algoritmo com uma janela de suavização variável. Por simplicidade foi considerada uma janela fixa. Apesar de não necessariamente para $L > 2$, a janela de suavização l em teoria deve sempre ser maior do que a ordem verdadeira do sistema. Na prática, quando l não é maior do que a ordem $M - 1$ do sistema, o algoritmo é suficientemente robusto para não ser afetado drasticamente por coeficientes fora da janela l , desde que os mesmos sejam suficientemente pequenos. Obviamente, neste caso, a propriedade de convergência com amostras finitas é perdida.

Já a ordem K dos preditores para frente (*forward*) e para trás (*backward*) deve ser escolhida observando os seguintes fatores. Primeiramente, para uma quantidade de dados finita e fixa, um valor alto de K significa um número menor de colunas na matriz de dados completa $\mathbf{D}_{K,l}$. Isto corresponde a uma amostra menor para o problema de mínimos quadrados. Neste sentido, é desejável escolher K o menor possível, razão pela qual se faz $K = l$ no pseudo-código do algoritmo. Ainda pode-se escolher um valor de K menor caso $L > 2$. Por outro lado, um valor maior de K pode fornecer certo grau de robustez frente a respostas ao impulso com zeros próximos entre si e do círculo unitário. É claramente possível variar K com m .

4.3.2 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Tamanho máximo $l + 1$ das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR;
2. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N) = [\mathbf{x}^T(N) \quad \mathbf{x}^T(N-1) \quad \dots \quad \mathbf{x}^T(1)]^T$ do sistema SIMO FIR.

Saída

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ da matriz de respostas ao impulso do sistema SIMO FIR.

Pseudo-código

1. Formar as matrizes de dados $\mathbf{A}_{l,l}$ e $\mathbf{Z}_{l,l}$, dadas por

$$\mathbf{A}_{l,l} \underset{(L(l+1) \times N-3l)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(2l+1) & \cdots & \mathbf{x}(N-l) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(l+1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

e

$$\mathbf{Z}_{l,l} \underset{(2lL \times N-3l)}{\triangleq} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(3l+1) & \cdots & \mathbf{x}(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(2l+2) & \text{por blocos} & \\ \hline \mathbf{x}(l) & \cdots & \mathbf{x}(N-2l-1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}. \quad (4.101)$$

2. Obter a base ortogonal $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{4l}\}$ de vetores *linha* que gera o espaço de sinal das linhas de $\mathbf{Z}_{l,l}$, de dimensão $4l$. Para isso realizar a decomposição QR de $\mathbf{Z}_{l,l}^T$ ($\mathbf{Z}_{l,l}^T \mathbf{E}_Z = \mathbf{Q}_Z \mathbf{R}_Z$) e utilizar as primeiras $4l$ linhas de \mathbf{Q}_Z^T como os vetores linha que geram o espaço de sinal de $\mathbf{Z}_{l,l}$. Erros numéricos podem surgir caso não seja feito um tratamento com pivôs no algoritmo QR (utilizando a matriz de permutação \mathbf{E}_Z).
3. Calcular a matriz $\mathbf{E}_{l,l}$ de erro de projeção das linhas da matriz de dados atuais $\mathbf{A}_{l,l}$ em $\text{sp}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{4l}\}$, dada por

$$\mathbf{E}_{l,l} \underset{(L(l+1) \times N-3l)}{=} \mathbf{A}_{l,l} - \mathbf{A}_{l,l} \mathbf{U}^H \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{4l}^T \end{bmatrix}; \quad (4.102)$$

4.4. ALGORITMO OP

4. Para cada $1 \leq m < l$, tratado como a ordem estimada do sistema, faça com que \mathbf{Q} seja a matriz cujas linhas sejam os $(L-1)(l+1) + m$ vetores singulares à esquerda associados aos últimos $(L-1)(l+1) + m$ valores singulares de $\mathbf{E}_{l,l}$. Forme

$$\mathbf{T}^{(m)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \cdots & \mathbf{Q}_m \\ & \text{Hankel} & \vdots \\ & \text{por blocos} & \mathbf{Q}_l \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

onde

$$\mathbf{Q}_{((L-1)(l+1)+m \times L)} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \cdots & \mathbf{Q}_l \\ ((L-1)(l+1)+m \times L) & & ((L-1)(l+1)+m \times L) \end{bmatrix}; \quad (4.104)$$

5. Estimar as respostas ao impulso do sistema por

$$\{\hat{M}, \hat{\mathbf{h}}^{(\hat{M})}\} = \arg \min_{m, \|\mathbf{h}^{(m)}\|=1} \|\mathbf{T}^{(m)} \mathbf{h}^{(m)}\|^2. \quad (4.105)$$

Para isto basta calcular, para $1 \leq m < l$, o vetor singular à direita $\mathbf{h}^{(m)}$ associado ao menor valor singular de $\mathbf{T}^{(m)}$. $\hat{\mathbf{h}}^{(\hat{M})}$ será dado por $\mathbf{h}^{(m)}$ de forma que $\|\mathbf{T}^{(m)} \mathbf{h}^{(m)}\|^2$ seja mínimo;

6. Rearrumar $\hat{\mathbf{h}}^{(\hat{M})}$, a partir de

$$\hat{\mathbf{h}}_{(\hat{M}L \times 1)}^{(\hat{M})} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(\hat{M}-1) \\ \hat{\mathbf{h}}(\hat{M}-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

e

$$\hat{\mathbf{H}}_{(L \times \hat{M})} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(0) & \hat{\mathbf{h}}(1) & \cdots & \hat{\mathbf{h}}(\hat{M}-1) \end{bmatrix}^T, \quad (4.107)$$

para obter $\hat{\mathbf{H}}$.

4.4 Algoritmo OP

O algoritmo por projeções oblíquas (*oblique projections*, OP) desenvolvido por (YU; TONG, 2001) a partir de (VANDAELE; MOONEN, 2000), diferentemente dos

4.4. ALGORITMO OP

algoritmos deste capítulo, também é capaz de determinar a entrada do sistema diretamente. Não necessita por isso estimar um sistema inverso a partir do sistema identificado. Além disso, possui novamente a propriedade de convergência exata para um número finito de amostras, mas, desta vez, não somente para o sistema como também para sua entrada. Apesar disso algumas limitações existem, principalmente quando há disponibilidade de apenas poucas amostras da saída, pois a estimativa do sinal de entrada somente é possível para as amostras no *meio* do sinal. Perdem-se assim as últimas e as primeiras amostras do sinal de entrada. Isto ficará claro mais adiante.

4.4.1 Desenvolvimento

Segue reproduzido o desenvolvimento do algoritmo OP por (YU; TONG, 2001), com as devidas alterações de notação.

Projeção oblíqua

A projeção oblíqua de um vetor obtém a componente do vetor em uma direção em particular (o espaço imagem) enquanto, ao mesmo tempo, elimina a componente do vetor em uma direção diferente (o espaço nulo). A idéia básica é ilustrada na Figura 4.4. Considere duas matrizes \mathbf{R} e \mathbf{N} com espaços gerados por suas linhas dados por $\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}$ e $\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}$ respectivamente. Suponha que $\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}$ e $\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}$ sejam disjuntos e faça com que $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_{\mathbf{R}} \oplus \mathcal{Z}_{\mathbf{N}} \subset \mathbb{C}^n$. Para qualquer vetor $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, a projeção oblíqua de \mathbf{y} em $\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}$ ao longo de $\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}$, denotada por $\mathbf{y}_{\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}|\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}}$ é obtida através dos dois passos seguintes:

1. Calcular a projeção $\mathbf{y}|_{\mathcal{Z}}$ de \mathbf{y} em \mathcal{Z} ;
2. Calcular a componente de $\mathbf{y}|_{\mathcal{Z}}$ na direção de $\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}$ eliminando a componente na direção de $\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}$.

4.4. ALGORITMO OP

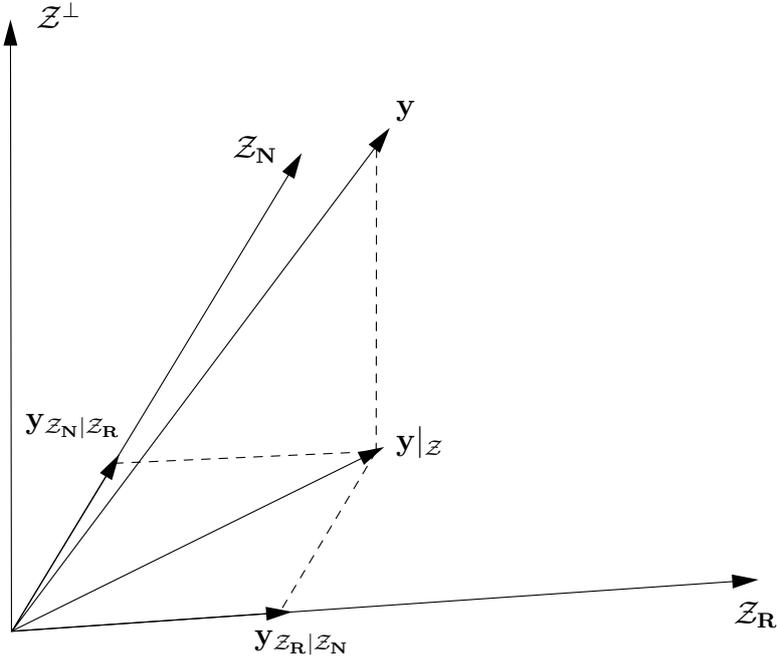


Figura 4.4: Projeção oblíqua: a projeção oblíqua de \mathbf{y} em \mathcal{Z}_R ao longo de \mathcal{Z}_N é representada por $\mathbf{y}_{\mathcal{Z}_R|\mathcal{Z}_N}$ (YU; TONG, 2001).

Algebricamente a projeção oblíqua de um vetor linha \mathbf{y} pode ser calculada por

$$\mathbf{y}_{\mathcal{Z}_R|\mathcal{Z}_N} = \mathbf{y}\mathbf{E}_{\mathcal{Z}_R|\mathcal{Z}_N} \quad (4.108)$$

onde $\mathbf{E}_{\mathcal{Z}_R|\mathcal{Z}_N}$ é o operador de projeção dado por

$$\mathbf{E}_{\mathcal{Z}_R|\mathcal{Z}_N} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^H & \mathbf{N}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{R}^H & \mathbf{R}\mathbf{N}^H \\ \mathbf{N}\mathbf{R}^H & \mathbf{N}\mathbf{N}^H \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{\mathcal{Z}_N}^\perp \mathbf{R}^H (\mathbf{R}^H \mathbf{P}_{\mathcal{Z}_N}^\perp \mathbf{R})^\dagger \mathbf{R}. \quad (4.109)$$

Os dois subespaços \mathcal{Z}_R e \mathcal{Z}_N são chamados de espaço imagem e espaço nulo do projetor, e definem completamente a projeção oblíqua.

Pela definição o espaço Euclidiano \mathbb{C}^n é decomposto numa soma direta de três diferentes subespaços, $\mathbb{C}^n = \mathcal{Z}^\perp \oplus \mathcal{Z}_R \oplus \mathcal{Z}_N$. Assim, para $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}_R$, temos que $\mathbf{y}\mathbf{E}_{\mathcal{Z}_R|\mathcal{Z}_N} = \mathbf{y}$, e para $\mathbf{y} \in \mathcal{Z}_N \oplus \mathcal{Z}^\perp$, temos que $\mathbf{y}\mathbf{E}_{\mathcal{Z}_R|\mathcal{Z}_N} = \mathbf{0}$. Isto é, a projeção em \mathcal{Z}_R ao longo de \mathcal{Z}_N mantém qualquer vetor em \mathcal{Z}_R inalterado e leva para zero qualquer vetor em $\mathcal{Z}_N \oplus \mathcal{Z}^\perp$.

4.4. ALGORITMO OP

A projeção oblíqua também pode ser vista como parte de um problema de mínimos quadrados. Dadas duas matrizes \mathbf{R} e \mathbf{N} , a projeção oblíqua $\mathbf{y}_{z_{\mathbf{R}}|z_{\mathbf{N}}}$ do vetor \mathbf{y} pode ser obtida por

$$\min_{\alpha, \beta} \|\mathbf{y} - \alpha\mathbf{R} - \beta\mathbf{N}\|^2 \Rightarrow \mathbf{y}_{z_{\mathbf{R}}|z_{\mathbf{N}}} = \alpha_*\mathbf{R} \quad (4.110)$$

onde α_* é a solução de mínimos quadrados. Logo, obter a projeção oblíqua do vetor \mathbf{y} é equivalente a resolver um problema de mínimos quadrados, o qual pode ser implementado por técnicas de solução recursiva.

Estimação conjunta do sistema e de sua entrada

Dado $\{\mathbf{x}(k)\}$, o objetivo é encontrar um estimador linear de $\mathbf{h}^{(M)}\check{\mathbf{s}}(k)$, onde $\mathbf{h}^{(M)}$ inclui todos os parâmetros da resposta ao impulso do sistema SIMO FIR. O estimador é um suavizador no sentido de que para um \tilde{N} qualquer, são necessários $\{\mathbf{x}(k - \tilde{N}), \dots, \mathbf{x}(k + \tilde{N})\}$ para gerar uma estimativa do produto externo $\mathbf{h}^{(M)}\check{\mathbf{s}}(k)$. De forma a garantir a propriedade de convergência com número de amostras finito obrigamos que o estimador \mathcal{L} respeite

$$\mathcal{L} \left[\mathbf{x}(k - \tilde{N}), \dots, \mathbf{x}(k + \tilde{N}) \right] = \mathbf{h}^{(M)}\check{\mathbf{s}}(k). \quad (4.111)$$

Decomposição em subespaços

Supondo que a saída está livre de ruído, definimos a matriz de dados atuais $\mathbf{C}(k)$ por

$$\mathbf{C}(k) \triangleq \mathbf{X}^{(M)}(k + M - 1) = \mathbf{H}^{(M)}\mathbf{S}^{(2M-1)}(k + M - 1). \quad (4.112)$$

Por definição um vetor de observações $\check{\mathbf{X}}(k + i)$ pode ser escrito como uma combinação linear de vetores linha de entrada $\check{\mathbf{s}}(k)$ se e somente se ele é uma linha de $\mathbf{C}(k)$. Logo a i -ésima linha de $\mathbf{C}(k)$ satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(i)}(k) &= h^{(i)}\check{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{h}_{\mathcal{F}_1}^{(i)}(k)\mathbf{S}_{\mathcal{F}_1} + \mathbf{h}_{\mathcal{P}_1}^{(i)}\mathbf{S}_{\mathcal{P}_1}(k) \\ &\triangleq h^{(i)}\check{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{v}^{(i)}(k) \end{aligned} \quad (4.113)$$

4.4. ALGORITMO OP

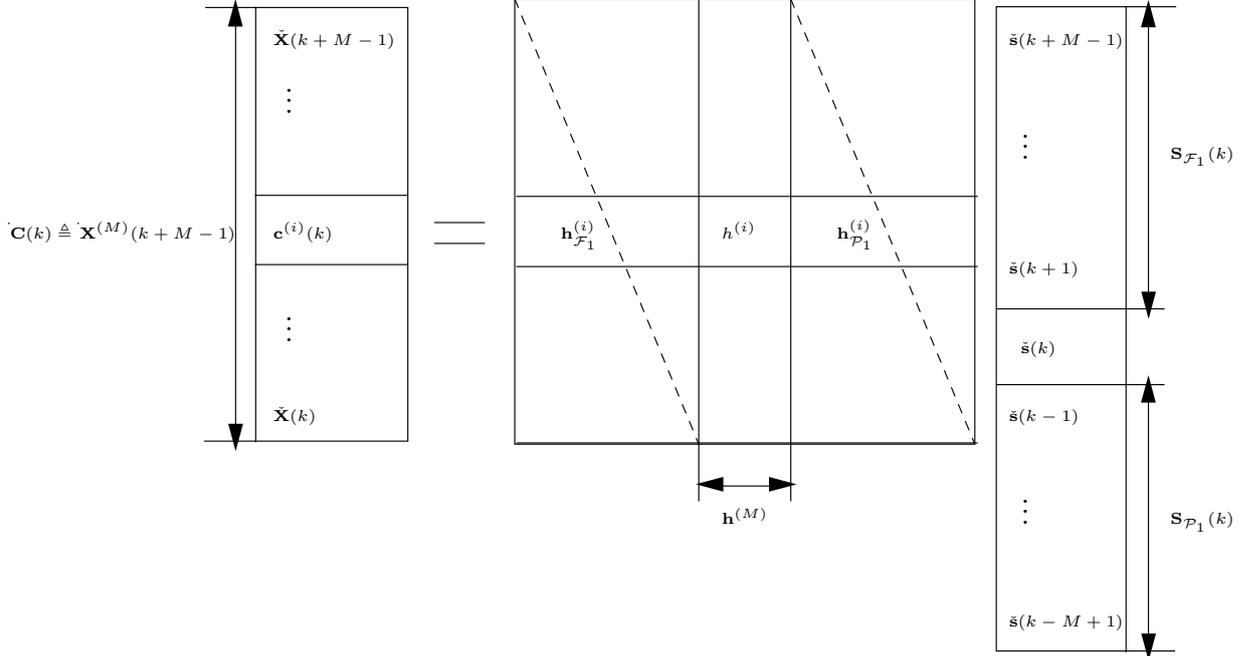


Figura 4.5: Decomposição da matriz de dados atuais $\mathbf{C}(k)$ (YU; TONG, 2001).

onde $h^{(i)}$ é a i -ésima componente do vetor $\mathbf{h}^{(M)}$ de respostas ao impulso do sistema e $\mathbf{h}_{\mathcal{F}_1}^{(i)}$ e $\mathbf{h}_{\mathcal{P}_1}^{(i)}$ são vetores linha definidos conforme a Figura 4.5. Na observação $\mathbf{c}^{(i)}(k)$ o vetor $\mathbf{v}^{(i)}(k)$, dado por

$$\mathbf{v}^{(i)}(k) \triangleq \mathbf{h}_{\mathcal{F}_1}^{(i)} \mathbf{S}_{\mathcal{F}_1}(k) = \mathbf{h}_{\mathcal{P}_1}^{(i)} \mathbf{S}_{\mathcal{P}_1}(k), \quad (4.114)$$

é a interferência de $\check{\mathbf{s}}(k)$ pelos símbolos passados e futuros. Nosso objetivo é então remover $\mathbf{v}^{(i)}(k)$ das observações sem ruído.

Apesar dos espaços gerados pelas linhas de $\mathbf{S}_{\mathcal{F}_1}(k)$ e $\mathbf{S}_{\mathcal{P}_1}(k)$ não estarem diretamente disponíveis das observações, eles estão contidos nos espaços gerados pelas amostras futuras e passadas conforme o Lema 4.2.1. Basta para isso que tenhamos uma seqüência de entrada com complexidade linear⁵ igual ou superior a $L_* = 2K_0 + 2(M - 1) + 1$ onde $K_0 \geq M - 1$. Especificamente, conforme ilustrado na Figura 4.6, para um valor de $K \geq K_0$, isto é, para um K suficientemente grande

⁵Definição apresentada na página 127

4.4. ALGORITMO OP

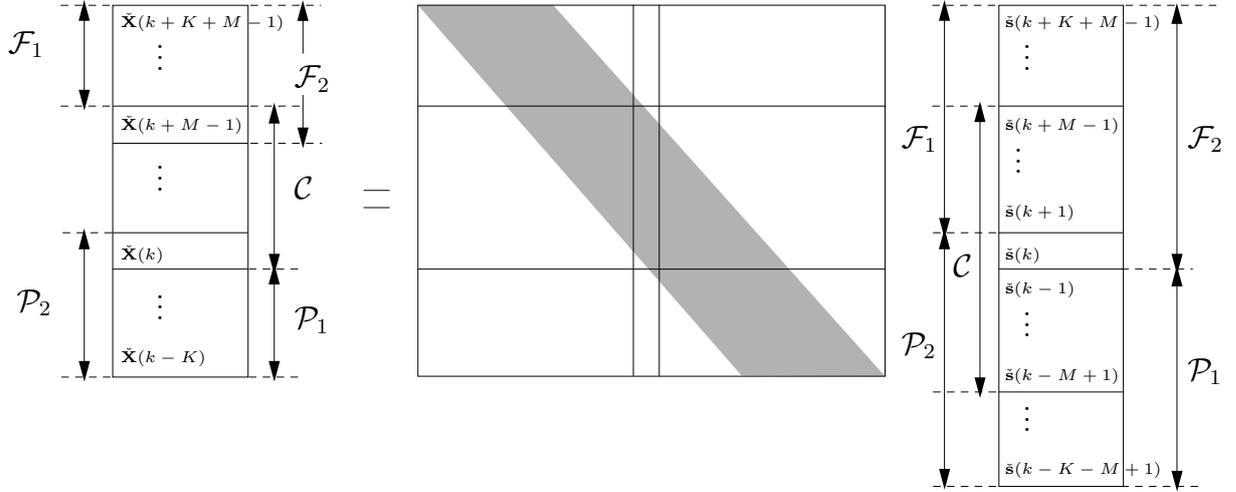


Figura 4.6: Subespaços de sinal e de interferência (YU; TONG, 2001).

de forma que $\mathbf{H}^{(K)}$ possua posto completo por coluna, temos que

$$\mathcal{R}\{\mathbf{S}_{\mathcal{F}_1}(k)\} \subset \mathcal{R}\{\mathbf{S}^{(K+M-1)}(k+K+M-1)\} = \mathcal{R}\{\mathbf{X}^{(K)}(k+K+M-1)\} \triangleq \mathcal{F}_1 \quad (4.115)$$

$$\mathcal{R}\{\mathbf{S}_{\mathcal{P}_1}(k)\} \subset \mathcal{R}\{\mathbf{S}^{(M-1+K)}(k-1)\} = \mathcal{R}\{\mathbf{X}^{(K)}(k-1)\} \triangleq \mathcal{P}_1 \quad (4.116)$$

e logo \mathcal{F}_1 e \mathcal{P}_1 podem ser obtidos diretamente das observações conforme (4.34), a relação isomórfica entre os subespaços de entrada e de saída. Logo, a interferência está contida em $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{P}_1$, isto é

$$\mathbf{v}^{(i)}(k) \in \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{F}_1, \quad \forall i. \quad (4.117)$$

Se $\check{\mathbf{X}}(k-K-M+1), \dots, \check{\mathbf{X}}(k+K+M-1)$ forma a entrada do estimador linear, então o espaço de entrada do estimador linear possui a decomposição

$$\mathcal{R}\{\mathbf{X}^{(2K+M)}(k+K+M-1)\} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k)\}. \quad (4.118)$$

Assim, para obter uma estimativa de $\mathbf{h}^{(M)}\check{\mathbf{s}}(k)$ precisamos projetar a observação no subespaço de sinal $\text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k)\}$, ao longo do subespaço de interferência $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{F}_1$. Como $\text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k)\}$ não está diretamente disponível, precisamos novamente construir este subespaço a partir das observações da saída. Isto pode ser feito

4.4. ALGORITMO OP

estendendo \mathcal{P}_1 e \mathcal{F}_1 de forma a incluir $\text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k)\}$. Para isso definimos

$$\mathcal{P}_2 \triangleq \mathcal{P}_1 \oplus \text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k)\} = \mathcal{R}\{\mathbf{X}^{(K+1)}(k)\} \quad (4.119)$$

$$\mathcal{F}_2 \triangleq \mathcal{F}_1 \oplus \text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k)\} = \mathcal{R}\{\mathbf{X}^{(K+1)}(k + K + M - 1)\}, \quad (4.120)$$

o que nos leva a $\text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k)\} = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{F}_2$ e, conseqüentemente,

$$\mathcal{R}\{\mathbf{X}^{(M+2K)}(k + K + M - 1)\} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus (\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{F}_2). \quad (4.121)$$

A equação anterior serve de base para várias técnicas apresentadas a seguir.

Algoritmos por projeção oblíqua

Para a equação (4.113) podemos escrever as relações de subespaço

$$h^{(i)}\check{\mathbf{s}}(k) \in \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{F}_2 \quad (4.122)$$

e

$$\mathbf{v}^{(i)}(k) \in \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{F}_1. \quad (4.123)$$

Logo $h^{(i)}\check{\mathbf{s}}(k)$ pode ser obtido pela projeção oblíqua de $\mathbf{c}^{(i)}(k)$ em $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{F}_2$ ao longo de $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{F}_1$. Para calcular esta projeção podemos utilizar o seguinte lema que nos leva diretamente a três estimadores.

Lema 4.4.1. *Faça com que \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 , \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 sejam os subespaços do futuro e do passado definidos por (4.115), (4.116), (4.119) e (4.120) respectivamente. Faça com que $\mathbf{c}^{(i)}(k)$ seja a i -ésima linha da matriz de dados atuais de saída $\mathbf{X}^{(M)}(k + M - 1)$.*

Então

$$h^{(i)}\check{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{c}^{(i)}(k)\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{h}^{(M)}\check{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{X}^{(M)}(k + M - 1)\mathbf{E} \quad (4.124)$$

onde \mathbf{E} pode ser qualquer um dos três projetores:

$$\mathbf{E}_1 \triangleq \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1} \quad (4.125)$$

$$\mathbf{E}_2 \triangleq \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1} - \mathbf{E}_{\mathcal{P}_1|\mathcal{F}_2} \quad (4.126)$$

$$\mathbf{E}_3 \triangleq \mathbf{I} - (\mathbf{E}_{\mathcal{F}_1|\mathcal{P}_2} - \mathbf{E}_{\mathcal{P}_1|\mathcal{F}_2}). \quad (4.127)$$

4.4. ALGORITMO OP

Demonstração. A prova deste lema encontra-se em (YU; TONG, 2001). \square

Uma interpretação geométrica pode ser feita para os três projetores \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 e \mathbf{E}_3 . Para isso precisamos definir, a partir de (4.113), as interferências futura e passada como

$$\mathbf{f}_1^{(i)} \triangleq \mathbf{h}_{\mathcal{F}_1}^{(i)} \mathbf{S}_{\mathcal{F}_1}(k) \quad (4.128)$$

e

$$\mathbf{p}_1^{(i)} \triangleq \mathbf{h}_{\mathcal{P}_1}^{(i)} \mathbf{S}_{\mathcal{P}_1}(k) \quad (4.129)$$

respectivamente. Aqui ignoramos o índice de tempo para facilitar as notações. A equação (4.113) pode ser reescrita como

$$\mathbf{c}^{(i)}(k) = h^{(i)} \check{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{p}_1^{(i)} + \mathbf{f}_1^{(i)} = \mathbf{p}_2^{(i)} + \mathbf{f}_1^{(i)} \quad (4.130)$$

$$= h^{(i)} \check{\mathbf{s}}(k) + \mathbf{f}_1^{(i)} + \mathbf{p}_1^{(i)} = \mathbf{f}_2^{(i)} + \mathbf{p}_1^{(i)}. \quad (4.131)$$

Estes vetores estão representados na Figura 4.7, onde seus subespaços são representados por linhas ou planos, como \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_1 e $\text{sp}\{\check{\mathbf{s}}(k)\}$.

Logo a partir do plano \overline{ABCD} temos

$$h^{(i)} \check{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{p}_2^{(i)} - \mathbf{p}_1^{(i)} = \mathbf{p}_2^{(i)} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1}. \quad (4.132)$$

A partir do plano \overline{ACFH} temos

$$\mathbf{p}_2^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)}(k) - \mathbf{f}_1^{(i)} = \mathbf{c}^{(i)}(k) \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1}. \quad (4.133)$$

Por fim para todo i temos

$$h^{(i)} \check{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{c}^{(i)}(k) \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1}, \quad (4.134)$$

o projetor de (4.125). Os outros dois projetores também podem ser justificados por simples interpretações geométricas da Figura 4.7.

Cabe por fim ressaltar que o uso de projeções oblíquas para estimação da seqüência de entrada é capaz de recuperar apenas a parte da seqüência contida em $\check{\mathbf{s}}(k)$, uma das linhas de $\mathbf{S}^{(2K+2M-1)}(k + K + M - 1)$, pois baseia-se no produto

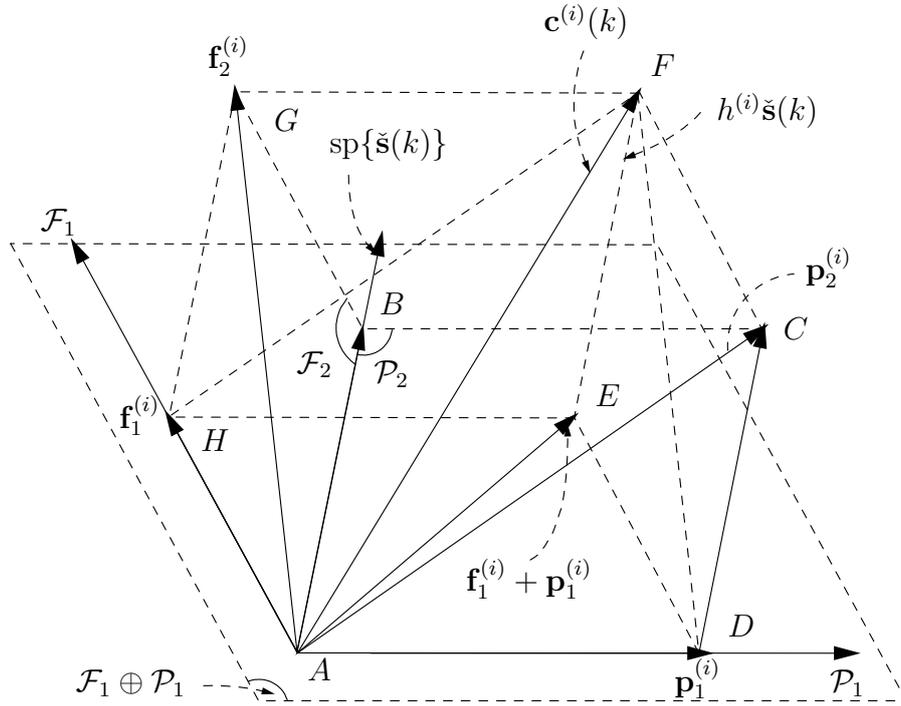


Figura 4.7: Interferências do sistema e da entrada por projeções (YU; TONG, 2001).

externo $\mathbf{h}^{(M)}\check{\mathbf{s}}(k)$. Assim as primeiras $K + M - 1$ amostras e as últimas $K + M - 1$ amostras não estão dentro desta estimativa e por isso reduzimos o número de símbolos estimados para $N - 2K - 2M + 2$. No entanto podemos recuperar estes símbolos por métodos de inversão direta, como os apresentados na seção 2.3 do Capítulo 2.

Dados ruidosos

Até o momento o desenvolvimento do algoritmo utilizou observações da saída livres de ruído. Conforme simulações demonstram (YU; TONG, 2001) o algoritmo OP já pode ser utilizado com base apenas neste desenvolvimento. No entanto uma possibilidade é levarmos em conta a existência de ruído de forma explícita. Para isso precisamos utilizar uma abordagem de *mínimos quadrados totais* (*total least squares*, TLS).

Nesta abordagem o objetivo é remover o ruído presente nas amostras da

4.4. ALGORITMO OP

saída que são utilizadas para a construção da projeção oblíqua. Conforme (4.110) a projeção oblíqua pode ser vista como a solução de um problema de mínimos quadrados. Faça com que \mathbf{R} e \mathbf{N} sejam matrizes livres de ruído cujas linhas gerem o espaço imagem $\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}$ e o espaço nulo $\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}$ respectivamente. Faça com que $\tilde{\mathbf{R}}$ e $\tilde{\mathbf{N}}$ sejam matrizes ruidosas (suas linhas são vetores ruidosos) do espaço imagem $\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}$ e do espaço nulo $\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}$ respectivamente. Defina o projetor oblíquo $\mathbf{E}_{\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}|\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}}$ como a matriz que realiza a projeção de um vetor linha em $\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}$ ao longo de $\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}$. Faça então

$$\mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

e

$$\tilde{\mathbf{A}} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{R}} \\ \tilde{\mathbf{N}} \end{bmatrix}. \quad (4.136)$$

A projeção oblíqua de um vetor *linha* ruidoso $\tilde{\mathbf{b}}$ em $\mathcal{Z}_{\mathbf{R}} = \mathcal{R}\{\mathbf{R}\}$ ao longo de $\mathcal{Z}_{\mathbf{N}} = \mathcal{R}\{\mathbf{N}\}$ pode ser vista como a remoção do ruído de $\tilde{\mathbf{b}}$ por

$$\min \|\Delta\tilde{\mathbf{b}}\|, \quad \text{sujeito a } \tilde{\mathbf{b}} - \Delta\tilde{\mathbf{b}} = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]\mathbf{A}. \quad (4.137)$$

A projeção oblíqua é então dada por

$$\tilde{\mathbf{b}}_{\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}|\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}} = \boldsymbol{\alpha}_*\mathbf{R}, \quad \mathbf{b}_{\mathcal{Z}_{\mathbf{N}}|\mathcal{Z}_{\mathbf{R}}} = \boldsymbol{\beta}_*\mathbf{N} \quad (4.138)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}_*$ e $\boldsymbol{\beta}_*$ são vetores *linha* ótimos de (4.137).

Mas como \mathbf{R} e \mathbf{N} na prática são também ruidosos, temos na verdade $\tilde{\mathbf{R}}$ e $\tilde{\mathbf{N}}$ apenas. Podemos então modificar (4.137) para obter os mínimos quadrados totais da projeção oblíqua conforme

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \Delta\tilde{\mathbf{b}} \\ \Delta\tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \right\|_F, \quad \text{sujeito a } (\tilde{\mathbf{b}} - \Delta\tilde{\mathbf{b}}) = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] (\tilde{\mathbf{A}} - \Delta\tilde{\mathbf{A}}). \quad (4.139)$$

A solução fechada de (4.139) é então (YU; TONG, 2001)

$$[\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*] = \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{A}}^H (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^H - \sigma^2\mathbf{I})^\dagger \quad (4.140)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{\mathcal{Z}_{\tilde{\mathbf{R}}}\mathcal{Z}_{\tilde{\mathbf{N}}}} = \boldsymbol{\alpha}^*(\tilde{\mathbf{R}} - \Delta\tilde{\mathbf{R}}) \quad (4.141)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{\mathcal{Z}_{\tilde{\mathbf{N}}}\mathcal{Z}_{\tilde{\mathbf{R}}}} = \boldsymbol{\beta}^*(\tilde{\mathbf{N}} - \Delta\tilde{\mathbf{N}}) \quad (4.142)$$

4.4. ALGORITMO OP

onde σ é o menor valor singular de $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T & \tilde{\mathbf{b}}^T \end{bmatrix}^T$ e $\Delta\tilde{\mathbf{R}}$ e $\Delta\tilde{\mathbf{N}}$ são as perturbações correspondentes a $\tilde{\mathbf{R}}$ e $\tilde{\mathbf{N}}$ respectivamente.

Coefficientes pequenos no início e fim das respostas ao impulso

Este caso especial merece atenção. Quando os coeficientes iniciais ou finais das respostas ao impulso são pequenos (o caso do problema sísmico por exemplo), a interseção entre \mathcal{F}_2 e \mathcal{P}_2 é mal definida. A partir da Figura 4.6 podemos observar que para calcularmos \mathcal{F}_2 a partir da matriz de saída, $\check{\mathbf{s}}(k)$ é multiplicado pelo fim das respostas ao impulso do sistema. De forma similar, para calcularmos \mathcal{P}_2 , $\check{\mathbf{s}}(k)$ é multiplicado pelo início das respostas ao impulso do sistema. Logo, para dados ruidosos e com coeficientes pequenos no início ou no final de suas respostas ao impulso, a interseção entre \mathcal{F}_2 e \mathcal{P}_2 não deverá fornecer os resultados esperados. Assim, para regiões de baixa SNR, resta subestimar a ordem do sistema de forma a minimizar este efeito.

Detecção da ordem do sistema

Uma possibilidade para a detecção da ordem do sistema por fim é apresentada, com a suposição de que apenas um limite superior para a ordem esteja disponível. Considere o caso de um sistema SIMO FIR para o qual a ordem do sistema seja super ou subestimada. Faça com que a ordem super/subestimada seja $M' - 1$. Dado M' , considere a soma de duas projeções

$$\mathbf{G}_I \triangleq \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1} + \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1} \quad (4.143)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{X}^{(M')}(k + M' - 1) \mathbf{G}_I. \quad (4.144)$$

Caso $M = M'$ (a ordem seja exata) os dois projetores $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1}$ e $\mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1}$ são idênticos, e por consequência \mathbf{E}' têm posto um. Quando $M < M'$ a ordem está superdeterminada. Neste caso ambos os projetores $\mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1}$ e $\mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1}$ tem posto um mas seus subespaços gerados pelas linhas e pelas colunas são diferentes.

4.4. ALGORITMO OP

Logo em geral a projeção \mathbf{G}_I tem posto dois. Por fim, quando a ordem está subestimada ($M > M'$) a projeção oblíqua não é bem definida devido à sobreposição dos espaços imagem e nulo. Neste caso, segundo (YU; TONG, 2001), pode-se verificar experimentalmente que o posto de \mathbf{G}_I também será maior que um. Também segundo (YU; TONG, 2001), resultados similares são válidos para

$$\mathbf{G}_{II} \triangleq \mathbf{E}_{\mathcal{F}_1|\mathcal{P}_2} + \mathbf{E}_{\mathcal{P}_1|\mathcal{P}_2} - \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2|\mathcal{P}_1} - \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2|\mathcal{F}_1}. \quad (4.145)$$

Logo, para se detectar a ordem do sistema deve-se verificar numericamente o posto do resultado da projeção \mathbf{E}' . Em condições de ruído pode-se fazer isto utilizando a razão entre o maior e o segundo maior valor singular de \mathbf{E}' , escolhendo assim a ordem $M' - 1$ que minimize esta razão. Uma segunda opção é utilizar o fator de dominância

$$f_d \triangleq \frac{\sigma^2}{\text{tr}(\mathbf{E}'\mathbf{E}'^T)}, \quad (4.146)$$

onde σ é o maior valor singular, apresentado durante o desenvolvimento do algoritmo OPD (Capítulo 3, seção 3.7). Neste caso deve-se escolher $M' - 1$ que minimize o fator de dominância.

4.4.2 Descrição e pseudo-código

Entradas

1. Faixa de tamanhos M das respostas ao impulso do sistema SIMO FIR, de M_{inf} a M_{sup} ;
2. Parâmetro K , similar à ordem de suavização dos algoritmos LSS e JLSS e que deve ser igual ou superior a $M - 1$. Por exemplo pode ser feito igual a M_{sup} ou variável dentro do próprio algoritmo para cada uma das iterações de $\dot{M} = M_{\text{inf}}, \dots, M_{\text{sup}}$ fazendo $K = \dot{M}$;
3. Resposta $\mathbf{x}^{(N)}(N) = [\mathbf{x}^T(N) \quad \mathbf{x}^T(N-1) \quad \dots \quad \mathbf{x}^T(1)]^T$ do sistema SIMO FIR.

Saídas

1. Estimativa $\hat{\mathbf{H}}$ do sistema SIMO FIR;
2. Estimativa $\check{s}(k)$ do sinal de entrada contendo as amostras $s(K), \dots, s(N - K - \hat{M} + 1)$ do sinal completo $s(-\hat{M} + 2), \dots, s(N)$.

Pseudo-código

1. Para $\dot{M} = M_{\text{inf}}, \dots, M_{\text{sup}}$ fazer

- (a) Construir as matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2^{(\dot{M})} &\triangleq \mathbf{X}^{(K+1)}(K+1) \\ (L(K+1) \times N-2K-\dot{M}+1) & \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K+1) & \cdots & \mathbf{x}(N-K-\dot{M}+1) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.147)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^{(\dot{M})} &\triangleq \mathbf{X}^{(K)}(K) \\ (KL \times N-2K-\dot{M}+1) & \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K) & \cdots & \mathbf{x}(N-K-\dot{M}) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.148)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2^{(\dot{M})} &\triangleq \mathbf{X}^{(K+1)}(2K+\dot{M}) \\ (L(K+1) \times N-2K-\dot{M}+1) & \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(2K+\dot{M}) & \cdots & \mathbf{x}(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+\dot{M}) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.149)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{(\dot{M})} &\triangleq \mathbf{X}^{(K)}(2K+\dot{M}) \\ (KL \times N-2K-\dot{M}+1) & \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(2K+\dot{M}) & \cdots & \mathbf{x}(N) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K+\dot{M}+1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.150)$$

4.4. ALGORITMO OP

e

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(\dot{M})} &\triangleq \mathbf{X}^{(\dot{M})}(K + \dot{M}) \\ &_{(\dot{M}L \times N - 2K - \dot{M} + 1)} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(K + \dot{M}) & \cdots & \mathbf{x}(N - K) \\ \vdots & \text{Toeplitz} & \\ \mathbf{x}(K + 1) & \text{por blocos} & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.151)$$

onde

$$\mathcal{P}_2^{(\dot{M})} \triangleq \mathcal{R} \left\{ \mathbf{P}_2^{(\dot{M})} \right\}, \quad (4.152)$$

$$\mathcal{P}_1^{(\dot{M})} \triangleq \mathcal{R} \left\{ \mathbf{P}_1^{(\dot{M})} \right\}, \quad (4.153)$$

$$\mathcal{F}_2^{(\dot{M})} \triangleq \mathcal{R} \left\{ \mathbf{F}_2^{(\dot{M})} \right\}, \quad (4.154)$$

$$\mathcal{F}_1^{(\dot{M})} \triangleq \mathcal{R} \left\{ \mathbf{F}_1^{(\dot{M})} \right\}. \quad (4.155)$$

Assim as linhas de $\mathbf{P}_2^{(\dot{M})}$, $\mathbf{P}_1^{(\dot{M})}$, $\mathbf{F}_2^{(\dot{M})}$ e $\mathbf{F}_1^{(\dot{M})}$ geram os subespaços $\mathcal{P}_2^{(\dot{M})}$, $\mathcal{P}_1^{(\dot{M})}$, $\mathcal{F}_2^{(\dot{M})}$ e $\mathcal{F}_1^{(\dot{M})}$ respectivamente;

(b) Calcular a projeção

$$\mathbf{E}'_{\dot{M}} = \mathbf{A}^{(\dot{M})} \mathbf{G} \quad (4.156)$$

$_{(\dot{M}L \times N - 2K - \dot{M} + 1)}$

onde o projetor \mathbf{G} pode ser tanto

$$\mathbf{G}_I = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2^{(\dot{M})} | \mathcal{P}_1^{(\dot{M})}} \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2^{(\dot{M})} | \mathcal{F}_1^{(\dot{M})}} + \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2^{(\dot{M})} | \mathcal{F}_1^{(\dot{M})}} \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2^{(\dot{M})} | \mathcal{P}_1^{(\dot{M})}} \quad (4.157)$$

$_{(N - 2K - \dot{M} + 1 \times N - 2K - \dot{M} + 1)}$

como

$$\mathbf{G}_{II} = \mathbf{E}_{\mathcal{F}_1^{(\dot{M})} | \mathcal{P}_2^{(\dot{M})}} + \mathbf{E}_{\mathcal{P}_1^{(\dot{M})} | \mathcal{P}_2^{(\dot{M})}} - \mathbf{E}_{\mathcal{F}_2^{(\dot{M})} | \mathcal{P}_1^{(\dot{M})}} - \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2^{(\dot{M})} | \mathcal{F}_1^{(\dot{M})}}; \quad (4.158)$$

$_{(N - 2K - \dot{M} + 1 \times N - 2K - \dot{M} + 1)}$

(c) Calcular o fator de dominância $f_d(M)$, dado por

$$f_d(\dot{M}) = \frac{\sigma^2}{\text{tr} \left(\mathbf{E}'_{\dot{M}} \mathbf{E}'_{\dot{M}}^T \right)}, \quad (4.159)$$

onde σ é o maior valor singular de $\mathbf{E}'_{\dot{M}}$;

4.4. ALGORITMO OP

2. Fazer $\hat{M} = \arg \min_{\hat{M}} f_d(\hat{M})$;
3. Calcular o produto externo $\mathbf{h}^{(\hat{M})}\check{\mathbf{s}}(k)$ dado por

$$\mathbf{h}^{(\hat{M})}\check{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{A}^{(\hat{M})}\mathbf{E} \quad (4.160)$$

onde o projetor \mathbf{E} pode ser qualquer um dos três projetores

$$\mathbf{E}_1_{(N-2K-\hat{M}+1 \times N-2K-\hat{M}+1)} = \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2^{(\hat{M})}|\mathcal{F}_1^{(\hat{M})}}\mathbf{E}_{\mathcal{F}_2^{(\hat{M})}|\mathcal{P}_1^{(\hat{M})}}, \quad (4.161)$$

$$\mathbf{E}_2_{(N-2K-\hat{M}+1 \times N-2K-\hat{M}+1)} = \mathbf{E}_{\mathcal{P}_2^{(\hat{M})}|\mathcal{F}_1^{(\hat{M})}} - \mathbf{E}_{\mathcal{P}_1^{(\hat{M})}|\mathcal{F}_2^{(\hat{M})}}, \quad (4.162)$$

$$\mathbf{E}_3_{(N-2K-\hat{M}+1 \times N-2K-\hat{M}+1)} = \mathbf{I} - \left(\mathbf{E}_{\mathcal{F}_1^{(\hat{M})}|\mathcal{P}_2^{(\hat{M})}} - \mathbf{E}_{\mathcal{P}_1^{(\hat{M})}|\mathcal{F}_2^{(\hat{M})}} \right); \quad (4.163)$$

4. Obter a estimativa de $\mathbf{h}^{(\hat{M})}$ como o vetor singular à esquerda associado ao maior valor singular de $\mathbf{h}^{(\hat{M})}\check{\mathbf{s}}(k)$ e a estimativa de $\check{\mathbf{s}}(k)$ como o vetor singular à direita associado ao maior valor singular de $\mathbf{h}^{(\hat{M})}\check{\mathbf{s}}(k)$;

5. Rearrumar $\hat{\mathbf{h}}^{(\hat{M})}$, a partir de

$$\hat{\mathbf{h}}^{(\hat{M})}_{(\hat{M}L \times 1)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}(\hat{M}-1) \\ \hat{\mathbf{h}}(\hat{M}-2) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}(0) \end{bmatrix} \quad (4.164)$$

e

$$\hat{\mathbf{H}}_{(L \times \hat{M})} = \left[\hat{\mathbf{h}}(0) \quad \hat{\mathbf{h}}(1) \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{h}}(\hat{M}-1) \right]^T, \quad (4.165)$$

para obter $\hat{\mathbf{H}}$.

Observação: Existem três possibilidades para calcular as projeções oblíquas necessárias pelo algoritmo. A primeira é feita indiretamente utilizando (4.109) e depois aplicando esta matriz nos vetores a serem projetados. A segunda é feita diretamente, conforme (VANDAELE; MOONEN, 2000), mas não leva em conta o ruído presente nos subespaços. E por fim a terceira é realizada diretamente, utilizando a abordagem de mínimos quadrados totais apresentada no desenvolvimento anterior. Esta terceira possivelmente é a única capaz de tratar adequadamente o ruído presente nos subespaços utilizados para a projeção oblíqua.

Capítulo 5

Comparações e Resultados Experimentais

Após apresentar diversos algoritmos estatísticos e determinísticos para a identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR, passamos agora para uma comparação entre os mesmos e as abordagens tradicionais SISO FIR. São comparadas as premissas adotadas em cada algoritmo e realçados seus pontos fortes e fracos.

5.1 Comparações

Alguns pontos de atenção relacionados aos diversos algoritmos aqui apresentados merecem especial atenção. São eles:

1. Restrições quanto ao sinal de entrada;
2. Restrições quanto ao sistema SIMO FIR;
3. Robustez quanto a erros na estimativa da ordem $M - 1$ do sistema SIMO FIR;

5.1. COMPARAÇÕES

4. Inversão direta ou indireta e ZF ou MMSE;
5. Características de convergência e desempenho das estimativas com relação à SNR e à quantidade de amostras da saída;
6. Janela de observação mínima;
7. Requisitos computacionais.

Todos estes pontos encontram-se cobertos nesta seção. Um resumo pode ser encontrado nas tabelas 5.1, 5.2 e 5.3.

5.1.1 Identificação e inversão cega de sistemas SISO FIR

Como ponto de partida, uma breve discussão em cima do problema de uma entrada e uma saída (*single-input single-output*, SISO) FIR é esclarecedora. Primeiramente temos dois tipos de métodos de solução para o problema SISO: baseados em estatísticas de segunda ordem (*second order statistics*) e baseados em estatísticas de ordem superior (*higher order statistics*). Diferentemente do problema cego SIMO FIR, o problema cego SISO FIR não possui solução determinística.

Para soluções MMSE do sinal de entrada baseadas em estatísticas de segunda ordem há a necessidade de se conhecer a autocorrelação do sinal de entrada e a fase do sistema (normalmente suposta como fase mínima), e, para a identificação do sistema e a solução ZF do sinal de entrada, há também a necessidade de conhecimento da autocorrelação do ruído aditivo. Estas limitações aparecem em contrapartida ao fato de a solução encontrada por estatísticas de segunda ordem ser fechada e exata para estatísticas exatas. Este por sinal é um dos motivos para a solução por estatísticas de segunda ordem ser tão robusta.

Já para os algoritmos por estatísticas de ordem superior, incluindo-se aí as metodologias de deconvolução por mínima entropia, as hipóteses relativas à fase do sistema podem ser relaxadas, pois a mesma não mais precisa ser conhecida. Por

5.1. COMPARAÇÕES

outro lado há sérios problemas inerentes de convergência relacionados à necessidade de um número de amostras muito maior que a solução por estatísticas de segunda ordem e a existência de mínimos locais nas funções custo utilizadas. Para provas da existência dos mínimos locais consultar (DING; LI, 2001).

Finalmente, em processamento de dados sísmicos a solução cega SISO FIR é muito utilizada visto que o sistema, o pulso sísmico, atende na grande maioria das vezes a hipótese de fase mínima. Já em comunicações digitais o mesmo não é verdade, isto é, o sistema, o canal de comunicação, é inerentemente de fase mista. A abordagem SIMO FIR surgiu justamente como forma de contornar esta limitação dos algoritmos baseados em estatísticas de segunda ordem, a partir do conhecimento prévio de que o sinal de entrada no caso dos sistemas de comunicação digital é cicloestacionário.

5.1.2 Restrições quanto ao sinal de entrada

Diferentemente do problema cego SISO FIR, o problema cego SIMO FIR permite hipóteses mais flexíveis sobre o sinal de entrada e o próprio sistema. No caso estatístico os algoritmos SSM e CMOE aqui apresentados nos permitem a utilização de sinais de entrada estacionários mas coloridos, com autocorrelação desconhecida, desde que sua matriz de autocorrelação estendida $\mathbf{R}_s^{(K)}(0)$ possua posto completo. Os outros algoritmos estatísticos, a saber TXK, LP, OPD e MSLP, ainda requerem o sinal de entrada estacionário e branco ou com estatísticas de segunda ordem conhecida.

De forma diferente e talvez mais simples, os algoritmos determinísticos para o problema cego SIMO FIR permitem sinais determinísticos, sem nenhuma característica estacionária, bastando para isso apenas a condição de complexidade linear suficientemente grande do sinal de entrada. Esta restrição é facilmente atendida em qualquer problema de processamento de dados sísmicos visto que o sinal sísmico é inerentemente analógico e é facilmente contornável no caso de comunicações di-

5.1. COMPARAÇÕES

digitais visto que há condições para se modificar o sinal de entrada por projeto. Por fim, uma última característica presente apenas no algoritmo OP é a capacidade de convergência do sinal estimado $\hat{s}(k)$ para $s(k)$ com um número finito de amostras disponíveis. Esta pode ser uma característica muito importante para um inversor do sistema SIMO FIR quando a disponibilidade de amostras da saída do sistema $\mathbf{x}(k)$ é baixa.

Por outro lado, a hipótese de se considerar uma mesma entrada para múltiplos sistemas pode não ser exata. Em comunicações digitais por exemplo, quando supomos o sinal de entrada cicloestacionário para um sistema SISO e seu sistema equivalente SIMO, estamos considerando que conseguimos de forma perfeita amostrar a saída do sistema SISO em múltiplos do período da cicloestacionariedade. Isto pode não ser exato e pode por isso influenciar no comportamento do sistema equivalente, desviando o modelo de um modelo SIMO para um modelo de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*multiple-input multiple-output*, MIMO) por exemplo, ou alterando de alguma forma os sistemas (os canais) do modelo SIMO para um modelo variante no tempo.

Já em processamento de dados sísmicos possíveis distorções lineares do sinal de entrada para cada um dos sistemas do modelo SIMO podem ser capturados pelos próprios sistemas e de certa forma tratados dentro dos próprios algoritmos de deconvolução multicanal. Por outro lado distorções não lineares podem desviar o modelo para situações ainda não exploradas. Para um entendimento claro destes efeitos é necessário um estudo mais aprofundado do comportamento dos algoritmos de identificação e inversão cega SIMO FIR frente a estes desvios.

5.1.3 Restrições quanto ao sistema SIMO FIR

No problema cego SISO FIR utilizando estatísticas de segunda ordem há a necessidade de conhecimento da fase do sistema. Quando são utilizadas estatísticas de ordem superior há problemas de convergência intrínsecos. De forma diferente,

5.1. COMPARAÇÕES

quando analisamos o problema cego SIMO FIR, a restrição de conhecimento da fase desaparece. Os sistemas SIMO FIR devem atender apenas a

$$\dot{\mathbf{h}}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{h}(k)z^{-k} \neq 0, \forall z, \quad (5.1)$$

a restrição de não haver zeros em comum. Ainda há algoritmos que são capazes de lidar inclusive com os casos em que existam zeros em comum, supondo para isso apenas que estes e somente estes zeros sejam de fase mínima, isto é, estejam dentro do círculo unitário (TUGNAIT, 1999). Esta é uma característica que não está presente em nenhum dos algoritmos aqui apresentados, que simplesmente se perdem quando utilizados para sistemas SIMO FIR com zeros em comum.

Especificamente em processamento de dados sísmicos, a hipótese de (5.1) pode ser um tanto quanto forte para agrupamentos de ponto médio comum com correção de velocidade, um dos casos em que podemos supor uma entrada única para todos os sismogramas medidos. Mas é do entendimento do autor que esta hipótese não seja um impeditivo tão grande, bastando para isso a utilização de métodos robustos a este mal condicionamento do sistema. De forma um pouco diferente e com possíveis custos mais elevados, uma outra possibilidade seria a introdução de pulsos sísmicos diferentes para uma mesma aquisição sísmica, de forma a introduzir por projeto a restrição de (5.1).

5.1.4 Robustez quanto a erros na estimativa da ordem $M-1$

Um problema intrínseco aos algoritmos de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR é o conhecimento da ordem do sistema. Muitos algoritmos simplesmente consideram a ordem conhecida, o que não é verdade nos casos práticos. Dos apresentados aqui podemos citar os algoritmos TXK, SSM, OPD (embora seja possível estimar a ordem por um subproduto), SCM e LSS. Todos sugerem alguma forma de estimação por métodos como o MDL mas se mostram não-robustos quanto a erros nesta estimativa. Basta assim a estimativa falhar para o método ser severamente penalizado. Já os algoritmos LP, MSLP, CMOE, JLSS e OP tentam de

5.1. COMPARAÇÕES

alguma forma contornar esta deficiência, criando para isso métodos mais robustos ao erro em M ou que possuam intrinsecamente estimadores incluídos. Mas ainda resta muito a ser explorado. Há uma certa relação entre a ordem estimada do sistema, a localização da concentração de energia na resposta ao impulso do sistema e a qualidade da identificação e da inversão que ainda pode e deve ser explorada. É de entendimento do autor que, para este problema em particular, serão necessários algoritmos específicos para casos específicos. Desta forma algoritmos para processamento de dados sísmicos, onde o sistema possui energia concentrada no início da resposta ao impulso mas não necessariamente de fase mínima, devem utilizar algoritmos robustos a esta característica. Como exemplo os algoritmos determinísticos propostos por (XU; NG, 2002) exploram, em um dos casos, sistemas que possuam a energia da resposta ao impulso concentrada no seu início e, em outro caso, sistemas que possuam a energia concentrada no seu final.

O conhecimento da ordem do sistema também se faz muito útil para o cálculo da pseudo-inversa de Moore-Penrose de $\mathbf{R}_x^{(K)}(0)$ pois permite se separar o subespaço de ruído do subespaço de sinal e com isso identificar quais vetores singulares realmente fazem parte da pseudo-inversa. Isto traz novamente a necessidade do conhecimento da ordem do sistema para algoritmos que necessitam calcular esta pseudo-inversa ou algum sistema linear associado a ela, como os algoritmos OPD, MSLP e CMOE. Ainda de forma mais forte esta informação é *necessária* quando desejamos obter um sistema inverso MMSE MISO FIR a partir de um sistema inverso ZF MISO FIR (consultar equação (3.36)).

5.1.5 Inversão direta ou indireta e ZF ou MMSE

Conforme apresentado no Capítulo 2, duas possibilidades existem: podemos realizar uma inversão diretamente a partir da saída $\mathbf{x}(k)$ ou podemos indiretamente inverter o sistema a partir de uma estimativa do próprio, feita também a partir da saída $\mathbf{x}(k)$.

5.1. COMPARAÇÕES

Normalmente algoritmos indiretos possuem funções custo que otimizam a estimativa do sistema SIMO FIR \mathbf{H} , o que não garante o mesmo para o sistema inverso. Por outro lado algoritmos diretos otimizam a estimativa do sinal de entrada $s(k)$, o que também não garante o mesmo para a estimativa do sistema SIMO FIR \mathbf{H} .

Em sistemas de comunicação ambos são úteis e utilizados mas a discussão dos motivos ultrapassa o escopo desta dissertação. Em processamento de dados sísmicos a situação é similar visto que o conhecimento do pulso sísmico pode trazer novos fatos relevantes para a interpretação dos dados além dos obtidos pelos dados já deconvoluídos.

5.1.6 Características de convergência e desempenho das estimativas com relação à SNR e à quantidade de amostras da saída

Inicialmente devemos esclarecer que estamos lidando com um problema *cego*. Não possuímos acesso tanto a entrada quanto ao sistema. Logo algumas limitações existem. Ao se propor a solução deste problema é necessário entender que uma SNR baixa, de 0 dB por exemplo, torna o problema praticamente impossível de ser resolvido. Mas considerando SNRs razoáveis, de 10 dB para cima por exemplo, os algoritmos aqui apresentados podem funcionar desde que suas hipóteses sejam atendidas.

Mas alguns pontos merecem ser citados. Para os algoritmos estatísticos apresentados, quando temos conhecimento *exato* das estatísticas de segunda ordem dos sinais de *saída* apenas, e quando temos todas as hipóteses atendidas, as respostas obtidas podem ser *exatas* e o são para todos os algoritmos estatísticos aqui apresentados. Isto é, temos convergência das estimativas do sistema e da entrada *garantida* para *estatísticas perfeitas*. *Algoritmos cegos SISO FIR baseados em estatísticas de ordem superior não possuem esta propriedade*. Simulações

5.1. COMPARAÇÕES

comprovam isto.

Outra característica importantíssima, esta para os algoritmos determinísticos aqui apresentados, é a de eles serem capazes de obter *respostas exatas para um número finito de amostras da saída livres de ruído*. Esta característica possibilita convergência ainda mais rápida do que o caso cego SIMO FIR estatístico para situações de SNR alta e com poucas amostras da saída do sistema disponíveis.

5.1.7 Janela de observação mínima

A janela de observação possui interpretações diferentes: para os casos estatísticos e determinísticos. No caso estatístico esta janela nos indica até que atraso m devemos estimar as matrizes de autocorrelação $\mathbf{R}_x(m)$. Maiores intervalos significam a necessidade de mais amostras do sinal de saída para uma estimativa de mesma qualidade. Assim o algoritmo OPD por exemplo necessita de uma janela de observação mínima $\mathbf{R}_x(0), \dots, \mathbf{R}_x(2K)$ onde $K \geq M - 1$, quase duas vezes maior que a janela de observação mínima do algoritmo TXK, $\mathbf{R}_x(0), \dots, \mathbf{R}_x(K + 1)$ onde $K \geq M - 1$. Neste quesito temos os algoritmos TXK, SSM e LP com necessidades similares. O algoritmo OPD necessita de quase o dobro, o algoritmo MSLP de mais que o dobro e o algoritmo CMOE, de um intervalo ligeiramente superior à ordem do sistema. Para os valores precisos, consultar as tabelas 5.1, 5.2 e 5.3.

No caso determinístico a janela de observação passa a ser relacionada ao número de amostras necessárias para que o algoritmo tenha uma equação suficientemente determinada (desejadamente superdeterminada) para a solução do problema por mínimos quadrados ou TLS. Assim, para o algoritmo SCM o número de amostras N deve ser maior ou igual a $\frac{2M}{L-1} + M$ para que $\tilde{\mathbf{X}}$ possua mais linhas do que colunas e a complexidade linear L_* deve ser igual ou maior a $2M - 1$. A segunda condição, devido à complexidade linear, nos diz que para um sinal estacionário e branco o número de amostras na prática tem de ser também superior a $2M$. Estas duas condições devem ser atendidas. Similarmente nos algoritmos LSS,

5.1. COMPARAÇÕES

JLSS e OP temos duas condições, uma necessária pelas matrizes do método (mais linhas do que colunas ou vice-versa) e outra pela complexidade linear mínima do sinal de entrada. Os algoritmos LSS e JLSS necessitam de $N \geq 4K + 3(M - 1) + 1$ onde $K \geq M - 1$ e $N \geq 6l + 3(M - 1) + 1$ onde $l \geq M$ respectivamente, além de complexidades lineares da entrada iguais ou superiores a $2(K + M - 1) + 1$ e $3l + M$ respectivamente. São cerca de cinco vezes a ordem do sistema para o caso de uma entrada e duas saídas, aumentando drasticamente para um aumento no número de saídas. Isto pode ser um entrave severo para o caso de processamento de dados sísmicos. Finalmente o algoritmo OP necessita de $N \geq 4K + 4M - 3$ onde $K \geq M - 1$, cerca de oito vezes a ordem do sistema. Para um quadro completo consultar as tabelas 5.1, 5.2 e 5.3.

5.1.8 Requisitos computacionais

Por fim, os requisitos computacionais são variados. Alguns algoritmos utilizam decomposições QR, outros decomposições em valores singulares, outros projeções, e alguns apenas necessitam de alguns autovetores, alguns autovalores, alguns valores singulares ou alguns vetores singulares à direita ou à esquerda. São algoritmos que possuem normalmente complexidade computacional $O(n^3)$, caros computacionalmente. Mas muitos deles lidam com matrizes estruturadas Toeplitz, Toeplitz por blocos, Hankel ou Hankel por blocos. Estas estruturas permitem a implementação rápida de todos estes algoritmos algébricos necessários, normalmente reduzindo a complexidade computacional de $O(n^3)$ para $O(n^2)$. Como forma de explicitar os pontos onde estes algoritmos são aplicáveis, todas as matrizes estruturadas nesta dissertação estão denotadas por um pequeno ponto na parte superior e a esquerda (por exemplo $\mathbf{H}^{(K)}$). Uma referência interessante é (KAILATH; SAYED, 1999), um livro dedicado inteiramente a algoritmos algébricos para matrizes com estrutura. Em um passo posterior onde a velocidade seja importante, certamente esta fonte de consulta será de extrema valia.

5.1. COMPARAÇÕES

Algoritmo	Hipóteses sobre o sinal de entrada $s(k)$	Hipóteses sobre o ruído aditivo $n(k)$	Estimação do sistema SIMO FIR \mathbf{H}	Estimação de sistemas inversos MISO FIR \mathbf{F}	Estimação da entrada $s(k)$	Robustez a erro de estimativa da ordem do sistema $M-1$	Janela de observação mínima
TXK (estatístico)	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco e ergódico	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco , ergódico e descorrelacionado da entrada $s(k)$	Sim, mas apenas $\mathbf{H}(K)$	Indireta	Indireta, através da aplicação de um sistema inverso	Não	$\mathbf{R}_x(0), \dots, \mathbf{R}_x(K+1)$ onde $K \geq M-1$
SSM (estatístico)	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, colorido e ergódico	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco , ergódico e descorrelacionado da entrada $s(k)$	Sim	Indireta	Indireta, através da aplicação de um sistema inverso	Não	$\mathbf{R}_x(0), \dots, \mathbf{R}_x(K-1)$ onde $K \geq M-1$
LP (estatístico)	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco e ergódico	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco , ergódico e descorrelacionado da entrada $s(k)$	Sim	Sim	Sim, através da aplicação do sistema inverso	Sim	$\mathbf{R}_x(0), \dots, \mathbf{R}_x(K-1)$ onde $K \geq M$
OPD (estatístico)	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco e ergódico	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco , ergódico e descorrelacionado da entrada $s(k)$	Sim	Indireta	Indireta, através da aplicação de um sistema inverso	Não	$\mathbf{R}_x(0), \dots, \mathbf{R}_x(2K-2)$ onde $K \geq M$

Tabela 5.1: Comparação entre os algoritmos de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR apresentados (parte 1).

5.1. COMPARAÇÕES

Algoritmo	Hipóteses sobre o sinal de entrada $s(k)$	Hipóteses sobre o ruído aditivo $n(k)$	Estimação do sistema SIMO FIR \mathbf{H}	Estimação de sistemas inversos MISO FIR \mathbf{F}	Estimação da entrada $s(k)$	Robustez a erro de estimativa da ordem do sistema $M - 1$	Janela de observação mínima
MSLP (estatístico)	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco e ergódico	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco , ergódico e descorrelacionado da entrada $s(k)$	Sim	Sim	Sim, através da aplicação do sistema inverso	Sim	$\mathbf{R}_x(0), \dots, \mathbf{R}_x(K + M)$ onde $K \geq M - 1$
CMOE (estatístico)	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, colorido e ergódico	Processo estacionário no sentido amplo, de média zero, branco , ergódico e descorrelacionado da entrada $s(k)$	Sim	Sim	Sim, através da aplicação do sistema inverso	Sim	$\mathbf{R}_x(0), \dots, \mathbf{R}_x(K - 1)$ onde $K \geq M$ (mas para resultados aceitáveis K deve ser um pouco maior)
SCM (determinístico)	Entrada determinística com complexidade linear igual ou superior a $L_* = 2M - 1$	Suposto próximo de zero	Sim	Indireta	Indireta, através da aplicação de um sistema inverso	Não	$N \geq \frac{2M}{L_* - 1} + M$ e respeitando a complexidade linear mínima ($N \geq L_* + 1$ para entrada branca por exemplo)
LSS (determinístico)	Entrada determinística com complexidade linear igual ou superior a $L_* = 2(K + M - 1) + 1$	Suposto próximo de zero	Sim	Indireta	Indireta, através da aplicação de um sistema inverso	Não	$N \geq 4K + 3(M - 1) + 1$ onde $K \geq M - 1$

Tabela 5.2: Comparação entre os algoritmos de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR apresentados (parte 2).

5.1. COMPARAÇÕES

Algoritmo	Hipóteses sobre o sinal de entrada $s(k)$	Hipóteses sobre o ruído aditivo $\mathbf{n}(k)$	Estimação do sistema SIMO FIR \mathbf{H}	Estimação de sistemas inversos MISO FIR \mathbf{F}	Estimação da entrada $s(k)$	Robustez a erro de estimativa da ordem do sistema $M-1$	Janela de observação mínima
JLSS (determinístico)	Entrada determinística com complexidade linear igual ou superior a $L_* = 3l + M + 1$	Suposto próximo de zero	Sim	Indireta	Indireta, através da aplicação de um sistema inverso	Sim	$N \geq 6l + 3(M-1) + 1$ onde $l \geq M$
OP (determinístico)	Entrada determinística com complexidade linear superior a $L_* = 2K + 2(M-1) + 1$	Tratado por TLS	Sim	Podem ser feita de forma indireta, mas é desnecessária para estimar grande parte da entrada	Sim, todas exceto as $K + M - 1$ primeiras e últimas amostras	Sim	$N \geq 4K + 4M - 3$ onde $K \geq M - 1$

Tabela 5.3: Comparação entre os algoritmos de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR apresentados (parte 3).

5.2 Figuras de mérito

A partir de agora trataremos dos experimentos conduzidos para validação e testes dos algoritmos apresentados nesta dissertação. Primeiramente iremos definir algumas figuras de mérito. A relação sinal-ruído (*signal-to-noise ratio*, SNR) para os sistemas SIMO FIR é definida por

$$\text{SNR} = \frac{\text{E} \left[\sum_{l=1}^L (s(k) * h_l(k)) (s(k) * h_l(k))^* \right]}{\text{E} \left[\sum_{l=1}^L n_l(k) n_l^*(k) \right]} \quad (5.2)$$

e mais especificamente, quando o ruído é branco e as respostas ao impulso do canal são normalizadas (i.e. sem ganho, ou seja $\sum_k |h_i(k)|^2 = 1$, para $i = 1, \dots, L$), temos

$$\text{SNR} = \frac{\text{E} [s^2(k)]}{\sigma_n^2}. \quad (5.3)$$

Já a raiz do erro médio quadrático normalizado (*normalized root mean square error*, NRMSE) para $\hat{\mathbf{H}}$, uma figura de mérito que mede a *distância normalizada da estimativa de \mathbf{H} com relação ao seu valor real*, é dada por

$$\text{NRMSE}_{\mathbf{H}} = \min_{\alpha, i} \left\| \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L, M-1} & \hat{\mathbf{H}}_{\text{norm}} & \mathbf{0}_{L, M-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L, i} & \mathbf{H}_{\text{norm}} & \mathbf{0}_{L, M+\hat{M}-2-i} \end{bmatrix} \right\|, \quad (5.4)$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $i \in \{0, \dots, M + \hat{M} - 2\}$ e \mathbf{H}_{norm} é a matriz de repostas ao impulso com suas linhas normalizadas (i.e. sem ganho, ou seja $\sum_k |h_i(k)|^2 = 1$, para $i = 1, \dots, L$) e $\hat{\mathbf{H}}_{\text{norm}}$ é a estimativa de \mathbf{H}_{norm} .

Por fim a raiz do erro médio quadrático normalizado para $\hat{s}(k)$, que mede a *distância normalizada da estimativa de $s(k)$ do seu valor real*, é dada por

$$\text{NRMSE}_s = \min_{\alpha, D} \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{k=k_1}^{k_2} \|\alpha \hat{s}(k - D) - s(k)\|, \quad (5.5)$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}^*$ e $D \in \mathbb{Z}$.

Todos os gráficos referentes aos resultados experimentais encontram-se no Apêndice D. São gráficos de SNR (em dB) por NRMSE (em dB) tanto para as estimativas de \mathbf{H} quanto para as estimativas de $s(k)$, e apresentam a média da NRMSE frente a cada valor de SNR para cada algoritmo testado.

5.3 Resultados experimentais

De forma a validar os algoritmos apresentados nesta dissertação simulações foram realizadas aumentando gradativamente o nível de complexidade exigido pelos algoritmos. Assim, 56 experimentos foram conduzidos. Seus parâmetros encontram-se resumidos na Tabela D.1, apresentada no Apêndice D, na página 219. Foram variados os seguintes itens, apresentados como colunas na Tabela D.1:

1. Amostras - O número de amostras da saída $\mathbf{x}(k)$ disponíveis para o algoritmo, utilizadas para a obtenção de estimativas das estatísticas de segunda ordem ou para a obtenção de alguma outra estimativa necessária aos algoritmos;
2. Canal ou pulso sísmico
 - (a) Tipo - Tipo de canal ou pulso sísmico utilizado, indicando a natureza do mesmo ou o que ele se dizia reproduzir de forma fiel;
 - (b) Comprimento - O comprimento do canal ou pulso sísmico repassado para os algoritmos de estimação de $s(k)$ e \mathbf{H} . Não era necessariamente o valor exato. Visto que em situações reais este valor não é conhecido era necessário testar o algoritmo para possíveis valores que seriam utilizados em situações práticas. O algoritmo JLSS *não* utilizou este valor porque já possui dentro de si uma estimação conjunta do canal/pulso sísmico e de seu comprimento;
 - (c) Relação com comprimento real - Aqui é dito se o valor do comprimento repassado para os algoritmos é o valor real, um valor subestimado ou um valor superestimado;
3. Tipo de entrada - Indica, no caso de entradas estacionárias, se ela é branca ou colorida, e no caso de entradas determinísticas, a sua natureza. Exemplo: perfil de poço;
4. Taxa de amostragem - Indica qual a taxa de amostragem utilizada no experimento;

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

5. SNR (dB) - Indica qual a faixa de relações sinal-ruído coberta pelo experimento. Exemplo: -10:4:50 representa uma faixa de -10 dB a 50 dB em passos de 4 dB;
6. Algoritmos - Indica quais algoritmos foram utilizados no experimento, da lista de algoritmos disponíveis (TXK, SSM, LP, OPD, MSLP, CMOE, SCM, LSS, JLSS, OP e Wiener). Cabe ressaltar que o algoritmo aqui denominado Wiener é na verdade a deconvolução impulsiva utilizada em processamento de dados sísmicos, com a hipótese de fase mínima, apresentado no Capítulo 1, na página 42. Como os sistemas tratados nestas simulações são SIMO, o algoritmo de deconvolução impulsiva é aplicado a cada uma das saídas individualmente e as estimativas resultantes são somadas posteriormente, com pesos iguais atribuídos a cada uma.
7. Número de simulações - Indica quantas simulações foram realizadas para cada um dos experimentos. Os resultados apresentados para cada experimento são uma média dos resultados obtidos em cada uma destas simulações realizadas.

Gráficos de desempenho para as estimativas da entrada $s(k)$ e do sistema SIMO FIR \mathbf{H} foram então obtidos utilizando as figuras de mérito apresentadas anteriormente.

Para as estimativas da entrada $s(k)$ algumas observações são importantes. Todos os experimentos que utilizavam pulsos sísmicos como sistemas foram realizados incluindo o algoritmo de deconvolução impulsiva de Wiener, muito utilizado em processamento de dados sísmicos e que utiliza a hipótese de fase mínima do sistema. Isto possibilita uma clara comparação entre o desempenho dos algoritmos propostos nesta dissertação com os algoritmos utilizados em situações práticas na área de processamento de dados sísmicos. Além disso, também como referência, uma reta marcando a NRMSE para a soma dos sinais de saída livres de ruído também foi marcada, com o título *sem decon*. Ambos são referências úteis para a interpretação dos gráficos de desempenho apresentados neste capítulo e no Apêndice D. Por fim,

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

todos os algoritmos foram testados para sistemas inversos ZF e MMSE, além de outros intrínsecos aos próprios algoritmos como o CMOE e o OP. Para todos os algoritmos que não calculassem o sistema inverso MMSE diretamente, incluindo os determinísticos, o mesmo foi obtido pela equação (3.36) do Capítulo 3, página 70. Para o sistema inverso ZF, quando o mesmo não era calculado diretamente pelo algoritmo, a primeira linha da pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz $\mathbf{H}^{(K)}$ era utilizada, o que fornecia um sistema ZF com atraso zero de estimação. Em todos os outros casos o sistema inverso ou a estimativa direta de $s(k)$ calculados dentro dos próprios algoritmos foram utilizados.

Ainda, como forma de poupar o leitor, neste capítulo são apresentados apenas os resultados mais significativos. Para uma descrição completa de todos os experimentos conduzidos o Apêndice D deve ser consultado.

5.3.1 Sistema SIMO FIR sem zeros próximos ou em comum

Os primeiros experimentos realizados procuram validar os algoritmos desenvolvidos nos capítulos 3 e 4 para situações que respeitem claramente as hipóteses utilizadas pelos mesmos. Assim o sistema simples dado por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0,3016544496 & -0,6033088993 & -0,3016544496 & 0,1508272248 & 0,1508272248 \\ 0,3016544496 & -0,3016544496 & 0 & 0,3016544496 & 0,3016544496 \\ 0,3016544496 & -0,3016544496 & -0,3016544496 & -0,3016544496 & -0,1508272248 \\ 0,3016544496 & -0,3016544496 & 0,3016544496 & 0,1206617798 & 0,0603308899 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

foi utilizado. A sua resposta em frequência assim como a sua resposta ao impulso de forma gráfica está apresentada na Figura D.1, na página 220 do Apêndice D. Algumas comparações que merecem destaque seguem.

Aumento do número de amostras disponíveis

Quando comparamos por exemplo os experimentos A.01 e A.02 (figuras 5.1 e 5.2)¹ percebemos que o platô que caracteriza a qualidade das estimativas tanto de $s(k)$ como de \mathbf{H} dos algoritmos estatísticos para SNR muito alto, em ambos

¹Para figuras ampliadas, consultar páginas 232 e 233 do Apêndice D

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

os experimentos, desce quando passamos do experimento A.01 para o experimento A.02. Isto é claramente devido ao número de amostras disponíveis para a estimativa das estatísticas de segunda ordem. Os algoritmos estatísticos, a saber TXK, SSM, LP, OPD, MSLP e CMOE, não podem convergir perfeitamente para um número finito de amostras. Eles apenas convergem perfeitamente para *estatísticas de segunda ordem perfeitas*. Isto vai se tornando realidade quando aumentamos o número de amostras disponíveis, o que acontece quando passamos do experimento A.01, com 200 amostras disponíveis, para o experimento A.02, com 1000 amostras disponíveis. Cabe lembrar que este é apenas um exemplo pois efeitos similares acontecem quando comparamos os experimentos A.03 e A.04, A.05 e A.06, A.07 e A.08, A.09 e A.10, A.11 e A.12.

Além disso para os algoritmos determinísticos a ausência de um platô como o encontrado nos algoritmos estatísticos, para relações sinal-ruído muito altas, demonstra claramente a tendência de *convergência perfeita para um número finito de amostras*. Simulações sem ruído aditivo comprovam este fato.

Comprimento superestimado e subestimado

Quando o comprimento da resposta ao impulso do sistema repassado para os algoritmos era superestimado ou subestimado, poucos foram os algoritmos que funcionaram. Conforme já era previsto pela teoria, muitos não foram capazes de convergir (figuras 5.3 e 5.4)². A partir deste resultado pôde-se concluir que os algoritmos TXK, LP, MSLP, CMOE, JLSS e OP eram os algoritmos mais promissores visto que conseguiam de alguma forma lidar com problemas na estimativa do comprimento da resposta ao impulso.

²Para figuras ampliadas, consultar páginas 234 e 236 do Apêndice D

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

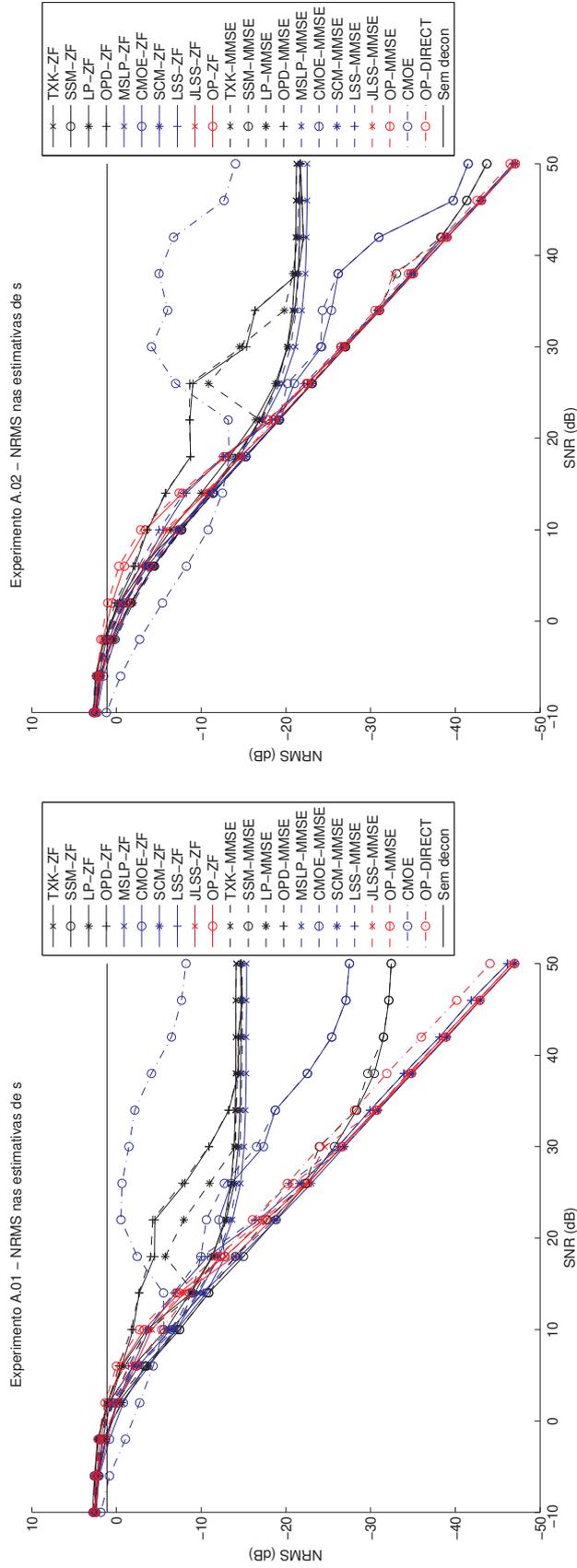


Figura 5.1: Estimativas do sinal de entrada $s(k)$. Comparação entre os experimentos A.01 e A.02, realizados com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco e $N = 1000$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco respectivamente.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

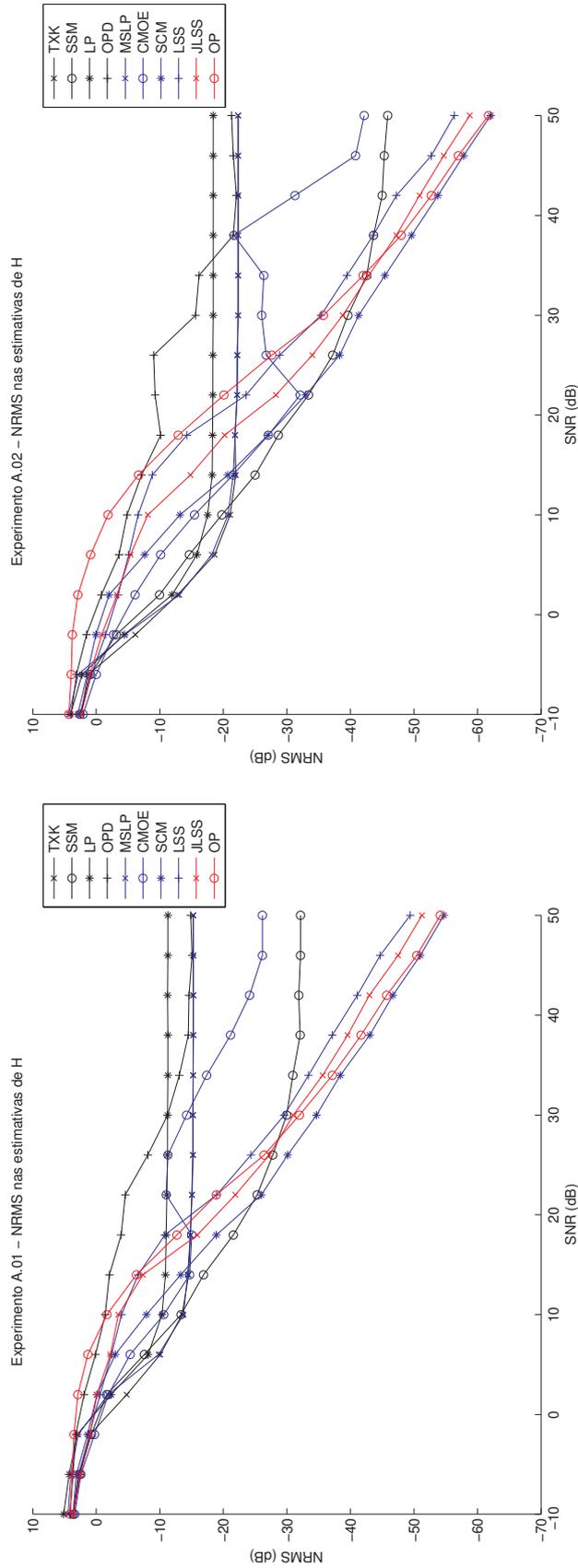


Figura 5.2: Estimativa do sistema SIMO FIR H. Comparação entre os experimentos A.01 e A.02, realizados com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco e $N = 1000$, $M = 5$ (exato), $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco respectivamente.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

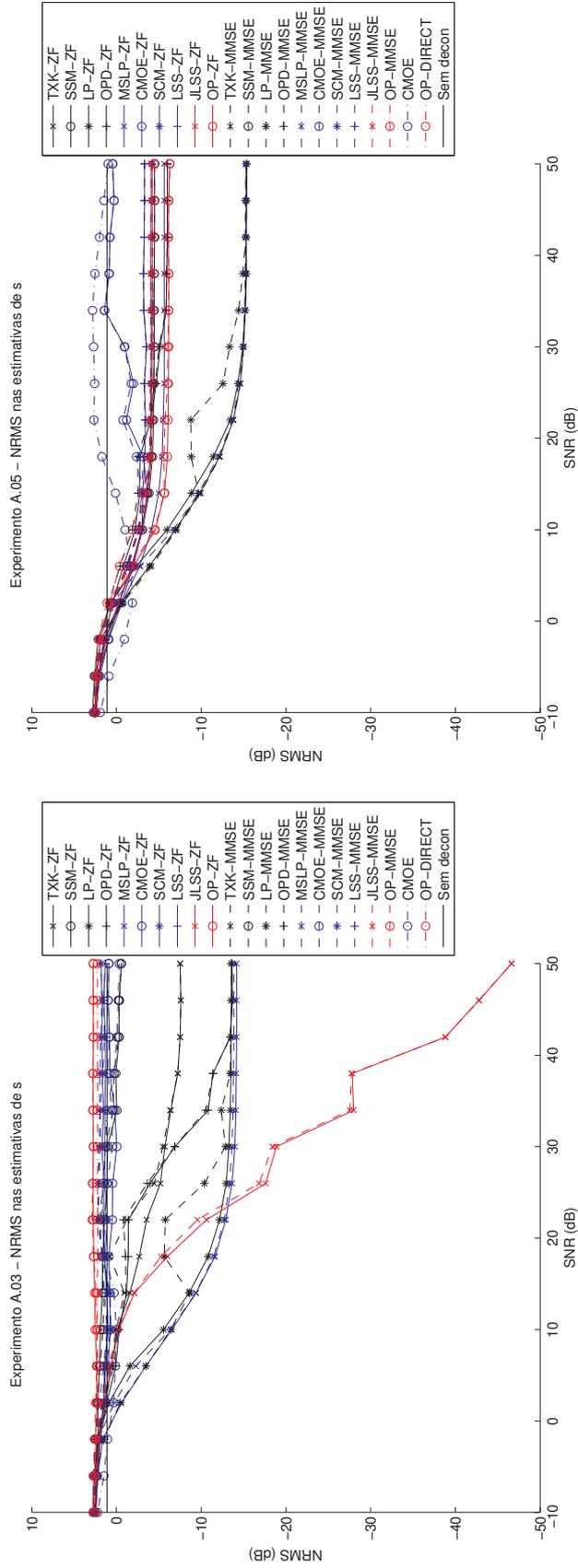


Figura 5.3: Estimativas do sinal de entrada $s(k)$. Comparação entre os experimentos A.03 e A.05, realizados com $N = 200$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ branco e $N = 200$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ branco respectivamente.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

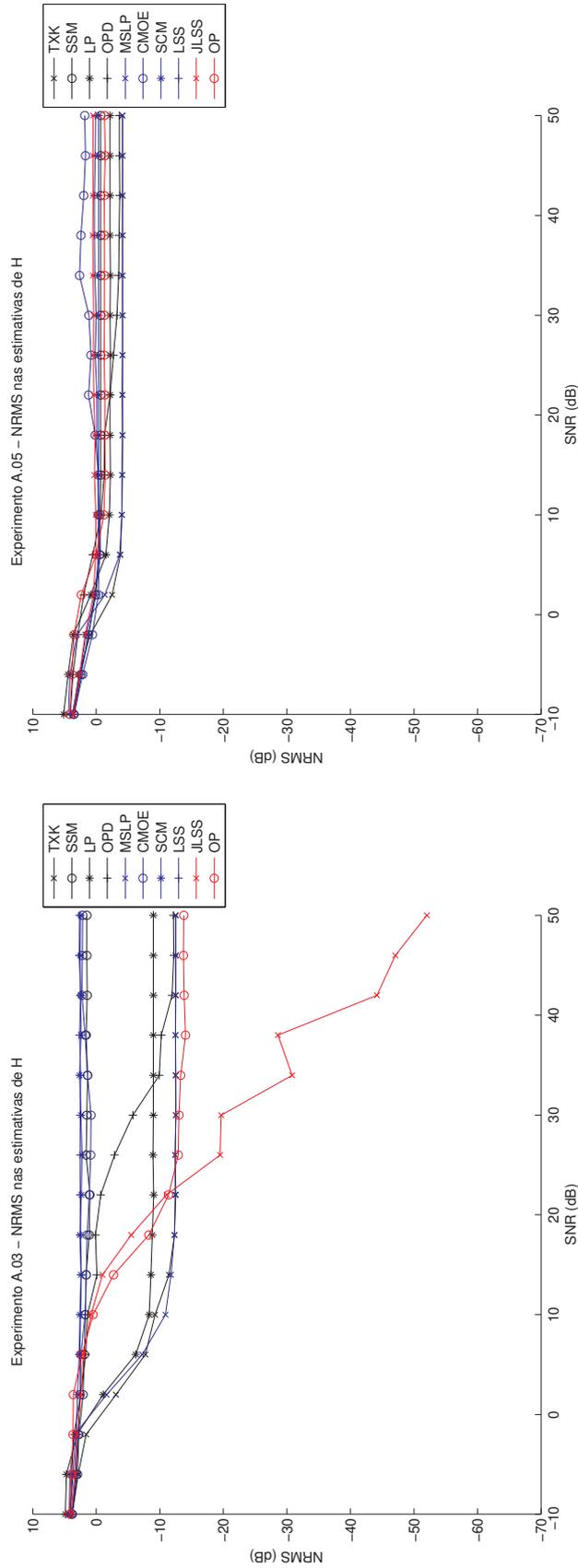


Figura 5.4: Estimativa do sistema SIMO FIR H. Comparação entre os experimentos A.03 e A.05, realizados com $N = 200$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ branco e $N = 200$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ branco respectivamente.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Entrada colorida

Os experimentos A.07 a A.12 utilizaram entradas estacionárias coloridas. O filtro conformador utilizado para obter estas entradas a partir de sinais estacionários brancos foi o apresentado na Figura D.2, encontrada na página 221 do Apêndice D. Este filtro procurava imitar o envólucro de frequência encontrado normalmente em pulsos sísmicos de experimentos geofísicos para exploração de petróleo. O que pode se concluir quando comparamos os mesmos experimentos com entradas coloridas e brancas é que de certa forma o filtro conformador era muito brando, o que fez com que os resultados apresentados pelos experimentos A.07 a A.12, com entrada colorida, se aproximassem muito dos resultados dos experimentos A.01 a A.06 respectivamente, com entrada branca. Assim, o resultado esperado de que os algoritmos SSM, CMOE e todos os algoritmos determinísticos (SCM, LSS, JLSS e OP) se destacariam ficou mascarado. Um exemplo desta comparação é posto nas figuras 5.5 e 5.6, que compara os experimentos A.01 e A.07. O resultado dos outros experimentos e figuras ampliadas dos experimentos A.01 e A.07 encontram-se no Apêndice D, nas páginas 232 a 243. Vale lembrar que muito embora neste caso os experimentos aqui apresentados não terem sido conclusivos, ainda assim as referências (MOULINES et al., 1994), (MOULINES et al., 1995), (TSATSANIS; XU, 1997), (LIU; XU; TONG, 1994), (TONG; ZHAO, 1998), (ZHAO; TONG, 1999), (TONG; ZHAO, 1999) e (YU; TONG, 2001) confirmam esta capacidade de convergência para entradas estacionárias e coloridas.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

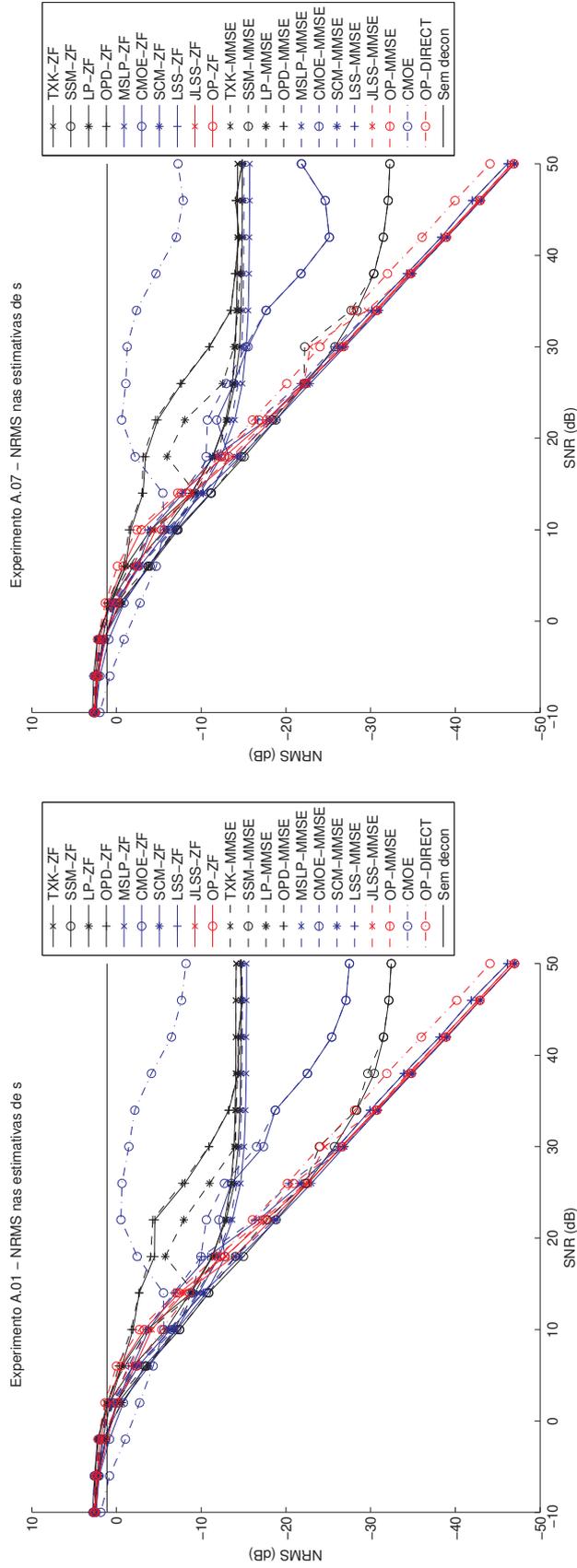


Figura 5.5: Estimativa do sinal de entrada $s(k)$. Comparação entre os experimentos A.01 e A.07, realizados com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco e $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ colorido respectivamente.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

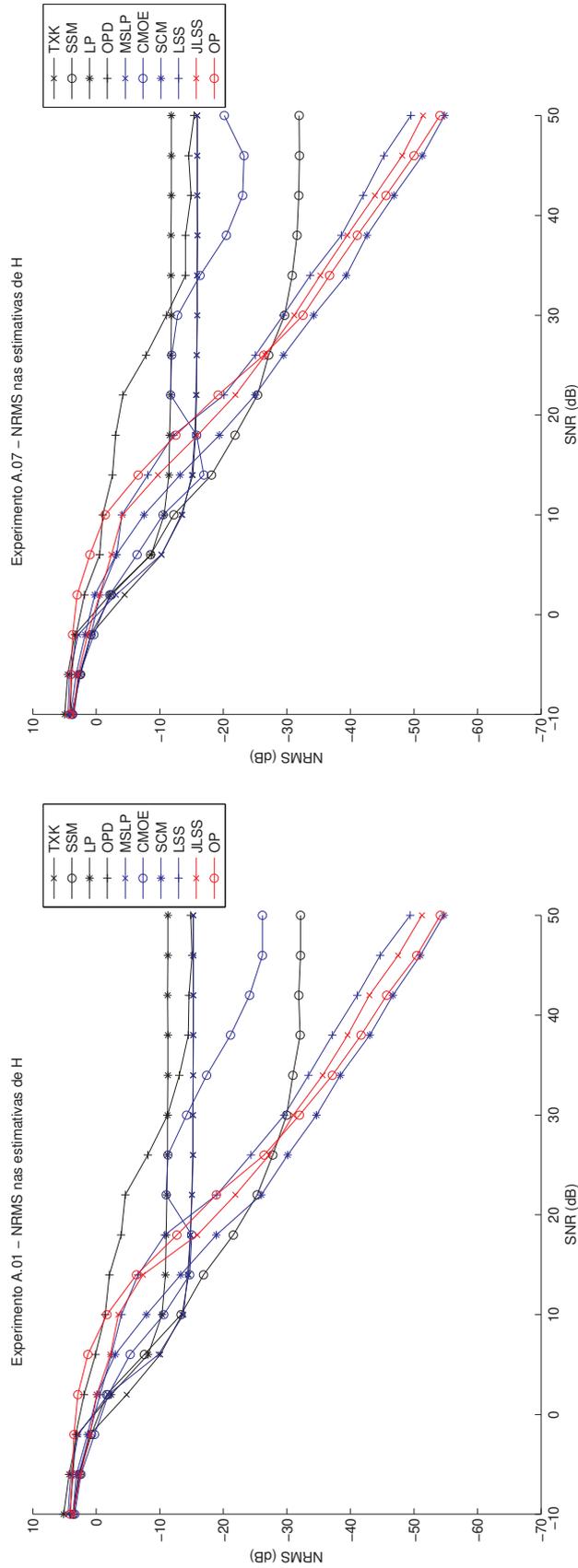


Figura 5.6: Estimativa do sistema SIMO FIR H. Comparação entre os experimentos A.01 e A.07, realizados com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco e $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ colorido respectivamente.

5.3.2 Pulsos sísmicos reais e diferentes

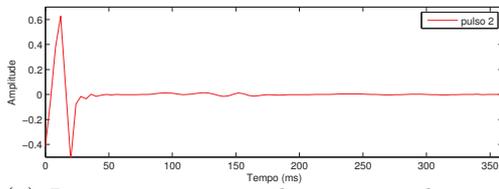
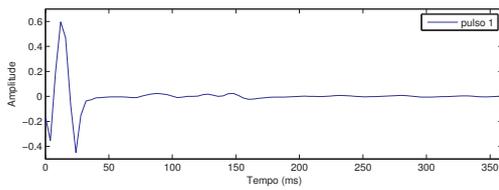
Após uma série de experimentos descritos no Apêndice D, experimentos utilizando dois pulsos sísmicos reais mas diferentes, que garantiam uma certa separação entre seus zeros, foram conduzidos. Os gráficos dos pulsos sísmicos amostrados a 4 ms e 2 ms encontram-se lado a lado na Figura 5.7. Já a entrada determinística, um perfil de poço, amostrada a 4 ms e 2 ms encontra-se nas figuras D.7 e D.11 respectivamente, nas páginas 226 e 231 do Apêndice D.

Foram realizadas 10 simulações para cada experimento, onde se utilizou como entrada para os sistemas amostrados a 4 ms e 2 ms as entradas determinísticas, os perfis de poço, amostrados a 4 ms e 2 ms. As 10 simulações para cada experimento tinham como objetivo possibilitar se retirar uma média do desempenho destas pois ruído aditivo aleatório foi adicionado para simular as relações sinal-ruído desejadas para os experimentos.

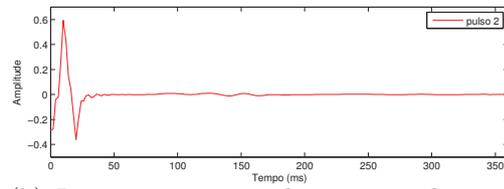
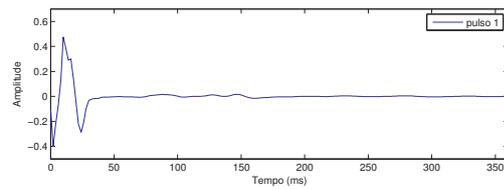
Após se utilizar janelas de observação de 60 ms, 120 ms e 200 ms, pôde-se constatar que os melhores resultados obtidos utilizaram a janela de 60 ms. As figuras 5.8 e 5.9 apresentam estes resultados. Para a taxa de amostragem de 4 ms o desempenho da inversão SIMO com os algoritmos LP-ZF e MSLP-MMSE se mostrou superior ao da inversão WIENER-MMSE-SISO, a deconvolução impulsiva dos sinais independentemente (hipótese SISO), com posterior soma dos mesmos, realizada pela teoria de Wiener, que utiliza a hipótese de fase mínima. Já para 2 ms, o mesmo não foi observado. Mas quando se analisa a identificação SIMO, esta foi superior para ambas as taxas de amostragem, de 4 ms e 2 ms.

Ainda como forma de ressaltar o potencial dos algoritmos, observemos as estimativas obtidas no experimento H.01 para relação sinal-ruído de 18 dB. Analisando da esquerda para a direita a Figura 5.10, temos primeiramente o sinal de entrada original livre de ruído, o perfil de poço. Em seguida seguem as 10 realizações do experimento para relação sinal-ruído de 18 dB, apresentando a cada quatro sinais os dois sinais de saída $x_1(k)$ e $x_2(k)$ da realização, o sinal de entrada

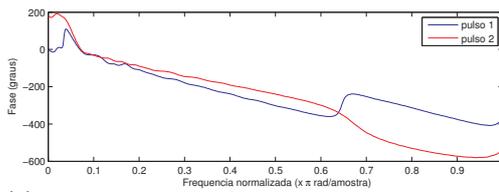
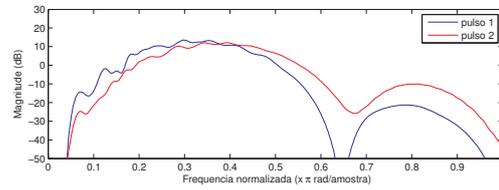
5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS



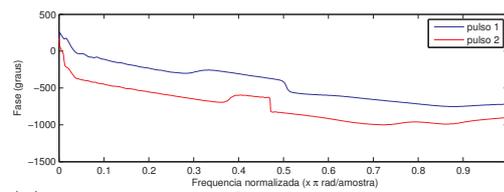
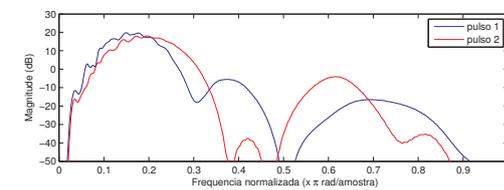
(a) Respostas ao impulso amostradas a 4 ms.



(b) Respostas ao impulso amostradas a 2 ms.



(c) Respostas em freqüência para período de amostragem de 4 ms.



(d) Respostas em freqüência para período de amostragem de 2 ms.

Figura 5.7: Sistema SIMO FIR amostrado a 2 ms e 4 ms.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

$s(k)$ estimado pelo algoritmo LP-ZF e o sinal de entrada estimado pelo algoritmo WIENER-MMSE-SISO. Enquanto o algoritmo LP-ZF recupera de forma bastante razoável o sinal $s(k)$, o algoritmo WIENER-MMSE-SISO ainda tem certas dificuldades que poderiam ser atribuídas por exemplo à dificuldade do algoritmo em lidar com a fase do sinal. Mais três figuras apresentam separadamente os sinais de saída das 10 realizações (Figura 5.11), as estimativas de $s(k)$ pelo algoritmo LP-ZF (Figura 5.12) e as estimativas de $s(k)$ pelo algoritmo WIENER-MMSE-SISO (Figura 5.13). Por fim a Figura 5.14 compara as estimativas de \mathbf{H} feitas pelos algoritmos MSLP e WIENER para a mesma relação sinal ruído. A estimativa do algoritmo MSLP é claramente superior.

Por fim é importante ressaltar que apenas algoritmos estatísticos foram utilizados pois a janela de observação necessária para os algoritmos determinísticos é um tanto quanto grande para o problema de processamento de dados sísmicos. Ainda assim seria interessante testar o desempenho dos algoritmos determinísticos frente aos utilizados aqui para janelas de observação curtas, onde o número de amostras disponíveis ainda é suficiente para o funcionamento dos mesmos.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

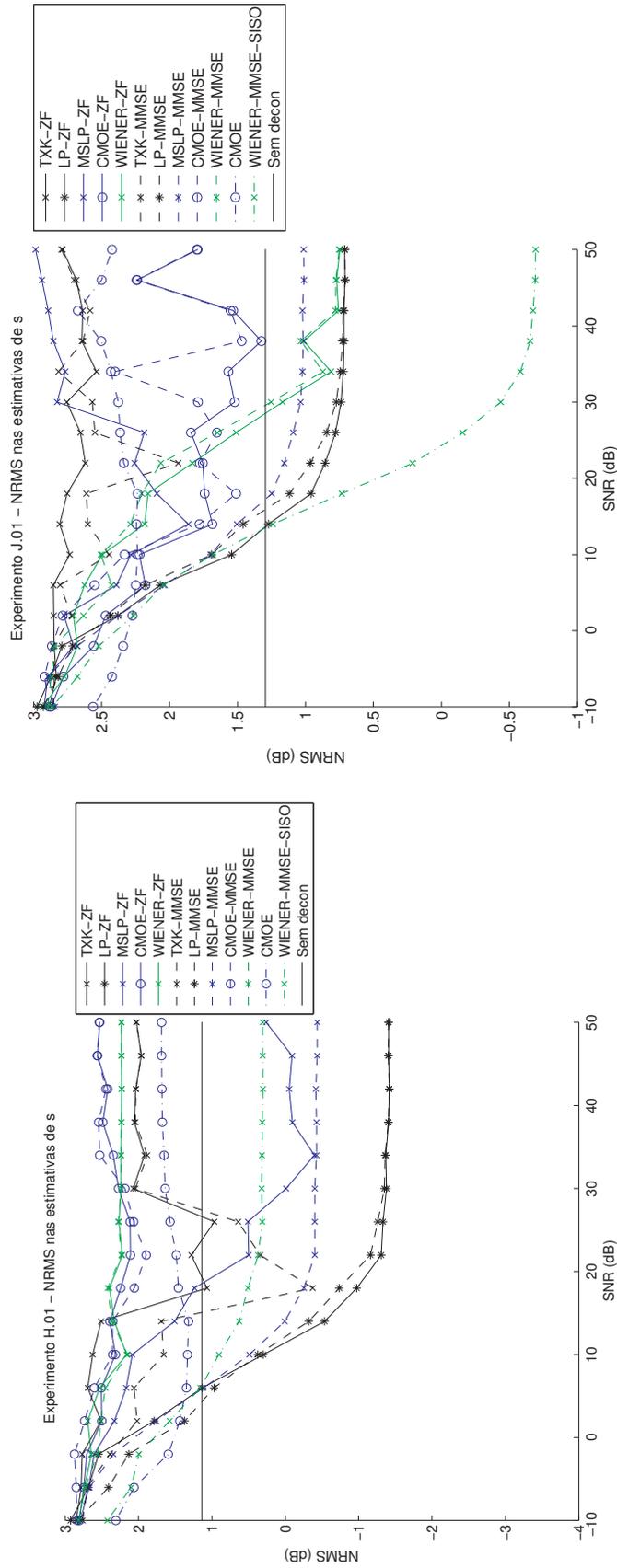


Figura 5.8: Estimativa do sinal de entrada $s(k)$. Comparação entre os experimentos H.01 e J.01, realizados com taxas de amostragem de 4 ms e 2 ms respectivamente

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

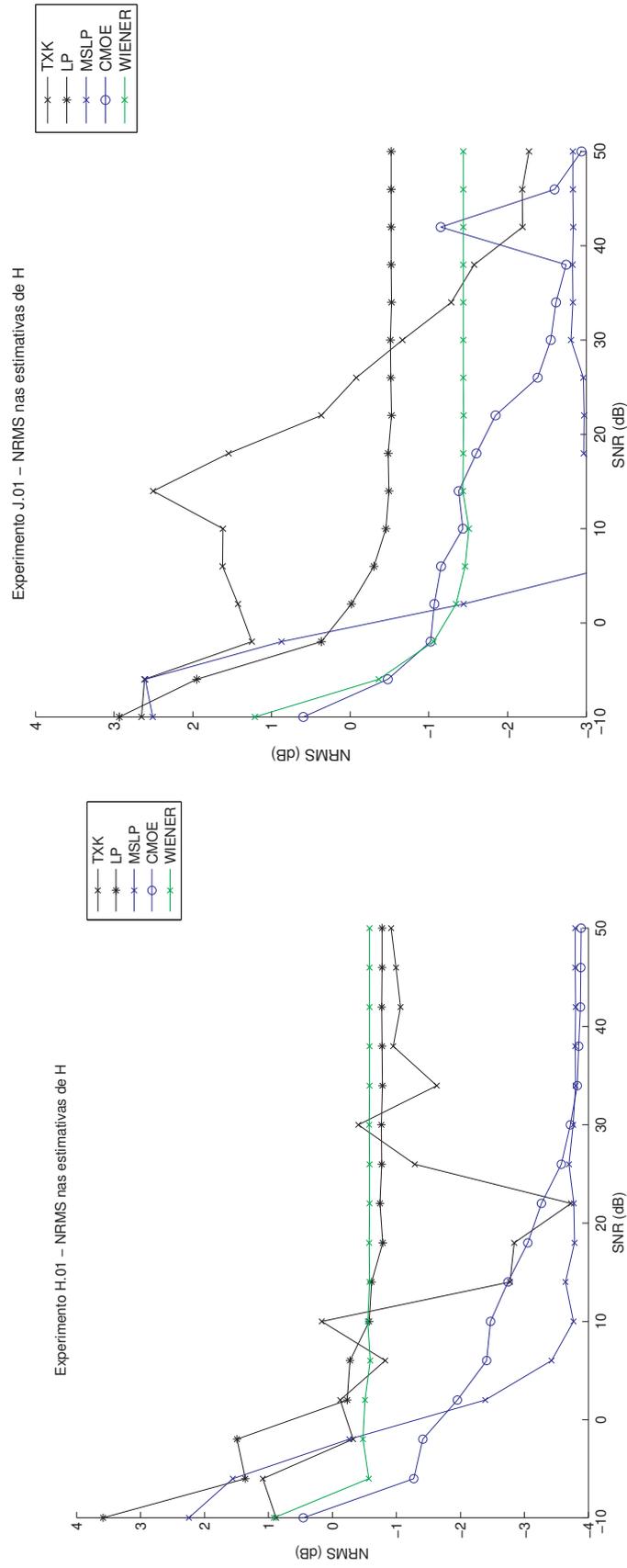


Figura 5.9: Estimativa do sistema SIMO FIR H. Comparação entre os experimentos H.01 e J.01, realizados com taxas de amostragem de 4 ms e 2 ms respectivamente

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

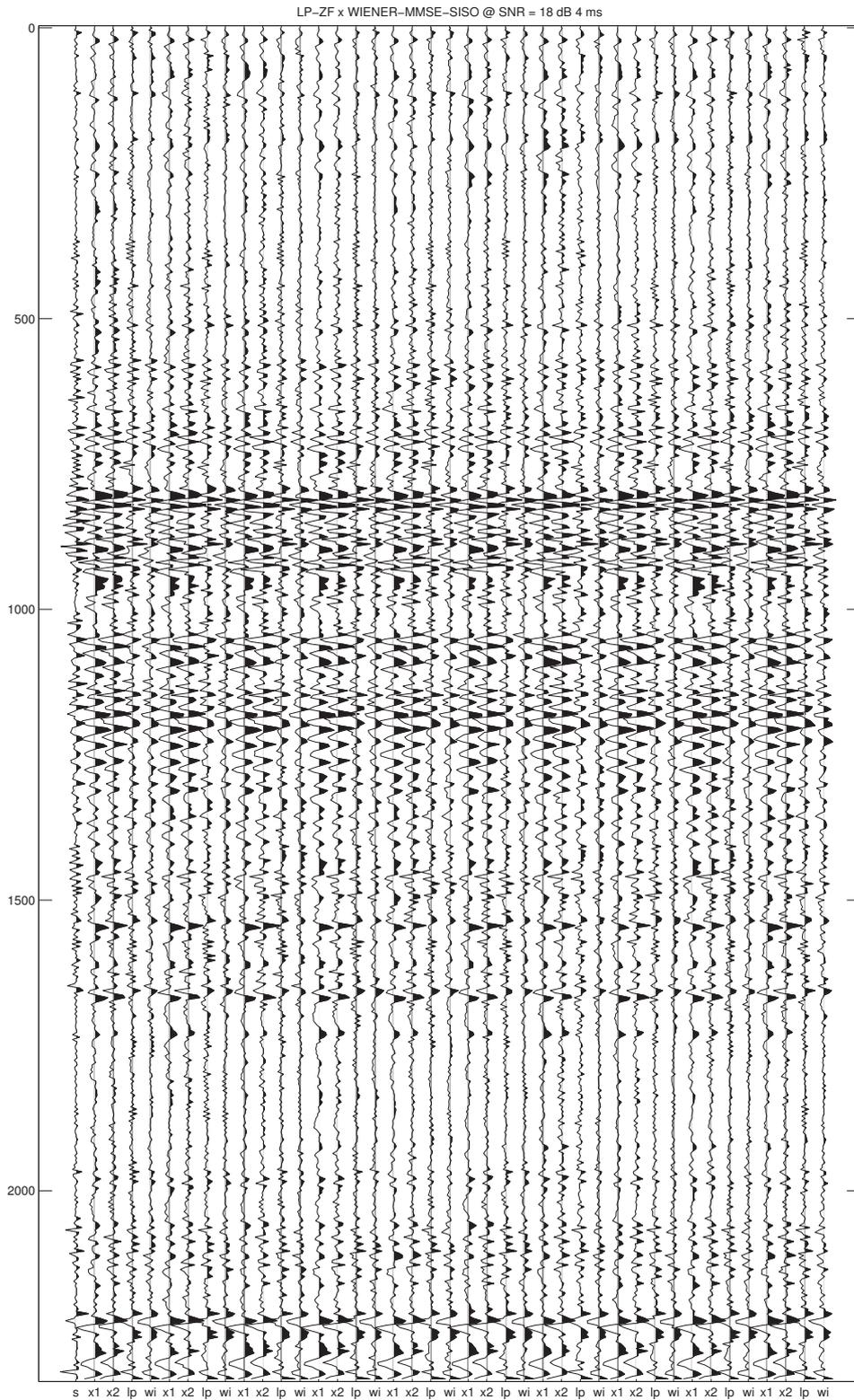


Figura 5.10: Comparação entre as estimativas do sinal de entrada determinístico $s(k)$ dos algoritmos LP-ZF e WIENER-MMSE-SISO, para 18 dB de relação sinal-ruído.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

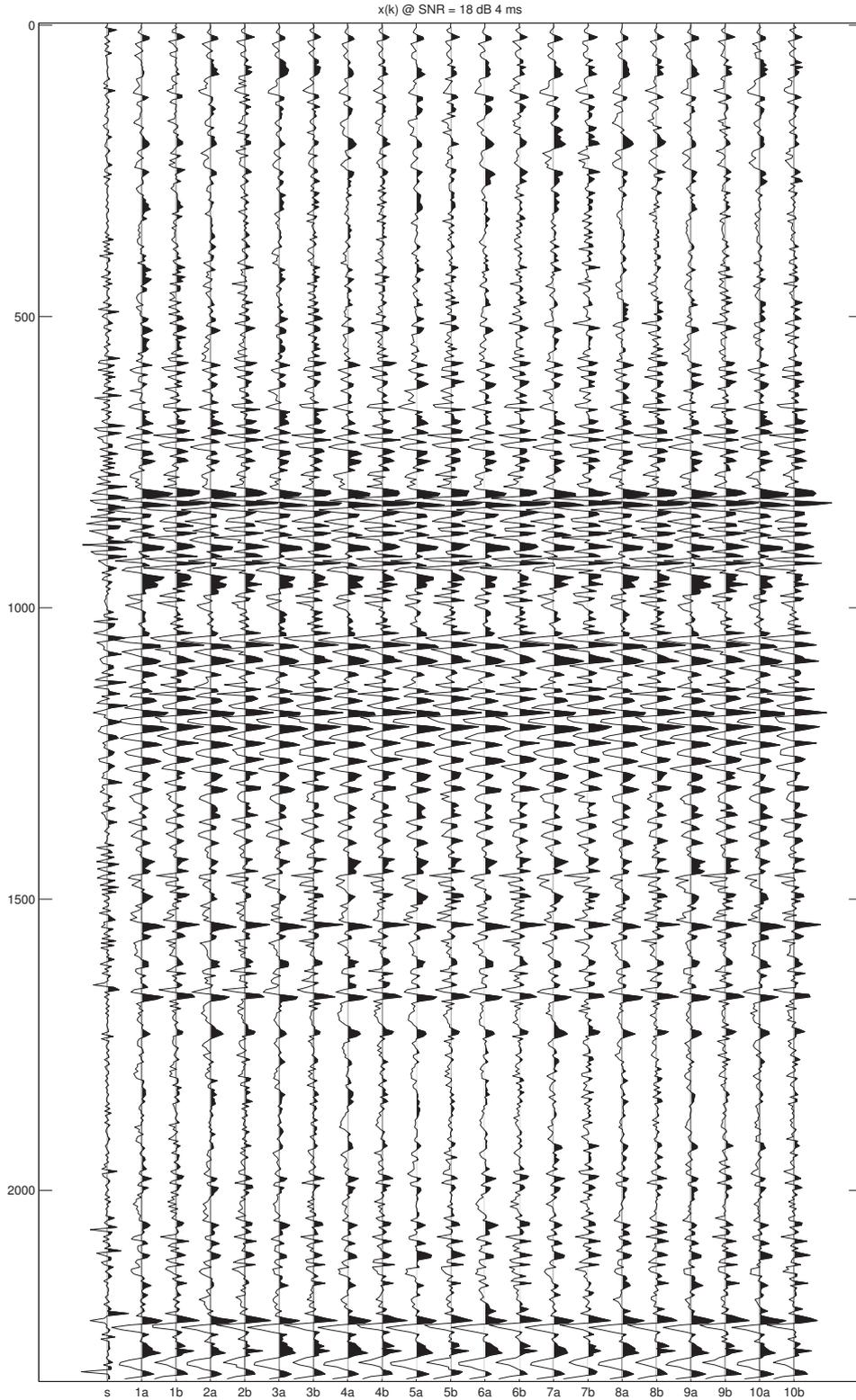


Figura 5.11: Realizações de $\mathbf{x}(k)$ utilizadas para a simulação do experimento H.01, a 18 dB de relação sinal-ruído.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

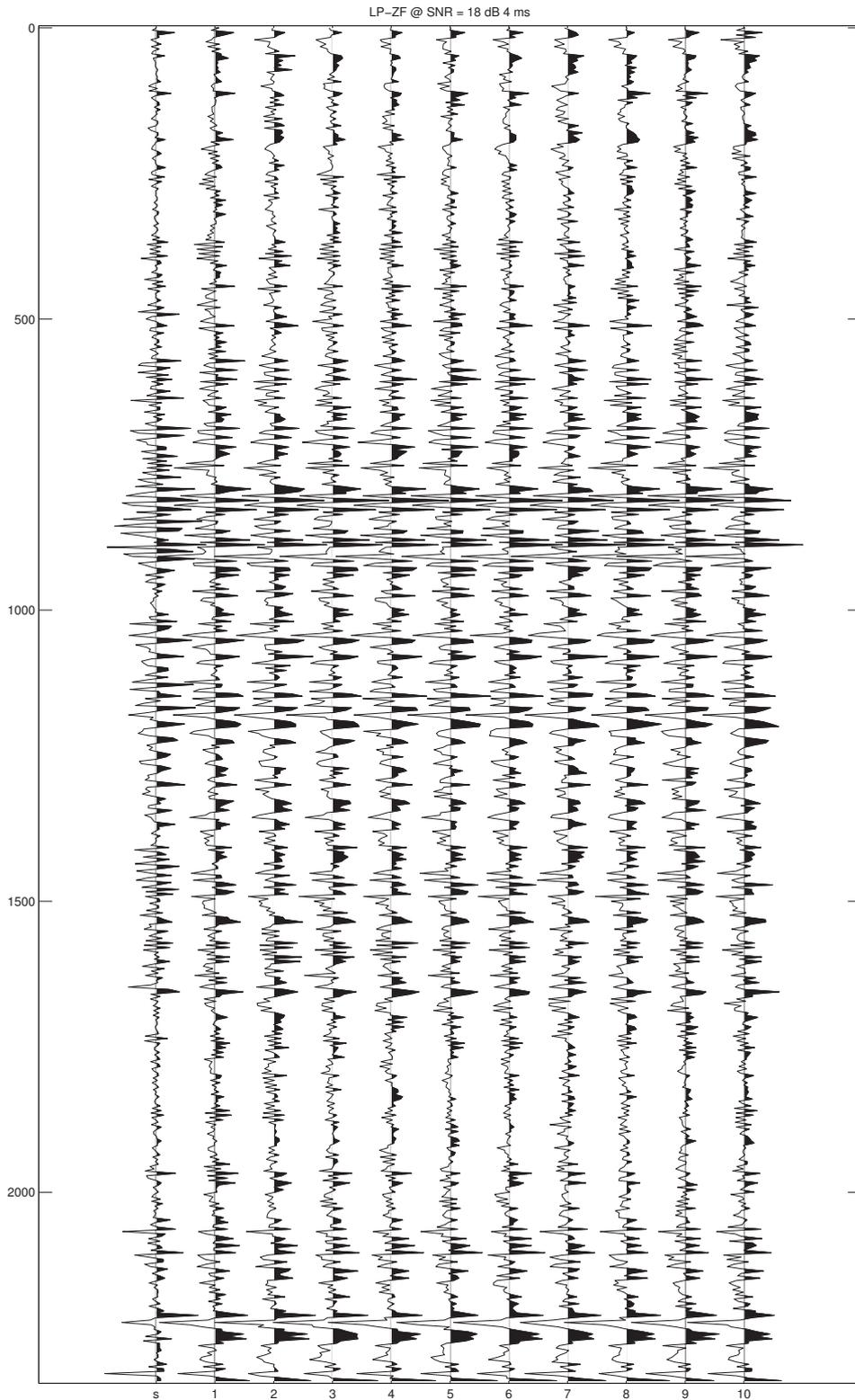


Figura 5.12: Estimativa do sinal de entrada determinístico $s(k)$ pelo algoritmo LP-ZF, para 18 dB de relação sinal-ruído.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

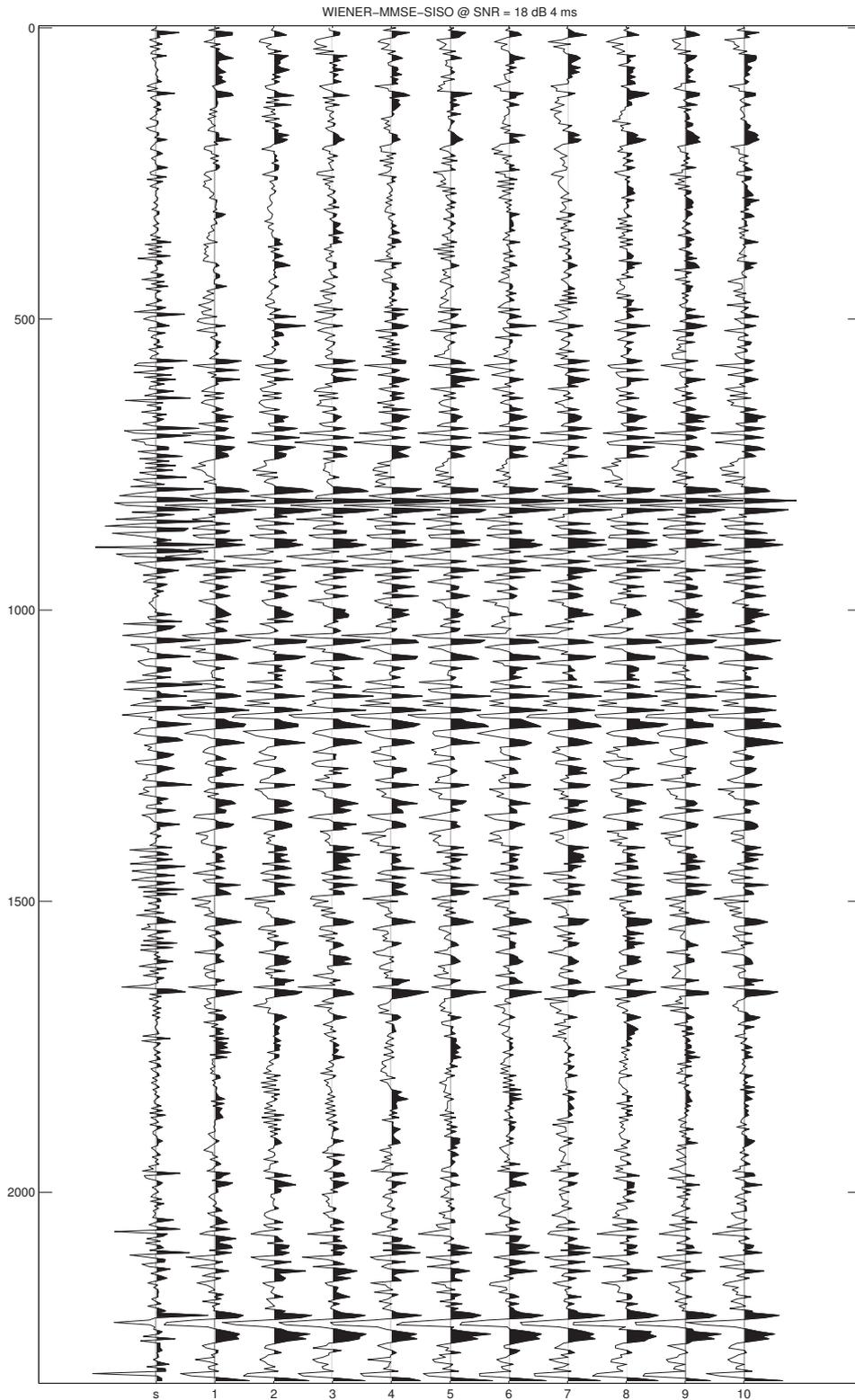


Figura 5.13: Estimativa do sinal de entrada determinístico $s(k)$ pelo algoritmo WIENER-MMSE-SISO, para 18 dB de relação sinal-ruído.

5.3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

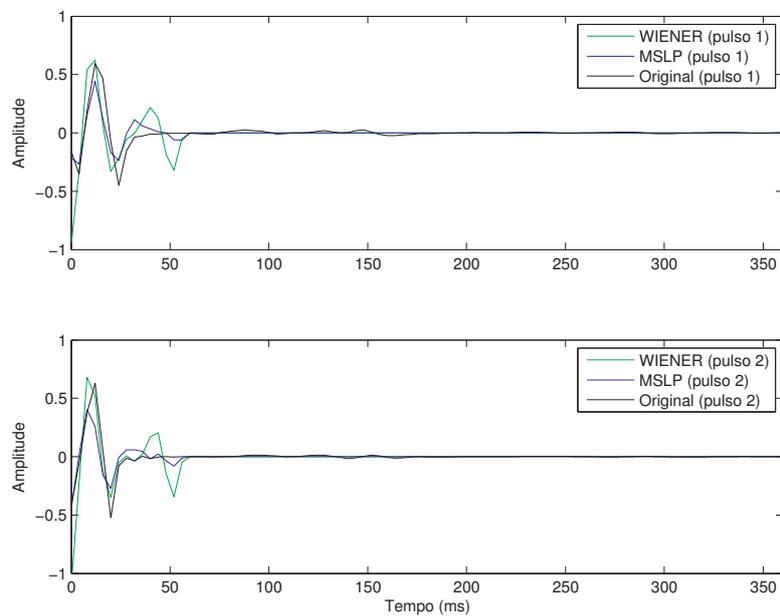


Figura 5.14: Estimativas de \mathbf{H} obtidas para uma realização do experimento H.01 com relação sinal-ruído de 18 dB, para os algoritmos MSLP e WIENER, comparadas com \mathbf{H} original.

Capítulo 6

Conclusões

Conforme exposto anteriormente esta dissertação se propõe a apresentar os problemas de deconvolução em processamento de dados sísmicos e de equalização de sistemas de comunicação digital sob uma ótica única, aproximando ambas as áreas. Para isso o Capítulo 1 possui especial relevância visto que apresenta de forma resumida conceitos de ambas as áreas. O Capítulo 2 apresenta então a modelagem matemática de sistemas SIMO FIR, presente em ambos os problemas: deconvolução em processamento de dados sísmicos e equalização de sistemas de comunicação digitais. Os algoritmos apresentados no Capítulo 3 provam a possibilidade de deconvolução de pulsos sísmicos, o sistema SIMO FIR, sem a hipótese de fase mínima e apenas com estatísticas de segunda ordem e a hipótese de não haver zeros em comum, uma contribuição considerável para a área de processamento de dados sísmicos. No Capítulo 4 ainda se vai mais longe provando-se para sistemas SIMO FIR sem zeros em comum a possibilidade de deconvolução perfeita dos pulsos sísmicos com um número finito de amostras da saída, para ruído nulo. Os resultados teóricos mais importantes são então confirmados através de simulações no Capítulo 5. Quando temos sistemas que atendam perfeitamente as hipóteses dos algoritmos os resultados se mostram excelentes. Para os sistemas sísmicos utilizados obtemos apenas resultados iniciais que indicam algumas possibilidades de uso, mas que também apontam para algumas deficiências ainda a serem supe-

radas, principalmente quanto à capacidade de convergência das estimativas para um número reduzido de amostras disponíveis. Mas cabe lembrar que os testes aqui realizados estão longe de serem exaustivos. Os algoritmos determinísticos desta dissertação ainda precisam ser aplicados ao problema sísmico, mesmo que não sejam práticos devido às suas janelas de tempo necessárias serem relativamente grandes, pois podem representar convergência mais rápida e precisa para um número finito de amostras. Resultados positivos poderiam indicar pesquisas posteriores com o objetivo de criar especificamente algoritmos determinísticos para o problema de processamento de dados sísmicos. Isto obviamente não descarta novos algoritmos estatísticos robustos a parâmetros normalmente exigidos pela aplicação em processamento de dados sísmicos. Robustez a erros na estimativa da ordem do sistema, ao mal condicionamento do sistema para a hipótese de não haver zeros em comum, à deficiência de posto em algumas matrizes chave como \mathbf{R}_x e ao próprio número limitado de amostras disponíveis são então características desejadas de novos algoritmos. Algumas possibilidades para o problema sísmico são:

1. A utilização da concentração de energia nos primeiros instantes do pulso sísmico (mas ainda sem a fase mínima) para a criação de algoritmos específicos (idéias iniciais podem ser encontradas em (XU; NG, 2002));
2. A utilização da hipótese de fase mínima apenas para os zeros em comum do sistema, já explorado em (TUGNAIT, 1999) por exemplo;
3. A criação de métodos que contornem o problema de mal condicionamento da matriz \mathbf{R}_x criando para isso sistemas inversos diferentes dos tradicionais ZF e MMSE. O algoritmo CMOE por exemplo apresenta um destes sistemas inversos diferentes, muito embora tenha ainda sérios problemas de mal condicionamento.

Outra possibilidade que deve ser considerada é a utilização de modelos variantes no tempo. (TUGNAIT; LUO, 2004) considera o problema de identificação cega de sistemas SIMO FIR variantes no tempo para um modelo de variação em

decaimento exponencial, semelhante ao efeito modelado pela filtragem Q inversa de processamento de dados sísmicos. Para isso o algoritmo necessita apenas das estatísticas de segunda ordem do sinal de saída e do conhecimento destes decaimentos exponenciais. É uma solução recente que transforma o problema SIMO FIR variante no tempo em um problema MIMO FIR invariante no tempo, com algumas nuances específicas.

Apêndice A

Prova do Teorema 2.5.1

Neste apêndice é apresentada a prova do Teorema 2.5.1, página 58, um resultado importantíssimo da teoria de identificação e inversão de sistemas SIMO FIR. A seguinte prova foi apresentada originalmente em (SERPEDIN; GIANNAKIS, 1999) e é aqui apresentada com as devidas alterações de notação.

Começemos por alguns esclarecimentos. Para cada sistema SISO FIR $h_l(k)$ temos uma matriz de filtragem toeplitz $\mathbf{H}_l^{(K)}$ associada, dada por (2.5). Podemos então formar a matriz $\mathbf{H}^{(K)}$ toeplitz por blocos, dada por (2.9), fazendo

$$\mathbf{H}^{(K)} = \mathbf{E} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^{(K)} \\ \mathbf{H}_2^{(K)} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_L^{(K)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde \mathbf{E} é uma matriz de permutação específica capaz de manter a igualdade. Denote o espaço imagem e o espaço nulo de $\mathbf{H}_l^{(K)}$ por $\mathcal{I}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$ e $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$ respectivamente, e o grau de $\dot{h}_l(z) \triangleq \sum_{k=0}^{M-1} h_l(k)z^{-k}$ por $\text{grau}\{\dot{h}_l(z)\}$. Precisamos primeiramente da seguinte proposição.

Proposição A.0.1. *Caso $\text{grau}\{\dot{h}_l(z)\} = M - 1$, então uma base para $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$ é dada por $M - 1$ vetores generalizados de Vandermonde correspondentes aos zeros de $\dot{h}_l(z)$. Se $\text{grau}\{\dot{h}_l(z)\} = m_l < M - 1$, então uma base para $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$ é obtida*

adicionando ao conjunto de m_l vetores generalizados de Vandermonde correspondentes aos zeros de $\dot{h}_l(z)$ $M-1-m_l$ vetores dados pelas últimas $M-1-m_l$ colunas da matriz identidade \mathbf{I}_{K+M-1} .

Demonstração. Primeiramente vamos obter uma caracterização do espaço nulo de $\mathbf{H}_l^{(K)}$, $1 \leq l \leq L$ quando $\text{grau}\{\dot{h}_l(z)\} = M-1$. Para isso será mostrado que neste caso o espaço nulo da matriz $\mathbf{H}_l^{(K)}$ é gerado pelos vetores generalizados de Vandermonde correspondentes aos zeros do polinômio $\dot{h}_l(z)$. De fato, se r é um zero de multiplicidade p de $\dot{h}_l(z)$, então $\dot{h}_l(r) = \frac{\partial \dot{h}_l(r)}{\partial(r)} = \dots = \frac{\partial^{p-1} \dot{h}_l(r)}{\partial(r)^{p-1}} = 0$ e $\frac{\partial^p \dot{h}_l(r)}{\partial(r)^p} \neq 0$. Os vetores generalizados de Vandermonde correspondentes ao zero r são dados pelas colunas da matriz

$$\mathbf{V}_l(r) \stackrel{\triangle}{=} \begin{matrix} (K+M-1 \times p) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ r & 1 & & 0 \\ r^2 & 2r & & 0 \\ r^3 & 3r^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r^{K+M-2} & (K+M-2)r^{K+M-3} & \dots & \frac{(K+M-2)!r^{K+M-1-p}}{(K+M-1-p)!(p-1)!} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (\text{A.2})$$

A i -ésima coluna da matriz $\mathbf{V}_l(r)$ é dada pelo vetor

$$\mathbf{v}_l^{(i)}(r) \stackrel{\triangle}{=} \begin{matrix} (K+M-1 \times 1) \\ \left[\mathbf{0}_{1,i-1} \quad 1 \quad r \quad \dots \quad \frac{(K+M-2)!r^{K+M-1-i}}{(K+M-1-i)!(i-1)!} \right]^T \end{matrix} \quad (\text{A.3})$$

e é obtida diferenciando $i-1$ vezes a primeira coluna de $\mathbf{V}_l(r)$ e normalizando o resultado com $(i-1)!$.

Como $\frac{\partial^i \dot{h}_l(r)}{\partial r^i} = 0$ para $i = 0, \dots, p-1$, temos que $\mathbf{H}_l^{(K)} \mathbf{v}_l^{(i)}(r) = 0$ para $i = 0, \dots, p-1$ e logo

$$\mathbf{H}_l^{(K)} \mathbf{V}_l(r) = \mathbf{0}_{K+M-1,p}. \quad (\text{A.4})$$

Assim $\mathcal{I}\{\mathbf{V}_l(r)\} \subseteq \mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$. Lembrando que $\mathbf{H}_l^{(K)}$ é uma matriz triangular por cima temos então que ela possui posto completo por linha. Assim $\dim\{\mathcal{I}[\mathbf{H}_l^{(K)}]\} = K$ e logo $\dim\{\mathcal{I}[\mathbf{H}_l^{(K)}]\} + \dim\{\mathcal{N}[\mathbf{H}_l^{(K)}]\} = K+M-1$ levando a $\dim\{\mathcal{N}[\mathbf{H}_l^{(K)}]\} = M-1$. Considere que os zeros de $\dot{h}_l(r)$ são r_1, r_2, \dots, r_s com as correspondentes

multiplicidades p_1, p_2, \dots, p_s (e por conseqüência $\sum_{i=1}^s p_i = M - 1$). Denotemos então a matriz generalizada de Vandermonde por

$$\mathbf{V}_l \underset{(K+M-1 \times s)}{\triangleq} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_l(r_1) & \mathbf{V}_l(r_2) & \cdots & \mathbf{V}_l(r_s) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Fica claro que ela respeita

$$\mathbf{H}_l^{(K)} \mathbf{V}_l = \mathbf{0}_{K+M-1, s}. \quad (\text{A.6})$$

Queremos com estes resultados provar que

$$\mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\} = \mathcal{I}\{\mathbf{V}_l\}, \quad (\text{A.7})$$

o que pode ser feito a partir da proposição A.0.2.

Proposição A.0.2. *A matriz \mathbf{V}_l tem posto completo por coluna e*

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{0}_{M-1, K} \end{bmatrix} \mathbf{V}_l \right\} = \prod_{s \geq i \geq j \geq 1} (r_i - r_j)^{p_i p_j} \neq 0. \quad (\text{A.8})$$

A proposição A.0.2 mostra que as colunas de \mathbf{V}_l são linearmente independentes e por isso constituem uma base para $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$ o que prova a primeira parte da proposição A.0.1. Para a segunda parte, quando $\text{grau}\{\dot{h}_l(z)\} = m_l < M - 1$, é fácil verificar que a base para $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$ é obtida adicionando ao conjunto de m_l vetores generalizados de Vandermonde correspondentes aos zeros de $\dot{h}_l(z)$ o conjunto de $M - 1 - m_l$ vetores dados pelas últimas $M - 1 - m_l$ colunas da matriz identidade \mathbf{I}_{K+M-1} . Isto é, uma base para $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$ é dada pelas colunas da matriz

$$\mathbf{V}_l \underset{(K+M-1 \times M-1)}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_l(r_1) & \cdots & \mathbf{V}_l(r_s) & \mathbf{I}_{K+M-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{K+M-1, M-1-m_l} \\ \mathbf{I}_{M-1-m_l} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Usando a proposição A.0.2 novamente temos que as colunas de \mathbf{V}_l são linearmente independentes. Também é fácil verificar que todas as colunas de \mathbf{V}_l estão no espaço nulo de $\mathbf{H}_l^{(K)}$, isto é $\mathbf{H}_l^{(K)} \mathbf{V}_l = \mathbf{0}$. Logo as colunas de \mathbf{V}_l representam uma base para $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$ e por conseqüência a proposição A.0.1 está provada. \square

Voltamos então ao Teorema 2.5.1 do Capítulo 2, que segue aqui reproduzido para facilitar o entendimento.

Teorema A.0.1. *Os polinômios $\dot{h}_l(z)$, para $l = 1, \dots, L$ e de grau máximo $M - 1$, são coprimos, isto é, respeitam*

$$\dot{\mathbf{h}}(z) \triangleq \begin{bmatrix} \dot{h}_1(z) \\ \vdots \\ \dot{h}_L(z) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{h}(k) z^{-k} \neq 0, \forall z. \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\mathbf{h}(k) = 0, \quad k > M - 1 \text{ e } k < 0, \quad (\text{A.11})$$

se e somente se $\mathbf{H}^{(K)}$, uma matriz de dimensão $KL \times K + M - 1$ dada por (2.9), possui posto completo por coluna para todo $K \geq M - 1$.

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade que a resposta ao impulso $\dot{h}_l(z)$ possui ordem máxima $M - 1$. Queremos demonstrar que $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_0^{(K)}\} \cap \mathcal{N}\{\mathbf{H}_1^{(K)}\}$ é gerado pelos vetores generalizados de Vandermonde correspondentes aos zeros em comum de $\dot{h}_0(z)$ e $\dot{h}_1(z)$, considerando sua multiplicidade mínima. Como $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_0^{(K)}\} = \mathcal{I}\{\mathbf{V}_0\}$ e $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_1^{(K)}\} = \mathcal{I}\{\mathbf{V}_1\}$, temos que

$$\mathcal{N}\{\mathbf{H}_0^{(K)}\} \cap \mathcal{N}\{\mathbf{H}_1^{(K)}\} = \mathcal{I}\{\mathbf{V}_0\} \cap \mathcal{I}\{\mathbf{V}_1\}. \quad (\text{A.12})$$

Usando a proposição A.0.2 percebemos que $\mathcal{I}\{\mathbf{V}_0\} \cap \mathcal{I}\{\mathbf{V}_1\}$ é gerado pelos vetores generalizados de Vandermonde correspondentes aos zeros em comum de $\dot{h}_0(z)$ e $\dot{h}_1(z)$. Da mesma forma podemos mostrar que $\mathcal{N}\{\mathbf{H}_0^{(K)}\} \cap \mathcal{N}\{\mathbf{H}_1^{(K)}\} \cap \mathcal{N}\{\mathbf{H}_2^{(K)}\}$ é gerado pelos vetores generalizados de Vandermonde correspondentes aos zeros em comum de $\dot{h}_0(z)$, $\dot{h}_1(z)$ e $\dot{h}_2(z)$. Prosseguindo desta forma concluímos que $\bigcap_{l=1}^L \mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\}$ é gerado pelos vetores generalizados de Vandermonde correspondentes aos zeros em comum dos polinômios $\dot{h}_0(z)$, $\dot{h}_1(z)$, \dots , $\dot{h}_L(z)$. Como

$$\mathcal{N}\{\mathbf{H}^{(K)}\} = \bigcap_{l=1}^L \mathcal{N}\{\mathbf{H}_l^{(K)}\} \quad (\text{A.13})$$

e os polinômios $\dot{h}_0(z)$, $\dot{h}_1(z)$, \dots , $\dot{h}_L(z)$ são coprimos então provamos que a matriz $\mathbf{H}^{(K)}$ tem necessariamente posto completo por coluna. \square

Como consequência direta do Teorema 2.5.1 temos também o seguinte corolário.

Corolário A.0.1. *Caso as respostas ao impulso na frequência $\dot{h}_0(z)$, $\dot{h}_1(z)$, \dots , $\dot{h}_L(z)$ possuam p zeros em comum, então $\dim\{\mathcal{N}[\mathbf{H}^{(K)}]\} = p$ e $\mathcal{N}[\mathbf{H}^{(K)}]$ é gerado pelos p vetores generalizados de Vandermonde correspondentes aos p zeros em comum.*

Por fim, a prova da proposição A.0.2 é apenas indicada.

Demonstração. Como o cálculo do determinante generalizado de Vandermonde

$$\mathbf{W}(r_1, \dots, r_s) \triangleq \det \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{0}_{M-1,K} \end{bmatrix} \mathbf{V}_l \right\} \quad (\text{A.14})$$

pode ser realizado seguindo o mesmo raciocínio do cálculo de um determinante de Vandermonde comum, a prova é apenas indicada. É fácil verificar que

$$\left(\frac{\partial^i \mathbf{W}(r_1, \dots, r_s)}{\partial r_1^i} \right) \Big|_{r_1=r_j} = 0 \quad (\text{A.15})$$

para todo $i = 0, 1, \dots, p_1 p_j - 1$ e $j = 2, 3, \dots, s$. Logo $\mathbf{W}(r_1, \dots, r_s)$ pode ser fatorado em

$$\mathbf{W}(r_1, \dots, r_s) = \prod_{j=2}^s (r_1 - r_j)^{p_1 p_j} \mathbf{W}(r_2, \dots, r_s). \quad (\text{A.16})$$

De forma similar é fácil verificar que

$$\left(\frac{\partial^i \mathbf{W}(r_1, \dots, r_s)}{\partial r_2^i} \right) \Big|_{r_2=r_j} = 0 \quad (\text{A.17})$$

para todo $i = 0, 1, \dots, p_2 p_j - 1$ e $j = 3, 4, \dots, s$. Logo $\mathbf{W}(r_2, \dots, r_s)$ pode ser fatorado em

$$\mathbf{W}(r_2, \dots, r_s) = \prod_{j=3}^s (r_2 - r_j)^{p_2 p_j} \mathbf{W}(r_3, \dots, r_s) \quad (\text{A.18})$$

e então (A.8) é obtido por indução. \square

Apêndice B

Critério MDL

O critério MDL (WAX; KAILATH, 1985), no contexto da identificação e inversão de sistemas SIMO FIR, tem por objetivo determinar a dimensão do subespaço de sinal D da matriz de autocorrelação $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$, a partir de um critério estatístico baseado em teoria da informação.

A sua aplicação é direta e feita pelo uso da expressão

$$MDL(m) = -\log \left(\frac{\prod_{i=m+1}^{KL} \lambda_i^{\frac{1}{KL-m}}}{\frac{1}{KL-m} \sum_{i=m+1}^{KL} \lambda_i} \right)^{(KL-m)N} + \frac{1}{2}m(2KL - m) \log(N), \quad (\text{B.1})$$

onde N é o número de amostras de $\mathbf{x}(k)$ utilizadas na estimação de $\mathcal{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$, m é o número de parâmetros livres de ajuste do modelo (a dimensão do subespaço de sinal, que será variada), K é o tamanho da janela utilizada no modelo da equação (3.37), do sistema SIMO, e L é o número de saídas do sistema SIMO em análise. A estimativa de D , o subespaço de sinal, é então obtida pelo valor de $m \in 0, 1, \dots, KL - 1$ que minimiza (B.1). Após a estimação de D , caso o ruído seja branco e aditivo, σ^2 pode ser estimado por uma média dos autovalores pertencentes ao subespaço de ruído e dada por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{KL - \hat{D}} \sum_{i=\hat{D}+1}^{KL} \lambda_i. \quad (\text{B.2})$$

Outra possibilidade é simplesmente utilizar para esta estimativa o menor autovalor.

Apêndice C

Equivalência entre Sistemas SISO FIR Superamostrados com Entrada Cicloestacionária e Sistemas SIMO FIR

Uma propriedade muito utilizada para a equalização cega de sistemas de comunicação digital é a equivalência entre sistemas SISO superamostrados com entrada cicloestacionária e sistemas SIMO. A partir desta equivalência é possível se equalizar sistemas SISO de comunicações digitais, desde que exista algum excesso de banda no sinal de saída de forma a preservar a cicloestacionariedade do sinal superamostrado. A primeira vez onde esta equivalência foi utilizada juntamente com um algoritmo de identificação e inversão cega de sistemas SIMO FIR foi justamente em (TONG; XU; KAILATH, 1991), desencadeando posteriormente uma série de trabalhos sobre o assunto.

Mais especificamente tratemos de um problema SISO com a entrada discreta representada por $s(k)$, a resposta ao impulso discreta do sistema representada por $h(k)$, o ruído aditivo discreto por $n(k)$ e a saída discreta por $x(k)$. Temos então o

modelo discreto dado por

$$x(k) = \sum_m s(m)h(k-m) + n(k) \text{ para } k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.1})$$

Montemos a entrada discreta $s(k)$ deste sistema a partir de uma seqüência de entrada discreta $\check{s}(n)$ conforme

$$s(k) = \check{s}\left(\left\lfloor \frac{k}{L} \right\rfloor\right) p(k \bmod L) \text{ para } k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.2})$$

onde $p(k)$ é o pulso de conformação discreto definido para $k \in \mathbb{Z}$ e de suporte temporal finito de comprimento L , com $p(k) = 0$ para $k < 0$ e $k > L - 1$. Temos então que o sinal $s(k)$ é ciclo-estacionário¹. Logo podemos representar a saída deste sistema por um vetor conforme

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x(kL) \\ x(kL-1) \\ \vdots \\ x(kL-L+1) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_L(k) \end{bmatrix} = \mathbf{x}(k) \\ & = \sum_m \begin{bmatrix} h(kL)p(0) \\ h(kL-1)p(1) \\ \vdots \\ h(kL-L+1)p(L-1) \end{bmatrix} \check{s}(k-m) + \begin{bmatrix} n(kL) \\ n(kL-1) \\ \vdots \\ n(kL-L+1) \end{bmatrix} \\ & \triangleq \sum_m \begin{bmatrix} h_1(m) \\ h_2(m) \\ \vdots \\ h_L(m) \end{bmatrix} \check{s}(k-m) + \begin{bmatrix} n_1(k) \\ n_2(k) \\ \vdots \\ n_L(k) \end{bmatrix} \\ & = \sum_m \mathbf{h}(m)\check{s}(k-m) + \mathbf{n}(k) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

¹Para facilitar o entendimento foi omitido o termo de aleatoriedade da fase. Sabe-se que para o sinal $s(k)$ ser realmente ciclo-estacionário seria necessária a adição de um termo aleatório na amostragem, isto é, deveria se considerar o sinal $s(k-\alpha)$, onde α seria uma variável aleatória discreta igualmente distribuída podendo assumir os valores $1, \dots, L$.

onde fica claro que $h_l(k)$ absorve tanto o efeito de $h(k)$ quanto o efeito de $p(k)$. Para isso

$$h_l(k) = h(kL - l + 1) p((l - 1) \bmod L). \quad (\text{C.4})$$

Fica provada então a equivalência do sistema SIMO em (C.3) com o sistema SISO apresentado em (C.1). Por fim os efeitos no domínio da transformada-Z podem ser facilmente derivados utilizando a teoria de sistemas multitaxas.

Apêndice D

Experimentos Detalhados

Neste apêndice são descritos todos os experimentos conduzidos para validação e teste dos algoritmos descritos nos capítulos 3 e 4. A apresentação de todos os experimentos apenas aqui procura aliviar do leitor com menos tempo a necessidade de se conhecer todo o processo experimental realizado para esta dissertação. Por outro lado, o registro de alguns experimentos com resultados pífios procura evitar retrabalho em cima de casos problemáticos, acelerando assim trabalhos posteriores.

Os experimentos desta dissertação foram realizados de forma a aumentar a complexidade gradativamente, iniciando-se pelos casos mais simples, até finalmente aproximar-se de situações reais encontradas no problema de deconvolução de dados sísmicos. Como forma de quantificar os resultados foram medidos dois desempenhos, relativos à qualidade da estimativa do sinal de entrada $s(k)$ e à qualidade da estimativa do sistema SIMO FIR \mathbf{H} . Ambas as medidas foram feitas utilizando a NRMSE, apresentada nas equações (5.4) e (5.5) do Capítulo 5.

Desta forma, primeiramente os experimentos A.01 a A.12 procuraram apenas comprovar o funcionamento dos algoritmos. Utilizaram para isso entradas brancas ou coloridas simples e um sistema SIMO FIR sem zeros próximos ou em comum, atendendo assim perfeitamente às hipóteses dos algoritmos.

Posteriormente os experimentos B.01 a B.08 realizaram testes utilizando desta vez um sistema SIMO FIR próximo do encontrado em sistemas sísmicos reais, com zeros próximos, mas ainda numa taxa de amostragem reduzida, de cerca de 16 ms. Este sistema SIMO FIR foi obtido por três compressões não-lineares de um mesmo pulso sísmico no tempo, procurando reproduzir o efeito das correções de velocidade pré-empilhamento. Gerou-se então 4 sistemas SISO FIR que compõem o sistema SIMO FIR. Por fim, a taxa reduzida procura apenas facilitar o trabalho computacional deste experimento.

Numa terceira etapa, os experimentos C.01 a C.04 utilizaram condições de teste modificadas, inserindo não mais entradas estatísticas bem condicionadas mas sim entradas determinísticas reais obtidas através de um perfil de poço subamostrado. Para fins de comparação o mesmo sistema SIMO FIR dos experimentos B.01 a B.08 foi utilizado.

Num quarto momento os experimentos D.01 a D.05 realizaram os mesmos testes dos experimentos C.01 a C.04, mas utilizando uma taxa de amostragem normalmente utilizada em processamento de dados sísmicos, de 4 ms.

Já os experimentos E.01 a E.08 e F.01 a F.04 replicaram as condições dos experimentos B.01 a B.08 e C.01 a C.04 respectivamente, utilizando apenas um sistema SIMO FIR ligeiramente diferente do utilizado nos experimentos prévios. Este sistema foi gerado a partir do pulso sísmico real com uma subamostragem feita em várias etapas, com o intuito de reduzir o erro no reposicionamento de zeros devido a subamostragem em uma única etapa utilizada para os experimentos B.01 a B.08 e C.01 a C.04. Uma explicação sucinta deste erro vem da filtragem passa-baixa necessária anteriormente a subamostragem. Uma subamostragem com período de amostragem muito grande na decimação implica na necessidade de filtragem passa-baixas de altíssimo desempenho para evitar *aliasing* na subamostragem, o que não é possível em situações práticas como esta. Assim os pulsos gerados para os experimentos B.01 a B.08 e C.01 a C.04 carregaram forte componente de aliasing, aumentando significativamente suas componentes nas frequências mais altas, como

pode ser observado comparando as respostas em frequência nas figuras D.3 e D.8, apresentadas nas páginas 223 e 228 respectivamente.

Os experimentos G.01 a G.08 e H.01 a H.04 realizaram testes numa taxa de amostragem de 4 ms para um sistema SIMO FIR composto por dois pulsos diferentes. Para os experimentos G.01 a G.04 entradas brancas foram utilizadas. Para os experimentos G.05 a G.08, entradas coloridas foram utilizadas e para os experimentos H.01 a H.04, um perfil de poço como entrada foi utilizado. Finalmente os experimentos I.01 a I.08 e J.01 a J.04 refazem os experimentos G.01 a G.08 e H.01 a H.04 numa taxa de amostragem de 2 ms. A Tabela D.1, apresentada na página 219, resume todos os experimentos.

D.1 Experimentos A.01 a A.12

Primeiramente doze experimentos simples (A.01 a A.12) com sistemas e entradas que satisfazem perfeitamente as hipóteses dos algoritmos foram realizados. Eles ilustram o desempenho dos algoritmos apresentados nos capítulos 3 e 4 para a estimação tanto do *sistema SIMO FIR* quanto da sua *entrada*, para entradas brancas e coloridas, variando-se parâmetros chave que possam influenciar seus desempenhos.

Todos os resultados destes experimentos (A.01 a A.12) foram obtidos através de uma média de 100 realizações, para relações sinal-ruído variando de -10 a 50 dB, em passos de 4 dB. As respostas ao impulso utilizadas ainda não procuraram reproduzir sistemas sísmicos, mas sim apenas atender a hipótese de não existência de zeros em comum. Suas características são apresentadas na Figura D.1 e a resposta ao impulso mais especificamente é dada por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0,3016544496 & -0,6033088993 & -0,3016544496 & 0,1508272248 & 0,1508272248 \\ 0,3016544496 & -0,3016544496 & 0 & 0,3016544496 & 0,3016544496 \\ 0,3016544496 & -0,3016544496 & -0,3016544496 & -0,3016544496 & -0,1508272248 \\ 0,3016544496 & -0,3016544496 & 0,3016544496 & 0,1206617798 & 0,0603308899 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Para teste de robustez quanto ao tipo de entrada $s(k)$ presente no sistema, entradas $s(k)$ brancas foram utilizadas nos experimentos de A.01 a A.06 e entradas

D.1. EXPERIMENTOS A.01 A A.12

Experimento	Amostras	Canal ou pulso Sismico			Tipo de entrada	Taxa de amostragem	SNR (dB)	Algoritmos										Número de simulações		
		Tipo	Comprimento	Relação com comprimento real				TXK	SSM	LP	OPD	MSLP	CMOE	SCM	LSS	JLSS	OP		Wiener	
A . 01	200	Canal de comunicação simples	5	Exato	Branca	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 02	1000	Canal de comunicação simples	5	Exato	Branca	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 03	200	Canal de comunicação simples	7	Superestimado	Branca	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 04	1000	Canal de comunicação simples	7	Superestimado	Branca	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 05	200	Canal de comunicação simples	4	Subestimado	Branca	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 06	1000	Canal de comunicação simples	4	Subestimado	Branca	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 07	200	Canal de comunicação simples	5	Exato	Colorida	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 08	1000	Canal de comunicação simples	5	Exato	Colorida	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 09	200	Canal de comunicação simples	7	Superestimado	Colorida	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 10	1000	Canal de comunicação simples	7	Superestimado	Colorida	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 11	200	Canal de comunicação simples	4	Subestimado	Colorida	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
A . 12	1000	Canal de comunicação simples	4	Subestimado	Colorida	Normalizada	-10:450	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	100
B . 01	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	20	Subestimado	Branca	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
B . 02	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	30	Subestimado	Branca	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
B . 03	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	42	Exato	Branca	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
B . 05	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	20	Subestimado	Colorida	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
B . 06	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	30	Subestimado	Colorida	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
B . 07	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	42	Exato	Colorida	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
C . 01	144	Pulso sísmico corrigido por NMO	20	Subestimado	Perfil de poço	16 ms	-10:450	x											x	10
C . 02	144	Pulso sísmico corrigido por NMO	30	Subestimado	Perfil de poço	16 ms	-10:450	x											x	10
C . 03	144	Pulso sísmico corrigido por NMO	42	Exato	Perfil de poço	16 ms	-10:450	x											x	10
C . 04	144	Pulso sísmico corrigido por NMO	47	Superestimado	Perfil de poço	16 ms	-10:450	x											x	10
D . 01	582	Pulso sísmico corrigido por NMO	50	Subestimado	Perfil de poço	4 ms	-10:450	x											x	10
D . 02	582	Pulso sísmico corrigido por NMO	100	Subestimado	Perfil de poço	4 ms	-10:450	x											x	10
D . 03	582	Pulso sísmico corrigido por NMO	125	Subestimado	Perfil de poço	4 ms	-10:450	x											x	10
E . 01	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	20	Subestimado	Branca	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
E . 02	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	30	Subestimado	Branca	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
E . 03	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	42	Exato	Branca	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
E . 05	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	20	Subestimado	Colorida	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
E . 06	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	30	Subestimado	Colorida	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
E . 07	330	Pulso sísmico corrigido por NMO	42	Exato	Colorida	16 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
F . 01	144	Pulso sísmico corrigido por NMO	20	Subestimado	Perfil de poço	16 ms	-10:450	x											x	10
F . 02	144	Pulso sísmico corrigido por NMO	30	Subestimado	Perfil de poço	16 ms	-10:450	x											x	10
F . 03	144	Pulso sísmico corrigido por NMO	42	Exato	Perfil de poço	16 ms	-10:450	x											x	10
F . 04	144	Pulso sísmico corrigido por NMO	47	Superestimado	Perfil de poço	16 ms	-10:450	x											x	10
G . 01	500	Pulsos sísmicos diferentes	15	Subestimado	Branca	4 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
G . 02	500	Pulsos sísmicos diferentes	25	Subestimado	Branca	4 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
G . 03	500	Pulsos sísmicos diferentes	50	Subestimado	Branca	4 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
G . 04	500	Pulsos sísmicos diferentes	90	Exato	Branca	4 ms	-10:650	x											x	50
G . 05	500	Pulsos sísmicos diferentes	15	Subestimado	Colorida	4 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
G . 06	500	Pulsos sísmicos diferentes	25	Subestimado	Colorida	4 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
G . 07	500	Pulsos sísmicos diferentes	50	Subestimado	Colorida	4 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
G . 08	500	Pulsos sísmicos diferentes	90	Exato	Colorida	4 ms	-10:650	x											x	50
H . 01	582	Pulsos sísmicos diferentes	15	Subestimado	Perfil de poço	4 ms	-10:450	x											x	10
H . 02	582	Pulsos sísmicos diferentes	25	Subestimado	Perfil de poço	4 ms	-10:450	x											x	10
H . 03	582	Pulsos sísmicos diferentes	50	Subestimado	Perfil de poço	4 ms	-10:450	x											x	10
H . 04	582	Pulsos sísmicos diferentes	90	Exato	Perfil de poço	4 ms	-10:450	x											x	10
I . 01	1000	Pulsos sísmicos diferentes	30	Subestimado	Branca	2 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
I . 02	1000	Pulsos sísmicos diferentes	50	Subestimado	Branca	2 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
I . 03	1000	Pulsos sísmicos diferentes	100	Subestimado	Branca	2 ms	-10:650	x											x	50
I . 05	1000	Pulsos sísmicos diferentes	30	Subestimado	Colorida	2 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
I . 06	1000	Pulsos sísmicos diferentes	50	Subestimado	Colorida	2 ms	-10:450	x	x	x	x	x	x	x					x	100
I . 07	1000	Pulsos sísmicos diferentes	100	Subestimado	Colorida	2 ms	-10:650	x											x	50
J . 01	1163	Pulsos sísmicos diferentes	30	Subestimado	Perfil de poço	2 ms	-10:450	x											x	10
J . 02	1163	Pulsos sísmicos diferentes	50	Subestimado	Perfil de poço	2 ms	-10:450	x											x	10
J . 03	1163	Pulsos sísmicos diferentes	100	Subestimado	Perfil de poço	2 ms	-10:450	x											x	10

Tabela D.1: Resumo de todos os experimentos realizados.

D.1. EXPERIMENTOS A.01 A A.12

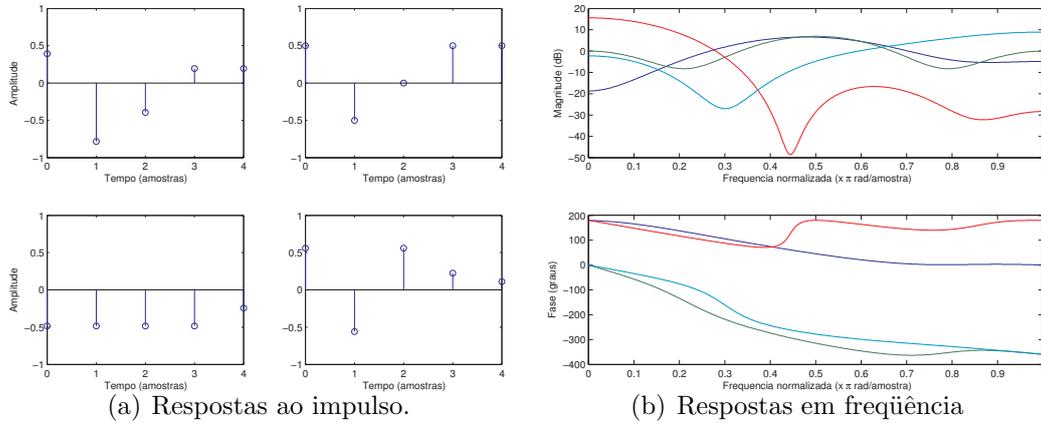


Figura D.1: Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos A.01 a A.12.

coloridas nos experimentos A.07 a A.12. As últimas foram obtidas através da filtragem de um sinal de entrada branco pelo filtro FIR representado na Figura D.2.

Os testes nestes experimentos foram realizados variando-se o número de amostras disponíveis para o algoritmo, o tamanho (estimado) da resposta ao impulso utilizada pelo algoritmo e o tipo de entrada do sistema SIMO FIR, branca ou colorida. Os valores exatos destes parâmetros para cada experimento encontram-se na Tabela D.1, apresentada na página 219.

Resultados

Os resultados apresentados de forma gráfica encontram-se nas figuras D.12 a D.23, nas páginas 232 a 243 respectivamente. Podemos destacar alguns pontos importantes que confirmam as expectativas teóricas quanto ao desempenho dos algoritmos. São eles:

1. CONVERGÊNCIA PARA UM NÚMERO FINITO DE AMOSTRAS - O comportamento dos algoritmos determinísticos confirma convergência dos mesmos para um número finito de amostras (figuras D.12, D.13, D.18 e D.19). Em contrapartida os algoritmos estatísticos apenas se aproximam da resposta exata.

D.1. EXPERIMENTOS A.01 A A.12

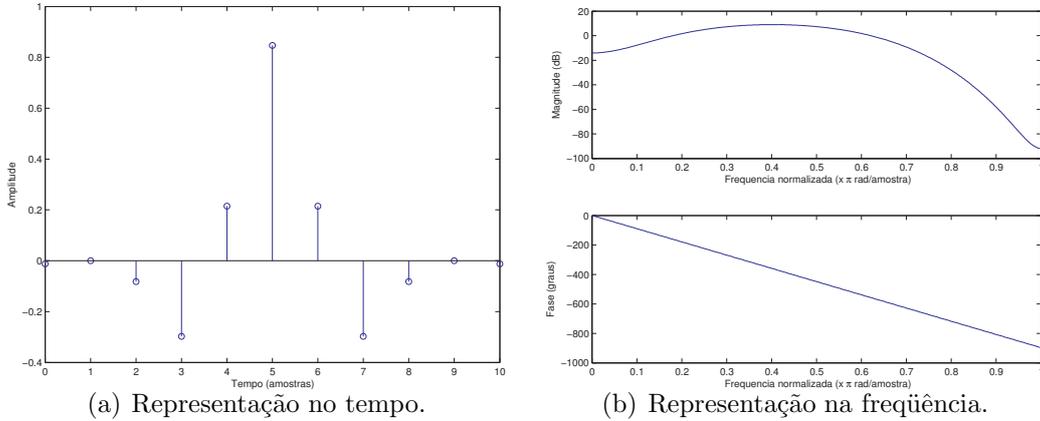


Figura D.2: Filtro utilizado para gerar o sinal de entrada $s(k)$ colorido dos experimentos A.07 a A.12, B.05 a B.08, E.05 a E.08, G.05 a G.08 e I.05 a I.07.

Não há convergência perfeita como pode ser observado para SNR alta (figuras D.12, D.13, D.18 e D.19) mas sim apenas uma melhoria nas estimativas para SNR alta quando se aumenta o número de amostras (figuras D.12 para D.13 e D.18 para D.19). Isto é um reflexo direto da lei dos grandes números. Apenas com um número infinito de amostras temos a convergência perfeita.

2. ALGORITMO CMOE - O comportamento deste algoritmo pode parecer um tanto quanto estranho para SNR a partir de 10 dB (figuras D.12 a D.19). O fato de seu desempenho piorar a partir de 10 dB aproximadamente se deve a necessidade de inversão da matriz $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}^{(K)}(0)$. A mesma não é bem condicionada para SNR alta pois a mesma sempre terá autovalores próximos de zero nesta condição. Assim se faz necessário o uso de pseudo-inversas como a de Moore-Penrose, que só podem ser calculadas adequadamente conhecendo-se diretamente a dimensão do seu subespaço de sinal e indiretamente a ordem do sistema SIMO FIR.

D.2 Experimentos B.01 a B.03 e B.05 a B.07

Para os experimentos B.01 a B.03 e B.05 a B.08 um sistema sísmico real foi utilizado (Figura D.3), baseado no pulso marítimo presente em (JOHNSTON; REED; DESLER, 1988). O pulso foi diretamente extraído do documento em papel e digitalizado com taxa de amostragem de 0,26785714285714 ms (não significa que o mesmo possua realmente componentes de frequência tão alta). Foi então reamostrado em $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{63}$, $\frac{1}{65}$ e $\frac{1}{70}$ da taxa original após aplicação de filtro passa baixa FIR de fase linear para evitar *aliasing*, muito embora isto na prática não se mostrou eficaz. Por fim supôs-se que a nova taxa de amostragem era de 16 ms nos 4 pulsos resultantes, acreditando-se assim estar replicando o efeito da correção de NMO nos pulsos sísmicos, quando os mesmos não encontram-se em afastamento nulo.

Novamente todos os resultados foram obtidos através de uma média de 100 realizações dos experimentos, para relações sinal-ruído variando de -10 a 50 dB, em passos de 4 dB. As entradas coloridas dos experimentos B.05 a B.07, assim como as dos experimentos A.05 a A.08, foram geradas a partir da filtragem de ruído branco pelo filtro FIR representado na Figura D.2.

Por fim, os parâmetros utilizados para cada um dos experimentos de B.01 a B.03 e B.05 a B.08 estão presentes na Tabela D.1, apresentada na página 219.

Resultados

Os resultados apresentados de forma gráfica encontram-se nas figuras D.24 a D.29, nas páginas 244 a 249 respectivamente.

Podemos destacar algumas observações importantes:

1. NÚMERO DE AMOSTRAS - Os pulsos sísmicos convoluídos com o sinal branco possuíam energia concentrada no seu início e um comprimento relativamente maior do que o utilizado no experimento A. Com 330 amostras os algoritmos

D.3. EXPERIMENTOS C.01 A C.04

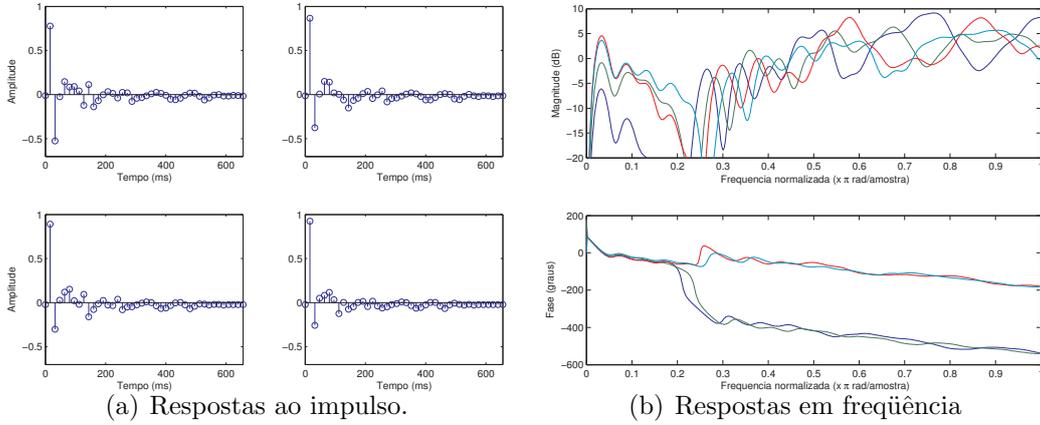


Figura D.3: Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos B.01 a B.08 e C.01 a C.04.

MSLP, LP e TXK foram apenas capazes de identificar o sistema SIMO FIR de forma pouco precisa. A inversão não foi possível. Apenas com o aumento de amostras podemos com estes algoritmos conseguir uma estimação melhor.

D.3 Experimentos C.01 a C.04

Para os experimentos C.01 a C.04, uma entrada determinística de um sistema sísmico real sintético subamostrado foi utilizada, apresentada na Figura D.5. Esta foi obtida a partir de um perfil de poço apresentado na Figura D.4. Já o sistema SIMO FIR utilizado foi o mesmo dos experimentos B.01 a B.08, da Figura D.3. Desta vez, devido à entrada determinística, apenas 10 realizações do experimento foram utilizadas para as médias apresentadas como resultados, pois apenas o ruído branco possuía características estatísticas. Os valores de SNR foram variados de -10 dB a 70 dB, em passos de 4 dB. O alcance desta variável foi aumentado com o objetivo de observar o comportamento dos algoritmos LP2 e MSLP2 para valores de SNR entre 50 dB e 70 dB. Já os parâmetros utilizados para cada experimento encontram-se na Tabela D.1, apresentada na página 219.

D.3. EXPERIMENTOS C.01 A C.04

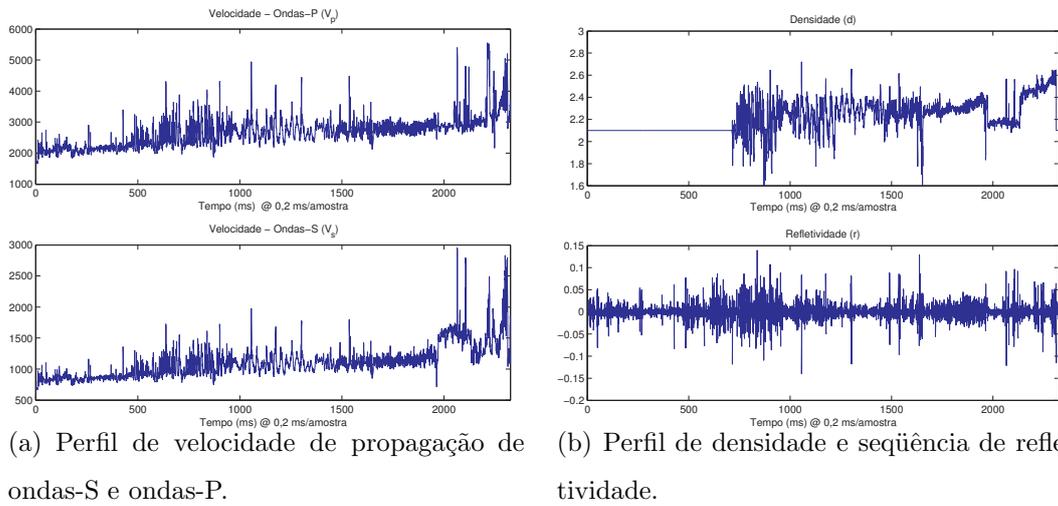


Figura D.4: Perfil de poço utilizado para geração de entrada sintética determinística dos experimentos C.01 a C.04 e D.01 a D.03.

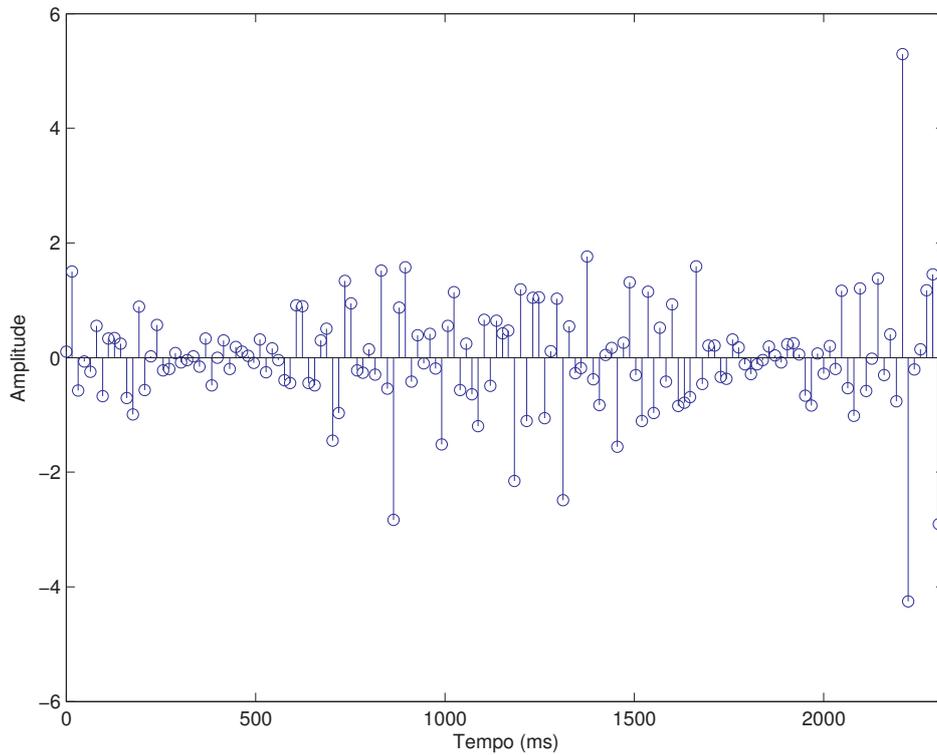


Figura D.5: Entrada $s(k)$ determinística gerada a partir de filtro passa-baixas e reamostragem de perfil de poço, utilizada para os experimentos C.01 a C.04 e F.01 a F.04.

Resultados

Os resultados apresentados de forma gráfica encontram-se nas figuras D.30 a D.33, nas páginas 250 a 253 respectivamente.

Podemos destacar alguns comentários:

1. NÚMERO DE AMOSTRAS - Ao reduzirmos de 330 para 144 o número de amostras disponíveis da saída nenhum dos algoritmos foi capaz de gerar estimativas razoáveis tanto do sinal de entrada como do sistema SIMO FIR. Além disso o uso de um sinal determinístico de entrada simplificou o experimento colocando-o diante de apenas uma realização da entrada. Pode-se afirmar que para esta realização os algoritmos utilizados não foram capazes de indentificar nem inverter o sistema SIMO FIR.

D.4 Experimentos D.01 a D.03

Para os experimentos D.01 a D.03 foi utilizado um sistema sísmico real com taxa de amostragem de 4 ms (Figura D.6), taxa esta normalmente utilizada em aplicações de processamento de dados sísmicos. Para a entrada, por sua vez, foi gerada uma entrada determinística a partir do perfil de poço da Figura D.4, também com taxa de amostragem de 4 ms. Esta é apresentada na Figura D.7. Desta forma os resultados destes experimentos devem reproduzir de uma maneira melhor o comportamento dos algoritmos frente a condições reais de uso. Por fim os parâmetros utilizados em cada experimento encontram-se na Tabela D.1, apresentada na página 219.

Resultados

Os resultados apresentados de forma gráfica encontram-se nas figuras D.34 a D.36, nas páginas 254 a 256 respectivamente.

D.4. EXPERIMENTOS D.01 A D.03

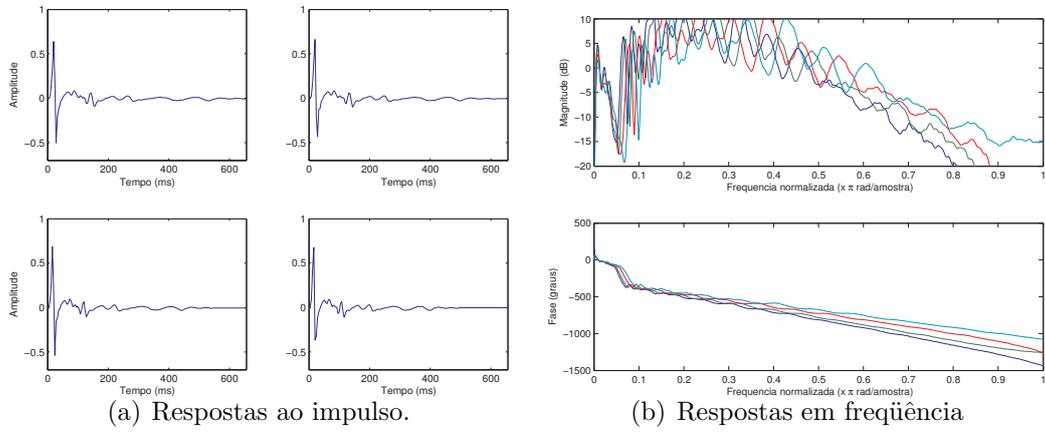


Figura D.6: Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos D.01 a D.03.

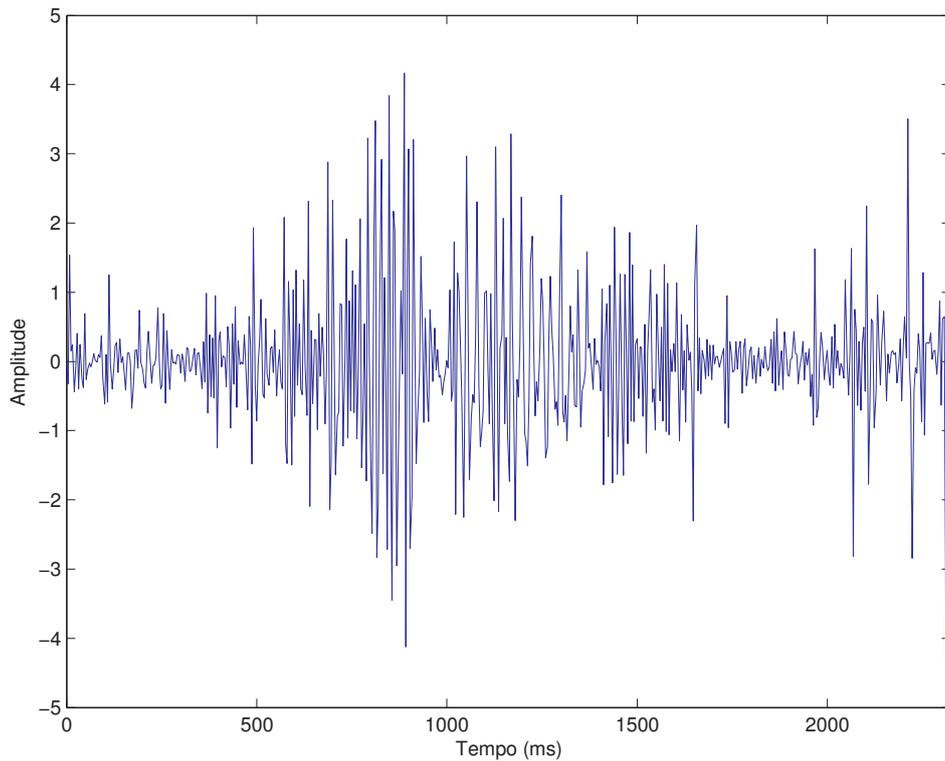


Figura D.7: Entrada $s(k)$ determinística gerada a partir de filtro passa-baixas e reamostragem de perfil de poço, utilizada para os experimentos D.01 a D.03 e H.01 a H.03.

Algumas observações importantes são:

1. NÚMERO DE AMOSTRAS - Assim como nos experimentos C.01 a C.04, os algoritmos não convergiram em nenhum dos casos. Muito provavelmente a causa da não convergência é o número de amostras disponíveis ter sido muito baixo. A hipótese de fuga das premissas do modelo para o sinal de entrada no caso dos algoritmos estatísticos provavelmente não é a causa visto que os algoritmos determinísticos também não convergiram.

D.5 Experimentos E.01 a E.03 e E.05 a E.08

Os experimentos E.01 a E.03 e E.05 a E.08 reproduzem os experimentos B.01 a B.03 e B.05 a B.08 alterando-se apenas o sistema SIMO FIR. De forma a melhor reproduzir as semelhanças entre os pulsos sísmicos presentes em um agrupamento de ponto médio comum corrigido por NMO, a reamostragem do pulso sísmico para geração do sistema SIMO FIR foi refeita, desta vez em etapas. Evita-se desta forma reduzir o erro no reposicionamento de zeros devido a efeitos de *aliasing* que são gerados quando se faz uma subamostragem tão grande como a feita nos experimentos B.01 a B.03 e B.05 a B.07. Assim, o novo sistema SIMO FIR é apresentado na Figura D.8. Os parâmetros utilizados nos experimentos E.01 a E.03 e E.05 a E.07 encontram-se na Tabela D.1, apresentada na página 219.

Resultados

Os resultados apresentados de forma gráfica encontram-se nas figuras D.37 a D.42, nas páginas 257 a 262 respectivamente.

Algumas observações importantes são:

1. CONVERGÊNCIA - Novamente, assim como nos experimentos B.01 a B.03 e B.05 a B.07, alguns algoritmos convergiram para estimativas ruins mas

D.6. EXPERIMENTOS F.01 A F.04

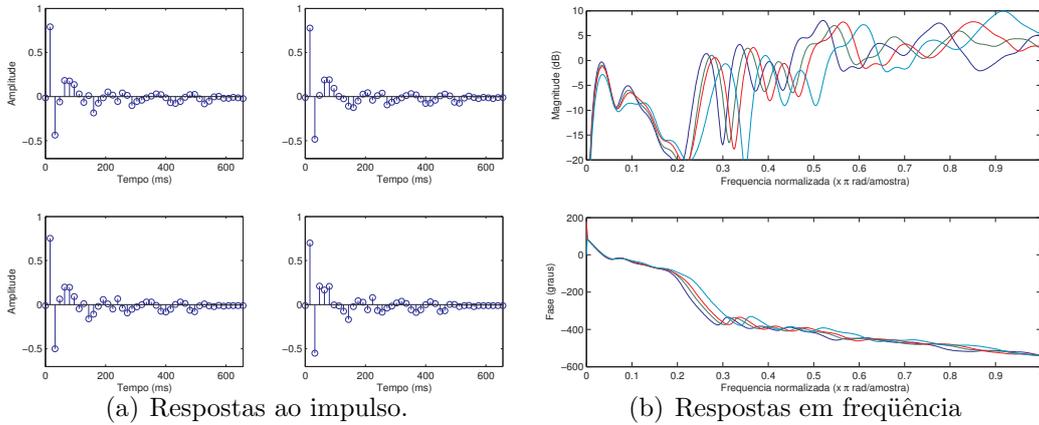


Figura D.8: Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos E.01 a E.03, E.05 a E.07 e F.01 a F.04.

razoáveis do sistema SIMO FIR. Podemos ainda perceber uma leve melhora se compararmos os resultados com os experimentos B.01 a B.03 e B.05 a B.07.

D.6 Experimentos F.01 a F.04

Os experimentos F.01 a F.04 reproduzem os experimentos C.01 a C.04 alterando-se apenas o sistema SIMO FIR para o apresentado na Figura D.8, assim como nos experimentos E.01 a E.03 e E.05 a E.07. Por fim os parâmetros utilizados nos experimentos F.01 a F.04 encontram-se na Tabela D.1, apresentada na página 219.

Resultados

Os resultados apresentados de forma gráfica encontram-se nas figuras D.43 a D.46, nas páginas 263 a D.46 respectivamente.

Alguns comentários merecem destaque:

1. NÚMERO DE AMOSTRAS - Novamente o número de amostras reduzido do sinal

de entrada determinístico, 144, impossibilitou a convergência dos algoritmos.

D.7 Experimentos restantes

Conforme explicado no início deste apêndice os experimentos G.01 a G.08 e H.01 a H.04 realizaram testes numa taxa de amostragem de 4 ms e os experimentos I.01 a I.03, I.05 a I.07 e J.01 a J.03 numa taxa de 2 ms, todos para um sistema SIMO FIR composto por dois pulsos diferentes, medidos em experimentos geofísicos reais e distintos.

O sistema SIMO FIR utilizado para os experimentos G.01 a G.08 e H.01 a H.04 é apresentado na Figura D.9. Já o utilizado para os experimentos I.01 a I.03, I.05 a I.07 e J.01 a J.03 é apresentado na Figura D.10. A entrada determinística utilizada para os experimento H.01 a H.04, o perfil de poço amostrado a 4 ms, encontra-se na Figura D.7. Já a entrada determinística utilizada para os experimentos J.01 a J.03, o perfil de poço amostrado a 2 ms, encontra-se na Figura D.11. As entradas utilizadas para os experimentos G.01 a G.04 e I.01 a I.03 eram entradas estacionárias brancas e as entradas utilizadas para os experimentos G.05 a G.08 e I.05 a I.07 eram entradas estacionárias coloridas com espectro conformado pelo filtro apresentado na Figura D.2.

Os resultados comentados destes experimentos são apresentados no Capítulo 5. Já seus gráficos de desempenho encontram-se nas figuras D.47 a D.67, nas páginas 267 a 287 respectivamente. Finalmente a Tabela D.1, na página 219, apresenta seus parâmetros.

D.8 Gráficos

Seguem nas próximas páginas os gráficos de desempenho obtidos para todos os experimentos descritos neste apêndice.

D.8. GRÁFICOS

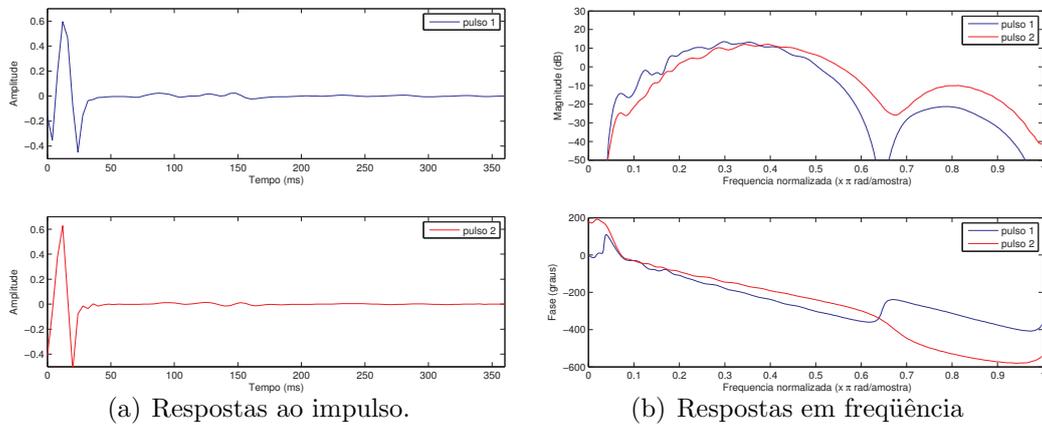


Figura D.9: Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos G.01 a G.08 e H.01 a H.04.

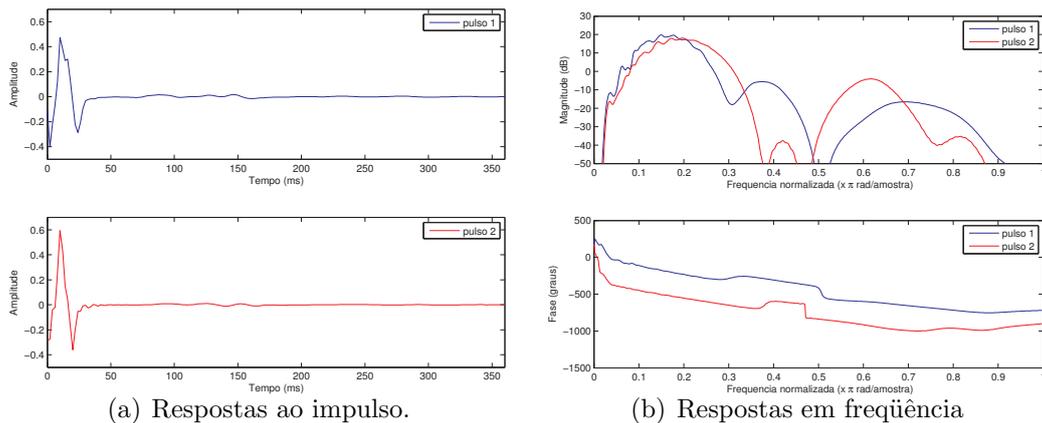


Figura D.10: Sistema SIMO FIR utilizado nos experimentos I.01 a I.03, I.05 a I.07 e J.01 a J.03.

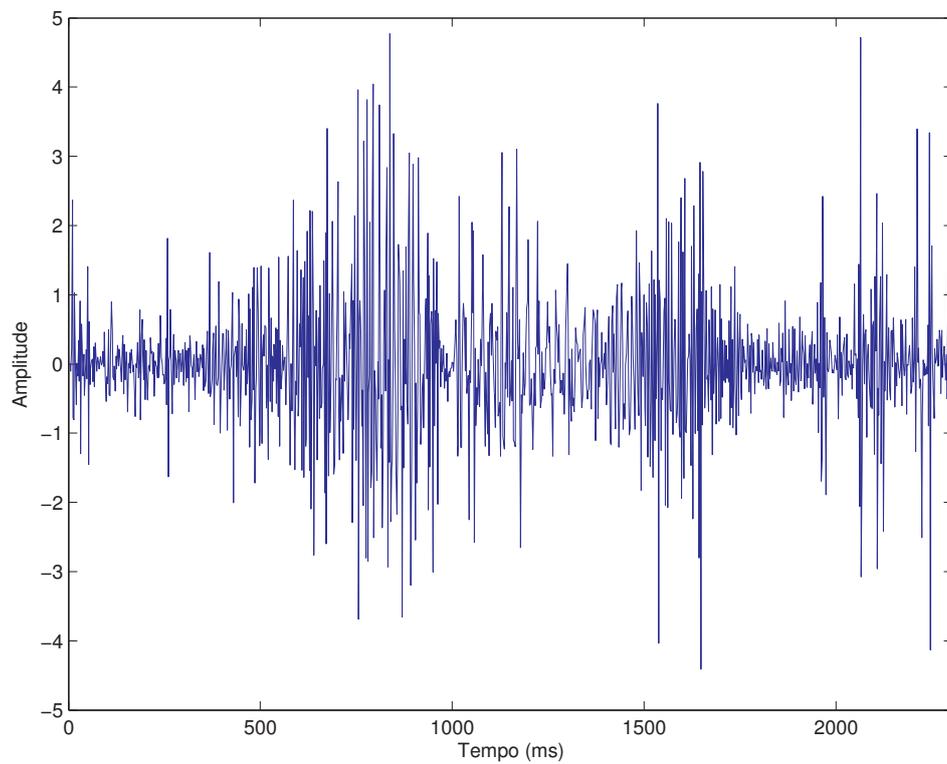


Figura D.11: Entrada $s(k)$ determinística gerada a partir de filtro passa-baixas e reamostragem de perfil de poço, utilizada para os experimentos J.01 a J.03.

D.8. GRÁFICOS

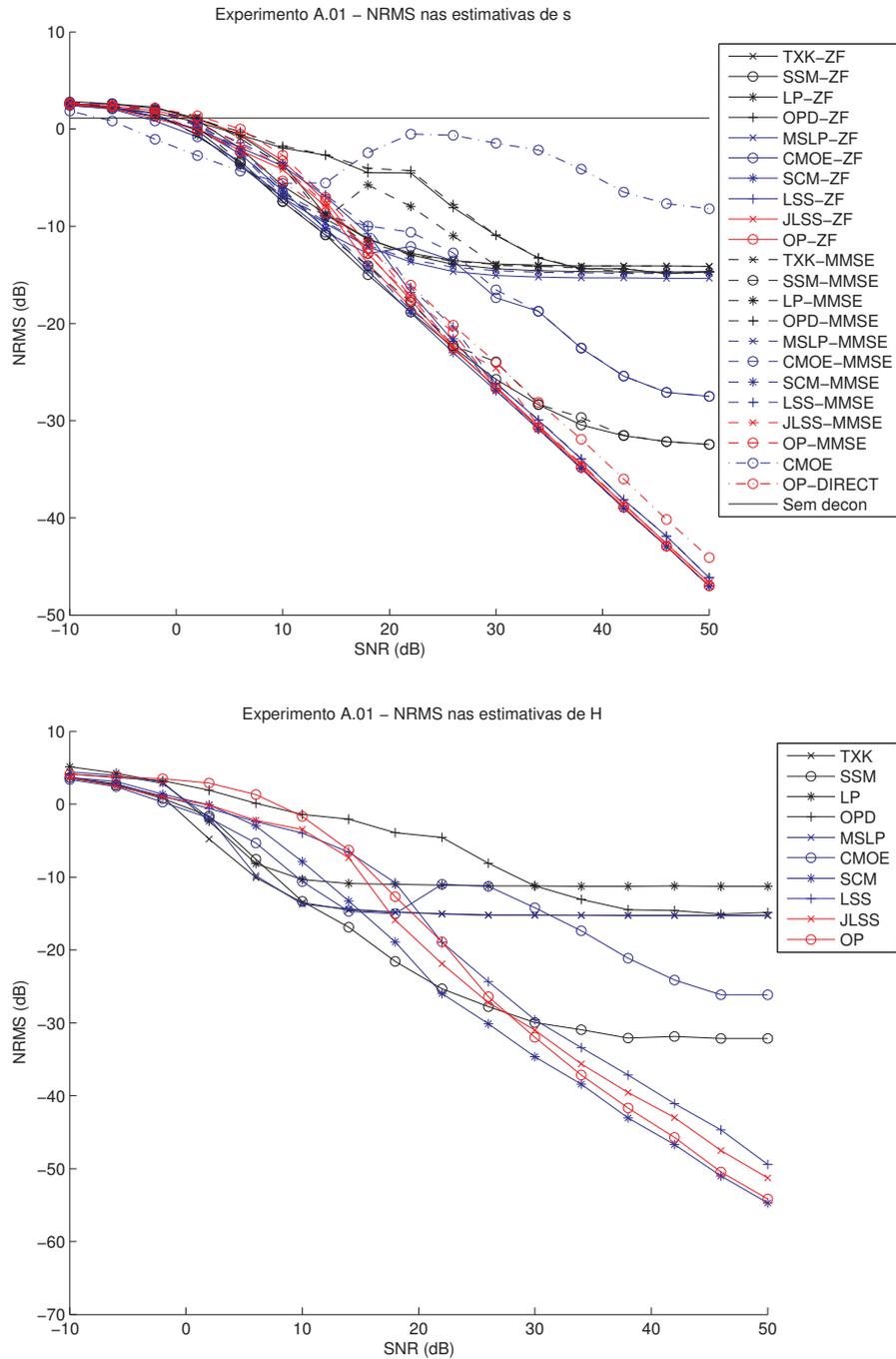


Figura D.12: Experimento A.01, realizado com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

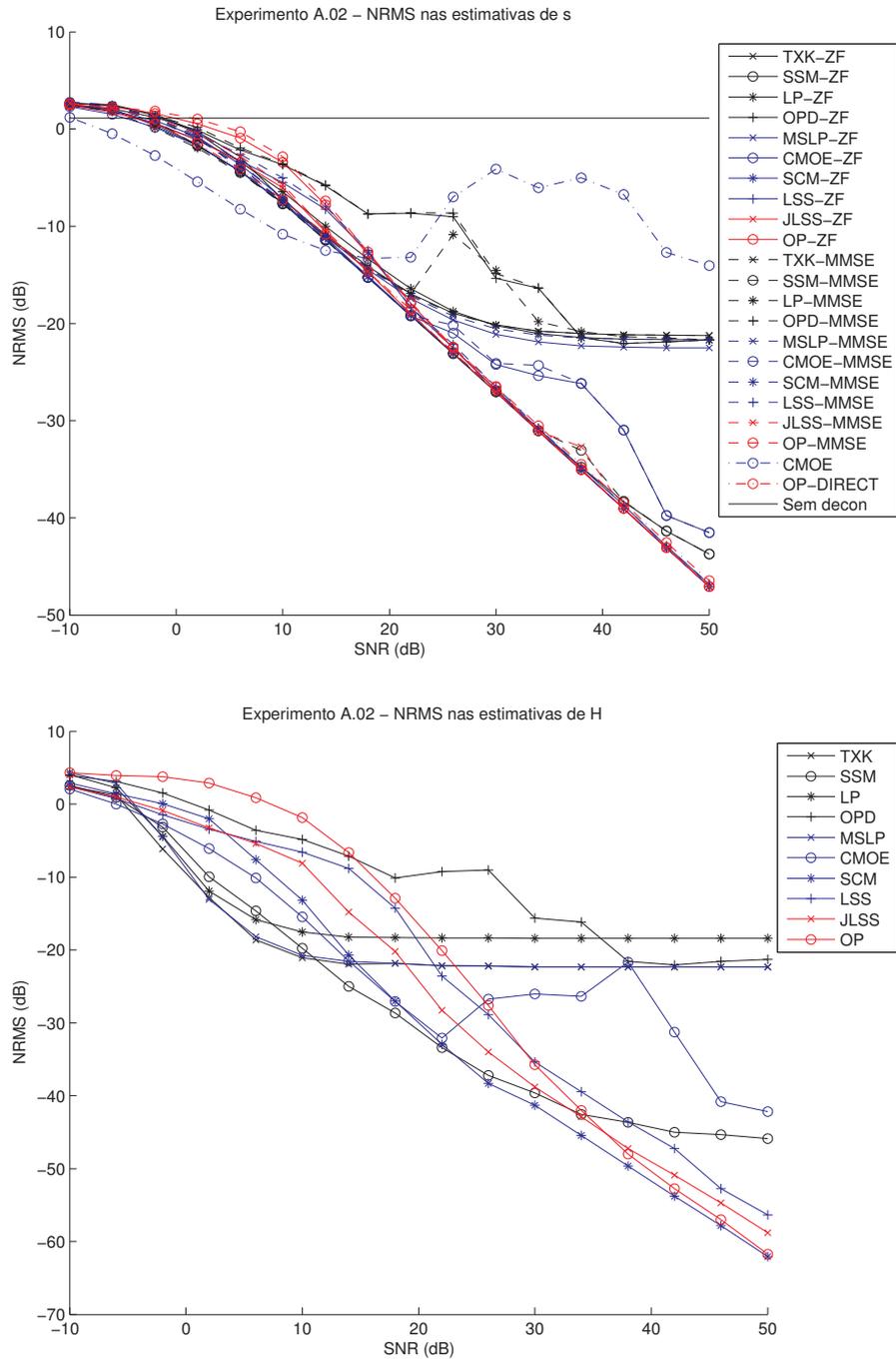


Figura D.13: Experimento A.02, realizado com $N = 1000$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

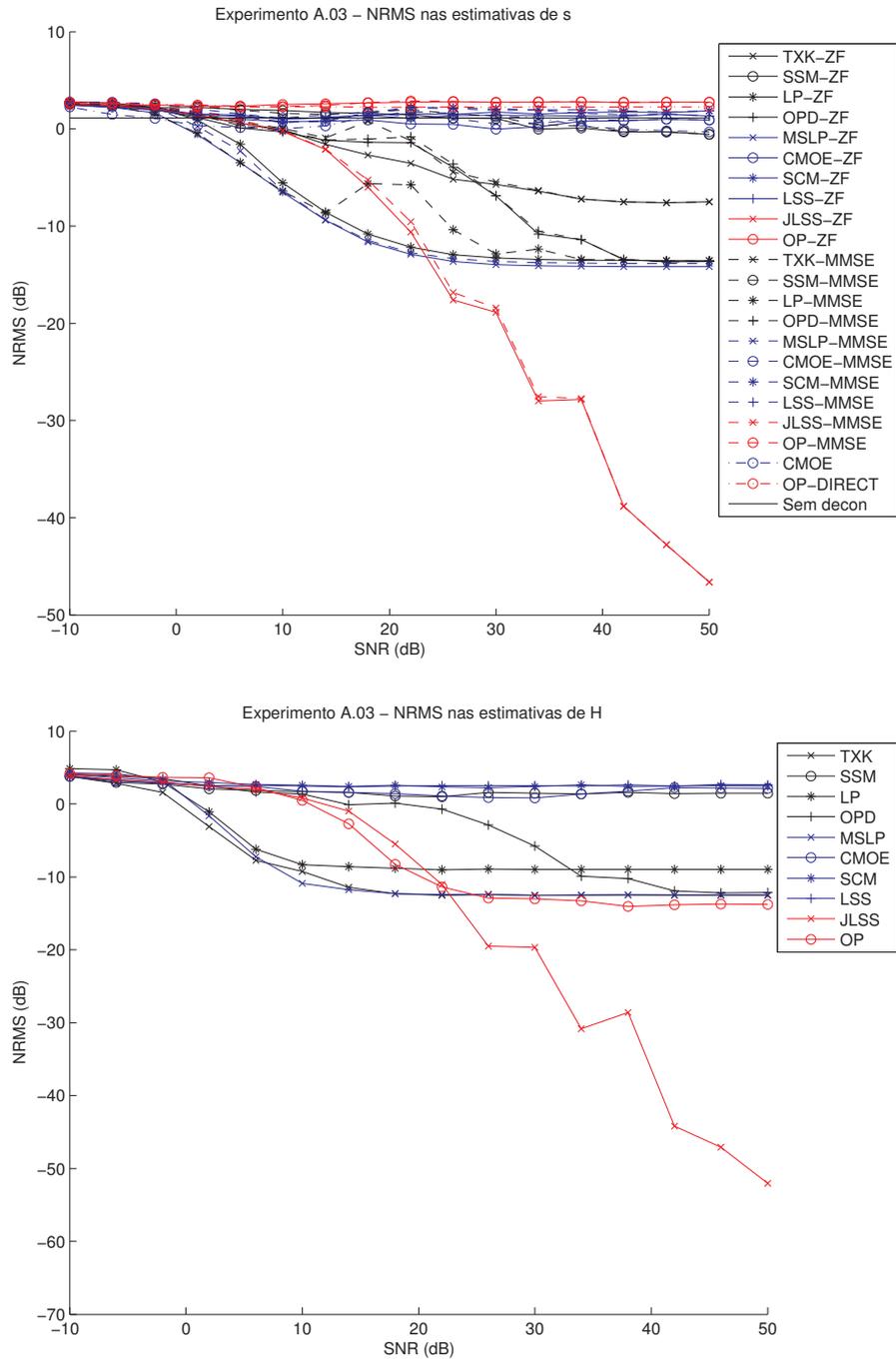


Figura D.14: Experimento A.03, realizado com $N = 200$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

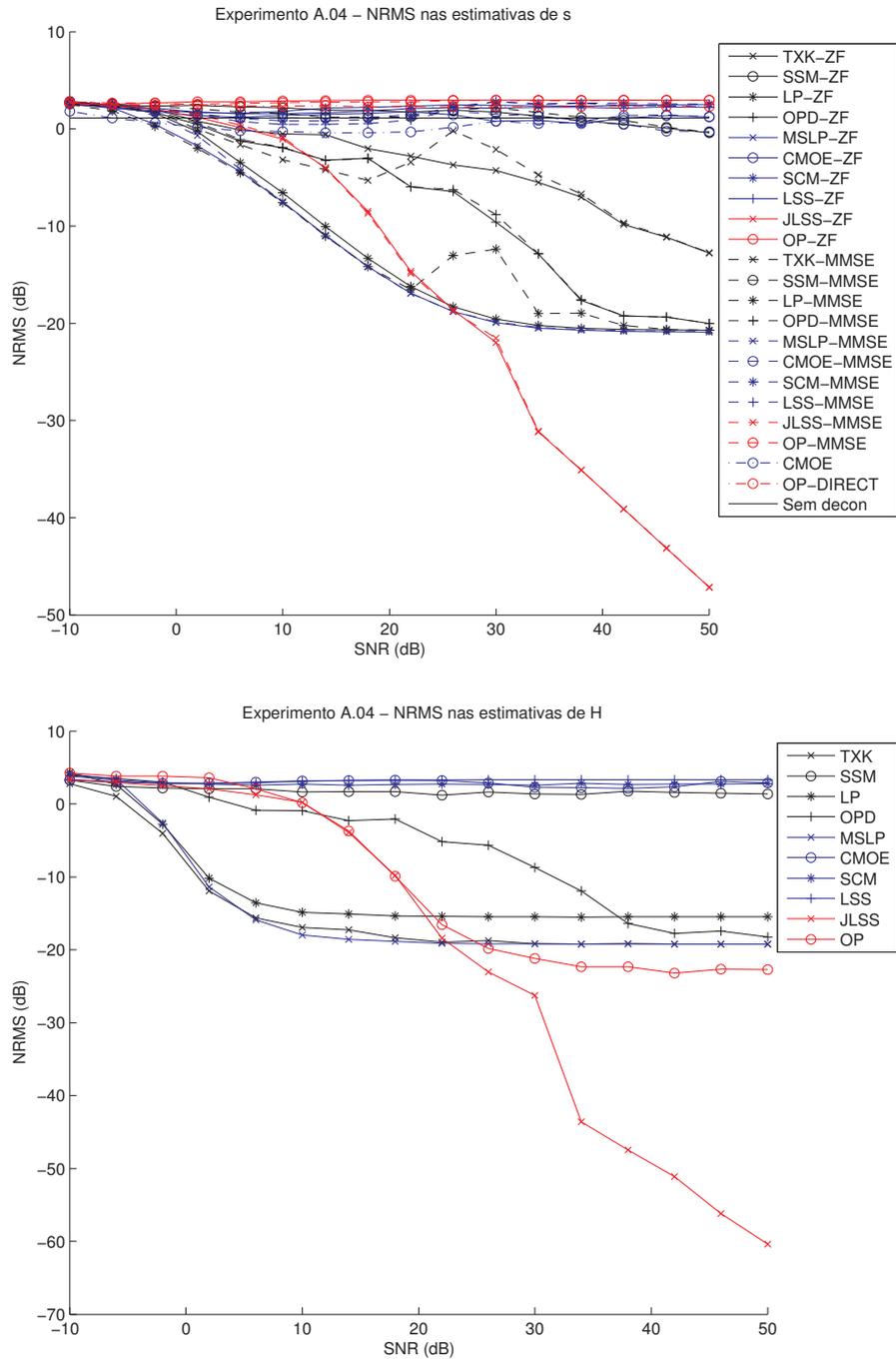


Figura D.15: Experimento A.04, realizado com $N = 1000$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

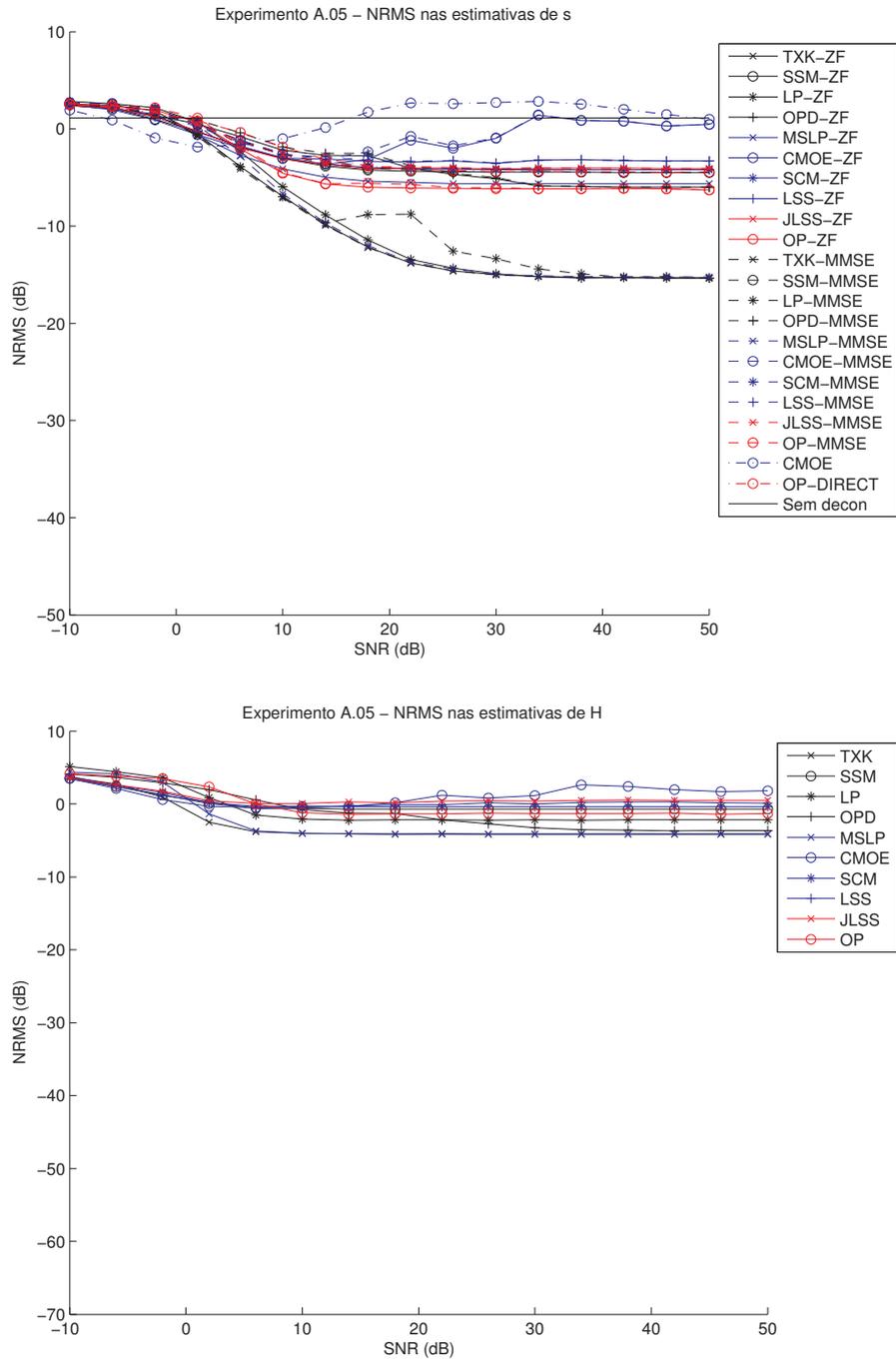


Figura D.16: Experimento A.05, realizado com $N = 200$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

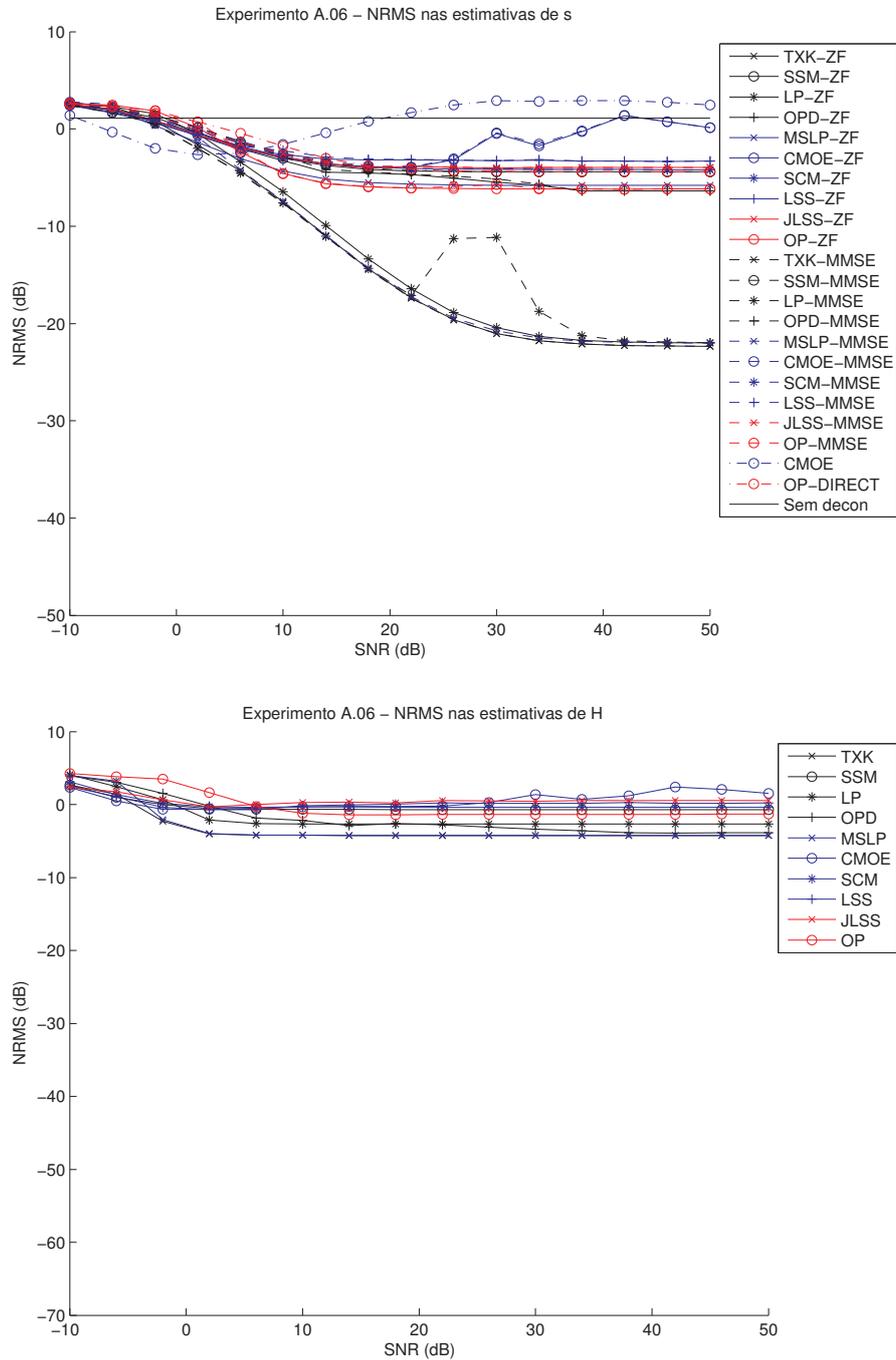


Figura D.17: Experimento A.06, realizado com $N = 1000$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

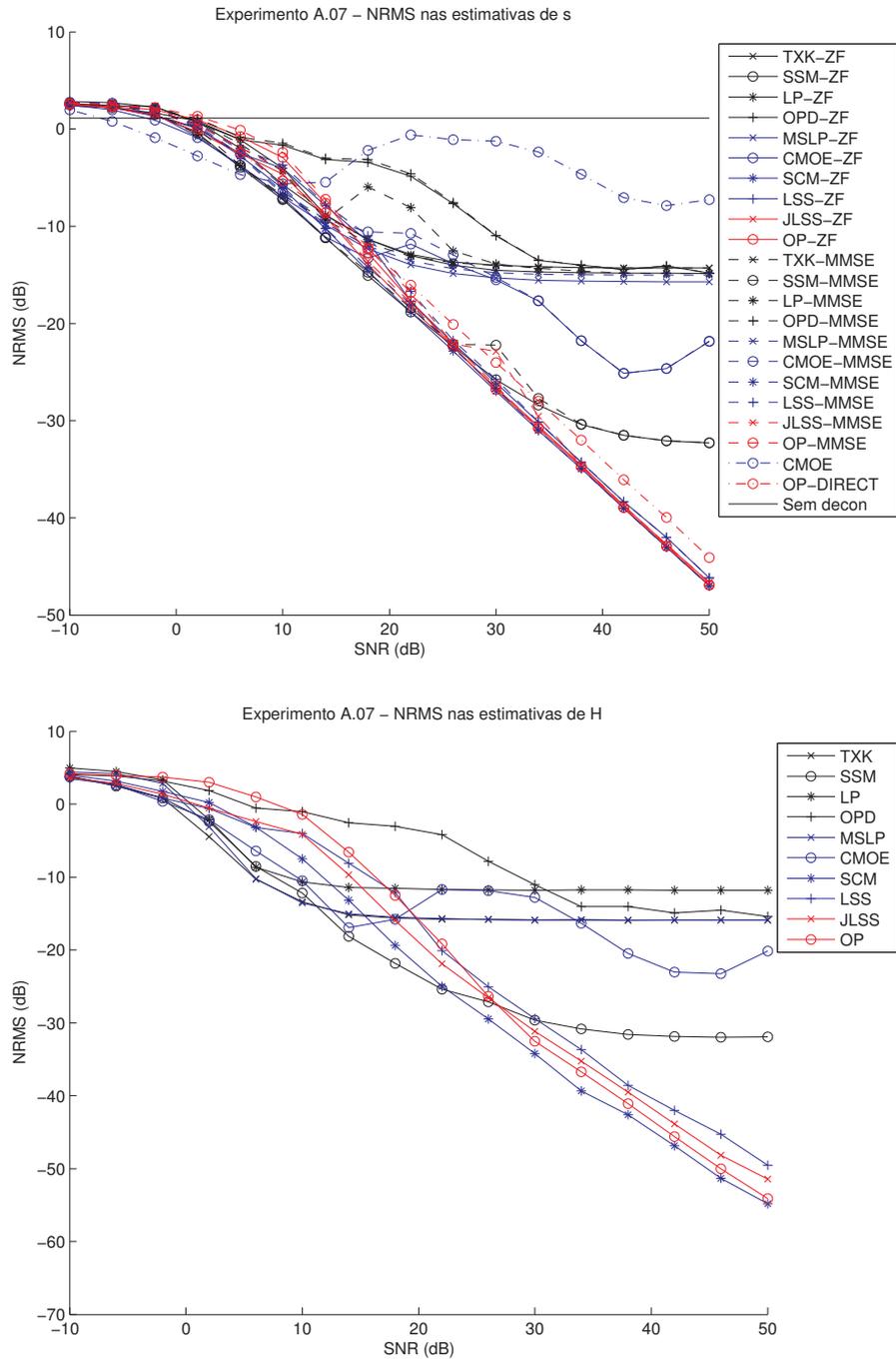


Figura D.18: Experimento A.07, realizado com $N = 200$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

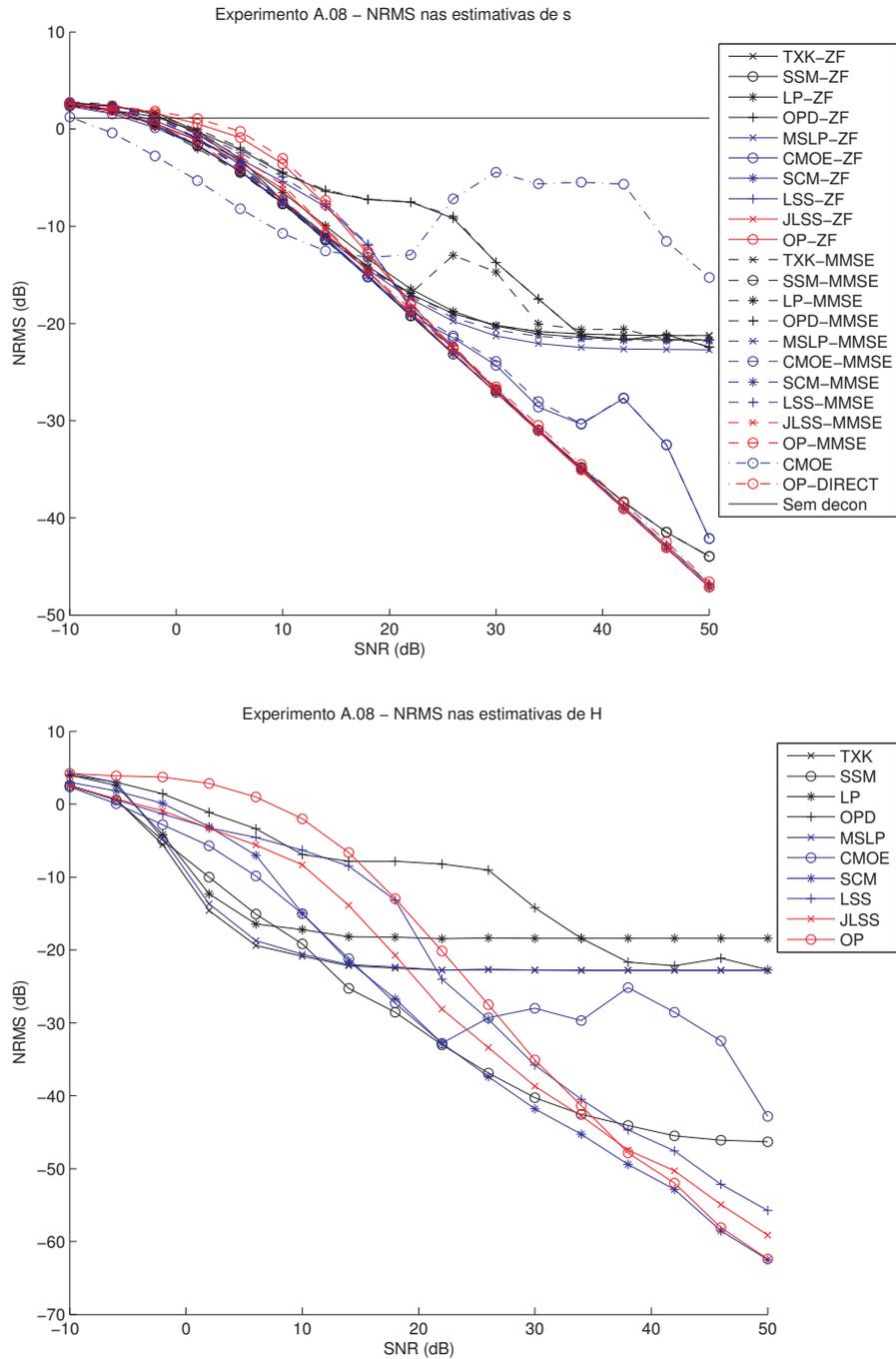


Figura D.19: Experimento A.08, realizado com $N = 1000$, $M = 5$ (exato), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

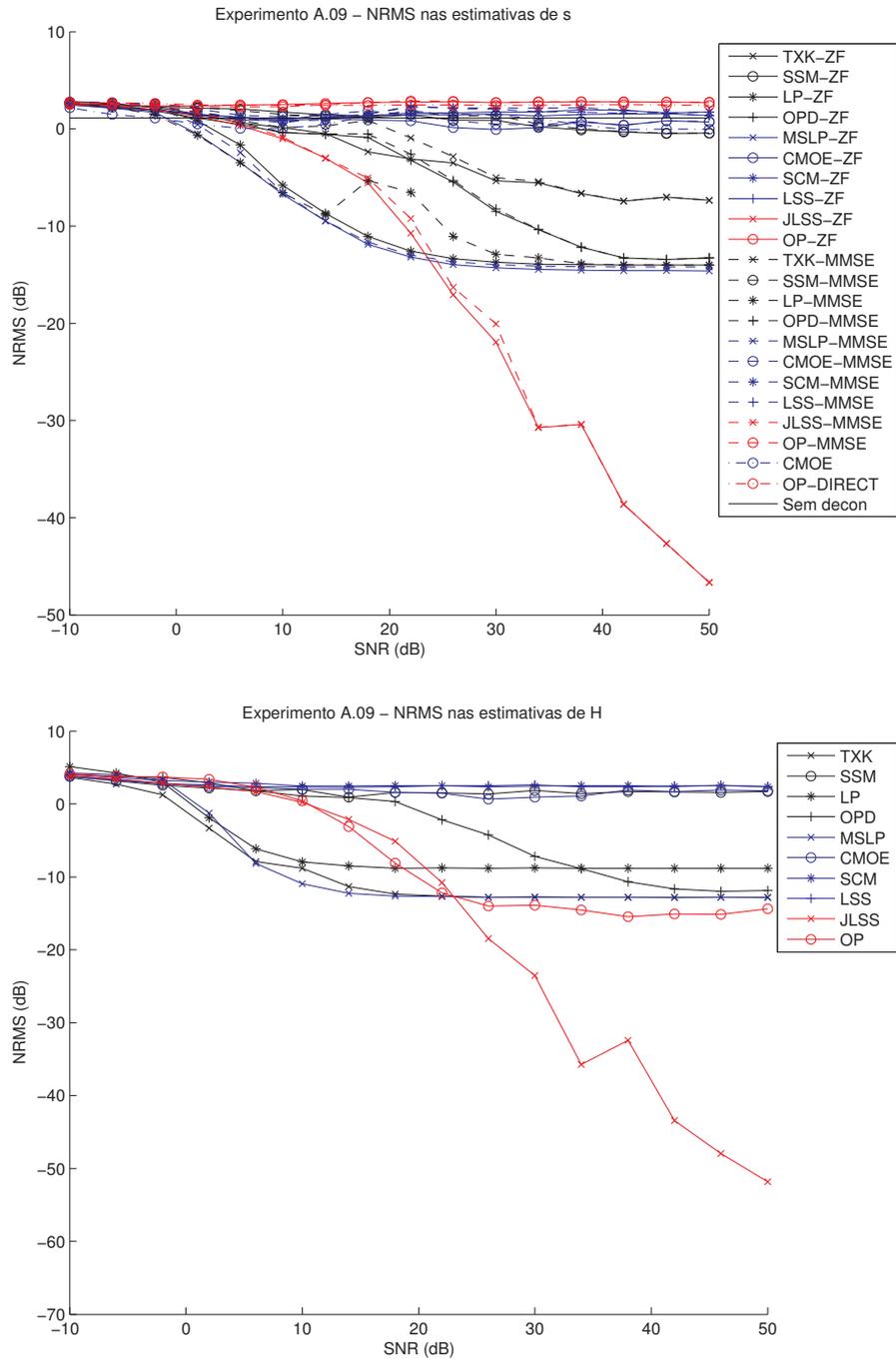


Figura D.20: Experimento A.09, realizado com $N = 200$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

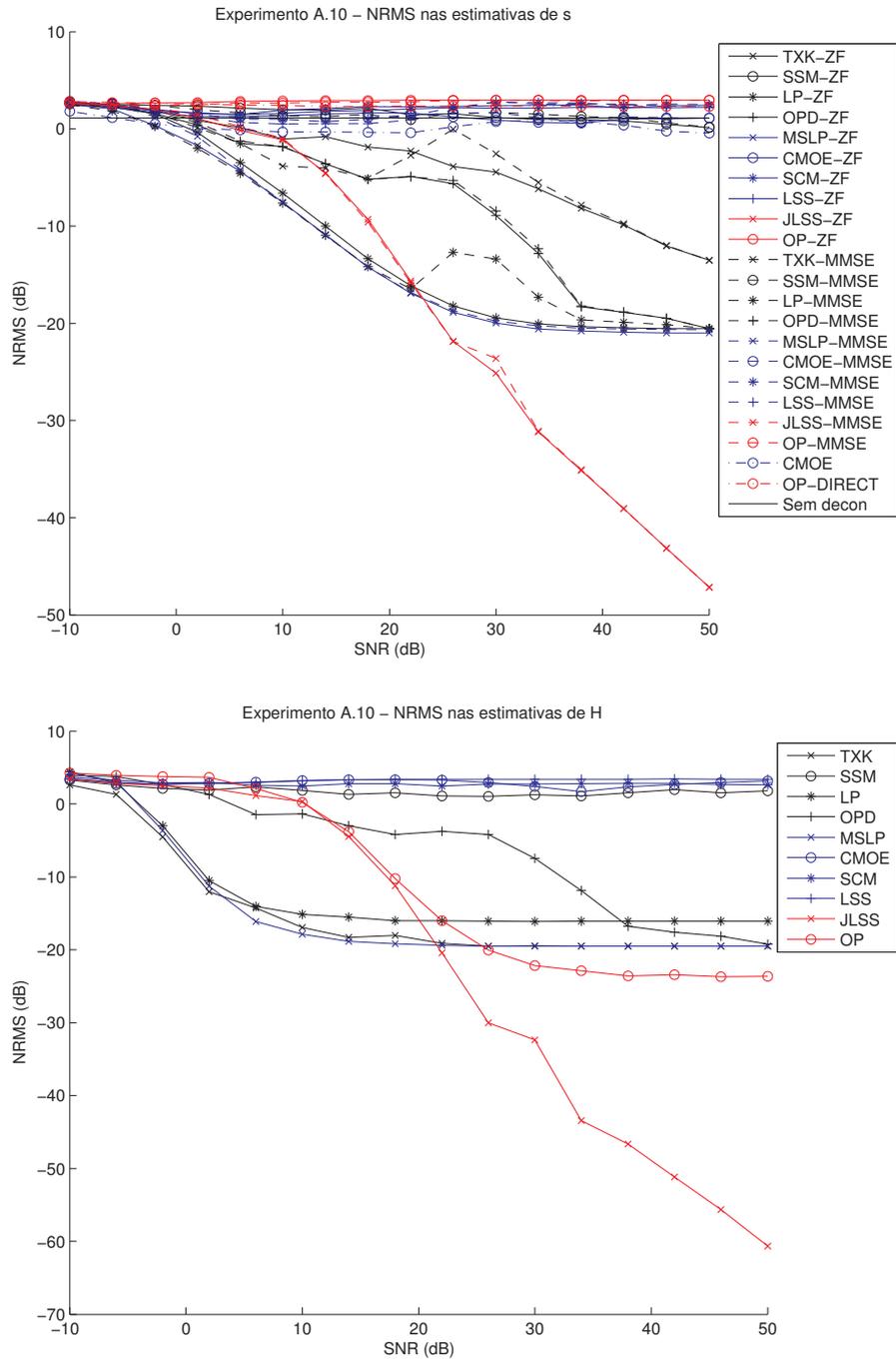


Figura D.21: Experimento A.10, realizado com $N = 1000$, $M = 7$ (superestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

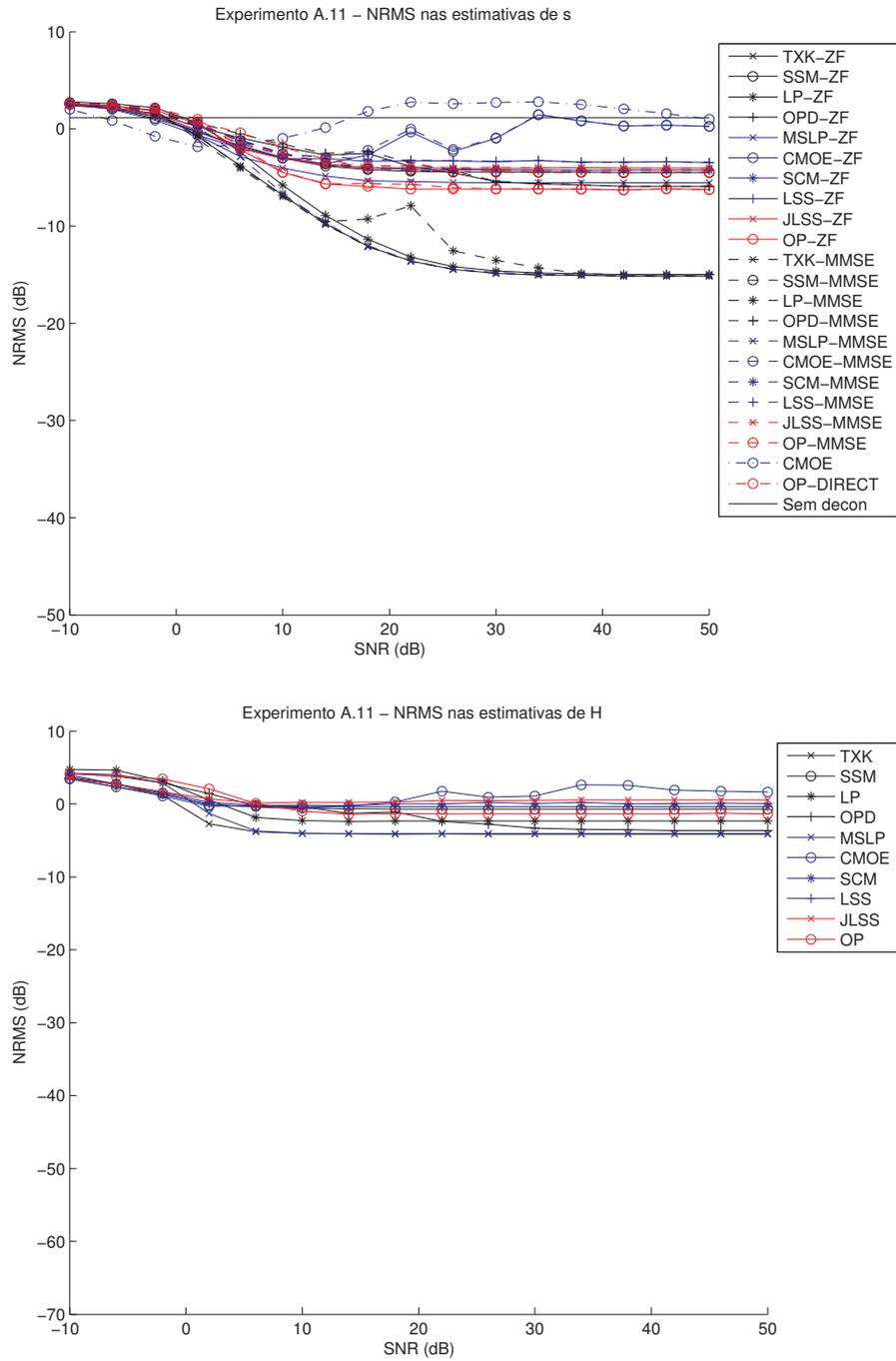


Figura D.22: Experimento A.11, realizado com $N = 200$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

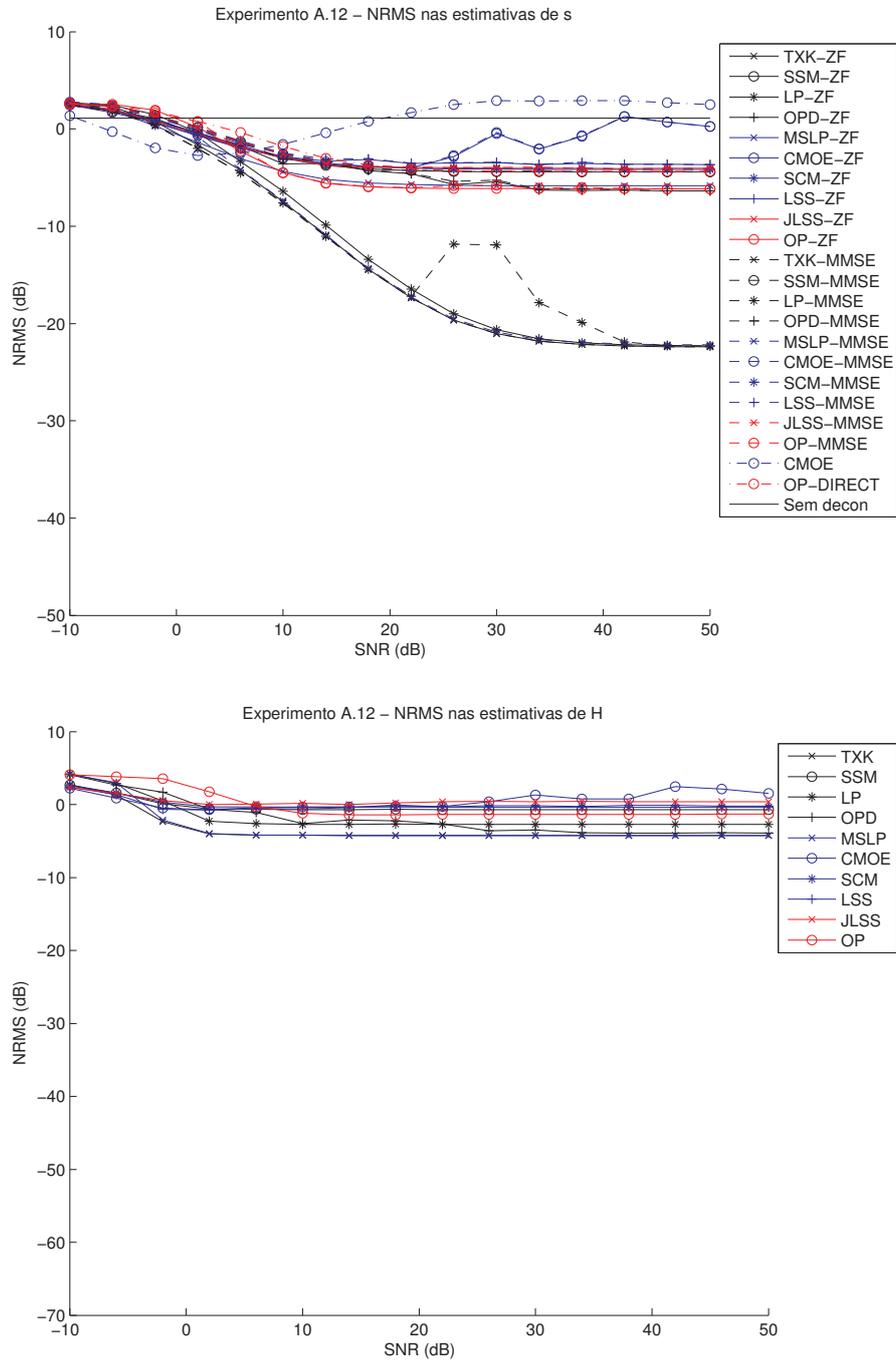


Figura D.23: Experimento A.12, realizado com $N = 1000$, $M = 4$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

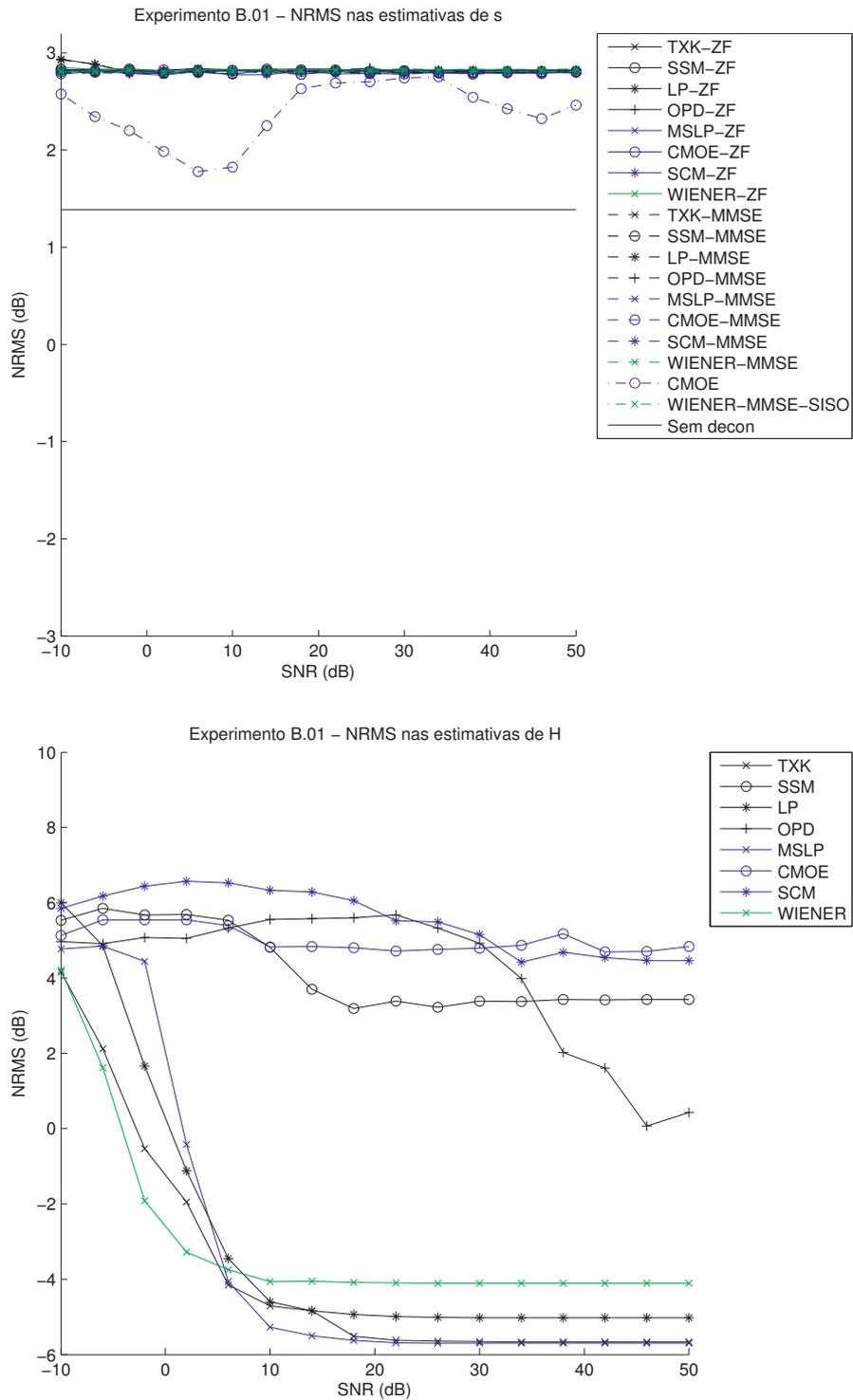


Figura D.24: Experimento B.01, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

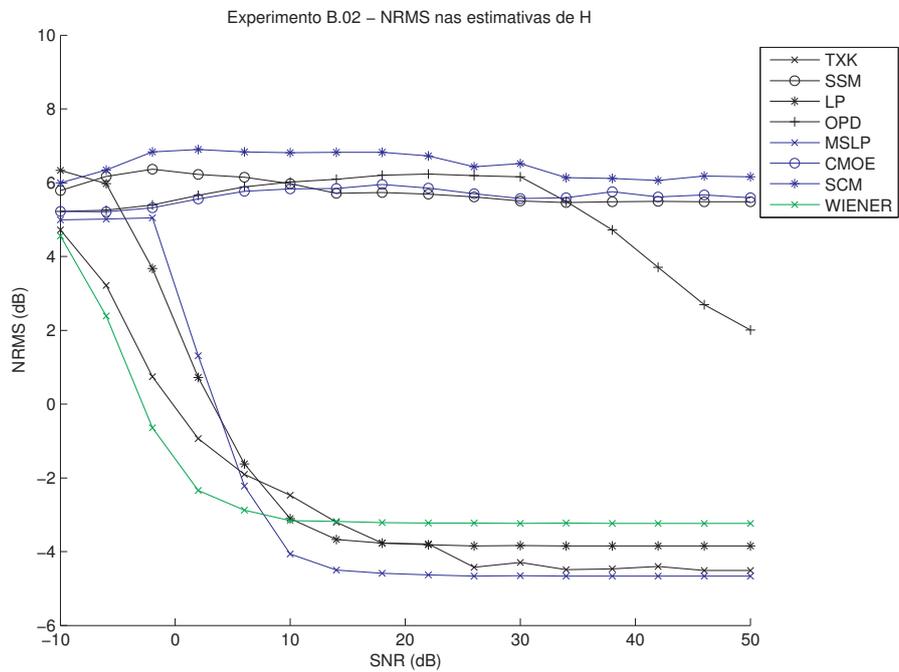
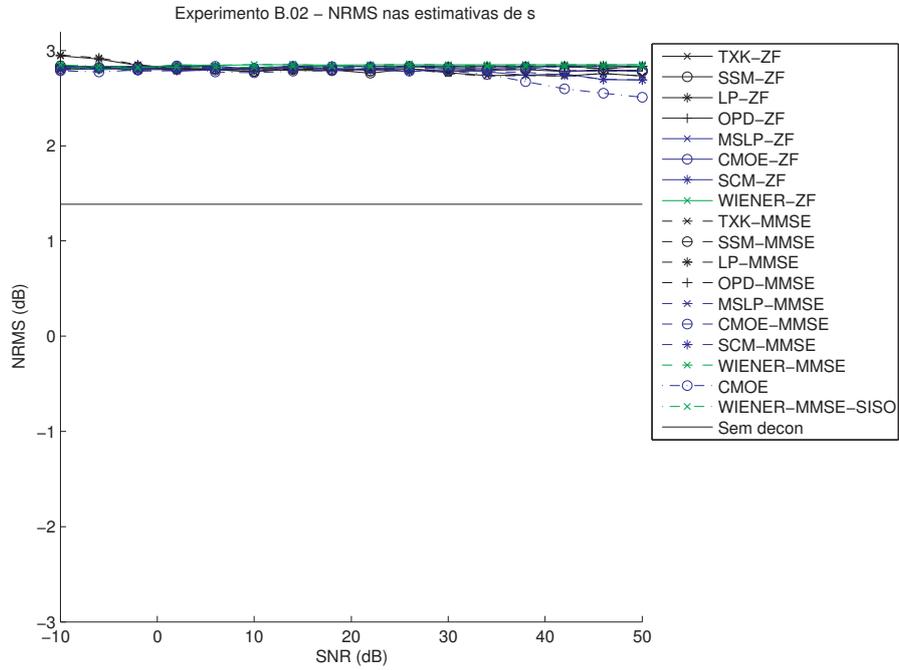


Figura D.25: Experimento B.02, realizado com $N = 330$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

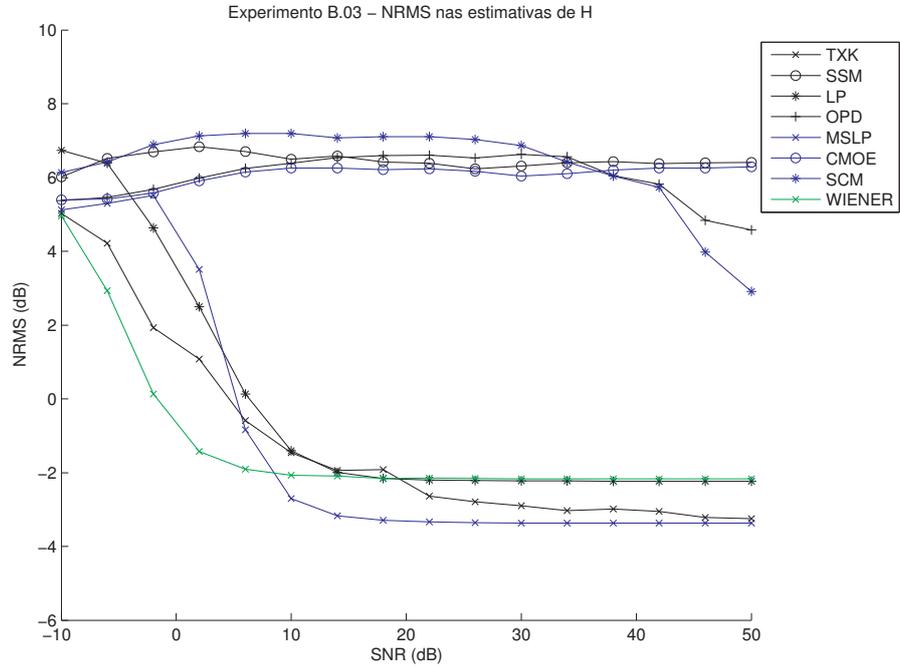
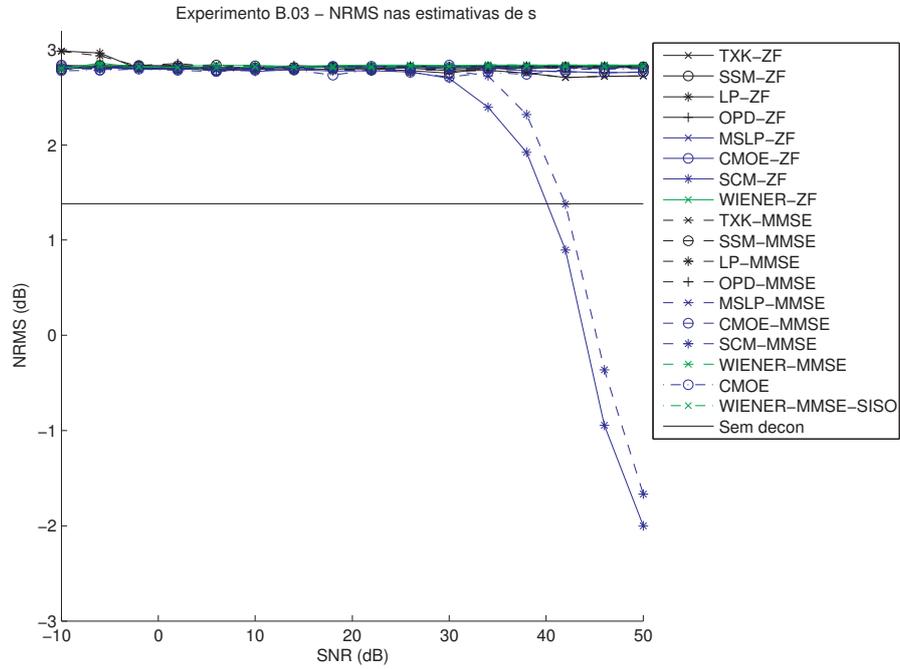


Figura D.26: Experimento B.03, realizado com $N = 330$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

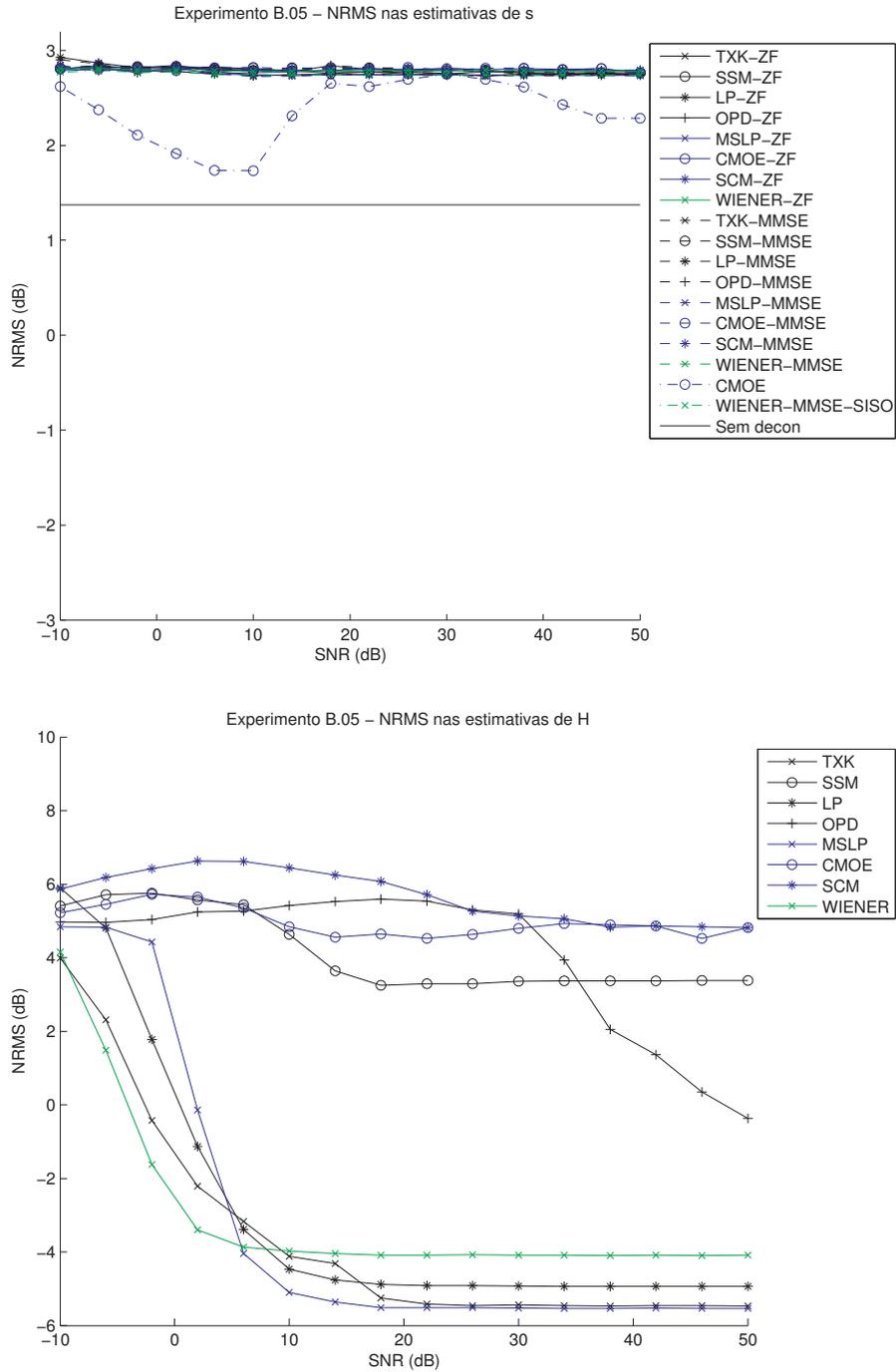


Figura D.27: Experimento B.05, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

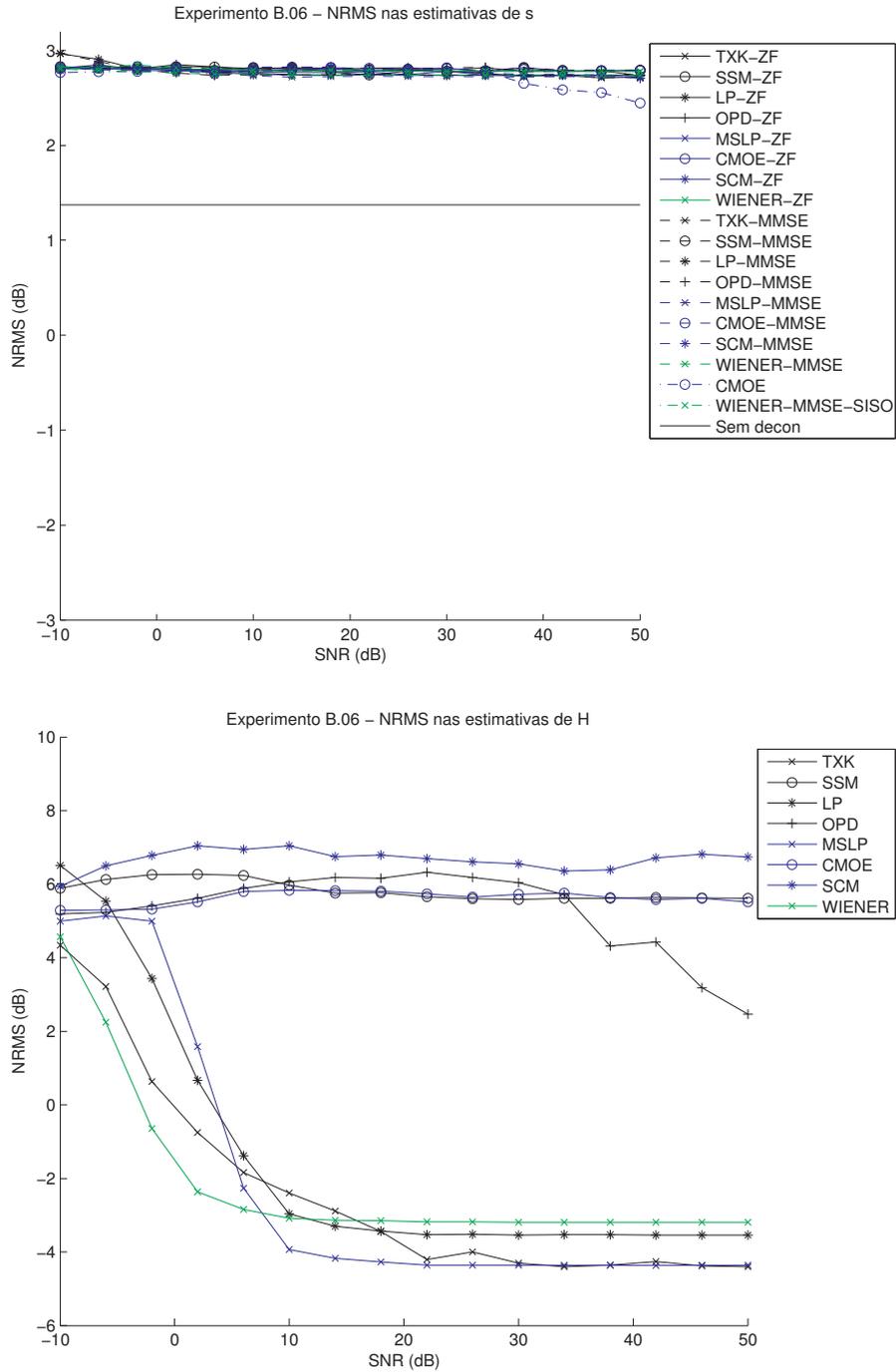


Figura D.28: Experimento B.06, realizado com $N = 330$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

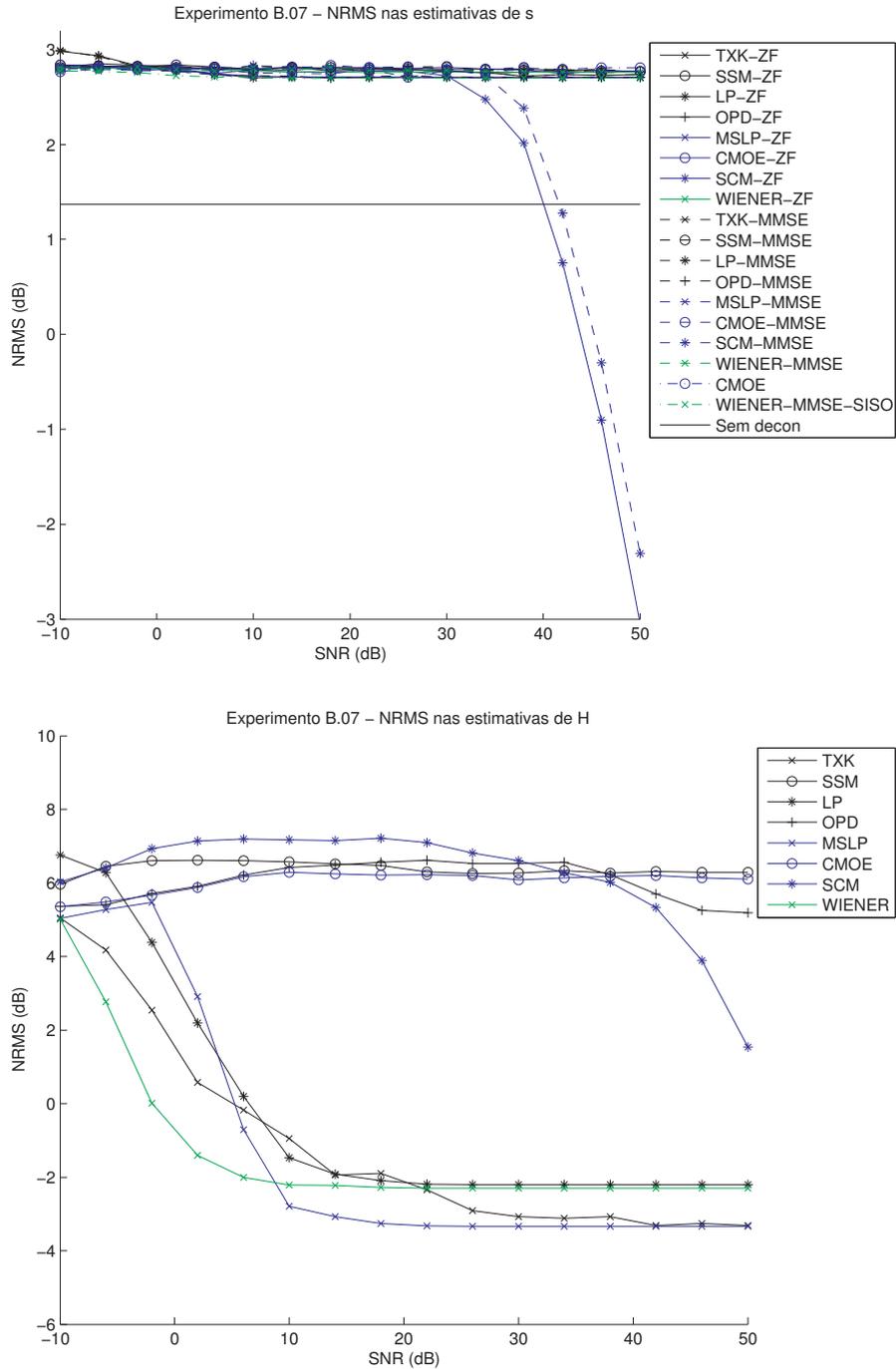


Figura D.29: Experimento B.07, realizado com $N = 330$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

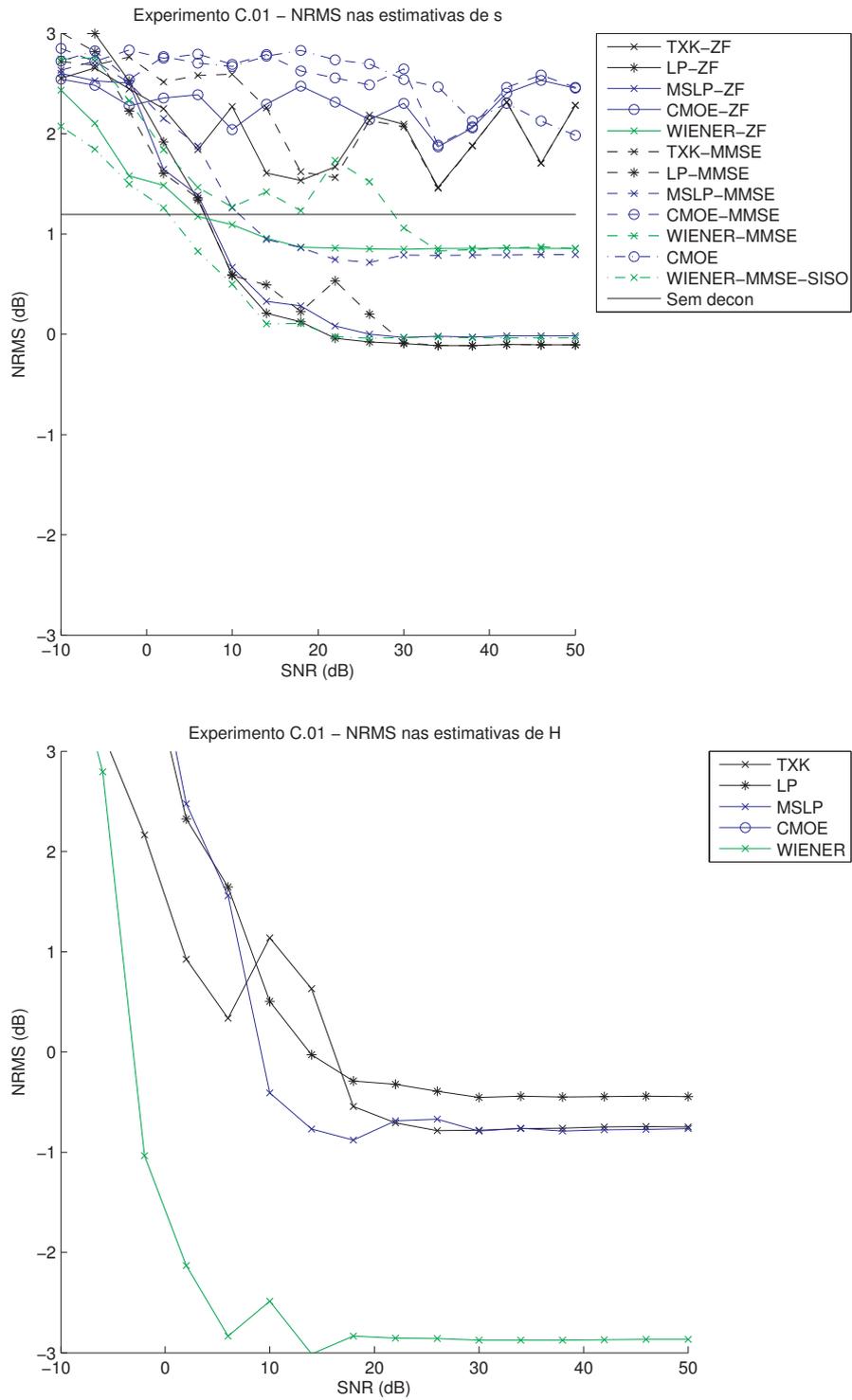


Figura D.30: Experimento C.01, realizado com $N = 144$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

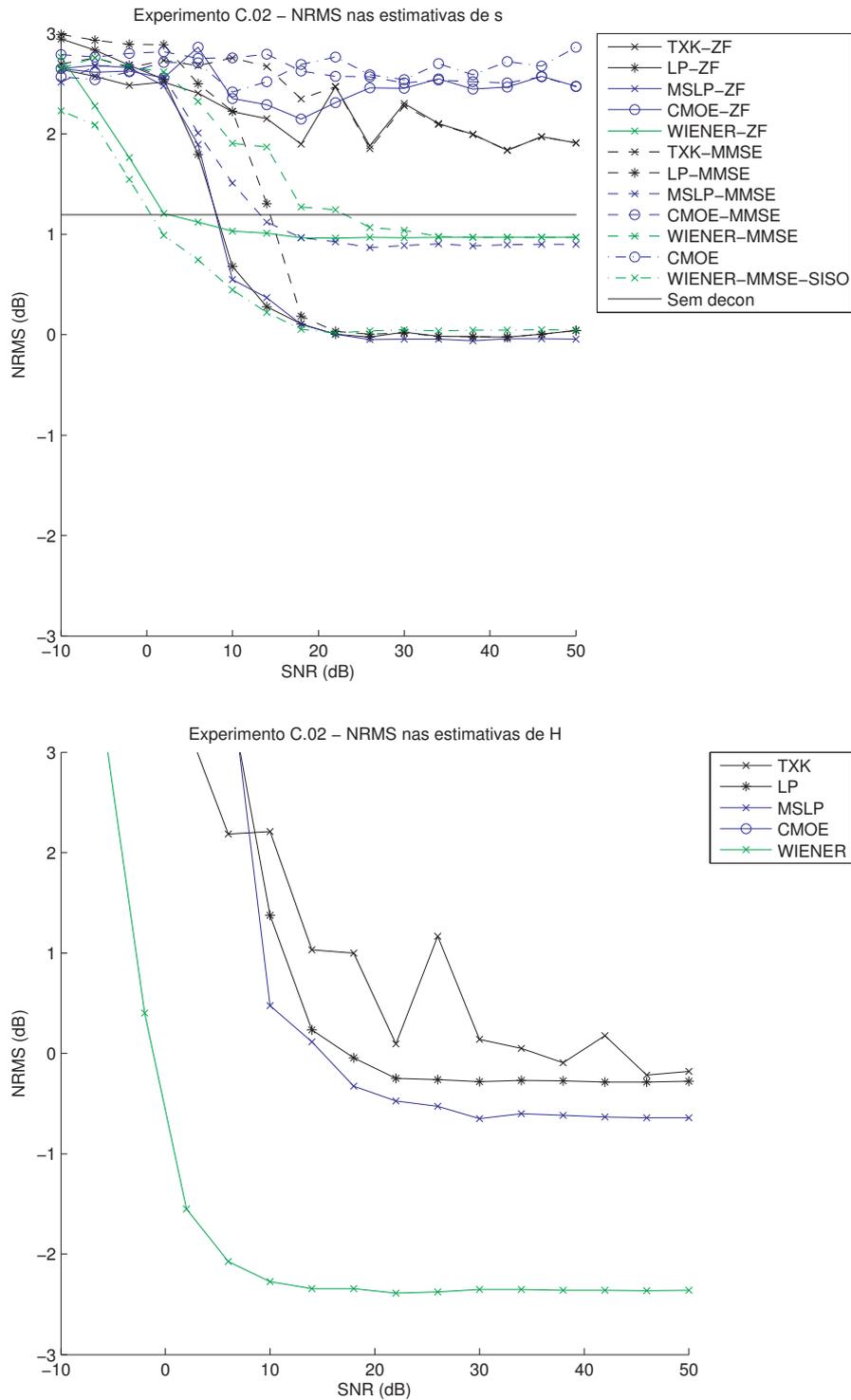


Figura D.31: Experimento C.02, realizado com $N = 144$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

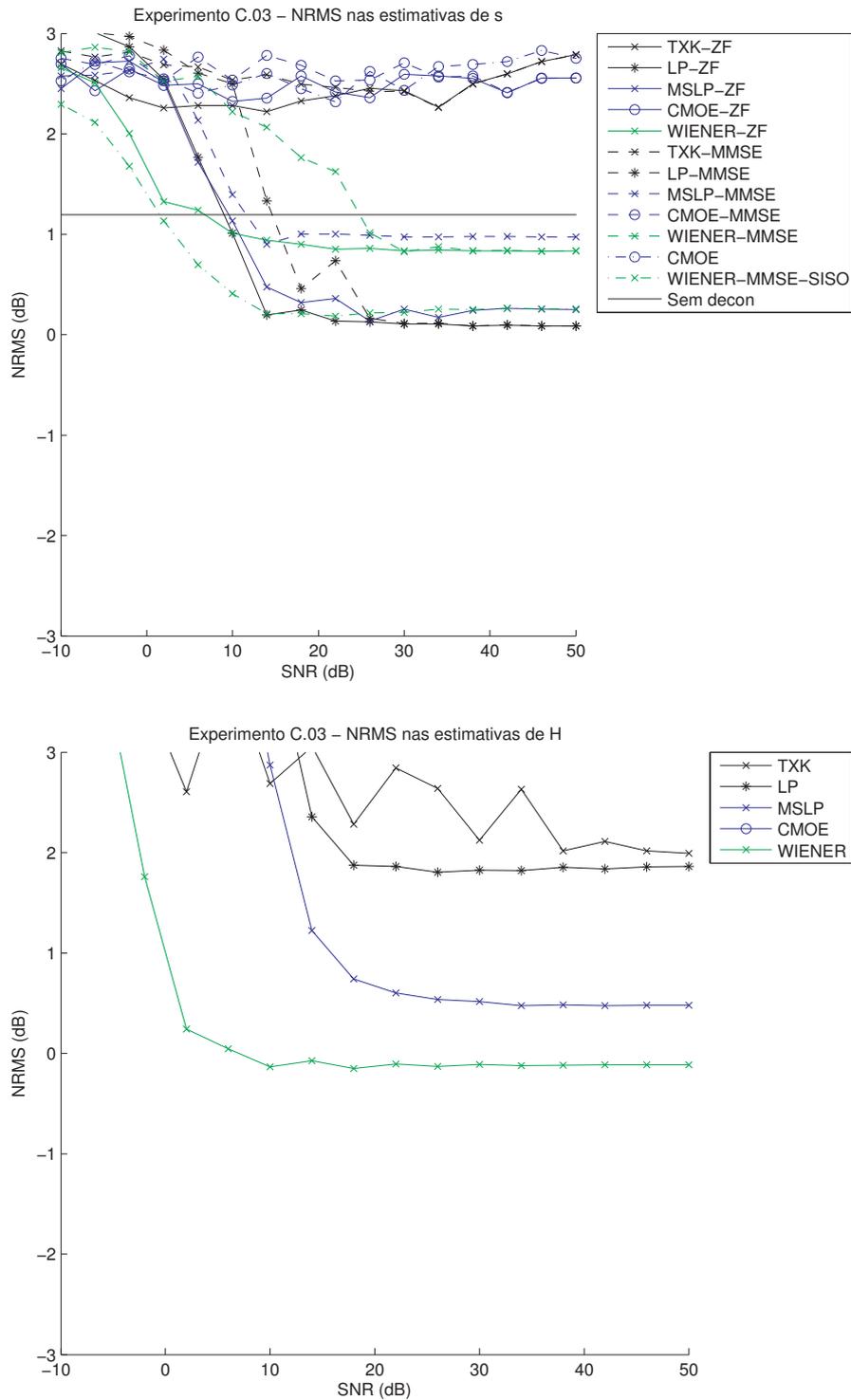


Figura D.32: Experimento C.03, realizado com $N = 144$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

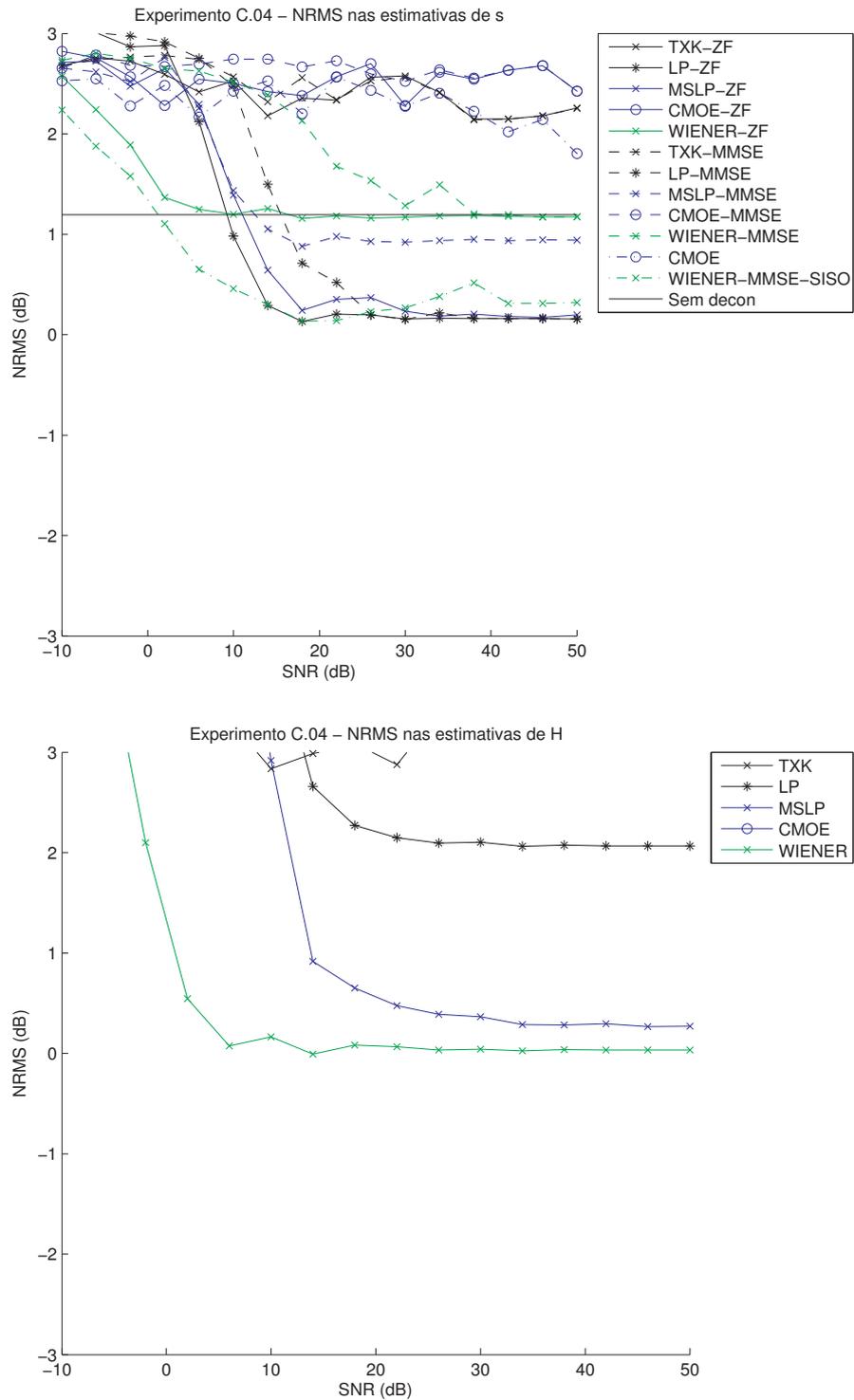


Figura D.33: Experimento C.04, realizado com $N = 144$, $M = 47$ (superestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

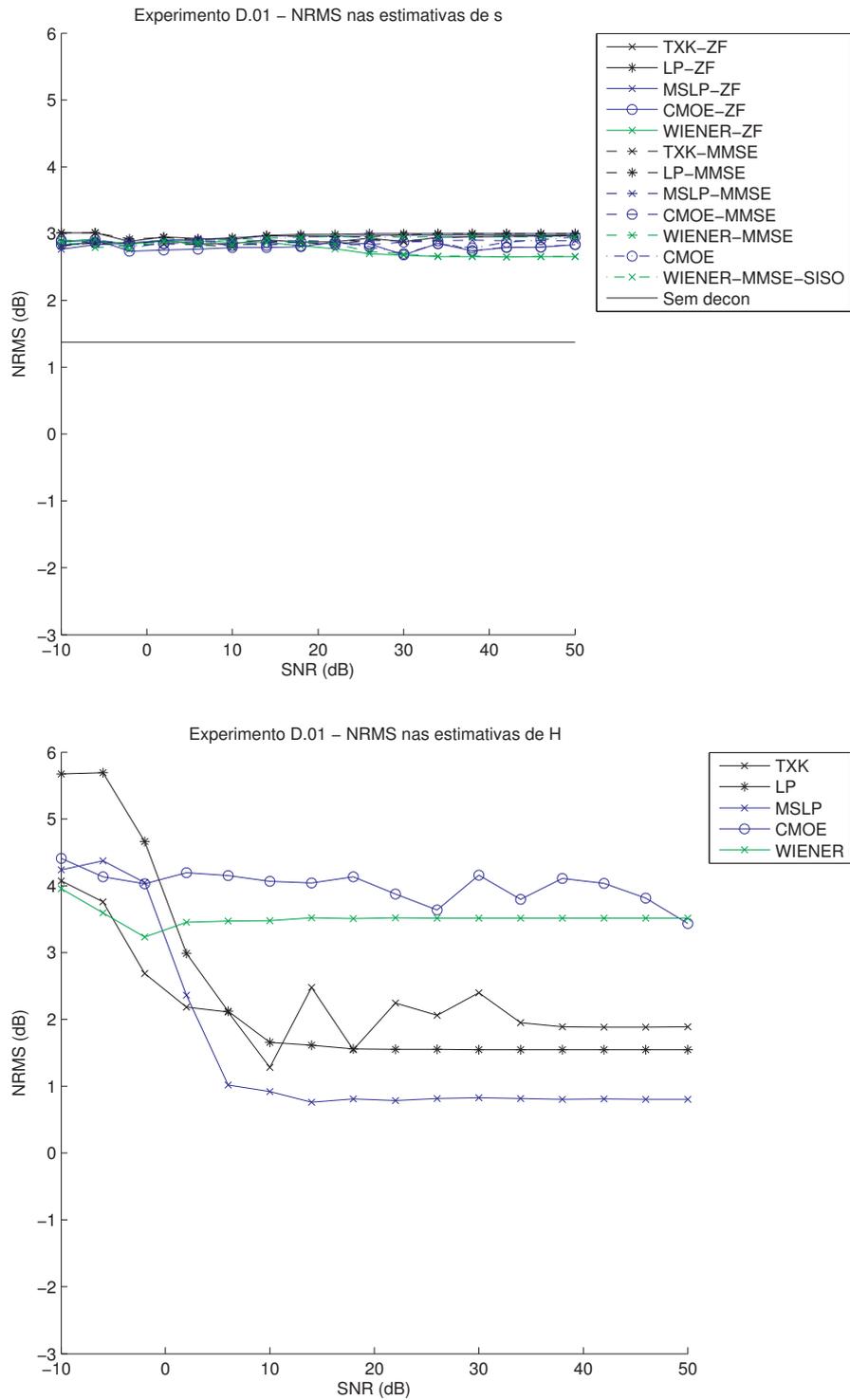


Figura D.34: Experimento D.01, realizado com $N = 582$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

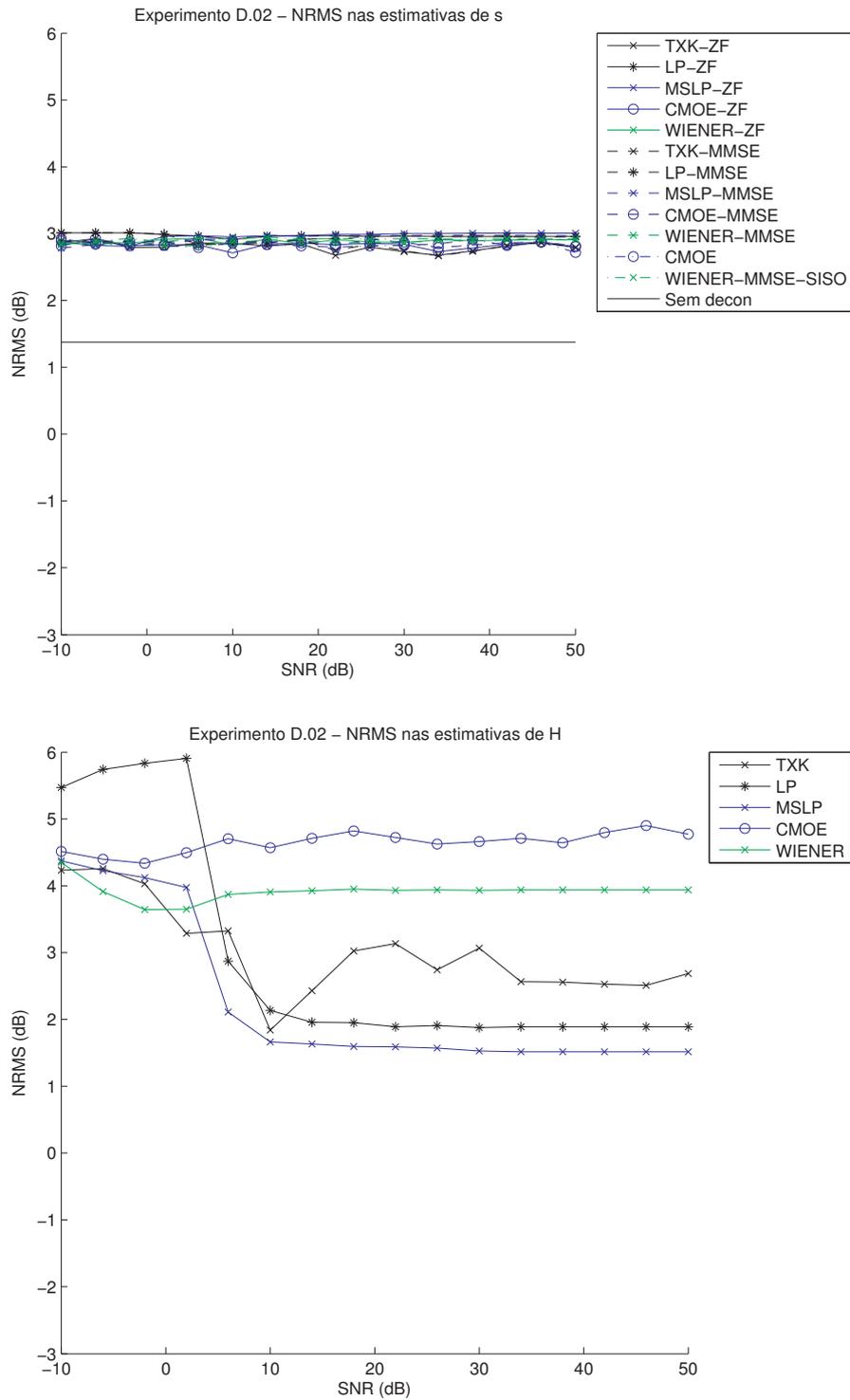


Figura D.35: Experimento D.02, realizado com $N = 582$, $M = 100$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

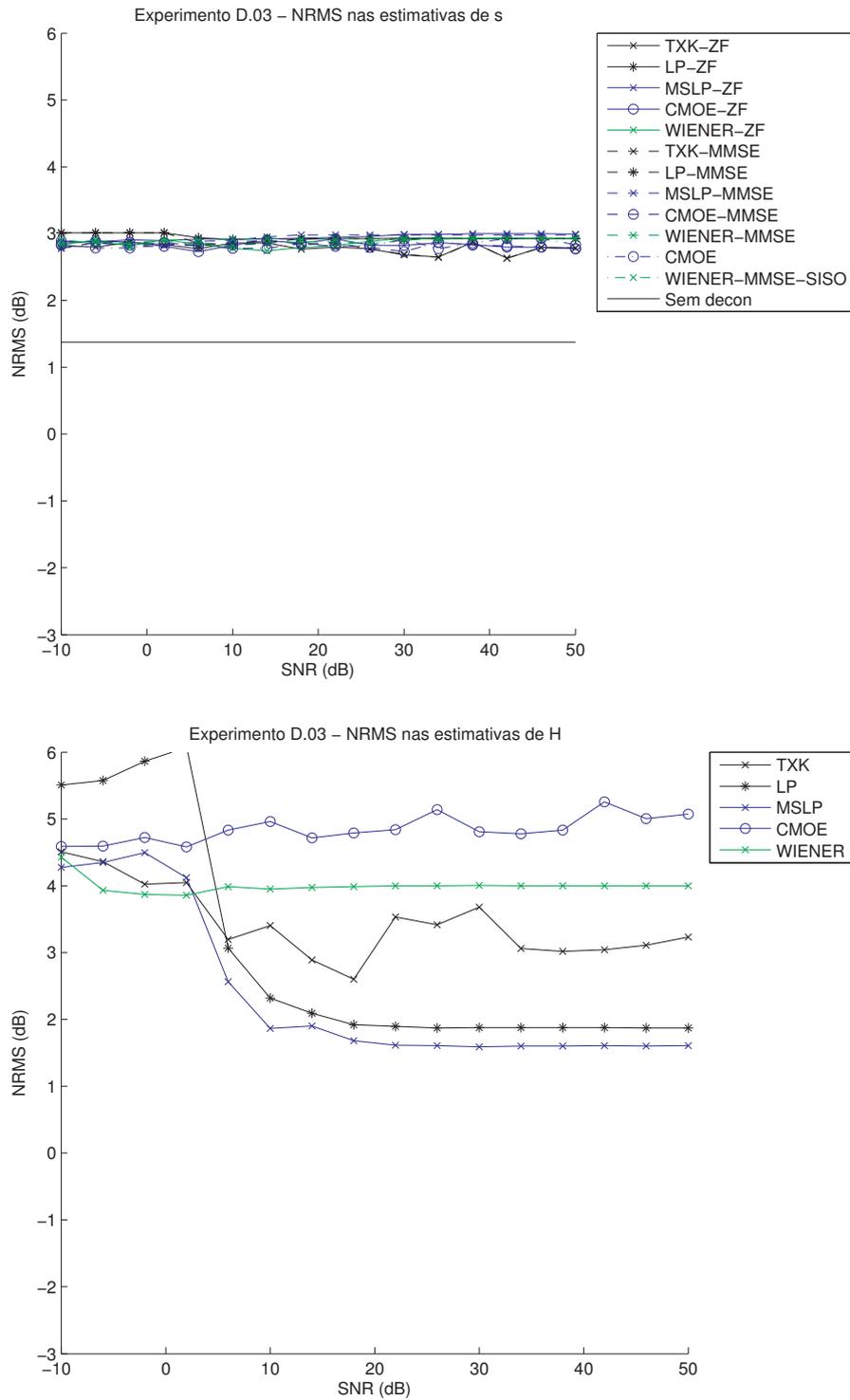


Figura D.36: Experimento D.03, realizado com $N = 582$, $M = 125$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

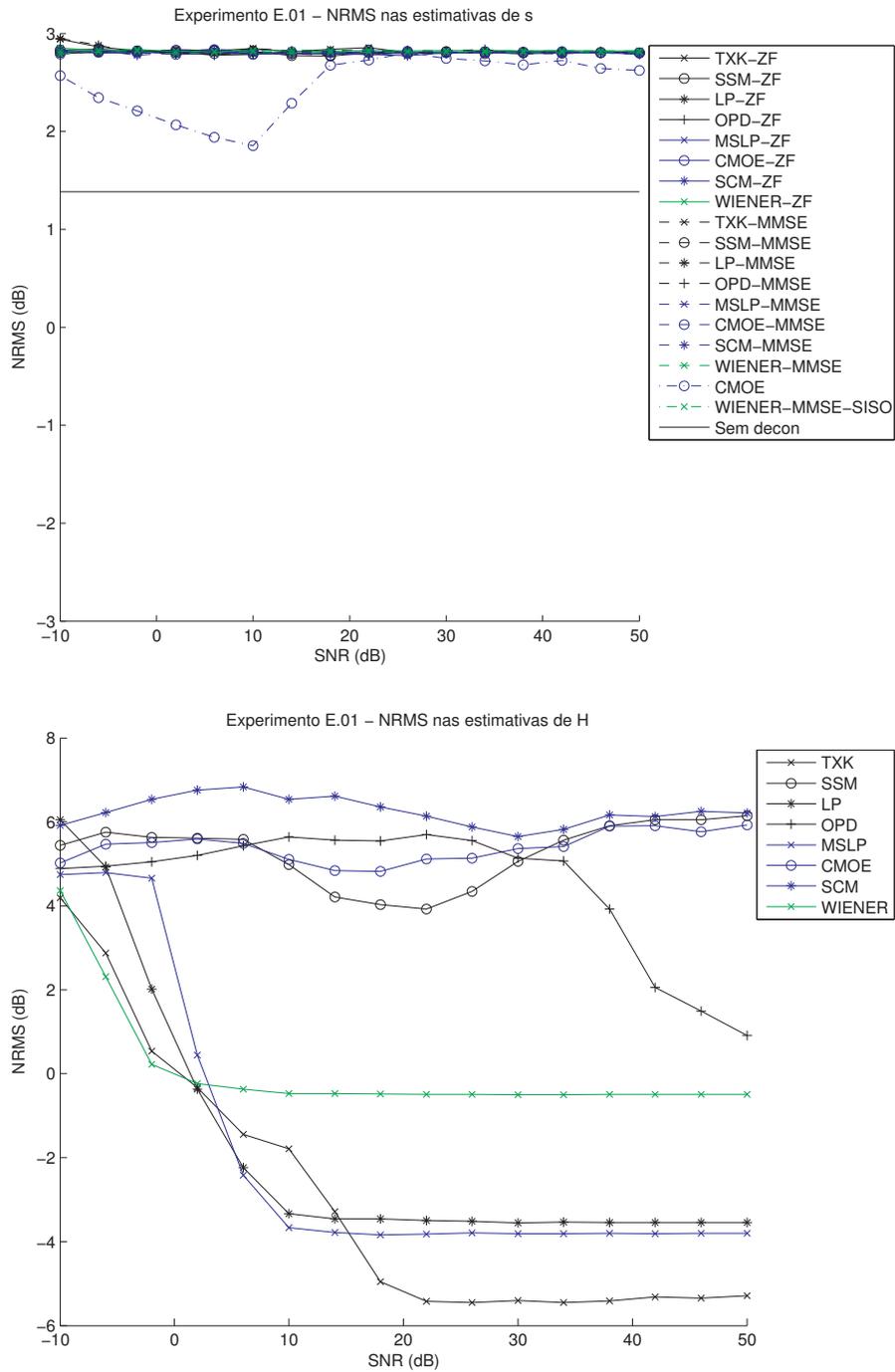


Figura D.37: Experimento E.01, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

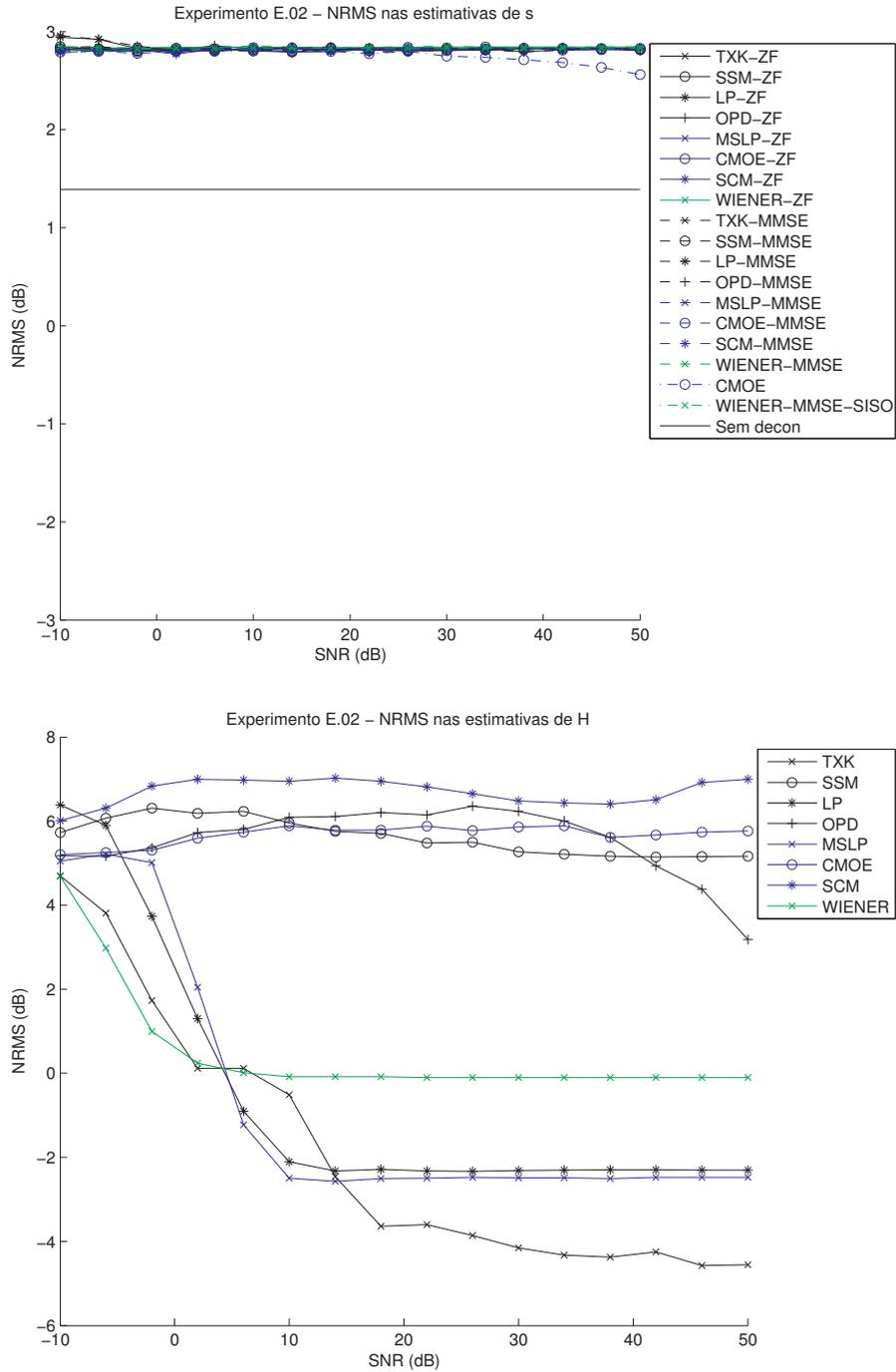


Figura D.38: Experimento E.02, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

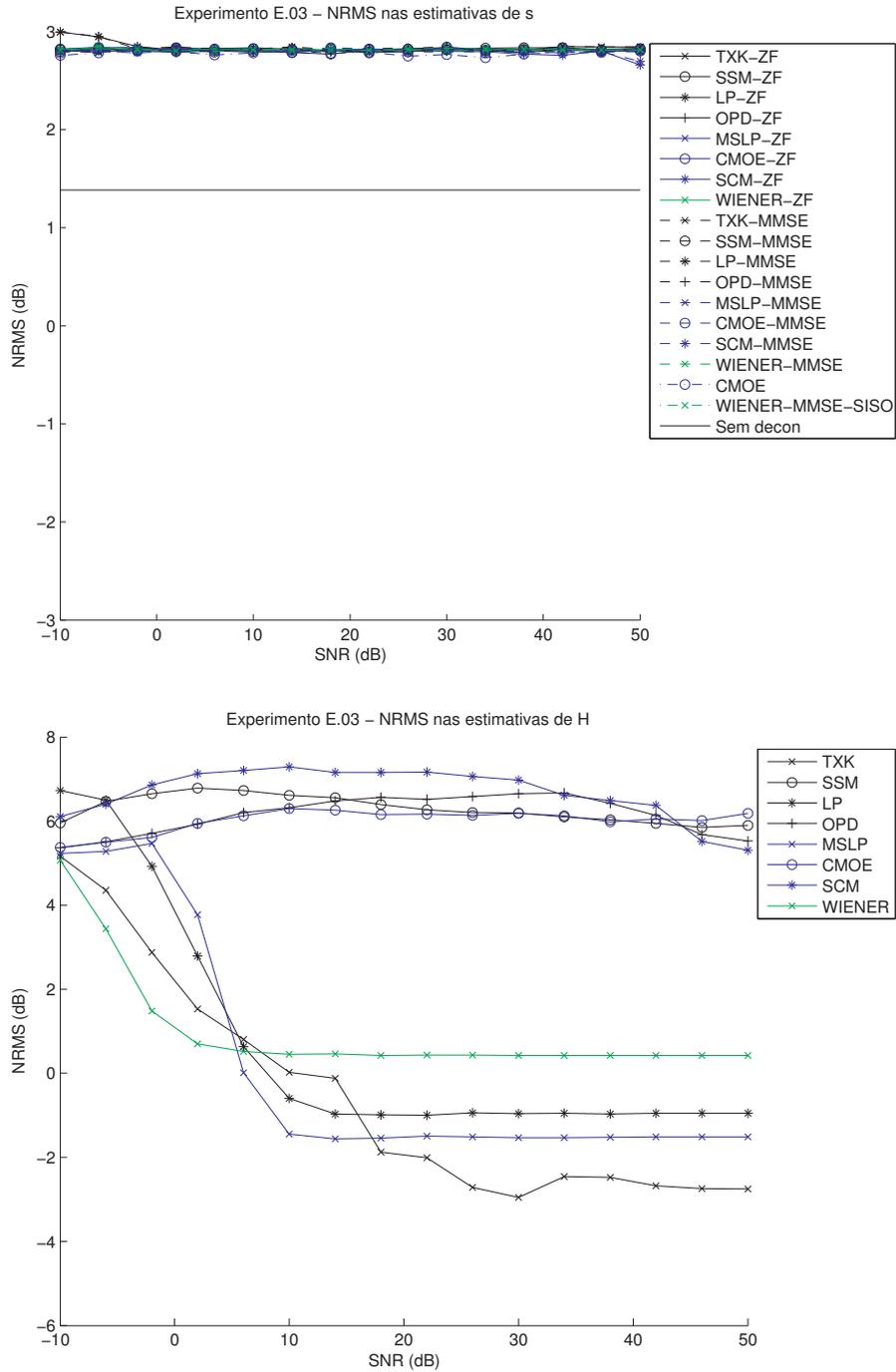


Figura D.39: Experimento E.03, realizado com $N = 330$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

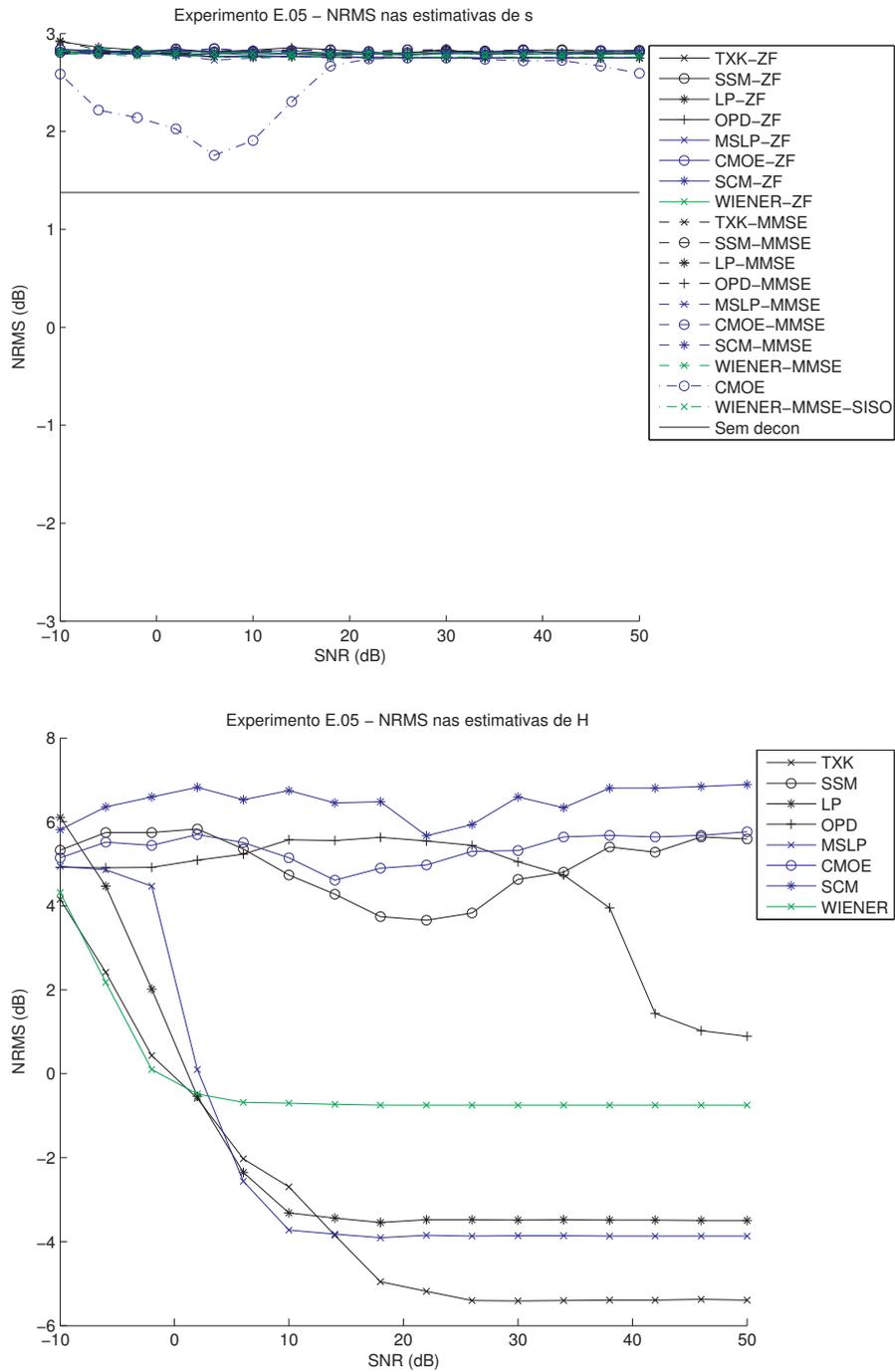


Figura D.40: Experimento E.05, realizado com $N = 330$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

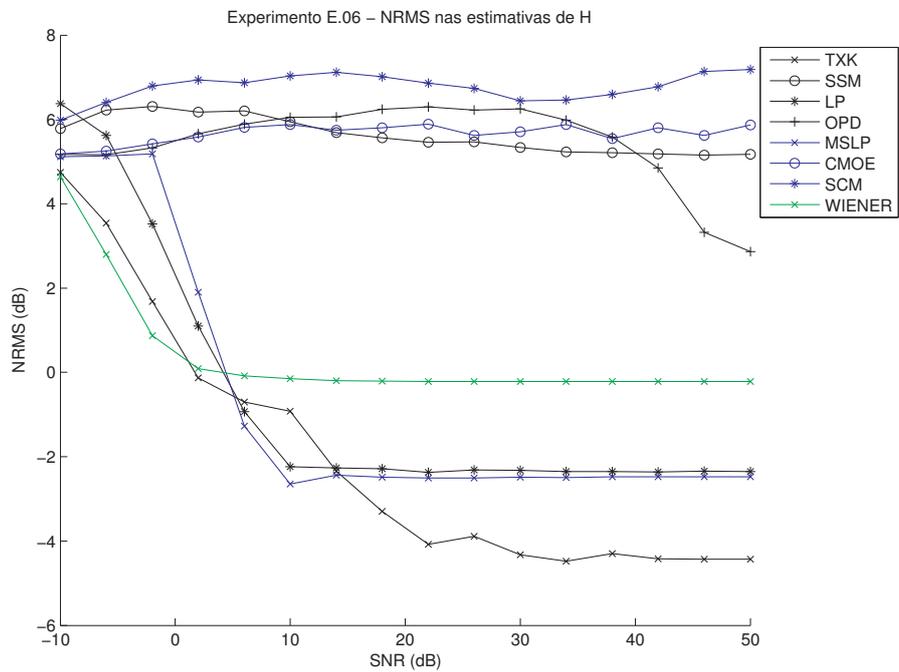
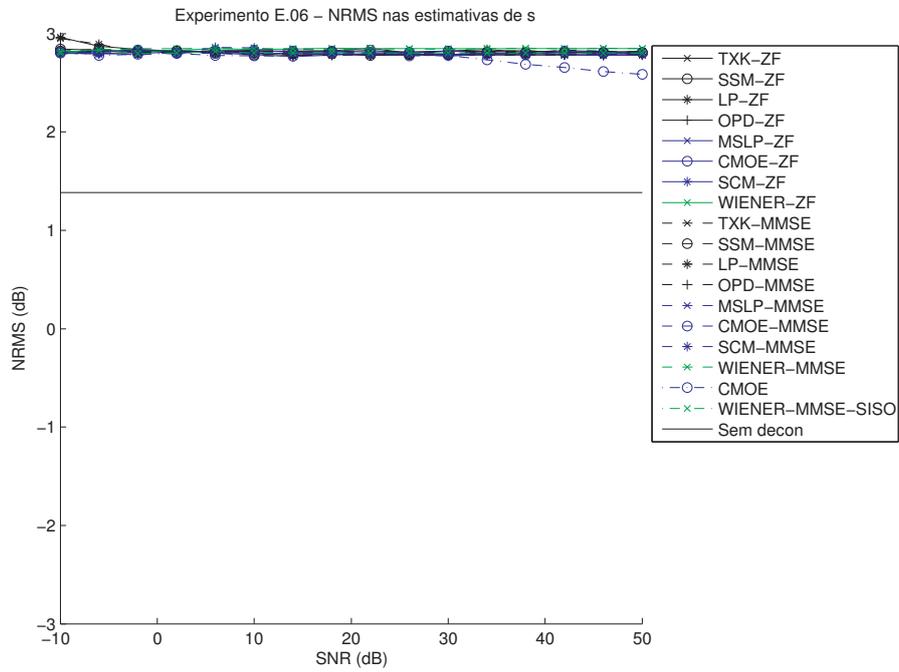


Figura D.41: Experimento E.06, realizado com $N = 330$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

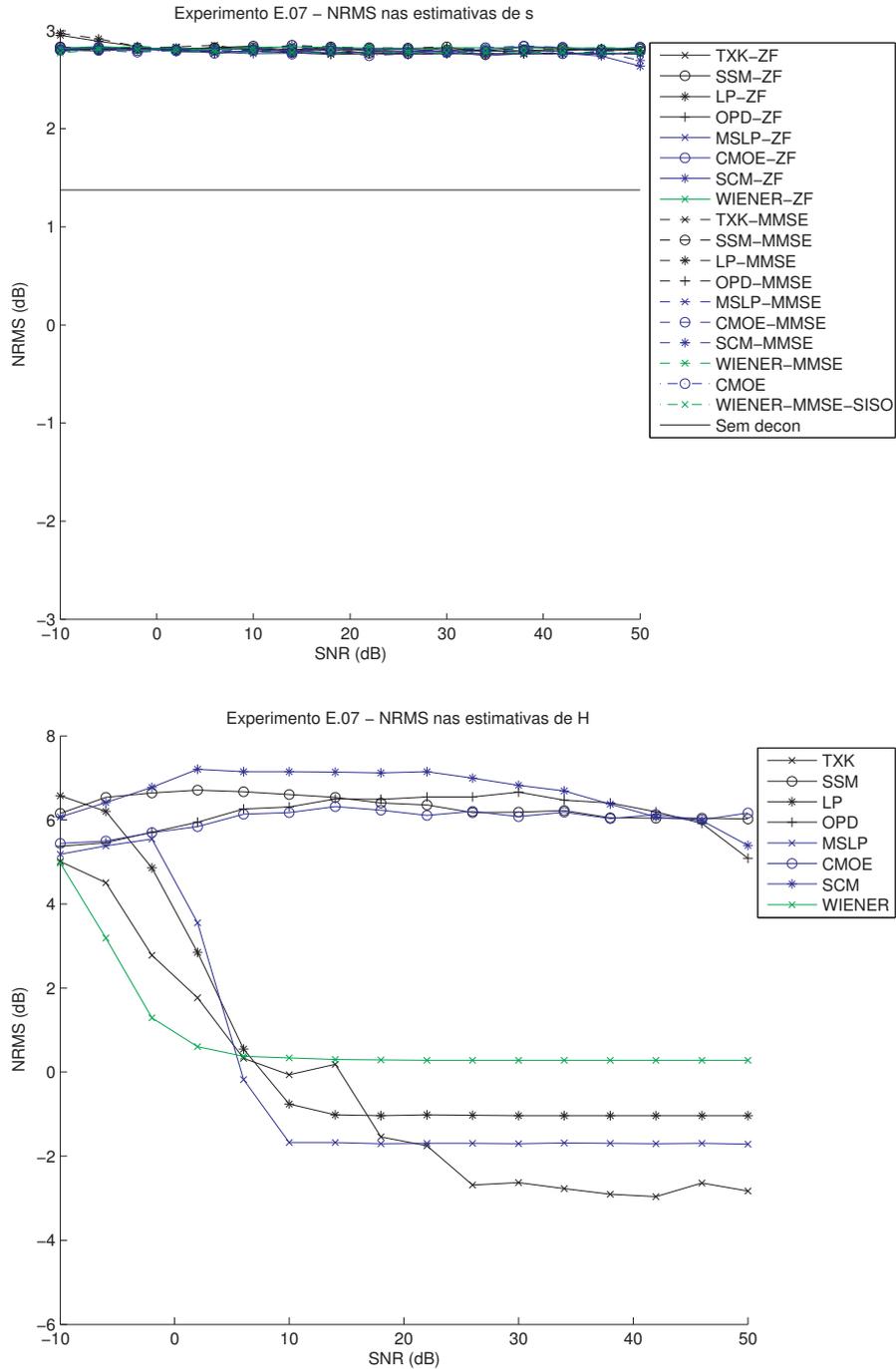


Figura D.42: Experimento E.07, realizado com $N = 330$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

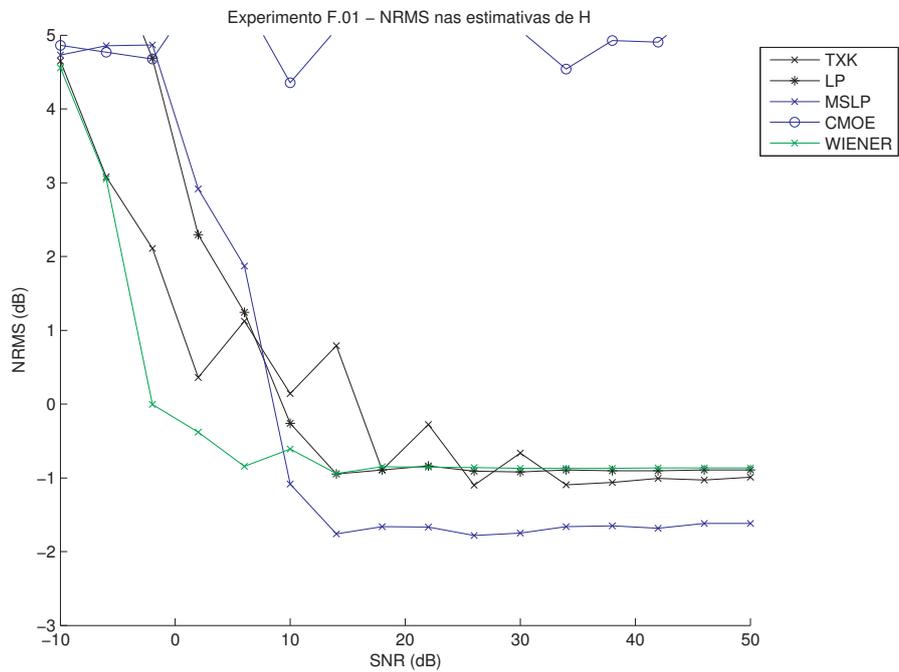
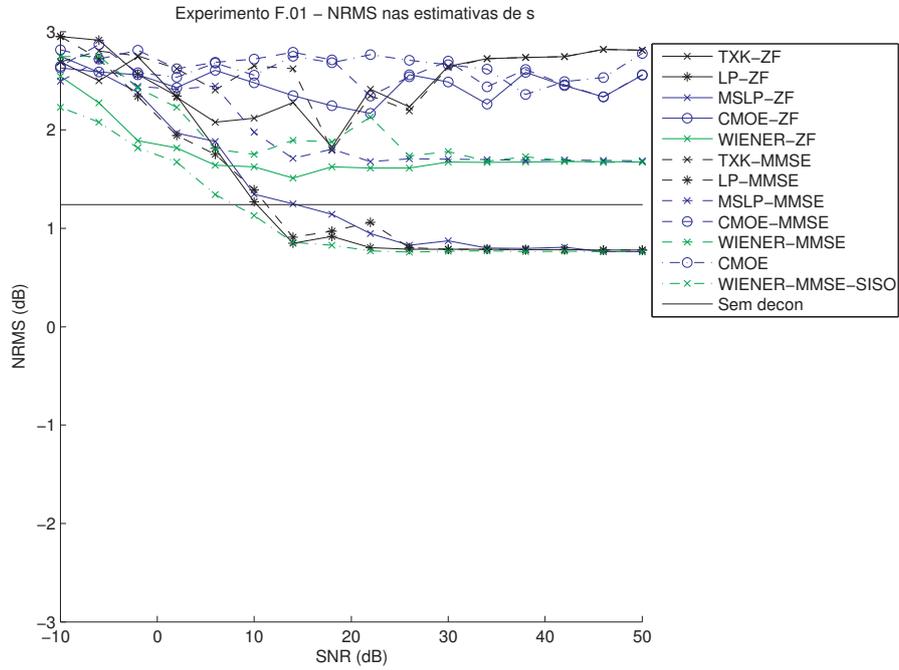


Figura D.43: Experimento F.01, realizado com $N = 144$, $M = 20$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

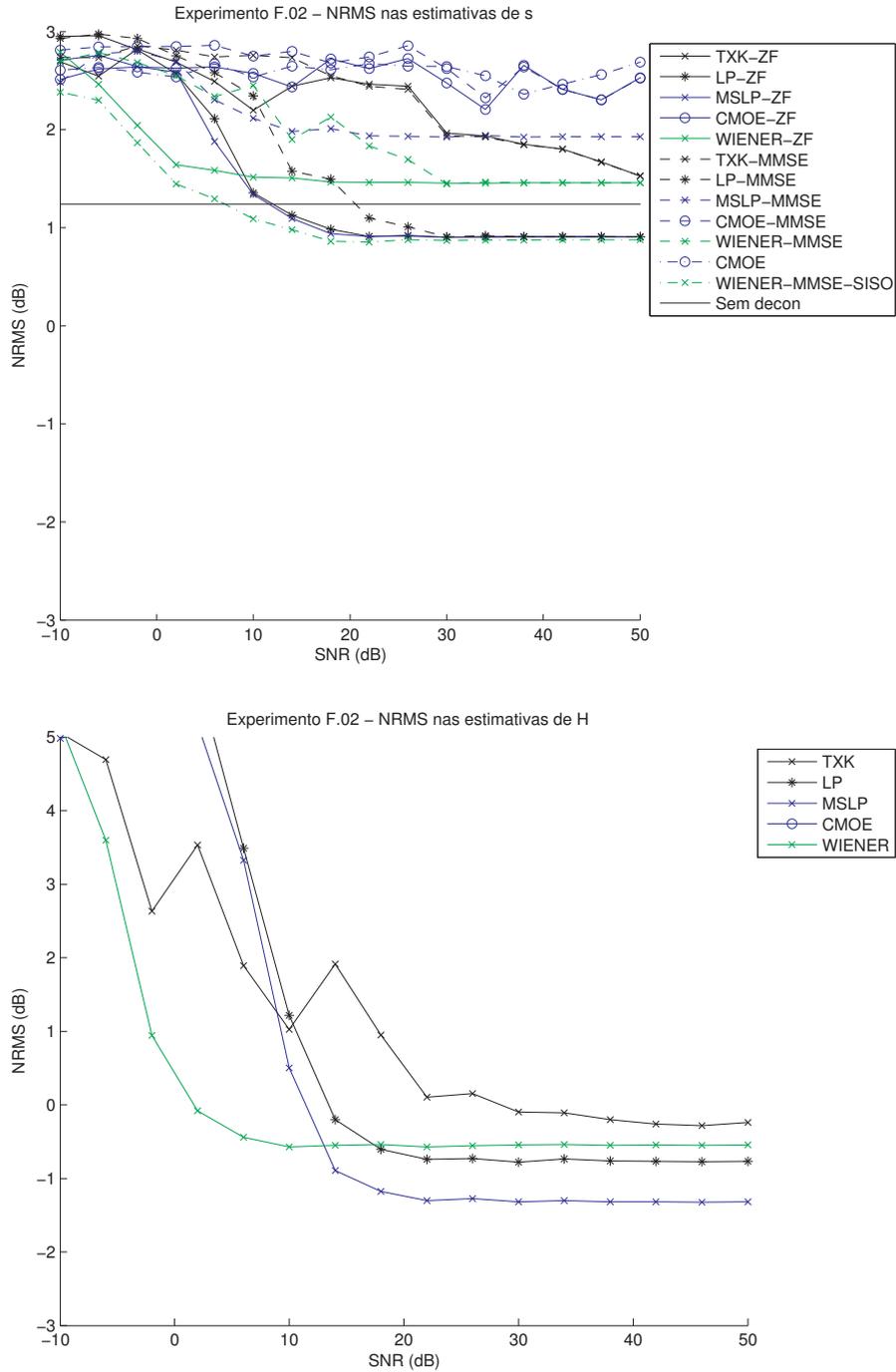


Figura D.44: Experimento F.02, realizado com $N = 144$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

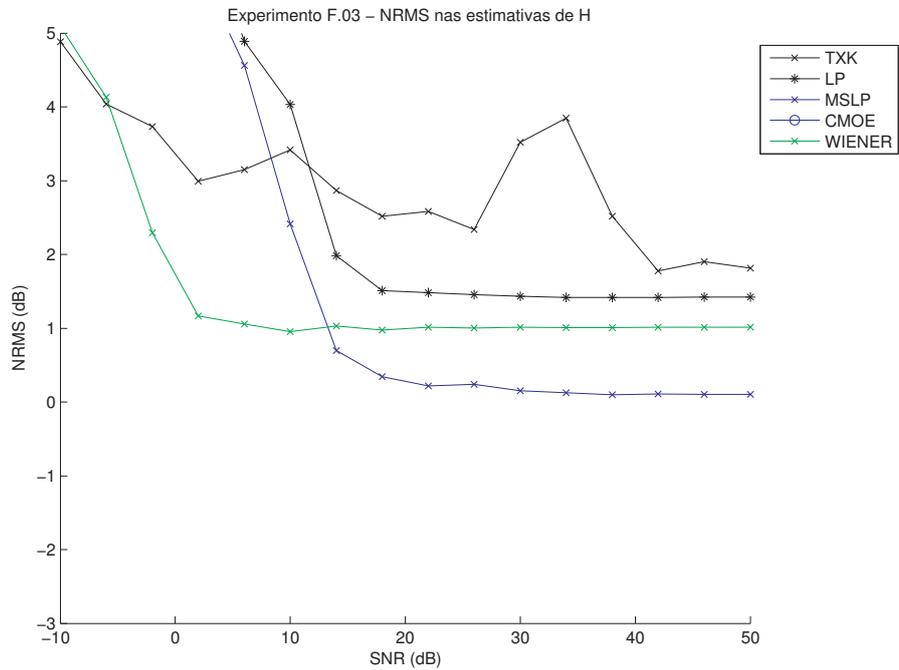
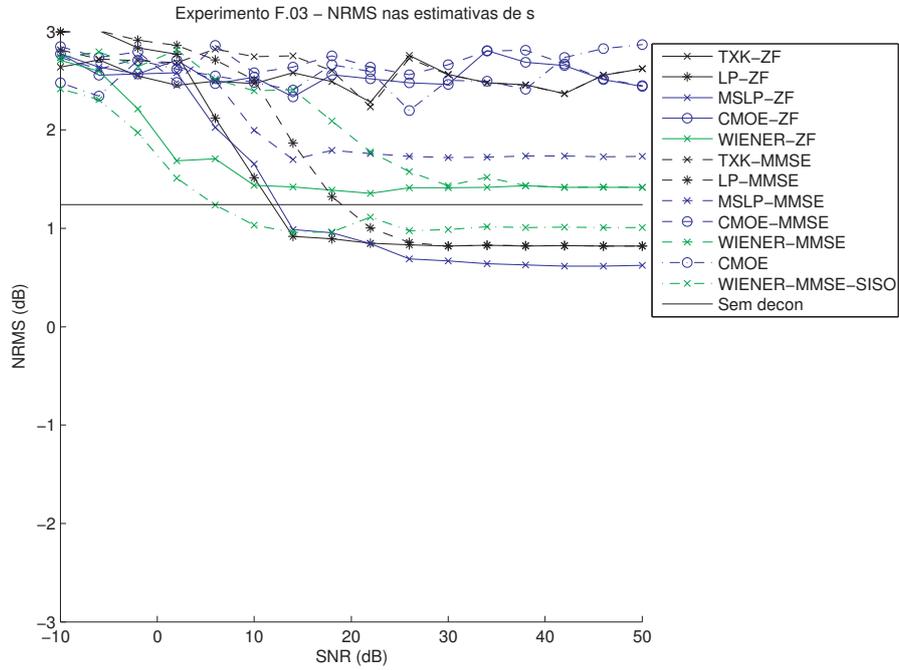


Figura D.45: Experimento F.03, realizado com $N = 144$, $M = 42$ (exato), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

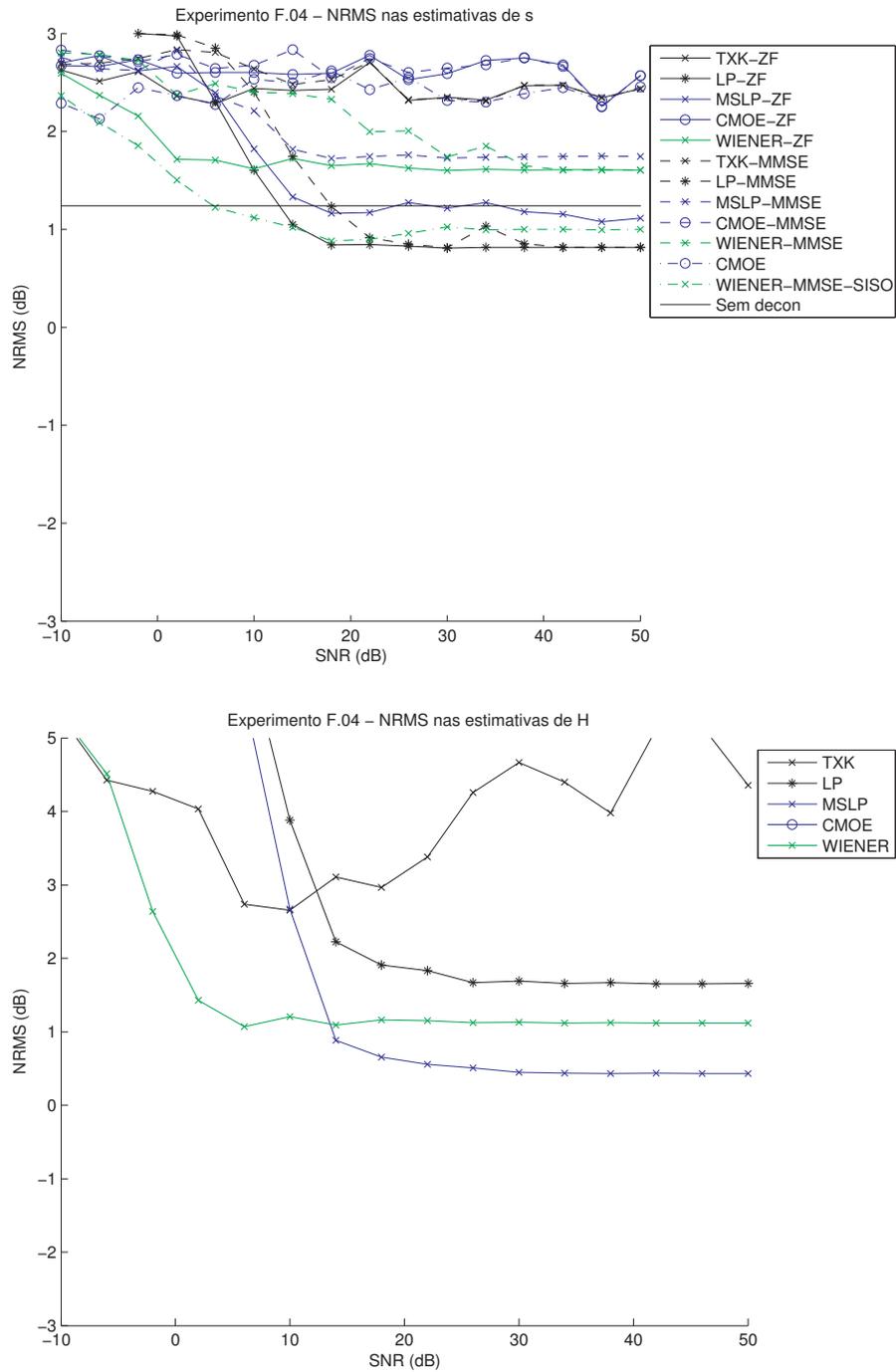


Figura D.46: Experimento F.04, realizado com $N = 144$, $M = 47$ (superestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

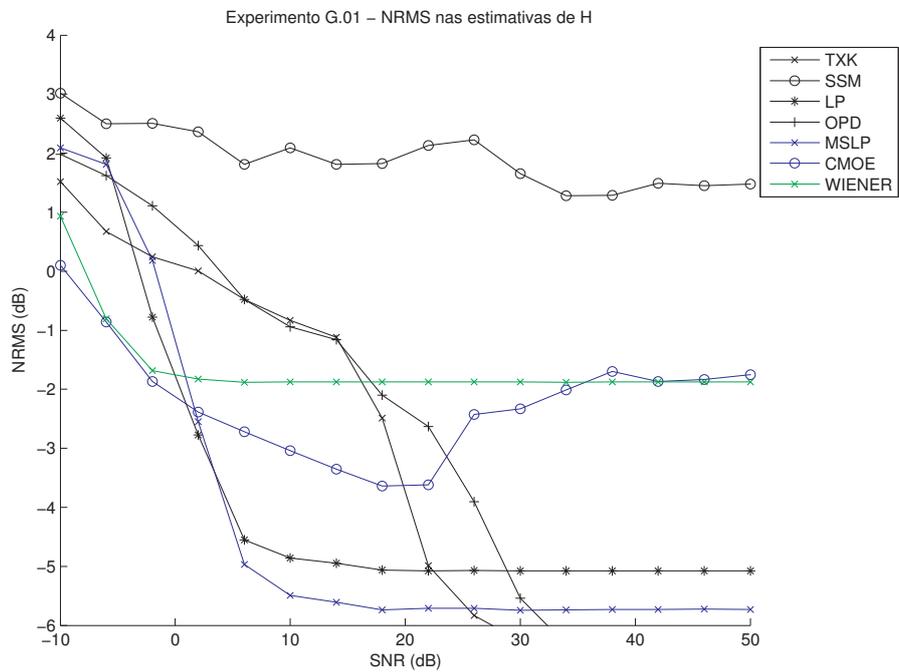
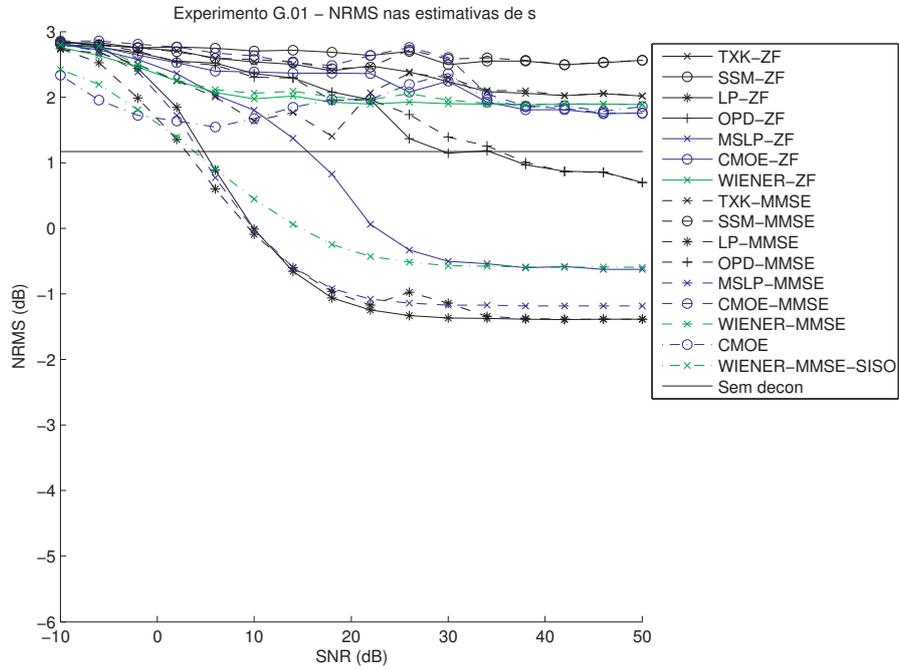


Figura D.47: Experimento G.01, realizado com $N = 500$, $M = 15$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

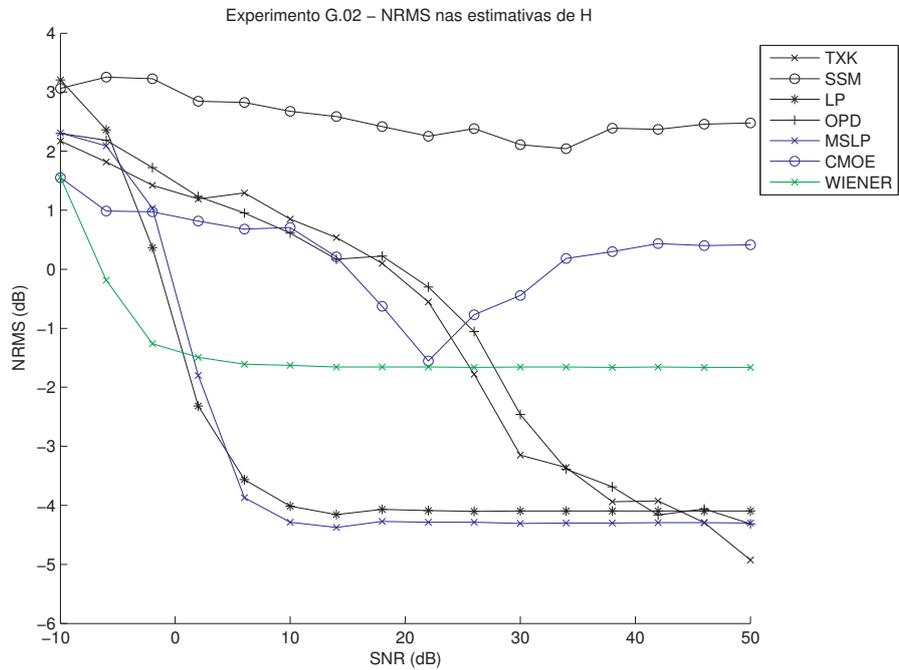
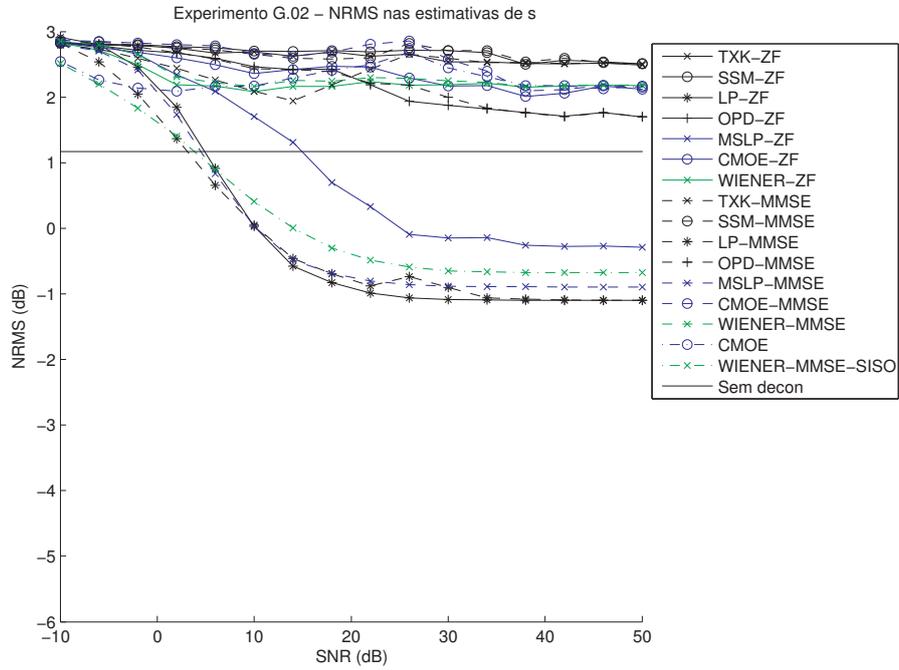


Figura D.48: Experimento G.02, realizado com $N = 500$, $M = 25$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

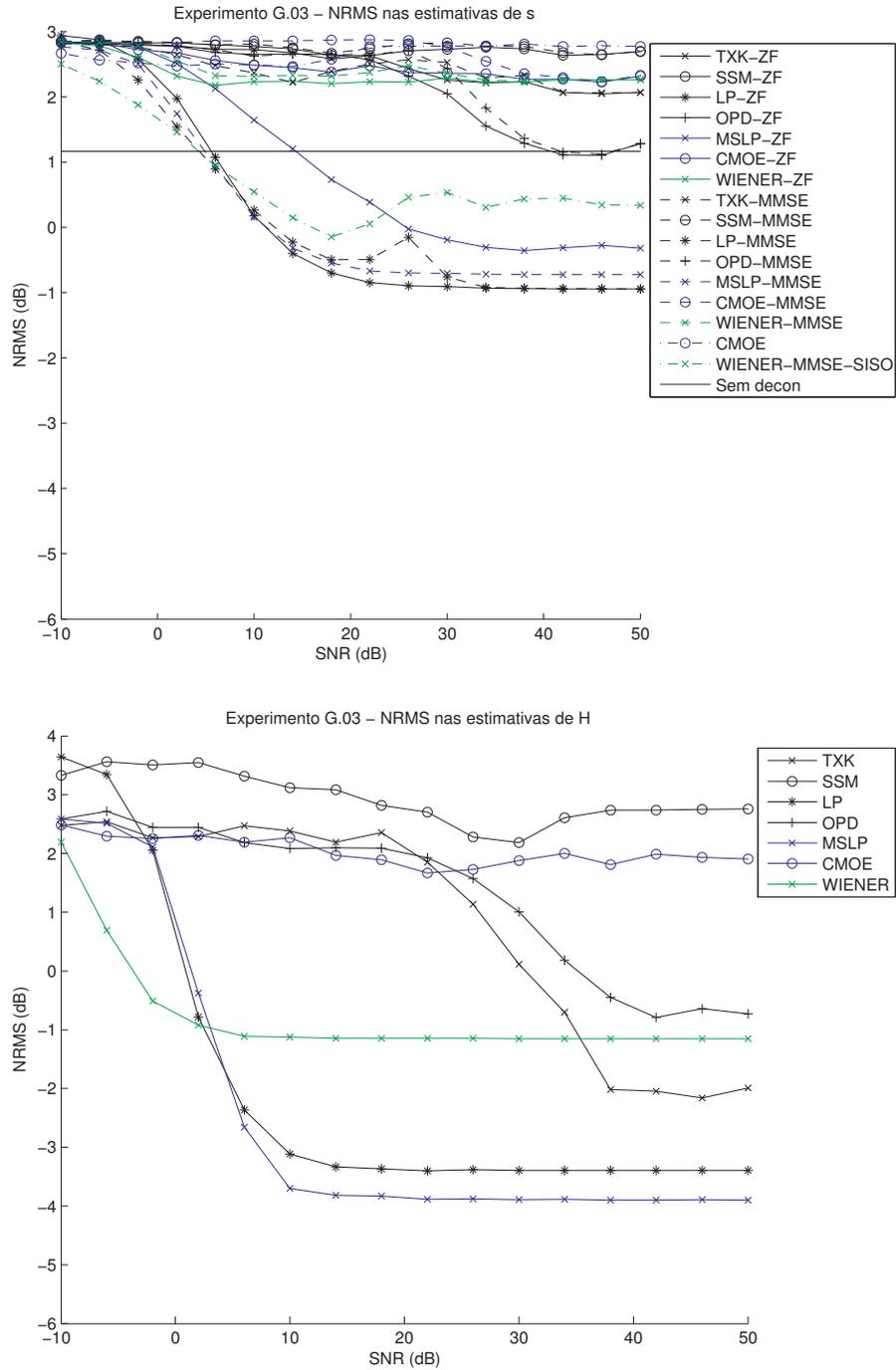


Figura D.49: Experimento G.03, realizado com $N = 500$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

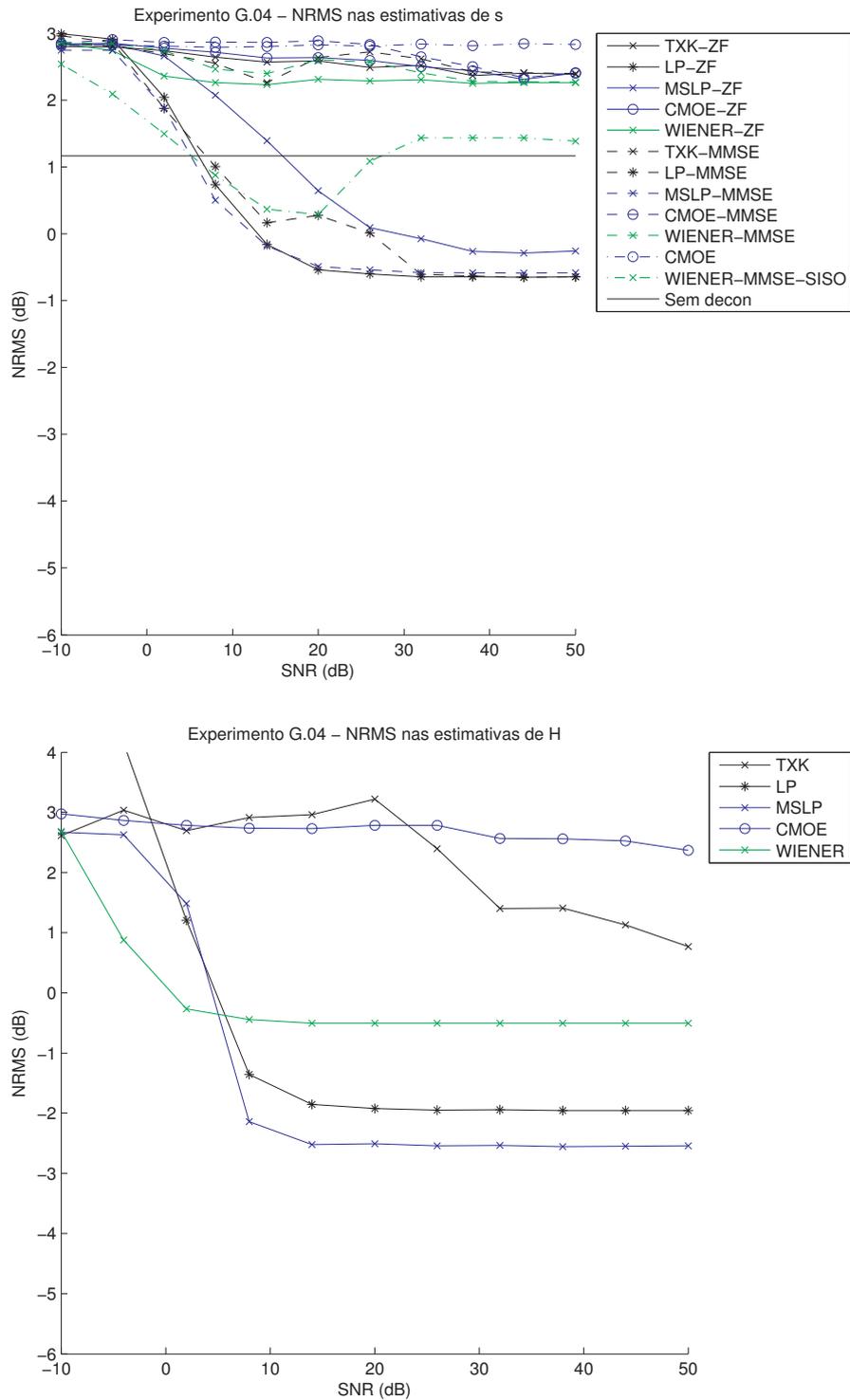


Figura D.50: Experimento G.04, realizado com $N = 500$, $M = 90$ (exato), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

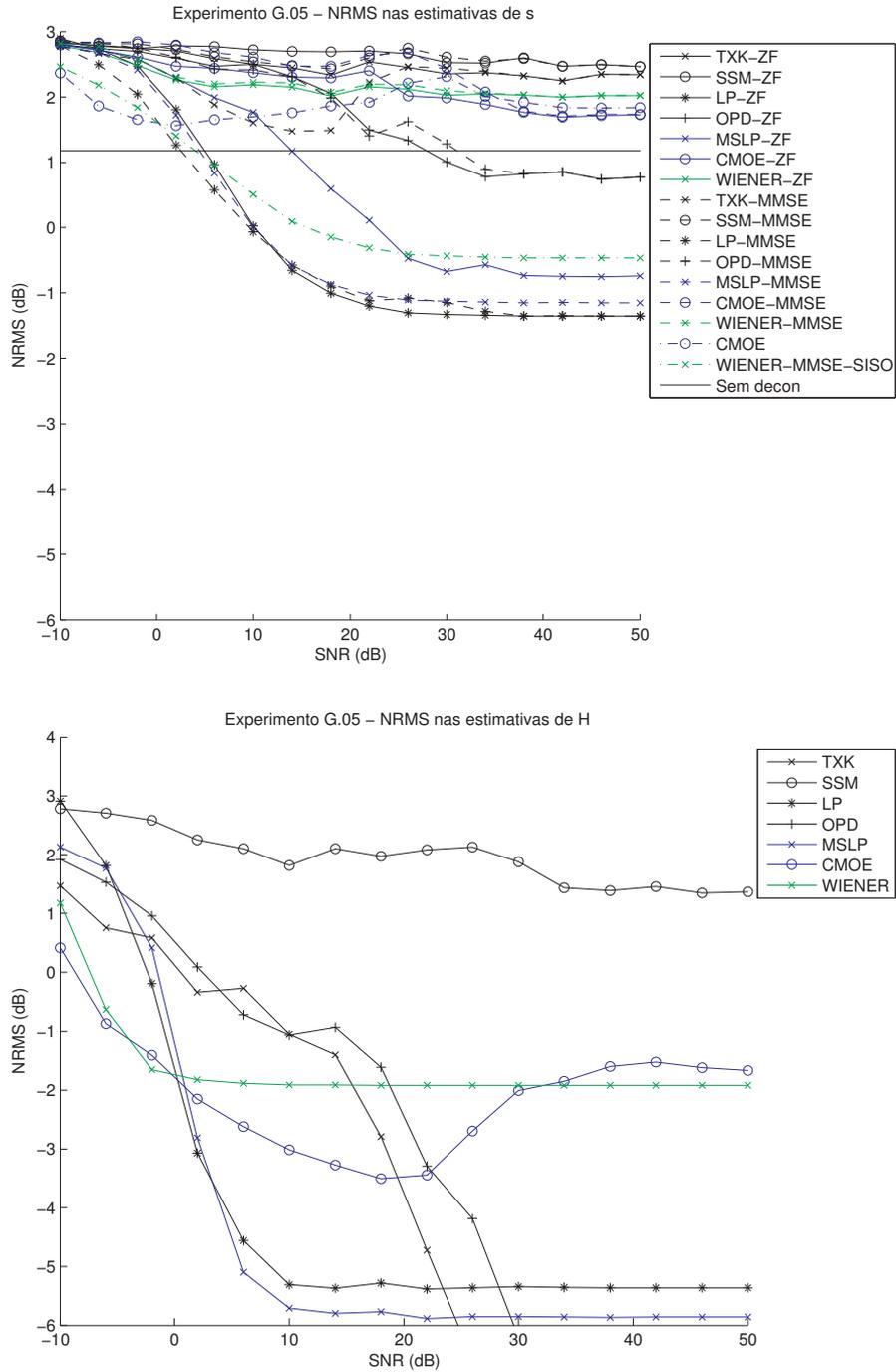


Figura D.51: Experimento G.05, realizado com $N = 500$, $M = 15$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

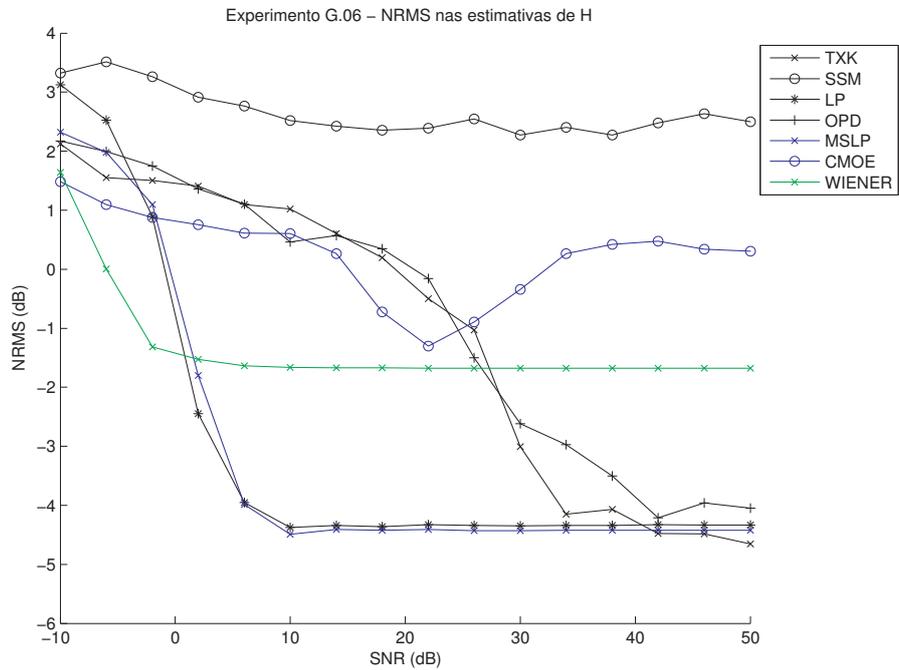
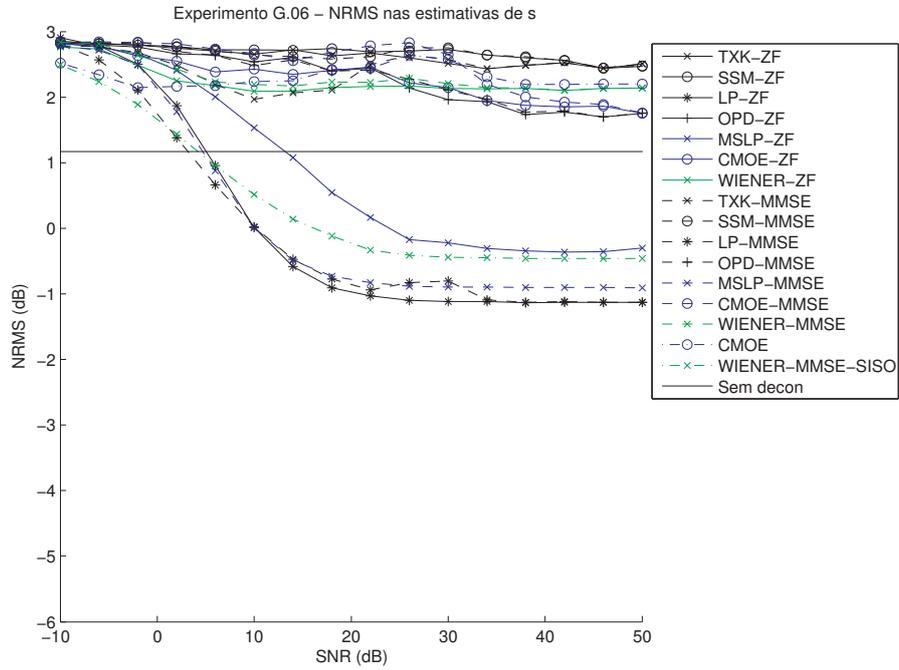


Figura D.52: Experimento G.06, realizado com $N = 500$, $M = 25$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

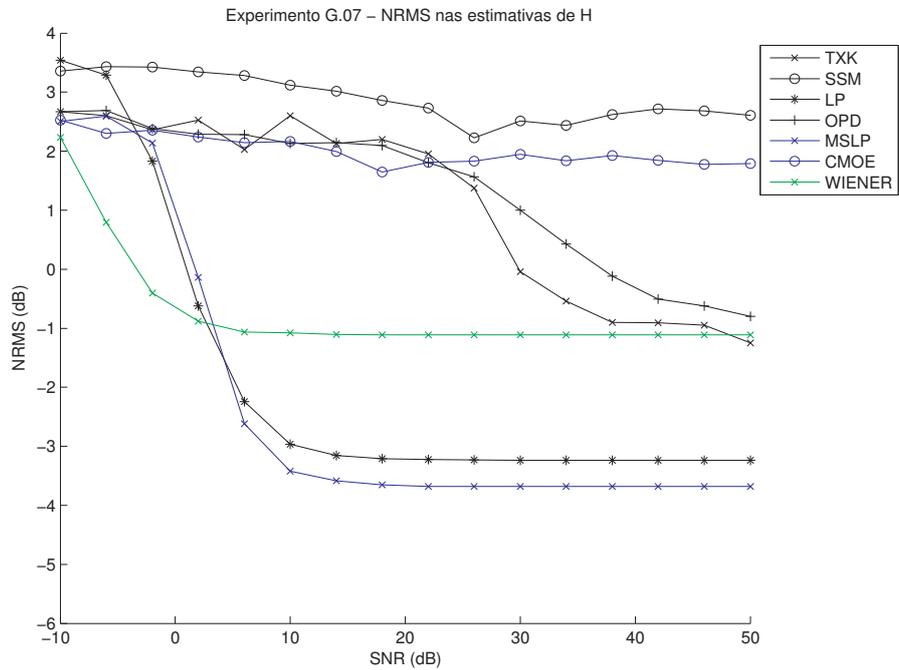
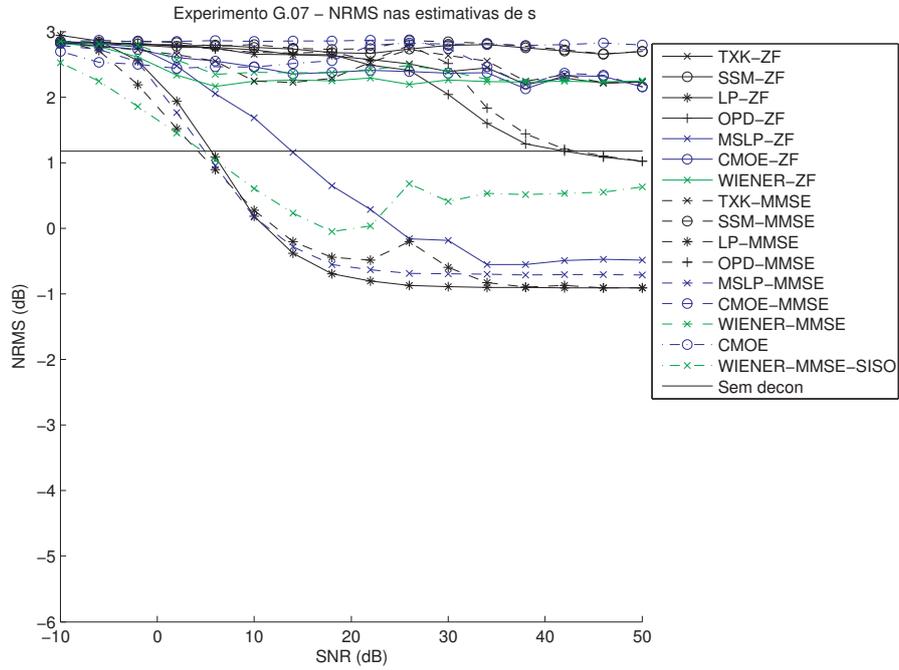


Figura D.53: Experimento G.07, realizado com $N = 500$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

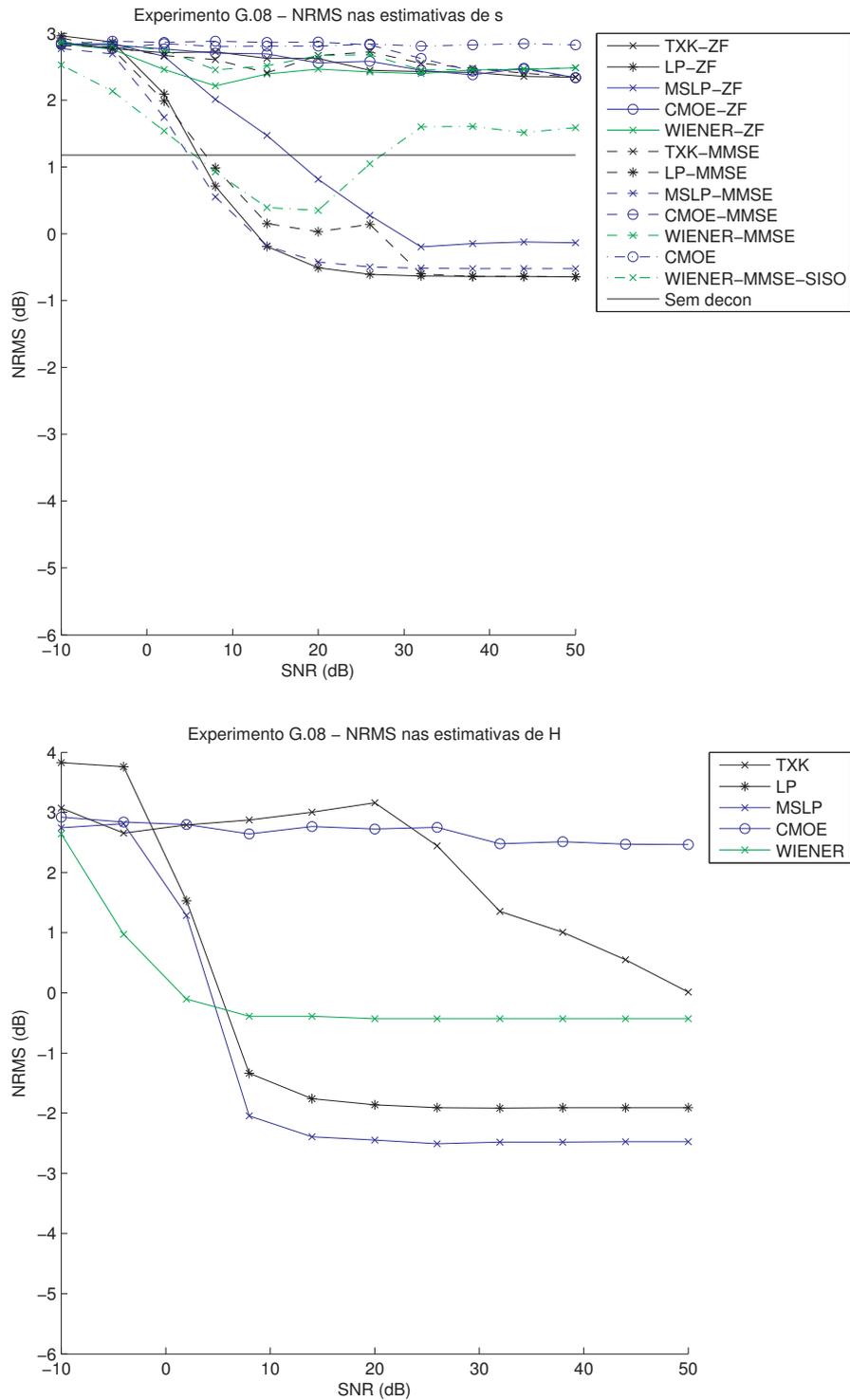


Figura D.54: Experimento G.08, realizado com $N = 500$, $M = 90$ (exato), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

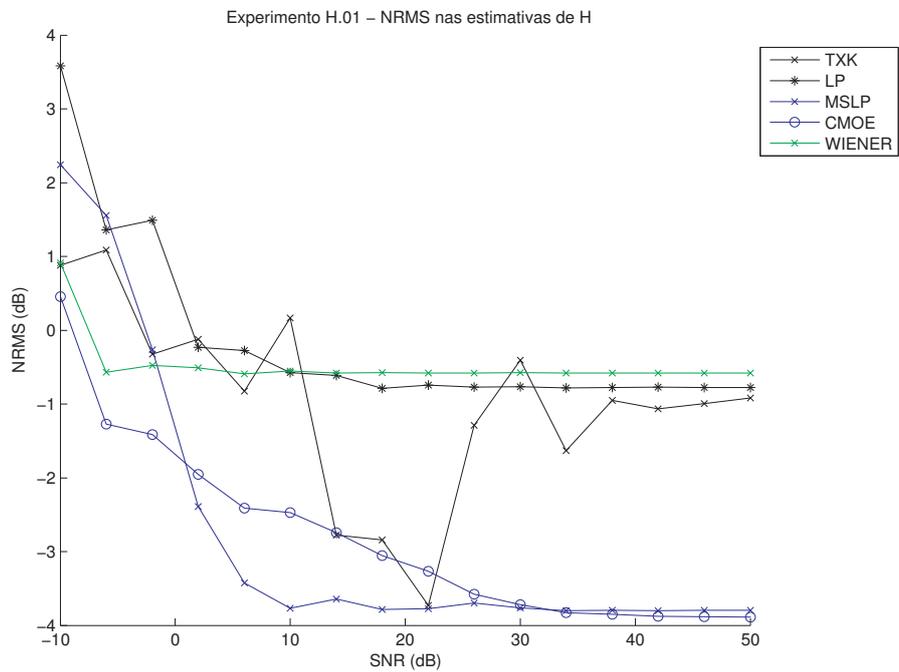
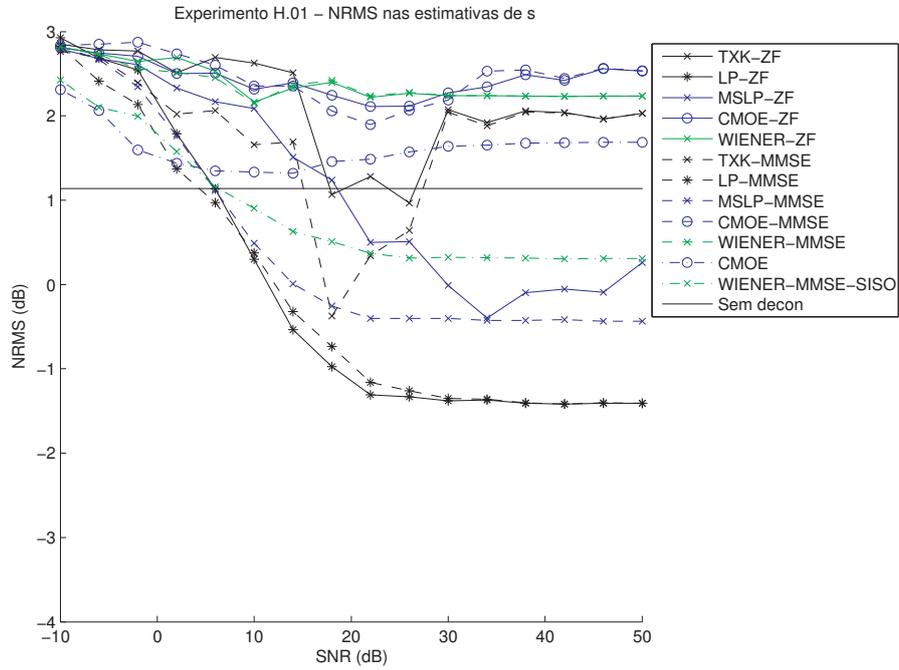


Figura D.55: Experimento H.01, realizado com $N = 582$, $M = 15$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

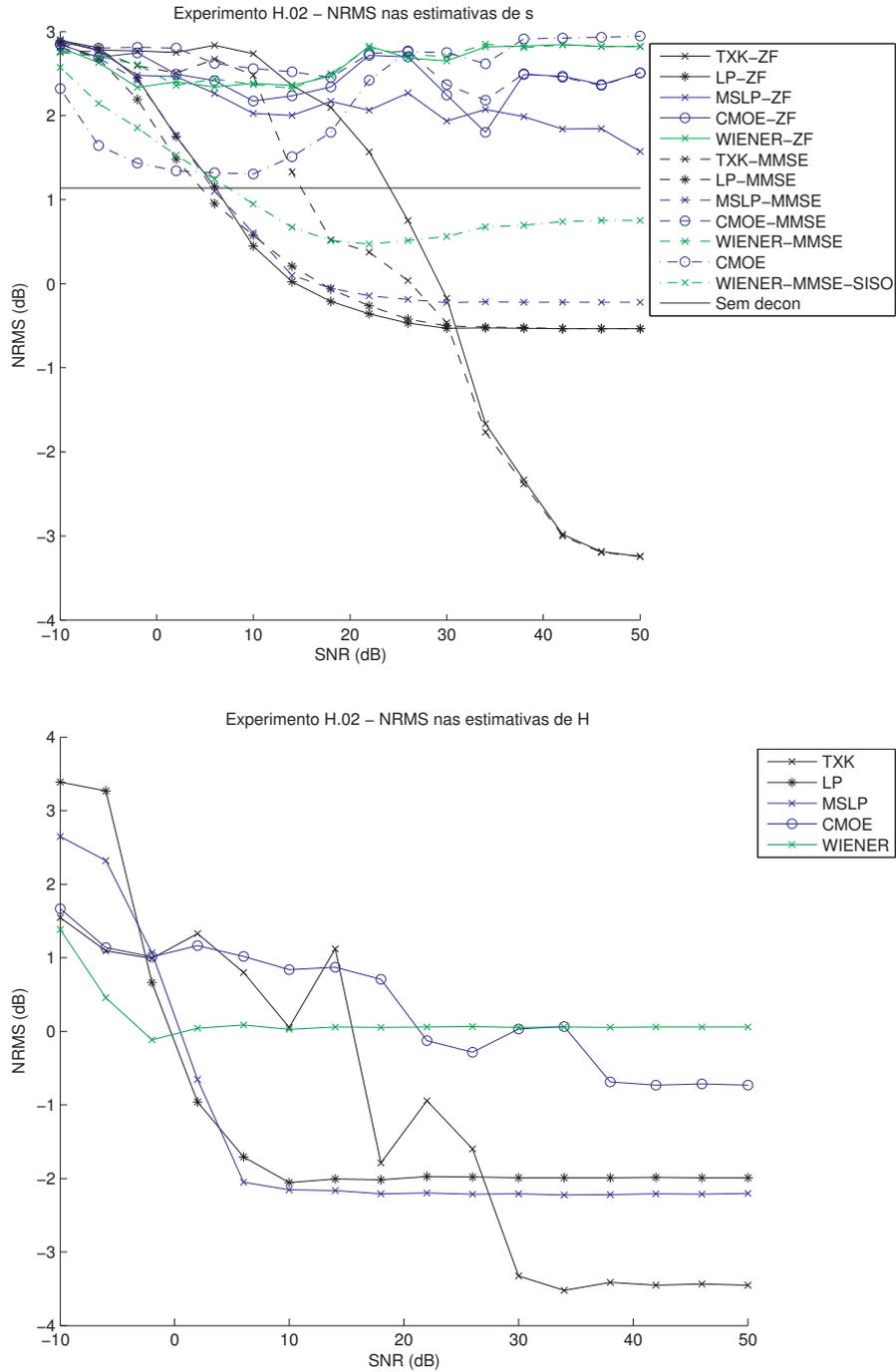


Figura D.56: Experimento H.02, realizado com $N = 582$, $M = 25$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

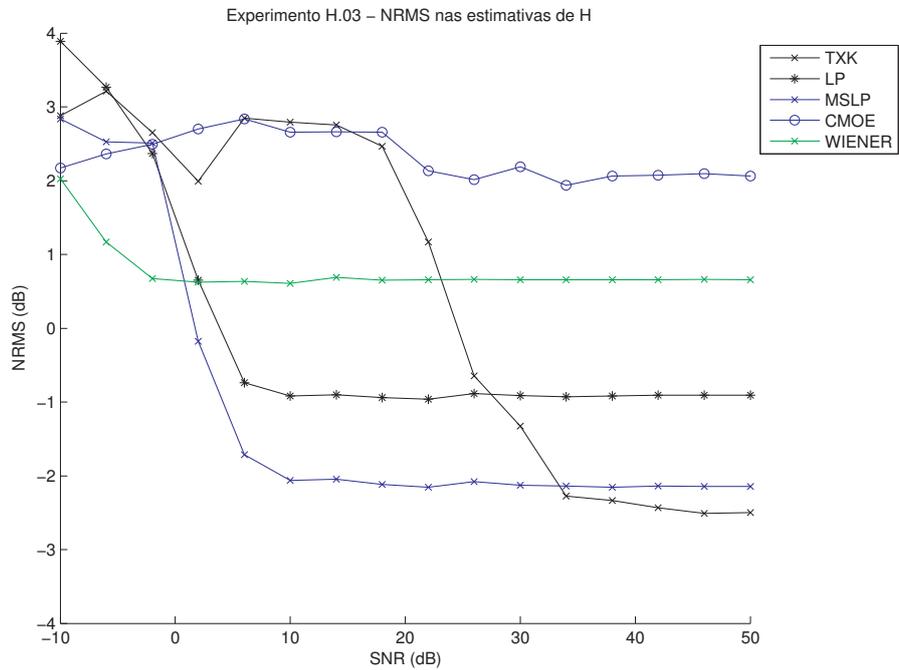
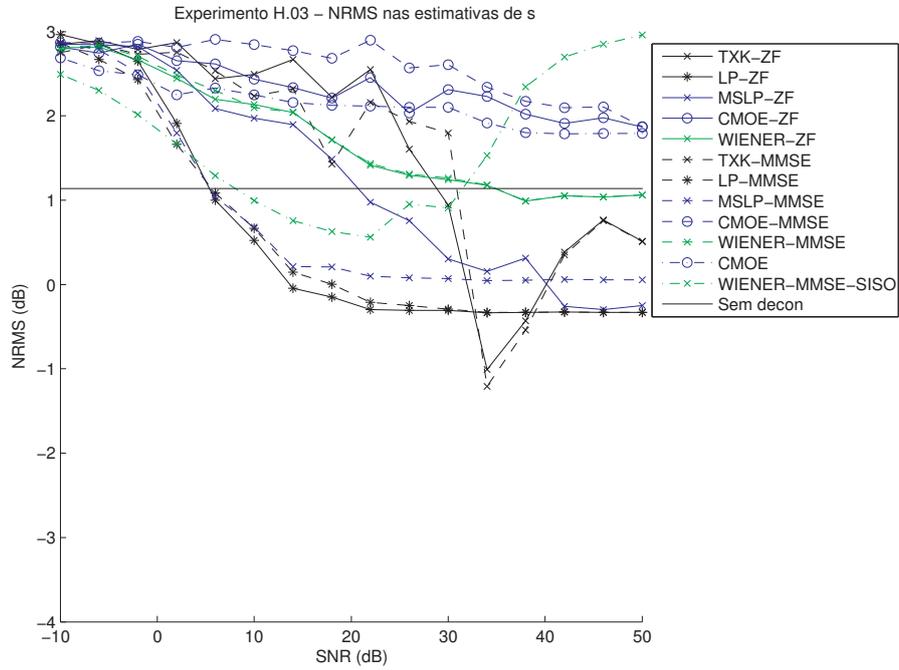


Figura D.57: Experimento H.03, realizado com $N = 582$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

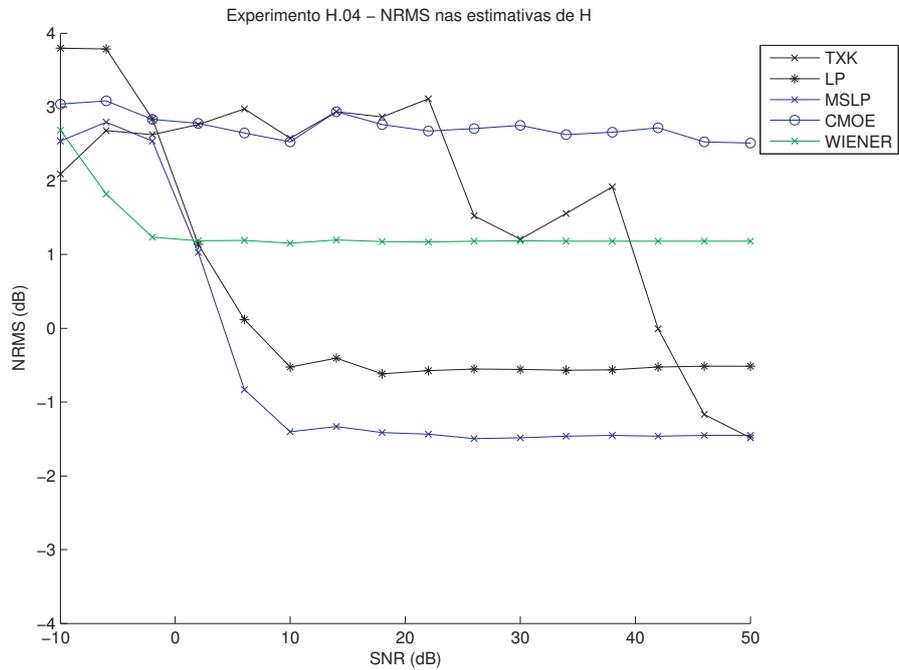
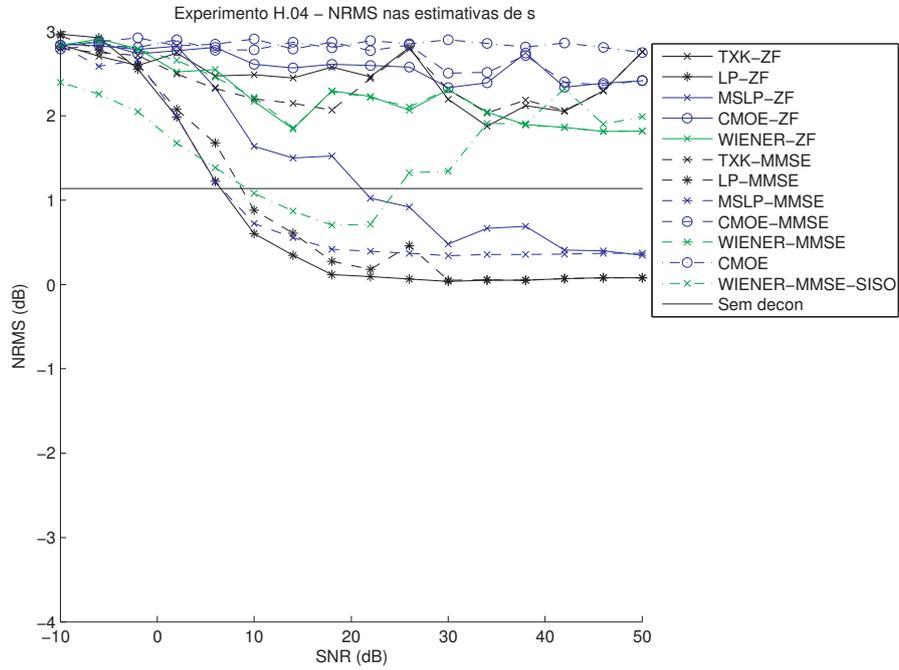


Figura D.58: Experimento H.04, realizado com $N = 582$, $M = 90$ (exato), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

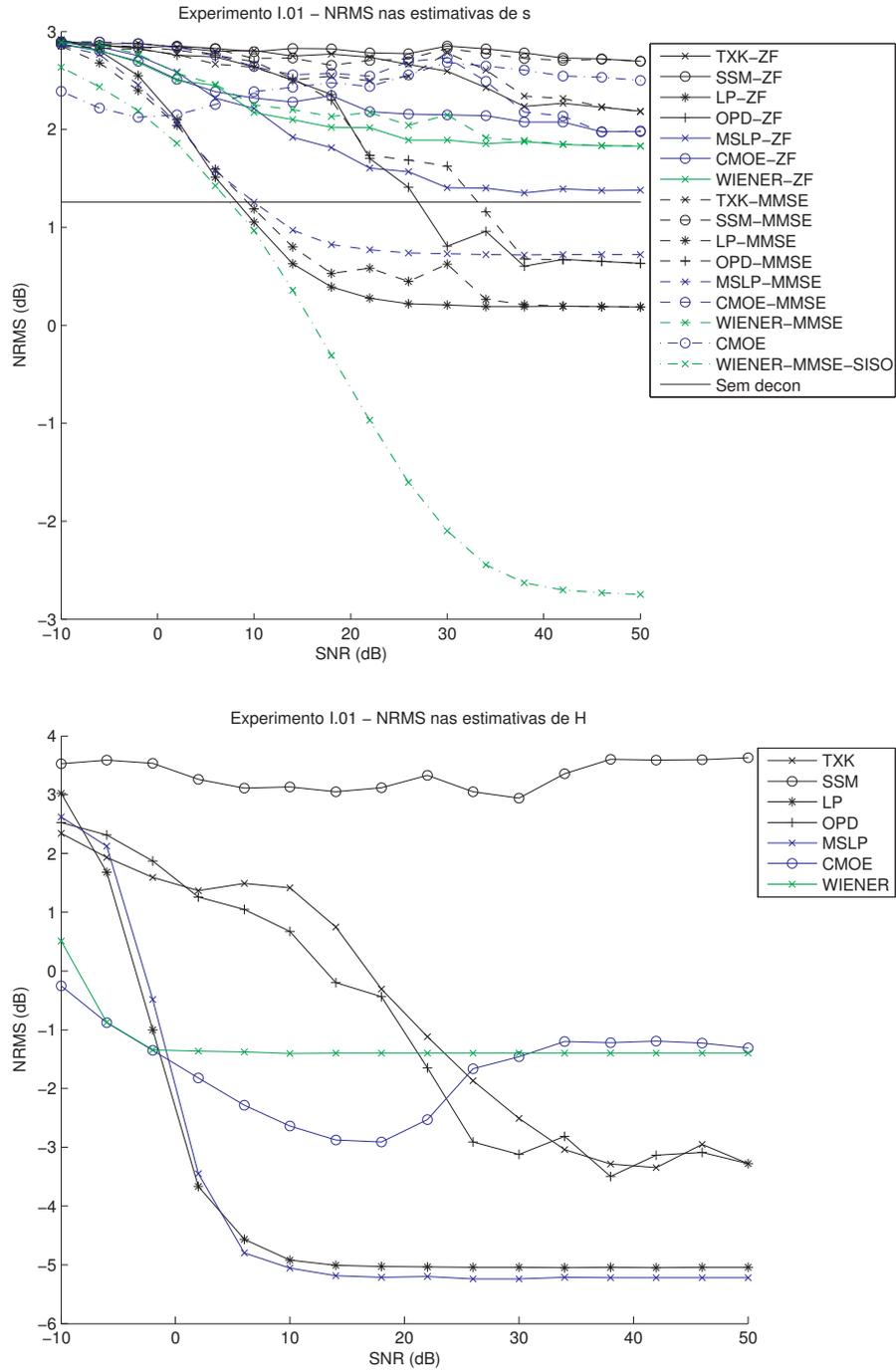


Figura D.59: Experimento I.01, realizado com $N = 1000$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

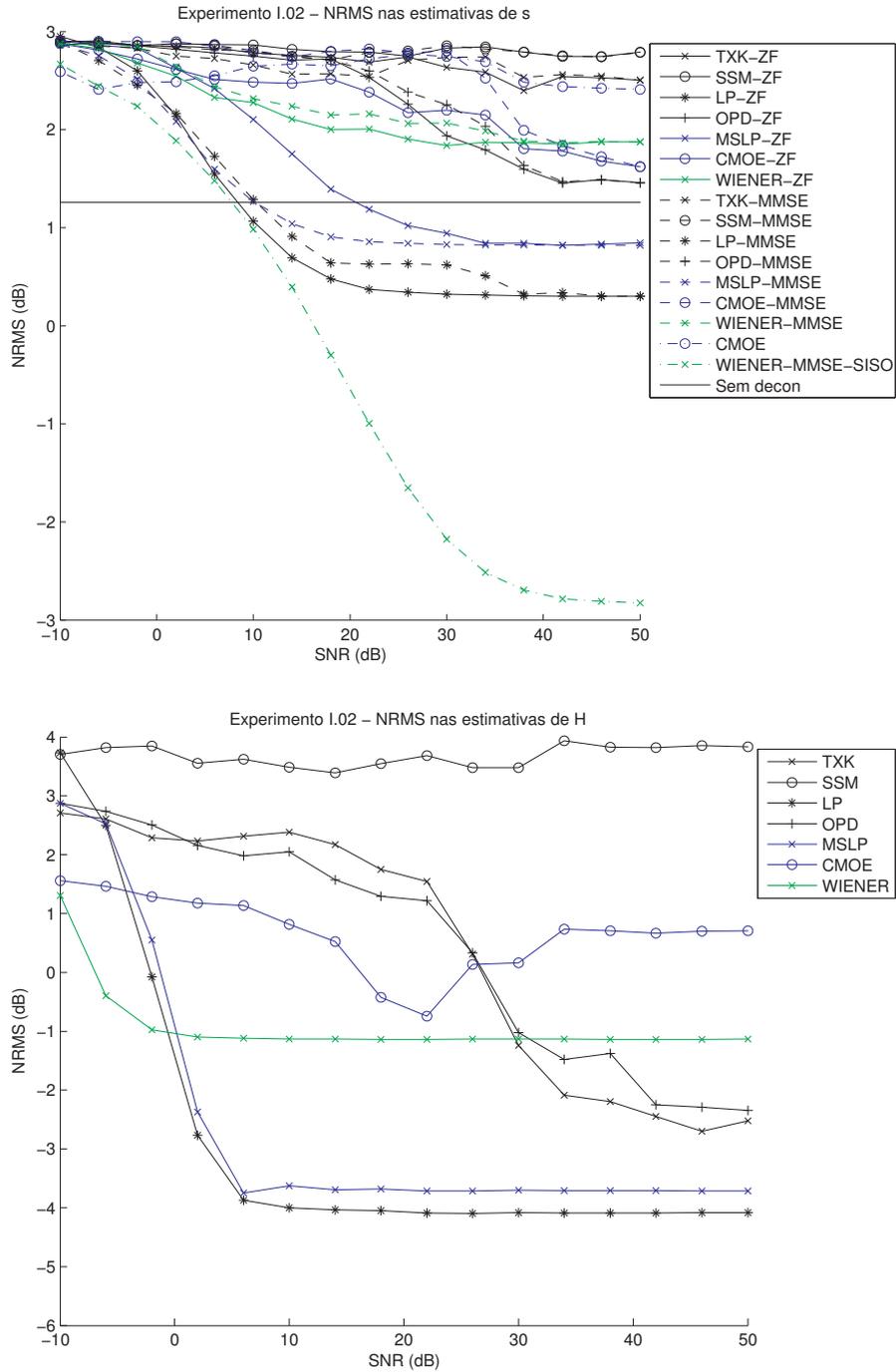


Figura D.60: Experimento I.02, realizado com $N = 1000$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

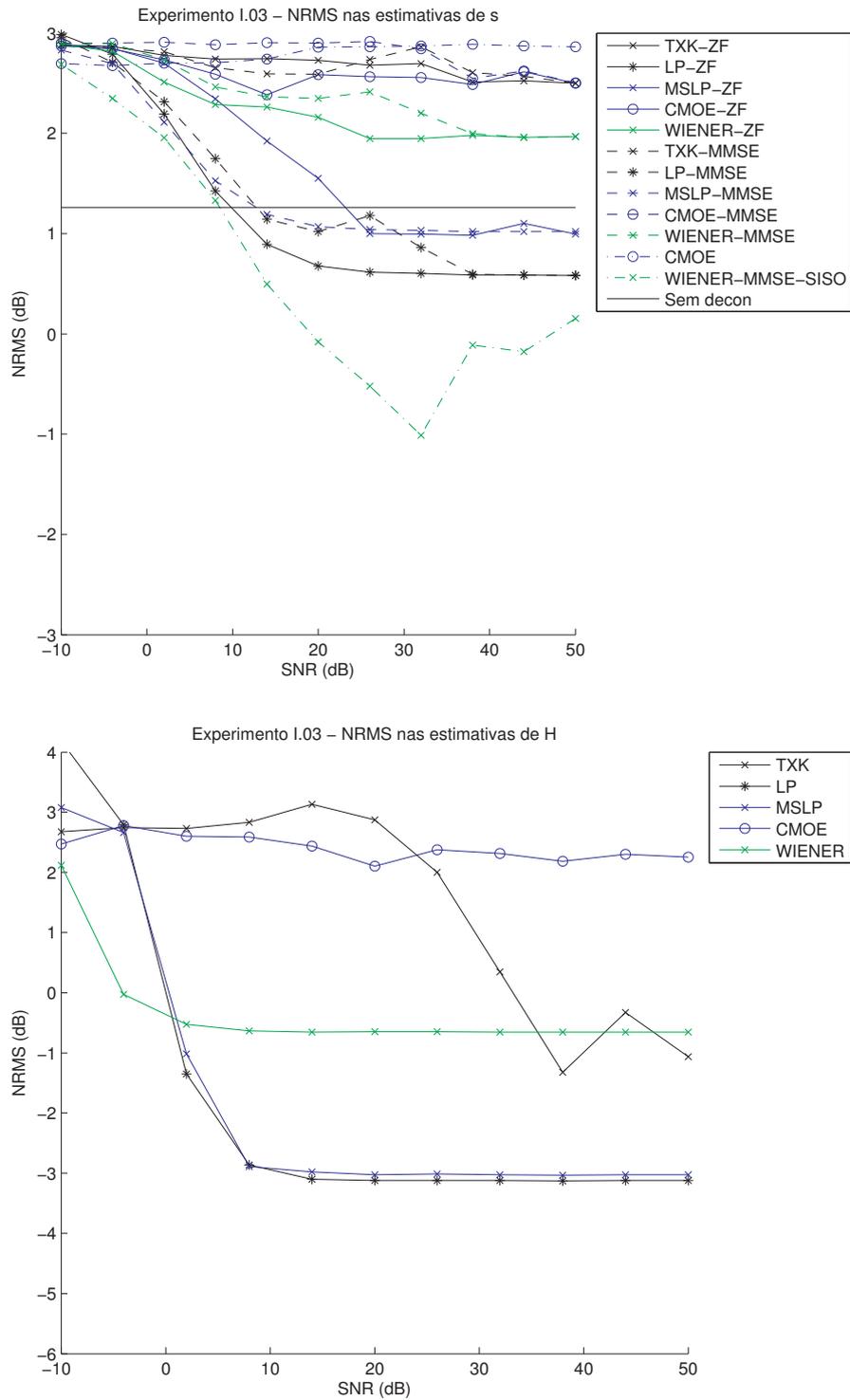


Figura D.61: Experimento I.03, realizado com $N = 1000$, $M = 100$ (subestimado), $s(k)$ branco.

D.8. GRÁFICOS

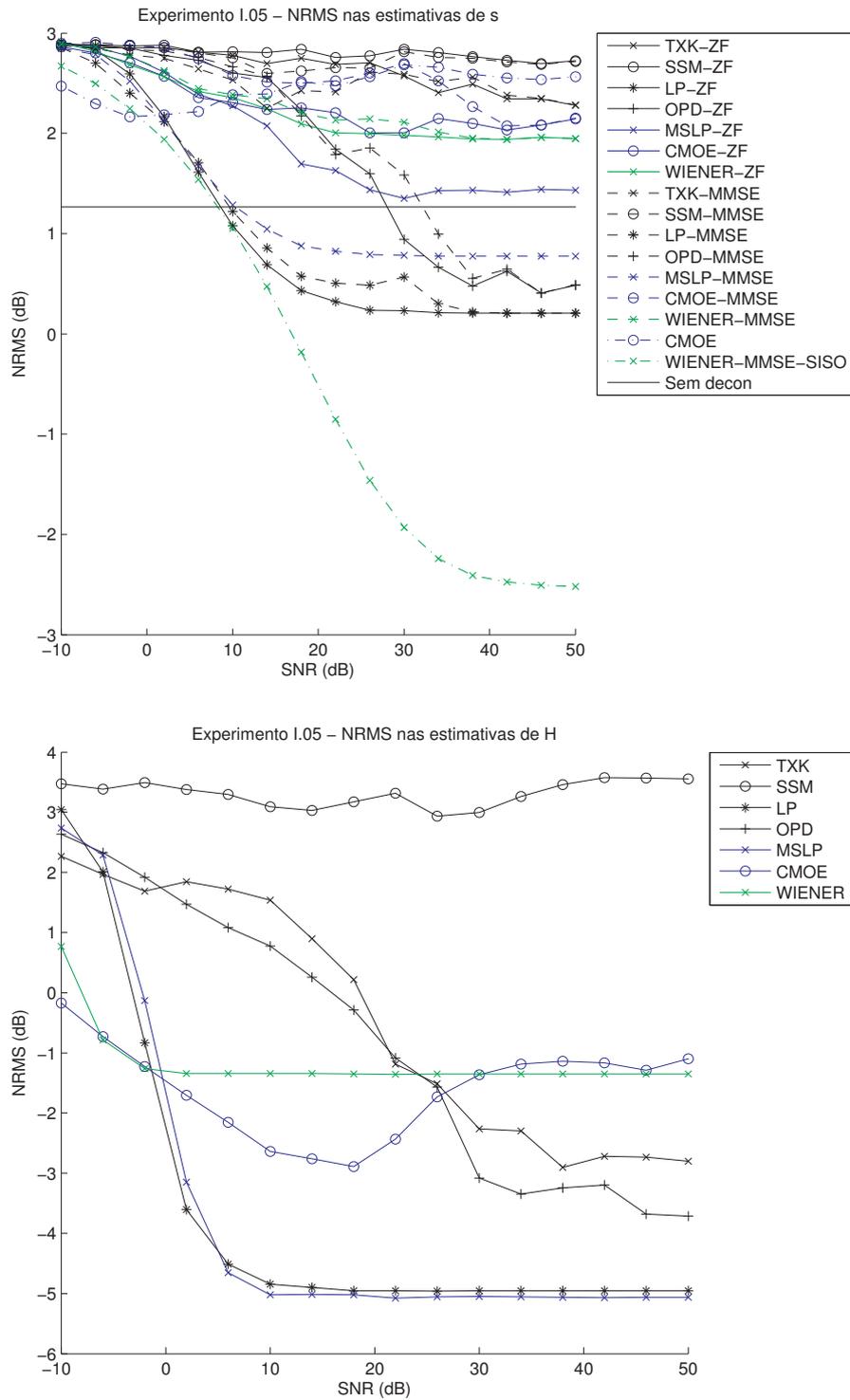


Figura D.62: Experimento I.05, realizado com $N = 1000$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

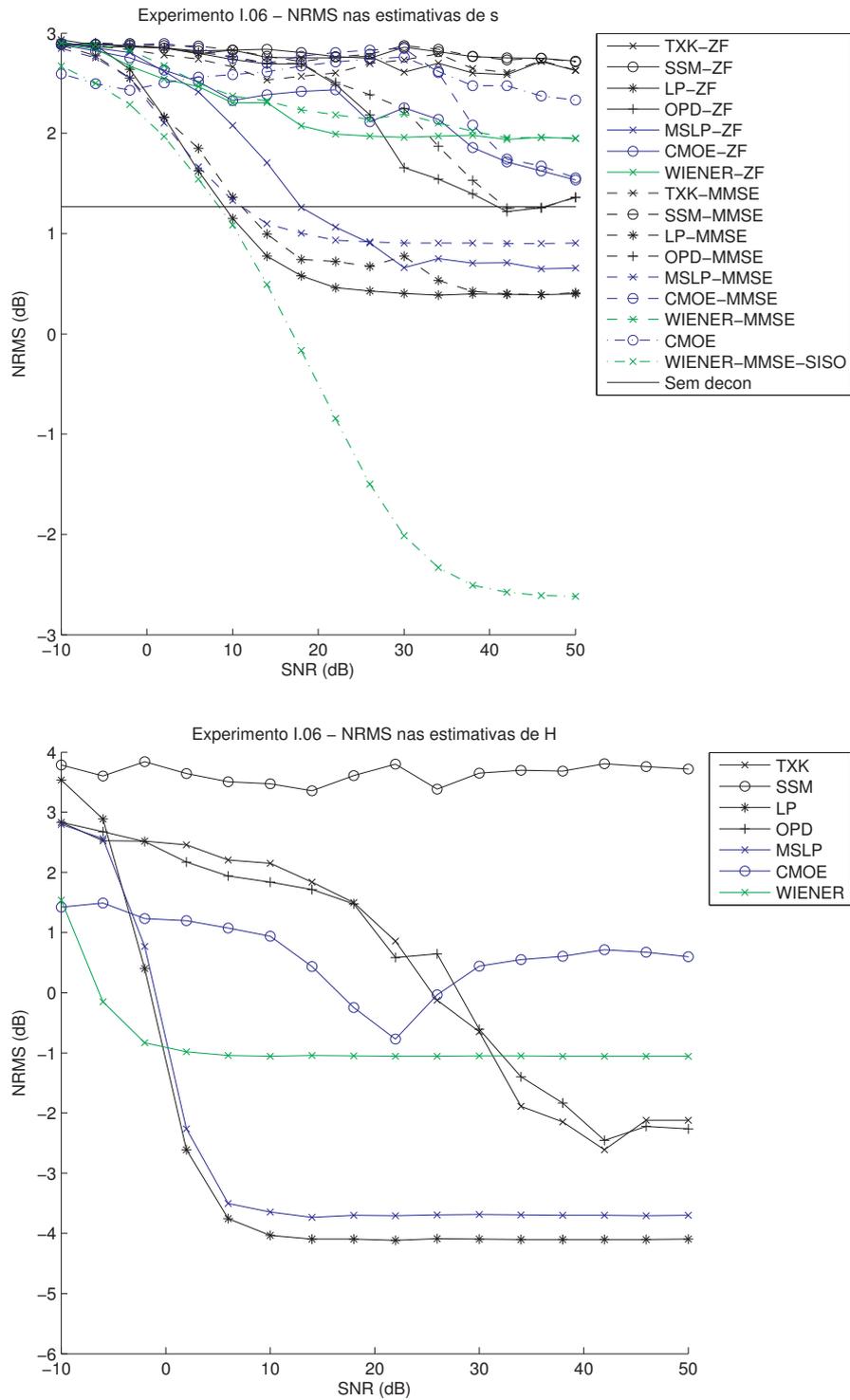


Figura D.63: Experimento I.06, realizado com $N = 1000$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

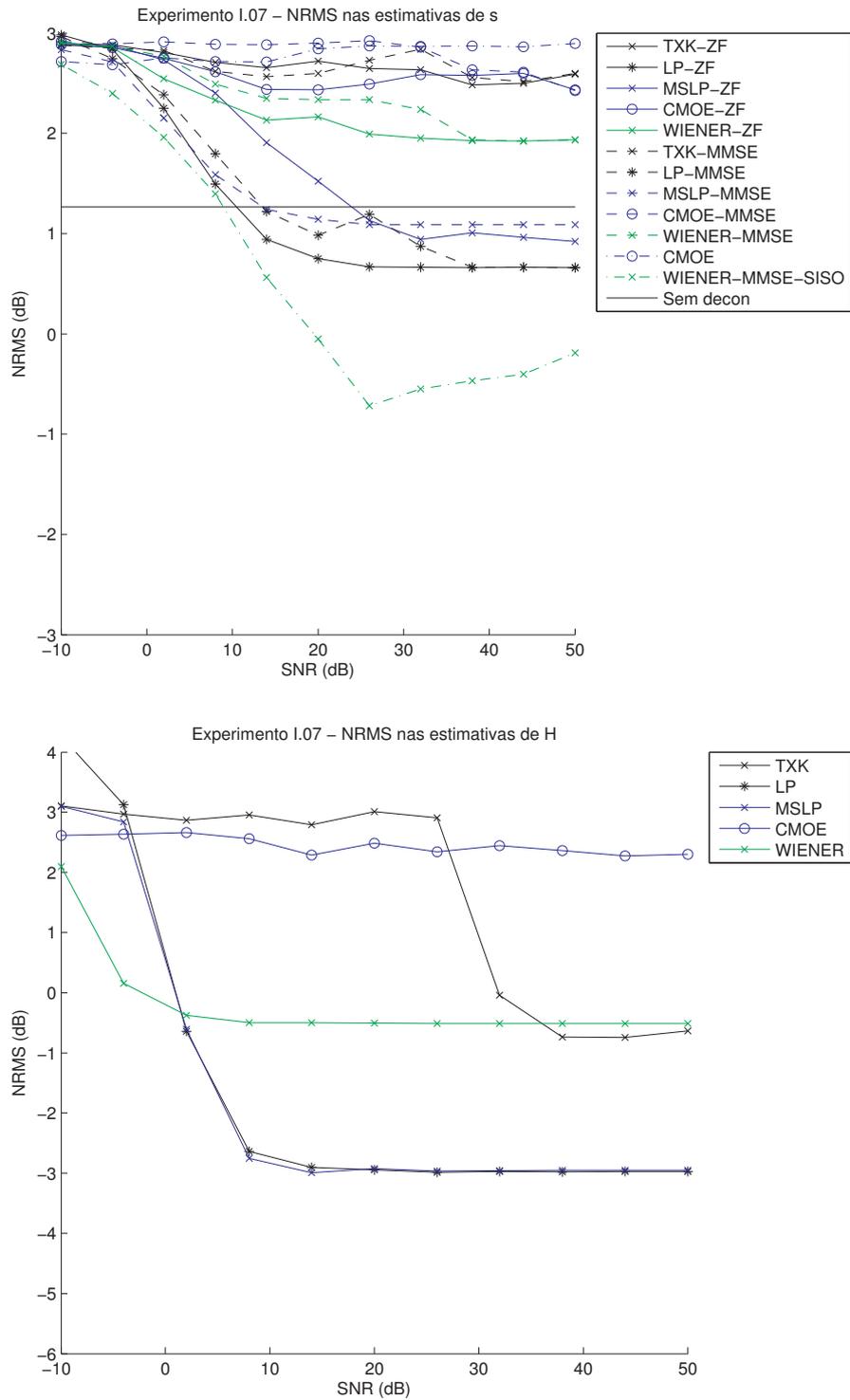


Figura D.64: Experimento I.07, realizado com $N = 1000$, $M = 100$ (subestimado), $s(k)$ colorido.

D.8. GRÁFICOS

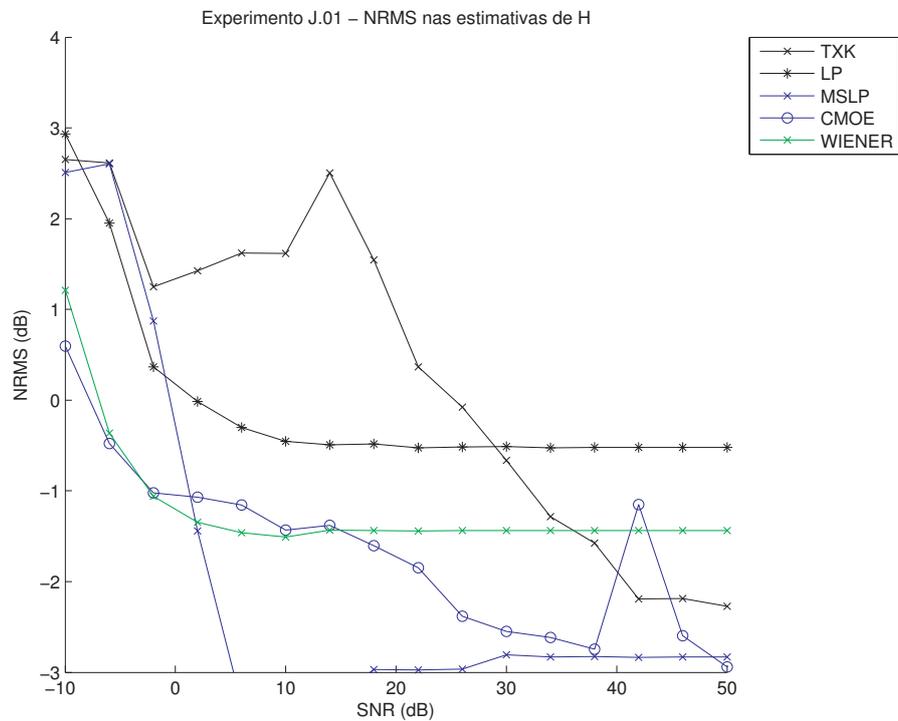
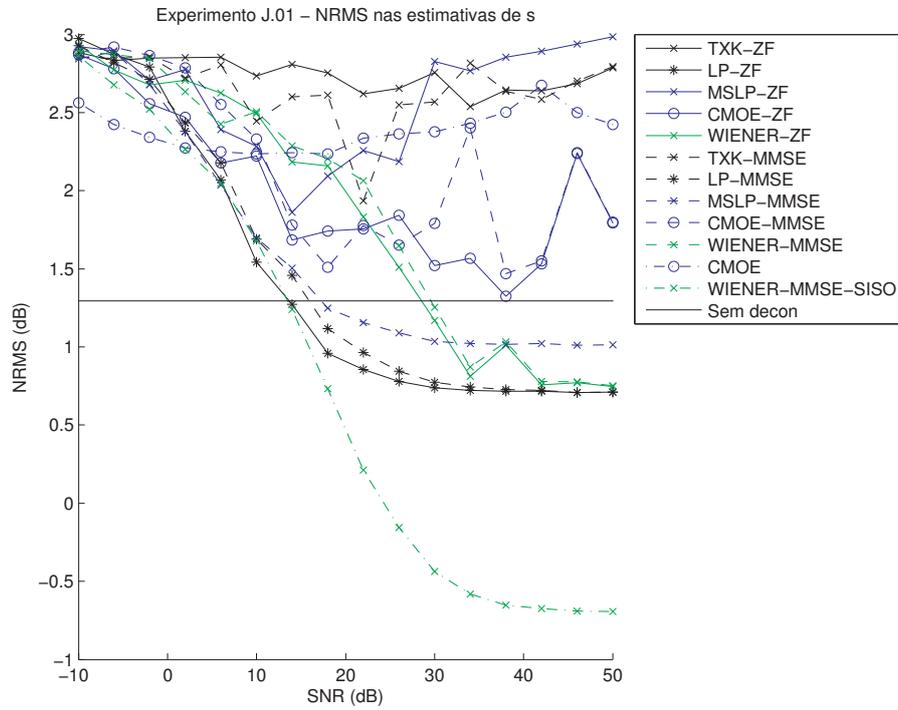


Figura D.65: Experimento J.01, realizado com $N = 1163$, $M = 30$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

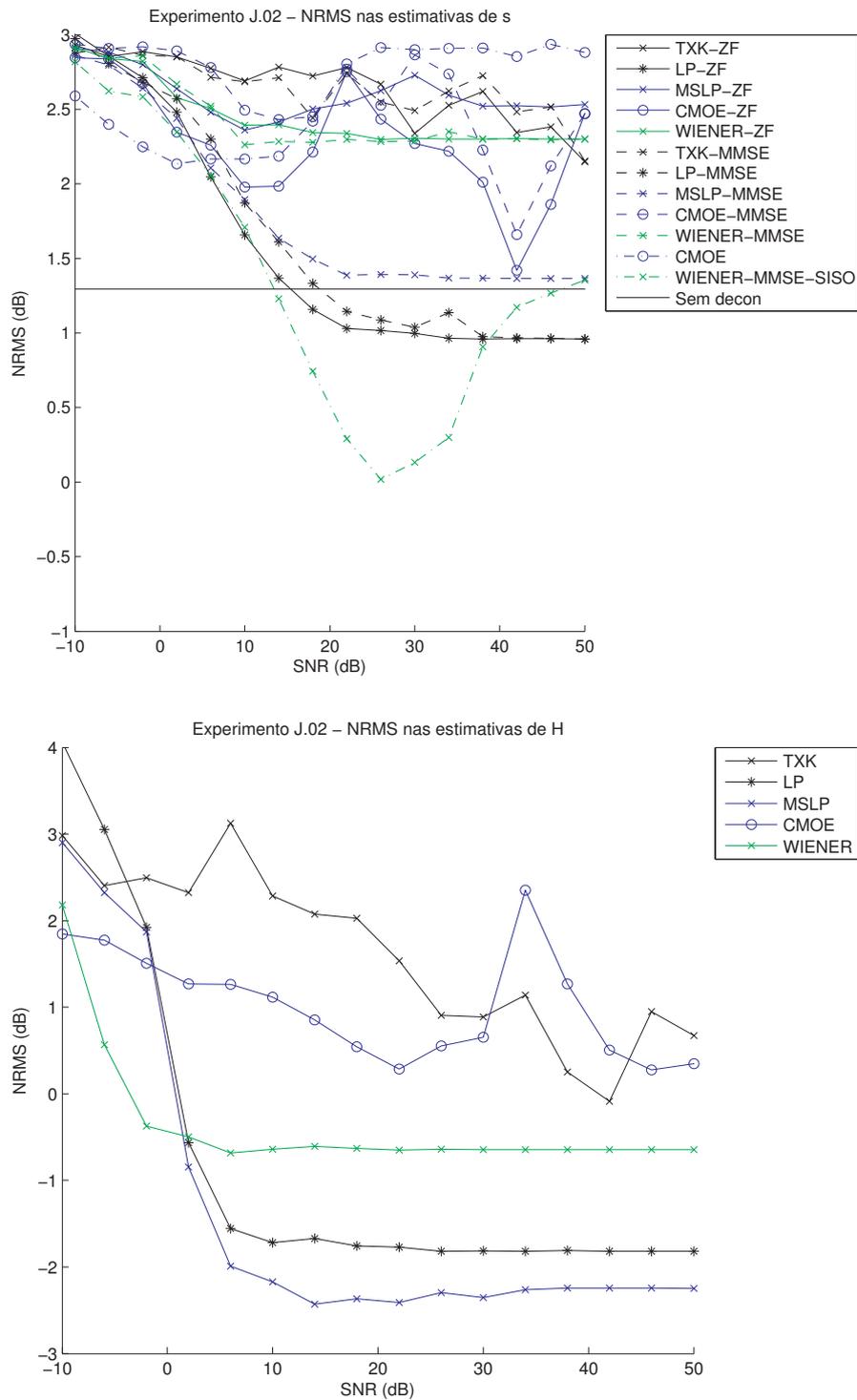


Figura D.66: Experimento J.02, realizado com $N = 1163$, $M = 50$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

D.8. GRÁFICOS

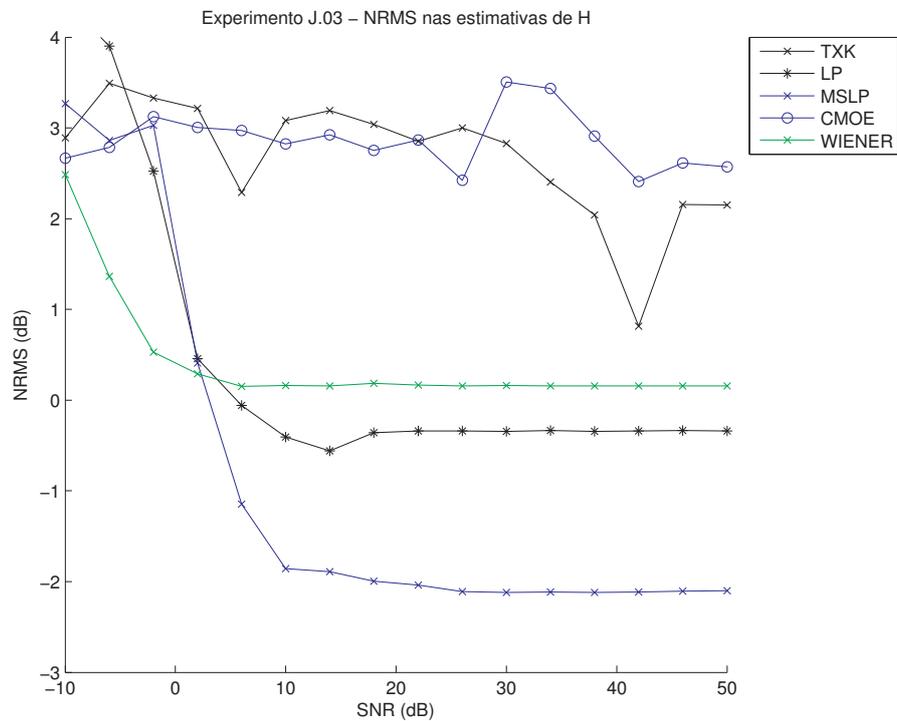
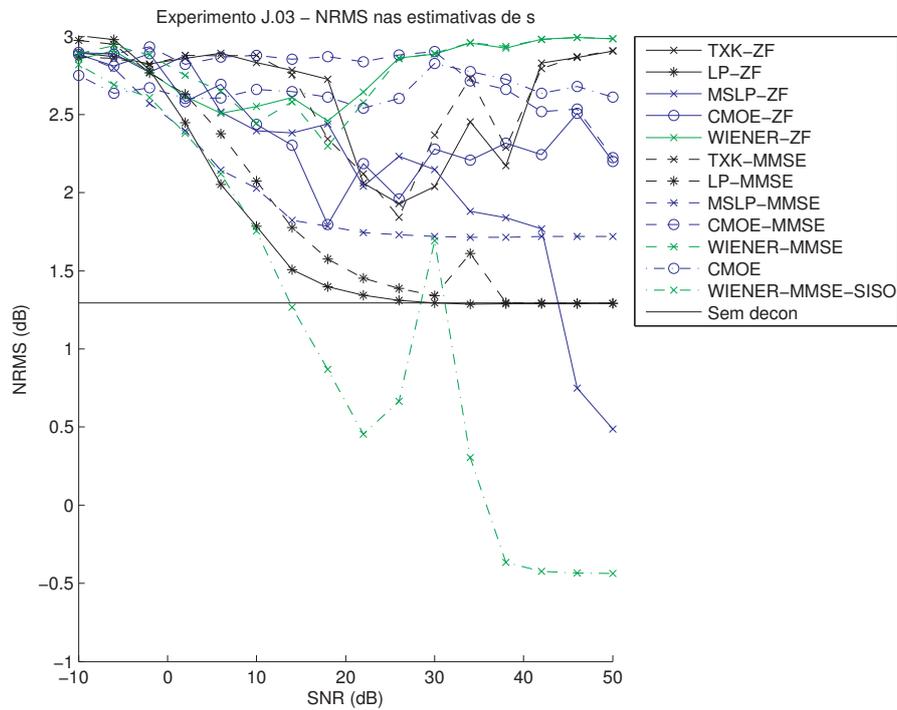


Figura D.67: Experimento J.03, realizado com $N = 1163$, $M = 100$ (subestimado), $s(k)$ determinístico (perfil de poço).

Referências Bibliográficas

BITMEAD, R. et al. Greatest common divisor via generalized Sylvester and Bezout matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 23, n. 6, p. 1043–1047, Dec. 1978.

CAMBOIS, G. *Surface-consistent processes in the log/fourier domain: deconvolution, static corrections and amplitude balancing*. Tese (Doutorado) — The University of Texas at Austin, Austin, Texas, USA, Aug. 1991.

CAMBOIS, G.; STOFFA, P. L. Surface-consistent phase decomposition. *SEG Expanded Abstracts*, Tulsa, OK, USA, v. 9, p. 1593–1596, 1990.

CAMBOIS, G.; STOFFA, P. L. Surface-consistent deconvolution in the log/Fourier domain. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 57, n. 6, p. 823–840, Jun. 1992.

CARVALHO, P. M.; WEGLEIN, A. B. Wavelet estimation for surface multiple attenuation using a simulated annealing algorithm. *SEG Expanded Abstracts*, Tulsa, OK, USA, v. 13, p. 1481–1484, 1994.

CARY, P. K.; LORENTZ, G. A. Four-component surface-consistent deconvolution. *SEG Expanded Abstracts*, Tulsa, OK, USA, v. 10, p. 1402–1405, 1991.

CARY, P. K.; LORENTZ, G. A. Four-component surface-consistent deconvolution. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 58, n. 3, p. 383–392, Mar. 1993.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DING, Z. An outer-product decomposition algorithm for multichannel blind identification. In: *Proceedings., 8th IEEE Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing*. Corfu: [s.n.], 1996. p. 132–135.

DING, Z. Matrix outer-product decomposition method for blind multiple channel identification. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 45, n. 12, p. 3053–3061, Dec. 1997.

DING, Z.; LI, Y. G. *Blind equalization and identification*. New York, NY, USA: Marcel Dekker, 2001.

DINIZ, P. S. R. *Adaptive filtering: algorithms and practical implementation*. 2nd ed. Norwell, Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers, 2002.

DUARTE, O. de O. *Dicionário enciclopédico inglês-português de geofísica e geologia*. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Geofísica, 2003.

GESBERT, D.; DUHAMEL, P. Robust blind channel identification and equalization based on multi-step predictors. In: *1997 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. ICASSP-97*. [S.l.: s.n.], 1997. v. 5, p. 3621–3624.

GRANT, F.; WEST, G. *Interpretation theory in applied geophysics*. [S.l.]: McGrall-Hill, 1965.

GUO, J.; ZHOU, X. Surface-consistent phase correction. *SEG Expanded Abstracts*, Tulsa, OK, USA, v. 20, p. 1839–1842, 2001.

HALE, I. Q-adaptive deconvolution. *Stanford Exploration Project Report*, v. 30, p. 133–158, 1982.

HARGREAVES, N. D.; CALVERT, A. J. Inverse Q filtering by fourier transform. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 56, n. 4, p. 519–527, Apr. 1991.

HAYKIN, S. *Communication systems*. 4th ed. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2001.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HYVÄRINEN, A.; KARHUNEN, J.; OJA, E. *Independent component analysis*. New York, NY, USA: Wiley Interscience, 2001.

IDIER, J.; GOUSSARD, Y. Multichannel seismic deconvolution. *IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing*, v. 31, n. 5, p. 961–979, Sep. 1993.

JOHNSTON, R. C.; REED, D. H.; DESLER, J. F. *SEG standards for specifying marine seismic energy sources*. Tulsa, OK, USA, 1988.

KAARESEN, K. F.; TAXT, T. Multichannel blind deconvolution of seismic signals. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 63, n. 6, p. 2093–2107, Dec. 1998.

KAILATH, T. *Linear Systems*. 1st ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1979.

KAILATH, T.; SAYED, A. H. *Fast reliable algorithms for matrices with structure*. 1st ed. Philadelphia, PH, USA: SIAM, 1999.

KEAREY, P.; BROOKS, M. *An introduction to geophysical exploration*. [S.l.]: Blackwell Scientific, 1984.

KIRCHHEIMER, F.; FERBER, R. Robust surface-consistent deconvolution with noise suppression. *SEG Expanded Abstracts*, Tulsa, OK, USA, v. 20, p. 1831–1834, 2001.

KUNG, S. Y.; KAILATH, T.; MORF, M. A generalized resultant matrix for polynomial matrices. In: *IEEE Conference on Decision and Control Systems*. [S.l.: s.n.], 1976. p. 892–895.

LEVIN, S. A. Lessons in surface-consistent deconvolution. *SEG Expanded Abstracts*, Tulsa, OK, USA, v. 7, p. 718–722, 1988.

LEVIN, S. A. Surface-consistent deconvolution. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 54, n. 9, p. 1123–1133, Sep. 1989.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LI, Y.; DING, Z. Blind channel identification based on second order cyclostationary statistics. In: *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1993. ICASSP-93*. [S.l.: s.n.], 1993. v. 4, p. IV81–IV84.

LINDSETH, R. Synthetic sonic logs: a process for stratigraphic interpretation. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 44, n. 1, p. 3–26, Jan. 1979.

LIU, H.; XU, G.; TONG, L. A deterministic approach to blind identification of multi-channel FIR systems. In: *1994 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. ICASSP-94*. Adelaide, SA: [s.n.], 1994. v. 4, p. IV/581–IV/584.

LU, W. Non-minimum-phase wavelet estimation using second- and third-order moments. *Geophysical Prospecting*, v. 53, n. 1, p. 149–158, Jan. 2005.

LU, W. Adaptive multiple subtraction using independent component analysis. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 71, n. 5, p. S179–S184, Sep. 2006.

LU, W. et al. Adaptive multiple subtraction using independent component analysis. *SEG Expanded Abstracts*, Tulsa, OK, USA, p. 2048–2051, Mar. 2003.

MARES, S. *Introduction to applied geophysics*. [S.l.]: Reidel, 1984.

MAYNE, W. H. Common reflection point horizontal data stacking techniques. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 27, n. 6, p. 927–938, Dec. 1962.

MERAIM, K. A. et al. Prediction error methods for time-domain blind identification of multichannel FIR filters. In: *1995 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. ICASSP-95*. [S.l.: s.n.], 1995. v. 3, p. 1968–1971.

MOULINES, E. et al. Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters. In: *1994 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. ICASSP-94*. Adelaide, SA: [s.n.], 1994. v. 4, p. IV/573–IV/576.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MOULINES, E. et al. Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 43, n. 2, p. 516–525, Feb. 1995.

NSIRI, B.; BOUCHER, J.-M.; CHONAVEL, T. Multichannel blind deconvolution application to marine seismic. In: *OCEANS 2003 Proceedings*. [S.l.: s.n.], 2003. p. P2761–P2766.

OLIVEIRA, A. S. de. Accessing real reflectivity via deconvolution of acquisition related factors. *SEG Expanded Abstracts*, Tulsa, OK, USA, v. 17, p. 1092–1095, 1998.

OLIVEIRA, A. S. de. Seismic pulses obtained from the analysis of direct waves: a comparison to simulated pulses obtained with modeled notionals. *The Leading Edge*, Tulsa, OK, USA, v. 19, n. 1, p. 68–71, Jan. 2000.

PROAKIS, J. G. *Digital communications*. 4th ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2001.

ROBINSON, E. A. *An oral history conducted in 1997 by Andrew Goldstein*. New Brunswick, NJ, USA: IEEE History Center, 1997.

ROBINSON, E. A.; TREITEL, S. *Geophysical signal analysis*. Tulsa, OK, USA: Society of Exploration Geophysicists, 1973.

RUJIE, Z.; YUN, L.; XIANGYU, G. Suppressing the sand dune reverberation by the surface consistent predictive deconvolution with the variable predictive gap. *SEG Expanded Abstracts*, Tulsa, OK, USA, v. 22, p. 1988–1991, 2003.

SACCHI, M. D.; ULRYCH, T. J. Nonminimum-phase wavelet estimation using higher order statistics. *The Leading Edge*, Tulsa, OK, USA, v. 19, n. 1, p. 80–83, Jan. 2000.

SERPEDIN, E.; GIANNAKIS, G. B. A simple proof of a known blind channel identifiability result. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 47, n. 2, p. 591–593, Feb. 1999.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- SHARMA, P. *Geophysical methods in geology*. [S.l.]: Elsevier, 1976.
- SHERIFF, R.; GELDART, L. *Exploration seismology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1983.
- SHERIFF, R. E.; GELDART, L. P. *Exploration seismology*. 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1995.
- SLOCK, D. T. M. Blind fractionally-spaced equalization, perfect-reconstruction filter banks and multichannel linear prediction. In: *1994 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. ICASSP-94*. [S.l.: s.n.], 1994. v. 4, p. IV/581–IV/584.
- STRANG, G. *Linear algebra and its applications*. 3rd ed. [S.l.]: Thomson Learning, 1988.
- TANER, M. T.; KOEHLER, F. Surface consistent corrections. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 46, n. 1, p. 17–22, Jan. 1981.
- TONG, L. et al. Blind channel identification based on second-order statistics: a frequency-domain approach. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 41, n. 1, p. 329–334, Jan. 1995.
- TONG, L.; XU, G.; KAILATH, T. A new approach to blind identification and equalization of multipath channels. In: *1991 Conference Record of the Twenty-Fifth Asilomar Conference on Signal, Systems and Computers*. Pacific Grove, CA: [s.n.], 1991. p. 856–860.
- TONG, L.; XU, G.; KAILATH, T. Necessary and sufficient conditions of channel identifiability based on second-order cyclostationary statistics. In: *Proceedings, 1993 IEEE International Symposium on Information Theory*. [S.l.: s.n.], 1993. p. 188–188.
- TONG, L.; XU, G.; KAILATH, T. Blind identification and equalization based on second-order statistics: a time domain approach. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 40, n. 2, p. 340–349, Mar. 1994.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

TONG, L.; ZHAO, Q. Blind channel estimation by least squares smoothing. In: *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1998. ICASSP '98*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 4, p. 2121–2124.

TONG, L.; ZHAO, Q. Joint order detection and blind channel estimation by least squares smoothing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 47, n. 9, p. 2345–2355, Sep. 1999.

TSATSANIS, M.; XU, Z. Constrained optimization methods for blind equalization of multiple FIR channels. In: *Conference Record of the Thirty-First Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, 1997*. [S.l.: s.n.], 1997. v. 1, p. 128–132.

TUGNAIT, J. K. Multistep linear predictors-based blind equalization of fir/iir single-input multiple-output channels with common zeros. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 47, n. 6, p. 1689–1700, Jun. 1999.

TUGNAIT, J. K.; LUO, W. Blind identification of time-varying channels using multistep linear predictors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 52, n. 6, p. 1739–1749, Jun. 2004.

VANDAELE, P.; MOONEN, M. Two deterministic blind channel estimation algorithms based on oblique projections. *Signal Processing*, v. 80, n. 3, p. 481–495, Mar. 2000.

VARELA, C. L.; ROSA, A. L. R.; ULRYCH, T. J. Modeling of attenuation and dispersion. *Geophysics*, Tulsa, OK, USA, v. 58, n. 8, p. 1167–1173, Aug. 1993.

VINOGRAD, B. Canonical positive definite matrices under internal linear transforms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 1, p. 159–161, 1950.

WATERS, K. *Reflection seismology*. 3rd ed. [S.l.]: John Wiley, 1987.

WAX, M.; KAILATH, T. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 1, n. 2, p. 387–392, Apr. 1985.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

XU, Z.; NG, B. P. Deterministic linear prediction methods for blind channel estimation based on dual concept of zero-forcing equalization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 50, n. 11, Nov. 2002.

YILMAZ ÖZ. *Seismic data analysis*. Tulsa, OK, USA: Society of Exploration Geophysicists, 2001.

YU, X.; TONG, L. Joint channel and symbol estimation by oblique projections. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 49, n. 12, p. 3074–3083, Sep. 2001.

ZHAO, Q.; TONG, L. Adaptive blind channel estimation by least squares smoothing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Piscataway, NJ, USA, v. 47, n. 11, p. 3000–3012, Nov. 1999.

ZIOLKOWSKI, A. M. Source array scaling for wavelet deconvolution. *Geophysical Prospecting*, v. 28, n. 6, p. 902–918, 1980.

Índice Remissivo

- afastamento lateral, 12
- agrupamentos de fonte comum, 11
- agrupamentos de ponto médio comum, 11
- airgun, *veja* fontes canhão de ar
- algoritmo
 - CMOE, 121
 - JLSS, 152
 - LP, 98
 - LSS, 141
 - MSLP, 115
 - OP, 165
 - OPD, 106
 - SCM, 128
 - SSM, 90
 - TXK, 78
- análise em componentes independentes, 40
- aquisição
 - em terra, 18
 - no mar, 21
- arranjo de sensores, 25
- camada de baixa velocidade, 14
- canal de comunicação, 5, 46
- cicloestacionariedade, 48
- CMP, *veja* ponto médio comum
- common-midpoint, *veja* ponto médio comum
- common-midpoint-gather, *veja* agrupamentos de ponto médio comum
- common-source-gather, *veja* agrupamentos de fonte comum
- complexidade linear, 127
- consistência de superfície, 46
- correção estática, 34
- deconvolução, 32, 33, 37, 38, 46, 47
 - determinística, 41
 - impulsiva, 42
 - multicanal, 61
 - preditiva, 44
- detectors, *veja* receptores
- detonação periférica, 30
- dip, *veja* mergulho
- dip moveout, *veja* sobretempo de mergulho
- DMO, *veja* sobretempo de mergulho

ÍNDICE REMISSIVO

- empilhamento, 32, 34, 37
- equações de Zoeppritz, 10
- equalização, 46, 47
 - cega, 61
 - cega fracionária, 61
- equalizador de mínimo erro médio quadrático, *veja* sistema inverso de mínimo erro médio quadrático
- equalizador forçador de zeros, 56
- espalhamento geométrico, 9, 41
- fator de dominância, 106, 165
- filtragem Q inversa, 45
- filtro preditor de erro, 45, 95
- fontes, 18
 - canhão de ar, 21
 - explosivas, 18
 - vibrador, 19
- geofone, 20, 22
- grupo de sensores, 25
- hidrofone, 21
- ICA, *veja* análise em componentes independentes
- identidade generalizada de Bezout, 93
- identificação cega de canal, 61
- identificação cega de sistemas SIMO FIR, 53
- independent component analysis, *veja* análise em componentes independentes
- inovação, 95
- inversão cega de sistemas SIMO FIR, 53
- lanço, 25
 - com tiro lateral L, 26
 - com tiro lateral T, 26
 - cruzado, 26
 - lateral, 26
 - lateral com lacuna, 26
 - simétrico, 25
 - simétrico com lacuna, 25
- lei de Snell, 10
- linha sinuosa, 31
- LVL, *veja* camada de baixa velocidade
- método CMP, *veja* ponto médio comum
- métodos de campo por reflexão, 23
- múltiplas, 17, 39
- mínimo erro médio quadrático, 69
- mínima entropia, 45
- mínimos quadrados totais, 162
- matriz de filtragem $\mathbf{H}^{(K)}$, 51
- matriz de filtragem $\mathbf{H}_l^{(K)}$, 51
- mergulho, 17
- migração, 32, 35, 37
 - 2D, 36
 - 3D, 36
 - em profundidade, 36
 - no tempo, 35
 - pós-empilhamento, 36
 - pré-empilhamento, 36

ÍNDICE REMISSIVO

- minimum mean square error, *veja* mínimo erro médio quadrático
- minimum mean square error equalizer, *veja* sistema inverso de mínimo erro médio quadrático
- MMSE, *veja* mínimo erro médio quadrático
- modulação por amplitude do pulso, 5
- NMO, *veja* sobretempo normal
- normal moveout, *veja* sobretempo normal
- offset, *veja* afastamento lateral
- onda superficial, 8
- ondas primárias, 8
- ondas secundárias, 8
- ordem de suavização, 137
- PAM, *veja* modulação por amplitude do pulso
- PEF, *veja* filtro preditor de erro
- perdas por absorção, 9, 41
- ponto médio comum, 11, 26, 28
- prediction error filter, *veja* filtro preditor de erro
- processo de inovação, 94
- produto externo, 101, 104, 157
- projeção oblíqua, 155
- pulse amplitude modulation, *veja* modulação por amplitude do pulso
- pulso sísmico, 41, 47
- receptor, 18
- geofone, 20, 22
- hidrofone, 21
- recursão de Levinson-Durbin, 45
- reflexões
- múltiplas, 39, 44
- primárias, 17, 44
- resolução
- horizontal, 18
- vertical, 18
- resposta ao impulso da terra, 41, 47
- roll-along recording, 26
- ruído aditivo, 46, 47
- sísmica de reflexão, 8
- sísmica de refração, 8
- sinais, 47
- sinal recebido, 46
- sinal transmitido, 46
- sismograma, 41, 47
- sistema inverso
- de mínimo erro médio quadrático, 69
- MMSE MISO FIR, 69
- ZF MISO FIR, 53, 69
- sistema quase-inverso MISO FIR, 56
- sistemas, 47
- sobretempo
- de mergulho, 12
- normal, 11
- sources, *veja* fontes
- spread, *veja* lanço

ÍNDICE REMISSIVO

subespaço

de ruído, 86

de sinal, 89

tamanho da janela de suavização, 137

TLS, *veja* mínimos quadrados totais

total least squares, *veja* mínimos quadrados totais

traço sísmico, 41, 47

vetor de entrada estendido $\mathbf{s}^{(K+M-1)}(k)$,

51

vetor de ruídos aditivos estendido $\mathbf{n}_l^{(K)}(k)$

da l -ésima saída, 51

vetor estendido da l -ésima saída do sistema SIMO

$\mathbf{x}_l^{(K)}(k)$, 51

vetor estendido das saídas do sistema SIMO

FIR $\mathbf{x}^{(K)}(k)$, 52

vetor estendido de ruídos aditivos $\mathbf{n}^{(K)}(k)$,

52

vetores generalizados de Vandermonde,

206

vibrador, 19