

USO DE ALGORITMOS GENÉTICOS NO PROJETO DE CONTROLADORES
PID ÓTIMOS PARA PLANTAS ESTÁVEIS OU INSTÁVEIS

Victor Nunes Nogueira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. João Carlos dos Santos Basilio, Ph.D.

Prof. Amit Bhaya, Ph.D.

Prof. Vilma Alves de Oliveira, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2006

NOGUEIRA, VICTOR NUNES

Uso de Algoritmos Genéticos no Projeto
de Controladores PID Ótimos para Plantas
Estáveis ou Instáveis [Rio de Janeiro] 2006

XV, 135 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Elétrica, 2006)

Dissertação - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1. Algoritmos Genéticos
2. Controladores PID
3. Sistemas lineares
4. Região de estabilidade

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me ajudar em todos os momentos da minha vida.

Gostaria de agradecer à minha família pelo empenho em me ajudar e estar ao meu lado sempre que preciso. Também gostaria de agradecer à minha noiva Flávia pelo apoio e paciência enquanto este trabalho foi desenvolvido.

Agradeço também aos amigos que conviveram comigo nestes anos do curso com quem dividi as mesmas preocupações e alegrias.

Também agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação, pelo convívio e amizade. Em especial agradeço ao professor e orientador João Carlos dos Santos Basílio pelo empenho em transmitir os ensinamentos, pela paciência e amizade.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

USO DE ALGORITMOS GENÉTICOS NO PROJETO DE CONTROLADORES
PID ÓTIMOS PARA PLANTAS ESTÁVEIS OU INSTÁVEIS

Victor Nunes Nogueira

Agosto/2006

Orientador: João Carlos dos Santos Basilio

Programa: Engenharia Elétrica

Os controladores PID têm sido muito utilizados em sistemas de controles industriais há décadas, tendo a capacidade de estabilizar e controlar cerca de 90% dos processos industriais existentes. O sucesso dos controladores PID se deve, principalmente, ao fato de terem uma estrutura simples, com um pequeno número de parâmetros a serem ajustados. São utilizados também porque alcançam o rastreamento do sinal de referência e a rejeição de perturbação do tipo degrau, através integral. Além disso, os mesmos possuem a capacidade de antecipação do futuro, devido à ação derivativa.

Recentemente, foi apresentada uma maneira sistemática de se obter a região de estabilidade para os controladores PI e PID para uma dada planta modelada por uma função de transferência racional, isto é, um conjunto de pontos (k_p, k_i) e (k_p, k_i, k_d) que tornam o sistema realimentado estável. Contudo, nos trabalhos até então apresentados não foi feito uso dessa região para se projetar controladores PI e PID que atendam outros objetivos de projeto, tais como melhoria dos regimes transitórios da resposta a sinais de referências e da rejeição de perturbação de sinais do tipo degrau.

Neste trabalho, será proposto um método de ajuste dos controladores PID, supondo conhecida a função de transferência da planta, podendo esta ser estável ou instável. Será utilizado um critério de otimização quadrático em que fazem parte desta função a norma quadrática do sinal do erro e da componente do sinal de perturbação no sinal de saída. Para minimizar este custo, que é função dos parâmetros do controlador PID, será utilizado o Algoritmo Genético, onde o espaço da busca será a região na qual o sistema de malha fechada é estável.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

USE OF GENETIC ALGORITHMS IN THE PROJECT OF EXCELLENT
CONTROLLERS PID FOR STABLE OU UNSTABLE PLANTS

Victor Nunes Nogueira

August/2006

Advisor: João Carlos dos Santos Basilio

Department: Electrical Engineering

PID controllers have been used very frequently in industrial control system for decades, being able to stabilize nearly 90% of the industrial processes. The success of PID controllers is mainly due to their simple structure, with a few parameter to be tuned. They are also employed because they can allow the tracking of the reference signal and disturbance rejection of step signals, due to the integral action. In addition, because of the derivative action, they have the ability of anticipation.

Recently, a systematic way to obtain the stability region for PI and PID controllers for a given plant modeled by a rational transfer function, i.e., the set of points (k_p, k_i) and (k_p, k_i, k_d) that make the closed-loop stable. However, in the works presented in the literature, this result has not been deployed to design PI and PID controllers that address other design objectives, such as, transient improvement of the response to reference and disturbance rejection to step signals.

In this work, it is proposed a new method for tuning PI and PID controllers, assuming known the plant transfer function, it can be stable or unstable. It will be used a quadratic optimization criterion formed by the l_2 -norms of the error signal and of the output component of the disturbance signal. In order to search for the controller parameter which minimizes this cost function, it will be used genetic algorithm, where the feasibility region is given by the PI and PID stability region.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Fundamentos Básicos	4
2.1 Controladores PID	4
2.1.1 A ação proporcional	5
2.1.2 A ação integral	7
2.1.3 A ação derivativa	9
2.2 Conclusões	13
3 Estabilização de sistemas realimentados utilizando controladores P, PI e PID	14
3.1 O Teorema de Hermite-Biehler e suas generalizações	15
3.1.1 O Teorema de Hermite-Biehler	15
3.1.2 Distribuição das Raízes e Ângulo de Fase Final Acumulado . .	18
3.1.3 Assinatura imaginária e real associadas a um polinômio de coeficientes reais	19
3.1.4 Generalizando o teorema de Hermite-Biehler	20
3.2 Estabilização de plantas lineares invariantes no tempo utilizando controladores PID	23
3.2.1 Uma caracterização de todos os controladores proporcionais estabilizantes por realimentação.	23

3.2.2	Caracterização de todos os controladores PI estabilizantes . . .	31
3.2.3	Uma caracterização para todos os controladores PID estabilizantes	40
3.2.4	Controladores PID com modificação do termo derivativo . . .	48
3.3	Conclusão	51
4	Algoritmos Genéticos	52
4.1	Filosofia geral dos algoritmos genéticos	53
4.2	Definições Básicas	54
4.3	Representação Genética e Geração da População Inicial	55
4.4	Avaliação da População	56
4.5	Seleção e Reprodução	57
4.6	Cruzamento	59
4.7	Mutação	61
4.8	Reinserção	61
4.9	Terminação do AG	62
4.10	Estrutura dos Algoritmos Genéticos	62
4.11	Vantagens e desvantagens dos Algoritmos Genéticos	63
4.12	Conclusão	64
5	Utilização de Algoritmos Genéticos no Projeto de Controladores PI e PID Ótimos	65
5.1	Normas de Sinais e Sistemas	66
5.1.1	Normas de sinais	66
5.1.2	Normas de sistemas	67
5.2	Um funcional de custo quadrático para o ajuste dos parâmetros de um controlador PI	70
5.3	Um funcional de custo quadrático para o ajuste dos parâmetros de um controlador PID	75
5.4	Exemplos	78
5.4.1	Exemplos de controladores PI	80

5.4.2	Exemplos de controladores PID	105
5.5	Conclusões	133
6	Conclusões	134

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de blocos de um sistema realimentado com controlador.	4
2.2	Interpretação da ação derivativa.	10
2.3	Diagrama de blocos com um controlador PID.	11
2.4	Curva de módulo do diagrama de Bode para ação derivativa.	13
3.1	Diagrama de blocos de um sistema realimentado com controlador.	23
3.2	Conjunto de pontos (k_p, k_i) que estabilizam a planta.	40
3.3	Conjunto de pontos (k_d, k_i, k_p) que estabilizam a planta.	47
3.4	Conjunto de pontos (k'_p, k'_i, k'_d) que estabilizam a planta.	50
3.5	Conjunto de pontos (k_p, k_i, k_d) que estabilizam a planta.	50
4.1	Seleção Roleta.	58
4.2	Seleção “Stochastic Universal Sampling”.	58
4.3	Cromossomos escolhidos para o cruzamento.	59
4.4	Cromossomos depois do cruzamento.	60
4.5	Cromossomos depois do cruzamento em dois pontos.	60
4.6	Cromossomos depois da operação de mutação.	61
4.7	Diagrama de fluxo do AG.	63
5.1	Diagrama de blocos de um sistema realimentado com controlador PI.	72
5.2	Diagrama de Bode do filtro passa baixa (a) e filtro passa alta (b).	74
5.3	Diagrama de blocos com um controlador PID.	76
5.4	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo e sub-ótimo para o exemplo 5.1.	81

5.5	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo e sub-ótimo para o exemplo 5.1.	82
5.6	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.2. . . .	83
5.7	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo com $\beta = 1$ (linha verde), com $\beta = 100$ (linha azul) e sub-ótimo com $\beta = 1$ (linha vermelha) para o exemplo 5.2.	84
5.8	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo $\beta = 1$ (linha verde), com $\beta = 100$ (linha azul) e sub-ótimo com $\beta = 1$ (linha vermelha) para o exemplo 5.2.	85
5.9	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.3. . . .	86
5.10	Respostas ao degrau dos sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.3.	87
5.11	Sinais de controle dos sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.3.	87
5.12	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.4. . . .	89
5.13	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.4.	90
5.14	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.3.	90
5.15	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.6. . . .	92
5.16	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.6.	93
5.17	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.6.	93
5.18	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.7. . . .	94
5.19	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.7.	95
5.20	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.7.	96
5.21	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.8. . . .	97

5.22	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.8.	98
5.23	Sinal de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.8.	99
5.24	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.9.	100
5.25	Respostas ao degrau para o sistemas com os controladores PI ótimos (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.9.	101
5.26	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.9.	101
5.27	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.10.	102
5.28	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.10.	103
5.29	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.10.	104
5.30	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.13.	106
5.31	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.13.	107
5.32	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.13.	107
5.33	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.15.	109
5.34	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.15.	110
5.35	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.15.	110
5.36	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.16.	111
5.37	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.16.	112
5.38	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimos (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.16.	113

5.39	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.17.	114
5.40	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.17.	115
5.41	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.18.	116
5.42	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.18.	117
5.43	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.18.	118
5.44	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.19.	119
5.45	Resposta ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.19.	120
5.46	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.19.	120
5.47	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.20.	121
5.48	Resposta ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.20.	122
5.49	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimos (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.20.	123
5.50	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.21.	124
5.51	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.21.	125
5.52	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.21.	125
5.53	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.22.	127
5.54	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.22.	127
5.55	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.22.	128
5.56	Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.23.	129

5.57	Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.23.	130
5.58	Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.23.	131

Lista de Tabelas

5.1	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.1	82
5.2	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.2	85
5.3	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.3	88
5.4	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.4	89
5.5	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.6	92
5.6	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.7	96
5.7	Índices de desempenho relativos aos sistemas realimentados do exemplo 5.8	100
5.8	Índices de desempenho do relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.9	100
5.9	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.10	104
5.10	Índices de desempenho relativo aos sistemas realimentados do exemplo 5.13	106
5.11	Índices de desempenho relativos aos sistemas realimentados do exemplo 5.15	109

5.12	Índices de desempenho relativos aos sistemas realimentados do exemplo 5.16	113
5.13	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.17	115
5.14	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.18	118
5.15	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.19	119
5.16	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.20	123
5.17	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.21	126
5.18	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.22	128
5.19	Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.23	131
5.20	Tempo de simulação utilizando o algoritmo genético para os exemplos	132

Capítulo 1

Introdução

Os controladores PID têm sido muito utilizados em sistemas de controles industriais há décadas, mais precisamente, desde que, Ziegler e Nichols propuseram o primeiro método de ajuste de controladores PID (Ziegler e Nichols, 1942). Esses controladores têm a capacidade de estabilizar e controlar cerca de 90% dos processos industriais existentes (Oviedo et al., 2006).

O sucesso dos controladores PID se deve, principalmente, ao fato de terem uma estrutura simples, com um pequeno número de parâmetros a serem ajustados. São utilizados também porque alcançam o rastreamento do sinal de referência e a rejeição de perturbação do tipo degrau, através da ação integral. Além disso, os mesmos possuem a capacidade de antecipação do futuro, devido à ação derivativa.

O ajuste dos parâmetros dos controladores PID nas indústrias é frequentemente feito de forma pouco adequada (por exemplo, escolha dos parâmetros através de tentativa-e-erro) devido à falta de conhecimento dos métodos de ajuste por parte dos engenheiros. O método de ajuste de Ziegler-Nichols, que foi o primeiro método a ser desenvolvido, e por ser de fácil aplicação (é baseado na resposta ao degrau do sistema em malha aberta), é ainda o mais utilizado na indústria. Neste método, os parâmetros do controlador PID são obtidos a partir da resposta ao degrau do sistema em malha aberta, não sendo necessária a identificação da planta; os parâmetros são determinados com base na rejeição do sinal de perturbação que prevê um decaimento de um quarto em relação à amplitude do ciclo anterior.

Nos últimos anos, muitos métodos de ajuste de parâmetros de controladores

PID foram desenvolvidos visando melhorar o desempenho de sistemas realimentados com este controlador. Ge et al. (n.d.) propuseram um método de projeto de controladores PID robustos em que utilizam técnicas padrões (como LQR e H_∞) de projeto e é solucionado utilizando-se LMI. Cominos e Munro (2002) fizeram um trabalho, resumindo alguns dos métodos de projetos de controladores PID, recentes, mais utilizados e sobre algumas das técnicas mais exploradas, tais como: o método de Ziegler-Nichols, de re-alocação de pólos, projetos baseados em especificações em ganhos de fase e de margem, técnicas de polinômios de intervalos, projetos baseados no teorema da estabilidade de Nyquist, Algoritmo Genéticos para ajustes de PID, ajustes de PID utilizando a teoria da interação adaptativa, métodos baseados em cancelamento, métodos de integração de magnitude múltipla ótima, entre outras, visando apresentar vantagens e desvantagens destes métodos. Em Ho et al. (2001) é apresentada uma generalização do teorema de Hermite-Biehler, com o objetivo de se ter uma caracterização para todos os controladores PID que estabilizem uma dada planta. Astrom e Hagglund (2004) revisaram o método de resposta ao degrau de Ziegler-Nichols, utilizando uma forma de malha robusta. Em Toscano (2004), têm-se um trabalho de projeto de controlador PID robusto, utilizando a curva de Nyquist da função de transferência de malha aberta. Oviedo et al. (2006) utiliza uma identificação do sistema, e, posteriormente uma otimização de um critério do erro, como a integral do erro absoluto (IAE), a energia do erro e a integral da multiplicação do erro pelo tempo (ITAE).

Neste trabalho, será proposto um método de ajuste dos controladores PID, supondo conhecida a função de transferência da planta. Será utilizado um critério de otimização quadrático em que fazem parte desta função a norma quadrática do sinal do erro e da componente do sinal de perturbação no sinal de saída. Para minimizar este custo, que é função dos parâmetros do controlador PID, será utilizado o Algoritmo Genético, onde o espaço da busca será a região na qual o sistema de malha fechada é estável, ou seja, os pontos (k_p, k_i, k_d) que tornam o sistema compensado estável. Para determinar esta região, será utilizada uma generalização do teorema de Hermite-Biehler (Datta et al., 2000), que será o primeiro passo do

método.

A estrutura do trabalho é a seguinte: no Capítulo 2 será feita uma introdução sobre os controladores PID, demonstrando as características das ações proporcional, integral e derivativa. Também serão apresentados alguns fundamentos matemáticos necessários para o desenvolvimento do novo método de ajuste dos parâmetros de controladores PI e PID a ser utilizado no trabalho. Serão apresentados, ainda, alguns conceitos de normas e sistemas buscando estabelecer relações entre os domínios do tempo e da frequência. O Capítulo 3 trata da estabilidade dos sistemas compensados com os controladores PI e PID. Primeiramente será visto o teorema de Hermite-Biehler e sua generalização, e depois, essa utilizada para descrever a estabilização de plantas lineares invariantes no tempo com controladores PI e PID. No Capítulo 4 será feita uma revisão sucinta do método de otimização utilizado neste trabalho, o algoritmo genético. No capítulo 5 será desenvolvido um método de ajuste do parâmetros de controladores PI e PID para sistemas estáveis ou instáveis. Ainda, no Capítulo 5 alguns exemplos são utilizados para ilustrar o desempenho dos sistemas compensados com controladores PI e PID obtidos utilizando-se o método proposto nesse trabalho. Por fim, no Capítulo 6 serão apresentadas as conclusões e sugestões de futuros trabalhos a serem desenvolvidos.

Capítulo 2

Fundamentos Básicos

Neste capítulo será feita uma revisão sobre os fundamentos básicos de controladores PID visando prover a teoria necessária para a introdução da técnica de ajuste a ser proposta neste trabalho. Serão, apresentados, também, os fundamentos matemáticos necessários para o desenvolvimento do novo método de ajuste dos parâmetros de controladores PI e PID.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 2.1 serão vistos os fundamentos dos controladores PID e em seguida, serão apresentadas as características principais das ações proporcional, integral e derivativa; na seção 2.2 serão apresentadas as conclusões.

2.1 Controladores PID

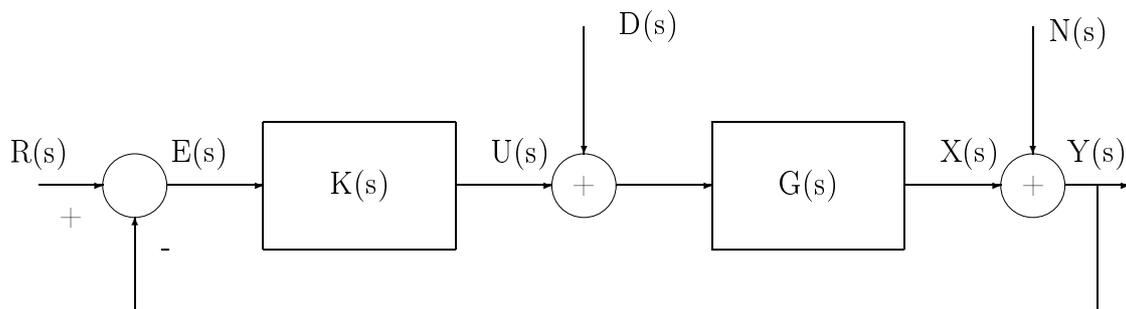


Figura 2.1: Diagrama de blocos de um sistema realimentado com controlador.

Considere o diagrama de blocos da figura 2.1 onde $G(s)$ é a planta a ser controlada, $K(s)$ o controlador a ser projetado, $u(t)$ é o sinal de controle, $e(t)$ é o sinal do erro, que é a diferença entre o sinal de referência $r(t)$ e o sinal de saída medido

$y(t)$, $d(t)$ representa um sinal externo de perturbação, $\eta(t)$ é o ruído de medição e $x(t)$ é o sinal de saída. O controlador a ser considerado neste trabalho é o do tipo PID cuja forma geral é:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\lambda) d\lambda + k_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (2.1)$$

onde k_p é o ganho proporcional, k_i é o ganho integral e o k_d é o ganho derivativo. Pela equação (2.1) verifica-se que o sinal de controle $u(t)$ é composto por três parcelas: uma proporcional, uma integral e a terceira, derivativa. A parcela proporcional, como o próprio nome diz, é proporcional ao sinal de erro $e(t)$, a parcela integral é proporcional à integral do sinal do erro e a derivativa é proporcional à derivada do sinal do erro.

2.1.1 A ação proporcional

A ação proporcional é descrita pela equação:

$$u(t) = k_p e(t), \quad (2.2)$$

ou seja, o sinal de controle é proporcional ao sinal do erro. Pode-se analisar as propriedades da ação proporcional supondo que o sistema esteja operando em regime permanente. A partir do diagrama de blocos da figura 2.1, tem-se:

$$Y(s) = N(s) + G(s)D(s) + G(s)K(s)R(s) - G(s)K(s)Y(s), \quad (2.3)$$

sendo, $R(s)$, $D(s)$ e $N(s)$ são as transformadas de Laplace dos sinais de referência, de perturbação e do ruído de medição, respectivamente. Após algumas manipulações algébricas, pode-se re-escrever a equação acima como

$$Y(s) = \frac{G(s)K(s)R(s)}{1 + G(s)K(s)} + \frac{G(s)D(s)}{1 + G(s)K(s)} + \frac{N(s)}{1 + G(s)K(s)}. \quad (2.4)$$

A partir da equação (2.4) acima, tem-se os elementos necessários para a análise do comportamento do controlador proporcional quanto à rejeição da perturbação, à sensibilidade aos ruídos de medição e ao rastreamento do sinal de referência. Para isso, faça $K(s) = k_p$.

• **Rastreamento do sinal de referência**

Para o rastreamento do sinal de referência, será analisado primeiramente o sinal da saída do sistema. Para tanto suponha $R(s) = \frac{R}{s}$, $D(s) = 0$ e $N(s) = 0$. Como $K(s) = k_p$, tem-se que a equação (2.4), torna-se:

$$Y(s) = \frac{G(s)k_p}{1 + G(s)k_p} \frac{R}{s}. \quad (2.5)$$

Supondo que $K(s) = k_p$ estabiliza o sistema realimentado, tem-se que utilizando o teorema do valor final, resulta:

$$y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{G(0)k_p}{1 + G(0)k_p} R \neq R, \quad (2.6)$$

o que mostra que, em geral, a ação proporcional sozinha não é suficiente para que o sistema rastreie sinais de referência do tipo degrau, uma vez que o erro de regime permanente só será nulo se e somente se $G(0) \rightarrow \infty$, isto é, se a planta tiver um pólo na origem.

• **Rejeição da perturbação**

Para a análise da rejeição de perturbação de um sistema com um controlador proporcional, suponha $N(s) = 0$. Nesse caso, a equação (2.4) torna-se:

$$Y(s) = \frac{G(s)D(s)}{1 + G(s)k_p} + \frac{G(s)k_p R(s)}{1 + G(s)k_p}. \quad (2.7)$$

Sejam $D(s) = D/s$ e $G(s) = k_g \tilde{G}(s)$ e suponha, que $K(s) = k_p$ estabiliza o sistema realimentado. A partir da análise do rastreamento, em regime permanente, tem-se que a parcela correspondente à resposta ao sinal de referência será constante e igual a $Y_R (Y_R \neq R)$. Utilizando, então, o teorema do valor final na equação (2.7) tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = Y_R + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sk_g \tilde{G}(s) \frac{D}{s}}{1 + k_p k_g \tilde{G}(0)} \\ &= Y_R + \frac{k_g \tilde{G}(0) D}{1 + k_p k_g \tilde{G}(0)} = Y_R + Y_D. \end{aligned} \quad (2.8)$$

sendo

$$Y_D = \frac{k_g \tilde{G}(0) D}{1 + k_p k_g \tilde{G}(0)}. \quad (2.9)$$

Note que $Y_D = 0$ se e somente se $\tilde{G}(s) = 0$, isto é, se e somente se a planta tem um zero na origem. Contudo, Y_D pode ser reduzido aumentando o ganho de malha aberta $k_p k_g \tilde{G}(0)$, uma vez que quando $k_p k_g \tilde{G}(0) \gg 1$, ter-se-á $Y_R = D/k_p$. Como consequência, quanto maior o valor de k_p , menor será a contribuição de D na resposta.

• Sensibilidade aos ruídos de medição

A partir do diagrama de blocos da figura 2.1 e fazendo-se $D(s) = 0$, resulta:

$$X(s) = \frac{G(s)K(s)[R(s) - N(s)]}{1 + G(s)K(s)}. \quad (2.10)$$

Para $R(s) = \frac{R}{s}$ e $N(s) = \frac{N}{s}$ e supondo que $K(s) = k_p$ estabiliza o sistema realimentado, tem-se, utilizando o teorema do valor final que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = Y_R - \frac{k_p k_g \tilde{G}(0)N}{1 + k_p k_g \tilde{G}(0)} = Y_R - Y_N, \quad (2.11)$$

onde $Y_N = k_p k_g$ e $G(s) = k_g \tilde{G}(s)$. A equação (2.11) acima mostra que a ação proporcional, sozinha, não é suficiente para eliminar os efeitos do ruído de medição na resposta do sistema.

Note, ainda, que um alto valor de k_p melhora a rejeição do sistema a sinais de perturbação do tipo degrau, contudo, um alto valor do ganho k_p , resulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = Y_R - N. \quad (2.12)$$

Conclui-se, então, que, para um controlador proporcional com alto ganho, o sistema torna-se sensível aos ruídos de medição.

2.1.2 A ação integral

Com a ação integral utilizada em conjunto com a ação proporcional, elimina-se o erro de regime permanente, ou seja, haverá um rastreamento assintótico de sinais de referência do tipo degrau. Para tanto, considere o diagrama de blocos da figura 2.1 e suponha $N(s) = 0$. Portanto, de acordo com a equação (2.4), tem-se que o sinal de saída será dado por:

$$Y(s) = \frac{G(s)K(s)R(s)}{1 + G(s)K(s)} + \frac{G(s)D(s)}{1 + G(s)K(s)}. \quad (2.13)$$

Observando a equação (2.13), pode-se constatar que o sinal de saída possui duas componentes, uma devida ao sinal de referência e outra devida ao sinal de perturbação. Pode-se, portanto, escrever:

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_D(s) \quad (2.14)$$

sendo

$$Y_R(s) = \frac{G(s)K(s)R(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (2.15)$$

e

$$Y_D(s) = \frac{G(s)D(s)}{1 + G(s)K(s)}. \quad (2.16)$$

Assim, haverá rejeição do sinal de perturbação se e somente se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) = 0, \quad (2.17)$$

e haverá o rastreamento do sinal de referência se e somente se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = R, \quad (2.18)$$

ou, equivalentemente, analisando-se o sinal de erro, se e somente se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = 0, \quad (2.19)$$

onde $e_r(t) = r(t) - y_r(t)$.

• Rejeição da perturbação

A análise da rejeição de perturbação será realizada a partir da componente do sinal de saída devido à perturbação. Para um controlador PI, tem-se:

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s}. \quad (2.20)$$

e supondo $D(s) = \frac{D}{s}$ e que $K(s)$ estabiliza o sistema realimentado, pode-se aplicar o teorema do valor final, obtendo-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG(s)\frac{D}{s}}{1 + G(s)\frac{(k_p s + k_i)}{s}} \quad (2.21)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG(s)D}{s + G(s)(k_p s + k_i)} = 0, \quad (2.22)$$

o que mostra que, utilizando-se um controlador PI, tem-se completa rejeição de sinais de perturbação modelados como degrau.

• Rastreamento do sinal de referência

Na análise do rastreamento de sinais de referência do tipo degrau, será considerado o sinal do erro $e_r(t)$. Supondo que $K(s)$ estabiliza o sistema realimentado, pode-se escrever:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - Y_R(s)] \quad (2.23)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \left[R(s) - \frac{G(s)K(s)R(s)}{1 + G(s)K(s)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{R(s)}{1 + G(s)K(s)} \right]. \quad (2.24)$$

Fazendo $R(s) = \frac{R}{s}$ e utilizando a expressão (2.20), obtém-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR}{s + G(s)(k_p s + k_i)} = 0. \quad (2.25)$$

Portanto, tem-se que um sistema compensado com controlador PI rastreia assintoticamente o sinal de referência.

2.1.3 A ação derivativa

A ação derivativa em um controlador, é usada para aumentar a velocidade da resposta transitória em malha fechada. Um controlador proporcional e derivativo pode ser considerado um antecipador da resposta do sistema ou, equivalentemente, como um termo que faz a previsão do sinal do erro. Para se comprovar essa afirmativa traça-se uma reta tangente à curva de erro no instante atual (t_0) conforme mostra a figura 2.2. Através da figura, pode-se observar que a derivada do sinal de erro no instante t_0 , coincide com a derivada da reta tangente neste instante, isto é:

$$\alpha = \left. \frac{d}{dt} e(t) \right|_{t=t_0} \quad (2.26)$$

Escrevendo α em função de um erro estimado $e_s(t)$, tem-se:

$$\alpha = \frac{e_s(t) - e(t_0)}{t - t_0}, \quad (2.27)$$

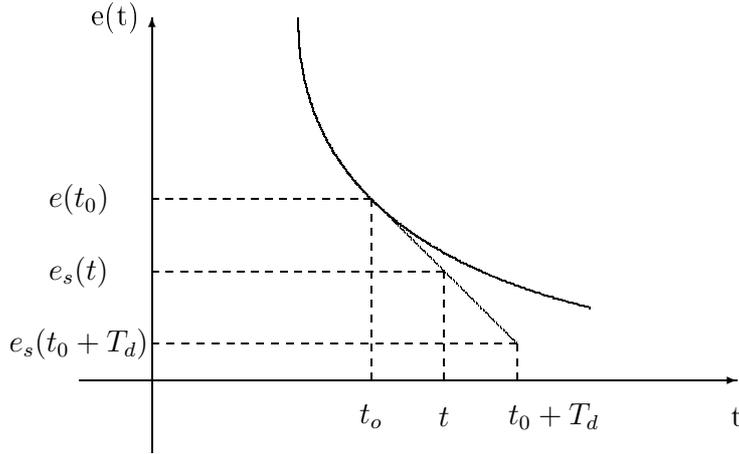


Figura 2.2: Interpretação da ação derivativa.

e, portanto:

$$e_s(t) = e(t_0) + \alpha(t - t_0). \quad (2.28)$$

Seja o instante futuro t dado por $t = t_0 + T_d$. Substituindo-se esse valor de t na equação acima, obtém-se:

$$e_s(t_0 + T_d) = e(t_0) + \alpha(t_0 + T_d - t_0) = e(t_0) + T_d\alpha. \quad (2.29)$$

Substituindo-se α dado pela equação (2.26), na equação (2.29) acima, encontra-se:

$$e_s(t_0 + T_d) = e(t_0) + T_d \left. \frac{d}{dt} e(t) \right|_{t=t_0}. \quad (2.30)$$

Assim, vê-se que o sinal do erro estimado para o instante $t_0 + T_d$ é função do erro no instante t_0 e da derivada deste sinal no instante t_0 .

• Modificação do termo derivativo

A ação derivativa de um controlador é proporcional à derivada do sinal do erro, sendo dada por:

$$u_D(t) = k_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (2.31)$$

onde $e(t) = r(t) - y(t)$. Tem-se, então, que:

$$u_D(t) = k_d \frac{d}{dt} [r(t) - y(t)] = k_d \left[\frac{d}{dt} r(t) - \frac{d}{dt} y(t) \right]. \quad (2.32)$$

Para uma referência do tipo degrau, tem-se que no instante da aplicação do degrau, a derivada do sinal de referência ($dr(t)/dt$) será muito grande. Depois desse

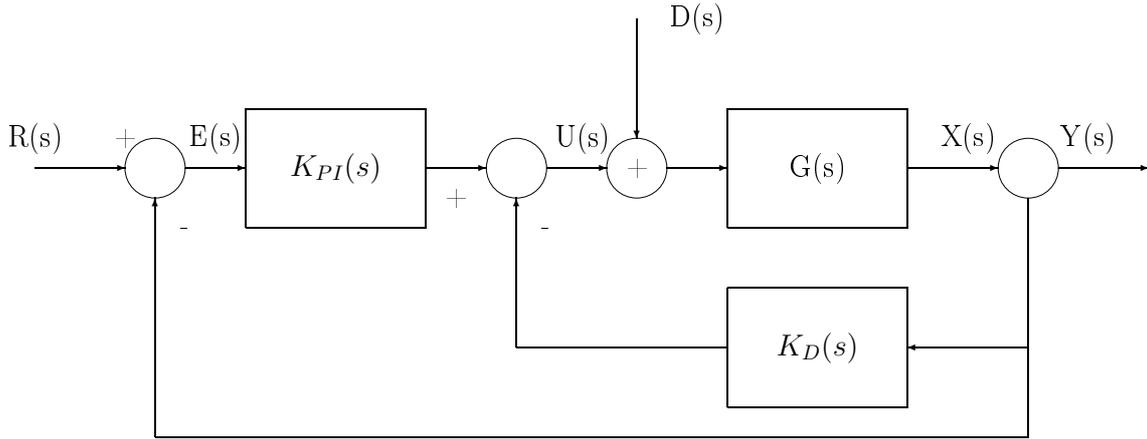


Figura 2.3: Diagrama de blocos com um controlador PID.

instante, o sinal $r(t)$ quase não sofre variações, ou seja, a derivada deste sinal é praticamente nula. Isto sugere que, do ponto de vista prático, a ação derivativa deve ser realizada sobre a saída e não sobre o sinal do erro. Portanto, de acordo com (2.32) a equação (2.31) deve ser substituída por:

$$u_D(t) = -k_d \frac{d}{dt} y(t). \quad (2.33)$$

Como consequência, a forma geral de um controlador PID (equação 2.1) deve ser reescrita como:

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\lambda) d\lambda - k_d \frac{d}{dt} y(t). \quad (2.34)$$

A correspondente relação no domínio s será dada por:

$$U(s) = K_{PI}(s)E(s) - k_D Y(s) \quad (2.35)$$

onde $K_{PI}(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s}\right)$ e $K_D(s) = s k_d(s)$ que corresponde ao diagrama de blocos da figura 2.3.

• Limitação do ganho derivativo

A existência de ruídos de medição de alta frequência pode fazer com que a implementação da ação derivativa de acordo com a equação (2.34) apresenta alguns problemas. Para entender esse problema, seja $n(t)$ um ruído de medição senoidal descrito por:

$$n(t) = N_0 \text{sen}(\omega_h t), \quad (2.36)$$

onde ω_h é normalmente uma alta frequência. A partir do diagrama de blocos da figura 2.1, tem-se:

$$u_D(t) = k_d \frac{d}{dt} n(t) = k_d \frac{d}{dt} [N_0 \text{sen}(\omega_h t)] = N_0 \omega_h k_d \text{cos}(\omega_h t). \quad (2.37)$$

Pode-se constatar, a partir da equação 2.37, que a amplitude do sinal de controle da saída da ação derivativa $u_D(t)$ é proporcional a ω_h e assim, o sinal de controle atingirá altos valores. Portanto, essa forma de implementação da ação derivativa amplifica os ruídos de medição. Para solucionar este problema, é necessário limitar o ganho derivativo para altas frequências. Isto pode ser feito introduzindo-se um pólo, na expressão da ação derivativa do controlador em $-\tau_d$, sendo $\tau_d = k_d/(k_p N)$ com N um limitador do ganho, sendo, portanto, mais um parâmetro do projeto. Deste forma a componente da ação derivativa será dada por:

$$K_D(s) = \frac{k_d s}{\tau_d s + 1}. \quad (2.38)$$

Substituindo-se $s = j\omega$ na equação (2.38) acima, tem-se:

$$K_D(j\omega) = \frac{j k_d \omega}{j \tau_d \omega + 1}, \quad (2.39)$$

e calculando-se o módulo de $K_D(j\omega)$, quando $\omega \rightarrow \infty$, obtém-se:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |K_D(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{k_d j \omega}{\tau_d j \omega + 1} \right| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{k_d j \omega}{\tau_d j \omega} \right| = \frac{k_d}{\tau_d}. \quad (2.40)$$

Como $\tau_d = k_d/(k_p N)$, tem-se que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |K_D(j\omega)| = \frac{k_d}{k_d/k_p N} = k_p N, \quad (2.41)$$

que mostra que o ganho derivativo para altas frequências é limitado em função do valor de N . O diagrama de Bode da figura 2.4 mostra a limitação do ganho derivativo com a inclusão do novo pólo do controlador.

Assim a nova função de transferência dos controladores PID será dada por:

$$U(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s} \right) E(s) - \frac{k_d s}{\tau_d s + 1} Y(s). \quad (2.42)$$

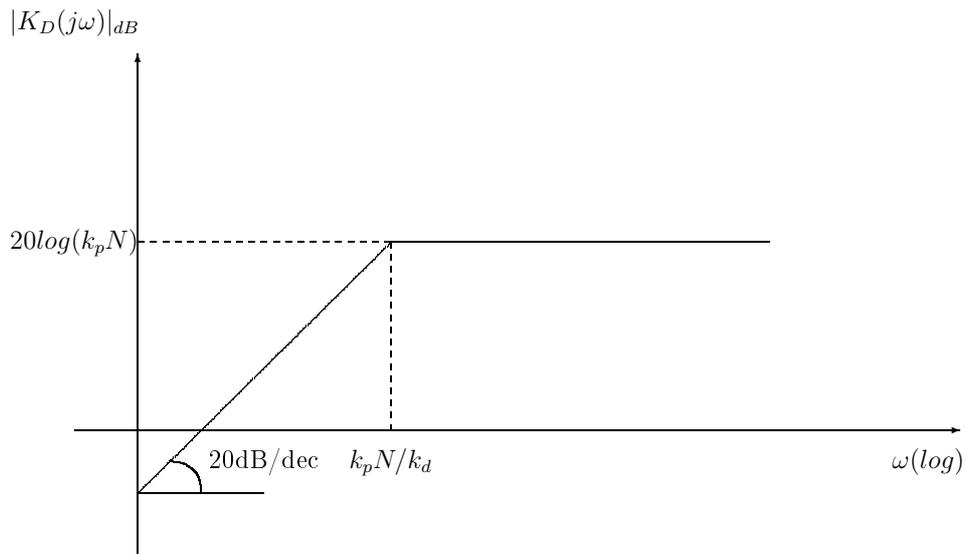


Figura 2.4: Curva de módulo do diagrama de Bode para ação derivativa.

2.2 Conclusões

O objetivo principal deste capítulo foi apresentar alguns fundamentos básicos sobre os controladores PID, além de mostrar alguns resultados que serão úteis no decorrer deste trabalho.

Capítulo 3

Estabilização de sistemas realimentados utilizando controladores P, PI e PID

Um dos métodos mais utilizados para se conhecer a estabilidade de um sistema é o critério de Hurwitz. De acordo com o critério de Hurwitz, o problema de verificar a estabilidade de um sistema linear invariante no tempo, se reduz a determinar as condições segundo as quais todas as raízes de um dado polinômio real estão no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo, ou seja, tenham parte real negativa. Um polinômio que satisfaz esta condição é dito ser de Hurwitz.

Um critério equivalente ao de Hurwitz é dado pelo Teorema de Hermite-Biehler, que garante que um polinômio é Hurwitz se e somente se as raízes satisfazem uma propriedade de interlaçamento. Por outro lado, quando o polinômio considerado não é de Hurwitz, o teorema de Hermite-Biehler não provê qualquer informação a respeito da distribuição das raízes do polinômio, ao contrário do critério de Hurwitz. Resultados recentes, contudo, permitem, também, aplicar o teorema de Hermite-Biehler a polinômios que não são, necessariamente, Hurwitz. Essas generalizações do teorema de Hermite-Biehler serão nesse trabalho, utilizadas para testar a estabilidade dos sistemas realimentados obtidos quando controladores proporcional (P), proporcional+integral (PI) e proporcional+integral+derivativo (PID) forem utilizados.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 3.1 será visto o teorema de Hermite-Biehler e, em seguida, serão apresentadas generalizações para este

teorema; na seção 3.2 será apresentada a solução para o problema de estabilização de sistemas lineares com controladores PI e PID dada em Datta et al. (2000).

3.1 O Teorema de Hermite-Biehler e suas generalizações

3.1.1 O Teorema de Hermite-Biehler

Teorema 3.1 (Teorema de Hermite-Biehler) *Seja $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$ um polinômio real de grau igual a n . Escreva $\delta(s)$ como*

$$\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2), \quad (3.1)$$

sendo $\delta_e(s^2)$ e $s\delta_o(s^2)$ as componentes de $\delta(s)$ constituídas de potências pares e ímpares, respectivamente. Para cada frequência $\omega \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega), \quad (3.2)$$

sendo $p(\omega) = \delta_e(-\omega^2)$, $q(\omega) = \omega\delta_o(-\omega^2)$. Seja $\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \dots$ os zeros reais não-negativos de $\delta_e(-\omega^2)$ e $\omega_{o_1}, \omega_{o_2}, \dots$ os zeros reais não-negativos de $\delta_o(-\omega^2)$, ambos ordenados em ordem crescente de magnitude. Então $\delta(s)$ é Hurwitz estável se e somente se todos os zeros de $\delta_e(-\omega^2)$ e $\delta_o(-\omega^2)$ são reais e distintos, δ_n e δ_{n-1} têm o mesmo sinal e os zeros reais não-negativos satisfazem a seguinte propriedade de entrelaçamento

$$0 < \omega_{e_1} < \omega_{o_1} < \omega_{e_2} < \omega_{o_2} < \dots \quad (3.3)$$

□

O objetivo, agora, é obter uma generalização para o teorema 3.1 acima para polinômios reais que não sejam necessariamente polinômios de Hurwitz. Para facilitar esta generalização, será apresentada, inicialmente, uma caracterização alternativa do teorema de Hermite-Biehler. Para tanto, necessita-se da função *sgn*, definida da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \text{sgn} &: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\} \\ x \mapsto \text{sgn}[x] &= \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tem-se agora o seguinte resultado.

Lema 3.1 *Seja $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n$ um polinômio real dado, de grau n , e sejam $\omega_{e_1}, \omega_{e_2}, \dots$ os zeros reais não-negativos de $\delta_e(-\omega^2)$ e $\omega_{o_1}, \omega_{o_2}, \dots$ os zeros reais não-negativos de $\delta_o(-\omega^2)$, ordenados em ordem crescente de magnitude. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\delta(s)$ é Hurwitz estável.

(ii) δ_n e δ_{n-1} têm o mesmo sinal e $f(\underline{\omega}_o) = n$, onde

$$f(\underline{\omega}_o) = \begin{cases} \text{sgn}[\delta_0] \{ \text{sgn}[p(0)] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2\text{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \dots \\ + (-1)^{m-1} 2\text{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m \text{sgn}[p(\infty)] \}, \\ \text{para } n \text{ par e } m=n/2 \\ \text{sgn}[\delta_0] \{ \text{sgn}[p(0)] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2\text{sgn}[p(\omega_{o_2})] + \dots \\ + (-1)^{m-1} 2\text{sgn}[p(\omega_{o_{m-1}})] + (-1)^m 2\text{sgn}[p(\omega_{o_m})] \}, \\ \text{para } n \text{ ímpar e } m=(n-1)/2 \end{cases} \quad (3.4)$$

(iii) δ_n e δ_{n-1} tem o mesmo sinal e $g(\underline{\omega}_e) = n$, onde

$$g(\underline{\omega}_e) = \begin{cases} \text{sgn}[\delta_0] \{ 2\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2\text{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2\text{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \dots \\ + (-1)^{m-2} 2\text{sgn}[q(\omega_{e_{m-1}})] + (-1)^{m-1} 2\text{sgn}[p(\omega_m)] \}, \\ \text{para } n \text{ par e } m=n/2 \\ \text{sgn}[\delta_0] \{ 2\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2\text{sgn}[q(\omega_{e_2})] + 2\text{sgn}[q(\omega_{e_3})] + \dots \\ + (-1)^{m-1} 2\text{sgn}[q(\omega_{e_m})] + (-1)^m \text{sgn}[p(\infty)] \}, \\ \text{para } n \text{ ímpar e } m=(n-1)/2 \end{cases} \quad (3.5)$$

□

Prova: Ver Datta et al. (2000). □

O teorema 3.1 é baseado no fato de que, para um polinômio de Hurwitz $\delta(s)$, quando ω varia de 0 a $+\infty$ a fase de $\delta(j\omega)$ é uma função monotonicamente crescente e, portanto, as raízes das partes reais e imaginárias de $\delta(j\omega)$ devem aparecer alternadamente. Assim, o teorema 3.1 provê uma caracterização gráfica. O lema 3.1, por outro lado provê uma caracterização analítica equivalente ao teorema 3.1.

Se $\delta(s)$ for um polinômio de Hurwitz, então todos os zeros de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ têm que ser reais e distintos, caso contrário as condições impostas pelo lema 3.1 falham.

Será apresentado um exemplo para ilustrar a aplicação do teorema 3.1 e do lema 3.1.

Exemplo 3.1 *Considere o polinômio real*

$$\delta(s) = s^7 + 5s^6 + 14s^5 + 25s^4 + 31s^3 + 26s^2 + 14s + 4. \quad (3.6)$$

Tem-se, portanto, que

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega), \quad (3.7)$$

sendo

$$p(\omega) = -5\omega^6 + 25\omega^4 - 26\omega^2 + 4 \quad (3.8)$$

e

$$q(\omega) = \omega(-\omega^6 + 14\omega^4 - 31\omega^2 + 14). \quad (3.9)$$

As raízes reais não-negativas de $p(\omega)$ e de $q(\omega)$ são

$$\begin{cases} \omega_{e_1} = 0,43106, & \omega_{e_2} = 1,08950, & \omega_{e_3} = 1,90452 \\ \omega_{o_1} = 0,78411, & \omega_{o_2} = 1,41421, & \omega_{o_3} = 3,37419 \end{cases}$$

Note que $0 < \omega_{e_1} < \omega_{o_1} < \omega_{e_2} < \omega_{o_2} < \omega_{e_3} < \omega_{o_3}$, e, portanto, de acordo com o teorema de Hermite-Biehler, como a propriedade do interlaçamento foi verificada, então $\delta(s)$ é um polinômio Hurwitz.

Para se chegar à mesma conclusão através do lema 3.1, note que $\text{sgn}[p(0)] = 1$, $\text{sgn}[p(\omega_{o_1})] = -1$, $\text{sgn}[p(\omega_{o_2})] = 1$, $\text{sgn}[p(\omega_{o_3})] = -1$ e portanto como $\delta(s)$ tem grau igual a 7, que é ímpar, então $m = 6/2 = 3$. Assim, deve-se considerar a equação (3.4b) ou a equação (3.5b) para se verificar se $\delta(s)$ é um polinômio de Hurwitz. Para utilizar a equação (3.4b), calcula-se:

$$f(\underline{\omega}_o) = \text{sgn}[\delta_0] \{ \text{sgn}[p(0)] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o_1})] + 2\text{sgn}[p(\omega_{o_2})] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o_3})] \} = 7, \quad (3.10)$$

e, de acordo com o item (ii) do lema 3.1, $\delta(s)$ é um polinômio de Hurwitz. Usando a equação (3.5b), calcula-se:

$$\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] = 1, \text{sgn}[q(\omega_{e_2})] = -1, \text{sgn}[q(\omega_{e_3})] = 1, \text{sgn}[q(\infty)] = -1 \quad (3.11)$$

e, desta forma,

$$f(\underline{w}_e) = \text{sgn}[\delta_0] \{2\text{sgn}[q(\omega_{e_1})] - 2\text{sgn}[q(\omega_{q_2})] + 2\text{sgn}[q(\omega_{e_3})] - \text{sgn}[q(\infty)]\} = 7, \quad (3.12)$$

que, de acordo como item (iii) mostra que $\delta(s)$ é um polinômio de Hurwitz.

Finalmente, para verificar que $\delta(s)$ é realmente um polinômio de Hurwitz, note que as raízes de $\delta(s)$ são $-0,5 \pm 1,3229j$, $-0,5 \pm 0,8660j$, $-1 \pm j$ e -1 , que estão no lado esquerdo do semi-plano complexo. \square

A propriedade de entrelaçamento do teorema 3.1, e equivalentemente, as condições do lema 3.1, permitem apenas afirmar se o polinômio $\delta(s)$ é de Hurwitz ou não. Por isso, será estudado, a partir de agora, generalizações para o teorema de Hermite-Biehler para polinômios que não sejam necessariamente Hurwitz. Essas generalizações serão utilizadas também para resolver o problema de estabilização dos sistemas realimentados para controladores com determinadas estruturas.

3.1.2 Distribuição das Raízes e Ângulo de Fase Final Acumulado

Nesta seção será desenvolvido um estudo preliminar para a generalização do teorema de Hermite-Biehler: uma relação fundamental entre o ângulo de fase final acumulado da resposta em frequência de um polinômio $\delta(s)$ e a diferença entre o número de raízes de $\delta(s)$ nos semi-planos esquerdo aberto e direito aberto do plano complexo (\mathbb{C}^- e \mathbb{C}^+ , respectivamente). Neste primeiro momento serão considerados polinômios que não tenham zeros no eixo imaginário.

Considere um polinômio real $\delta(s)$ de grau n :

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \dots + \delta_n s^n, \quad \delta_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad \delta_n \neq 0 \quad (3.13)$$

tal que $\delta(j\omega) \neq 0$, $\forall \omega \in (-\infty, \infty)$. Sejam $p(\omega)$ e $q(\omega)$ duas funções definidas por $p(\omega) = \text{Re}[\delta(j\omega)]$ e $q(\omega) = \text{Im}[\delta(j\omega)]$, isto é

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega), \quad \forall \omega. \quad (3.14)$$

Além disso, denote $\theta(\omega) = \text{fase}(\delta(j\omega)) = \arctan \left[\frac{q(\omega)}{p(\omega)} \right] + \frac{1 - \text{sgn}[p(\omega)]}{2} \pi$. Suponha que $\Delta_0^\infty \theta$ denote a mudança total em $\theta(\omega)$ quando ω varia de 0 a ∞ e que $l(\delta)$ e $r(\delta)$ denotem o número de raízes de $\delta(s)$ em \mathbb{C}^- e \mathbb{C}^+ , respectivamente. Pode-se, então, enunciar o seguinte lema:

Lema 3.2 *Seja $\delta(s)$ um polinômio real sem raízes no eixo imaginário. Então:*

$$\Delta_0^\infty = \frac{\pi}{2} [l(\delta) - r(\delta)]. \quad (3.15)$$

□

Prova: Cada raiz em \mathbb{C}^- contribui com $+\frac{\pi}{2}$ e cada raiz em \mathbb{C}^+ contribui com $-\frac{\pi}{2}$ para a mudança do argumento final. □

3.1.3 Assinatura imaginária e real associadas a um polinômio de coeficientes reais

Nesta seção, serão definidas as assinaturas imaginária e real associadas a um polinômio real. Essas definições serão úteis porque permitirão enunciar a generalização do teorema de Hermite-Biehler de forma mais clara.

Definição 3.1 *Seja $\delta(s)$ um polinômio real qualquer de grau n e suponha que k denote a multiplicidade de uma raiz qualquer na origem. Defina:*

$$p_f(\omega) := \frac{p(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{n}{2}}}, \quad q_f(\omega) := \frac{q(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{n}{2}}}, \quad (3.16)$$

e suponha que $0 < \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ denotem os zeros reais, não-negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidade ímpar. Defina, ainda, $\omega_m = \infty$. Então, a assinatura imaginária $\sigma_i(\delta)$ de $\delta(s)$ é definida por:

$$\sigma_i(\delta) := \begin{cases} \{ \text{sgn}[p_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ 2\text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[p_f(\omega_m)] \} (-1)^{m-1} \text{sgn}[q(\infty)] \}, \text{ se } n \text{ é par} \\ \{ \text{sgn}[p_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \dots + (-1)^{m-1} \\ 2\text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] \} (-1)^{m-1} \text{sgn}[q(\infty)] \}, \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3.17)$$

onde $p_f^{(k)}(\omega_0) = \frac{d^k}{d\omega^k} [p_f(\omega)]|_{\omega=\omega_0}$. □

Definição 3.2 *Seja $\delta(s)$ um polinômio real qualquer de grau n e suponha que k denote a multiplicidade de uma raiz qualquer na origem. Sejam $p_f(\omega)$ e $q_f(\omega)$ definidos de acordo com a equação (3.16) e suponha que $0 < \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ sejam os zeros reais, não-negativos, distintos e finitos de $p_f(\omega)$ com multiplicidade ímpar. Defina, ainda, $\omega_0 = 0$ e $\omega_m = \infty$. Então, a assinatura real $\sigma_r(\delta)$ de $\delta(s)$ é definida por:*

$$\sigma_r(\delta) := \begin{cases} \{ \text{sgn}[q_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[q_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots \\ + (-1)^{m-1} 2\text{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] \} (-1)^m \text{sgn}[p(\infty)] \}, \text{ se } n \text{ é par} \\ \{ \text{sgn}[q_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[q_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[q_f(\omega_2)] + \dots \\ + (-1)^{m-1} 2\text{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[q_f(\omega_m)] \} \text{sgn}[p(\infty)], \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (3.18)$$

onde $q_f^{(k)}(\omega_0) = \frac{d^k}{d\omega^k}[q_f(\omega)]|_{\omega=\omega_0}$. □

3.1.4 Generalizando o teorema de Hermite-Biehler

Neste momento, serão obtidas duas generalizações para o teorema de Hermite-Biehler. Para tanto, será apresentada uma maneira de se determinar, sistematicamente, o ângulo de fase final acumulado “da mudança da resposta em frequência de um polinômio”. Primeiro, tem-se que para uma dada frequência ω , o ângulo de fase de $\delta(j\omega)$ é dado por:

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{q(\omega)}{p(\omega)} + \alpha, \quad \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \pi \quad (3.19)$$

Conseqüentemente, a taxa de variação do ângulo de fase em relação à frequência ω será dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \theta(\omega) &= \frac{1}{1 + \frac{q^2(\omega)}{p^2(\omega)}} \frac{\dot{q}(\omega)p(\omega) - \dot{p}(\omega)q(\omega)}{p^2(\omega)} \\ &= \frac{\dot{q}(\omega)p(\omega) - \dot{p}(\omega)q(\omega)}{p^2(\omega) + q^2(\omega)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Se $p(\omega)$ e $q(\omega)$ são conhecidos para todo ω , pode-se integrar a equação (3.20) para obter o ângulo de fase final acumulado. Entretanto, para calcular a acumulação final do ângulo de fase para todas as frequências não é necessário conhecer a taxa da variação do ângulo de fase precisamente para cada frequência. A razão para

isso esta no fato de que para as freqüências onde o diagrama polar de $\delta(j\omega)$ faz a transição do eixo real para o eixo imaginário, ou vice versa, há uma mudança no ângulo de fase final de $\pm\frac{\pi}{2}$ radianos. O sinal da mudança do ângulo de fase pode ser determinado examinando-se a equação (3.20) no cruzamento do gráfico de $\delta(\omega)$ no eixo real ou imaginário. Quando há um cruzamento do eixo real ou imaginário, um dos dois termos do numerador de (3.20) se anula e como o denominador é sempre positivo, a determinação do sinal da mudança do sinal do ângulo de fase torna-se mais simples.

Note que, para algum polinômio $\delta(s)$ de grau maior ou igual a um, tem-se que ou a parte real ou a parte imaginária de $\delta(s)$, ou ambos, tornam-se infinitamente grandes quando $\omega \rightarrow \pm\infty$. Entretanto, para contar o acumulado do ângulo de fase total em múltiplos inteiros de cruzamentos de eixos é essencial que o diagrama da resposta em freqüência usado aproxime-se do eixo real ou do eixo imaginário quando $\omega \rightarrow \pm\infty$. Uma das maneiras para tornar isso possível, é normalizar o diagrama de $\delta(j\omega)$, escalonando-o por $\frac{1}{f(\omega)}$, onde $f(\omega) = (1 + \omega^2)^{\frac{n}{2}}$. Como $f(j\omega)$ não tem nenhum zero real, este escalonamento assegurará que o diagrama da resposta em freqüência normalizada

$$\delta_f(j\omega) = p_f(\omega) + jq_f(\omega),$$

onde

$$p_f(\omega) := \frac{p(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{n}{2}}} \quad e \quad q_f(\omega) := \frac{q(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{n}{2}}},$$

de fato, intercepta ou o eixo real ou o eixo imaginário em um ponto finito quando $\omega \rightarrow \infty$, ao mesmo tempo em que não altera as freqüências finitas em que $\delta(j\omega)$ intercepta os eixos real e imaginário.

Sejam $p(j\omega)$, $q(j\omega)$, $p_f(j\omega)$ e $q_f(j\omega)$ como definidos acima e suponha que $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{m-1}$ sejam os zeros reais, distintos, não-negativos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidade ímpar. Note que, como a função $q_f(\omega)$ não muda de sinal quando passa através um zero real de $q_f(\omega)$ com multiplicidade par, então tais zeros podem ser pulados quando se conta o ângulo de fase final acumu-

lado. Defina, também, $\omega_m = +\infty$. Assim, as seguintes observações podem ser feitas:

1. Se ω_i e ω_{i+1} são, ambos, zeros de $q_f(\omega)$ então

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \theta = \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}[p_f(\omega_i)] - \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{i+1})]] \operatorname{sgn}[q_f(\omega_i^+)]. \quad (3.21)$$

2. Se ω_i é um zero de $q_f(\omega)$ e ω_{i+1} não é um zero de $q_f(\omega)$, uma situação possível somente quando $\omega_{i+1} = \infty$ é um zero de $p_f(\omega)$ e n é ímpar, então

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \theta = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[p_f(\omega_i)] \operatorname{sgn}[q_f(\omega_i^+)]. \quad (3.22)$$

- 3.

$$\operatorname{sgn}[q_f(\omega_{i+1}^+)] = -\operatorname{sgn}[q_f(\omega_i^+)], \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-2. \quad (3.23)$$

Note que a equação (3.21) acima é óbvia enquanto a equação (3.23) é uma simples afirmação de que $q_f(\omega)$ troca de sinal quando passa por um zero com multiplicidade ímpar. A equação (3.22), por outro lado, segue diretamente da equação (3.20).

Usando (3.23) repetidamente, obtém-se:

$$\operatorname{sgn}[q_f(\omega_i^+)] = (-1)^{m-1-i} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)], \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3.24)$$

Substituindo (3.24) em (3.21), pode-se ver que se ω_i, ω_{i+1} são ambos zeros de $q_f(\omega)$ então

$$\Delta_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \theta = \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}[p_f(\omega_i)] - \operatorname{sgn}[p_f(\omega_{i+1})]] (-1)^{m-1-i} \operatorname{sgn}[q_f(\omega_{m-1}^+)]. \quad (3.25)$$

A observação acima permite enunciar e provar o seguinte teorema.

Todas as restrições quanto ao posicionamento das raízes serão, agora, retiradas e, portanto, o polinômio $\delta(s)$ pode ser um polinômio real qualquer. Tem-se então o seguinte teorema:

Teorema 3.2 *Seja $\delta(s)$ um dado polinômio real de grau n . Então*

$$l(\delta) - r(\delta) = \sigma_i(\delta). \quad (3.26)$$

□

Prova: Ver Datta et al. (2000). □

Agora, será apresentado o segundo teorema.

Teorema 3.3 *Seja $\delta(s)$ um dado polinômio real de grau n . Então,*

$$l(\delta) - r(\delta) = \sigma_r(\delta). \quad (3.27)$$

□

3.2 Estabilização de plantas lineares invariantes no tempo utilizando controladores PID

Nesta seção, será utilizado o teorema de Hermite-Biehler generalizado para encontrar uma solução para o problema da estabilização de uma dada planta linear invariante no tempo utilizando um sistema realimentado e um controlador do tipo PID.

3.2.1 Uma caracterização de todos os controladores proporcionais estabilizantes por realimentação.

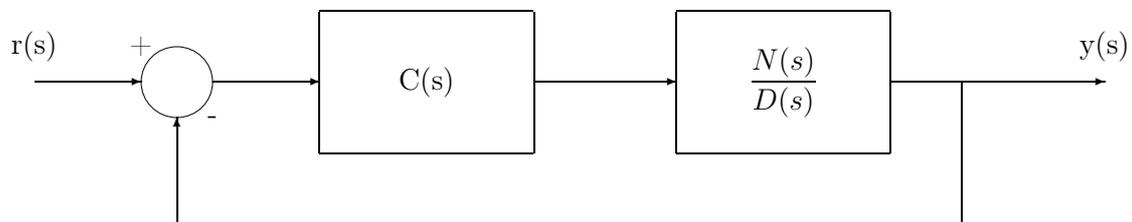


Figura 3.1: Diagrama de blocos de um sistema realimentado com controlador.

Considere o sistema realimentado mostrado na figura 3.1, onde $r(t)$ é o sinal de referência, $y(t)$ é o sinal da saída, $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ é a função de transferência da planta, onde $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios coprimos e $C(s)$ é o controlador a ser projetado.

Será considerado, inicialmente o caso em que $C(s)$ é um controlador proporcional, isto é,

$$C(s) = k. \quad (3.28)$$

Nessas condições, o polinômio característico de malha fechada $\delta(s, k)$ é dado por:

$$\delta(s, k) = D(s) + kN(s). \quad (3.29)$$

O objetivo é determinar os valores de k , para os quais o sistema realimentado é estável, ou seja, $\delta(s, k)$ é um polinômio de Hurwitz. O primeiro passo a ser dado é, a partir de $\delta(s, k)$, construir um polinômio que tenha somente a parte ímpar dependente de k , já que ambas as partes (par e ímpar) de $\delta(s, k)$ são dependentes de k permitindo, então, aplicar o teorema 3.2. Considere as seguintes decomposições de $N(s)$ e $D(s)$:

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \quad (3.30)$$

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2). \quad (3.31)$$

Suponha que o grau de $D(s)$ seja igual a n e que o de $N(s)$ seja m ($m \leq n$) e defina

$$N^*(s) := N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2). \quad (3.32)$$

Multiplicando-se $\delta(s, k)$ por $N^*(s)$ tem-se:

$$\begin{aligned} l(\delta(s, k)N^*(s)) - r(\delta(s, k)N^*(s)) &= l(\delta(s, k)) - r(\delta(s, k)) \\ &\quad + l(N^*(s)) - r(N^*(s)) \\ &= l(\delta(s, k)) - r(\delta(s, k)) \\ &\quad + l(N(-s)) - r(N(-s)) \\ &= l(\delta(s, k)) - r(\delta(s, k)) \\ &\quad - l(N(s)) + r(N(s)). \end{aligned}$$

Note que $\delta(s, k)$ tem grau igual a n será Hurwitz se e somente se $l(\delta(s, k)) = n$ e $r(\delta(s, k)) = 0$. Além disso, pelo teorema 3.2

$$\sigma_i[\delta(s, k)N^*(s)] = l[\delta(s, k)N^*(s)] - r[\delta(s, k)N^*(s)]. \quad (3.33)$$

Portanto, segue o seguinte lema,

Lema 3.3 $\delta(s, k)$ é Hurwitz se e somente se

$$\sigma_i[\delta(s, k)N^*(s)] = n - [l(N(s) - r(N(s))]. \quad (3.34)$$

□

A tarefa, agora, é determinar para quais valores de k , se existirem, a equação (3.34) é verificada. Para tanto, escreva $\delta(s, k)N^*(s)$ como

$$\delta(s, k)N^*(s) = h_1(s^2) + kh_2(s^2) + sg_1(s^2) \quad (3.35)$$

onde

$$h_1(s^2) = D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) \quad (3.36)$$

$$h_2(s^2) = N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2) \quad (3.37)$$

$$g_1(s^2) = N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2). \quad (3.38)$$

Substituindo-se $s = j\omega$, obtém-se:

$$\delta(j\omega, k)N^*(j\omega) = p(\omega, k) + jq(\omega) \quad (3.39)$$

onde

$$p(\omega, k) = p_1(\omega) + kp_2(\omega) \quad (3.40)$$

$$p_1(\omega) = [D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \quad (3.41)$$

$$p_2(\omega) = [N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \quad (3.42)$$

$$q(\omega) = \omega[N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)]. \quad (3.43)$$

Também, define-se

$$p_f(\omega, k) = \frac{p(\omega, k)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}} \quad (3.44)$$

$$q_f(\omega) = \frac{q(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}. \quad (3.45)$$

Como $l[N(s) - r(N(s))]$ é conhecido, os valores de k que estabilizam o sistema, podem ser determinado a partir da equação (3.34).

Antes de anunciar o teorema sobre estabilização, há a necessidade de se apresentar algumas definições, que falam sobre certas *seqüências* de números reais 0, 1 e -1. Essas seqüências são usadas para se formar todas as possibilidades de sinais de $p_f(\omega, k)$ nos zeros reais de multiplicidade ímpar de $q_f(\omega)$. Entre esses, há interesse somente naquelas possibilidades em que, ao se substituir $\sigma_i(\delta(s, k)N^*(s))$, calculado na equação (3.17), produz-se um valor tal que (3.34) seja verificada. Tem-se então a primeira definição.

Definição 3.3 *Sejam m e n números inteiros e $q_f(\omega)$ uma função definida pela equação (3.44) e suponha que $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$ sejam zeros reais, não-negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidade ímpar¹. Defina-se a seqüência de números $i_0, i_1, i_2, \dots, i_l$ como segue:*

(i) *Se $N^*(j\omega_t) = 0$ para algum $t = 1, 2, \dots, l - 1$, então define-se $i_t = 0$; caso contrário $i_t \in \{-1, 1\}$.*

(ii) *Se $N^*(j\omega_t)$ tem um zero de multiplicidade k_n na origem, então define-se $i_0 = \text{sgn}[p_{1_f}^{(k_n)}(0)]$; caso contrário $i_0 \in \{-1, 1\}$*

onde

$$p_{1_f}(\omega) := \frac{p_1(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{(m+n)}{2}}};$$

(iii) $i_l = 0$ se $m+n$ é ímpar; $i_l \in \{-1, 1\}$ se $m+n$ é par.

Para i_0, i_1, \dots, i_l definidos com (i), (ii) e (iii) acima forme as seguintes seqüências $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \dots, i_l\}$ e, em seguida, construir o conjunto A formado por todas as possíveis seqüências \mathcal{I} que podem ser geradas satisfazendo as condições (i), (ii) e (iii).

□

A próxima definição é sobre o conjunto $A(\gamma)$ de seqüências de A com uma determinada “assinatura imaginária” γ . Para fazer isto, primeiro define-se a “assinatura imaginária” $\gamma(\mathcal{I})$ associado com algum elemento $\mathcal{I} \in A$, como segue.

Definição 3.4 *Sejam os inteiros m , n e as funções $q(\omega)$, $q_f(\omega)$ já definidas e suponha que $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$ denotem os zeros reais, não-negativos,*

¹Note que estes zeros são independentes de k .

distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidade ímpar. Também define-se $\omega_l = \infty$. Para cada seqüência $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \dots\}$ em A , tem-se que $\gamma(\mathcal{I})$ denota a “assinatura imaginária” associada com a seqüência \mathcal{I} definida por:

$$\gamma(\mathcal{I}) := \begin{cases} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l\}(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty)] \\ \text{para } m+n \text{ par} \\ \\ \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1}\}(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty)] \\ \text{para } m+n \text{ ímpar} \end{cases}$$

□

Note que identificando-se $i_0 = \text{sgn}[p_f^{(k_n)}(0, k)]$, $i_t = \text{sgn}[p_f(\omega_t, k)]$ para $t \neq 0$, então a assinatura imaginária de $\delta(s, k)N^*(s)$ como determinada na equação (3.17) tem o mesmo valor que a quantidade $\gamma(\mathcal{I})$ definida acima. Portanto, tem-se agora a definição:

Definição 3.5 *O conjunto de seqüências em A com uma determinada assinatura imaginária $\gamma = \psi$ é denotado por $A(\psi)$. Também define-se o conjunto de seqüências viáveis para o problema de estabilização de controladores proporcionais como*

$$F^* = A[n - \{l[N(s)] - r[N(s)]\}].$$

□

De posse das últimas definições, pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.4 (Estabilização de Controladores Proporcionais) *O problema da estabilização de controladores proporcionais realimentado tem solução para uma dada planta com função de transferência $G(s)$ se e somente se as seguintes condições são asseguradas:*

(i) F^* não é vazio onde F^* como na definição 3.5, isto é, existe pelo menos uma seqüência viável;

e

(ii) Existe uma seqüência $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \dots\} \in F^*$ tal que

$$\max_{i_t \in \mathcal{I}, i_t > 0} \left[-\frac{1}{G(j\omega_t)} \right] < \min_{i_t \in \mathcal{I}, i_t < 0} \left[-\frac{1}{G(j\omega_t)} \right]$$

onde $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ são como já definidos. Além disso, se a condição acima é satisfeita pelas seqüências viáveis $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_s \in F^*$, então o conjunto de todos os ganhos que estabilizam o sistema é dado por $K = U_{r=1}^s K_r$ onde

$$K_r = \left(\max_{i_t \in I, i_t > 0} \left[-\frac{1}{G(j\omega_t)} \right], \min_{i_t \in I, i_t < 0} \left[-\frac{1}{G(j\omega_t)} \right] \right),$$

$r = 1, 2, \dots, s.$

□

Prova: Ver Datta et al. (2000).

□

Uma condição necessária para que F^* não-vazio é, para $m + n$ par,

$$l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))|}{2}$$

e para $m + n$ ímpar,

$$l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))| + 1}{2}.$$

Neste momento, será apresentado um algoritmo para o cálculo do intervalo k que estabilize o sistema realimentado.

Algoritmo 3.1 Seja $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ uma função de transferência racional, com $N(s)$ e $D(s)$ coprimos. Tem-se, então, os seguintes passos:

PASSO 1: Decomponha os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ em suas partes pares e ímpares:

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2)$$

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2).$$

PASSO 2: Sendo que $\delta(s, k) = D(s) + kN(s)$ é o polinômio característico e $N^*(s) = N(-s)$. Escreva $\delta(s, k)N^*(s)$, da seguinte forma:

$$\delta(s, k)N^*(s) = h_1(s^2) + kh_2(s^2) + sg_1(s^2)$$

onde

$$\begin{aligned}h_1(s^2) &= D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) \\h_2(s^2) &= N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2) \\g_1(s^2) &= N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2).\end{aligned}$$

PASSO 3: *Substitua s por $j\omega$, obtendo-se:*

$$\delta(j\omega, k)N^*(j\omega) = p(\omega, k) + jq(\omega)$$

onde

$$\begin{aligned}p(\omega, k) &= p_1(\omega) + kp_2(\omega) \\p_1(\omega) &= [D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \\p_2(\omega) &= [N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \\q(\omega) &= \omega[N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)].\end{aligned}$$

PASSO 4: *Calcule as raízes reais, não-negativas, finitas, distintas de $q_f(\omega)$, como já definido, com multiplicidade ímpar:*

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}.$$

PASSO 5: *A partir da definição 3.3 monte o conjunto A .*

PASSO 6: *Calcule o valor de $l(N(s)) - r(N(s))$ e o de $(-1)^{l-1}[q(\infty)]$ e a partir das definições 3.4 e 3.5. Calcule o conjunto F^* , se existir.*

PASSO 7: *A partir do teorema 3.4 e do conjunto F^* se existir, encontre os intervalos de k que estabilizem o sistema realimentado. \square*

Será apresentado um exemplo para que se possa ilustrar uma aplicação do algoritmo 3.1 acima.

Exemplo 3.2 *Considere o problema de se estabilizar a planta $G(s) = N(s)/D(s)$, onde (Datta et al., 2000)*

$$\begin{aligned}D(s) &= s^5 + 11s^4 + 22s^3 + 60s^2 + 47s + 25 \\N(s) &= s^4 + 6s^3 + 1^2s^2 + 54s + 16\end{aligned}$$

utilizando controladores proporcionais. O polinômio característico de malha fechada é

$$\delta(s, k) = D(s) + kN(s)$$

Para a planta considerada, tem-se $N_e(s^2) = s^4 + 12s^2 + 16$ e $N_o(s^2) = 6^2 + 54$ e, desta forma,

$$N^*(s) = N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \delta(s, k)N^*(s) &= (5s^8 + 6s^6 - 549s^4 - 1278s^2 + 400) \\ &\quad + k(s^8 - 12s^6 - 472s^4 - 2532s^2 + 256) \\ &\quad + s(s^8 - 32s^6 - 627s^4 - 2474s^2 - 598) \end{aligned}$$

de tal modo que

$$\delta(j\omega, k)N^*(j\omega) = p_1(\omega) + kp_2(\omega) + jq(\omega)$$

com

$$\begin{aligned} p_1(\omega) &:= 5\omega^8 + 6\omega^6 - 549\omega^4 - 1278\omega^2 + 400 \\ p_2(\omega) &:= \omega^8 - 12\omega^6 - 472\omega^4 - 2532\omega^2 + 256 \\ q(\omega) &:= \omega(\omega^8 - 32\omega^6 - 627\omega^4 - 2474\omega^2 - 598). \end{aligned}$$

Os zeros reais, não-negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$, com multiplicidade ímpar, são $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 0,50834$, $\omega_2 = 2,41732$ e $\omega_3 = 2,91515$, e como $n + m = 9$, que é ímpar, e $N^*(s)$ não tem zeros no eixo imaginário, da definição 3.3 o conjunto A torna-se

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} \{-1, -1, -1, -1\} & \{1, -1, -1, -1\} \\ \{-1, -1, -1, 1\} & \{1, -1, -1, 1\} \\ \{-1, -1, 1, -1\} & \{1, -1, 1, -1\} \\ \{-1, -1, 1, 1\} & \{1, -1, 1, 1\} \\ \{-1, 1, -1, -1\} & \{1, 1, -1, -1\} \\ \{-1, 1, -1, 1\} & \{1, 1, -1, 1\} \\ \{-1, 1, 1, -1\} & \{1, 1, 1, -1\} \\ \{-1, 1, 1, 1\} & \{1, 1, 1, 1\} \end{array} \right\}$$

Visto que $l(N(s)) - r(N(s)) = 4$ e $(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty)] = -1$ e usando a definição 3.5, então toda sequência $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, i_2, i_3\} \in F^*$ deve satisfazer

$$-(i_0 - 2i_1 + 2i_2 - 2i_3) = 1$$

Portanto $F^* = \{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3\}$ onde

$$\mathcal{I}_1 = \{1, -1, -1, 1\}$$

$$\mathcal{I}_2 = \{1, 1, 1, 1\}$$

$$\mathcal{I}_3 = \{1, 1, -1, -1\}.$$

Além disso,

$$-\frac{1}{G(j\omega_0)} = -1,56250,$$

$$-\frac{1}{G(j\omega_1)} = -0,78898,$$

$$-\frac{1}{G(j\omega_2)} = 2,50345,$$

$$-\frac{1}{G(j\omega_3)} = 22,49390.$$

Portanto, do teorema 3.4 (passo 7 do algoritmo 3.1) tem-se:

$$\begin{cases} K_1 = \emptyset \text{ para } \mathcal{I}_1 \\ K_2 = (22,49390; \infty) \text{ para } \mathcal{I}_2 \\ K_3 = (-0,78898; 2,50345) \text{ para } \mathcal{I}_3. \end{cases}$$

Portanto $\delta(s, k)$ é Hurwitz para $k \in (-0,78898; 2,50345) \cup (22,49390; \infty)$. \square

3.2.2 Caracterização de todos os controladores PI estabilizantes

Nesta seção, será mostrado, como o resultado desenvolvido na seção 3.2.1, (algoritmo 3.1), pode ser estendido para resolver o problema da estabilização de sistemas realimentados utilizando controladores PI. Será considerado novamente o sistema de controle realimentado mostrado na figura 3.1, sendo, agora, o controlador do tipo PI, cuja função de transferência $C(s)$ é dada por:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_i + k_p s}{s}.$$

Conseqüentemente o polinômio característico de malha fechada será

$$\delta(s, k_p, k_i) = sD(s) + (k_i + k_p s)N(s). \quad (3.46)$$

O primeiro passo para o projeto de controladores PI, é determinar os valores de k_p e k_i para que o polinômio característico em malha fechada $\delta(s, k_p, k_i)$ seja Hurwitz.

Claramente, k_p e k_i , ambos, afetam as partes par e ímpar de $\delta(s, k_p, k_i)$. Assim como foi feito com o controlador proporcional, será construído um novo polinômio cuja parte par dependa de k_i e cuja parte ímpar dependa de k_p . Considere as decomposições em partes par e ímpar

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2), \quad (3.47)$$

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \quad (3.48)$$

e define

$$N^*(s) := N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2). \quad (3.49)$$

Multiplicando-se $\delta(s, k_p, k_i)$ por $N^*(s)$ obtém-se

$$\begin{aligned} l(\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)) - r(\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)) &= l(\delta(s, k_p, k_i)) - r(\delta(s, k_p, k_i)) \\ &\quad - (l(N(s)) - r(N(s))). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Suponha que o grau de $\delta(s, k_p, k_i)$ seja igual a n_δ . Portanto $\delta(s, k_p, k_i)$ será um polinômio de Hurwitz se e somente se $l(\delta(s, k_p, k_i)) = n_\delta$ e $r(\delta(s, k_p, k_i)) = 0$. Portanto, a partir do teorema 3.2 pode-se escrever o seguinte lema.

Lema 3.4 $\delta(s, k_p, k_i)$ é Hurwitz se e somente se

$$\sigma_i(\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)) = n_\delta - [l(N(s)) - r(N(s))]. \quad (3.51)$$

□

A tarefa agora, é determinar para quais valores de k_p e k_i a equação (3.51) é verificada. Pode ser mostrado que

$$\begin{aligned} \delta(s, k_p, k_i)N^*(s) &= [s^2(N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)) \\ &\quad + k_i(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2))] \\ &\quad + s[D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) \\ &\quad + k_p(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2))]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Substituindo $s = j\omega$, obtém-se:

$$\delta(j\omega, k_p, k_i)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i) + jq(\omega, k_p) \quad (3.53)$$

onde

$$p(\omega, k_i) = p_1(\omega) + k_i p_2(\omega) \quad (3.54)$$

$$q(\omega, k_p) = q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \quad (3.55)$$

$$p_1(\omega) = -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (3.56)$$

$$p_2(\omega) = N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \quad (3.57)$$

$$q_1(\omega) = \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (3.58)$$

$$q_2(\omega) = \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \quad (3.59)$$

Define-se, ainda

$$p_f(\omega, k_i) = \frac{p(\omega, k_i)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}} \quad (3.60)$$

$$q_f(\omega, k_p) = \frac{q(\omega, k_p)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}. \quad (3.61)$$

Note que k_i e k_p aparecem somente em $p(\omega, k_i)$ e $q(\omega, k_p)$, respectivamente. Além disso, para todo k_p fixo, os zeros de $q(\omega, k_p)$ não dependem de k_i e o algoritmo 3.1 pode ser aplicado, encontrando assim um intervalo, se existir, para k_i para todo k_p . Assim variando-se o valor de k_p e resolvendo-se o problema de estabilização para o controlador proporcional, para cada k_p fixo num intervalo, encontra-se um intervalo para k_i .

O intervalo da “varredura” de k_p não precisa ser $(-\infty, \infty)$. Em muitos casos pode-se reduzir este intervalo, como será visto agora. Da seção 3.2.1, tem-se que para um k_p fixo, a condição necessária para a existência de k_i que estabilize o sistema é que $q(\omega, k_p)$ tenha ao menos

$$l \geq \frac{|n - [l(N(s)) - r(N(s))]|}{2}, \text{ se } m + n_\delta \text{ é par} \quad (3.62)$$

ou

$$l \geq \frac{|n - [l(N(s)) - r(N(s))]| + 1}{2}, \text{ se } m + n_\delta \text{ é ímpar} \quad (3.63)$$

raízes reais, não-negativas, finitas e distintas com multiplicidade ímpar, onde $m = gr[N(s)]$. Tal condição necessária pode ser checada a partir do algoritmo a seguir.

Primeiro, tem-se que

$$q(\omega, k_p) = \omega[U(\omega) + k_p V(\omega)] \quad (3.64)$$

onde

$$\begin{aligned} U(\omega) &= D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \\ V(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2). \end{aligned}$$

Da equação (3.64), tem-se que $q(\omega, k_p)$ tem pelo menos uma raiz real, não-negativa na origem. Para determinar a distribuição das raízes reais para diferentes intervalos de k_p serão utilizadas conclusões que podem ser obtidas a partir do lugar das raízes de $U(\omega) + k_p V(\omega)$, uma vez que $U(\omega)$ e $V(\omega)$ são polinômios com coeficientes reais coprimos e k varia de $-\infty$ a ∞ . Então, tem-se que, o ponto de partida/chegada do eixo real do lugar das raízes de $U(\omega) + kV(\omega) = 0$ corresponde a uma raiz real múltipla e deve, portanto, satisfazer

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \right) = 0$$

isto é

$$\frac{U(\omega) \frac{d}{d\omega} V(\omega) - V(\omega) \frac{d}{d\omega} U(\omega)}{U^2(\omega)} = 0. \quad (3.65)$$

Os pontos de partida/chegada do eixo real são, portanto, os zeros da equação (3.65).

Sendo $k_1 < k_2 < \dots < k_z$ valores distintos e finitos de k_p correspondentes aos pontos de partida/chegada do eixo real ω_i , $i = 1, 2, \dots, z$ no lugar das raízes de $U(\omega) + kV(\omega) = 0$. Definindo-se $k_0 = -\infty$ e $k_{z+1} = \infty$, então ω_i , $i = 1, 2, \dots, z$ são as raízes reais múltiplas de $U(\omega) + kV(\omega) = 0$ e os correspondentes valores de k_p são os valores de k_i , $i = 1, 2, \dots, z + 1$. Note que para $k_p \in (k_i, k_{i+1})$, as raízes reais de $U(\omega) + kV(\omega) = 0$ são simples e o número de raízes reais de $U(\omega) + kV(\omega) = 0$ é invariante. Então, se $U(0) + kV(0) \neq 0$ para todo $k_p \in (k_i, k_{i+1})$, então a distribuição das raízes reais de $U(\omega) + kV(\omega) = 0$, com respeito a origem, é invariante neste intervalo de valores de k_p . Tem-se, também, que se $U(\omega) + kV(\omega)$ tem uma raiz

na origem quando $k_p = k^*$, para $k_p \in (k_i; k_{i+1})$ então a distribuição das raízes com respeito à origem não é mais invariante. Portanto, tem-se que dividir o intervalo $(k_i; k_{i+1})$ em dois subintervalos, $(k_i; k^*)$ e $(k^*; k_{i+1})$ e checar a distribuição das raízes reais para cada um desses intervalos. A partir destes conceitos, tem-se o seguinte algoritmo para determinar o intervalo de interesse de k_p .

Algoritmo 3.2 *Considere o problema de determinar o lugar das raízes de $U(x) + kV(x) = 0$, onde $U(x)$ e $V(x)$ são polinômios reais e coprimos e k varia de $-\infty$ a ∞ . Então, podem-se seguir os passos seguintes:*

PASSO 1: *Calcula-se os pontos (ω_i) de partida/chegada do eixo real do lugar das raízes de $U(x) + kV(x) = 0$ através dos zeros da equação (3.65).*

PASSO 2: *Calcula-se $k_1 < k_2 < \dots < k_z$ correspondentes aos pontos de partida/chegada do eixo real ω_i , $i = 1, 2, \dots, z$, fazendo-se $k_i = -\frac{U(\omega)}{V(\omega)}$ e também $k_0 = -\infty$ e $k_{z+1} = \infty$.*

PASSO 3: *Verifica-se se $U(\omega) + kV(\omega)$ tem uma raiz na origem quando $k_p = k^*$, para $k_p \in (k_i; k_{i+1})$. Se existir, tem-se que dividir o intervalo $(k_i; k_{i+1})$ em dois subintervalos, $(k_i; k^*)$ e $(k^*; k_{i+1})$.*

PASSO 4: *Como o número de raízes reais de $U(\omega) + kV(\omega) = 0$ é invariante num intervalo para um $k \in (k_i, k_{i+1})$, então verifica-se para tal valor de k se $U(\omega) + kV(\omega) = 0$ tem pelo menos $l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))|}{2}$, para $m + n_\delta$ par ou $l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))| + 1}{2}$ para $m + n_\delta$ ímpar, raízes reais, não-negativas, finitas e distintas com multiplicidade ímpar, onde $m = gr[N(s)]$ e $n_\delta = gr[\delta(s)]$. Se existir então este intervalo (k_i, k_{i+1}) é de interesse, caso contrário pode ser descartado.*

PASSO 5: *Seja k o conjunto dos intervalos de interesse, faça $k_p = k$. □*

Aplicando-se o algoritmo 3.2, pode-se determinar a distribuição das raízes reais de $q(\omega, k_p)$ correspondentes a diferentes intervalos de k_p . Então, usando o fato de que

$$n_\delta - [l(N(s)) - r(N(s))]$$

é conhecido, pode-se identificar os intervalos de k_p para os quais $q(\omega, k_p)$ não satisfaz

a condição necessária acima. Tais intervalos de k_p não precisam ser “varridos” e podem, portanto, ser seguramente descartados.

Será apresentado, agora, um algoritmo para o cálculo de k_p e de k_i que estabilizem o sistema realimentado.

Algoritmo 3.3 *Seja $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ uma função de transferência racional, com $N(s)$ e $D(s)$ coprimos. Então, o tem-se os seguintes passos:*

PASSO 1: *Decomponha os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ em suas partes pares e ímpares:*

$$\begin{aligned} N(s) &= N_e(s^2) + sN_o(s^2) \\ D(s) &= D_e(s^2) + sD_o(s^2). \end{aligned}$$

PASSO 2: *Sendo que $\delta(s, k_p, k_i) = sD(s) + k_iN(s) + k_p sN(s)$ é o polinômio característico e $N^*(s) = N(-s)$. Calcule o polinômio $\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)$, como segue:*

$$\delta(s, k_p, k_i)N^*(s) = h_1(s^2) + k_i h_2(s^2) + s[g_1(s^2) + k_p g_2(s)]$$

onde

$$\begin{aligned} h_1(s^2) &= s^2(N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)) \\ h_2(s^2) &= N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2) \\ g_1(s^2) &= D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) \\ g_2(s^2) &= N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2). \end{aligned}$$

PASSO 3: *Substitua s por $j\omega$, obtendo-se:*

$$\delta(j\omega, k_p, k_i)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i) + jq(\omega, k_p)$$

onde

$$\begin{aligned} p(\omega, k_i) &= p_1(\omega) + k_i p_2(\omega) \\ q(\omega, k_p) &= q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \\ p_1(\omega) &= -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\ p_2(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \\ q_1(\omega) &= \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\ q_2(\omega) &= \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)). \end{aligned}$$

PASSO 4: Utilize o algoritmo 3.2 para calcular os intervalos de interesse de k_p .

PASSO 5: A partir dos intervalos de k_p , “varrer” estes intervalos e utilizando-se um k_p fixo, calcular o intervalo de k_i com o algoritmo 3.1 em cada estágio dessa varredura, ou seja, para cada k_p . \square

Será visto agora um exemplo para ilustrar o algoritmo 3.3 para calcular os valores de (k_p, k_i) que estabilizem uma planta dada.

Exemplo 3.3 Considere o problema de calcular todos os ganhos k_p e k_i dos controladores PI que estabilizem a planta $\frac{N(s)}{G(s)}$ onde (Datta et al., 2000)

$$\begin{aligned} D(s) &= s^5 + 3s^4 + 29s^3 + 15s^2 - 3s + 60 \\ N(s) &= s^3 + 6s^2 - 2s + 1. \end{aligned}$$

Neste caso, o polinômio característico em malha fechada é

$$\delta(s, k_p, k_i) = sD(s) + k_iN(s) + k_p sN(s). \quad (3.66)$$

Considere a decomposição polinomial partes par e ímpar de $N(s)$ e $D(s)$:

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \text{ e } N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2), \quad (3.67)$$

onde

$$\begin{aligned} D_e(s^2) &= 3s^4 + 15s^2 + 60 \\ D_o(s^2) &= s^4 + 29s^2 - 3 \\ N_e(s^2) &= 6s^2 + 1 \\ N_o(s^2) &= s^2 - 2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Fazendo-se

$$N^*(s) = N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2) = (6s^2 + 1) - s(s^2 - 2).$$

Portanto, da equação (3.52) obtém-se

$$\begin{aligned} \delta(s, k_p, k_i)N^*(s) &= [s^2(3s^6 + 166s^4 - 19s^2 + 117) + k_i(-s^6 + 40s^4 \\ &\quad + 8s^2 + 1)] + s[(-s^8 - 9s^6 + 154s^4 + 369s^2 + 60) \\ &\quad + k_p(-s^6 + 40s^4 + 8s^2 + 1)], \end{aligned}$$

e, dessa, forma

$$\delta(j\omega, k_p, k_i)N^*(s) = [p_1(\omega) + k_i p_2(\omega)] + j[q_1(\omega) + k_p q_2(\omega)],$$

com

$$p_1(\omega) = 3\omega^8 - 166\omega^6 - 19\omega^4 - 117\omega^2$$

$$p_2(\omega) = \omega^6 + 40\omega^4 - 8\omega^2 + 1$$

$$q_1(\omega) = -\omega^9 + 9\omega^7 + 154\omega^5 - 369\omega^3 + 60\omega$$

$$q_2(\omega) = \omega^7 + 40\omega^5 - 8\omega^3 + \omega.$$

Usando, agora, o algoritmo 3.2 para especificar os intervalos de interesse de k_p , tem-se

$$U(\omega) = -\omega^8 + 9\omega^6 + 154\omega^4 - 369\omega^2 + 60$$

$$V(\omega) = \omega^6 + 40\omega^4 - 8\omega^2 + 1$$

tal que

$$q(\omega, k_p) = \omega[U(\omega) + k_p V(\omega)].$$

Agora

$$\frac{U(\omega) \frac{d}{d\omega} V(\omega) - V(\omega) \frac{d}{d\omega} U(\omega)}{U^2(\omega)} = 0$$

$$\frac{[2\omega^{13} + 160\omega^{11} - 460\omega^9 - 1180\omega^7 - 26750\omega^5 + 8984\omega^3 - 222\omega]}{[(-\omega^8 + 9\omega^6 + 154\omega^4 - 369\omega^2 + 60)^2]} = 0$$

Então os pontos de partida/chegada do eixo real distintos e finitos ou correspondente a uma raiz na origem são

$$k_1 = -61,67096; k_2 = -60; k_3 = -2,54119; k_4 = 16,44309$$

e os correspondentes zeros ω_i são

$$\omega_1 = \pm 0,16390; \omega_2 = 0; \omega_3 = \pm 2,60928; \omega_4 = \pm 0,55140 \quad (3.69)$$

Conseqüentemente a distribuição das raízes reais para $U(\omega) + kV(\omega) = 0$ com respeito à origem, corresponde aos seguintes intervalos de k_p :

$k_p \in (-\infty; -61,67086)$: sem raízes reais

$k_p \in (-61,67086; -60)$: 2 raízes reais distintas e positivas

2 raízes reais e distintas e negativas

$k_p \in (-60; -2,54119)$: 1 raiz real e positiva

1 raiz real e negativas

$k_p \in (-2,54119; 16,44309)$: 3 raízes reais distintas e positivas

3 raízes reais distintas e negativas

$k_p \in (16,44309; \infty)$: 1 raiz real e positivas

1 raiz real e negativas

Para este exemplo tem-se que $m + n = 5 + 6 = 11$ é ímpar e, então, de acordo com a equação (3.62), para um valor de k_p fixo, uma condição necessária para a existência de um valor de k_i que estabilize o sistema é que $q(\omega, k_p)$ deve ter pelo menos $l = \frac{|n_\delta - [l(N(s)) - r(N(s))]| + 1}{2} = 4$, quatro raízes reais, não-negativas e distintas e de multiplicidade ímpar. A distribuição das raízes apresentada acima mostra que isso só é possível para o intervalo

$$k_p \in (-2,54119; 16,44309).$$

Para cada k_p neste intervalo, pode-se utilizar o resultado desenvolvido para o controlador proporcional (seção 3.2.1) para determinar os intervalos de k_i . Para isso, será “varrido” o intervalo

$$k_p \in (-2,54119; 16,44309)$$

e para cada k_p deste intervalo será determinado um intervalo para k_i . O conjunto de todos os ganhos que estabilizam o sistema está esboçado na figura 3.2.

□

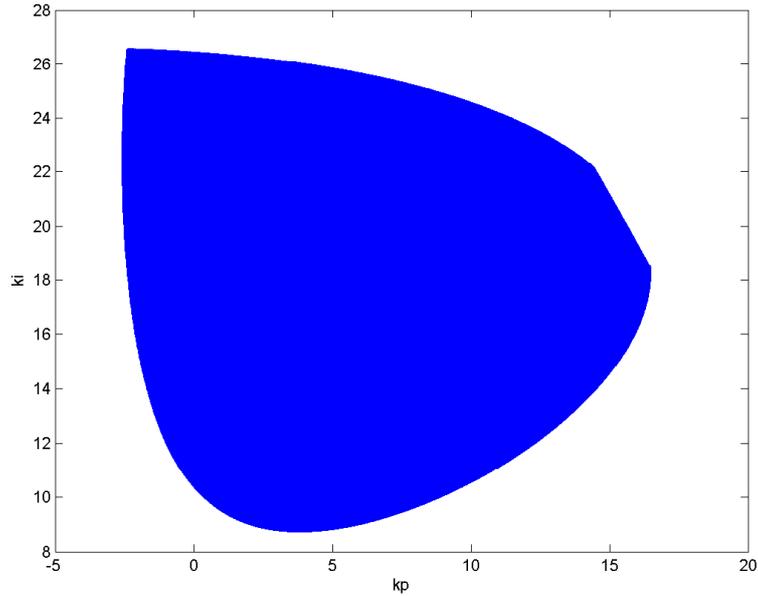


Figura 3.2: Conjunto de pontos (k_p, k_i) que estabilizam a planta.

3.2.3 Uma caracterização para todos os controladores PID estabilizantes

Nesta seção, será mostrado como o resultado da seção 3.2.1, pode ser estendido para resolver o problema de se determinar os ganhos do controlador PID, k_p , k_i , e k_d , para que o sistema realimentado da figura 3.1 seja estável. Nesse caso o controlador terá a seguinte função de transferência:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_i + k_p s + k_d s^2}{s}. \quad (3.70)$$

Portanto o polinômio característico em malha fechada será:

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_d s^2)N(s) + k_p sN(s). \quad (3.71)$$

O problema de estabilizar o sistema utilizando um controlador PID passa a ser o de determinar os valores de k_p , k_i , e k_d para os quais o polinômio característico em malha fechada $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ seja Hurwitz.

Claramente, todos os três parâmetros k_p , k_i , e k_d afetam tanto a parte par como a parte ímpar de $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$. Motivado pelos resultados das seções 3.2.1 e 3.2.2, será utilizado o mesmo recurso de se construir um novo polinômio cuja parte par dependa de (k_i, k_d) e cuja parte ímpar dependa somente de k_p . Considere a

decomposição em par e ímpar de $N(s)$ e $D(s)$, dadas por

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \text{ e } D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2). \quad (3.72)$$

Definindo-se

$$N^*(s) := N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2). \quad (3.73)$$

e multiplicando-se $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ por $N^*(s)$ e examinando o polinômio resultante, obtém-se:

$$\begin{aligned} & l[\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)] - r[\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)] \\ &= \{l[\delta(s, k_p, k_i, k_d)] - r[\delta(s, k_p, k_i, k_d)]\} - \{l[N(s)] - r[N(s)]\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Supondo que o grau de $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ seja n_δ , então, será Hurwitz se e somente se $l(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) = n_\delta$ e $r(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) = 0$. Portanto, pelo teorema 3.2 tem-se o seguinte:

Lema 3.5 $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ é Hurwitz se e somente se

$$\sigma_i(\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)) = n_\delta - [l(N(s)) - r(N(s))]. \quad (3.75)$$

□

A tarefa é determinar para quais valores de k_p , k_i e k_d que a equação 3.75 é assegurada. É imediato verificar que

$$\begin{aligned} \delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s) &= [s^2(N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)) \\ &\quad + (k_i + k_d s^2)(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 N_o(s^2)N_o(s^2))] \\ &\quad + s[D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 D_o(s^2)N_o(s^2) \\ &\quad + k_p(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 N_o(s^2)N_o(s^2))]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Substituindo $s = j\omega$, obtém-se:

$$\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i, k_d) + jq(\omega, k_p)$$

onde

$$\begin{aligned}
p(\omega, k_i, k_d) &= p_1(\omega) + (k_i - k_d\omega^2)p_2(\omega) \\
q(\omega, k_p) &= q_1(\omega) + k_pq_2(\omega) \\
p_1(\omega) &= -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
p_2(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \\
q_1(\omega) &= \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
q_2(\omega) &= \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2))
\end{aligned}$$

Define-se, também

$$p_f(\omega, k_i, k_d) = \frac{p(\omega, k_i, k_d)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}} \text{ e } q_f(\omega, k_p) = \frac{q(\omega, k_p)}{(1 + \omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}.$$

Pode-se notar que k_i e k_d aparecem somente em $p(\omega, k_i, k_d)$ e que k_p aparece somente em $q(\omega, k_p)$. Assim para todo k_p fixo, os zeros de $q(\omega, k_p)$ não dependem de k_i ou de k_d e, então, pode-se usar o resultado encontrado na seção 3.2.1 para determinar os valores de k_i e k_d que estabilizem o sistema. Como há, agora, duas variáveis, será utilizado programação linear para encontrar os intervalos de k_i e k_d para cada k_p .

Serão, agora, apresentadas algumas definições, que são essencialmente as mesmas da seção 3.2.1 com a diferença que são válidas para um k_p fixo.

Definição 3.6 *Sejam os números inteiros m e n_δ e a função $q_f(\omega)$ como definida nesta seção e suponha que $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$ denotem os zeros reais, não-negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidade ímpar². Defina-se a seqüência de números $i_0, i_1, i_2, \dots, i_l$ como segue:*

(i) *Se $N^*(j\omega_t) = 0$ para algum $t = 1, 2, \dots, l - 1$, então $i_t = 0$ e caso contrário $i_t \in \{-1, 1\}$*

(ii) *Se $N^*(j\omega_t)$ tem uma zero de multiplicidade k_n na origem, então define-se $i_0 = \text{sgn}[p_{1_f}^{k_n}(0)]$ e caso contrário $i_0 \in \{-1, 1\}$,*

onde

$$p_{1_f}(\omega) := \frac{p_1(\omega)}{(1 + \omega^2)^{\frac{(m+n)}{2}}};$$

²Note que estes zeros são independentes de k_i ou k_d .

(iii) Para todos os outros $t = 0, 1, 2, \dots, l$, se $i_t \in \{-1, 1\}$. Além disso, e $n_\delta + m$ é par, $i_l \in \{-1, 1\}$ e se $n_\delta + m$ é ímpar, $i_l = 0$.

Com i_0, i_1, \dots definidos desta forma, define-se o conjunto A_{k_p} de todas as possíveis combinações de zeros, uns e menos uns que satisfazem as restrições (i) a (iii), acima. \square

A próxima definição é sobre o conjunto $A_{k_p}(\gamma)$ de seqüências de A_{k_p} com uma de determinada “assinatura imaginária” γ . Portanto, primeiro define-se a “assinatura imaginária” $\gamma(\mathcal{I})$ associado com algum elemento $\mathcal{I} \in A_{k_p}$. Tem-se, então, a seguinte definição.

Definição 3.7 *Sejam os inteiros m, n_δ e as funções $q(\omega, k_p), q_f(\omega, k_p)$ conforme definidas nessa seção e suponha que $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}$ denotam os zeros reais, não-negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega, k_p)$ com multiplicidade ímpar. Também define-se $\omega_l = \infty$. Para cada seqüência $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \dots\}$ em A_{k_p} , tem-se que $\gamma(\mathcal{I})$ denota a “assinatura imaginária” associada com a seqüência \mathcal{I} definida por:*

$$\gamma(\mathcal{I}) := \begin{cases} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1} + (-1)^l i_l\}(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty, k_p)] \\ \text{para } m + n_\delta \text{ par} \\ \\ \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \dots + (-1)^{l-1}2i_{l-1}\}(-1)^{l-1} \text{sgn}[q(\infty, k_p)] \\ \text{para } m + n_\delta \text{ ímpar} \end{cases}$$

\square

Note que também pode-se referir a $\gamma(\mathcal{I})$ como a “assinatura imaginária” de \mathcal{I} , podendo ser justificado como na seção 3.2.1. Tem-se a definição:

Definição 3.8 *O conjunto de seqüências em A_{k_p} com uma determinada assinatura imaginária $\gamma = \psi$ é denotado por $A_{k_p}(\psi)$. Para um dado k_p fixo, também define-se o conjunto de seqüências viáveis para o problema de estabilização de controladores PID como*

$$F_{k_p}^* = A_{k_p} \{n - [l(N(s)) - r(N(s))]\}.$$

\square

Pode-se portanto, enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.5 (Principal Resultado para Estabilização de Controladores PID) *O problema da estabilização de controladores PID, com um k_p fixo, é resolvido para uma dada planta com função de transferência $G(s)$ se e somente se as seguintes condições são asseguradas:*

(i) $F_{k_p}^*$ 3.8 não é vazio, isto é, existe pelo menos uma seqüência viável

e

(ii) Existe uma seqüência $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \dots\} \in F_{k_p}^*$ e valores de k_i e k_d tais que $\forall t = 0, 1, 2, \dots$ para os quais, $N^*(j\omega_t) \neq 0$,

$$p(\omega_t, k_i, k_d)i_t > 0 \quad (3.77)$$

onde $p(\omega_t, k_i, k_d)i_t$ foi definido anteriormente. Além disso, se existir valores de k_i e k_d que satisfaçam a condição acima para as seqüências viáveis $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_s \in F_{k_p}^*$, então o conjunto de valores de (k_i, k_d) que estabilizam o sistema correspondente a um k_p fixo é a união dos valores de (k_i, k_d) satisfeitos por (3.77) para $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \dots, \mathcal{I}_s$.

□

A determinação dos pontos (k_d, k_i, k_p) que levam a controladores PID que estabilizam $G(s) = N(s)/D(s)$ pode ser feita de acordo do o seguinte algoritmo.

Prova: Ver Datta et al. (2000). □

Algoritmo 3.4 *Seja $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ uma função de transferência racional, com $N(s)$ e $D(s)$ coprimos.*

PASSO 1: *Decomponha os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ em suas partes pares e ímpares:*

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \text{ e } D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2).$$

PASSO 2: *Sendo $\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_d s^2)N(s) + k_p sN(s)$, o polinômio característico, e $N^*(s) = N(-s)$. Calcule polinômio $\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)$, como segue:*

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s) = [h_1(s^2) + (k_i + k_d s^2)h_2(s^2)] + s[g_1(s^2) + k_p g_2(s)]$$

onde

$$\begin{aligned}
h_1(s^2) &= s^2(N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)) \\
h_2(s^2) &= N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2) \\
g_1(s^2) &= D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) \\
g_2(s^2) &= N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2).
\end{aligned}$$

PASSO 3: *Substitua s por $j\omega$, obtendo-se:*

$$\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i, k_d) + jq(\omega, k_p)$$

onde

$$\begin{aligned}
p(\omega, k_i, k_d) &= p_1(\omega) + (k_i - k_d\omega^2)p_2(\omega) \\
q(\omega, k_p) &= q_1(\omega) + k_pq_2(\omega) \\
p_1(\omega) &= -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
p_2(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \\
q_1(\omega) &= \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
q_2(\omega) &= \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)).
\end{aligned}$$

PASSO 4: *Utilize o algoritmo 3.2 para calcular os intervalos de interesse de k_p .*

PASSO 5: *A partir dos intervalos viáveis de k_p , “varrer” estes intervalos e utilizando-se um k_p fixo, calcular as raízes reais, não-negativas, finitas, distintas de $q_f(\omega, k_p)$, como já definido, com multiplicidade ímpar:*

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{l-1}.$$

PASSO 6: *A partir da definição 3.6 monte o conjunto A_{k_p} .*

PASSO 7: *Calcule o valor de $l[N(s)] - r[N(s)]$ e o de $(-1)^{l-1}[q(\infty)]$ e a partir das definições 3.7 e 3.8, calcule o conjunto $F_{k_p}^*$, se existir.*

PASSO 8: *A partir do teorema 3.5 e do conjunto $F_{k_p}^*$ se existir, encontre os valores*

de (k_i, k_d) que satisfaça a equação (3.77) para um k_p fixo.

PASSO 9: Volte ao passo de “varredura” 5 até que se termine o intervalo de k_p . \square

Será visto, agora, um exemplo para ilustrar o algoritmo 3.4 para calcular os valores de (k_p, k_i, k_d) que estabilizem uma planta dada.

Exemplo 3.4 Considere o problema de se encontrar os ganhos do controlador PID que estabilizem a planta $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ onde

$$\begin{aligned} D(s) &= s^5 + 8s^4 + 32s^3 + 46s^2 + 46s + 17 \\ N(s) &= s^3 - 4s^2 + s + 2. \end{aligned}$$

O polinômio característico em malha fechada é

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_d s^2)N(s) + k_p sN(s). \quad (3.78)$$

Sendo grau $n_\delta = 6$. Considere a decomposição polinomial em duas partes, par e ímpar de $N(s)$ e $D(s)$:

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \text{ e } N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2), \quad (3.79)$$

onde

$$\begin{aligned} D_e(s^2) &= 8s^4 + 46s^2 + 17 \\ D_o(s^2) &= s^4 + 32s^2 + 46 \\ N_e(s^2) &= -4s^2 + 2 \\ N_o(s^2) &= s^2 + 1. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Fazendo-se

$$N^*(s) = N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2) = (-4s^2 + 2) - s(s^2 + 1),$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s) &= [s^2(-12s^6 - 180s^4 - 183s^2 + 75) + (k_i + k_d s^2)(-s^6 + 14s^4 - \\ &\quad - 17s^2 + 4)] + s[(-s^8 - 65s^6 - 246s^4 - 22s^2 + 34) + \\ &\quad + k_p(-s^6 + 14s^4 - 17s^2 + 4)]. \end{aligned}$$

Desta forma:

$$\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)N^*(j\omega) = [p_1(\omega) + (k_i - k_d\omega^2)p_2(\omega)] + j[q_1(\omega) + k_p q_2]$$

com

$$p_1(\omega) = -12\omega^8 + 180\omega^6 - 183\omega^4 - 75\omega^2$$

$$p_2(\omega) = \omega^6 + 14\omega^4 + 17\omega^2 + 4$$

$$q_1(\omega) = -\omega^9 + 65\omega^7 - 246\omega^5 + 22\omega^3 + 34\omega$$

$$q_2(\omega) = \omega^7 + 14\omega^5 + 17\omega^3 + 4\omega$$

Usando, agora, o algoritmo 3.2 para especificar o intervalo de interesse de k_p , tem-se

$$k_p \in (-8, 5; 4, 23337).$$

Para cada valor de k_p neste intervalo, pode-se utilizar os últimos passos do algoritmo 3.4, para determinar os valores de (k_i, k_d) que tornam o sistema realimentado estável. O conjunto de todos os pontos (k_p, k_i, k_d) que estabilizam o sistema está esboçado na figura 3.3 abaixo.

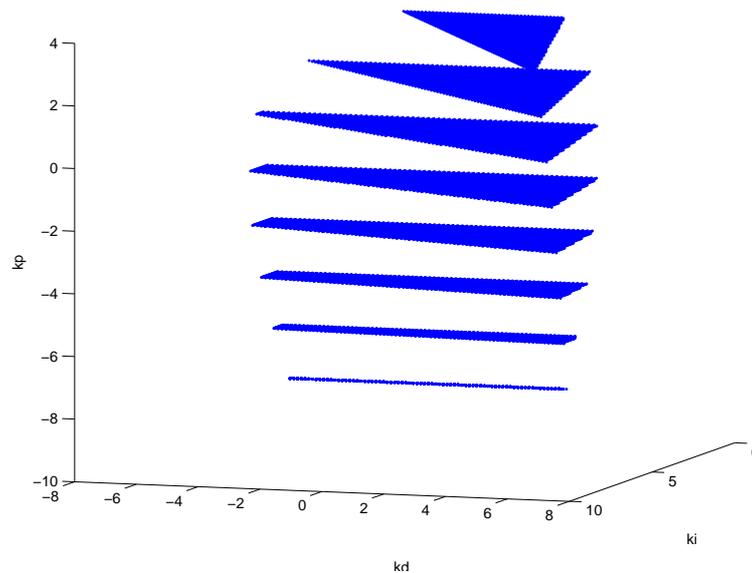


Figura 3.3: Conjunto de pontos (k_d, k_i, k_p) que estabilizam a planta.

□

3.2.4 Controladores PID com modificação do termo derivativo

Como foi visto na seção 2.1.3, o termo derivativo, na implementação deve ser modificado para

$$U_D(s) = -\frac{k_d s}{\tau_d s + 1} Y(s).$$

Contudo, essa formulação somente será utilizada para as simulações: para efeito de cálculos não será considerado o termo derivativo modificado, sendo introduzida somente a limitação do ganho derivativo nas altas frequências. Desta forma, o termo derivativo será:

$$K_D(s) = \frac{k_d s}{\tau_d s + 1} \quad (3.81)$$

e, portanto, o novo controlador PID torna-se:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{\tau_d s + 1} = \frac{(k_d + k_p \tau_d) s^2 + (k_p + k_i \tau_d) s + k_i}{s(1 + \tau_d s)}. \quad (3.82)$$

Neste momento, tem-se que relacionar o resultado desenvolvido para o controlador PID simples e aquele apresentado na equação (3.82). Para tanto, suponha τ_d fixo e considere o problema de se determinar os valores de (k_p, k_i, k_d) na equação (3.82) para que o polinômio característico de malha fechada seja Hurwitz. Suponha, ainda, que

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

seja uma planta que deve ser estabilizada usando o controlador PID modificado (3.82). Nesse caso, o polinômio característico de malha fechada será dado por

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = s(1 + \tau_d s)D(s) + [(k_d + k_p \tau_d) s^2 + (k_p + k_i \tau_d) s + k_i] N(s).$$

Agora, define-se k'_p, k'_i, k'_d por

$$\begin{cases} k'_p := k_p + k_i \tau_d \\ k'_i := k_i \\ k'_d := k_d + k_p \tau_d \end{cases}, \quad (3.83)$$

então o polinômio característico em malha fechada pode ser reescrito como

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = s(1 + \tau_d s)D(s) + (k'_d s^2 + k'_p s + k'_i) N(s). \quad (3.84)$$

Comparando a equação (3.84) e (3.71), é claro que o problema de determinar (k_p, k_i, k_d) tal que $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ seja Hurwitz é equivalente ao problema de determinar o valores dos ganhos do controlador PID ideal

$$C(s) = k'_p + \frac{k'_i}{s} + k'_d s$$

que estabiliza a planta modificada

$$\tilde{G}(s) = \frac{N(s)}{(1 + \tau_d)D(s)}. \quad (3.85)$$

Desta forma, os valores de (k'_p, k'_i, k'_d) que estabilizam (3.85) podem, é claro, ser determinados utilizando-se o algoritmo 3.4. Uma vez calculado (k'_p, k'_i, k'_d) , tem-se que o conjunto de valores dos ganhos (k_p, k_i, k_d) para o problema original pode ser obtido usando-se a seguinte relação, que é obtida diretamente da equação (3.83).

$$\begin{bmatrix} k_p \\ k_i \\ k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tau_d & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tau_d & \tau_d^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_p \\ k'_i \\ k'_d \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Como a transformação 3.86 é linear, pode-se transformar o espaço calculado para (k'_p, k'_i, k'_d) no espaço (k_p, k_i, k_d) do problema original. Assim pode-se determinar os valores de (k_p, k_i, k_d) que estabilizam o sistema original, conforme ilustrado no seguinte exemplo.

Exemplo 3.5 *Considere o problema de se calcular os ganhos do controlador PID que estabilizem a planta $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ onde*

$$D(s) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 - s + 1$$

$$N(s) = s - 100,$$

sendo o controlador PID dado pela equação (3.82) com $\tau_d = 0, 1$. Definindo

$$\begin{cases} k'_p := k_p + k_i \tau_d \\ k'_i := k_i \\ k'_d := k_d + k_p \tau_d \end{cases},$$

e usando o algoritmo 3.4 para determinar o conjunto de todos os ganhos do controlador PID

$$C(s) = k'_p + \frac{k'_i}{s} + k'_d s$$

que estabilize a planta

$$\tilde{G}(s) = \frac{N(s)}{(1 + \tau_d)D(s)}, \quad (3.87)$$

tem-se o conjunto de pontos (k'_d, k'_i, k'_p) mostrados na figura 3.4. Utilizando a trans-

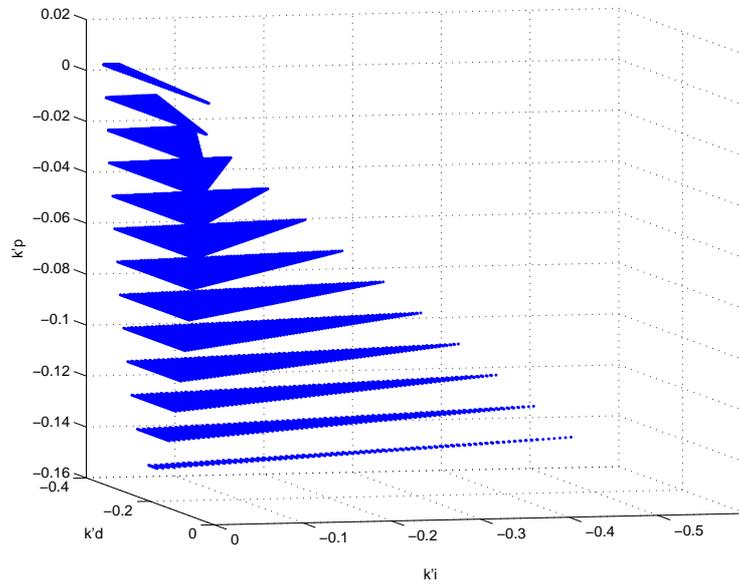


Figura 3.4: Conjunto de pontos (k'_p, k'_i, k'_d) que estabilizam a planta.

formação (3.86), obtém-se o correspondente conjunto de (k_d, k_i, k_p) que estabilizam a planta original $G(s)$. Este conjunto está mostrado na figura 3.5.

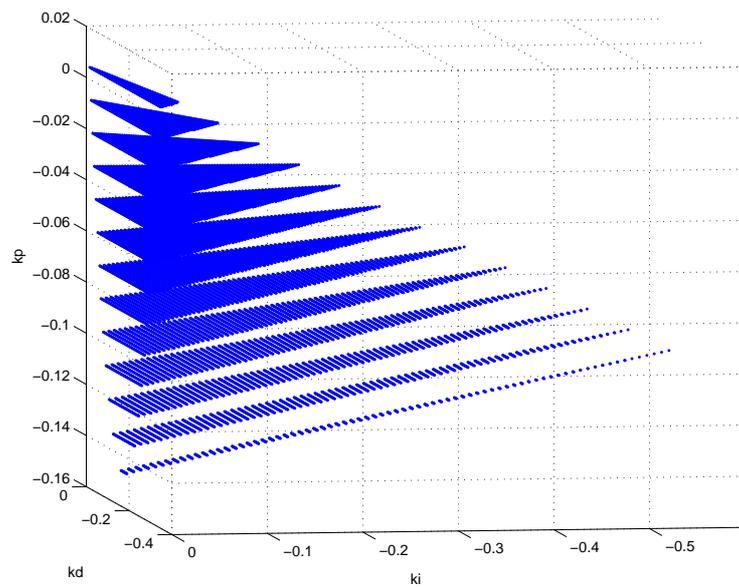


Figura 3.5: Conjunto de pontos (k_p, k_i, k_d) que estabilizam a planta.

□

3.3 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados algoritmos desenvolvidos por Bhattacharyya e seus colaboradores (Datta et al., 2000), para o cálculo dos ganhos dos controladores PI e PID que estabilizem uma planta $G(s) = N(s)/D(s)$, ou seja, a região de estabilidade dos controladores. Estes resultados terão papel importante para a continuação deste trabalho, uma vez que a busca dos parâmetros do controlador PID será feita nesta região.

Capítulo 4

Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos (AG) são uma família de modelos computacionais, que é inspirada na teoria da evolução de Charles Darwin (sobrevivência do mais apto). Tais algoritmos, tentam “imitar” a teoria de a adaptação do indivíduo que é mais forte no meio onde ele se encontra, por isso tem mais chance de sobrevivência. Assim o algoritmo gera populações de indivíduos que serão mais ou menos aptos a determinados meios (função que se quer otimizar). E a partir daí, os melhores indivíduos vão gerar novos (e melhores) indivíduos até que se chegue a solução do problema. Normalmente os AG são vistos como otimizadores de funções, embora a quantidade de problemas para o qual os AG’s se aplicam seja bastante abrangente. Uma das vantagens de um algoritmo genético é a simplificação que este permite na formulação e solução de problemas de otimização, pois, a única informação que precisa é da função objetivo do problema.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção 4.1 será fornecida uma idéia geral da teoria dos algoritmos genéticos, na seção 4.2 serão apresentadas algumas definições básicas, na seção 4.3 será visto como será representada gerada a população inicial do algoritmo, na seção 4.4 será mostrado como será feita a avaliação das populações, na seção 4.5 será apresentada a técnica de seleção e reprodução dos indivíduos, na seção 4.6 de cruzamento, na 4.7 de mutação e na 4.8 de re-inserção, já na seção 4.9 será apresentado o critério de parada do algoritmo, na seção 4.10 será apresentado um algoritmo para a utilização do algoritmo genético, na seção 4.11 serão apresentadas algumas vantagens e desvantagens destes tipos de algoritmos

evolutivos e finalmente na seção 5.5 será apresentada a conclusão.

4.1 Filosofia geral dos algoritmos genéticos

Os Algoritmos Genéticos são métodos de busca estocásticos baseados no mecanismo de seleção natural e genética natural (Dasgupta e Michalewicz, 2001). Foram desenvolvidos por John Holland, seus colegas e alunos da Universidade de Michigan (Holland, 1975). Tais algoritmos operam em uma população (estruturas artificiais chamadas cromossomos) de potenciais soluções aplicando o princípio da sobrevivência do mais apto para produzir melhores aproximações para a solução, através de operadores genéticos naturais de seleção, reprodução, cruzamento e mutação.

Os cromossomos são, geralmente, representados por cadeias de bits que contem a informação codificada das variáveis do problema que se deseja resolver. A etapa de seleção desempenha o papel da seleção natural na evolução, selecionando, para sobreviver e reproduzir, os organismos mais bem adaptados ao meio, no caso, os cromossomos com melhor desempenho na população para, em seguida, reproduzi-los, gerando, assim, indivíduos mais bem adaptados, pois foram gerados dos melhores da geração anterior. No cruzamento, os indivíduos selecionados se combinam por partes para trocar as suas características genéticas visando melhorá-las e o operador de mutação aplica-se eventualmente a alguns indivíduos para mudar, aleatoriamente, uma parte do seu material genético e introduzir diversidade na população. Como os indivíduos selecionados transmitem suas características aos seus descendentes, a informação histórica contida na população guia o AG para regiões mais promissoras do espaço da busca, que só termina quando algum critério é satisfeito.

A popularidade dos AGs se deve, principalmente, a dois fatos: são robustos e aplicáveis a uma grande variedade de problemas e são eficazes e eficientes, já que acham soluções boas e, inclusive, ótimas para o problema, em um tempo razoável. Os AGs diferenciam-se dos algoritmos tradicionais de otimização em quatro aspectos importantes:

1. Trabalham usando uma codificação das variáveis a serem otimizadas e não as

variáveis em si.

2. Ao invés de passar de uma solução individual para uma outra, passam de uma população de soluções para uma nova população. Isto significa que este não procura a solução em um ponto simples mas em pontos paralelos.
3. Necessitam somente de informações sobre a função objetivo do problema, não necessitando de derivadas dessas funções ou de outro conhecimento auxiliar.
4. Usam regras de transição probabilísticas, não determinísticas.

Os métodos clássicos de otimização baseiam sua estratégia de solução em alguma característica própria do problema, reduzindo, assim, a sua flexibilidade e restringindo a sua aplicabilidade a outros problemas que apresentem características diferentes. Os AGs requerem muito pouca informação do problema e podem otimizar funções com muitas variáveis, funções descontínuas ou com ruído. A única parte do AG que é dependente do problema específico que se pretende resolver é a função objetivo que se deseja otimizar. Esta é utilizada, unicamente, durante a etapa de seleção.

4.2 Definições Básicas

Serão, agora, apresentadas algumas definições de termos associados aos AGs.

(i) **Cromossomo** É uma cadeia de caracteres representando alguma informação relativa às variáveis do problema que caracterizam uma solução.

(ii) **Gen** É a unidade básica do cromossomo.

(iii) **População** É o Conjunto de cromossomos.

(iv) **Geração** É o número das iterações que o Algoritmo Genético executa.

(v) **Operações Genéticas** São as operações que o AG realiza sobre cada um dos cromossomos.

(vi) **Função Objetivo** É a função que se deseja otimizar. Esta função contém a informação numérica do desempenho de cada cromossomo na população. Aqui estão representadas todas as características do problema que o AG necessita para realizar

o seu objetivo. De uma forma geral a função objetivo J é expressa como:

$$J = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.1)$$

sendo x_1, x_2, \dots, x_n as variáveis que o algoritmo procura determinar para otimizar J . A função objetivo é calculada para cada cromossomo da população, o que torna maior o trabalho computacional.

4.3 Representação Genética e Geração da População Inicial

A forma mais comum de representação ou codificação das variáveis a serem otimizadas, e talvez a melhor, é a representação binária, mas podem, também ser utilizadas outras codificações, como o Código Gray. A maior parte dos trabalhos feitos até hoje usando AG utilizou a codificação binária, uma vez que esta permite uma manipulação fácil e eficiente dos operadores genéticos sobre os cromossomos. Nesta codificação, cada cromossomo é um vetor contendo zeros (0) e uns (1), onde cada bit representa um gen. Em problema de otimização onde as variáveis a otimizar são reais, a codificação binária é implementada convertendo-se o valor numérico da variável em uma expressão binária.

Para o cálculo da função objetivo de cada cromossomo da população, é preciso realizar o processo inverso, ou seja, converter a cadeia de bits ao seu equivalente número real. A precisão da solução depende da quantidade de bits utilizada para representar estes números reais. No caso onde o problema de otimização inclui mais de uma variável, como será o caso deste trabalho, o cromossomo é construído justapondo-se a representação genética de cada variável, formando assim uma grande cadeia de bits.

A desvantagem da codificação binária é que se requer constantes conversões entre expressões em ponto flutuante e estruturas binárias, o que significa um custo computacional adicional.

Tendo escolhido o tipo de codificação, o primeiro passo dos AGs é criar uma população inicial. A população inicial de cromossomos é, usualmente, criada de

forma aleatória, mas existem algumas ocasiões em que é mais apropriada uma seleção heurística (por exemplo, quando se tem alguma informação sobre qual parte da região da busca está a solução). No caso deste trabalho será utilizada a forma aleatória. Desde que a população inicial contenha cromossomos suficientemente variados, não haverá problema na busca.

4.4 Avaliação da População

A avaliação da população baseia-se no princípio da “sobrevivência dos melhores indivíduos”. O procedimento comum de definir a *probabilidade de sobrevivência* p_i de um cromossomo x_i é:

$$p_i = \frac{f(x_i)}{\sum_{i=1}^{N_{ind}} f(x_i)} \quad (4.2)$$

onde N_{ind} é o número de indivíduos e $f(x)$ é a função objetivo que se quer minimizar.

Dado que as transições no AG são probabilísticas, a probabilidade de sobrevivência p_i deve ser sempre positiva, portanto $f(x)$ deve ser sempre positiva. Se a função objetivo $f(x)$ em algum problema específico é negativa é preciso fazer um mapeamento $f \rightarrow \tilde{f}$ de modo que a nova função \tilde{f} seja sempre positiva.

A função \tilde{f} é comumente chamada de “*fitness function*” ou função de adequação. Não será estudado neste trabalho tal função, pois não será utilizada porque como será visto a função objetivo é uma norma-2, portanto sempre positiva e não necessitando da função de adequação para calcular a probabilidade de sobrevivência.

Nos processos de otimização com AG, a etapa de avaliação dos indivíduos é o passo mais crítico. Esta etapa é geralmente a que demanda mais tempo para ser executada, já que a probabilidade de sobrevivência tem que ser calculada para cada indivíduo da população. Quanto maior o número de indivíduos, mais tempo levará o processo de seleção. Assim, a velocidade de convergência do AG está relacionada diretamente com o tamanho da população. O custo computacional está concentrado na fase de avaliação da população.

4.5 Seleção e Reprodução

Nesta etapa os cromossomos com mais alta probabilidade de sobrevivência são copiados de uma forma semi-aleatória uma ou mais vezes para um novo conjunto que gerará a futura população, formando, assim, uma população temporária. Por outro lado, os cromossomos com desempenho muito baixo serão removidos da população. A maneira pela qual os cromossomos serão selecionados para reproduzir pode variar, dependendo do método utilizado. Entretanto, é certo que os cromossomos mais bem adaptados terão, necessariamente, uma probabilidade maior de sobrevivência e reprodução do que os de baixo valor da função objetivo.

Existem muitos métodos para executar esta operação. Um método muito empregado é o chamado “*binary tournament mating subset selection method*”. Neste método, cada cromossomo da população compete para uma vaga na nova população temporária. Dois cromossomos são escolhidos aleatoriamente e o cromossomo com o melhor desempenho dentre os dois é escolhido para formar parte da população temporária. Ambos os cromossomos são devolvidos à população anterior para começar uma segunda seleção. Este procedimento continua até que a nova população temporária esteja completa. Uma característica deste esquema é que o pior cromossomo nunca será copiado.

Um outro método consiste em simular N vezes o lançamento de uma roleta, onde N é o número de indivíduos a serem selecionados, cujos setores são ponderados em relação à probabilidade de sobrevivência p_i de cada indivíduo, ou seja, a área de cada região, (“fatia”), é proporcional a esta probabilidade, como vê-se na figura 4.1, e é selecionado o indivíduo indicado pela seta em cada um dos lançamentos. Desta maneira os cromossomos com um maior p terão mais probabilidade de serem escolhidos. Este método tem a desvantagem da sua variância ser muito alta e pode acontecer que o número de cópias feitas de um bom cromossomo seja consideravelmente maior que a média. Por outro lado, este método não garante que o melhor indivíduo seja copiado.

O método empregado neste trabalho foi o chamado “*stochastic universal sam-*

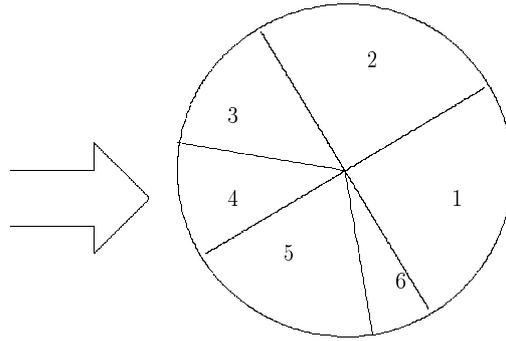


Figura 4.1: Seleção Roleta.

pling". Este método melhora o método da roleta, minimizando a diferença entre o número alocado de filhos para cada indivíduo e o seu valor esperado. Isso é feito utilizando-se N "setas" de seleção igualmente espaçadas ao invés de única seta utilizada no método da roleta, (N é o número de indivíduos a serem selecionados, como na figura 4.2). Assim, gira-se o conjunto de setas uma única vez e a posição dos cursores indicam os indivíduos selecionados. Os indivíduos com maior área terão maior probabilidade de serem selecionados várias vezes. Neste método tem-se resultados menos variantes que o da roleta.

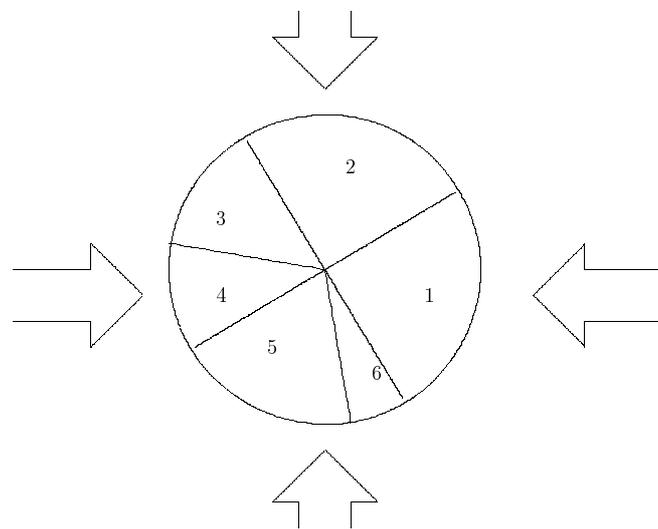


Figura 4.2: Seleção "Stochastic Universal Sampling".

4.6 Cruzamento

O processo de seleção, obviamente, não introduz novos indivíduos na população temporária. O objetivo dos cromossomos sobreviventes é servir como progenitores de novos cromossomos. Na etapa de cruzamento, o algoritmo tenta criar novas e melhores soluções (indivíduos melhores). A forma mais simples de cruzamento é chamada “cruzamento em um ponto”, que é descrita a seguir. Nesse esquema, tem-se que primeiro toda a população é agrupada aleatoriamente, por pares, para gerar um conjunto de $N/2$ progenitores potenciais. Estes pares são escolhidos para o cruzamento.

O cruzamento é aprovado por um processo de decisão similar ao de um “lançamento de moeda”. Primeiramente, escolhe-se uma probabilidade de cruzamento P_x , igual para cada par. Um lançamento de moeda corresponde aqui a gerar, para cada par, um valor aleatório entre 0 e 1. Compara-se, então, o valor gerado de cada par com a probabilidade P_x . Caso o valor gerado pelo lançamento da moeda seja inferior a P_x , o cruzamento é permitido, caso contrário, os progenitores são mantidos inalterados. Ao cruzar um par, duas novas soluções são criadas, intercambiando-se a informação genética dos progenitores em um ponto que também é selecionado aleatoriamente. A figura 4.3 mostra dois cromossomos escolhidos para um provável cruzamento.

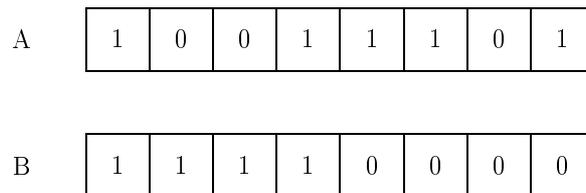


Figura 4.3: Cromossomos escolhidos para o cruzamento.

Se o ponto de cruzamento acontece, aleatoriamente, na posição 5, depois do cruzamento, os dois cromossomos terão intercambiado seu material genético formando duas novas soluções como mostrado na figura 4.4. Estas novas soluções substituirão os progenitores na nova população.

Um operador, um pouco mais complexo, é o cruzamento do cromossomo em

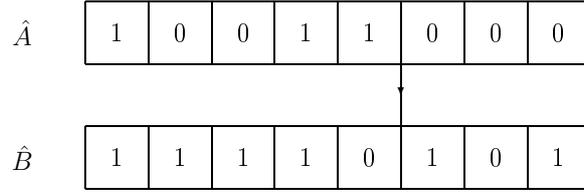


Figura 4.4: Cromossomos depois do cruzamento.

dois ou mais pontos. O procedimento é similar ao anterior. Dado os cromossomos da figura 4.3 e os pontos de cruzamento escolhidos aleatoriamente, dependendo do número de cortes que foi escolhido (dois por exemplo, nos pontos 2 e 6), então, os novos cromossomos terão a forma mostrada na figura 4.5.

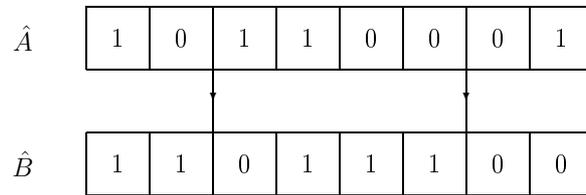


Figura 4.5: Cromossomos depois do cruzamento em dois pontos.

O operador de cruzamento utilizado neste trabalho foi o cruzamento intermediário, que é o método que produz novos cromossomos a partir de dois “pais”, cujas descendências são produzidas de acordo com a seguinte regra:

$$O_1 = P_1 \times \alpha(P_2 - P_1), \quad (4.3)$$

sendo α um fator de escala, escolhido aleatoriamente em algum intervalo (tipicamente $[-0,25; 1,25]$) e P_1 e P_2 são os cromossomos pais. Cada variável das descendências é o resultado da combinação das variáveis dos pais de acordo com a equação (4.3) com um novo α , escolhido para cada par de bits dos pais.

Para muitas aplicações, foram desenvolvidas representações genéticas específicas, assim como formas de cruzamento específicas. Esta flexibilidade é uma das atrações dos AGs, sendo muito fácil introduzir operadores heurísticos que podem melhorar substancialmente o desempenho do algoritmo.

4.7 Mutação

No processo de mutação, o valor de um bit particular de um cromossomo é invertido. De forma similar à etapa anterior, o processo é aprovado levando-se em conta a probabilidade de mutação P_m , que é geralmente um valor baixo. Para entender esse problema, considere o cromossomo A figura 4.3 (mostrado novamente na figura 4.6). Se o gen escolhido aleatoriamente para mutação for o número 5, o novo cromossomo (A_m) terá a forma mostrada na figura 4.6.

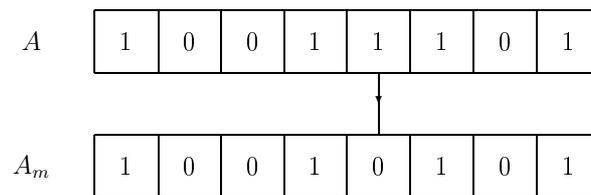


Figura 4.6: Cromossomos depois da operação de mutação.

O propósito deste operador é manter a diversidade na população. Desta forma, evita-se que a população fique saturada com todos os cromossomos parecidos (convergência prematura), mantendo-se assim a variedade da população, sendo útil para evitar mínimos locais. Assim, garante-se a possibilidade de se alcançar qualquer ponto do espaço da busca. O objetivo da mutação é, também, dar ao AG a possibilidade de gerar ou recuperar informações que possam ser valiosas. Este é um operador secundário e deve ser usado com cuidado. Uma taxa de mutação alta incrementa a probabilidade de que um bom indivíduo seja destruído, tornando a busca totalmente aleatória. A melhor taxa de mutação depende da aplicação específica, mas sempre é mantida em um valor baixo.

4.8 Reinservação

Uma vez que a nova população tenha sido produzida pela seleção e cruzamento de indivíduos de uma população antiga, o valor da função objetivo dos indivíduos desta nova população deve ser determinado. Se menos indivíduos são produzidos pelo cruzamento do que o tamanho da população original, então a diferença entre

o tamanho da nova e da antiga população é chamado diferença de geração. Para manter o tamanho da população original, os novos indivíduos têm que ser reinseridos na população antiga. Similarmente, se nem todos os novos indivíduos estão sendo usados a cada geração ou se mais descendentes são criados do que o tamanho da geração antiga, então um esquema de reinserção deve ser usado para determinar quais desses indivíduos vão existir na nova população.

Para selecionar quais membros da população antiga deverão ser substituído, a estratégia mais evidente é trocar os indivíduos com menores valores da função objetivo deterministicamente. Entretanto, alguns estudos têm mostrado que não tem diferença significativa nas características da convergência quando os indivíduos selecionados para substituição são escolhidos com a seleção inversamente proporcional ou deterministicamente como os de menores valores da função objetivo.

4.9 Terminação do AG

Como o AG é um método de busca estocástica, é difícil formalizar um critério de convergência específico. Uma prática comum é terminar o AG depois de um certo número de gerações e então testa-se a qualidade do melhor membro da população. Se nenhuma solução aceitável for encontrada, o AG tem que ser reiniciado para uma nova busca.

4.10 Estrutura dos Algoritmos Genéticos

A estrutura básica do AG é mostrada na figura 4.7, onde se observa os passos do seguinte algoritmo:

Algoritmo 4.1 PASSO 1: *Iniciar o número da geração, $i=1$.*

PASSO 2: *Gerar uma população aleatória de cromossomos P_i .*

PASSO 3: *Calcular a Função Objetivo de cada cromossomo e a sua probabilidade de sobrevivência.*

PASSO 4: *Se for alcançado o número máximo de gerações, terminar o processo.*

PASSO 5: *Baseado na probabilidade de sobrevivência, realizar a seleção e reprodução*

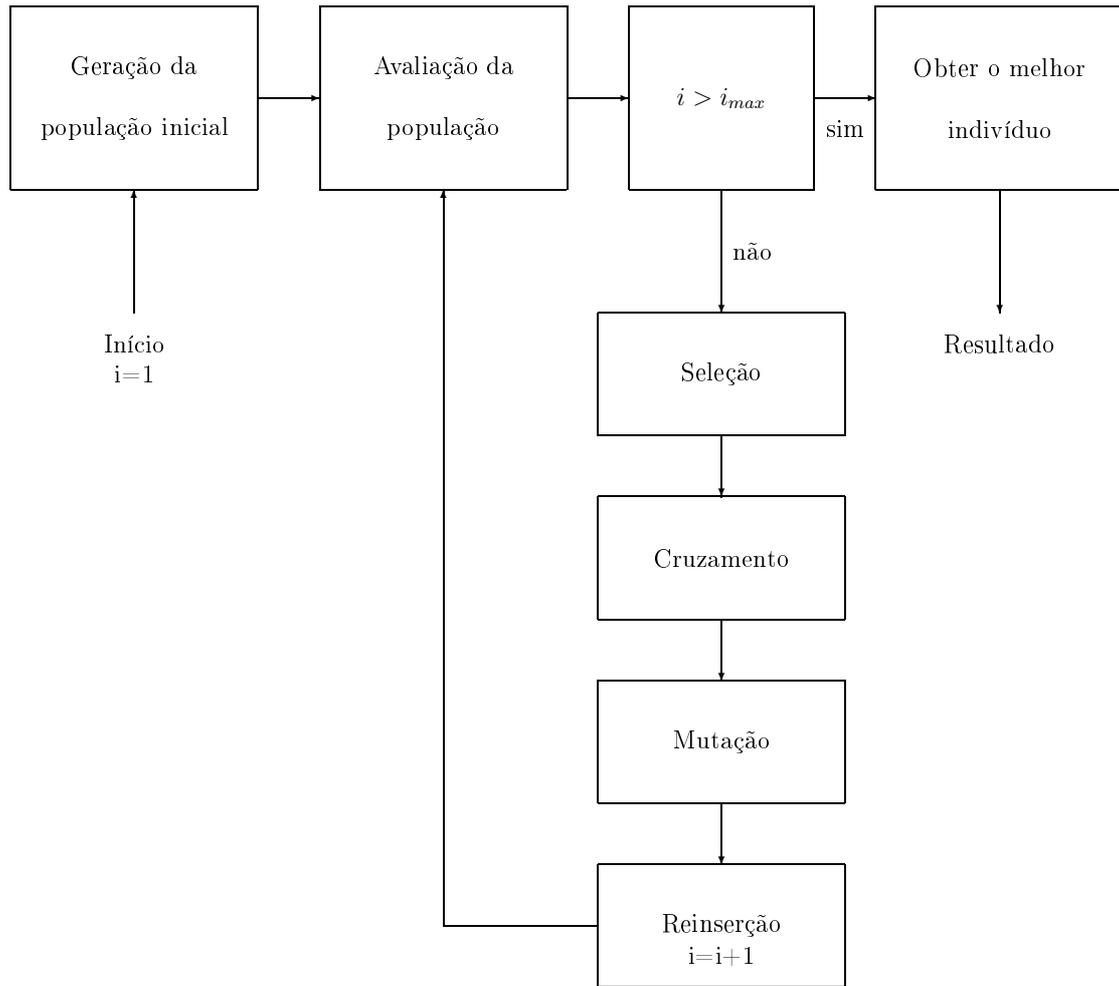


Figura 4.7: Diagrama de fluxo do AG.

dos melhores indivíduos gerando a população P_{i1} .

PASSO 6: Aplicar o operador de Cruzamento à população P_{i1} , gerando a população P_{i2} .

PASSO 7: Aplicar o operador de Mutaçao à população P_{i2} gerando a população P_{i+1} .

PASSO 8: Incrementar i e voltar ao passo 3. \square

4.11 Vantagens e desvantagens dos Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos tem as seguintes vantagens e desvantagens.

(a) Vantagens

- Não requerem conhecimento ou informação do gradiente da superfície definida pela função objetivo.
- Descontinuidades apresentadas na superfície têm pouco efeito sobre o desempenho da busca.
- São resistentes a convergir para soluções locais.
- Trabalham muito bem em problemas de otimização de grande escala.
- Podem ser aplicados numa grande variedade de problemas de otimização.

(b) Desvantagens

- Dificuldade em achar um mínimo global exato.
- Requerem a avaliação da função objetivo muitas vezes.

4.12 Conclusão

Neste capítulo, foram apresentados os aspectos principais da teoria dos Algoritmos Genéticos. Este método de busca será muito importante no processo de busca dos parâmetros dos controladores PID ótimos, pois com ele será garantido que a busca não sairá da região de estabilidade do sistema compensado, conforme será visto no próximo capítulo.

Capítulo 5

Utilização de Algoritmos Genéticos no Projeto de Controladores PI e PID Ótimos

Neste capítulo, será proposto um novo método de ajuste dos parâmetros de controladores PI e PID. O ajuste dos parâmetros é automático e será baseado na minimização de uma função quadrática cujas parcelas são: a norma-2 da componente do sinal externo de perturbação e a norma-2 do sinal do erro multiplicado por uma função racional de ponderação. Embora formulado no domínio da frequência, o problema de otimização será resolvido utilizando ferramentas no domínio do tempo. Isto será possível graças ao teorema de Parseval. Esta minimização será feita através dos Algoritmos Genéticos, que foi escolhido porque neste método consegue-se restringir a busca dentro da região de estabilidade vista no capítulo 3. Para ilustrar os resultados, serão apresentados alguns exemplos onde são mostradas as curvas de resposta ao degrau e do sinal de controle e calculados os seguintes índices de desempenho para cada sistema compensado: tempo de subida (t_r), tempo de acomodação (t_s), valor de regime permanente da resposta (y_{inf}), instante de pico (t_p), percentual de ultrapassagem (PO) e valor máximo para o sinal de controle (u_{max}). Para analisar a eficiência do método em relação à rejeição de perturbação, será aplicado ao sistema um sinal externo de perturbação do tipo degrau unitário e será medido o tempo que o sistema leva para rejeitar uma perturbação (t_{spert}) e o valor do erro percentual máximo devido à perturbação ($E(\%)$).

Este capítulo está estruturado da seguinte forma. Na seção 5.1 serão apresen-

tados alguns conceitos de normas e sistemas buscando estabelecer relações entre os valores da norma quadrática nos domínios do tempo e da frequência. Na seção 5.2 será formulado o funcional de custo para ajuste dos parâmetros dos controladores PI a partir de um problema de controle ótimo quadrático no domínio do tempo. Na seção 5.3, o mesmo problema da seção anterior será considerado novamente, porém, para controladores PID. Na seção 5.4.1 serão vistos exemplos de simulações do método desenvolvidos para controladores PI e PID. Na seção 5.5 serão apresentadas as conclusões.

5.1 Normas de Sinais e Sistemas

Uma maneira de descrever o desempenho de um sistema de controle é através da avaliação de certos sinais do sistema, como o sinal do erro ou o da saída. Uma maneira de se avaliar estes sinais é através das normas dos mesmos. Nesta seção será visto como normas de sinais e de sistemas podem ser calculadas.

5.1.1 Normas de sinais

Serão considerados nesta seção sinais contínuos por partes mapeados do intervalo aberto $(-\infty, \infty)$ em \mathbb{R} , que serão iguais a zero para $t < 0$. A norma a ser estudada é a norma- l_2 de sinais e sistemas.

Uma norma é uma função de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R}_+^* com as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \|u\| \geq 0 \quad (5.1)$$

$$(ii) \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0, \quad \forall t \quad (5.2)$$

$$(iii) \quad \|au\| = |a|\|u\|, \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

$$(iv) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad (5.4)$$

Em concordância com estas propriedades, será definida a *norma* de um sinal da seguinte forma.

Definição 5.1 *A norma- l_2 de um sinal $f(t)$ é definida pela seguinte integral (se existir):*

$$\|f\|_{l_2}^2 := \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt. \quad (5.5)$$

□

5.1.2 Normas de sistemas

Para o estudo de normas de sistemas, serão considerados sistemas lineares, invariantes no tempo, causais e com dimensões finitas. Suponha que os sinais de entrada e a saída sejam denotados, respectivamente, por $u(t)$ e $y(t)$. No domínio do tempo, um modelo para tal sistema tem a forma da seguinte equação de convolução:

$$y(t) = F(t) * u(t), \quad (5.6)$$

onde $f(t)$ denota a resposta impulsional do sistema, que pode ser escrita como:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (5.7)$$

Sistemas causais, significam que $f(t) = 0$ para $t < 0$ e portanto, $f(t - \tau) = 0$, $t > \tau$. Assim, a convolução (5.7) acima pode ser escrita como:

$$y(t) = \int_0^t f(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (5.8)$$

Suponha $F(s) = L\{f(t)\}$ represente também a função de transferência do sistema e devido a sua invariância no tempo, $F(s)$ é racional com coeficientes reais. Pode-se então definir a norma- l_2 de $F(s)$ no domínio da frequência como:

Definição 5.2 *A norma de uma função de transferência $F(s)$ é definida como:*

$$\|F\|_{L_2}^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \quad (5.9)$$

□

A partir das definições anteriores, têm-se o teorema de Parseval (Doyle et al., 1992).

Teorema 5.1 (teorema de Parseval) *Em consonância com as equações (5.5) e (5.9) tem-se que:*

$$\|f\|_{l_2}^2 = \|F\|_{L_2}^2 \quad (5.10)$$

□

Prova: Para a demonstração do teorema de Parseval, note que a transformada de Fourier de $f(t)$ é escrita como:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (5.11)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (5.12)$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} \|f\|_{l_2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega)F(j\omega) d\omega = \|F\|_{L_2}^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

□

Observação 5.1 *A consequência da igualdade (5.10) é que as normas l_2 , de um sinal no tempo, e L_2 de sua correspondente transformada de Fourier (na frequência) são iguais. Assim, deste ponto em diante, as normas l_2 e L_2 serão referidas simplesmente como norma-2, devendo o contexto indicar quando se trata do domínio do tempo ou da frequência.*

Cálculo por espaço de estados

Neste momento, será apresentado um método para calcular a norma-2 de um sinal $f(t)$ utilizando uma realização em espaço de estados de um sistema linear e

invariante no tempo cuja resposta impulsional seja $f(t)$. Para tanto, considere um modelo em espaço de estados na seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (5.14)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (5.15)$$

sendo $u(t)$ o sinal de entrada e $y(t)$ o sinal de saída, ambos escalares, $x(t)$ um vetor contendo os estados do sistema com n componentes. Então A, B, C são matrizes reais de dimensões respectivamente iguais a $n \times n$, $n \times 1$ e $1 \times n$. É sabido que a função de transferência de u para y é:

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B. \quad (5.16)$$

Esta função de transferência é estritamente própria. Suponha, agora, que $F(s)$ seja estável. A seguinte definição pode, então, ser apresentada.

Definição 5.3 *Definem-se gramianos de controlabilidade (W_c) e de observabilidade (W_o), às integrais:*

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt, \quad (5.17)$$

$$W_o = \int_0^{\infty} e^{A^Tt}BB^Te^{At}dt. \quad (5.18)$$

□

Note que as integrais (5.17) e (5.18) convergem uma vez que A é estável, isto é, todos os seus autovalores têm parte real negativa.

Considere, agora, um sistema linear invariante no tempo (SLIT) estável com realização em espaço de estados $[A, B, C, D]$. Pode-se, então, enunciar o seguinte resultado:

Teorema 5.2 *W_c e W_o são, respectivamente, as soluções únicas das seguintes equações de Lyapunov:*

$$AW_c + W_cA^T = -BB^T \quad (5.19)$$

$$A^TW_o + W_oA = -C^TC \quad (5.20)$$

□

Prova: Ver Chen (1999). □

A partir das definições 5.1 até 5.3 e dos teoremas 5.1 e 5.2 pode-se calcular a *norma* de um sinal $f(t)$. Para tanto, obtenha, inicialmente, $F(s) = L\{f(t)\}$. Em seguida, encontre uma realização em espaço de estados $[A, B, C, D]$ controlável para $F(s)$, isto é, $F(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Como $f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = Ce^{At}B$, tem-se:

$$\|f\|_2 = \int_0^\infty f(t)f^*(t)dt = \int_0^\infty Ce^{At}BB^Te^{A^Tt}C^T dt = CW_cC^T. \quad (5.21)$$

Assim, o cálculo da norma de um sinal $f(t)$ utilizando uma representação em espaço de estados de um sistema linear e invariante no tempo e estável cuja resposta impulsional é $f(t)$ e conseqüentemente, com função de transferência $F(s) = L\{f(t)\}$ pode ser feito de acordo com o seguinte algoritmo.

Algoritmo 5.1 *Seja $F(s) = L\{f(t)\}$ uma função de transferência racional, própria e estável.*

PASSO 1: *Obtenha uma representação em espaços de estados para $F(s)$, isto é: $F(s) = [A, B, C, D]$;*

PASSO 2: *Calcule o gramiano de controlabilidade W_c de $F(s)$ resolvendo-se a equação de Lyapunov $AW_c + W_cA^T = -BB^T$. A solução desta equação pode ser obtida utilizando-se a função `lyap` do Matlab.*

PASSO 3: *Calcule a norma de $F(s)$:*

$$\|F\|_2 = CW_cC^T. \quad (5.22)$$

□

5.2 Um funcional de custo quadrático para o ajuste dos parâmetros de um controlador PI

Conforme mostrado no capítulo 2 (seção 2.1), o uso de controladores PI e PID, garantem, desde que o sistema realimentado seja estável, que sinais de referência do tipo degrau sejam rejeitados assintoticamente. Assim, a escolha dos parâmetros dos controladores PI e PID devem ser ditadas por especificações (ou restrições) quanto ao regime transitório.

Uma maneira de considerar o objetivo de desempenho transitório no projeto de controladores é através da formulação de um problema de otimização definido em termos de uma função de custo quadrática J , definida da seguinte forma:

$$J = \int_0^{\infty} e^2(t)dt + \alpha \int_0^{\infty} y_d^2(t)dt = \|e\|_2^2 + \alpha \|y_d\|_2^2, \quad (5.23)$$

onde $e(t)$ é o sinal do erro e $y_d(t)$ é a componente do sinal de perturbação da saída. Note que o problema de otimização 5.23, definido no domínio do tempo pode ser convertido em um problema de otimização no domínio da frequência. Para isso utilizando-se o teorema de Parseval (5.1), obtém-se:

$$J = \|E\|_2^2 + \alpha \|Y_d\|_2^2, \quad (5.24)$$

onde $E(s)$ e $Y_d(s)$ correspondem, respectivamente, às transformadas de Laplace dos sinais $e(t)$ e $y_d(t)$.

Para ajustar os parâmetros do controlador PI ótimo para sistemas estáveis ou instáveis, devem-se obter os valores de k_p e k_i , para os quais o sistema realimentado seja estável e a função de custo J definida na equação (5.24) seja mínima. Para tanto, será necessário encontrar expressões para $E(s)$ e $Y_d(s)$. Para isso, suponha que a função de transferência da planta seja definida como:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (5.25)$$

onde $B(s)$ e $A(s)$ sejam polinômios coprimos. Para o controlador PI tem-se que a função de transferência será:

$$K(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}. \quad (5.26)$$

A partir do diagrama de blocos da figura 5.1 podem-se obter expressões para as transformadas de Laplace do sinal do erro, $E(s)$ e da componente do sinal externo de perturbação do sinal de saída, $Y_d(s)$, utilizando as expressões de $G(s)$ e $K(s)$ definidas nas equações (5.25) e (5.26) respectivamente e de $R(s) = R/s$ e $D(s) = D/s$, resultando em:

$$E(s) = \frac{n_e(s)}{p_c(s)} = \frac{RA(s)}{sA(s) + (k_p s + k_i)B(s)} \quad (5.27)$$

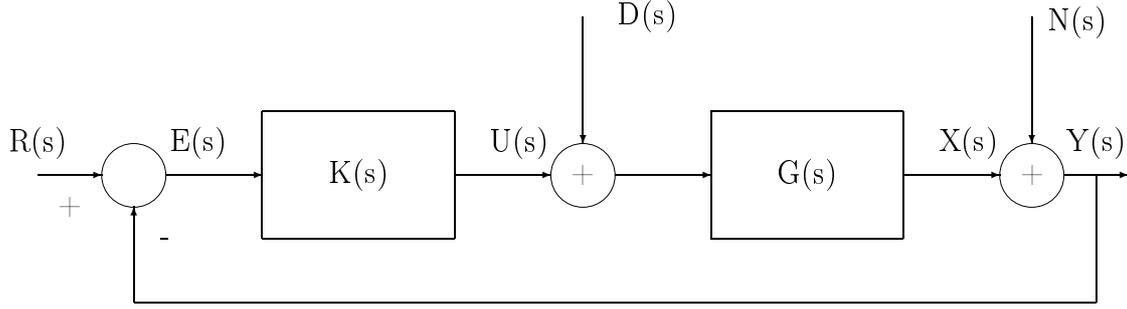


Figura 5.1: Diagrama de blocos de um sistema realimentado com controlador PI.

e

$$Y_d(s) = \frac{n_y(s)}{p_c(s)} = \frac{DA(s)}{sA(s) + (k_p s + k_i)B(s)}. \quad (5.28)$$

Para que se possa calcular $\|E\|_2^2$ e $\|Y_d\|_2^2$, as funções $E(s)$ e $Y_d(s)$ têm que ser racionais estritamente próprias e com pólos somente no semi-plano esquerdo do plano- s . Assim, precisa-se obter a região de estabilidade para o sistema, isto é, os valores de k_p e k_i para os quais o sistema realimentado seja estável. Isso pode ser obtido utilizando-se o algoritmo 3.3.

Uma vez calculada a região de estabilidade do sistema, o próximo passo é encontrar os valores de k_p e k_i para os quais J é mínimo. Para isso, deve-se escrever $E(s)$ e $Y_d(s)$ como uma representação em espaços de estados, isto é, $E(s) = [A_e, B_e, C_e, D_e]$ e $Y_d(s) = [A_y, B_y, C_y, D_y]$. Conforme mostrado na seção 5.1, a forma controlável pode ser obtida diretamente a partir dos coeficientes dos polinômios dos numeradores e denominadores de $E(s)$ e $Y_d(s)$.

Feito isso, calcula-se o gramiano de controlabilidade (W_c), associado a $E(s)$ e $Y_d(s)$ (uma vez que, como $E(s)$ e $Y_d(s)$ têm o mesmo denominador, $A_e = A_y = A$ e $B_e = B_y = B$), resolvendo-se a seguinte equação de Lyapunov:

$$AW_c + W_c A^T = -BB^T. \quad (5.29)$$

A partir do W_c , pode-se calcular as norma-2 de $E(s)$ e $Y_d(s)$, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \|E\|_2^2 = C_e W_c C_e^T \\ \|Y_d\|_2^2 = C_y W_c C_y^T. \end{cases} \quad (5.30)$$

Assim tem-se que:

$$J = \|E\|_2^2 + \alpha \|Y_d\|_2^2. \quad (5.31)$$

Para se achar o ponto ótimo, ou seja, os valores de k_p e k_i para os quais J é mínimo, utiliza-se um programa de busca baseado no mecanismo de seleção natural e genética natural, o algoritmo genético. Com a utilização desta técnica, pode-se limitar o espaço da busca, fazendo-se com que as populações que são geradas no algoritmo fiquem dentro da região de estabilidade do sistema.

O funcional de custo (5.24) pode ser modificado com o objetivo de limitar o sinal de controle, para os casos em que o ganho proporcional fique muito grande, podendo assim levar o sistema à saturação e conseqüentemente sair da região linear de operação (Basilio, 1989). Para tanto, define-se a função de custo, dada por:

$$J = \|E_w\|_2^2 + \alpha \|Y_d\|_2^2, \quad (5.32)$$

onde o novo E_w tem a seguinte forma:

$$E_w(s) = W(s)E(s), \quad (5.33)$$

sendo $E(s)$ definido como na equação (5.27) e $W(s)$ descrito pela seguinte função racional (Doyle et al., 1992)

$$W(s) = \frac{s + \gamma}{s + \beta}, \quad (5.34)$$

onde os parâmetros γ e β representam novo parâmetros de projeto a serem arbitrados pelo projetista. Note que o termo $W(s)$ funciona como uma função de ponderação, que produz o efeito de bloquear sinais de alta ou de baixa freqüência, dependendo dos valores de γ e β , quando γ é maior que β os sinais de baixa freqüência presentes em $e(t)$ são atenuados e quando o contrário ocorre (isto é $\gamma < \beta$), os sinais de alta freqüência presentes em $e(t)$ são atenuados, como mostra a figura 5.2.

Substituindo-se a equação (5.34) em (5.33) resulta:

$$E_w(s) = \frac{n_{ew}(s)}{d_w(s)} = \frac{(s + \gamma)RA(s)}{(s + \beta)(sA(s) + (k_p s + k_i)B(s))}. \quad (5.35)$$

Note que a expressão de $Y_d(s)$ continua sendo aquela dada pela equação (5.28).

Deve-se, para encontrar os valores de k_p e k_i para os quais J é mínimo e proceder de forma idêntica ao caso anterior, desta vez, em função dos valores de γ e β . Para se chegar ao novo J , é necessário calcular o valor da norma de E_w , ou seja,

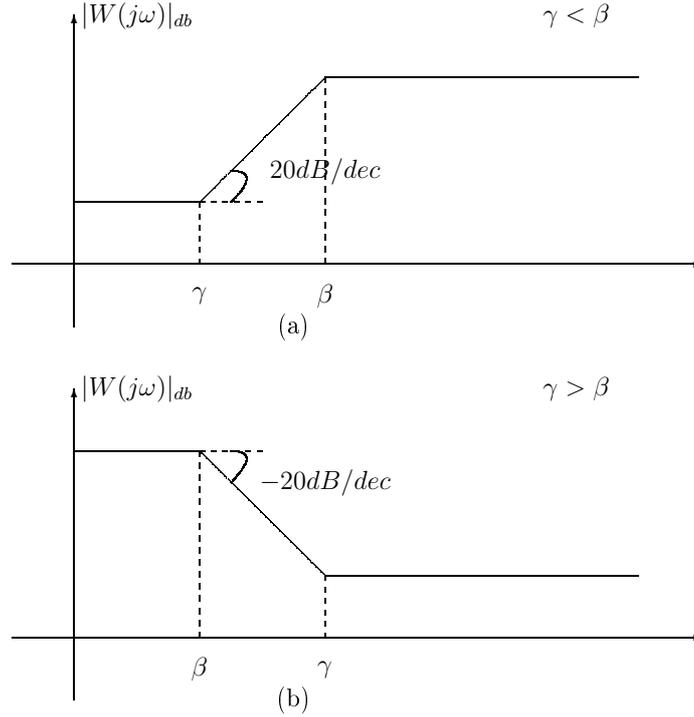


Figura 5.2: Diagrama de Bode do filtro passa baixa (a) e filtro passa alta (b).

$\|E_w\|_2^2$, já que o valor de $\|Y_d\|_2^2$ não depende de γ e β . Para isso escreve-se E_w como uma representação em espaço de estados, isto é, $E_w(s) = [A_{ew}, B_{ew}, C_{ew}, D_{ew}]$.

A partir da representação em espaço de estados, calcula-se o gramiano de controlabilidade (W_{cw}) associado a $E_w(s)$, resolvendo-se a equação de Lyapunov:

$$A_{ew}W_{cw} + W_{cw}A_{ew}^T = -B_{ew}B_{ew}^T \quad (5.36)$$

e, em seguida, calcula-se a norma-2 de $E_w(s)$, dada por:

$$\|E_w\|_2^2 = C_{ew}W_{cw}C_{ew}. \quad (5.37)$$

Assim, pode-se calcular o novo valor de J utilizando-se a equação (5.30) para calcular a norma-2 de $Y_d(s)$. Portanto, tem-se que:

$$J = \|E_w\|_2^2 + \alpha\|Y_d\|_2^2. \quad (5.38)$$

Finalmente, note que os passos da busca para encontrar os valores de k_p e de k_i , serão os mesmos, a menos dos parâmetros γ e β , que serão ajustados de acordo com o limite do sistema em suportar o sinal de controle. Portanto, tem-se o seguinte algoritmo.

Algoritmo 5.2 PASSO 1: Sendo a função de transferência da planta dada por $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ utilizar o algoritmo 3.3 para determinar a região de estabilidade do sistema realimentado.

PASSO 2: Encontrar uma representação em espaço de estados de $E_w(s)$ e $Y_d(s)$, para isso pode-se utilizar a função “tf2ss” do MatLab.

PASSO 3: Utilizando a função de custo J de acordo com a equação (5.38), utiliza-se o algoritmo genético (algoritmo 4.1) para efetuar a busca para encontrar o ponto ótimo do sistema, ou seja, aqueles valores de k_p e k_i pertencentes à região de estabilidade obtida no passo 1 em que a função custo terá o menor valor. Para isso devem-se atribuir valores a γ e β de modo a se limitar o ganho proporcional do sistema, diminuindo-se, então, o valor máximo do sinal de controle. \square

Um ponto importante neste algoritmo é a determinação da região de estabilidade. Com ela, pode-se calcular um controlador sub-ótimo utilizando-se os pontos que foram encontrados da região. Para isso, basta ter um programa que calcule, para todos os pontos da região encontrados o valor da função custo para cada um deles. O controlador PI sub-ótimo será definido pelo ponto (k_p, k_i) que leva ao menor valor da função custo.

5.3 Um funcional de custo quadrático para o ajuste dos parâmetros de um controlador PID

Para o projeto de controladores PID ótimo para sistemas estáveis ou instáveis, define-se o mesmo funcional de custo quadrático do projeto de controladores PI ótimos, isto é:

$$J = \|E_w\|_2^2 + \alpha \|Y_d\|_2^2, \quad (5.39)$$

onde

$$E_w(s) = W(s)E(s) \quad (5.40)$$

e

$$W(s) = \frac{s + \gamma}{s + \beta}, \quad (5.41)$$

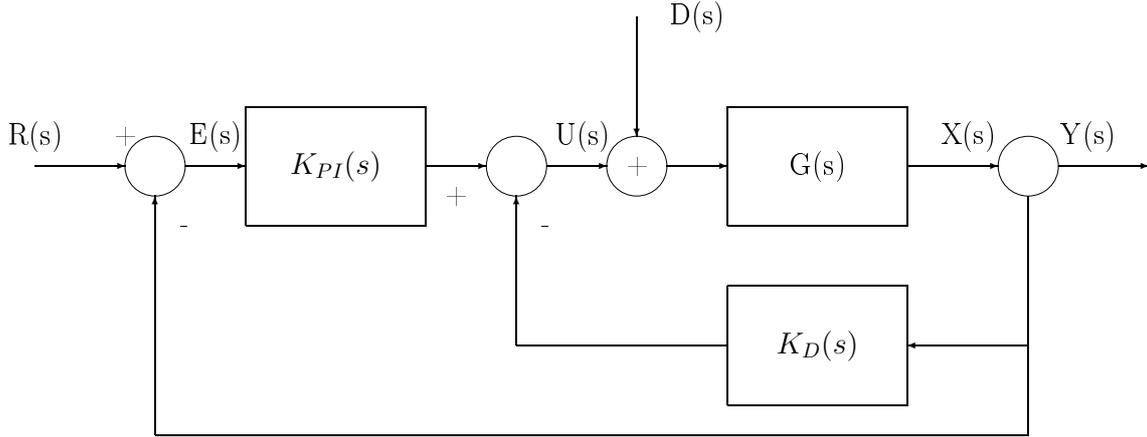


Figura 5.3: Diagrama de blocos com um controlador PID.

onde γ e β são os parâmetros de projetos a serem atribuídos pelo projetista, como já visto. Como no caso do controlador PI, o primeiro passo será encontrar expressões para $E_w(s)$ e $Y_d(s)$. Portanto assim como na seção 5.2, supondo-se a função de transferência da planta seja:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (5.42)$$

sendo $B(s)$ e $A(s)$ polinômios coprimos.

Para o controlador PID, de acordo com o diagrama de blocos da figura 5.3, tem-se as seguintes funções de transferências:

$$U(s) = K_{PI}(s)E(s) - K_d(s)Y(s) \quad (5.43)$$

onde

$$K_{PI}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s}. \quad (5.44)$$

e

$$K_D(s) = k_d s. \quad (5.45)$$

Escrevendo-se, agora, as transformadas de Laplace dos sinais de erro $E_w(s)$ e da componente do sinal de perturbação no sinal de saída $Y_d(s)$, em função das expressões de $G(s)$, $K_{PI}(s)$ e $K_D(s)$ das equações (5.42), (5.43), (5.44) e (5.45) respectivamente e de $R(s) = R/s$ e $D(s) = D/s$, resultando em:

$$E(s) = \frac{n_e(s)}{d(s)} = \frac{R[A(s) + B(s)(k_d s)]}{sA(s) + (k_p s + k_i)B(s) + (k_d s)B(s)} \quad (5.46)$$

e, portanto:

$$E_w(s) = \frac{n_{ew}(s)}{d_w(s)} = \frac{(s + \gamma)R(A(s) + B(s)(k_d s))}{(s + \beta)(sA(s) + (k_p s + k_i)B(s) + (k_d s)B(s))} \quad (5.47)$$

e

$$Y_d(s) = \frac{n_y(s)}{d(s)} = \frac{DB(s)}{sA(s) + (k_p s + k_i)B(s) + (k_d s)B(s)}. \quad (5.48)$$

As funções $E_w(s)$ e $Y_d(s)$ têm que ser racionais, estritamente próprias e com pólos somente no semi-plano esquerdo do plano- s , para que se possa calcular $\|E_w\|_2^2$ e $\|Y_d\|_2^2$. Assim, é necessário obter a região de estabilidade para o sistema, isto é, os valores de k_p , k_i e k_d para os quais o sistema realimentado seja estável.

Para encontrar os valores de k_p , k_i e k_d , pertencentes à região de estabilidade, para os quais a função J os seus mínimos, primeiro deve-se escrever $E_w(s)$ e $Y_d(s)$ como uma representação em espaço de estados, isto é, $E_w(s) = [A_{ew}, B_{ew}, C_{ew}, D_{ew}]$ e $Y_d(s) = [A_y, B_y, C_y, D_y]$, na forma controlável e, em seguida, calcular os gramianos de controlabilidade W_c e W_{cw} , associados a $Y_d(s)$ e $E_w(s)$ resolvendo-se as seguintes equações de Lyapunov:

$$A_y W_c + W_c A_y^T = -B_y B_y^T, \quad (5.49)$$

$$A_{ew} W_{cw} + W_{cw} A_{ew}^T = -B_{ew} B_{ew}^T. \quad (5.50)$$

Feito isso, pode-se calcular a norma-2 de $E_w(s)$ e $Y_d(s)$, da seguinte forma:

$$\|E_w\|_2^2 = C_{ew} W_{cw} C_{ew}^T \quad (5.51)$$

$$\|Y_d\|_2^2 = C_y W_c C_y^T \quad (5.52)$$

e obter

$$J = \|E_w\|_2^2 + \alpha \|Y_d\|_2^2. \quad (5.53)$$

Para obter o ponto ótimo, ou seja, os valores de k_p , k_i e k_d para os quais J é mínimo, será utilizado o algoritmo genético com o espaço de busca definido pela região de estabilidade do sistema. Isto pode ser feito de acordo com o seguinte algoritmo:

Algoritmo 5.3 PASSO 1: Sendo a função de transferência da planta dada por $G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$ utilizar o algoritmo 3.4 para determinar a região de estabilidade do

sistema realimentado.

PASSO 2: *Encontrar uma representação em espaço de estados de $E_w(s)$ e $Y_d(s)$ definidos pelas equações (5.47) e (5.48), respectivamente. Para isso pode-se utilizar a função “tf2ss” do MatLab.*

PASSO 3: *Utilizando a função de custo J de acordo com a equação 5.53, utilizar o algoritmo genético (algoritmo 4.1) para fazer a busca para encontrar o ponto ótimo do sistema, ou seja, aqueles valores de k_p , k_i e k_d em que a função custo terá o menor valor, onde o espaço da busca é definido pela região de estabilidade calculada no Passo 1. Para isso deve-se atribuir valores a γ e β de modo a se limitar o ganho proporcional do sistema, diminuindo-se, então, o valor máximo do sinal de controle.*

□

Do mesmo modo que no cálculo do controlador PI, pode-se, também, determinar um controlador sub-ótimo para o controlador PID a partir dos pontos da região de estabilidade determinada no Passo 1 do algoritmo 5.3. Para isso basta, para cada ponto da região de estabilidade, calcular o valor da função custo e, em seguida, escolher o ponto (k_p, k_i, k_d) que levou ao menor valor da função custo.

5.4 Exemplos

Serão, agora apresentados alguns exemplos de projeto utilizando-se o método de ajuste dos parâmetros de controladores PI e PID proposto neste trabalho. Serão calculados dois controladores: (i) um controle sub-ótimo calculando o custo para cada ponto da região de estabilidade; (ii) um controle ótimo, em que a busca do ponto ótimo é feita utilizando-se o algoritmo genético na região de estabilidade.

Para calcular o controlador ótimo utilizando o algoritmo genético, foi utilizada a biblioteca de rotinas criadas para Matlab (Chipperfield et al., 1994) para a implementação do mesmo. O primeiro passo a ser dado, segundo o algoritmo 4.1 é a geração da população inicial. Nos exemplos a seguir, foi utilizada uma população com 50 indivíduos ($N=50$). Como a rotina utilizada gera a população em uma região que é uma “caixa”, ou seja, seus limites são valores constantes nos três eixos, então o

primeiro passo é calcular a região de estabilidade do sistema, para que com os pontos limites da mesma, possa ser “criada” a caixa onde será gerada a população inicial. Note que a região de estabilidade se encontra dentro da caixa, portanto alguns indivíduos podem ficar fora da região. A partir desta população, é feita a avaliação da probabilidade de sobrevivência da mesma. Nesta etapa deve-se calcular os valores da função custo para cada indivíduo da população inicial, sendo importante verificar, primeiramente, se o indivíduo (ponto) está dentro da região de estabilidade, uma vez que se o sistema não for estável, não é possível calcular o gramiano de controlabilidade utilizando-se a equação de Lyapunov. Para tal verificação, tem-se que, a partir do valor de k_p , pode-se determinar a região de (k_i, k_d) para os quais o sistema é estável, assim, como o ponto a ser verificado é (k_p, k_i, k_d) , tem-se que, se os valores de k_i e de k_d estão dentro da região de pares que tornam o sistema estável para o dado k_p , o indivíduo (ponto) está dentro da região de estabilidade do sistema. Se isto não ocorrer, o ponto estará fora de tal região, portanto, uma outra função terá que ser utilizada nestes indivíduos. Nestes exemplos, utilizou-se uma função constante com um valor relativamente alto, para que o valor mínimo esteja sempre dentro da região de estabilidade. A partir do valor da função custo para todos os pontos, calcula-se a probabilidade de sobrevivência de cada indivíduo da população inicial, como os valores da função custo dos pontos que estão fora da região foram definidos como um valor constante e alto, a probabilidade de sobrevivência destes indivíduos é muito baixa, portanto, tais indivíduos serão eliminados do processo evolutivo. Com a probabilidade de sobrevivência de cada indivíduo calculada, faz-se então a seleção dos que tem as melhores probabilidades de adaptação. Para esta etapa, foi utilizado o método de seleção “Stochastic Universal Sampling” como foi visto na seção 4.5. A partir dos indivíduos selecionados, faz-se então o cruzamento destes. Neste trabalho utilizou-se a probabilidade de cruzamento $P_x = 0,7$. Após esta etapa, tem-se que utilizar o operador mutação nestes indivíduos. Neste caso a probabilidade de mutação utilizada foi $P_m = 0,01$. Com os indivíduos criados, depois de utilizados estes operadores, o próximo passo é a re-inserção destes na população inicial e, a partir daí, recomeçar o processo com esta nova população, onde

também serão verificados se os indivíduos estão dentro da região de estabilidade, até que o número máximo de gerações seja alcançado. O número máximo de gerações adotado é 60. Após alcançar este número de gerações, o melhor indivíduo da última geração é o resultado final do processo de otimização. Em todos os exemplos foi feito $\alpha = 1$, $R(s) = 1/s$ e $D(s) = 1/s$.

5.4.1 Exemplos de controladores PI

Exemplo 5.1 *Planta instável, de fase não mínima e com grau relativo igual a 2 (Datta et al., 2000).*

Considere uma planta com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{s^3 + 6s^2 - 2s + 1}{s^5 + 3s^4 + 29s^3 + 15s^2 - 3s + 60} \quad (5.54)$$

De acordo com o algoritmo 5.2, o primeiro passo é obter a região de estabilidade (algoritmo 3.3), ou seja, os valores de k_p e k_i para os quais o sistema é estável. Esta região está mostrada na figura 3.2.

Atribuindo-se $\gamma = 0,8$ e $\beta = 1$, tem-se que um controlador PI sub-ótimo será

$$K_{sub}(s) = 2,9588 + \frac{15,2320}{s}. \quad (5.55)$$

Utilizando-se o algoritmo genético, com os mesmos valores de γ e β , chega-se ao seguinte controlador:

$$K_o(s) = 2,9859 + \frac{15,2518}{s}. \quad (5.56)$$

Nas figuras 5.4 e 5.5 estão as curvas de resposta ao degrau e do sinal de controle, respectivamente, utilizando-se os controladores PI, ótimo e sub-ótimo, dados pelas expressões (5.55) e (5.56), obtidas a partir de simulação, com o tempo de 100 segundos, sendo a perturbação aplicada em 50 segundos. Neste caso os controladores ficaram muito parecidos e as curvas de resposta ao degrau e do sinal de controle foram aproximadamente coincidentes. A análise do desempenho do sistema compensado pode ser melhor realizada com o auxílio da tabela 5.1. Neste exemplo, a planta não é simples de ser controlada, pois é uma planta instável, de fase não mínima e com grau relativo igual a 2. Com relação ao rastreamento do degrau

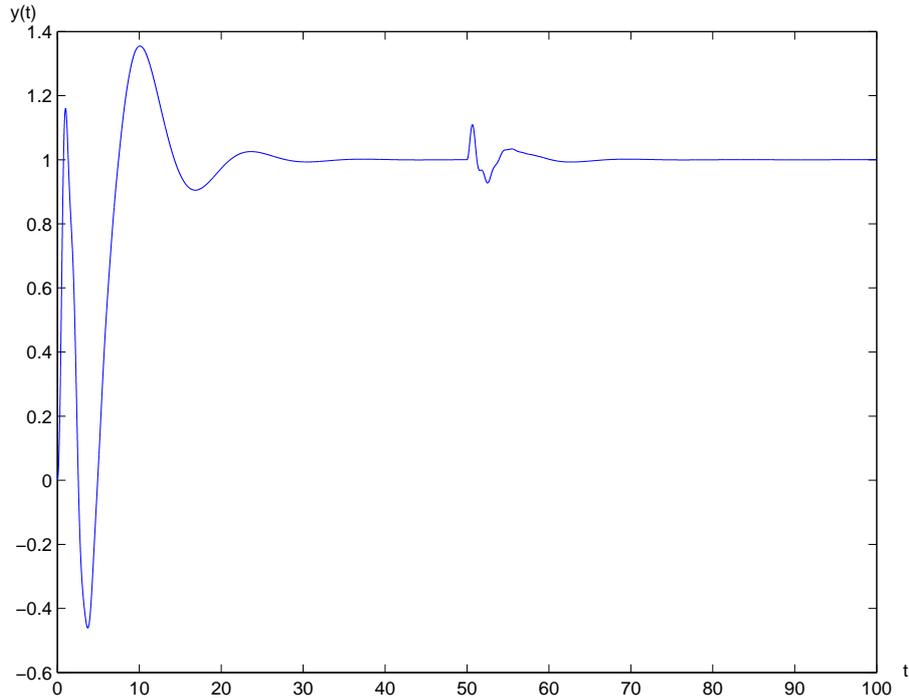


Figura 5.4: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo e sub-ótimo para o exemplo 5.1.

unitário, pode-se destacar o tempo de acomodação que foi aproximadamente igual a 25 segundos, o tempo de subida foi menor que 1 segundo e que o sistema conseguiu rastrear o degrau. Quanto à rejeição de perturbação, pode-se perceber que, tanto olhando a tabela quanto olhando a resposta na figura 5.4, o método proposto rejeitou a perturbação rapidamente. Com relação ao sinal de controle, pode-se perceber que este teve um valor máximo não muito elevado em relação ao esforço necessário para manter o rastreamento em regime permanente.

□

Exemplo 5.2 *Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 1.*

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Datta et al., 2000):

$$G(s) = \frac{s^4 + 4s^3 + 23s^2 + 46s - 12}{s^5 + 2s^4 + 23s^3 + 44s^2 + 97s + 98}. \quad (5.57)$$

Primeiramente, deve-se obter a região de estabilidade do sistema compensado representada na figura 5.6. O próximo passo é achar os valores de k_p e de k_i que minimizem a função custo. Usando $\gamma = 0,01$ e $\beta = 1$ obtém-se o seguinte contro-

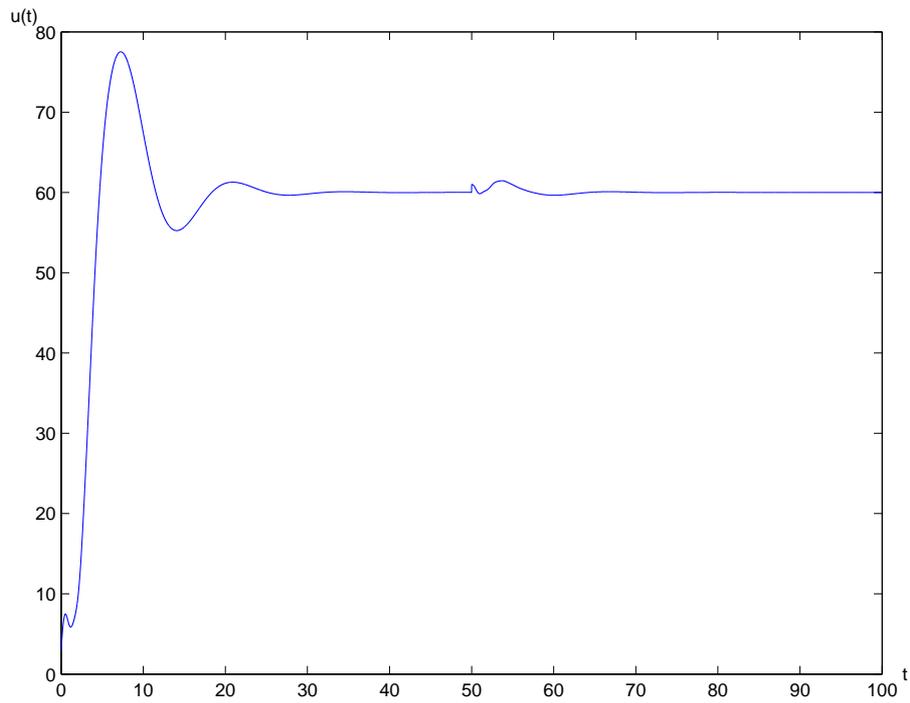


Figura 5.5: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo e sub-ótimo para o exemplo 5.1.

Tabela 5.1: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.1

Método/ índices	Controlador Ótimo
t_r	0,7487
t_s	25,1231
y_{inf}	1,0000
t_p	10,0810
PO(%)	35,4670
u_{max}	77,5185
t_{spert}	7,1195
E(%)	10,9751

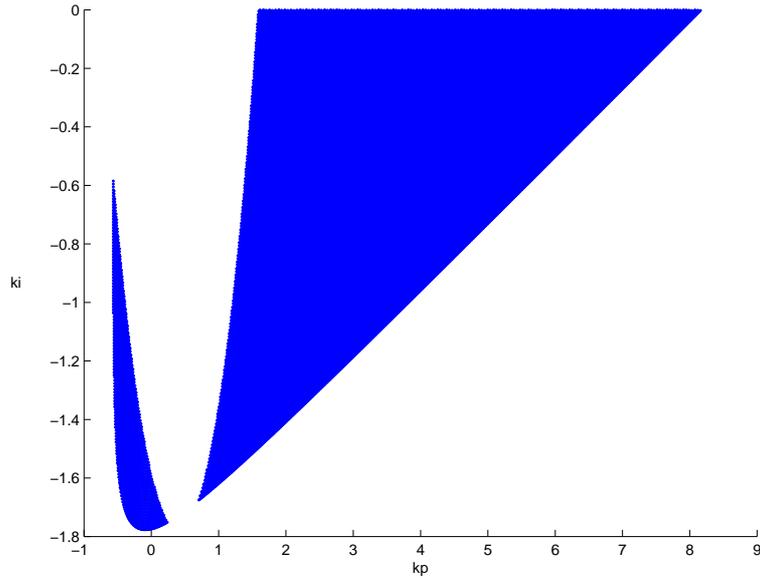


Figura 5.6: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.2.

lador sub-ótimo:

$$K_{sub}(s) = 2,3365 - \frac{0,3536}{s}, \quad (5.58)$$

e utilizando o algoritmo genético, chega-se ao seguinte controlador:

$$K_o(s) = 2,7871 - \frac{0,3398}{s}. \quad (5.59)$$

Neste exemplo, obteve-se também um controlador ótimo, utilizando $\gamma = 0,01$ e $\beta = 100$, dado pela seguinte função de transferência:

$$K_1(s) = 2,7887 - \frac{0,4831}{s}. \quad (5.60)$$

Nas figuras 5.7 e 5.8 estão representadas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se os controladores ótimos com $\beta = 1$ (linha verde), o controlador ótimo com $\beta = 100$ (linha azul) e o controlador sub-ótimo com $\beta = 1$ (linha vermelha). A simulação foi realizada com o tempo de 150 segundos, sendo a perturbação aplicada em 75 segundos. Utilizando-se a tabela 5.2, faz-se a comparação dos métodos apresentados. Com relação à resposta ao degrau pode-se observar que no sistema realimentado com o controlador PI ótimo utilizando-se $\beta = 100$, o tempo de subida e o tempo de pico foram significativamente

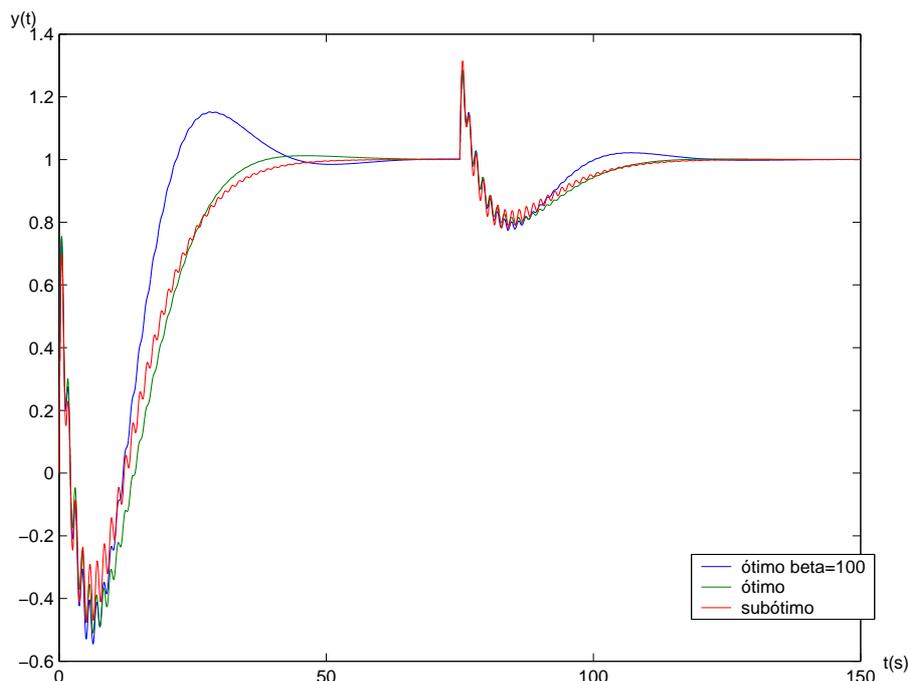


Figura 5.7: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo com $\beta = 1$ (linha verde), com $\beta = 100$ (linha azul) e sub-ótimo com $\beta = 1$ (linha vermelha) para o exemplo 5.2.

menores que dos outros controladores. Por outro lado este controlador teve um percentual de ultrapassagem maior que os outros dois controladores apresentados. Note, ainda, que o valor máximo do sinal de controle foi um pouco menor utilizando-se o controlador sub-ótimo. Finalmente, quanto à rejeição de perturbação os três controladores apresentados tiveram desempenho semelhante, com o controlador sub-ótimo tendo um erro máximo devido à perturbação um pouco maior que os outros.

□

Exemplo 5.3 Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 2.

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Datta et al., 2000):

$$G(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + s + 2}{s^5 + 8s^4 + 32s^3 + 46s^2 + 46s + 17}. \quad (5.61)$$

O primeiro passo é obter a região de estabilidade do sistema compensado, representada na figura 5.9. Em seguida, fazendo-se $\gamma = 0,6$ e $\beta = 2$, obtém-se o seguinte controlador PI sub-ótimo:

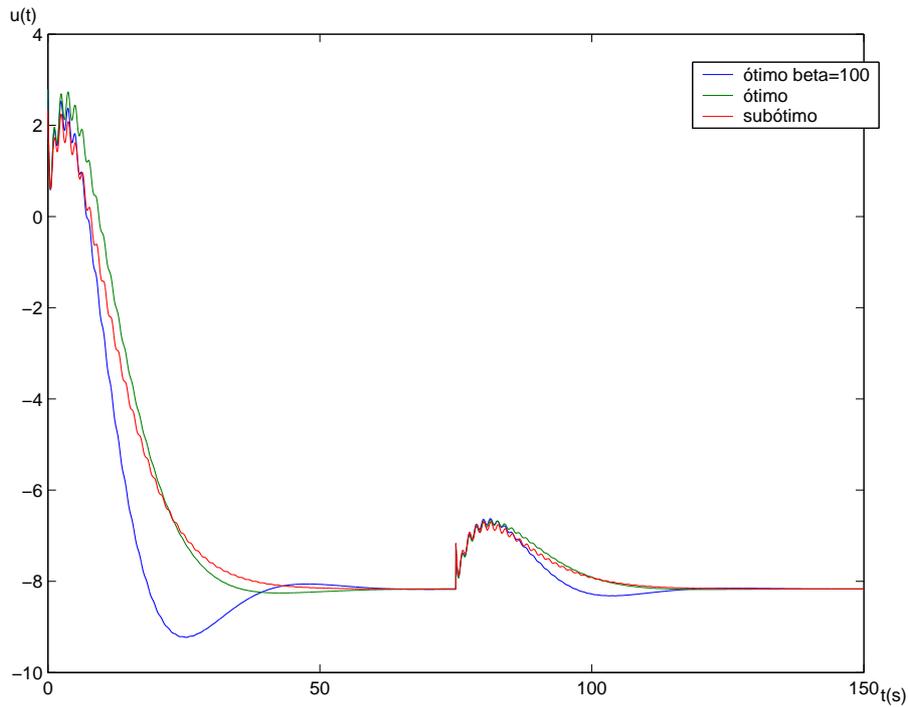


Figura 5.8: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo $\beta = 1$ (linha verde), com $\beta = 100$ (linha azul) e sub-ótimo com $\beta = 1$ (linha vermelha) para o exemplo 5.2.

Tabela 5.2: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.2

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo $\beta = 1$	Controlador Ótimo $\beta = 1$	Controlador Ótimo $\beta = 100$
t_r	41,5375	34,7856	21,9439
t_s	42,4531	36,6178	41,4399
y_{inf}	1,0000	1,0000	1,0000
t_p	0,0000	45,3150	28,1800
PO(%)	0,0000	1,2305	15,1960
u_{max}	2,3365	2,7871	2,7887
t_{spert}	32,0510	31,5445	34,3845
E(%)	32,4715	28,2203	28,5406

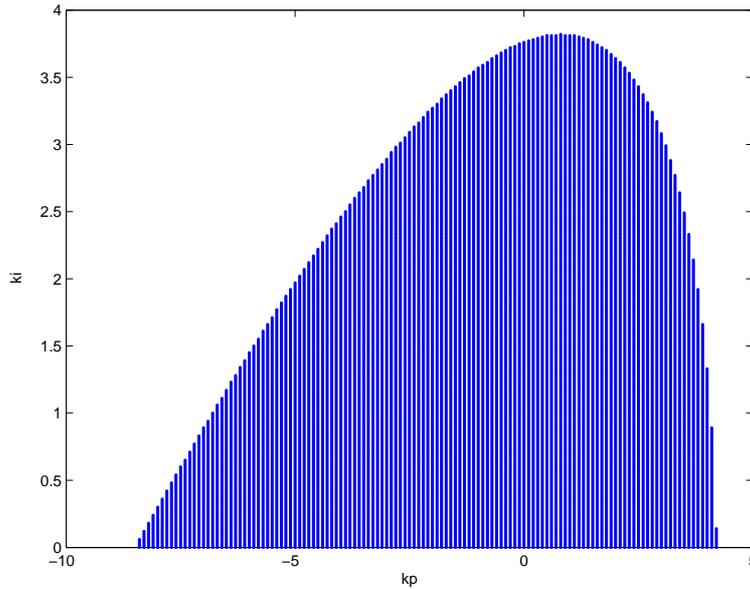


Figura 5.9: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.3.

$$K_{sub}(s) = 1,2 + \frac{1,65}{s}. \quad (5.62)$$

Utilizando algoritmo genético, obtém-se o seguinte controlador ótimo:

$$K_o(s) = 1,1721 + \frac{1,6715}{s}. \quad (5.63)$$

Nas figuras 5.10 e 5.11 estão representadas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se os controladores ótimo (linha azul) e o controlador sub-ótimo (linha vermelha). A simulação foi feita com o tempo de 100 segundos sendo a perturbação aplicada em 50 segundos.

A partir da tabela 5.3, pode-se fazer uma comparação entre os resultados obtidos com os controladores ótimo e sub-ótimo. Nesta tabela estão os índices de desempenho medidos, de onde se pode perceber que os resultados das simulações dos dois controladores ficaram quase idênticos. Deve-se destacar que a resposta não apresenta percentual de ultrapassagem pois a saída do sistema teve um comportamento super-amortecido. A resposta tem um tempo de subida pequeno e o tempo de amortecimento relativamente maior nas duas simulações. Quanto ao valor máximo do sinal de controle e a rejeição de perturbação esses foram bastante próximos para os dois sistemas.

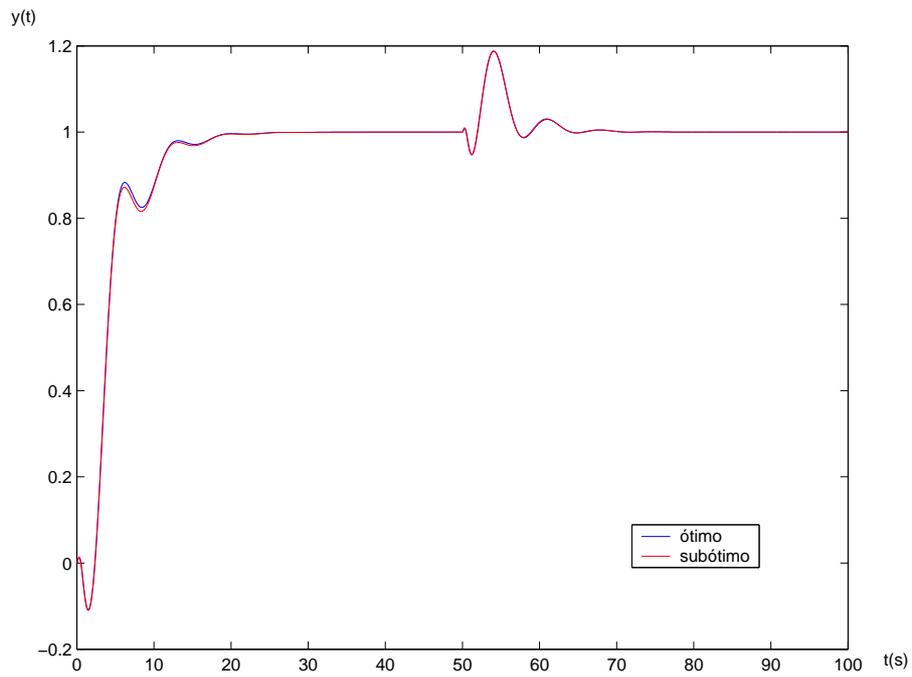


Figura 5.10: Respostas ao degrau dos sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.3.

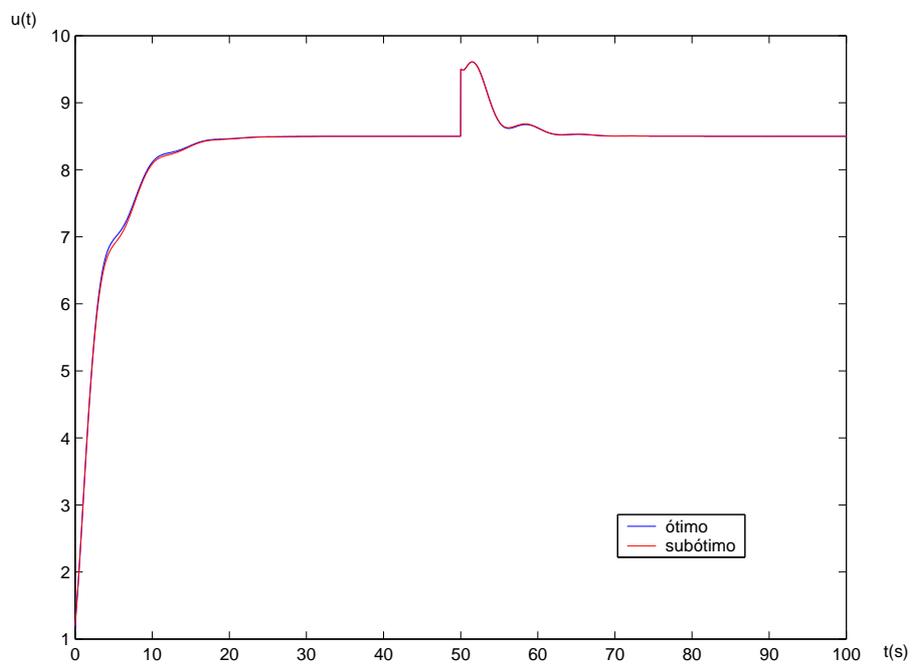


Figura 5.11: Sinais de controle dos sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.3.

Tabela 5.3: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.3

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	7,7580	7,7141
t_s	17,0282	16,9232
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	0,0000	0,0000
PO(%)	0,0000	0,0000
u_{max}	9,6092	9,6087
t_{spert}	12,2236	12,2182
E(%)	18,7801	18,7717

□

Exemplo 5.4 Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 1.

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Datta et al., 2000):

$$G(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + s + 8}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 7s + 14}. \quad (5.64)$$

O primeiro passo é obter a região de estabilidade do sistema compensado, que está mostrada na figura 5.12. Aplicando-se o método proposto, e fazendo-se $\gamma = 0,6$ e $\beta = 2$ obtém-se o seguinte controlador PI sub-ótimo:

$$K_{sub}(s) = 1,2 + \frac{1,65}{s}. \quad (5.65)$$

Para os mesmos valores de γ e β , obtém, utilizando algoritmo genético, o seguinte controlador:

$$K_o(s) = 1,1721 + \frac{1,6715}{s}. \quad (5.66)$$

Nas figuras 5.13 e 5.14 estão representadas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se o controlador ótimo (linha azul) e o controlador sub-ótimo (linha vermelha), feitas através de simulação, com o tempo de 200 segundos, sendo a perturbação aplicada em 100 segundos. A comparação entre os desempenhos dos sistemas compensados pode ser melhor realizada com o auxílio da tabela 5.4. Nota-se, a partir das figuras 5.13 e 5.14 e da tabela 5.4 novamente,

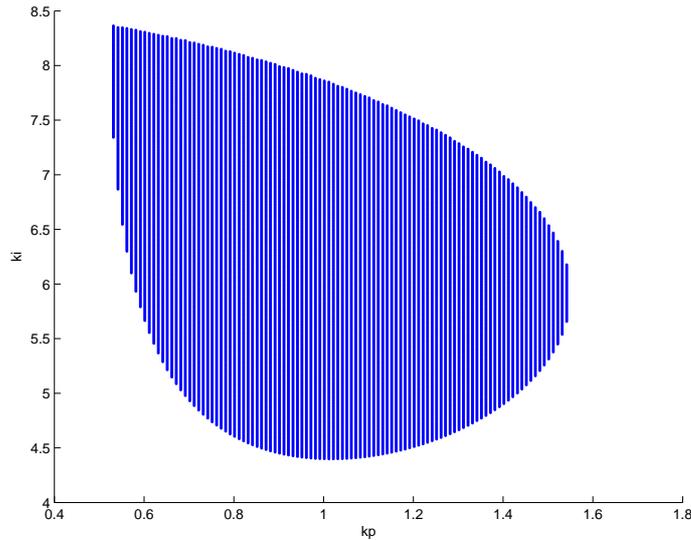


Figura 5.12: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.4.

Tabela 5.4: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.4

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	0,5211	0,5216
t_s	58,8969	58,7725
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	3,2200	3,2200
PO(%)	95,2637	94,4520
u_{max}	4,7241	4,6951
t_{spert}	35,8416	35,8106
E(%)	32,4101	32,1215

que as simulações dos dois métodos ficaram praticamente idênticas. Neste exemplo, os sistemas compensados não tiveram um bom desempenho, pois as respostas ficaram muito oscilatórias e demoraram muito a entrar em regime permanente ficando, com um tempo de amortecimento muito alto, apesar de um tempo de subida baixo. Outro índice que foi muito ruim foi o percentual de ultrapassagem, ficando em quase 100%. Quanto à rejeição de perturbação, o sistema compensado também não teve resposta satisfatória, demorando um longo tempo para rejeitar a perturbação e com um erro alto devido à mesma, além do sistema ter oscilado muito neste período. Com relação ao sinal de controle, o sinal máximo não foi tão alto como em outros exemplos.

□

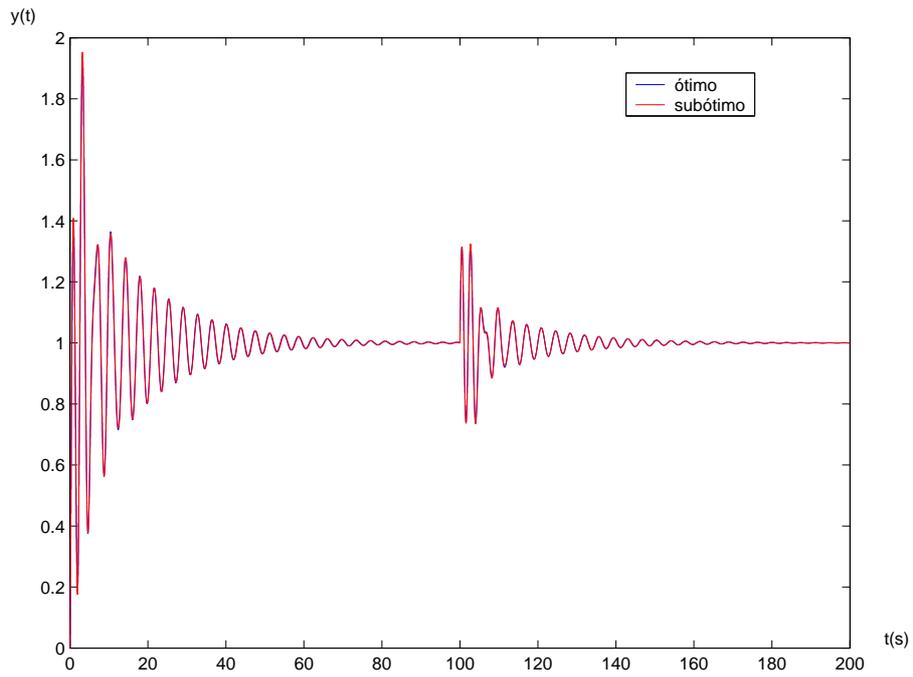


Figura 5.13: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.4.

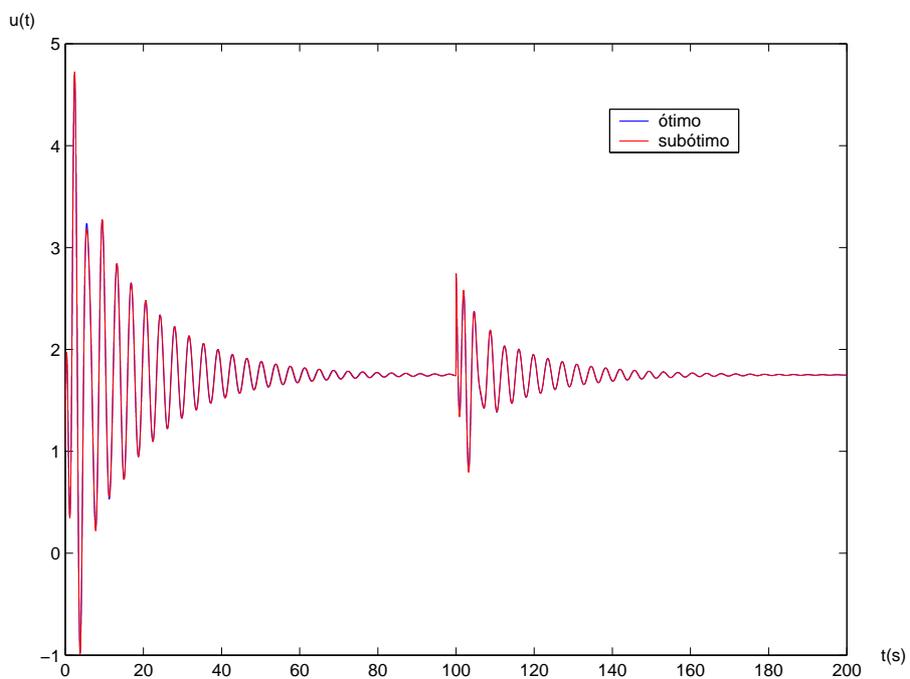


Figura 5.14: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.3.

Exemplo 5.5 Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 3.

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Datta et al., 2000):

$$G(s) = \frac{s - 100}{s^4 + 5s^3 + 10s^2 - s + 1} \quad (5.67)$$

Primeiramente é necessário obter a região de estabilidade do sistema compensado. Contudo, neste caso tem-se que não existe tal região, ou seja, não existe nenhum par (k_p, k_i) que torne o sistema realimentado estável. Neste exemplo, pode-se ver que a planta possui dois pólos e um zero instáveis, ou seja, no lado semi-plano direito do plano imaginário. Utilizando o lugar das raízes, é possível verificar que com o controlador PI não é possível realocá-los no lado esquerdo do plano imaginário.

□

Exemplo 5.6 Sistema estável, fase não-mínima e grau relativo igual a 1.

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Dorf e Bishop, 1999):

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 2s + 100} \quad (5.68)$$

O primeiro passo é encontrar a região de estabilidade do sistema compensado representada na figura 5.15. Feito isso, o próximo passo é achar os valores de k_p e de k_i que minimizam a função custo, para achar o controlador ótimo e a partir dos pontos da região, encontrar os valores de k_p e de k_i em que se tenha o menor valor da função custo, achando-se assim o controlador sub-ótimo. Fazendo-se $\gamma = 1$ e $\beta = 1$ obtém-se o seguinte controlador PI sub-ótimo:

$$K_{sub}(s) = 2 - \frac{43,4}{s}. \quad (5.69)$$

Utilizando o algoritmo genético, obtém-se o seguinte controlador ótimo:

$$K_o(s) = 1,5217 - \frac{42,3743}{s}. \quad (5.70)$$

Nas figuras 5.16 e 5.17 estão representadas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se o controlador ótimo (linha azul) e o controlador sub-ótimo (linha vermelha), feitas através de simulação, com o tempo

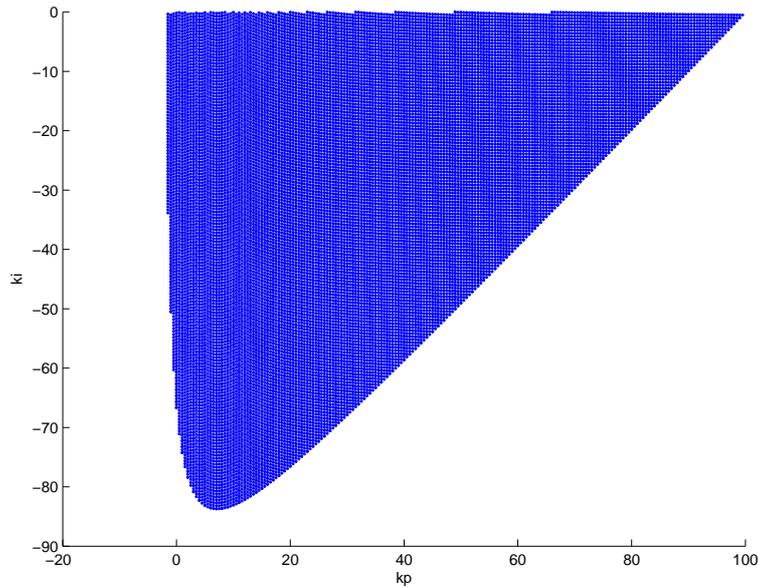


Figura 5.15: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.6.

Tabela 5.5: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.6

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	2,7604	3,0097
t_s	5,4931	5,8048
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	0,0000	0,0000
PO(%)	0,0000	0,0000
u_{max}	2,0000	1,5217
t_{spert}	1,6025	1,6110
E(%)	8,2100	8,4201

de 20 segundos e a perturbação aplicada em 10 segundos. Utilizando-se a tabela 5.5, pode-se fazer a comparação dos resultados. Note que as simulações dos sistemas compensados utilizando os dois métodos ficaram praticamente idênticas novamente. Com relação à resposta ao degrau pode-se observar que não há percentual de ultrapassagem. Com relação ao tempo de subida e ao tempo de amortecimento, esses são aproximadamente iguais. Pode-se concluir que, neste exemplo, os controladores tiveram um bom desempenho.

□

Exemplo 5.7 Sistema estável e de grau relativo igual a 2,

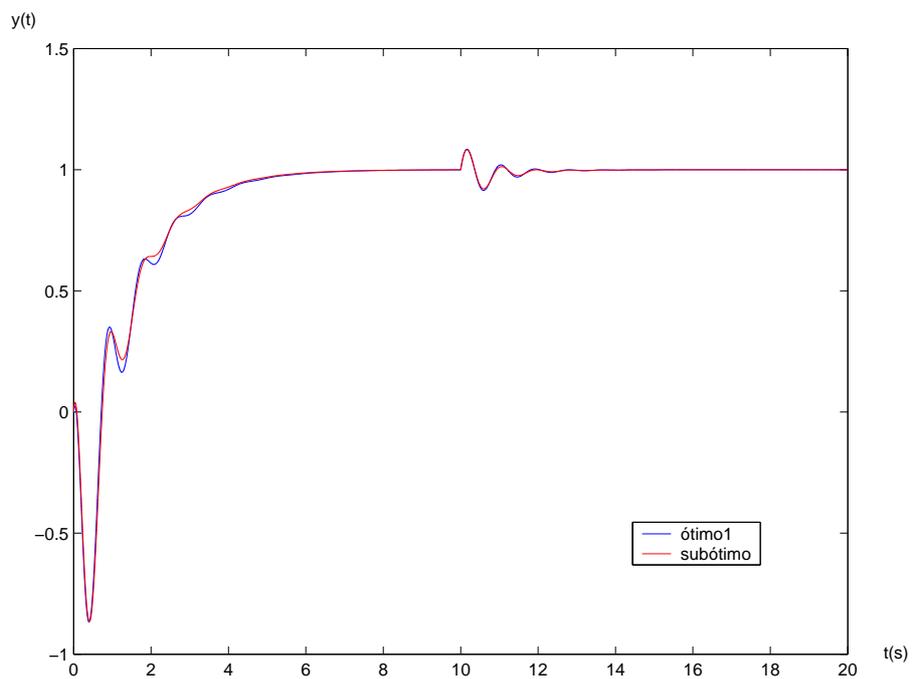


Figura 5.16: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.6.

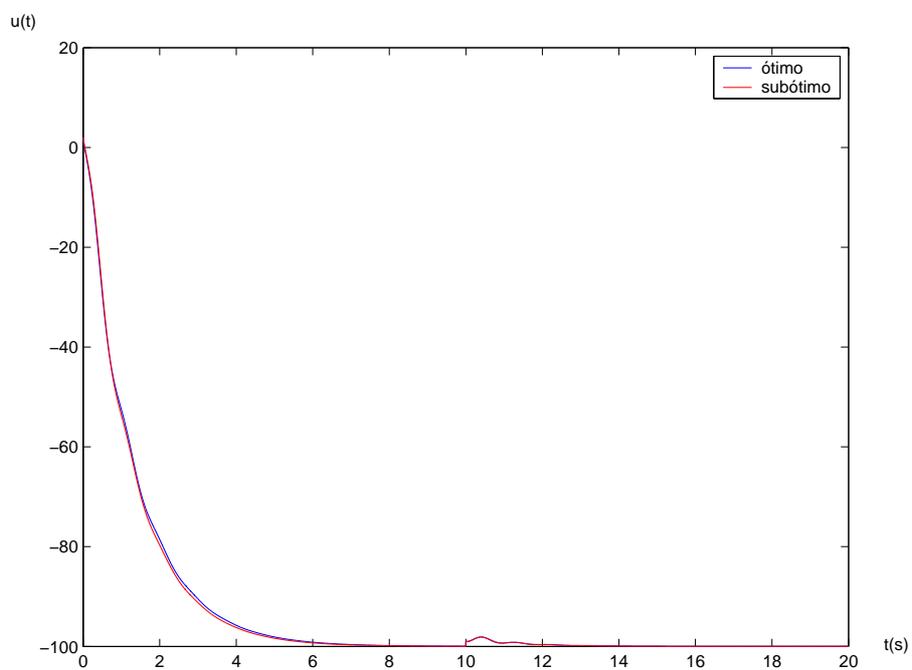


Figura 5.17: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.6.

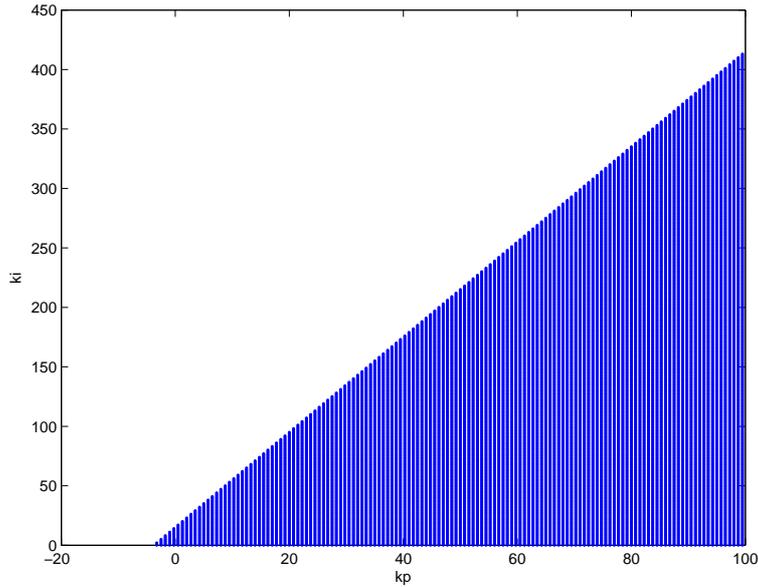


Figura 5.18: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.7.

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Americano, 2001):

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \quad (5.71)$$

A região de estabilidade do sistema compensado encontra-se representada na figura 5.18. Nota que esta região cresce infinitamente na direção de k_p tendo sido, na sua representação truncada quando $k_p = 100$. Os próximos passos são utilizar o algoritmo genético para encontrar o controlador PI que minimiza a função custo, e calcular o custo para todos os pontos da região de estabilidade, achando, assim, os controladores ótimo e sub-ótimo respectivamente. Fazendo-se $\gamma = 6$ e $\beta = 12$ obtém-se o seguinte controlador PI sub-ótimo:

$$K_{sub}(s) = 53 + \frac{12}{s}. \quad (5.72)$$

O controlador ótimo terá a seguinte função de transferência:

$$K_o(s) = 53,0240 + \frac{11,7255}{s}. \quad (5.73)$$

Nas figuras 5.19 e 5.20 estão representadas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se o controlador ótimo e o controlador sub-ótimo, feitas através de simulação, com o tempo de 40 segundos e a perturbação

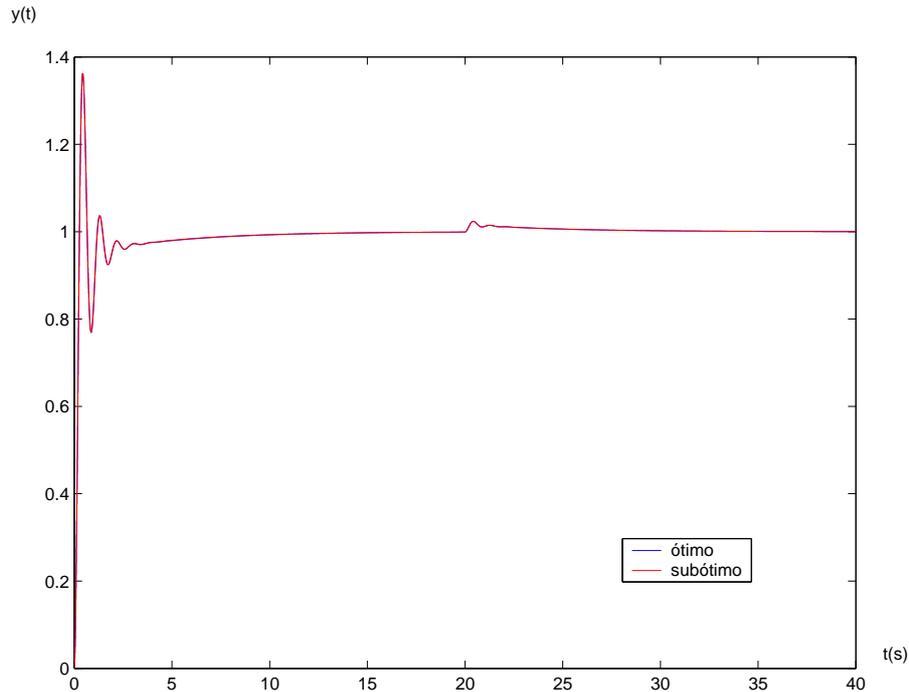


Figura 5.19: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.7.

aplicada em 20 segundos. A comparação entre os desempenho dos dois controladores pode ser melhor realizada utilizando-se a tabela 5.6. Note que as simulações dos sistemas compensados utilizando os dois métodos ficaram idênticas. No que se refere aos tempos de subida e de pico da resposta ao sinal de referência, pode-se ver que esses índices foram baixos. Nota-se que o rastreamento da resposta não foi exato na simulação. Com relação ao sinal de controle, obteve-se um valor máximo muito alto, o que é devido ao elevado ganho proporcional do controlador obtido neste exemplo. A razão para isto é que a região de estabilidade obtida foi muito grande e o valor de k_p que minimiza a função custo também foi grande, portanto ocorrendo-se um valor máximo muito alto no sinal de controle. Quanto à rejeição de perturbação, nota-se que conforme mostra a tabela os sistemas rejeitaram quase que instantaneamente a perturbação.

□

Exemplo 5.8 Sistema estável, fase mínima e de grau relativo igual a 4.

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Basílio e Matos,

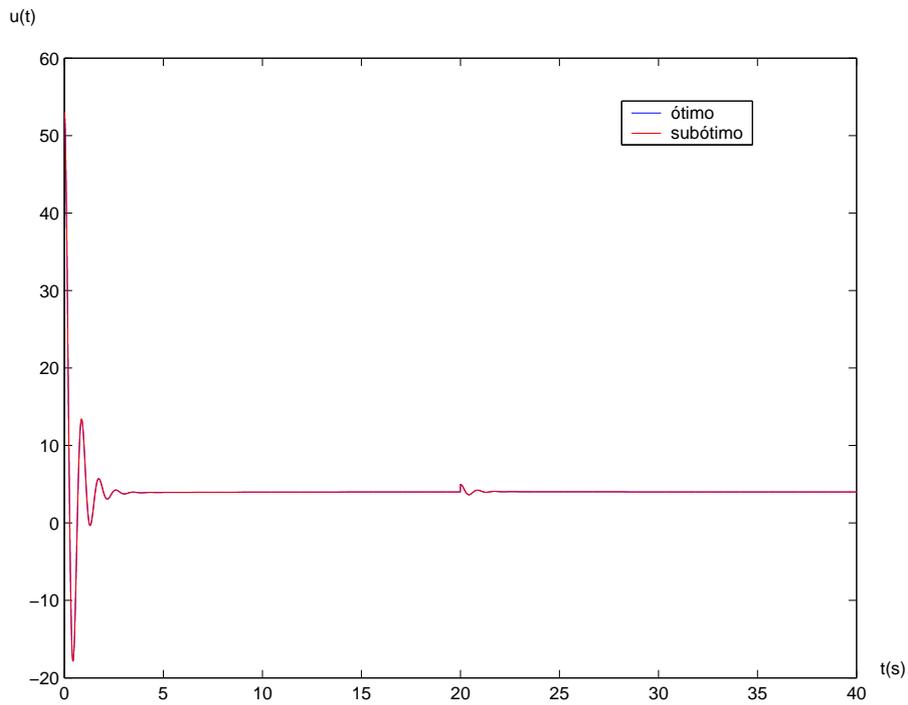


Figura 5.20: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.7.

Tabela 5.6: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.7

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	0,2646	0,2646
t_s	4,7451	4,8684
y_{inf}	0,9992	0,9991
t_p	0,4300	0,4300
PO(%)	36,3500	36,2812
u_{max}	53,0000	53,0240
t_{spert}	0,0000	0,0000
E(%)	1,8201	1,7800

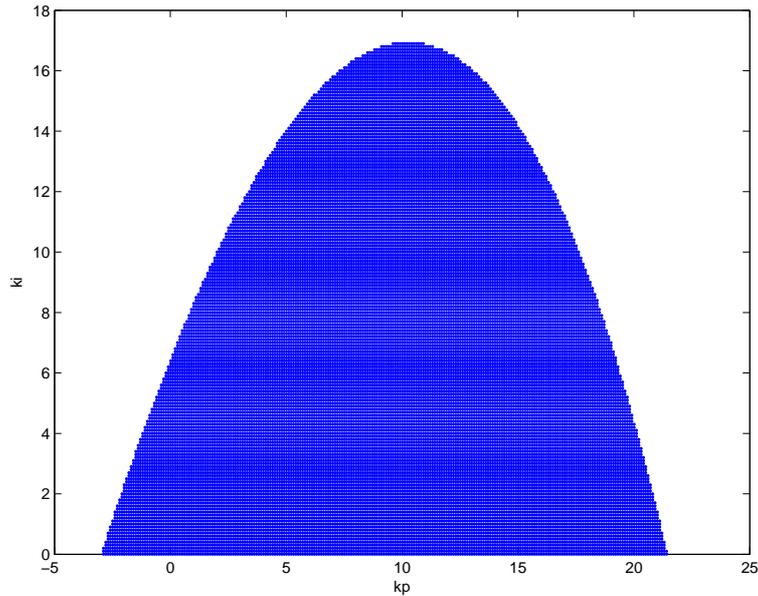


Figura 5.21: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.8.

2000):

$$G(s) = \frac{50s + 750}{s^5 + 30s^4 + 335s^3 + 1690s^2 + 3624s + 2240} \quad (5.74)$$

A região de estabilidade do sistema compensado está mostrada na na figura 5.21. Os controladores PI ótimos e sub-ótimos, para $\gamma = 2$ e $\beta = 4$ têm-se as seguintes funções de transferência:

$$K_{sub}(s) = 7,0133 + \frac{3,3}{s}, \quad (5.75)$$

$$K_o(s) = 7,1220 + \frac{3,3224}{s}. \quad (5.76)$$

Nas figuras 5.22 e 5.23 estão representadas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se o controlador ótimo e o controlador sub-ótimo, feitas através de simulação, com o tempo de 30 segundos e a perturbação aplicada em 15 segundos. Note-se mais uma vez que as respostas quase se superpõem. De acordo com a tabela 5.6, com relação à resposta ao degrau pode-se observar que os tempos de subida, de amortecimento e de pico são bastante satisfatórios. Quanto ao percentual de ultrapassagem também obteve bom resultado (aproximadamente 16%). Com relação ao sinal de controle, obteve-se um valor máximo aproximadamente igual a duas vezes e meia o valor de regime permanente. Quanto ao tempo para

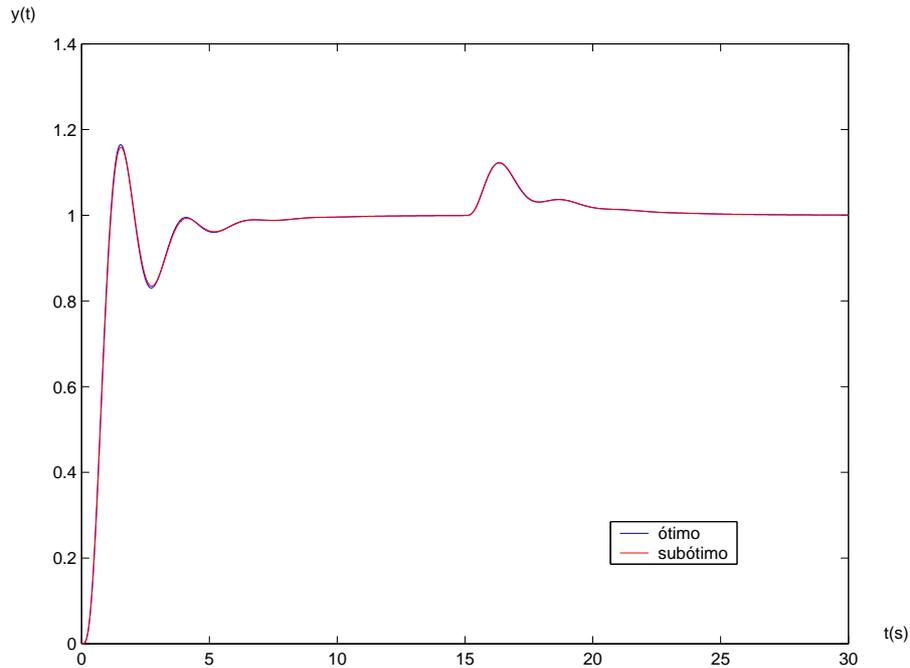


Figura 5.22: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.8.

rejeitar a perturbação, este representa aproximadamente um quarto do tempo que o sistema leva para atingir o tempo de acomodação da resposta ao sinal de referência.

□

Exemplo 5.9 Sistema estável e de grau relativo igual a 8.

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Astrom e Hagglund, 1995):

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^8} = \frac{1}{s^8 + 8s^7 + 28s^6 + 56s^5 + 70s^4 + 56s^3 + 28s^2 + 8s + 1} \quad (5.77)$$

A região de estabilidade do sistema compensado está mostrada na na figura 5.24. Aplicando-se o método proposto, para $\gamma = 8$ e $\beta = 4$ obtém-se o seguinte controlador PI sub-ótimo:

$$K_{sub}(s) = 0,9 + \frac{0,125}{s}. \quad (5.78)$$

Com os mesmo γ e β , o controlador ótimo será:

$$K_o(s) = 0,9061 + \frac{0,1227}{s}. \quad (5.79)$$

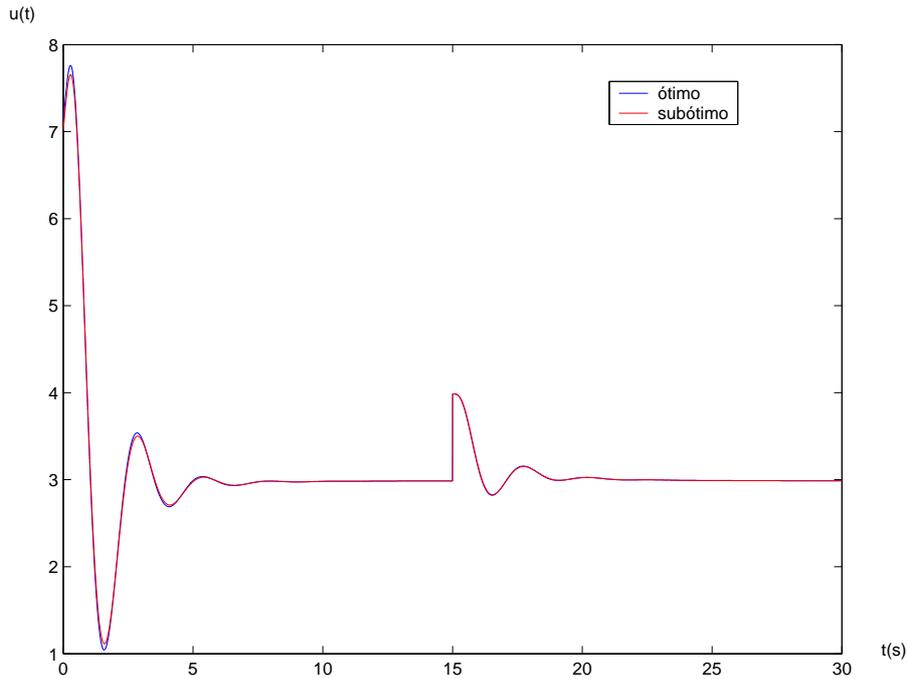


Figura 5.23: Sinal de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.8.

Nas figuras 5.25 e 5.26 estão as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se o controlador ótimo e o controlador sub-ótimo, feitas através de simulação, com o tempo de 200 segundos e a perturbação aplicada em 100 segundos. Vê-se que, novamente, as simulações são praticamente coincidentes. A partir da tabela 5.8 e da resposta ao degrau, vê-se que os índices de desempenho foram piores que em outros exemplos, principalmente o tempo de acomodação. Com relação ao sinal de controle, o valor máximo foi baixo em relação a outros exemplos. Quanto a rejeição de perturbação vê-se um elevado valor da resposta e um tempo para rejeitá-la da mesma ordem de grandeza do tempo de acomodação da resposta ao degrau.

□

Exemplo 5.10 Sistema estável, fase mínima e de grau relativo igual a 4.

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Basilio e Matos, 2002):

$$G(s) = \frac{28,5s^2 + 6,93s + 18,2}{s^6 + 17,47s^5 + 46,78s^4 + 67,52s^3 + 64,86s^2 + 43,3s + 14,16} \quad (5.80)$$

Tabela 5.7: Índices de desempenho relativos aos sistemas realimentados do exemplo 5.8

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	1,1510	1,1384
t_s	6,0369	6,0117
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	1,5400	1,5300
PO(%)	15,8601	16,4827
u_{max}	7,6549	7,7612
t_{spert}	1,4805	1,4557
E(%)	12,2903	12,2208

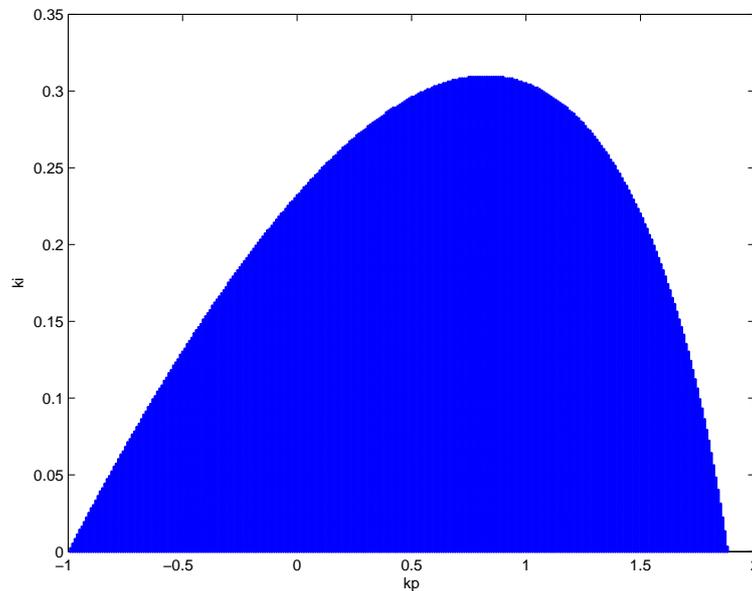


Figura 5.24: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.9.

Tabela 5.8: Índices de desempenho do relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.9

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	10,3248	10,3389
t_s	45,8684	45,7546
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	13,4100	13,3600
PO(%)	19,4825	18,7072
u_{max}	2,0007	2,0007
t_{spert}	53,5918	53,5180
E(%)	76,0094	75,9548

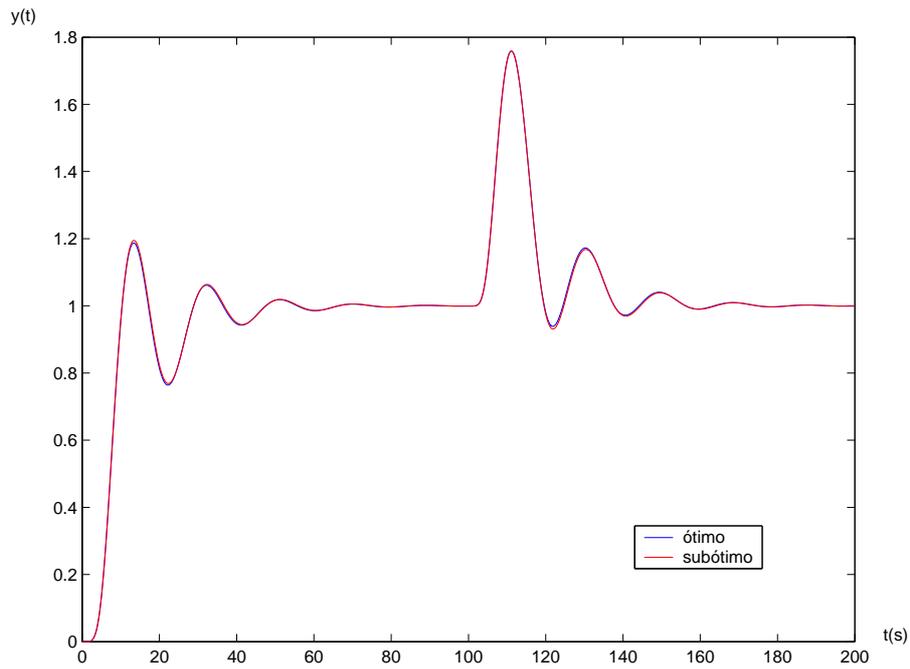


Figura 5.25: Respostas ao degrau para o sistemas com os controladores PI ótimos (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.9.

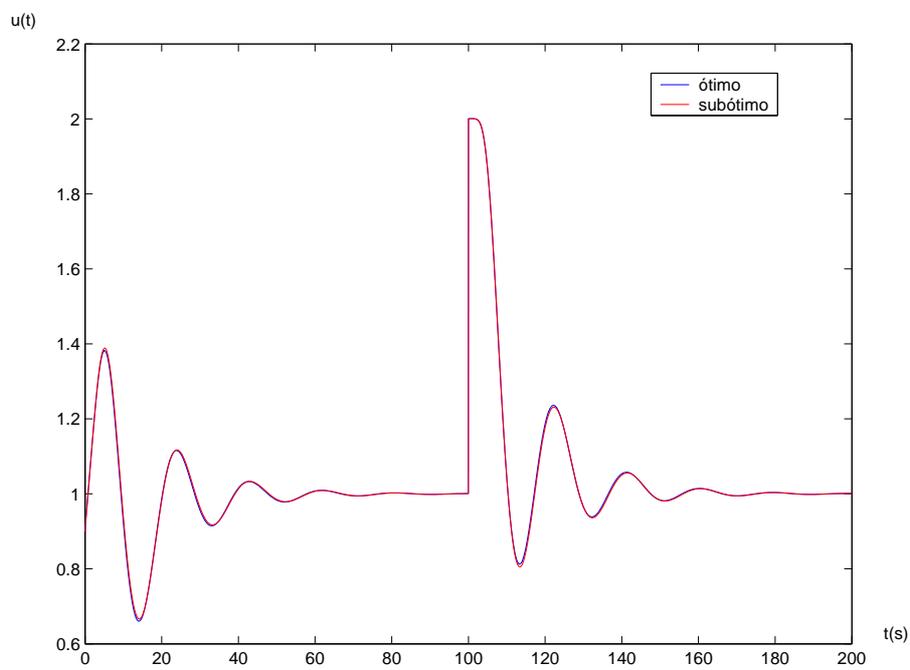


Figura 5.26: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.9.

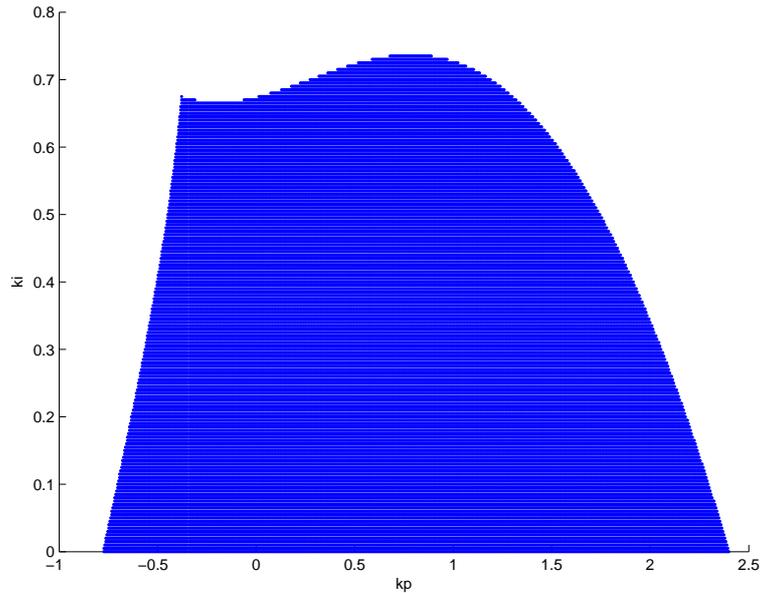


Figura 5.27: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.10.

A região de estabilidade do sistema está representada na figura 5.27. Após encontrar a região de estabilidade, o próximo passo é achar os valores de k_p e k_i que minimizam a função custo, levando-se assim aos controladores PI ótimo e sub-ótimo. Usando-se $\gamma = 1$ e $\beta = 10$, obtém-se o seguinte controlador PI sub-ótimo:

$$K_{sub}(s) = 1,254 + \frac{0,36}{s}, \quad (5.81)$$

e o seguinte controlador ótimo:

$$K_o(s) = 1,2503 + \frac{0,3620}{s}. \quad (5.82)$$

Nas figuras 5.28 e 5.29 estão mostradas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se os controladores ótimo e sub-ótimo, obtidas através de simulação, com o tempo de 150 segundos sendo a perturbação aplicada em 75 segundos.

Utilizando-se a tabela 5.9, faz-se a comparação entre os controladores apresentados. As simulações dos sistemas compensados utilizando os dois métodos ficaram aproximadamente idênticas, uma vez que os ganhos dos controladores ficaram bem próximos. Neste exemplo, a resposta ao degrau foi muito oscilatória com um regime transitório muito longo, o que pode ser verificado com a ajuda do tempo de aco-

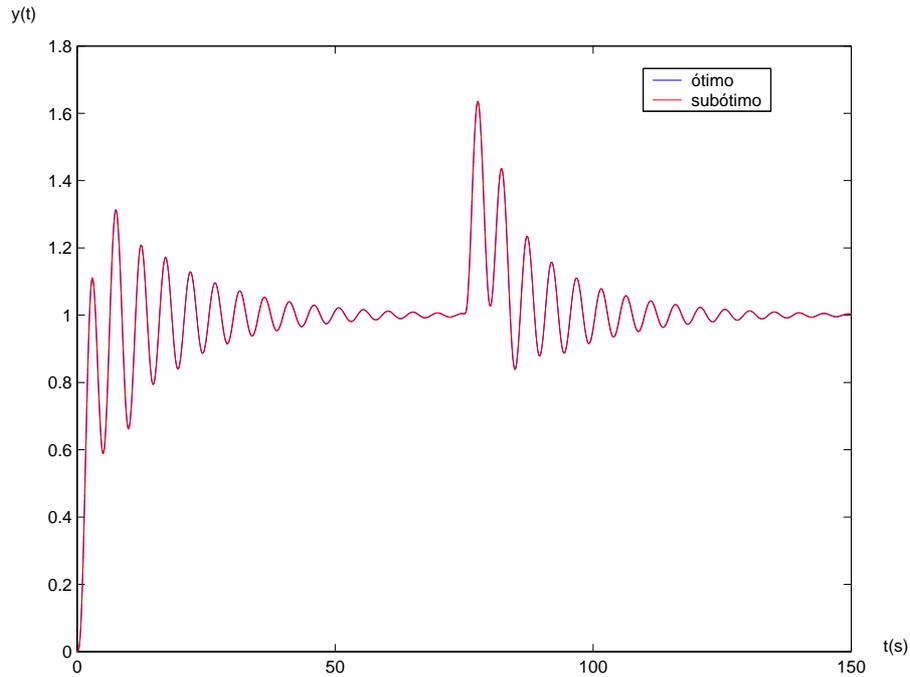


Figura 5.28: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.10.

modação, que foi muito longo, em contrapartida, o valor máximo do sinal de controle foi baixo em relação a outros exemplos. No que diz respeito à rejeição de perturbação, vê-se que o sistema compensado teve um desempenho ruim, demorando a eliminar a perturbação.

□

Exemplo 5.11 *Sistema instável, fase mínima e grau relativo igual a 2.*

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Basilio, 1989):

$$G(s) = \frac{s^2 + 8,5s + 17,5}{s^4 - 15s^2 + 10s + 24} \quad (5.83)$$

Neste exemplo, não há região de estabilidade para o controlador PI, ou seja, não existe nenhum par (k_p, k_i) que torne o sistema realimentado estável. Por isso não há como utilizar um controlador PI para controlar este sistema.

□

Exemplo 5.12 *Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 2.*

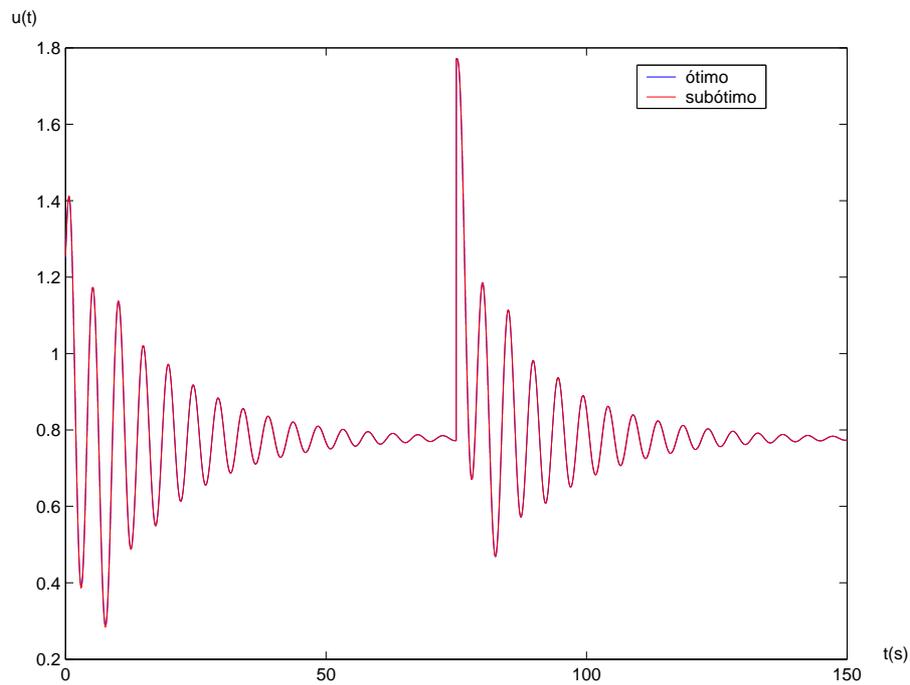


Figura 5.29: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PI ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.10.

Tabela 5.9: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.10

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	2,4019	2,4036
t_s	50,9914	51,0378
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	7,5100	7,5100
PO(%)	31,2236	31,3047
u_{max}	1,7722	1,7721
t_{spert}	46,3108	48,2015
E(%)	63,5203	63,5301

Considere uma planta com a seguinte função de transferência (Basilio, 1989):

$$G(s) = \frac{s^3 - 7,5s^2 - 8,5s + 105}{s^5 - 7,5s^4 + 13s^3 + 10,5s^2 - 23s - 12} \quad (5.84)$$

Novamente, não há região de estabilidade para este exemplo.

□

5.4.2 Exemplos de controladores PID

Exemplo 5.13 Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 2.

Considere novamente a planta do exemplo 5.1, cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{s^3 + 6s^2 - 2s + 1}{s^5 + 3s^4 + 29s^3 + 15s^2 - 3s + 60} \quad (5.85)$$

Para projetar um controlador PID, o primeiro passo, segundo o algoritmo 3.4 é traçar a região de estabilidade do sistema realimentado, conforme mostrada na figura 5.30. Fazendo $\gamma = 0,8$ e $\beta = 1$, obtém-se o seguinte controlador PID sub-ótimo:

$$K_{PI_s}(s) = 4,5 + \frac{17,46}{s}, \quad K_{D_s}(s) = 3,331s. \quad (5.86)$$

Utilizando-se o algoritmo genético obtém-se seguinte controlador:

$$K_{PI_o}(s) = 3,0205 + \frac{15,4810}{s}, \quad K_{D_o}(s) = 0,3345s. \quad (5.87)$$

Para que se possa analisar melhor o desempenho do sistema compensado, nas figuras 5.31 e 5.32 estão representadas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se o controlador PID ótimo e sub-ótimo. A simulação foi feita com o tempo de 100 segundos com a perturbação aplicada em 50 segundos. Tem-se, ainda, a tabela 5.10, para comparação dos controladores obtidos.

Analisando-se a tabela 5.10 e as figuras 5.31 e 5.32, pode-se observar que o regime transitório teve forte influência da não-minimalidade da fase de $G(s)$. Os tempos de subida, e de amortecimento e o percentual de ultrapassagem foram um pouco melhores para o sistema compensado com o PID ótimo. Já o tempo de pico das duas simulações ficaram próximos. Quanto ao sinal de controle, o valor máximo foi um pouco menor no controlador ótimo. Note que o valor máximo do sinal de

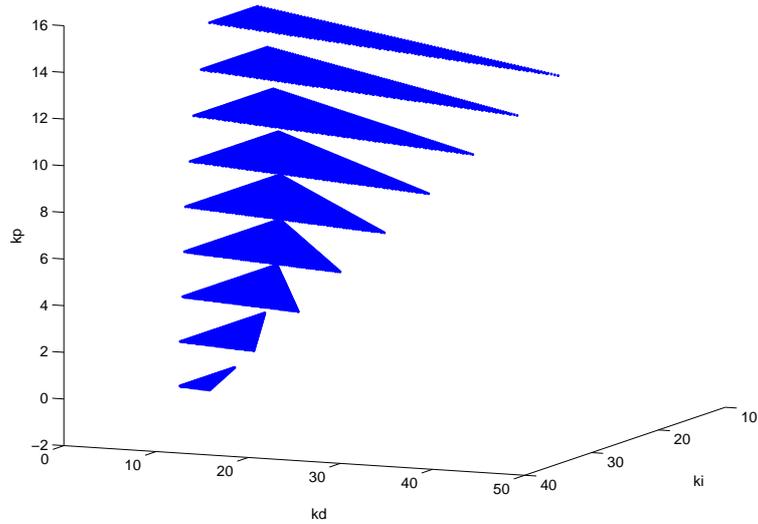


Figura 5.30: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.13.

Tabela 5.10: Índices de desempenho relativo aos sistemas realimentados do exemplo 5.13

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	1,0843	0,7884
t_s	32,0434	25,5582
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	10,8000	10,1400
PO(%)	45,9876	37,1725
u_{max}	87,8896	78,2768
t_{spert}	7,3921	6,9114
E(%)	6,2310	10,2406

controle é cerca de 1,5 vezes o seu valor de regime permanente. Quanto à rejeição de perturbação, o tempo para extinguir o seu efeito foi praticamente o mesmo para os dois sistemas e o erro máximo devido à perturbação foi menor com o controlador sub-ótimo.

□

Exemplo 5.14 Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 2.

Considere novamente a planta do exemplo 5.2, cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{s^4 + 4s^3 + 23s^2 + 46s - 12}{s^5 + 2s^4 + 23s^3 + 44s^2 + 97s + 98} \quad (5.88)$$

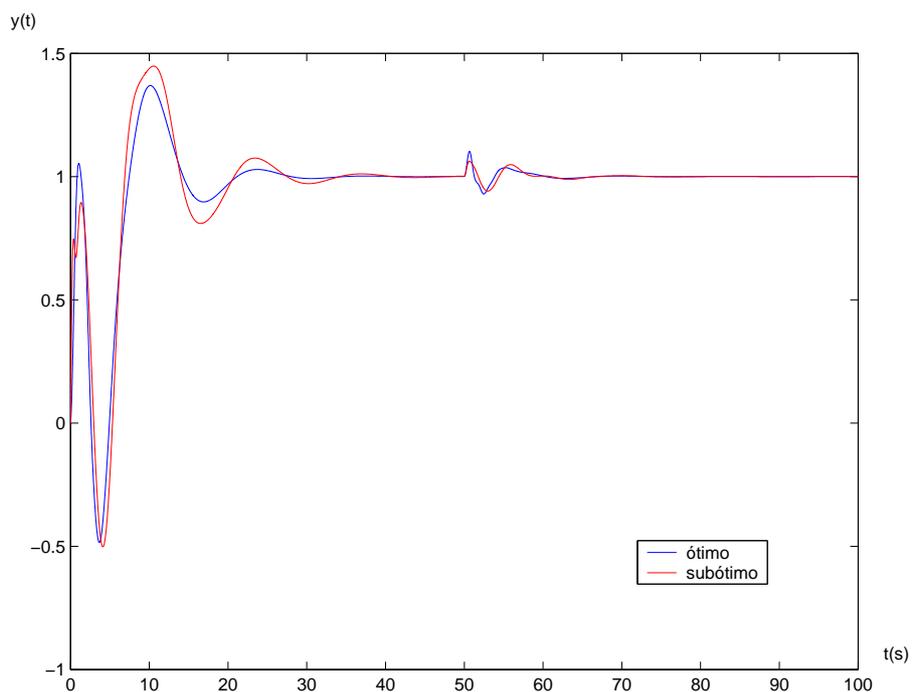


Figura 5.31: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.13.

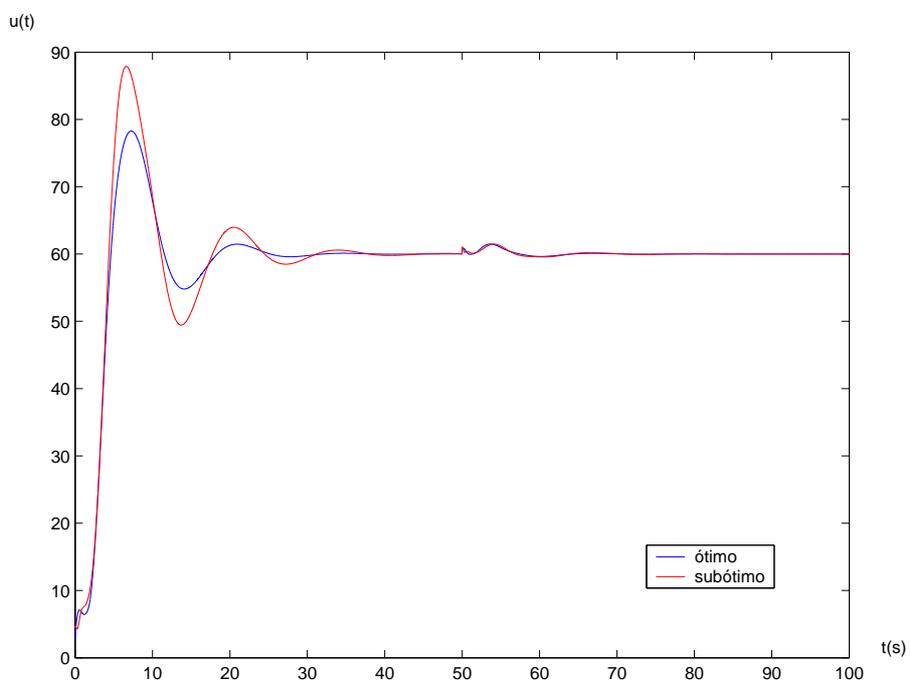


Figura 5.32: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.13.

O primeiro passo para o projeto do controlador PID é encontrar a região de estabilidade do sistema em malha fechada. Neste exemplo tal região não existe, pois não há nenhum ganho do controlador PID, ou seja, (k_p, k_i, k_d) , em que o sistema compensado seja estável. Portanto não há como projetar um controlador PID para este sistema.

□

Exemplo 5.15 Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 2.

Considere agora a planta do exemplo 5.3, que possui a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + s + 2}{s^5 + 8s^4 + 32s^3 + 46s^2 + 46s + 17} \quad (5.89)$$

Primeiramente, obtém-se a região de estabilidade do sistema realimentado, representada na figura 5.33. Fazendo-se $\gamma = 0,8$ e $\beta = 2$ obtém-se o seguinte controlador PID sub-ótimo:

$$K_{PI_s}(s) = 1,6877 + \frac{2,1996}{s}, \quad K_{D_s}(s) = 2,2012s. \quad (5.90)$$

Utilizando o algoritmo genético, tem-se o seguinte controlador:

$$K_{PI_o}(s) = 1,5642 + \frac{2,4249}{s}, \quad K_{D_o}(s) = 1,8878s. \quad (5.91)$$

Nas figuras 5.34 e 5.35 estão as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se os controladores ótimo e sub-ótimo. A simulação foi feita com o tempo de 40 segundos, sendo a perturbação aplicada em 20 segundos.

Utilizando-se a tabela 5.11, pode-se fazer a comparação dos métodos apresentados. Nesta tabela estão os índices de desempenho medidos. Com relação à resposta ao degrau, o tempo de amortecimento do controlador ótimo foi um pouco menor em relação ao sub-ótimo. Contudo, para o sistema controlado pelo PID sub-ótimo, não se verificou ultrapassagem. Quanto ao sinal de controle máximo, os dois controladores ficaram praticamente iguais, enquanto que o sistema compensado com o

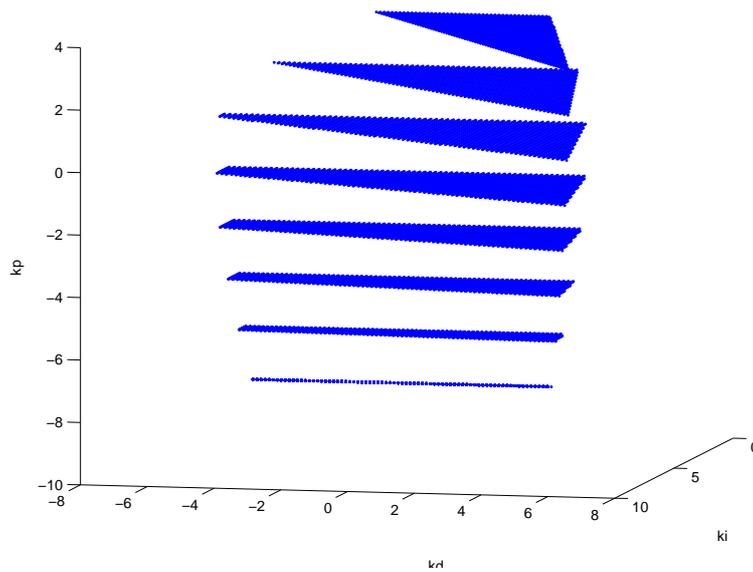


Figura 5.33: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.15.

Tabela 5.11: Índices de desempenho relativos aos sistemas realimentados do exemplo 5.15

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	4,5445	4,6856
t_s	7,9485	6,4027
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	0,0000	5,4400
PO(%)	0,0000	4,8159
u_{max}	9,7821	9,7471
t_{spert}	8,2761	5,9297
E(%)	20,0545	19,6717

PID ótimo eliminou a perturbação mais rapidamente que o sistema com o PID sub-ótimo. Contudo, o erro máximo devido à perturbação foi aproximadamente igual nos dois sistemas.

□

Exemplo 5.16 *Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 1.*

Considere novamente a planta do exemplo 5.4 cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + s + 8}{s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 7s + 14} \quad (5.92)$$

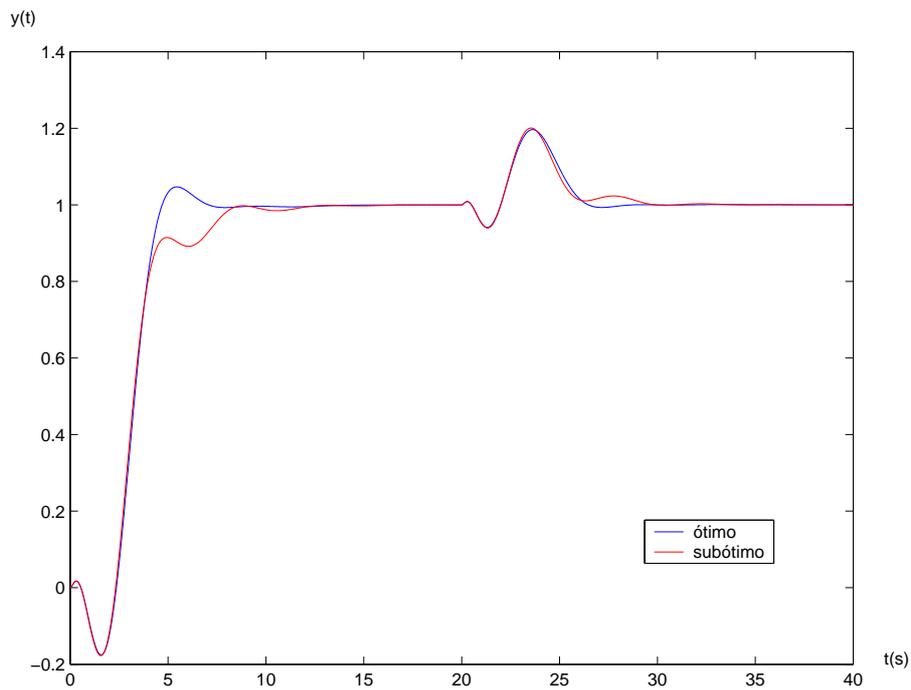


Figura 5.34: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.15.

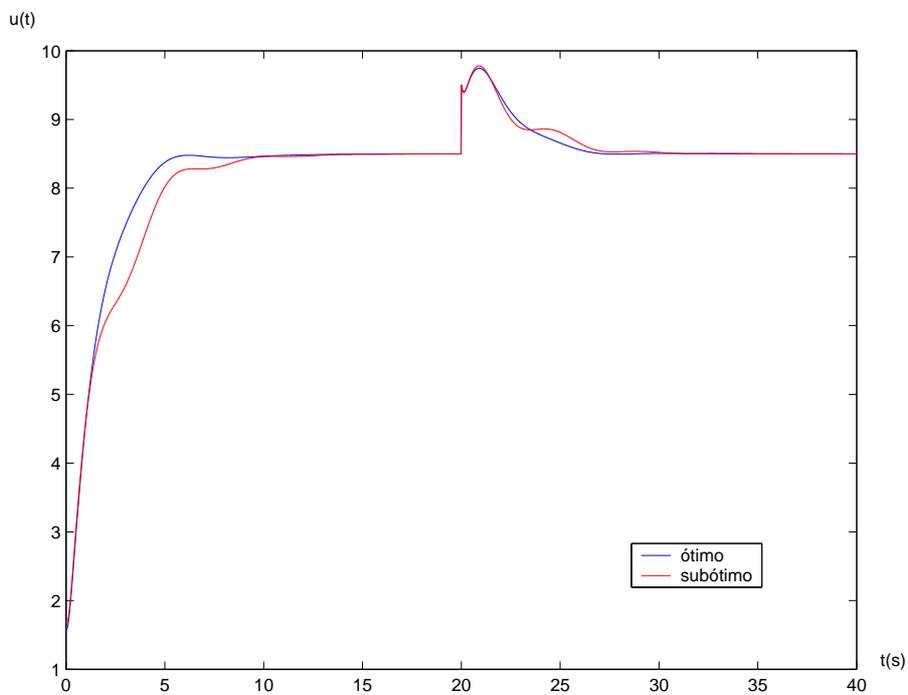


Figura 5.35: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.15.

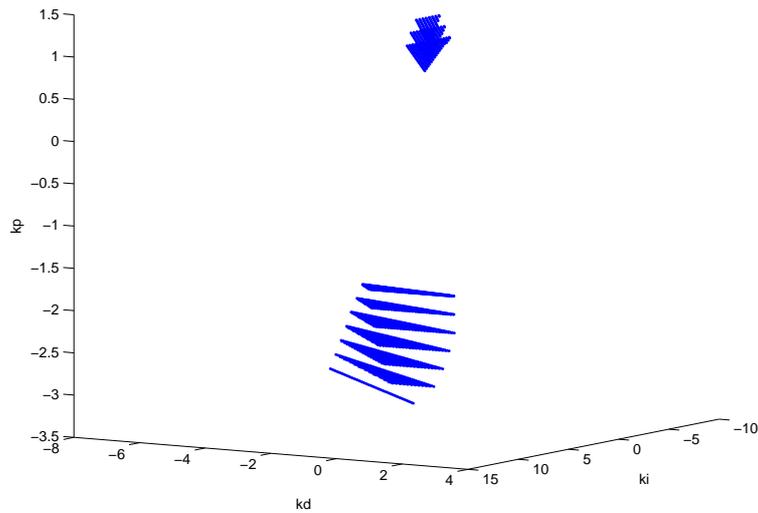


Figura 5.36: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.16.

Primeiramente encontra-se a região de estabilidade do sistema compensado, representada na 5.36. Fazendo $\gamma = 0,7$ e $\beta = 1$ obtém-se o seguinte controlador PID sub-ótimo:

$$K_{PI_s}(s) = 1,0886 + \frac{6,456}{s}, \quad K_{D_s}(s) = -0,0263s. \quad (5.93)$$

Utilizando, agora, o método ótimo, tem-se o seguinte controlador:

$$K_{PI_o}(s) = 1,0344 + \frac{6,2566}{s}, \quad K_{D_o}(s) = -0,0242. \quad (5.94)$$

Para a análise do desempenho dos controladores, têm-se as figuras 5.37 e 5.38, representativas das curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, para os sistemas com os controladores PID ótimo e sub-ótimo. A simulação foi feita com o tempo de 200 segundos a perturbação aplicada em 100 segundos. Além disso, para ajudar na comparação do desempenho, tem-se a tabela 5.12, onde estão listados os índices de desempenho medidos. Neste exemplo, a resposta ao degrau do sistema realimentado foi muito ruim, com a saída oscilando muito, sendo o sistema com o controlador ótimo levado a um tempo de amortecimento menor que aquele com o controlador sub-ótimo. Por outro lado, o sistema com o controlador sub-ótimo propiciou um percentual de ultrapassagem menor que o controlador ótimo. Quanto ao sinal de controle, os dois controladores obtiveram valores máximos

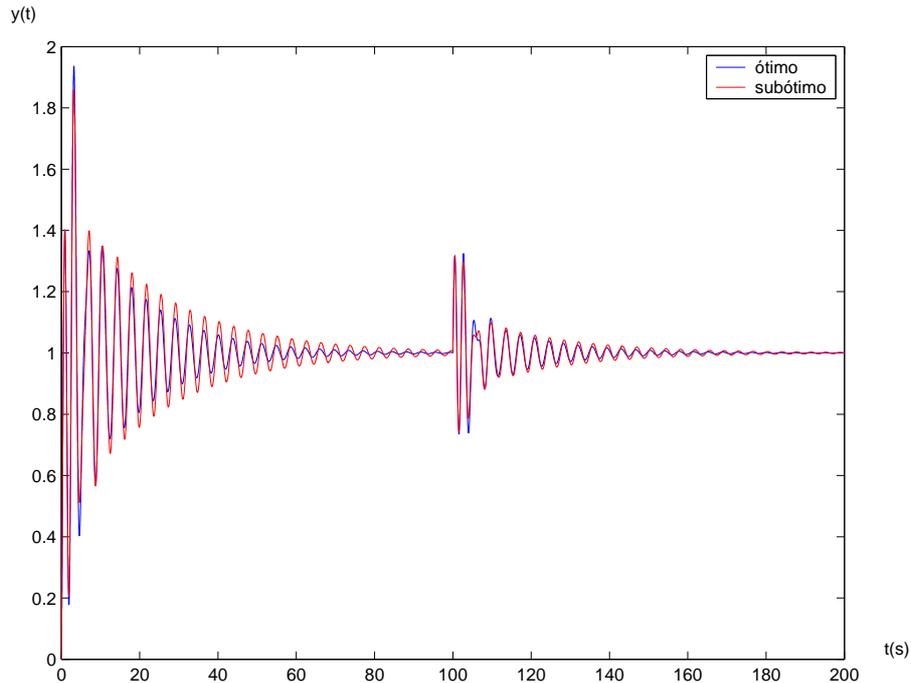


Figura 5.37: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.16.

quase idênticos. No que se refere à rejeição de perturbação, nota-se que o controlador ótimo eliminou mais rapidamente a perturbação que o controlador sub-ótimo, embora o erro máximo devido à perturbação tenha sido bastante próximo nas duas simulações.

□

Exemplo 5.17 *Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 3.*

Considere novamente a planta do exemplo 5.5, cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{s - 100}{s^4 + 5s^3 + 10s^2 - s + 1} \quad (5.95)$$

O primeiro passo é obter a região de estabilidade do sistema compensado, sendo representada na figura 3.5. Fazendo $\gamma = 0,7$ e $\beta = 1$ obtém-se o seguinte controlador PID sub-ótimo:

$$K_{PI_s}(s) = -0,1671 - \frac{0,2531}{s}, \quad K_{D_s}(s) = -0,3621s. \quad (5.96)$$

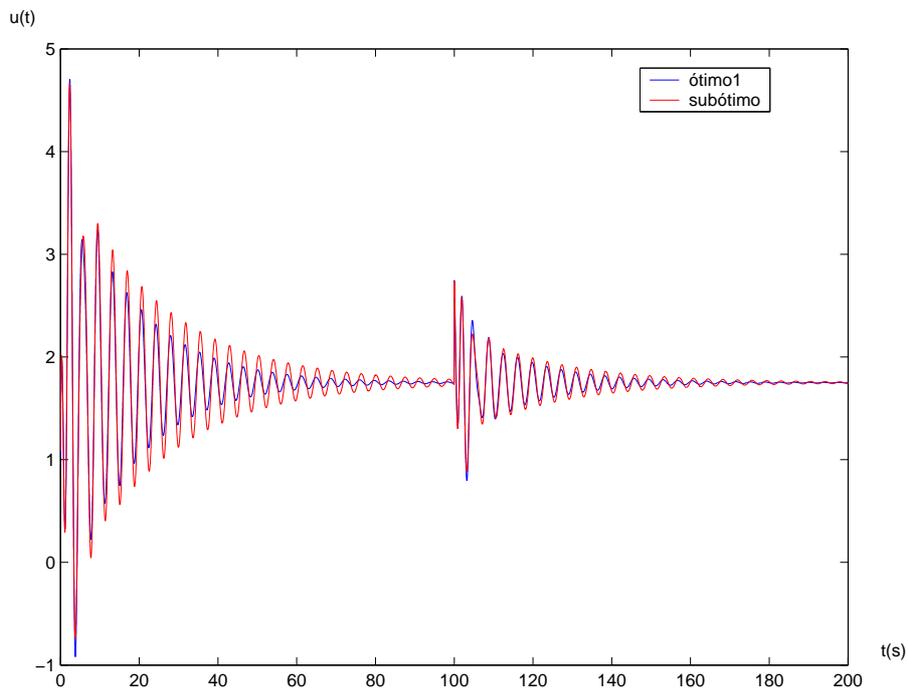


Figura 5.38: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimos (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.16.

Tabela 5.12: Índices de desempenho relativos aos sistemas realimentados do exemplo 5.16

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	0,5045	0,5156
t_s	77,6925	58,8437
y_{inf}	1,0001	1,0000
t_p	3,1700	3,2000
PO(%)	85,8616	92,7368
u_{max}	4,6656	4,6997
t_{spert}	45,3271	35,8525
E(%)	31,5422	32,2916

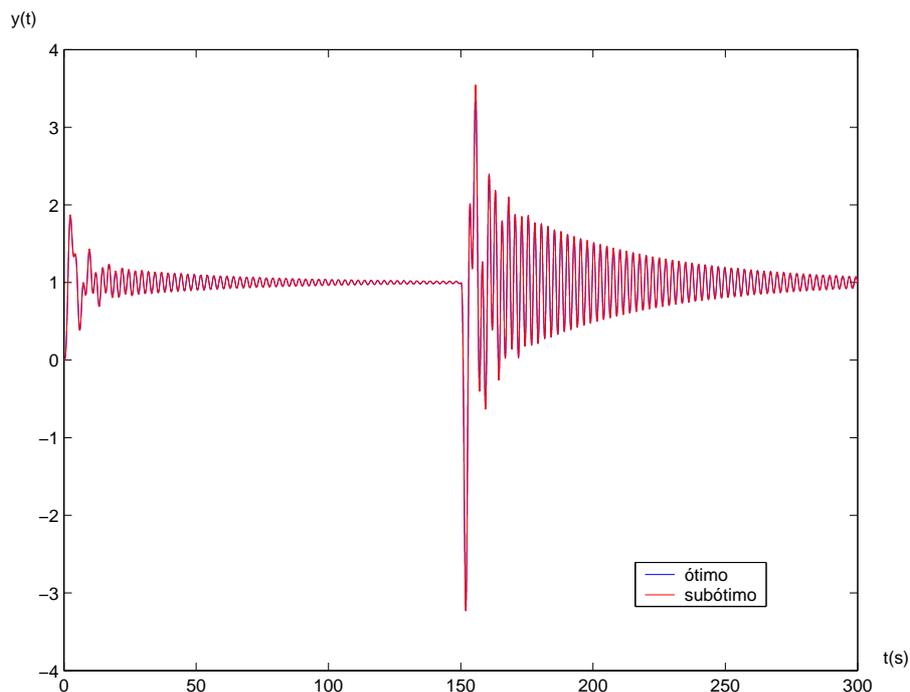


Figura 5.39: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.17.

Utilizando o algoritmo genético, tem-se o seguinte controlador:

$$K_{PI_o}(s) = -0,1629 - \frac{0,2740}{s}, \quad K_{D_o}(s) = -0,3752s. \quad (5.97)$$

Observando-se as figuras 5.39 e 5.40, onde estão, respectivamente, as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, do sistema compensado utilizando-se os controladores ótimo e sub-ótimo, obtidas a partir de simulações feitas com o tempo de 300 segundos a perturbação aplicada em 150 segundos, pode-se fazer a análise de desempenho do sistema. Para isso, tem-se, também, a tabela 5.13, onde estão os índices de desempenho do sistema. Pode-se observar que neste exemplo, a saída do sistema foi muito oscilatória e com o tempo de amortecimento muito alto nas duas simulações. Quanto ao valor máximo do sinal de controle, os sistemas compensados com os dois controladores obtiveram altos índices. Na rejeição de perturbação, os controladores obtiveram um desempenho também ruim, demorando-se muito para eliminar a perturbação.

□

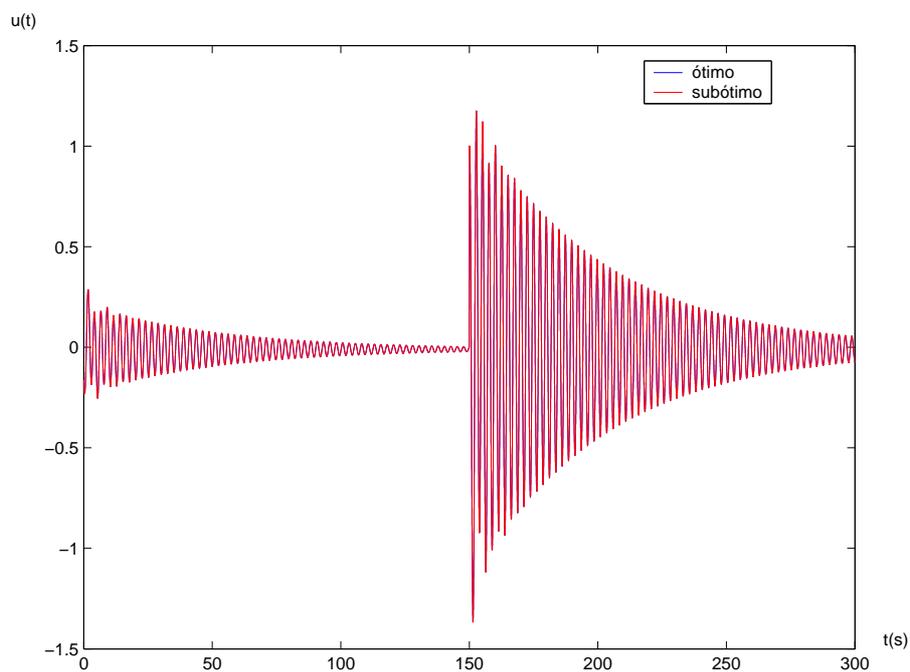


Figura 5.40: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.17.

Tabela 5.13: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.17

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	1,5230	1,5184
t_s	91,7086	90,8958
y_{inf}	1,0000	0,9999
t_p	2,4400	2,4500
PO(%)	84,8931	86,8294
u_{max}	1,1597	1,1741
t_{spert}	149,4696	148,0525
E(%)	246,9451	254,3923

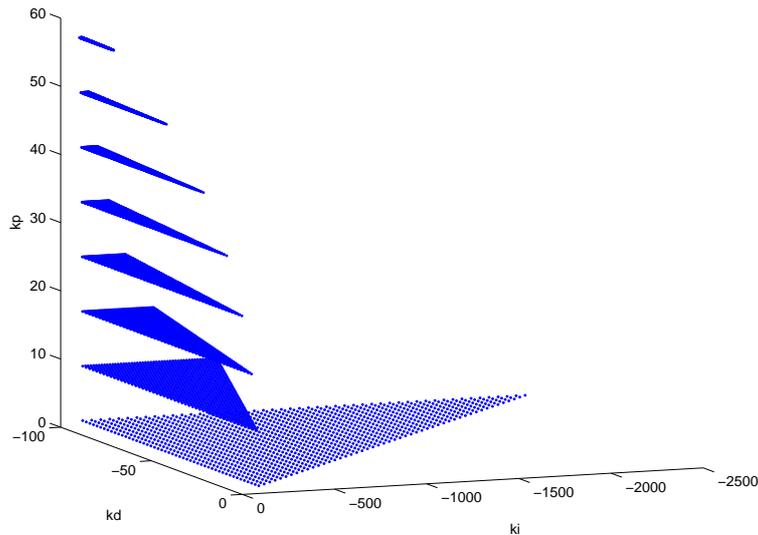


Figura 5.41: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.18.

Exemplo 5.18 *Sistema estável, fase não-mínima e grau relativo igual a 1.*

Considere novamente a planta do exemplo 5.6, cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{s - 1}{s^2 + 2s + 100} \quad (5.98)$$

O primeiro passo é obter a região de estabilidade do sistema compensado.

Primeiro, obtém-se a região de estabilidade do sistema compensado, que está representada na figura 5.57. Fazendo $\gamma = 1$ e $\beta = 1$ obtém-se o seguinte controlador PI sub-ótimo:

$$K_{PI_s}(s) = 1,8 - \frac{66,033}{s}, \quad K_{D_s}(s) = -0,66s. \quad (5.99)$$

Utilizando o algoritmo genético, obtém-se o seguinte controlador:

$$K_{PI_o}(s) = 1,9541 - \frac{69,7781}{s}, \quad K_{D_o}(s) = -0,7101s. \quad (5.100)$$

Para que se possa analisar melhor, nas figuras 5.42 e 5.43, respectivamente, estão as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle utilizando-se os controladores ótimo e sub-ótimo. A simulação foi realizada com o tempo de 20 segundos e perturbação aplicada em 10 segundos. Tem-se a tabela 5.13, para a comparação dos controladores. Pode-se observar que neste exemplo, os índices de desempenho da simulação do sistema compensado com o controlador sub-ótimo, obtiveram resultados

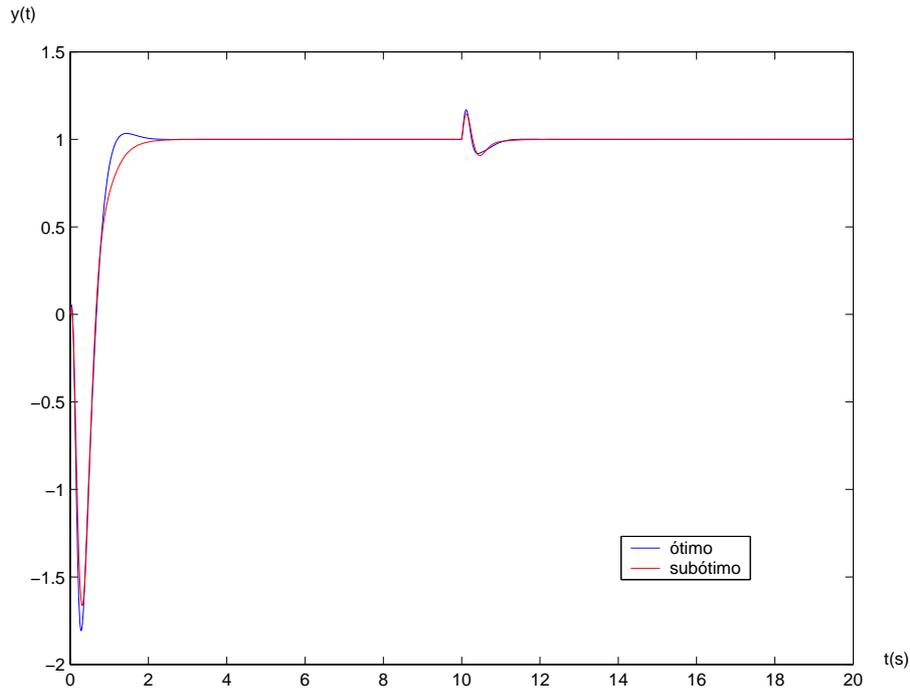


Figura 5.42: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.18.

ligeiramente superiores do que os com o ótimo, exceto o tempo de subida e o tempo de amortecimento. Na rejeição de perturbação, o controlador sub-ótimo, também, foi um ligeiramente melhor que o ótimo.

□

Exemplo 5.19 *Sistema estável e grau relativo igual a 2.*

Considere novamente a planta do exemplo 5.7, cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \quad (5.101)$$

A figura 5.44 representa a região de estabilidade do sistema. Note que esta região cresce infinitamente, tendo sido sua representação truncada em k_p , k_i e k_d igual 100. Portanto, fazendo $\gamma = 1$ e $\beta = 1$ obtém-se o seguinte controlador PID sub-ótimo:

$$K_{PI_s}(s) = 94,801 + \frac{50}{s}, \quad K_{D_s}(s) = 46,2s. \quad (5.102)$$

Utilizando o algoritmo genético, tem-se o seguinte controlador:

$$K_{PI_o}(s) = 93,0677 + \frac{19,9723}{s}, \quad K_{D_o}(s) = 6,2690s. \quad (5.103)$$

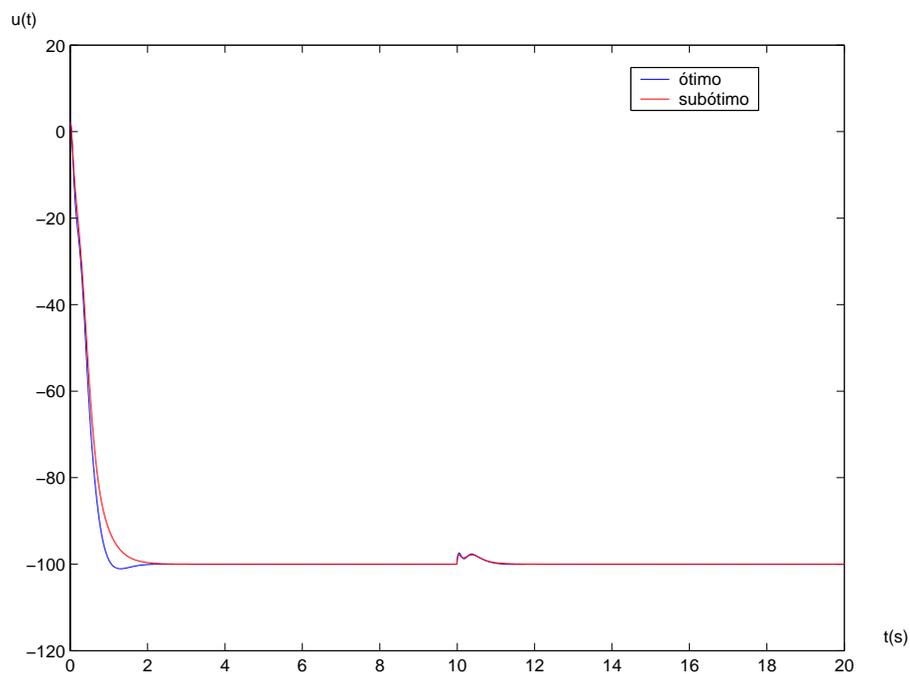


Figura 5.43: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.18.

Tabela 5.14: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.18

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	1,3841	1,2055
t_s	1,8996	1,7206
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	0,0000	1,4400
PO(%)	0,0000	3,3779
u_{max}	1,8965	2,2786
t_{spert}	0,8626	0,9479
E(%)	14,5424	16,8721

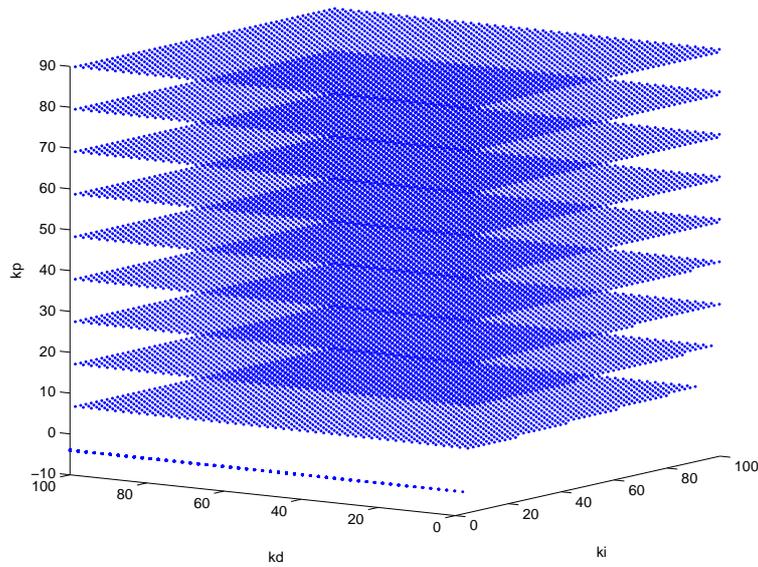


Figura 5.44: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.19.

Tabela 5.15: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.19

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	1,0793	0,2578
t_s	5,2326	0,9288
y_{inf}	1,0000	0,9997
t_p	2,0700	0,3700
PO(%)	11,8328	11,7552
u_{max}	94,8010	93,0677
t_{spert}	0,0000	0,0000
E(%)	0,7622	0,9213

Nas figuras 5.45 e 5.46 estão representadas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se os controladores ótimo e sub-ótimo. A simulação foi realizada com o tempo de 20 segundos a perturbação aplicada em 10 segundos. Na tabela 5.15 tem-se os índices de desempenho para os sistemas realimentados, de onde se observa que o tempo de amortecimento e de pico do controlador ótimo, teve melhor desempenho que os do controlador sub-ótimo. Quanto à rejeição de perturbação, os sistemas à rejeitaram quase que instantaneamente. Note que o sinal máximo de controle foi muito alto. Isto se deve ao ganhos terem sido altos, porque o ponto ótimo encontrado do foi próximo ao limite da região de estabilidade.

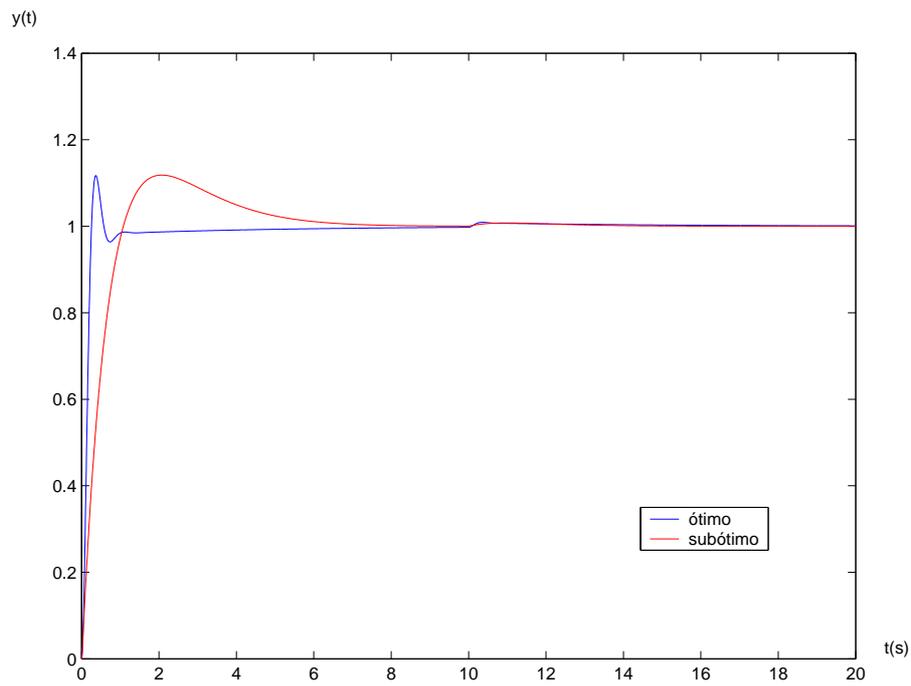


Figura 5.45: Resposta ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.19.

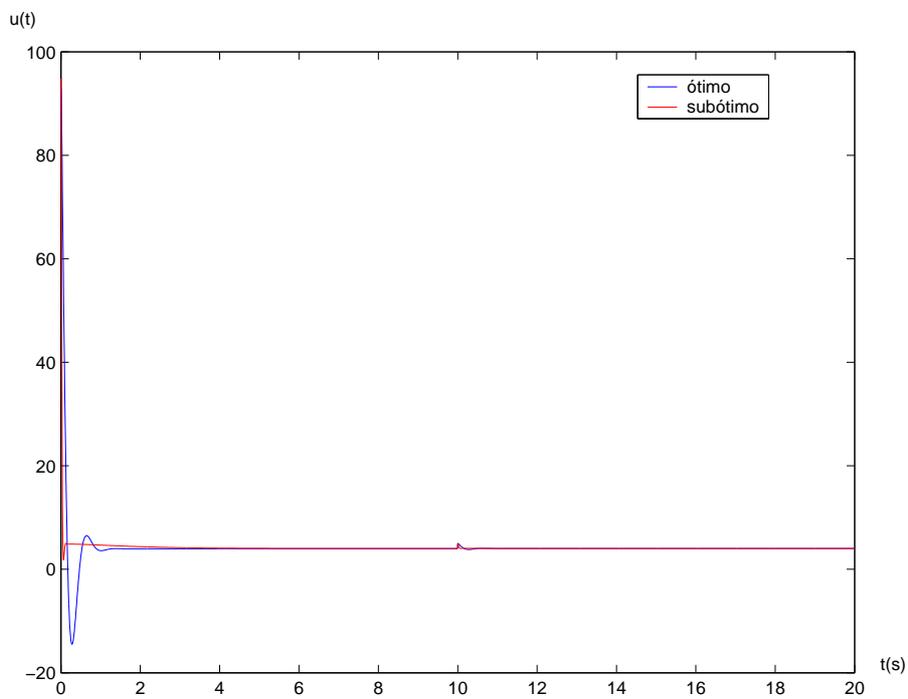


Figura 5.46: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.19.

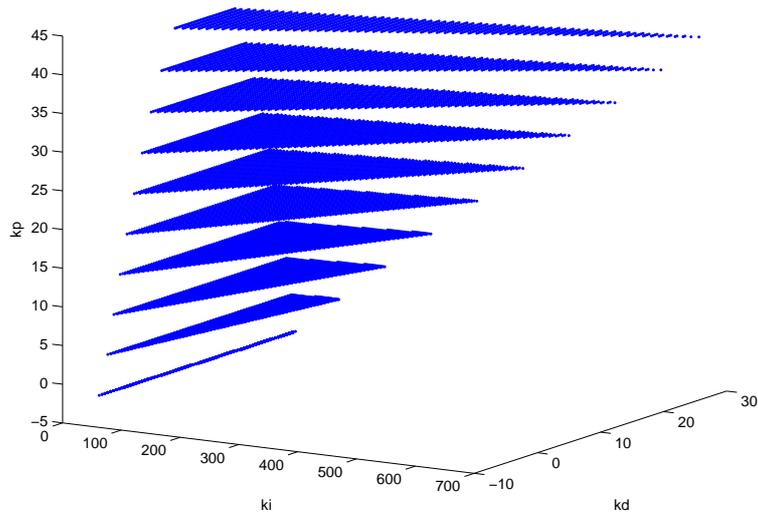


Figura 5.47: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.20.

□

Exemplo 5.20 Sistema estável, fase mínima e grau relativo igual a 4.

Considere novamente a planta do exemplo 5.8, cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{50s + 750}{s^5 + 30s^4 + 335s^3 + 1690s^2 + 3624s + 2240} \quad (5.104)$$

O primeiro passo é obter a região de estabilidade do sistema compensado. A figura 5.47 representa a região de estabilidade do sistema. Aplicando-se o método proposto, e fazendo-se $\gamma = 4$ e $\beta = 22$ obtém-se o seguinte controlador PI sub-ótimo:

$$K_{PI_s}(s) = 12,549 + \frac{21,08}{s}, \quad K_{D_s}(s) = 8,86s, \quad (5.105)$$

e utilizando o método ótimo, tem-se o seguinte controlador:

$$K_{PI_o}(s) = 11,5018 + \frac{18,9630}{s} \quad K_{D_o}(s) = 6,5178s. \quad (5.106)$$

Nas figuras 5.48 e 5.49 estão as mostradas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se os controladores ótimo e sub-ótimo. A simulação foi realizada com o tempo de 40 segundos a perturbação aplicada em 20 segundos.

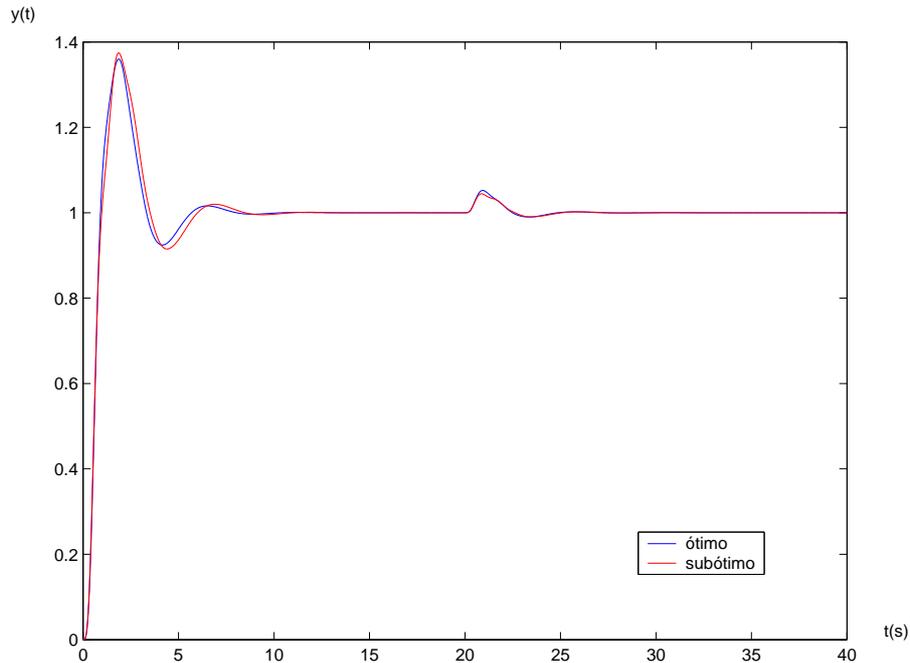


Figura 5.48: Resposta ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.20.

Utilizando-se a tabela 5.16, pode-se fazer a comparação dos controladores apresentados. Nesta tabela estão os índices de desempenho medidos. Os resultados das simulações dos dois controladores ficaram quase idênticas. Pode-se destacar que o tempo de amortecimento na simulação do controlador ótimo foi menor que o do sub-ótimo. Quanto ao máximo sinal de controle e a rejeição de perturbação, os dois sistemas foram semelhantes, podendo-se destacar que o erro devido à perturbação foi um pouco menor na simulação do controlador sub-ótimo.

□

Exemplo 5.21 Sistema estável e grau relativo igual a 8.

Considere novamente a planta do exemplo 5.9, cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^8} = \frac{1}{s^8 + 8s^7 + 28s^6 + 56s^5 + 70s^4 + 56s^3 + 28s^2 + 8s + 1} \quad (5.107)$$

Tem-se que a figura 5.44 representa a região de estabilidade do sistema. Fazendo-se $\gamma = 8$ e $\beta = 4$ obtém-se o seguinte controlador PID sub-ótimo:

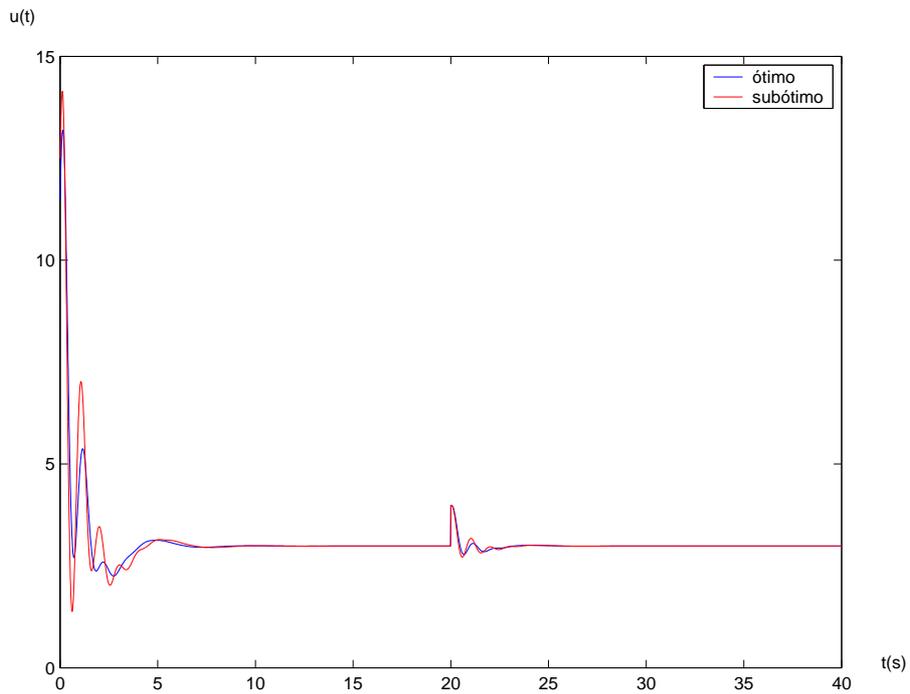


Figura 5.49: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimos (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.20.

Tabela 5.16: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.20

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	1,0111	0,9152
t_s	7,2097	5,2921
y_{inf}	1,0000	0,9997
t_p	1,8700	1,8700
PO(%)	37,3585	36,0235
u_{max}	14,1697	13,1966
t_{spert}	1,9484	1,9386
E(%)	4,3310	5,2231

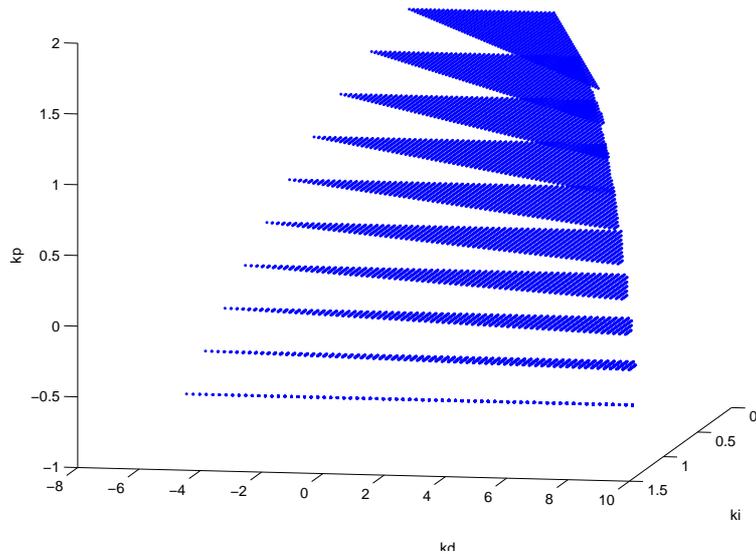


Figura 5.50: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.21.

$$K_{PI_s}(s) = 1,3073 + \frac{0,1885}{s}, \quad K_{D_s}(s) = 3,7439s, \quad (5.108)$$

utilizando o algoritmo genético, tem-se o controlador:

$$K_{PI_o}(s) = 1,2827 + \frac{0,1862}{s}, \quad K_{D_o}(s) = 3,5808s. \quad (5.109)$$

Nas figuras 5.51 e 5.52 estão as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, das simulações dos sistemas compensados, utilizando os controladores ótimo e sub-ótimo. A simulação foi realizada com o tempo de 250 segundos e perturbação aplicada em 125 segundos. Utilizando-se, também, a tabela 5.17, para a ajudar na comparação dos métodos apresentados, percebe-se que os resultados das simulações foram, novamente, semelhantes. Quanto à resposta ao degrau, tem-se que o tempo de acomodação foi um pouco menor no controlador ótimo, assim como o tempo de rejeição à perturbação. Os outros índices foram semelhantes.

□

Exemplo 5.22 Sistema estável, fase mínima e grau relativo igual a 4.

Considere novamente a planta do exemplo 5.10, cuja função de transferência

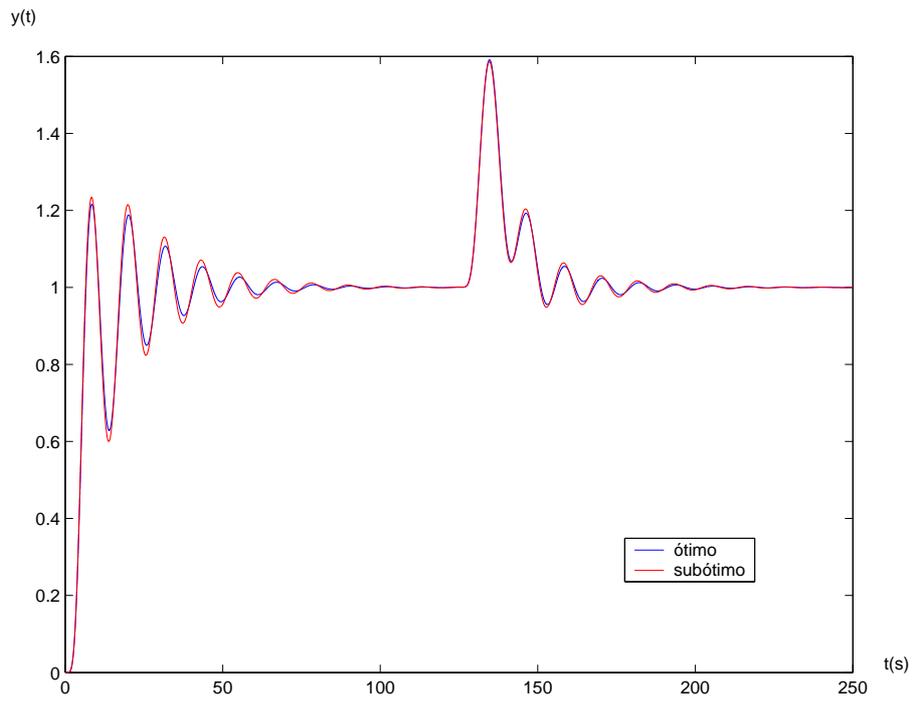


Figura 5.51: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.21.

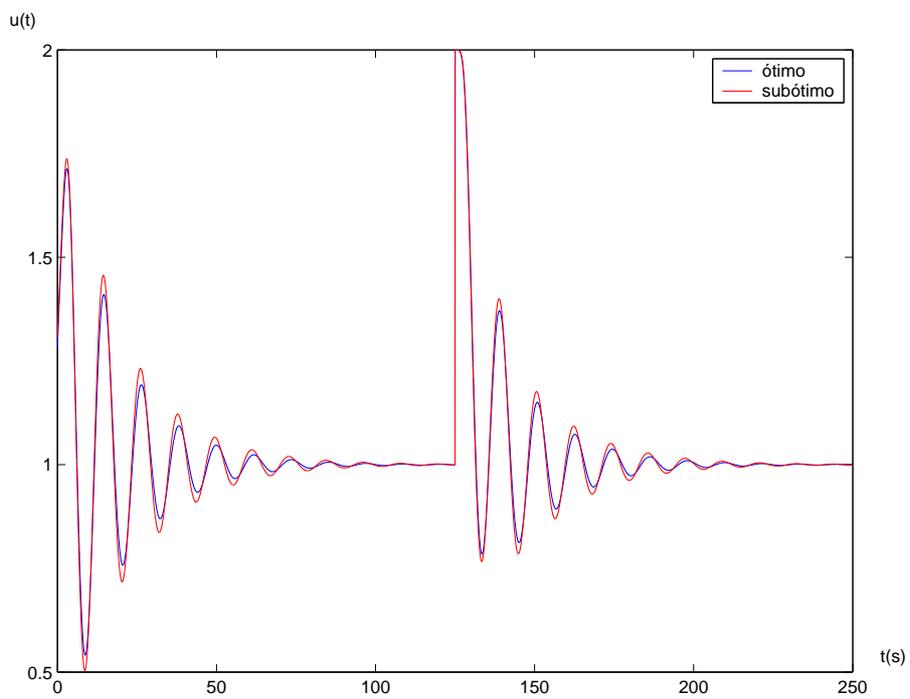


Figura 5.52: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.21.

Tabela 5.17: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.21

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	8,6898	8,7597
t_s	57,9498	52,7359
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	10,9500	11,0400
PO(%)	21,2462	20,9245
u_{max}	1,9987	1,9996
t_{spert}	52,0195	46,4619
E(%)	58,5090	59,1126

é dada por:

$$G(s) = \frac{28,5s^2 + 6,93s + 18,2}{s^6 + 17,47s^5 + 46,78s^4 + 67,52s^3 + 64,86s^2 + 43,3s + 14,16} \quad (5.110)$$

O primeiro passo é obter a região de estabilidade do sistema compensado, que está representado na figura 5.53. Fazendo-se $\gamma = 1$ e $\beta = 5$ obtém-se o seguinte controlador PID sub-ótimo:

$$K_{PI_s}(s) = 2,6101 + \frac{6,15}{s}, \quad K_{D_s}(s) = 5,542s. \quad (5.111)$$

Utilizando o algoritmo genético, tem-se o seguinte controlador:

$$K_{PI_o}(s) = 2,6431 + \frac{6,2112}{s}, \quad K_{D_o}(s) = 5,3640s. \quad (5.112)$$

Nas figuras 5.54 e 5.55 estão representadas as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se o controlador ótimo e o controlador sub-ótimo. A simulação foi feita com o tempo de 100 segundos a perturbação aplicada em 50 segundos.

Utilizando-se a tabela 5.18, percebe-se que os resultados das simulações dos dois controladores ficaram quase idênticos novamente. Pode-se destacar que o tempo de amortecimento da simulação do sistema realimentado utilizando o controlador ótimo foi menor que a do sub-ótimo. Tem-se, também, que o percentual de ultrapassagem obtido foi alto nas duas simulações.

□

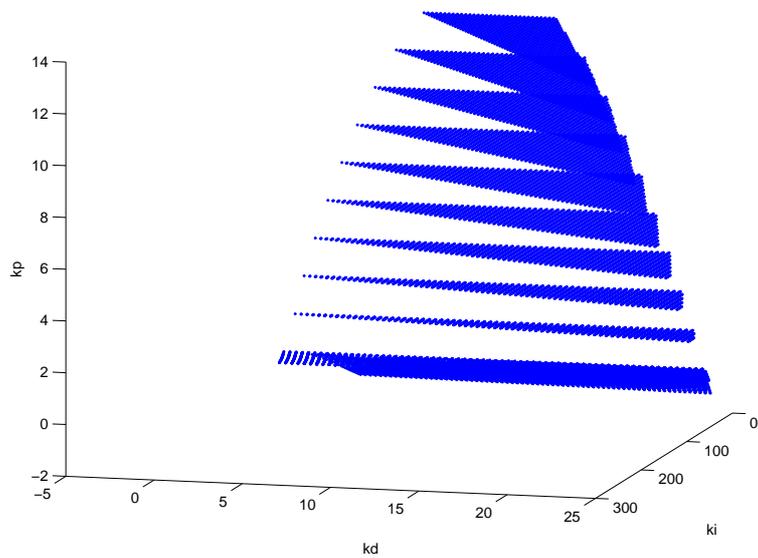


Figura 5.53: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.22.

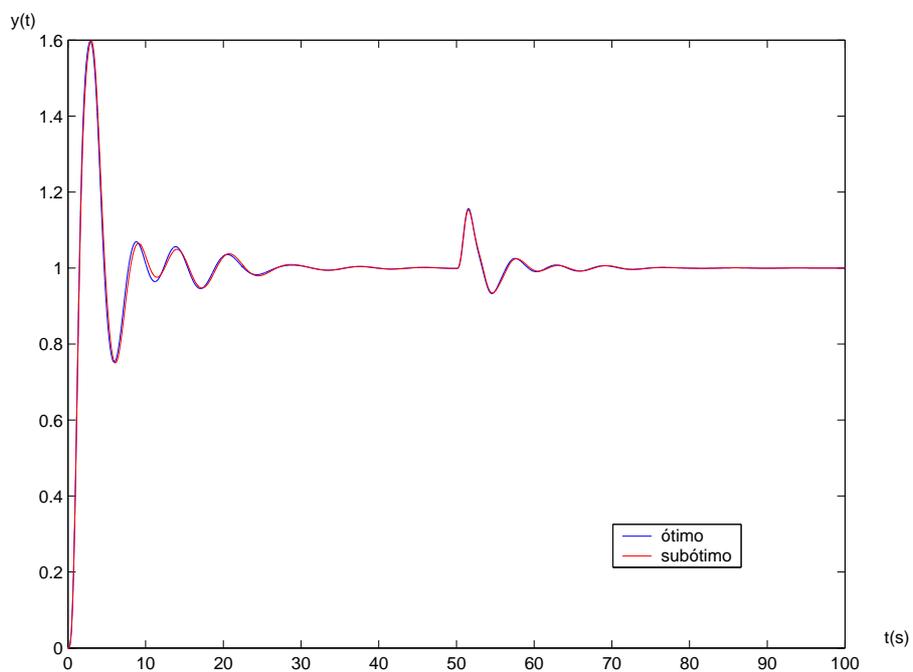


Figura 5.54: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.22.

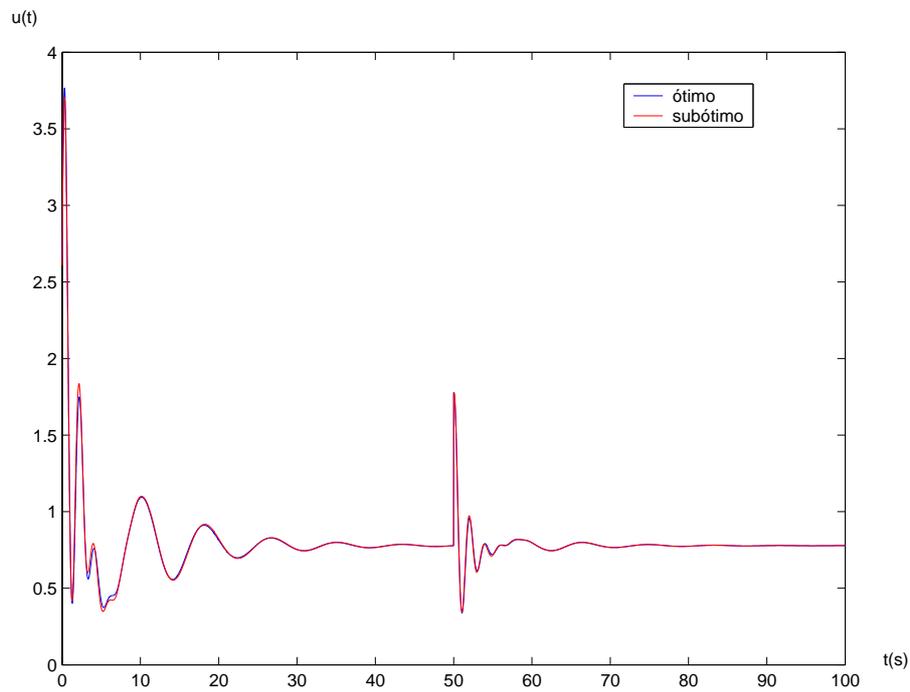


Figura 5.55: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.22.

Tabela 5.18: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.22

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	1,4946	1,4693
t_s	24,7745	21,7274
y_{inf}	1,0000	1,0000
t_p	3,0000	2,8900
PO(%)	59,8324	59,6583
u_{max}	3,7011	3,7664
t_{spert}	8,3241	8,1662
E(%)	15,3116	15,6360

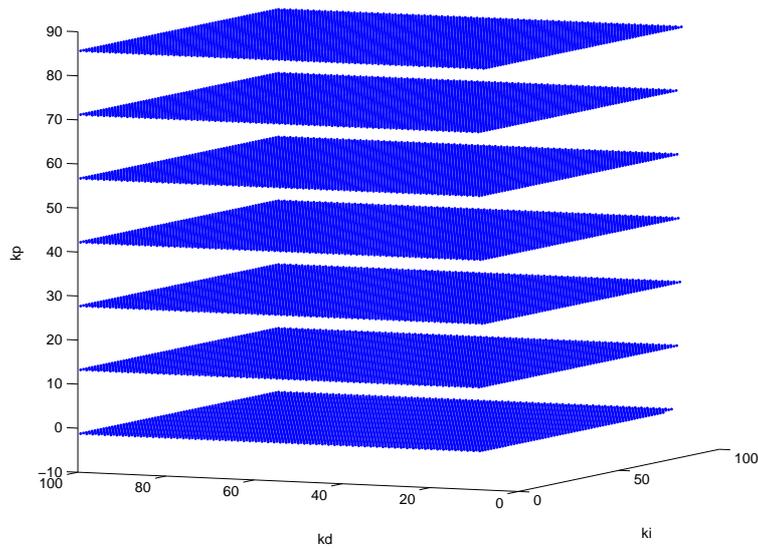


Figura 5.56: Região de estabilidade do sistema realimentado do exemplo 5.23.

Exemplo 5.23 *Sistema instável, fase mínima e grau relativo igual a 2.*

Considere novamente a planta do exemplo 5.11, cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{s^2 + 8,5s + 17,5}{s^4 - 15s^2 + 10s + 24} \quad (5.113)$$

O primeiro passo é obter a região de estabilidade do sistema compensado, que está mostrado na figura 5.56. Novamente, esta região foi truncada com os ganhos iguais a 100, pois também esta cresce infinitamente. Fazendo-se $\gamma = 1$ e $\beta = 1$ obtém-se o seguinte controlador PID sub-ótimo:

$$K_{PI_s}(s) = 94,932 + \frac{35}{s}, \quad K_{D_s}(s) = 16,588s. \quad (5.114)$$

Utilizando o algoritmo genético, tem-se o seguinte controlador:

$$K_{PI_o}(s) = 93,2429 + \frac{12,4255}{s}, \quad K_{D_o}(s) = 14,7632s. \quad (5.115)$$

Para a análise do desempenho dos controladores, têm-se as figuras 5.57 e 5.58 onde se encontram as curvas de resposta ao degrau e o sinal de controle, respectivamente, utilizando-se os controladores ótimo e sub-ótimo. A simulação foi feita com o tempo de 15 segundos a perturbação aplicada em 7,5 segundos.

Além disso, para ajudar na comparação entre os controladores, tem-se a tabela 5.19. Nesta tabela estão os índices de desempenho medidos. Tem-se que o tempo de

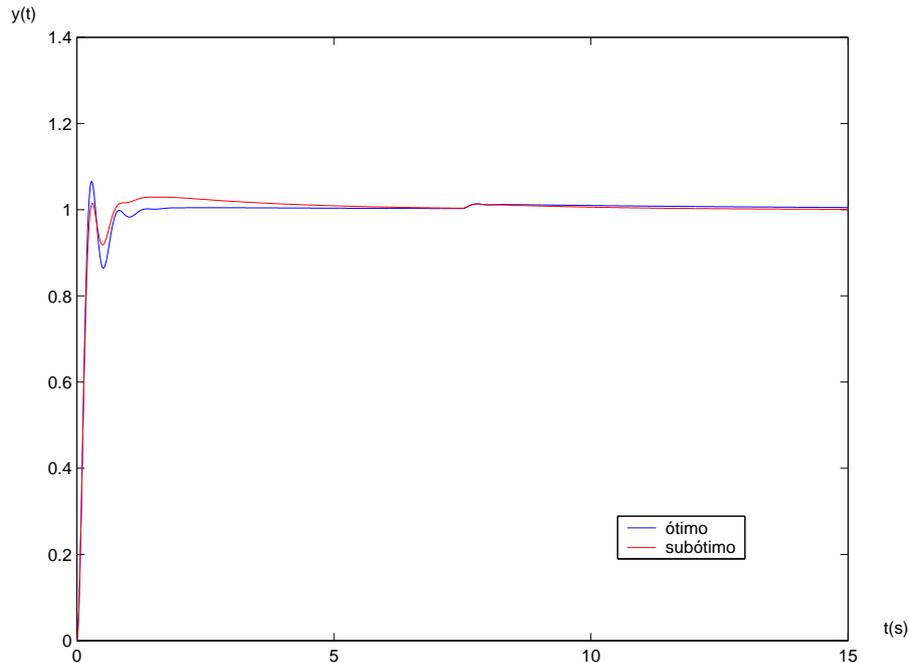


Figura 5.57: Respostas ao degrau para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.23.

pico e o tempo de amortecimento na simulação do controlador ótimo, foram menores que os da simulação do sub-ótimo. Por outro lado, o percentual de ultrapassagem do controlador sub-ótimo, foi menor que o do ótimo. Tem-se, também, neste sistema, que o sinal máximo de controle foi alto.

□

Exemplo 5.24 *Sistema instável, fase não-mínima e grau relativo igual a 2.*

Considere novamente a planta do exemplo 5.12, cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{s^3 - 7,5s^2 - 8,5s + 105}{s^5 - 7,5s^4 + 13s^3 + 10,5s^2 - 23s - 12} \quad (5.116)$$

Não há região de estabilidade para esta planta, utilizando-se um controlador PID.

□

Na tabela 5.20, será mostrado o tempo de simulação da otimização da função custo, utilizando o algoritmo genético, como dito anteriormente. Neste tabela, pode-se verificar que tais tempos, não foram elevados.

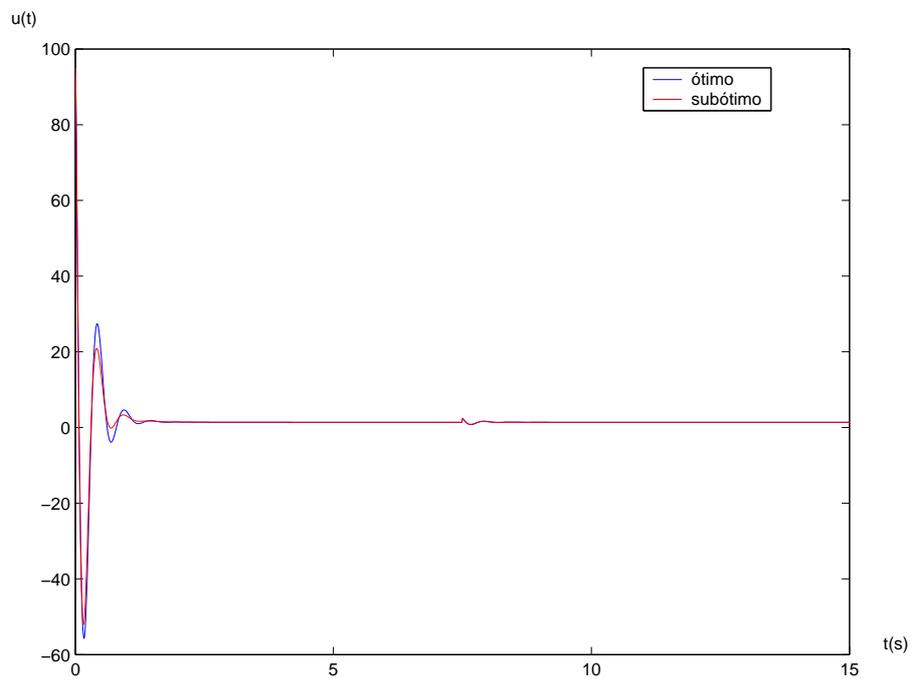


Figura 5.58: Sinais de controle para os sistemas com os controladores PID ótimo (linha azul) e sub-ótimo (linha vermelha) para o exemplo 5.23.

Tabela 5.19: Índices de desempenho relativos ao sistema realimentado do exemplo 5.23

Método/ índices	Controlador Sub-ótimo	Controlador Ótimo
t_r	0,2658	0,2291
t_s	2,9190	0,7305
y_{inf}	1,0002	1,0009
t_p	1,5800	0,2900
PO(%)	2,9017	6,4543
u_{max}	94,9320	93,2429
t_{spert}	0,0000	0,0000
E(%)	1,3102	1,3611

Tabela 5.20: Tempo de simulação utilizando o algoritmo genético para os exemplos

Exemplo	Tempo (s)
5.1	15
5.2	17
5.2	14
5.4	11
5.5	–
5.6	16
5.7	13
5.8	13
5.9	12
5.10	11
5.11	–
5.12	–
5.13	15
5.14	17
5.14	14
5.16	11
5.17	–
5.18	16
5.19	13
5.20	13
5.21	12
5.22	11
5.23	–
5.24	–

5.5 Conclusões

Neste capítulo, foi visto o método de otimização da função custo no projeto de controladores PI e PID e foram apresentados vários exemplos de sistemas compensados com estes controladores. A partir destes exemplos foi possível constatar que, em alguns casos, não foi possível utilizar tais controladores, pois para tais sistema não foi possível obter região de estabilidade. Em outros exemplos, o controlador não obteve bons resultados, ficando com uma resposta muito oscilatória. Já em outros, o controlador obteve bons índices de desempenho, mostrando que este é um método pode ser eficiente no projeto de controladores PI e PID.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foi proposto um método de ajuste dos parâmetros de controladores PI e PID que se baseia na minimização de uma função custo quadrática, podendo ser aplicados a plantas modeladas por funções de transferência racionais estáveis ou instáveis. A maioria das plantas utilizadas nos exemplos deste trabalho, não são simples de serem controladas, pois em sua maioria são instáveis, de fase não-mínima e com grau relativo maior ou igual a 2.

A partir das simulações realizadas, verificou-se que em alguns casos, tanto o controlador PI quanto o PID, não foram capazes de controlar o sistema, uma vez que não existiam regiões de estabilidade nestes casos. Em outros exemplos as simulações não obtiveram bons índices de desempenho, pois o sinal da saída foi muito oscilatório, apesar do sistema realimentado ser estável. O regime transitório nestes casos foi muito ruim e o sistema demorou muito para entrar em regime permanente. Já na maioria dos exemplos, os controladores PI e PID, obtiveram resultados satisfatórios, tendo um baixo tempo de acomodação e também um baixo percentual de ultrapassagem. Em alguns destes casos, o sinal máximo de controle foi um pouco alto. Se o projeto exigir que o sinal máximo de controle não deva ser muito alto, deve-se manipular os parâmetros γ e β para tentar diminuir o valor máximo do sinal de controle. Em praticamente todas as simulações, o controlador sub-ótimo obteve parâmetros parecidos com os do controlador ótimo e conseqüentemente, as simulações também foram parecidas. Isso deve-se ao fato de que a grade escolhida para gerar a região de estabilidade tinha passos bastantes pequenos.

Pode-se, também, analisar o desempenho dos controladores PID com relação aos controladores PI, já que os exemplos simulados foram idênticos para os dois controladores. Observando primeiro os exemplos em que não existiu região de estabilidade para os controladores PI e PID, os únicos exemplos em que isto aconteceu foram os 5.12 e 5.24, associados à mesma planta. Nos casos em que somente um tipo de controlador não obteve a região de estabilidade, o outro controlador não obteve bons resultados nos índices de desempenho nas simulações realizadas, como aconteceu nos exemplos 5.5 e 5.17. Já nos outros exemplos, em que foi possível obter controladores PI e PID, note-se que o desempenho dos controladores foi parecido em alguns como nos exemplos 5.1 e 5.13, mas, em outros, o controlador PID obteve melhores índices, principalmente no tempo de amortecimento e na rejeição de perturbação. Conclui-se que o controlador PID teve desempenho igual ou superior ao controlador PI, nos exemplos simulados.

Um ponto que pode ser objeto de investigação no futuro é um estudo mais detalhado da influência de $W(s)$ em relação às especificações de desempenho, procurando uma maneira sistemática de se obter β e γ em função das especificações de desempenho e da resposta em frequência de $E(s)$, isto é, quando, na primeira iteração $\beta = \gamma \neq 0$. Um outro ponto que também pode ser investigado, é a utilização do método para sistemas com atraso e identificados, já que o desenvolvimento deste trabalho foi feito a partir do conhecimento da planta, o que nem sempre é possível em sistemas industriais. Uma solução possível para sistemas com atraso, seria uma aproximação racional para este atraso. Mas nem sempre isto é uma solução eficiente, podendo levar o sistema à instabilidade. Finalmente, em um trabalho recente (não publicado) Bhattacharyya e Keel obtém regiões de estabilidade para sistemas compensados com controladores PI e PID simplesmente a partir da resposta em frequência da planta (sem necessidade de encontrar uma função de transferência). Esses resultados poderiam ser utilizados de forma direta à teoria aqui apresentada, uma vez que a norma quadrática poderia ser facilmente calculada no domínio da frequência.

Referências Bibliográficas

- Americano, B. P. (2001). *Controladores PI e PID ótimos*, Escola Politécnica - UFRJ, Rio de Janeiro.
- Astrom, K. J. e Hagglund, T. (1995). *PID controllers: theory, design and tuning*, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC.
- Astrom, K. J. e Hagglund, T. (2004). Revisiting the Ziegler-Nichols step response method for PID control, *Journal of Process Control* **14**: 635–650.
- Basilio, J. C. (1989). *Controle ótimo quadrático no domínio da frequência com objetivos de rastreamento de sinais limitados e margem de estabilidade*, Tese de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia.
- Basilio, J. C. e Matos, S. R. (2000). Uma nova técnica de ajuste de controladores PI e PID industriais, *Anais do 13º Congresso Brasileiro de Automática* pp. 689–691.
- Basilio, J. C. e Matos, S. R. (2002). Design of PI and PID controllers with transient performance specification, *IEEE Transactions on Education* **45**: 364–370.
- Chen, C. T. (1999). *Linear Systems Theory and Design*, Oxford University Press.
- Chipperfield, A., Fleming, P., Pohlheim, H. e Fonseca, C. (1994). *Genetic Algorithm Toolbox, Version 1.2*, Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield.
- Cominos, P. e Munro, N. (2002). PID controllers: recent tuning methods and design to specification, *IEE Proceedings - Control Theory Application* **149**(1): 46–53.

- Dasgupta, D. e Michalewicz, Z. (2001). *Evolutionary Algorithms in Engineering Applications*, Springer.
- Datta, A., Ho, M. T. e Bhattacharyya, S. P. (2000). *Structure and Synthesis of PID Controllers*, Springer.
- Dorf, R. C. e Bishop, R. (1999). *Modern Control Systems*, Higher Education Publishing Company.
- Doyle, J. C., Francis, B. A. e Tannenbaum, A. (1992). *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company.
- Ge, M., Chiu, M. S. e Wang, Q. G. (n.d.). Robust PID controller design via LMI approach, *Journal of Process Control* **12**(1).
- Ho, M. T., Datta, A. e Bhattacharyya, S. (2001). Robust and non-fragile PID controller design, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **11**(7): 681–708.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, MIT Press.
- Oviedo, J. J. E., Boelen, T. e Overschee, P. V. (2006). Robust advanced PID control (RaPID)- PID tuning based o engineering specifications, *IEEE Control Systems Magazine* **26**(1): 15–19.
- Toscano, R. (2004). A simple robust PI/PID controller design via numerical optimization approach, *Journal of Process Control* **15**(1): 81–88.
- Ziegler, J. G. e Nichols, N. B. (1942). Optimal settings for automatic controllers, *Transactions of the ASME* **64**: 759–768.