

CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES DE SISTEMAS INCERTOS COM
DIREÇÃO DE CONTROLE DESCONHECIDA

Tiago Roux de Oliveira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Prof^ª. Vilma Alves de Oliveira, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 2006

OLIVEIRA, TIAGO ROUX DE

Controle por Modos Deslizantes de Sistemas Incertos com Direção de Controle Desconhecida [Rio de Janeiro] 2006

XIII, 196 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Elétrica, 2006)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Sistemas Incertos
2. Realimentação de Saída
3. Controle por Modos Deslizantes
4. Controle Adaptativo
5. Direção de Controle Desconhecida
6. Rastreamento Exato

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Ao meus pais *Delci Teixeira de Oliveira* e *Vera Lúcia Carvalho Roux de Oliveira* que sempre acreditaram no valor do conhecimento e não mediram esforços para que pudesse obtê-lo. Gratidão é muito pouco a oferecer àqueles que disseram tudo o que precisei compreender não com palavras, mas com a vida e o coração.

À minha querida irmã *Mirela Roux de Oliveira* pela amizade e alegria.

À minha companheira *Lilian Kawakami Carvalho* pelo incentivo e compreensão.

“Nossa maior fraqueza está em desistir.

O caminho mais certo de vencer é tentar mais uma vez.”

(*Thomas Edison*)

Agradecimentos

A Deus que em seu infinito amor possibilitou a vida.

Ao meu orientador Liu Hsu pelo apoio, amizade, empenho e pelo excelente Tema de Dissertação que propôs.

Aos Professores Fernando Cesar Lizarralde e Ramon Romankevicius Costa pelos bons ensinamentos e conselhos.

Aos Professores da *Universidade do Estado do Rio de Janeiro* José Paulo Vilela Soares da Cunha e Nival Nunes de Almeida que me incentivaram a ingressar na área de controle.

Ao amigo Alessandro Jacoud Peixoto pela parceria, dedicação e trabalho conjunto.

Ao amigo Moisés Baceda, sempre disposto e presente nos momentos de dificuldade.

A todas as pessoas do Laboratório de Controle, em especial, Lilian Kawakami Carvalho, Antônio Candea Leite e Jorge Venero Ugarte pelo intercâmbio de idéias, pela convivência agradável e por contribuírem de forma positiva no desenvolvimento desta Dissertação.

Aos amigos João Batista de Oliveira Júnior e Victor Nunes Nogueira pela amizade, simplesmente.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES DE SISTEMAS INCERTOS COM DIREÇÃO DE CONTROLE DESCONHECIDA

Tiago Roux de Oliveira

Julho/2006

Orientador: Liu Hsu

Programa: Engenharia Elétrica

Nesta dissertação é proposto um controlador por modelo de referência e modos deslizantes baseado na realimentação de saída para plantas incertas, monovariáveis, lineares e invariantes no tempo com grau relativo arbitrário e direção de controle (sinal do ganho de alta frequência) desconhecida.

Para compensar o grau relativo excedente é utilizado um filtro híbrido obtido a partir de uma combinação convexa de um filtro *lead* convencional e um diferenciador robusto e exato, baseado em modos deslizantes de ordem superior.

Um esquema de chaveamento, acionado por uma função de monitoração apropriada, é utilizado de forma a suprir a falta do conhecimento da direção de controle.

Para esta classe de sistemas, a estabilidade assintótica global com respeito a um conjunto compacto é garantida. O sistema completo do erro é globalmente exponencialmente convergente com respeito a um pequeno conjunto residual, que é independente das condições iniciais. Em contraste com os controladores existentes com tais propriedades de estabilidade, o erro de rastreamento converge assintoticamente ou em tempo finito para zero.

Resultados experimentais e de simulação são apresentados para verificar os resultados teóricos obtidos e ilustrar o desempenho e a robustez do controlador proposto.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SLIDING MODE CONTROL OF UNCERTAIN SYSTEMS WITH UNKNOWN
CONTROL DIRECTION

Tiago Roux de Oliveira

July/2006

Advisor: Liu Hsu

Department: Electrical Engineering

This dissertation considers the design of a model reference tracking controller for uncertain linear systems by output-feedback. The design does not assume the *prior* knowledge of the control direction, i.e., the sign of the high frequency gain.

In order to compensate the excess of relative degree, a hybrid lead filter which switches between a conventional linear lead filter and a nonlinear one based on higher order sliding modes is used.

A switching scheme driven by an appropriate monitoring function is used to cope with the lack of knowledge of the control direction.

For plants of arbitrary relative degree, global asymptotic stability with respect to a compact set is guaranteed, and, in contrast to the existing tracking controllers with such stability properties, ultimate finite-time or exponential convergence of the tracking error to zero is achieved.

Experimental and simulation results are presented so as to verify the theoretical results obtained and to illustrate the performance and the robustness of the proposed controller.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	4
1.2 Notas Preliminares	5
1.2.1 Normas e Notações	5
1.2.2 Classe \mathcal{K} de Funções	7
1.2.3 Funções Monótonas	8
1.2.4 Funções que Convergem para Zero	8
1.2.5 Funções Absolutamente Contínuas	9
1.2.6 Margem de Estabilidade	9
1.3 Organização da Dissertação	10
2 Chaveamento em Sistemas de Controle	11
2.1 Classes de Sistemas Híbridos com Chaveamento	11
2.1.1 Chaveamento Dependente do Estado	14
2.1.2 Chaveamento Dependente do Tempo	15
2.1.3 Chaveamento Autônomo e Controlado	17
2.2 Soluções para Sistemas Híbridos	18
2.2.1 Existência e Unicidade de Soluções	18
2.2.2 Comportamento Zeno	20
2.2.3 Modos Deslizantes	22
2.2.4 Chaveamento com Histerese	24
2.3 Sistemas com Chaveamentos	25
3 Sistemas a Estrutura Variável	28
3.1 Sistema de Controle Descontínuo	29
3.2 Noções Básicas de Controladores por Modos Deslizantes	30
3.3 Descrição Matemática de Modos Deslizantes	35
3.3.1 Método de <i>Filippov</i>	36
3.3.2 Existência de Modo Deslizante	39
3.4 Caso Geral: Projeto da Lei de Controle	41
3.5 Controle Baseado em Observador	42
3.5.1 Observadores de alto ganho para sistemas incertos	44

3.5.1.1	Fenômeno de Pico	46
3.5.1.2	Tempo de Extinção do Pico	47
3.5.2	Observadores por Modos Deslizantes	48
3.6	Modos Deslizantes de Ordem Superior	50
3.6.1	Definições de Modos Deslizantes de Ordem Superior	51
3.6.2	Diferenciador Exato e Robusto (RED)	52
4	Controle Adaptativo por Modelo de Referência a Estrutura Variável	56
4.1	Controle Adaptativo por Modelo de Referência - MRAC	58
4.1.1	Esquema de Controle do MRAC	59
4.1.2	Equação do Erro de Saída do MRAC	61
4.2	VS-MRAC	65
4.2.1	Lemas sobre o Controle à Estrutura Variável	66
4.2.2	VS-MRAC : Plantas com Grau Relativo $n^* = 1$	69
4.2.3	VS-MRAC: Plantas com Grau Relativo $n^* > 1$	70
4.2.3.1	Análise de Estabilidade: LF/VS-MRAC	71
4.3	GRED/VS-MRAC	73
4.3.0.1	Função de Chaveamento Ponderada	75
4.3.0.2	Análise de Estabilidade	77
5	Direção de Controle Desconhecida	81
5.1	Ganho de Nussbaum	82
5.1.1	Resultados de Simulação	86
5.2	Método da Função Periódica	88
5.2.1	Formulação do Problema	89
5.2.2	Projeto do Controlador	90
5.2.3	Análise de Estabilidade	92
5.2.4	Resultados de Simulação	94
5.3	Método de Bartolini	95
5.3.1	Formulação do Problema	96
5.3.2	Algoritmo para o Controle por Modos Deslizantes	96
5.3.3	Lógica de Chaveamento	101
5.3.4	Resultados de Simulação	103
6	Controle de Sistemas Incertos com Direção de Controle Desconhecida	106
6.1	Sistemas Lineares Monovariáveis	107
6.1.1	Estrutura do Controlador para Grau Relativo Unitário	108
6.1.1.1	Função de Monitoração ($n^* = 1$)	110
6.1.1.2	Resultado Principal para $n^* = 1$	112
6.1.1.3	Resultados de Simulação	114
6.1.2	Estrutura do Controlador para Grau Relativo Arbitrário	116
6.1.2.1	Estrutura equivalente para o filtro híbrido	118
6.1.2.2	Compensação do grau relativo através do filtro <i>lead</i>	119
6.1.2.3	Erros Auxiliares para Análise e Projeto	122
6.1.2.4	Resultado de Estabilidade para o Caso de Direção de Controle Conhecida	125
6.1.2.5	Função de Monitoração	133
6.1.2.6	Resultados de Estabilidade	138

6.1.2.7	Resultados de Simulação	140
6.2	Sistemas Não-Lineares Monovariáveis	145
6.3	Sistemas Multivariáveis	146
6.3.1	Resultados de Simulação	150
6.4	Resultados Experimentais	154
6.4.1	Experimento I	155
6.4.2	Experimento II	157
7	Discussão e Conclusões Gerais	158
	Apêndices	161
A	Trabalhos Publicados	161
B	Estabilidade	162
B.1	Definições de Estabilidade	162
B.2	Método Direto de Lyapunov	163
B.3	Estabilidade Entrada-Estado	164
B.4	Estabilidade Entrada-Saída	164
B.5	Convergência de Sinais	165
B.6	Teorema da Comparação	165
C	Sistemas a Estrutura Variável	166
C.1	Demonstração do Lema 3.1	166
D	LF/VS-MRAC	169
D.1	Demonstração da Proposição 1	169
D.2	Demonstração do Teorema 4.1	170
E	GRED/VS-MRAC	172
E.1	Demonstração da Proposição 2	172
E.2	Demonstração da Corolário 4.2	172
F	Sistemas com Direção de Controle Desconhecida: Parte A	174
F.1	Lemas e Corolários	174
F.2	Demonstração da Equação (6.53)	176
F.3	Equivalência entre Sistemas	179
G	Sistemas com Direção de Controle Desconhecida: Parte B	180
G.1	Prova da Proposição 8	180
G.2	Prova do Teorema 6.2	182
G.3	Prova da Proposição 10	183
G.4	Prova do Teorema 6.3	186
H	Algoritmos de Simulação e de Projeto	188
H.1	Resolução Numérica de Equações Diferenciais	188
	Referências Bibliográficas	190

Lista de Figuras

2.1	Sistema híbrido.	12
2.2	Chaveamento dependente do estado.	14
2.3	Sinal de chaveamento para $\mathcal{P} = 1, 2$	16
2.4	Um sistema controlado por computador.	17
2.5	Comportamento Zeno.	22
2.6	(a) Trajetória atravessando a superfície de chaveamento; (b) Modo Deslizante.	23
2.7	Histerese: (a) Regiões de chaveamento; (b) Trajetória típica.	25
2.8	Chaveamento em sistemas de controle.	26
3.1	Plano de fase para o sistema (3.5).	31
3.2	Plano de fase para o sistema (3.6).	31
3.3	Plano de fase para o sistema (3.4).	33
3.4	Trajetórias do sistema (3.4) para diferentes condições de atraso: (a) atraso igual a 0.1s; (b) atraso igual a 0.05s; (c) atraso igual a 0.01s. Sinal de controle do sistema (3.4) para diferentes condições de atraso: (d) atraso igual a 0.1s; (e) atraso igual a 0.05s; (f) atraso igual a 0.01s.	34
3.5	Plano de fase para o sistema (3.7).	35
3.6	Interpretação geométrica da solução de Filippov.	38
3.7	Controle por modo deslizante utilizando-se um observador de estado. <i>LMDI</i> indica o “ <i>Laço do Modo Deslizante Ideal</i> ”.	44
3.8	Fenômeno de pico no observador de alto ganho. A norma do estado é comparada com o seu majorante para dois valores do parâmetro ε	46
3.9	<i>Tempo de extinção do pico</i> (t_e) definido a partir da norma do termo $\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1})$ e um <i>majorante do tempo de extinção do pico</i> (\bar{t}_e) definido a partir de um determinado majorante para $\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1})$	47
4.1	Estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência (MRAC).	60
4.2	Representação equivalente da estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência (MRAC)	61
4.3	Esquema equivalente da estrutura do controlador MRAC com parâmetros ideais.	64
4.4	VS-MRAC - caso: grau relativo $n^* = 1$	69
4.5	LF/VS-MRAC: VS-MRAC usando um filtro <i>lead</i> linear para compensação de grau relativo.	71

4.6	Esquema do controlador GRED/VS-MRAC para a compensação do grau relativo	74
4.7	VS-MRAC utilizando um filtro <i>lead</i> para a compensação de grau relativo, com uma perturbação de saída uniformemente limitada.	76
5.1	Saída da planta y	88
5.2	Sinal de controle u	88
5.3	Lei de adaptação v	88
5.4	Ganho de Nussbaum N	88
5.5	Trajatória de fase para $\text{sgn}(Gb^T M_0) < 0$ e $V = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\epsilon}\sigma\right)$	93
5.6	Trajatória de fase para $\text{sgn}(Gb^T M_0) > 0$ e $V = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{\epsilon}\sigma\right)$	94
5.7	Resultados de simulação - (a) sinal de saída y , (b) variedade σ e (c) sinal de controle u	95
5.8	Comparação entre as funções $e^{ y }$ e $\frac{\bar{k}c}{\alpha - ce^{ \epsilon }}$	98
5.9	Resultados da Proposição 6: situação descrita com $\alpha = 2$ e $c = 1$	99
5.10	Proposição 7 - (a) sob a condição de direção de controle incorreta, a variedade $S1$ é repulsiva, enquanto $S2(-S2)$ torna-se atrativa, (b) uma vez ajustada a direção de controle, $S1$ e $S2(-S2)$ invertem as funções. As regiões hachuradas representam trechos proibidos para y, \tilde{y}	100
5.11	Variedades limitantes: $S1 = 0$ e $S2 = \tilde{y} + \Delta \text{sgn}(\tilde{y})$	101
5.12	Demonstração da lógica de chaveamento observando a trajetória de saída do sistema.	102
5.13	Amplitude do <i>pico</i> com $\Delta = 0.01$ e $\Delta = 0.1$	103
5.14	(a) sinal de saída y e (b) direção de controle ρ	104
5.15	(a) estado ω do SMO e (b) erro de observação ϵ	104
5.16	Sinal de controle u	105
5.17	Amplitude do <i>pico</i> no sinal de saída y para valores distintos $\Delta = 1$ e $\Delta = 0.1$	105
6.1	VS-MRAC - caso: grau relativo $n^* = 1$ e esquema de monitoração (φ_m).	109
6.2	Trajórias da função de monitoração φ_m e do erro de rastreamento $ e_0 $	112
6.3	Resultados de simulação [$n^* = 1$] - (a) erro de rastreamento $ e_0 $ (—) e função de monitoração φ_m (---), (b) sinal de controle u	115
6.4	Resultados de simulação [$n^* = 1$] - (a) erro de rastreamento $ e_0 $ (—) e função de monitoração φ_m (---), (b) sinal de controle u	116
6.5	VS-MRAC com o filtro <i>lead</i> híbrido (GRED) e esquema de monitoração.	117
6.6	Equivalência entre o filtro híbrido (GRED) e o filtro <i>lead</i> linear.	119
6.7	Equivalência entre sistemas.	126
6.8	Proposição 9. Trajetórias da função de monitoração φ_m e do erro auxiliar $ \epsilon_0 $	136
6.9	Comparação entre as trajetórias de $ \bar{\beta}_u $, $\ (\bar{\beta}_u)_t\ _\infty$ e f_d	137
6.10	Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - (a) erro auxiliar $ \tilde{\epsilon}_0 $ (—) e função de monitoração φ_m (---), (b) lei de chaveamento α , (c) erro de rastreamento e_0	142
6.11	Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - sinal de controle u	142
6.12	Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - Duas versões de função de monitoração [$\varphi_m = \varphi_k, \varphi_k^d$]: (a) erro de saída e_0 , (b)-(c) erro auxiliar $ \tilde{\epsilon}_0 $ (—) e função de monitoração φ_m (---).	143

6.13	Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - (a) termo $\bar{\beta}_u (-)$, majorante conservador $\ (\bar{\beta}_u)_t\ _\infty (--)$ e (b) majorante $f_d (--)$	143
6.14	Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - (a) erro de rastreamento e_0 , (b) erro auxiliar $ \tilde{\varepsilon}_0 $ e (c) lei de chaveamento α	144
6.15	Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - (a) escape do erro de saída e_0 , (b) escape da função de monitoração $\varphi_m (--)$	145
6.16	Ponto de sela. Conjunto de medida nula destacado em cinza.	149
6.17	Problema de servovisão.	151
6.18	Movimento do efetuador (alvo) do robô no sistema de coordenadas da imagem: $\bar{E}_b, \bar{E}_e, \bar{E}_c$ e \bar{E}_i são os sistemas de coordenadas da base, do efetuador, da câmera e da imagem, respectivamente.	151
6.19	Resultados de simulação (Exemplo 6.2) - imagem do alvo (efetuador do robô) $(-)$, trajetória de referência no plano da imagem $(--)$	152
6.20	Resultados de simulação (Exemplo 6.2) - norma do erro $\ e\ (-)$ e função de monitoração $\varphi_m (--)$	153
6.21	Resultados de simulação (Exemplo 6.2) - sinais de controle.	153
6.22	Experimento I: (a) condição inicial da saída da planta $y (-)$ e saída do modelo de referência $y_m (--)$, (b) erro de rastreamento e_0 com várias mudanças na direção de controle (representadas pelos picos).	156
6.23	Experimento I: (a) função de monitoração $\varphi_m (--)$ e erro auxiliar $\tilde{\varepsilon}_0 (-)$, (b) função de chaveamento α : $\alpha = 1$ (filtro lead linear) e $\alpha = 0$ (RED).	156
6.24	Experimento II: utilizando o filtro <i>lead</i> linear ou RED; (a) erro de saída e_0 (rastreamento de uma senóide); (b) erro de rastreamento e_0 na resposta a uma onda quadrada; (c) saída da planta $y (-)$ e onda quadrada de referência $y_m (--)$	157

Lista de Tabelas

5.1	Planta e esquema de controle.	87
5.2	Parâmetros do controlador.	94
6.1	Sistema de controle.	114
6.2	Sistema de controle (Exemplo 6.1).	141
H.1	Passo de integração utilizado em cada simulação.	189

Capítulo 1

Introdução

O controle de sistemas dinâmicos incertos é um dos principais tópicos da teoria de controle moderno. Estes sistemas podem apresentar incertezas paramétricas ou estruturais. No caso de incertezas paramétricas a estrutura da planta é conhecida, entretanto seus parâmetros podem ser desconhecidos ou variantes no tempo. No caso de incertezas estruturais o sistema pode apresentar dinâmicas não modeladas, fato que dificulta a tarefa de projetar um controlador que garanta um bom desempenho para estes sistemas (Hespanha, Liberzon & Morse 2003*b*).

O controle robusto e o controle adaptativo são as principais estratégias para lidar com sistemas que possuem modelagem precária ou grandes incertezas, incluindo variação de parâmetros, dinâmicas não modeladas e distúrbios externos.

A idéia básica do controle adaptativo é calcular o sinal de controle utilizando estimativas dos parâmetros incertos da planta ou, diretamente das estimativas dos parâmetros do controlador obtidas em tempo real através de informações provenientes dos sinais mensuráveis do sistema (Slotine & Li 1991).

A estratégia denominada de controle adaptativo por modelo de referência (Model Reference Adaptive Control - MRAC) é considerada uma das principais abordagens na literatura de controle adaptativo (Mareels & Polderman 1996). No controlador MRAC tradicional (Narendra & Annaswamy 1989) a adaptação é baseada na estimação de parâmetros utilizando uma ação integral pura, o que resulta em uma falta de robustez à perturbações externas ou à dinâmicas não-modeladas. Além disso, o transitório de adaptação não é uniforme com respeito às condições iniciais e a convergência dos sinais

pode ser muito lenta (Hsu & Costa 1989).

O controle a estrutura variável e o controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* - SMC), são técnicas muito eficientes para tratar de sistemas incertos, onde os valores dos parâmetros do modelo são desconhecidos, embora assumam-se o conhecimento de limites para seus valores, mostrando-se eficazes em diversos problemas de engenharia como: controle automático de vôos, controle de motores elétricos, processos químicos, sistemas espaciais e robótica.

O controle a estrutura variável caracteriza-se pela utilização de uma lei de controle descontínua que comuta, segundo uma dada regra, entre um conjunto de funções das variáveis de estado da planta, alterando assim a estrutura do sistema em malha fechada. Uma das motivações desta abordagem consiste na possibilidade de combinar propriedades de cada uma das estruturas no sistema realimentado. Assim sendo, podem ser obtidas novas propriedades que **não são inerentes a nenhuma das estruturas utilizadas**, por exemplo: um sistema assintoticamente estável pode ser formado a partir de duas estruturas instáveis. Outro aspecto importante, é a possibilidade adicional de serem obtidas trajetórias que descrevem um novo tipo de movimento, denominado **modo deslizante**. Este tipo de movimento, sob certas condições, é invariante com relação às incertezas da planta, propriedade esta conhecida como **princípio da invariância**. Em geral, as funções de chaveamento são projetadas de tal forma que as trajetórias do sistema alcancem e mantenham-se em uma superfície (**superfície de deslizamento**) que especifica um comportamento desejado para a dinâmica do sistema em malha fechada.

O SMC oferece vantagens significantes, tais como bom comportamento transitório, capacidade de rejeição à perturbações não-modeladas e insensibilidade a não-linearidades da planta ou variações dos parâmetros. Entretanto, algumas dificuldades no SMC são:

1. ocorrência indesejável do fenômeno de *chattering* induzido por não-idealidades como pequenos atrasos ou dinâmicas não-modeladas (*modo deslizante real*) (Utkin 1992);
2. necessidade geral de se ter acesso ao vetor de estado completo para implementar a superfície de chaveamento;
3. conhecimento da direção de controle.

No *modo deslizante ideal*, o estado permanece na superfície de deslizamento enquanto que o sinal de controle possui frequência infinita. Em aplicações práticas, a frequência infinita não pode ser alcançada. Assim sendo, no deslizamento real, as variáveis de controle oscilam em frequência alta, mas finita. Este fenômeno é denominado *chattering*.

Para evitar a medição de todas as variáveis de estado, são utilizadas abordagens baseadas somente na realimentação de saída. Neste contexto, o VS-MRAC (*Variable Structure Model-Reference Adaptive Control*) foi proposto em Hsu & Costa (1989) e Hsu (1990). Este controlador, implementado utilizando-se apenas medições de entrada e saída (I/O), possui uma estrutura similar ao MRAC, substituindo-se a lei de adaptação do tipo integral pela síntese direta do sinal de controle.

A principal vantagem do VS-MRAC é a sua capacidade de garantir estabilidade exponencial global. Entretanto, para plantas de grau relativo maior que um, o erro de rastreamento se torna arbitrariamente pequeno, mas não necessariamente zero (conjunto residual).

Uma outra técnica para a implementação de controladores baseados na realimentação de saída, consiste em utilizar o chamado diferenciador robusto e exato (Robust Exact Differentiator - RED) (Levant 1999). Em artigos recentes (Levant 2001*b*, Levant 2003), foram propostos controladores por modos deslizantes para plantas de grau relativo arbitrário baseados nestes diferenciadores exatos. Embora esta classe de controladores consiga um rastreamento exato, evitando assim o *chattering*, sua estabilidade ou convergência tem sido provada apenas localmente (Levant 2003).

Na tentativa de combinar as vantagens das duas técnicas, preservando a estabilidade global e garantindo que o erro de rastreamento convirja assintoticamente para zero, foi desenvolvido um controlador para plantas lineares com grau relativo arbitrário, denominado de GRED/VS-MRAC (Global Robust Exact Differentiator Variable Structure Model Reference Adaptive Control) em (Nunes, Hsu & Lizarralde 2004).

O problema de controlar sistemas incertos com sinal do ganho de alta frequência (direção de controle) desconhecido, tem atraído a atenção da comunidade de controle adaptativo desde o começo dos anos 80 (Morse 1982). Uma solução para o problema apareceu em Nussbaum (1983), onde o então denominado ganho de Nussbaum surgiu como ferramenta padrão em Mudgett & Morse (1985), e recentemente utilizado

em Zhang, Wen & Soh (2000) e Imai, Costa & Hsu (2001). Embora na teoria, esta abordagem possa levar à solução rigorosa do problema, ela também resulta em um comportamento transitório muitas vezes inaceitável e problemas de implementação prática (Mudgett & Morse 1985, Fu & Barmish 1986).

Para o SMC com direção de controle desconhecida, poucos resultados estão disponíveis na literatura. Em Drakunov (1993), um controlador por modos deslizantes com realimentação de estado foi utilizado para uma ampla classe de sistemas não-lineares incertos. Em Bartolini, Ferrara & Giacomini (2003), foi proposto um esquema com observador por modos deslizantes (*Sliding Mode Observer* - SMO) para sistemas não-lineares incertos de primeira ordem, onde bons transitórios são obtidos quando comparados com os resultados conseguidos com o ganho de Nussbaum. Um esquema utilizando SMC e realimentação de saída para rastreamento de plantas lineares incertas foi introduzido em Yan, Hsu, Costa & Lizarralde (2003) utilizando um algoritmo de chaveamento baseado em uma função de monitoração para o erro de saída. Um controlador similar foi apresentado para sistemas não-lineares em Yan & Xu (2004) onde a abordagem do MRRC (*Model Reference Robust Control*) foi adotada. Entretanto, em ambos Yan et al. (2003) e Yan & Xu (2004), considera-se que a planta tem grau relativo unitário.

1.1 Objetivos

O principal objetivo desta Dissertação é desenvolver algoritmos de controle por modo deslizante baseados na realimentação de saída para sistemas com parâmetros e sinais incertos, em particular, generalizando os resultados do controlador apresentado em Yan et al. (2003) para o caso de plantas com grau relativo arbitrário. O novo esquema é desenvolvido preservando as qualidades deste controlador, tais como, bom transiente e capacidade de rejeição a perturbações. Deseja-se obter estabilidade global e rastreamento exato sem o conhecimento da direção de controle.

Com esta finalidade, a solução proposta utiliza o esquema híbrido (Nunes et al. 2004) para compensar o excesso de grau relativo, combinando filtros *lead* lineares convencionais com diferenciadores robustos e exatos. A falta de conhecimento da direção de controle é então superada através de um mecanismo de chaveamento, acionado por

uma função de monitoração apropriada, que ajusta o sinal de controle.

1.2 Notas Preliminares

Revisa-se nesta seção alguns conceitos fundamentais para o desenvolvimento dos algoritmos de controle nesta Dissertação.

1.2.1 Normas e Notações

São usados os conceitos e notações a seguir:

- O máximo e o mínimo valores singulares da matriz A são denotados por $\sigma_{max}(A)$ e $\sigma_{min}(A)$, respectivamente.
- O máximo e o mínimo autovalores de uma matriz A são denotados por $\lambda_{max}(A)$ e $\lambda_{min}(A)$, respectivamente.
- $\|x\|$ denota a norma Euclidiana de um vetor x e $\|A\|$ denota a norma da matriz A induzida pela norma Euclidiana, que é dada pelo seu maior valor singular ($\sigma_{max}(A)$).
- A norma $\mathcal{L}_{\infty e}$ do sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é definida como (Ioannou & Sun 1996, p. 70)

$$\|x_t\|_{\infty} := \sup_{0 \leq \nu \leq t} \|x(\nu)\|. \quad (1.1)$$

Quando o tempo inicial é $t_0 \leq t$, pode-se utilizar a norma (Cunha 2004)

$$\|x_{t,t_0}\|_{\infty} := \sup_{t_0 \leq \nu \leq t} \|x(\nu)\|. \quad (1.2)$$

- O conjunto de matrizes com p linhas e m colunas cujos elementos são funções racionais de s com coeficientes reais é representado por $\mathbb{R}^{p \times m}(s)$.
- Adota-se a representação mista do domínio do tempo com o domínio da transformada de Laplace (cálculo operacional). No entanto, para definir precisamente esta representação, serão adotados os seguintes conceitos e notações. O sinal de saída y de um sistema linear e invariante no tempo com matriz de transferência

$G(s)$ e entrada u é dado por $G(s)u$. A convolução pura $g(t) * u(t)$, sendo $g(t)$ a resposta impulsiva de $G(s)$, será escrita eventualmente como $G(s) * u$, por simplicidade. Considere a realização de $G(s)$ dada por $\dot{x} = A_p x + B_p u$, $y = C_p x + D_p u$. Então,

$$y(t) = G(s)u(t) = g(t) * u(t) + C_p \exp(A_p t)x(0), \quad (1.3)$$

onde o termo exponencial é a resposta homogênea do sistema ($u(t) \equiv 0$).

- A norma \mathcal{L}_p do sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é definida como

$$\|x\|_p = \left(\int_0^{+\infty} \|x(\nu)\|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad p \in [1, \infty).$$

- A norma do operador $G(s)$ é definida como (Ioannou & Sun 1996, p. 69)

$$\|G(s)\| := \|g(t)\|_1 = \int_0^{+\infty} \|g(\nu)\| d\nu. \quad (1.4)$$

A seguinte desigualdade é válida para $y(t) = g(t) * u(t)$ (Ioannou & Sun 1996, pp. 80–81)

$$\|y_t\|_\infty \leq \|g(t)\|_1 \|u_t\|_\infty. \quad (1.5)$$

- A norma de um operador $\|G(s)\|$ será considerada como sendo uma norma induzida do tipo \mathcal{L}_∞)
- Um operador $G(s)$ é de ordem $\mathcal{O}(\tau)$ se e somente se $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\|G(s, \tau)\|}{\tau}$ existir.
- O símbolo s denota tanto a variável complexa da transformada de Laplace quanto o operador diferencial $\frac{d}{dt}$ no domínio do tempo.
- $f^{(i)}(t)$ representa a i -ésima derivada da função $f(t)$ ($f^{(i)}(t) = \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} f(t)$). Para o caso de $i = 0$, tem-se: $f^{(0)}(t) = f(t)$.
- No caso de $s(x)$, com x sendo a solução de $\dot{x} = f(x)$. A derivada $\dot{s}(x)$, será considerada como sendo a derivada de $s(x)$ com respeito ao tempo ao longo da trajetória do sistema $\dot{x} = f(x)$, sendo dada por:

$$\dot{s}(x) = \nabla_x s(x) f(x)$$

- Define-se $\text{sgn}(\nu)$ como

$$\text{sgn}(\nu) = \begin{cases} +1, & \nu > 0 \\ 0, & \nu = 0 \\ -1, & \nu < 0. \end{cases}$$

- A sigla *sqw* é utilizada para representar uma onda quadrada unitária.
- Usa-se a abreviatura “LI” para denotar *localmente integrável segundo Lebesgue*.

1.2.2 Classe \mathcal{K} de Funções

As classes \mathcal{K} , \mathcal{K}_∞ , \mathcal{L} e \mathcal{KL} de funções são extensivamente utilizadas para introduzir conceitos de estabilidade nos trabalhos de Sontag & Wang (1995)(Apêndice B). Neste trabalho, as classes \mathcal{K} e \mathcal{K}_∞ serão utilizadas na análise de estabilidade do controlador proposto aplicado a sistemas lineares SISO (*single-input/single-output*) com grau relativo arbitrário.

Definição 1 Uma função $\alpha_{\mathcal{K}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ pertence à classe \mathcal{K} (ou, simplesmente, $\alpha_{\mathcal{K}}$ é de classe- \mathcal{K}) se

- (a) $\alpha_{\mathcal{K}}(\cdot)$ é zero na origem, ou seja, $\alpha_{\mathcal{K}}(0) = 0$;
- (b) $\alpha_{\mathcal{K}}(\cdot)$ é contínua;
- (c) $\alpha_{\mathcal{K}}(\cdot)$ é estritamente crescente.

Definição 2 Uma função $\alpha_{\mathcal{K}_\infty} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ pertence à classe \mathcal{K}_∞ (ou, simplesmente, $\alpha_{\mathcal{K}_\infty}$ é de classe- \mathcal{K}_∞) se

- (a) $\alpha_{\mathcal{K}_\infty}(\cdot)$ pertence à classe \mathcal{K} ;
- (b) $\alpha_{\mathcal{K}_\infty}(\cdot)$ é ilimitada, i.e., $\alpha_{\mathcal{K}_\infty}(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Definição 3 Uma função $\alpha_{\mathcal{L}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ pertence à classe \mathcal{L} (ou, simplesmente, $\alpha_{\mathcal{L}}$ é de classe- \mathcal{L}) se

- (a) $\alpha_{\mathcal{L}}(\cdot)$ é contínua;
- (b) $\alpha_{\mathcal{L}}(\cdot)$ é decrescente;

- (c) $\alpha_{\mathcal{L}}(\cdot)$ converge para zero quando seu argumento tende para infinito, ou seja, $\alpha_{\mathcal{L}}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Definição 4 Uma função $\alpha_{\mathcal{KL}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ pertence à classe \mathcal{KL} (ou, simplesmente, $\alpha_{\mathcal{KL}}$ é de classe- \mathcal{KL}) se

- (a) $\alpha_{\mathcal{KL}}$ pertence a classe \mathcal{K} com respeito ao seu primeiro argumento;
- (b) $\alpha_{\mathcal{KL}}$ pertence a classe \mathcal{L} com respeito ao seu segundo argumento;

Exemplo 1.1 Seja $x \in \mathbb{R}^n$, um exemplo de uma função $\alpha_{\mathcal{KL}}$ de classe- \mathcal{KL} é dado por

$$\alpha_{\mathcal{KL}}(\|x(0)\|, t) := \|x(0)\|e^{-\lambda t},$$

onde $\lambda > 0$.

1.2.3 Funções Monótonas

Definição 5 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é monótona se a ordem é preservada, ou seja,

- (a) $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 \leq t_2$ tem-se $f(t_1) \leq f(t_2)$ (f é monótona crescente, ou, simplesmente, crescente);
- (b) $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 \leq t_2$ tem-se $f(t_1) \geq f(t_2)$ (f é monótona decrescente, ou, simplesmente, decrescente);
- (c) $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 < t_2$ tem-se $f(t_1) < f(t_2)$ (f é estritamente crescente);
- (d) $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 < t_2$ tem-se $f(t_1) > f(t_2)$ (f é estritamente decrescente).

1.2.4 Funções que Convergem para Zero

Definição 6 Uma função $\pi(t)$ de \mathbb{R}_+ em \mathbb{R}^n é exponencialmente decrescente, se $\exists R, \lambda > 0$ tais que

$$\|\pi(t)\| \leq \Pi(R, t) = Re^{-\lambda t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Note que, o majorante de $\|\pi(t)\|$ é uma função de classe- \mathcal{KL} , considerando R como primeiro argumento e t como segundo argumento.

1.2.5 Funções Absolutamente Contínuas

Definição 7 (Sontag 1998) Suponha que $[a, b]$ seja um intervalo limitado em \mathbb{R} . Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua em $[a, b]$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que: se $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ é uma coleção finita de intervalos abertos em $[a, b]$ satisfazendo $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, então $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Assim sendo, a função f é absolutamente contínua se e somente se existir uma função integrável h tal que

$$f(t) = f(a) + \int_a^t h(\nu) d\nu,$$

para todo $t \in [a, b]$. Uma função absolutamente contínua é diferenciável em quase todos os pontos e a igualdade $f'(t) = h(t)$ é satisfeita para quase todo t .

1.2.6 Margem de Estabilidade

Margem de estabilidade é um conceito fundamental para as *aproximações por filtros de primeira ordem* (Cunha, Costa & Hsu 2003). O termo *margem de estabilidade* foi utilizado por Ioannou & Tsakalis (1986) para os pólos de uma função de transferência. A seguir define-se a margem de estabilidade de matrizes de transferência e matrizes reais (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002a, Seção 2.1).

Definição 8 A margem de estabilidade de $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ é dada por

$$\gamma_0 := \min_j \{-\Re_e(p_j)\}, \quad (1.6)$$

onde $\{p_j\}$ são os pólos de $G(s)$.

Fato: o sistema com matriz de transferência $G(s)$ é BIBO estável (*bounded-input-bounded-output stable*, i.e., estável no sentido entrada-saída) se e somente se $\gamma_0 > 0$ (Kailath 1980, Seção 2.6.1).

Definição 9 A margem de estabilidade de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dada por

$$\lambda_0 := \min_j \{-\Re_e(\lambda_j)\}, \quad (1.7)$$

onde $\{\lambda_j\}$ são os autovalores de A . Se $\lambda_0 > 0$, então A é denominada matriz Hurwitz.

1.3 Organização da Dissertação

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

No **Capítulo 2** é apresentada uma introdução a sistemas híbridos e sistemas com chaveamento, de forma a contextualizar o problema de controle abordado neste trabalho.

No **Capítulo 3** são apresentados conceitos básicos de sistemas a estrutura variável, controle por realimentação de saída, controle baseado em observador, além de serem introduzidos o conceito de modos deslizantes de ordem superior e diferenciador exato e robusto.

No **Capítulo 4** é apresentada a estrutura básica de um sistema baseado em modelo de referência. Nesse capítulo também são apresentados detalhes sobre o desenvolvimento teórico do VS-MRAC e do GRED/VS-MRAC, em que a direção de controle é conhecida, sendo discutidas as principais características destes controladores.

No **Capítulo 5** são apresentadas as principais técnicas de controle já existentes para sistemas em que a direção de controle é desconhecida.

No **Capítulo 6** é apresentada a estrutura do controlador proposto para sistemas incertos com grau relativo arbitrário e direção de controle desconhecida, sendo detalhado o desenvolvimento teórico e discutidas suas principais características. Além disso, são apresentados simulações e resultados experimentais que avaliam o comportamento do controlador proposto.

No **Capítulo 7** são apresentadas conclusões gerais, além de propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Chaveamento em Sistemas de Controle

2.1 Classes de Sistemas Híbridos com Chaveamento

Os *sistemas híbridos* são sistemas dinâmicos descritos por interações entre dinâmicas contínuas e discretas (Liberzon 2001). As dinâmicas contínuas podem ser representadas por sistemas de controle contínuos no tempo, tais como um sistema linear $\dot{x} = Ax + Bu$ com estado $x \in \mathbb{R}^n$ e entrada $u \in \mathbb{R}^m$. Como exemplo de dinâmica discreta, pode-se considerar um autômato com finitos estados q podendo assumir valores em um conjunto também finito \mathcal{Q} , onde as transições entre os diferentes estados discretos são causadas por valores apropriados de uma variável de entrada v . Quando a entrada u da dinâmica contínua é uma função do estado discreto q , e semelhantemente, o valor da entrada v da dinâmica discreta é determinada por um valor do estado contínuo x , tem-se um sistema híbrido (ver Figura 2.1).

Tradicionalmente, a teoria de controle trata de sistemas com dinâmica contínua e dinâmica discreta separadamente. Entretanto, muitos dos sistemas dinâmicos encontrados na prática são de natureza híbrida (Liberzon 2001). O seguinte exemplo confirma esta perspectiva.

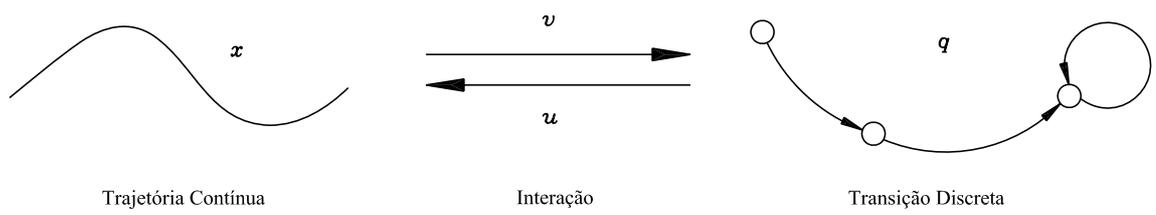


FIGURA 2.1: Sistema híbrido.

Exemplo 2.1 *Um modelo simples que descreve o acionamento de um automóvel pode ser expresso na forma (van der Schaft & Schumacher 2000)*

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.1)$$

$$\dot{x}_2 = f(a, q), \quad (2.2)$$

onde x_1 é a posição, x_2 é a velocidade, $a > 0$ é a aceleração (entrada do sistema), e $q \in [1, 2, 3, 4, 5, -1]$ é a posição da marcha (mecanismo de engrenagem). Como exemplo de uma função $f(a, q)$ adequada, tem-se

$$f(a, q) = \frac{a}{q + 0.5}. \quad (2.3)$$

Neste sistema, x_1 , x_2 são os estados contínuos e q é o estado discreto. Claramente, as transições discretas afetam a trajetória contínua. No caso de uma transmissão automática, a evolução do estado contínuo x_2 é utilizada para determinar as transições discretas. No caso de uma transmissão manual, as transições discretas são controladas pelo motorista. Assim sendo, torna-se natural considerar as variáveis de saída dependentes dos estados contínuos e discretos, por exemplo a velocidade de rotação do motor sendo uma função de x_2 e q .

Na teoria de sistemas de controle, os sistemas híbridos tendem a ser considerados como sistemas contínuos apresentando chaveamento, enfatizando assim as propriedades do estado contínuo. Portanto, os principais pontos de discussão tornam-se a análise de estabilidade e a síntese do sinal de controle (Liberzon 2001).

Nesta Dissertação serão abordados sistemas contínuos no tempo com eventos discretos isolados (chaveamentos). Antes de apresentar formalmente uma definição geral, descreve-se categorias específicas de sistemas com algumas propriedades de interesse.

Os eventos em sistemas com chaveamento podem ser classificados em:

- Dependentes do estado \times dependentes do tempo.
- Não-controlável (autônomo) \times controlável.

Certamente, existem várias combinações e tipos de chaveamentos. Nas seções que se seguem, discute-se brevemente algumas dessas possibilidades.

2.1.1 Chaveamento Dependente do Estado

Suponha que o espaço de estado contínuo \mathbb{R}^n seja particionado em um número finito ou infinito de regiões de operação delimitadas por uma família de superfícies de chaveamento. Em cada uma dessas regiões, tem-se um sistema dinâmico contínuo. Quando a trajetória do sistema atinge uma superfície de chaveamento, o estado contínuo salta instantaneamente para um novo valor, especificado por um *reset map* (neste mapeamento o domínio é a união das superfícies de chaveamento e cobre todo o espaço de estados e possivelmente exclui as superfícies de chaveamento) (Liberzon 2001). O sistema é então especificado por:

- Uma família de superfícies de chaveamento e regiões de operação resultantes.
- Uma família de sub-sistemas contínuos, um para cada região de operação.
- O *reset map*.

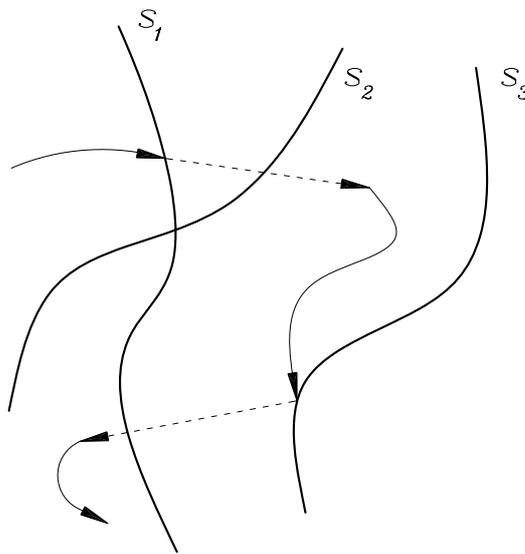


FIGURA 2.2: Chaveamento dependente do estado.

Na Figura 2.2 as curvas grossas representam as superfícies de chaveamento, as curvas finas denotam as porções das trajetórias contínuas e as linhas tracejadas simbolizam os saltos. Os saltos instantâneos do estado contínuo são ocasionalmente mencionados como *efeitos de impulso* (Liberzon 2001). Um caso especial é quando esses efeitos de

impulso não estão presentes, isto é, o *reset map* é a identidade. Isto significa que a trajetória é contínua em toda parte, embora perca diferenciabilidade quando passa por uma superfície de chaveamento. No que se segue, restringe-se a atenção para sistemas sem efeitos de impulso. Outro problema ignorado momentaneamente, é a possibilidade de que algumas trajetórias fiquem presas nas superfícies de chaveamento, o que será abordado na Seção 2.2.3.

Visto que o modelo de sistema com chaveamento esboçado acima não apresenta uma dinâmica discreta, muitas vezes este modelo não é considerado verdadeiramente híbrido. O sistema torna-se verdadeiramente híbrido se as transições discretas dependem não somente do ponto de encontro da trajetória com a superfície de chaveamento, mas também do valor do estado discreto imediatamente antes deste evento (Hespanha, Liberzon & Morse 2003a). Um procedimento com este comportamento é encontrado na técnica de chaveamento com *histerese* apresentada na Seção 2.2.4.

2.1.2 Chaveamento Dependente do Tempo

Suponha que seja dada uma família f_p , $p \in \mathcal{P}$ de funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n , onde \mathcal{P} é algum conjunto indexado (tipicamente, um sub-conjunto de dimensão finita do espaço vetorial) (Hespanha et al. 2003b). Isto origina uma família de sistemas

$$\dot{x} = f_p(x), \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.4)$$

envolvendo \mathbb{R}^n . Admite-se que a função f_p seja suficientemente regular (ao menos localmente Lipschitz; ver Seção 2.2.1). O caso mais simples, é quando todos estes sistemas são lineares:

$$\dot{x} = A_p x, \quad A_p \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad p \in \mathcal{P} \quad (2.5)$$

e o conjunto indexado \mathcal{P} é finito: $\mathcal{P} = 1, 2, \dots, m$.

Para descrever um sistema com chaveamento gerado a partir da família acima é necessário o conceito de sinal de chaveamento. Este sinal é uma função σ constante por partes em que $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{P}$. Esta regra para σ especifica, para cada instante t , o índice $\sigma(t) \in \mathcal{P}$ do sub-sistema ativo, ou seja, o sub-sistema da família (2.4) que será acionado. Assume-se que σ é contínuo à direita: $\sigma(t) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \sigma(\tau)$ para cada $\sigma \geq 0$. Um

exemplo de sinal de chaveamento para o caso $\mathcal{P} = 1, 2$ é representado na Figura 2.3.

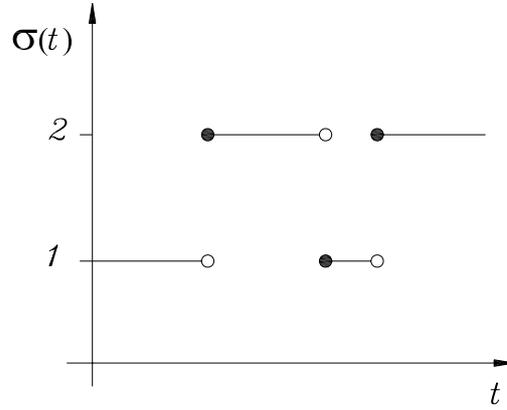


FIGURA 2.3: Sinal de chaveamento para $\mathcal{P} = 1, 2$.

Portanto, um sistema com chaveamento (dependente do tempo) pode ser descrito pela equação

$$\dot{x} = f_{\sigma(t)}(x(t)). \quad (2.6)$$

Um caso particular de sistema linear com chaveamento é

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x(t), \quad (2.7)$$

onde, assim como em (2.5), todos os sub-sistemas são lineares. Simplificando a notação, os argumentos de tempo serão omitidos de forma que

$$\dot{x} = f_{\sigma}(x) \quad (2.8)$$

e

$$\dot{x} = A_{\sigma}x, \quad (2.9)$$

respectivamente.

Note que é difícil fazer uma distinção formal entre chaveamento dependente do estado e do tempo. Se os elementos do conjunto indexado \mathcal{P} em (2.4) são correspondentes um para um com as regiões de operação definidas na Seção 2.1.1, e se os sistemas nes-

tas regiões são aqueles que aparecem em (2.4), então, para um sinal de chaveamento apropriado, toda possível trajetória do sistema com chaveamento dependente do estado é também uma solução do sistema com chaveamento dependente do tempo dado em (2.8). A partir dessas observações, tais sistemas podem ser considerados como modelos ordinários para os precedentes, podendo ser utilizados, por exemplo, quando as posições das superfícies de chaveamento são desconhecidas. Estes apontamentos são importantes na análise de sistemas com chaveamentos (2.8) (Hespanha et al. 2003b).

2.1.3 Chaveamento Autônomo e Controlado

No chaveamento independente, os eventos que ocasionam o chaveamento são acionados por mecanismos externos, sobre os quais não se tem controle (ou foram ignorados durante a modelagem). Por exemplo, mudanças abruptas na dinâmica do sistema podem ser causadas por fatores imprevisíveis do ambiente ou falhas de componentes.

No entanto, em muitas situações o chaveamento controlado é conduzido de forma que um comportamento desejado para o sistema seja alcançado. Na Seção 2.3, problemas deste tipo serão apresentados. Uma motivação para o estudo de sistemas com chaveamento controlado está presente no segmento de *dispositivos embarcados*, nos quais um programa de computador interage com dispositivos físicos (ver Figura 2.4).

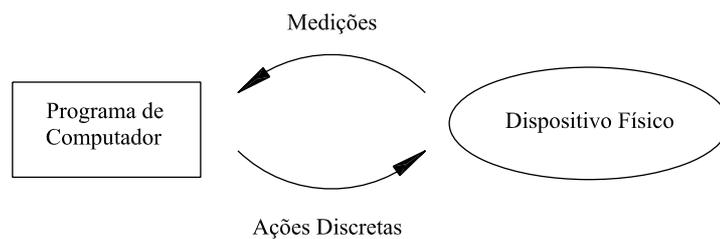


FIGURA 2.4: Um sistema controlado por computador.

Não é fácil estabelecer diferenças precisas entre chaveamentos autônomo e controlado, ou entre chaveamentos dependentes do estado e do tempo. Em um dado sistema, esses diferentes tipos de chaveamento podem coexistir. Se um dado processo é propenso a influências externas imprevisíveis ou a falhas de componentes (chaveamento

autônomo), então pode tornar-se necessário considerar mecanismos baseados em lógica para detectar esses eventos e gerar as ações de correção necessárias (chaveamento controlado) (Liberzon 2001).

Na modelagem do acionamento de um automóvel discutido no exemplo 2.1, uma transmissão automática corresponde a um chaveamento predeterminado dependente do estado, enquanto que em uma transmissão manual o chaveamento é controlado pelo motorista. Neste caso, o chaveamento dependente do estado (trocar de marcha quando um certo valor de velocidade é alcançado), faz mais sentido do que o chaveamento dependente do tempo. O problema de estacionar um automóvel se enquadra mais apropriadamente no chaveamento dependente do tempo, uma vez que envolve mudanças periódicas padrões.

Os sistemas com chaveamento controlado podem ser descritos em uma linguagem mais conhecida da teoria de controle. Seja \mathcal{P} é um conjunto finito $\mathcal{P} = 1, \dots, m$. Portanto o sistema com chaveamento (2.8) pode ser reformulado como

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m f_i(x)u_i, \quad (2.10)$$

onde as leis de controle admissíveis são do tipo $u_k = 1$, $u_i = 0$ para todo $i \neq k$ (isto corresponde a $\sigma = k$). Em particular, o sistema linear com chaveamento (2.9) é reescrito como

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m A_i x u_i. \quad (2.11)$$

2.2 Soluções para Sistemas Híbridos

O propósito desta seção é tratar de alguns problemas que surgem na definição das soluções para sistemas híbridos. Primeiramente, algumas observações sobre sistemas de tempo contínuo são realizadas.

2.2.1 Existência e Unicidade de Soluções

Considere a equação diferencial

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in R^n. \quad (2.12)$$

Comumente, assume-se que a função f seja contínua em t e também localmente Lipschitz em x . A segunda condição significa que para todo par (t_0, x_0) existe uma constante $L > 0$ tal que a desigualdade

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y| \quad (2.13)$$

se mantém para (t, x) e (t, y) em alguma vizinhança de (t_0, x_0) . Sob estas hipóteses, sabe-se que a equação (2.12) tem uma única solução $x(\cdot)$ para toda condição inicial (t_0, x_0) . Esta solução é definida sobre algum intervalo máximo $[t_0, t_M)$.

Exemplo 2.2 *Para compreender o porquê da condição local de Lipschitz ser necessária, considere o sistema escalar invariante no tempo*

$$\dot{x} = \sqrt{x}, \quad x_0 = 0. \quad (2.14)$$

Ambas as funções $x(t) = 0$ e $x(t) = \frac{t^2}{4}$ satisfazem a equação (2.14) e a condição inicial $x(0) = 0$. A propriedade de unicidade falha porque a função $f(x) = \sqrt{x}$ não é localmente Lipschitz em zero. Devido ao rápido crescimento de \sqrt{x} em zero, é possível um escape no ponto de equilíbrio zero. Isto é, existe uma solução não nula de (2.14) que, aplicando a inversão no tempo $t \rightarrow -t$, a trajetória do sistema alcança o ponto de equilíbrio zero em tempo finito.

O intervalo máximo $[t_0, t_M)$ de existência de solução pode não ser todo semi-eixo $[t_0, \infty)$. O próximo exemplo ilustra o fato da solução escapar em tempo finito.

Exemplo 2.3 *Considere a equação*

$$\dot{x} = x^2, \quad x_0 > 0. \quad (2.15)$$

É fácil verificar que a única solução satisfazendo $x(0) = x_0$ é dada por

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \quad (2.16)$$

e é definida apenas no intervalo finito de tempo $[0, \frac{1}{x_0})$. Isto acontece devido ao crescimento não-linear para o infinito da função $f(x) = x^2$.

Visto que estamos interessados em sistemas com chaveamento, a hipótese de que a função f em (2.12) seja contínua em t é bastante restritiva. De modo a contornar este problema, para que o resultado de existência e unicidade se mantenha, é suficiente considerar que f seja contínua por partes em t . Neste caso necessita-se trabalhar com um conceito mais fraco de solução, em que a função $x(\cdot)$ seja diferenciável por partes e satisfaça a equação diferencial (2.12) quase em todo o espaço. Essas funções *absolutamente contínuas* que satisfazem (2.12) são ditas soluções no *sentido de Carathéodory* (Bacciotti & Ceragioli 2004).

2.2.2 Comportamento Zeno

A seguir ilustra-se, com auxílio do exemplo da *bouncing ball* (van der Schaft & Schumacher 2000), um tipo peculiar de comportamento que ocorre em sistemas híbridos.

Exemplo 2.4 *Considere uma bola quicando no chão. Denota-se por h a altura acima do chão que a bola atinge a cada salto e seja v sua velocidade (tomando o sentido da velocidade positiva para cima). Normalizando a constante gravitacional, obtém-se as seguintes equações de movimento, válidas entre os instantes de impacto:*

$$\dot{h} = v \tag{2.17}$$

$$\dot{v} = -1. \tag{2.18}$$

No instante de impacto, i.e., quando a bola bate no chão, sua velocidade muda de acordo com a seguinte regra

$$v(t) = -\eta v(t^-), \tag{2.19}$$

onde $v(t^-)$ é a velocidade da bola imediatamente antes do impacto, $v(t)$ é a velocidade da bola após o impacto, e $\eta \in (0, 1)$ é o coeficiente de restituição. Este modelo pode ser visto como um sistema híbrido com um único estado discreto. Os eventos de chaveamento ocorrem nos instantes de impacto, quando a não alteração da posição do estado discreto durante um chaveamento, é acompanhada por uma variação instantânea de velocidade v , que é uma das duas variáveis de estado contínuas.

Integrando-se (2.17) e (2.18), obtém-se

$$v(t) = -(t - t_0) + v(t_0) \quad (2.20)$$

$$h(t) = -\frac{(t - t_0)^2}{2} + v(t_0)(t - t_0) + h(t_0). \quad (2.21)$$

Sejam as condições iniciais $t_0 = 0$, $h(0) = 0$ e $v(0) = 1$. De (2.20) e (2.21), até que o primeiro instante de chaveamento ocorra, tem-se

$$v(t) = -t + 1 \quad (2.22)$$

$$h(t) = -\frac{t^2}{2} + t. \quad (2.23)$$

O primeiro chaveamento ocorre em $t = 2$, visto que $h(2) = 0$. Além disso, $v(2^-) = -1$, conseqüentemente $v(2) = \eta$. Utilizando-se novamente (2.20) com $t_0 = 2$, $h(2) = 0$ e $v(2) = \eta$, obtém-se

$$v(t) = -t + 2 + \eta \quad (2.24)$$

$$h(t) = -\frac{(t - 2)^2}{2} + \eta(t - 2). \quad (2.25)$$

A partir de (2.24) e (2.25), é fácil deduzir que o próximo chaveamento ocorre em $t = 2 + 2\eta$ e após este chaveamento, a velocidade é $v(2 + 2\eta) = \eta^2$.

Seguindo a análise, os instantes de chaveamento formam a seqüência $2, 2 + 2\eta, 2 + 2\eta + 2\eta^2, 2 + 2\eta + 2\eta^2 + 2\eta^3, \dots$, e as velocidades correspondentes formam a seqüência $\eta^2, \eta^3, \eta^4, \dots$. A conclusão interessante é que os instantes de chaveamento têm um ponto de acumulação finito, que é a soma da série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2\eta^k = \frac{2}{1 - \eta}. \quad (2.26)$$

Este intervalo representa o tempo acumulado dos eventos de chaveamento. Ou seja, a bola salta infinitas vezes em um intervalo finito de tempo! Este é um exemplo do denominado comportamento Zeno (ver Figura 2.5).

Através do raciocínio prévio, conclui-se que ambas $h(t)$ e $v(t)$ convergem para zero quando $t \rightarrow \frac{2}{1 - \eta}$. Deste modo, parece natural estender a caracterização do comporta-

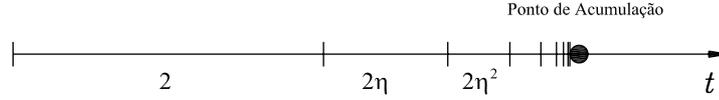


FIGURA 2.5: *Comportamento Zeno.*

mento do sistema híbrido além deste instante de tempo fazendo-se

$$h(t), v(t) \equiv 0, t \geq \frac{2}{1-\eta}. \quad (2.27)$$

Desta maneira, a bola para de saltar – um resultado razoável – apesar de que no mundo real isto já fosse acontecer após um número finito de saltos.

Em sistemas híbridos mais complexos, a tarefa de detectar uma possível trajetória Zeno e estendê-la além dos pontos de acumulação não é trivial. Entretanto este tópico está além do escopo desta introdução.

2.2.3 Modos Deslizantes

Considere um sistema com chaveamento dependente do estado contendo uma única superfície de chaveamento, denotada por \mathcal{S} , e dois sub-sistemas $\dot{x} = f_i(x)$ ($i = 1, 2$), um em cada lado de \mathcal{S} . Suponha que não existam efeitos de impulso, deste modo o estado não salta com os eventos de chaveamento. Na Seção 2.1.1, fica subentendido que quando a trajetória contínua atinge \mathcal{S} ela atravessa para o outro lado. Isto será verdade se no correspondente ponto $x \in \mathcal{S}$, ambos os vetores $f_1(x)$ e $f_2(x)$ tenham a mesma direção relativa a \mathcal{S} , como mostrado na Figura 2.6 (a). Entretanto, considere a situação mostrada na Figura 2.6 (b), onde na vizinhança de \mathcal{S} ambos os campos vetoriais f_1 e f_2 apontam para \mathcal{S} . Neste caso, não é possível descrever o comportamento do sistema do mesmo modo que anteriormente.

Uma maneira de superar a dificuldade acima é estabelecida por um conceito diferente de solução, introduzido por Filippov, que trata precisamente de problemas deste tipo (Filippov 1964). De acordo com a definição de Filippov, a função $x(\cdot)$ é uma

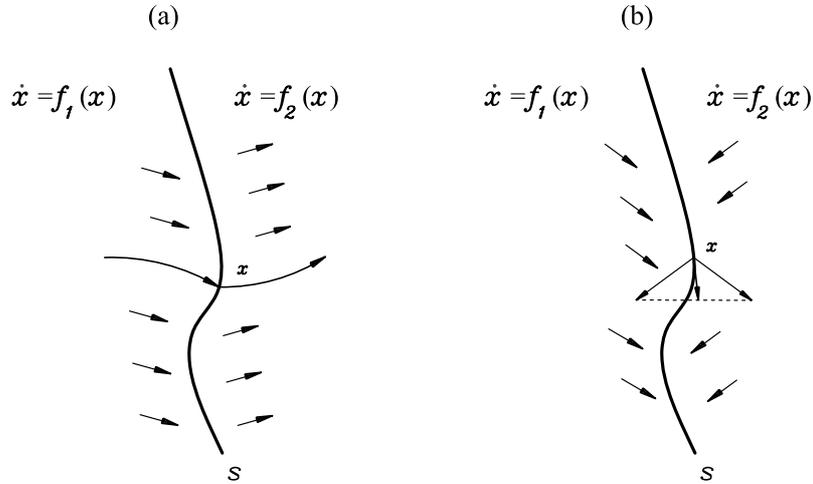


FIGURA 2.6: (a) Trajetória atravessando a superfície de chaveamento; (b) Modo Deslizante.

solução de um sistema com chaveamento se satisfizer a *inclusão diferencial* (Aubin & Cellina 1984)

$$\dot{x} \in F(x), \quad (2.28)$$

onde F é uma *função multivalorada* definida a seguir. Para $x \in \mathcal{S}$, tem-se

$$F(x) := \alpha f_1(x) + (1 - \alpha) f_2(x), \quad \alpha \in [0, 1], \quad (2.29)$$

enquanto que, para $x \notin \mathcal{S}$: $F(x) = f_1(x)$ ou $F(x) = f_2(x)$, dependendo de que lado de \mathcal{S} o ponto x encontra-se.

Não é difícil ver que as soluções de Filippov se aplicam na situação mostrada na Figura 2.6 (b). Uma vez que a trajetória alcança a superfície de chaveamento \mathcal{S} , ela não consegue sair desta superfície porque os campos vetoriais em ambos os lados estão apontando para \mathcal{S} . Portanto, a única solução possível é “deslizar” em \mathcal{S} . Assim, obtém-se o que é conhecido como modo deslizante na superfície \mathcal{S} , também denominada *variedade* $\mathcal{S} = 0$. Para descrever o movimento de deslizamento precisamente, note que existe uma única combinação convexa de $f_1(x)$ e $f_2(x)$ que é tangente a \mathcal{S} no ponto x . Esta combinação convexa determina a velocidade instantânea da trajetória começando

em x (ver Figura 2.6 (b)). A solução resultante $x(\cdot)$ é a única função absolutamente contínua que satisfaz a inclusão diferencial (2.28).

Do ponto de vista de sistemas com chaveamento, um modo deslizante pode ser interpretado como rápidos chaveamentos que ocorrem infinitamente. Chaveamentos com estas propriedades caracterizam o fenômeno de *chattering*. Este fenômeno é muitas vezes indesejável nos modelos matemáticos de sistemas reais, porque na prática ele corresponde a chaveamentos muito rápidos que causam gasto excessivo dos equipamentos, além de poder excitar modos rápidos do sistema que haviam sido desprezados, tornando o sistema instável. Por outro lado, o modo deslizante pode produzir um comportamento que seja significativamente diferente do comportamento de cada sub-sistema individualmente. Por essa razão, os modos deslizantes são muitas vezes criados com o propósito de solucionar problemas de controle que sejam difíceis de serem resolvidos de outra maneira.

Mais detalhes a respeito do controle por modos deslizantes e estrutura variável serão abordados no Capítulo 3.

2.2.4 Chaveamento com Histerese

Muitas vezes torna-se interessante aproximar o comportamento do modo deslizante, evitando-se o *chattering* e mantendo-se a propriedade de que dois eventos de chaveamento consecutivos são sempre separados por um intervalo de tempo com duração significativa. Considere novamente o sistema mostrado na Figura 2.6 (b). Construa duas regiões sobrepostas abertas Ω_1 e Ω_2 deslocando a superfície original de chaveamento \mathcal{S} , como mostrado na Figura 2.7 (a). Nesta figura, a superfície de chaveamento original é indicada pela curva tracejada, as novas superfícies de chaveamento obtidas \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 são representadas pelas duas curvas sólidas. A região Ω_1 está localizada à direita de \mathcal{S} e a região Ω_2 à esquerda. A interseção de Ω_1 e Ω_2 está localizada entre as novas superfícies \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 .

Deseja-se seguir o sub-sistema $\dot{x} = f_1(x)$ na região Ω_1 e o sub-sistema $\dot{x} = f_2(x)$ na região Ω_2 . Deste modo, os eventos de chaveamento ocorrem quando a trajetória atinge uma das superfícies $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$. Isto é conseguido introduzindo-se um estado discreto σ , de forma que $\sigma(0) = 1$ se $x(0) \in \Omega_1$, caso contrário $\sigma(0) = 2$. Para cada instante $t > 0$,

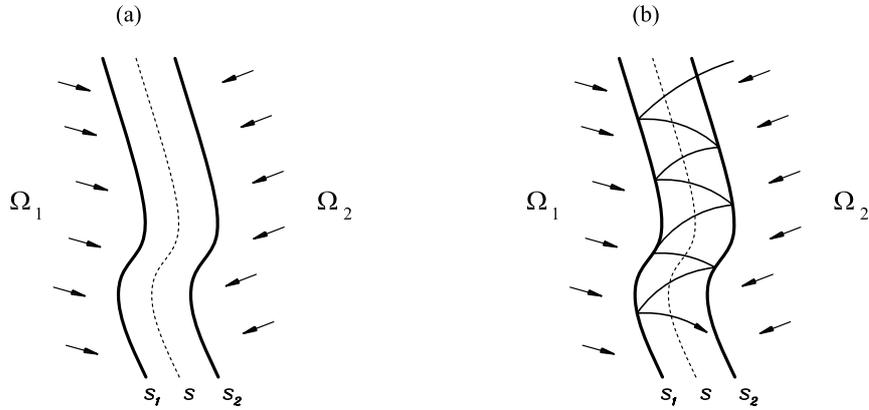


FIGURA 2.7: Histerese: (a) Regiões de chaveamento; (b) Trajetória típica.

se $\sigma(t^-) = i \in 1, 2$ e $x(t) \in \Omega_i$, mantém-se $\sigma(t) = i$. Por outro lado, se $\sigma(t^-) = 1$ mas $x(t) \notin \Omega_1$, faz-se $\sigma(t) = 2$. Analogamente, se $\sigma(t^-) = 2$ porém $x(t) \notin \Omega_2$, faz-se $\sigma(t) = 1$. Repetindo este procedimento, gera-se um sinal σ constante por partes e contínuo pela direita. Visto que σ pode mudar seu valor somente se a trajetória contínua tiver passado pela interseção de Ω_1 e Ω_2 , evita-se assim o *chattering*. Uma trajetória típica é apresentada na Figura 2.7 (b).

Este conceito é conhecido como *chaveamento com histerese*, sendo muito útil em sistemas de controle (Hespanha et al. 2003a). O sistema em malha fechada resultante é um sistema híbrido onde a variável σ é o estado discreto. Diferentemente do sistema com chaveamento dependente do estado, este sistema é verdadeiramente híbrido porque sua parte discreta apresenta “memória”: o valor de σ não é determinado pelo valor atual de x , mas também depende do valor anterior de σ .

2.3 Sistemas com Chaveamentos

Esta seção apresenta situações em que a lógica de chaveamento é de fundamental importância no contexto de sistemas de controle. A principal motivação está em problemas do seguinte tipo: dado um processo, tipicamente descrito por modelos de tempo

contínuo, deseja-se encontrar um controlador tal que o sistema em malha fechada apresente um comportamento desejado. Em alguns casos, isto pode ser alcançado aplicando-se uma lei de controle contínua estática ou uma realimentação dinâmica. Em outros casos, uma lei de realimentação contínua que resolva o problema pode não existir. Nestas situações, uma alternativa possível trata da incorporação de decisões baseadas em lógica à lei de controle e a implementação de estruturas de chaveamento entre uma família de controladores. Isto resulta em sistemas com chaveamento que em malha fechada se assemelham ao diagrama mostrado na Figura 2.8.

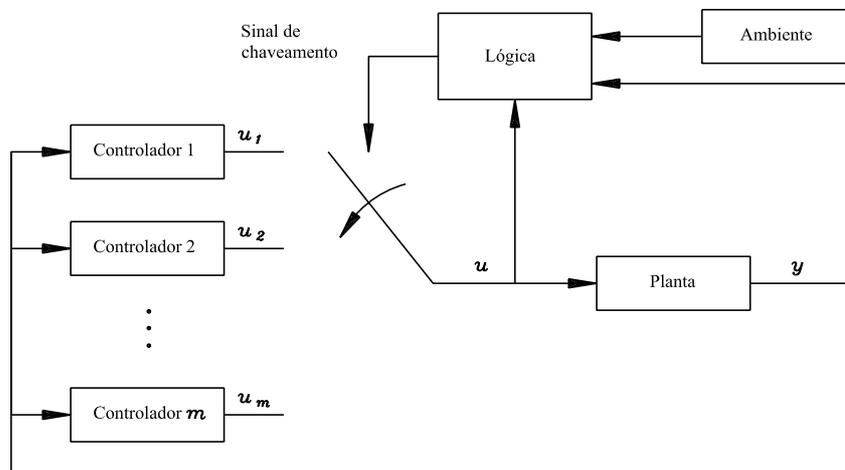


FIGURA 2.8: Chaveamento em sistemas de controle.

Existem diferentes classes de problemas para as quais considera-se a lógica de chaveamento na lei de controle:

- (1^a) Devido à natureza do problema, o controle contínuo não é adequado.
- (2^a) Devido a limitações dos sensores e/ou atuadores, o controle contínuo não pode ser implementado.
- (3^a) O modelo do sistema é altamente incerto, e uma única lei de controle contínua pode não ser suficiente.

Existem inúmeros problemas de controle que se enquadram na primeira classe. Se o processo dado está propenso à influências externas imprevisíveis ou à falhas de

componentes, então torna-se interessante considerar mecanismos baseados em lógica para detectar esses eventos e tomar as medidas necessárias. Se a trajetória desejada de um sistema é composta de segmentos com formas significativamente diferentes (e.g., manobra de aeronaves), controladores distintos devem ser aplicados nesses estágios. A necessidade de decisões baseadas em lógica também surge quando o espaço de estado de um determinado processo contém restrições. Possivelmente, existem sistemas que são suaves e são definidos em espaços sem restrições (e.g., \mathbb{R}^n) e mesmo assim não admitem leis de realimentação contínua para tarefas básicas como a estabilização assintótica. Uma classe bem conhecida de sistemas com estas características é a de sistemas de controle não-holonômicos (Bloch 2003).

A segunda classe mencionada acima também apresenta uma riqueza de exemplos. O exemplo mais simples de limitação de atuador é quando o sinal de controle possui saturação (Teel 1996). Ainda para este tipo de sistemas, o controle ótimo pode envolver técnicas de chaveamento tais como o *controle bang-bang* (Knowles 1981). Quando o número de saídas de um sistema é menor que o número de estados, o controle utilizando realimentação de saída pode ser visto com um controle com limitações na quantidade de sensores. Tipicamente, a estabilização por realimentação de saída estática não é possível, enquanto a implementação da realimentação de saída dinâmica pode ser indesejável. Por outro lado, uma simples estratégia de controle com chaveamento pode fornecer uma solução efetiva para o problema de estabilização por realimentação de saída. Deste modo, o controle com chaveamento é visto como um conjunto natural de ferramentas que podem ser aplicadas em sistemas com restrições de medição e atuação.

A terceira classe inclui problemas de controle com alta incerteza na modelagem. Uma alternativa para o controle adaptativo tradicional, onde a seleção do controlador é realizada através de uma sintonia contínua, é efetuar o processo de seleção do controlador com o auxílio de uma lógica de chaveamento entre uma família de controladores. Esta abordagem apresenta algumas vantagens sobre os algoritmos convencionais de controle adaptativo, tais como: modularidade de projeto, simplicidade de análise e ampla aplicabilidade (Hespanha et al. 2003b).

Tendo visto os tópicos fundamentais na teoria de sistemas de controle híbrido e com chaveamento, o presente trabalho tem por objetivo aplicar os conceitos aqui formulados no problema de controle de sistemas incertos.

Capítulo 3

Sistemas a Estrutura Variável

O controle por modos deslizantes (SMC) foi proposto e elaborado inicialmente no início da década de 1930 na União Soviética por Emelyanov e diversos outros pesquisadores Utkin, Guldner & Shi (1999).

Um dos aspectos mais intrigantes do controle por modos deslizantes é que a natureza descontínua da ação de controle tem como função principal o chaveamento entre sistemas com estruturas diferentes, gerando um novo tipo de movimento, denominado **modo deslizante** (Emelyanov 1970, Itkis 1976). Durante este movimento, a trajetória do estado x pode não ser nenhuma das trajetórias que descrevem os sistemas que estão sendo chaveados.

O controle por modos deslizantes pode ser interpretado como um tipo especial de técnica de controle não-linear robusto. A principal característica de controladores a estrutura variável é que, uma vez que o modo deslizante tenha sido alcançado, o desempenho do sistema torna-se insensível a incertezas paramétricas da planta e a algumas classes de perturbações externas. Esta característica é conhecida por **propriedade da invariância**, i.e., quando o regime deslizante é alcançado a dinâmica invariante é regida pela dinâmica correspondente a superfície de deslizamento, que é escolhida pelo projetista.

No modo deslizante convencional a trajetória do sistema fica restrita a uma superfície de deslizamento definida por $s(x) = 0$. Este conceito foi recentemente generalizado em Levant (1993) com a introdução dos modos deslizantes de ordem superior (Higher Order Sliding Modes - HOSM). Neste caso, a superfície de deslizamento passa

a ser definida por $s(x) = \dot{s}(x) = \dots = s^{(r-1)}(x) = 0$, onde r é a ordem do deslizamento.

Embora o modo deslizante convencional seja um caso particular dos modos deslizantes de ordem superior, este será chamado simplesmente por modo deslizante por razões históricas. Em algumas situações, por motivo de clareza, o termo modo deslizante convencional será empregado.

Do ponto de vista matemático, os Sistemas de Controle a Estrutura Variável (VSCS) são representados por equações diferenciais com lado direito descontínuo. O problema básico destas equações diferenciais é que as teorias convencionais de existência e unicidade de soluções não podem ser aplicadas, nos pontos nos quais o lado direito da equação não for analítico. Nesta Dissertação será adotada a definição de Filippov para a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo (Filippov 1964)

3.1 Sistema de Controle Descontínuo

Considere sistemas de controle do seguinte tipo:

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u, \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções suaves (contínuas no sentido de Lipschitz) e $u \in \mathbb{R}$, é uma lei de controle descontínua. Suponha que a dinâmica desejada para o sistema seja obtida com trajetórias restritas à superfície de deslizamento $s(x) = 0$. Considera-se que $s(x)$ é continuamente diferenciável e que a superfície \mathcal{S} definida por $\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}$ é contínua em x , satisfazendo a seguinte condição de regularidade:

$$\nabla_x s(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathcal{S}. \quad (3.2)$$

O sinal de controle é descontínuo e dado por:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{se } s(x) > 0, \\ u^-(x) & \text{se } s(x) < 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $u^+(x)$ e $u^-(x)$ são funções localmente Lipschitz. Note que $u(x)$ não é definido em $s(x) = 0$.

3.2 Noções Básicas de Controladores por Modos Deslizantes

Nesta seção serão apresentadas as principais características do controle por modos deslizantes. Para tornar o processo mais intuitivo e visando a facilitar o entendimento, os conceitos serão passados através de exemplos ilustrativos.

Considere o seguinte sistema de controle a estrutura variável:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ u = -\text{sgn}(s) \\ s = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

Este sistema é analiticamente definido em duas regiões do plano de fase por dois modelos matemáticos distintos:

- Na região I onde $s(x) > 0$, o modelo é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

- Na região II onde $s(x) < 0$, o modelo é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Os planos de fase para os sistemas representados pelas equações (3.5) e (3.6) são apresentados nas Figuras 3.1 e 3.2 respectivamente. Para facilitar a visualização da região de validade de cada modelo, a reta de chaveamento ($s(x) = 0$) foi traçada nos dois planos de fase. Observando a Figura 3.1 pode ser visto que na região de validade do modelo matemático todas as trajetórias do sistema apontam na direção da reta de chaveamento. Este fenômeno também pode ser observado na Figura 3.2.

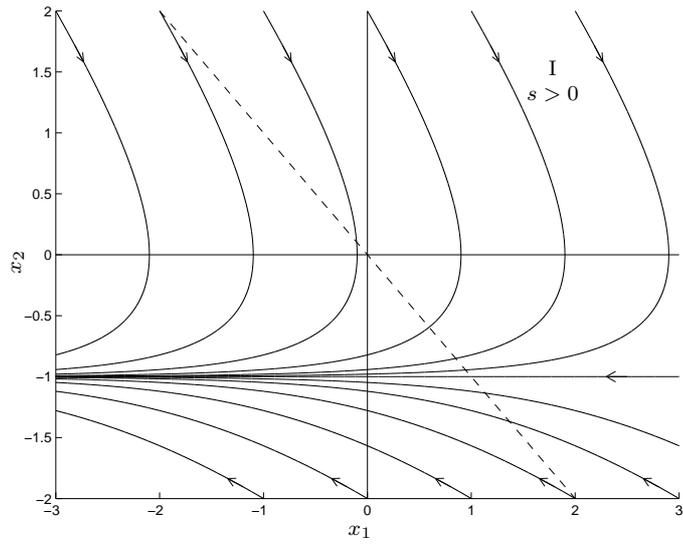


FIGURA 3.1: Plano de fase para o sistema (3.5).

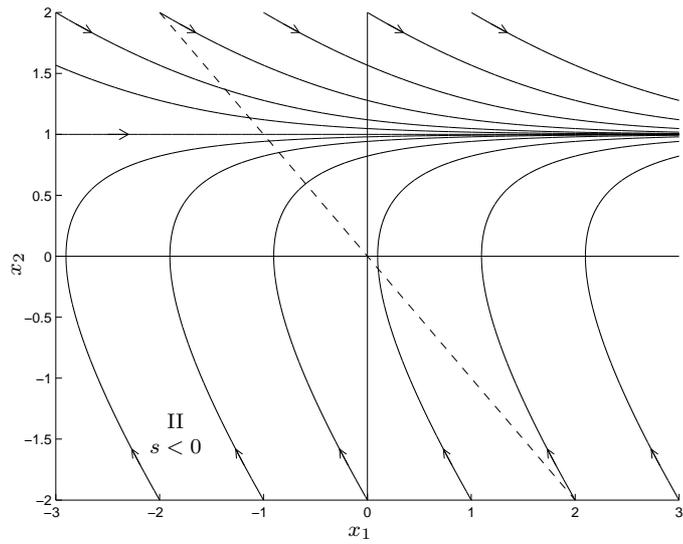


FIGURA 3.2: Plano de fase para o sistema (3.6).

O plano de fase para o sistema (3.4), apresentado na Figura 3.3, é formado através do desenho do plano de fase do sistema (3.5) na região I e do plano de fase do sistema (3.6) na região II. Para se obter o plano de fase completo é necessário descrever a trajetória do sistema no conjunto $s(x) = 0$.

Para esta finalidade, será utilizado um argumento intuitivo, ilustrado na Figura 3.4. Imagine que exista um atraso no chaveamento, ou seja, a mudança do sinal do controle ocorra um pouco depois da trajetória do sistema passar pela superfície de chaveamento.

A Figura 3.4 apresenta a trajetória do sistema e o sinal de controle para diferentes condições de atraso. Na Figura 3.4 (a) pode ser visto que se o atraso for igual a $0.1s$, a trajetória do sistema irá oscilar em torno da superfície de chaveamento. Na Figura 3.4 (b) pode ser observado que à medida que o atraso diminui ($0.05s$) a amplitude das oscilações é reduzida e a trajetória do sistema se aproxima cada vez mais da reta de chaveamento. Finalmente na Figura 3.4 (c) pode ser visto que para um atraso de $0.01s$ a trajetória do sistema fica praticamente sobre a superfície de chaveamento. Deve-se destacar também que à medida que o sistema vai se aproximando do ideal (sistema sem atraso) a frequência de chaveamento vai crescendo indefinidamente, conforme pode ser visto nas Figuras 3.4 (d), (e) e (f).

Caso os atrasos do sistema tendam para zero, o deslizamento real tenderá para o deslizamento ideal e a frequência de chaveamento do sistema tenderá para o infinito, evitando assim o surgimento de *chattering*.

Através deste raciocínio é possível concluir que, no deslizamento ideal, a trajetória do sistema fica confinada à superfície deslizante, gerando um novo tipo de movimento, já que esta trajetória não pertence a nenhum dos dois sistemas que estão sendo chaveados. Além disso, a frequência de chaveamento se torna infinita e o sinal de controle passa a não ser mais definido no tempo.

Neste movimento, denominado de **modo deslizante**, a trajetória do estado se desloca por uma superfície denominada de **superfície de deslizamento**, denotada por $s(x) = 0$. Por outro lado, no espaço de estado, o chaveamento ocorre em uma superfície denominada de **superfície de chaveamento**. Embora no caso analisado estas duas superfícies se confundam, este fato nem sempre é verdadeiro.

De modo geral, o movimento das trajetórias do sistema pode ser dividido em duas fases. Na fase de aproximação, a trajetória iniciada em qualquer lugar do plano de

fase é conduzida em tempo finito para a superfície de deslizamento. Na segunda fase, o sistema entra em modo deslizante, ocorrendo uma redução na ordem da dinâmica do sistema, que passa a ser dada pela equação da superfície de deslizamento. Para o caso analisado, no deslizamento o sistema irá ser governado pela seguinte equação diferencial:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -x_1$$

Neste momento o sistema apresentará um comportamento idêntico ao de um sistema de primeira ordem, apresentando, assim, uma convergência exponencial para a origem.

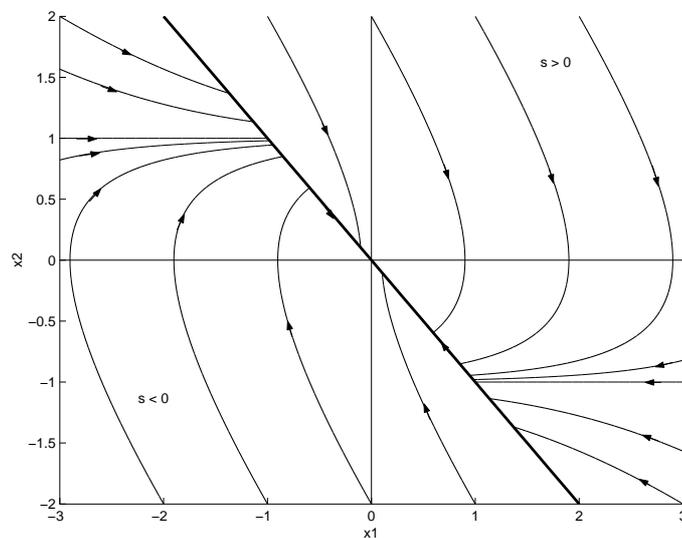


FIGURA 3.3: Plano de fase para o sistema (3.4).

Outro aspecto que deve ser ressaltado é a robustez deste tipo de controlador. Se apesar das incertezas e das perturbações existentes, as trajetórias do sistema continuarem apontando em direção à superfície de deslizamento, o sistema continuará entrando em modo deslizante, apresentando o mesmo desempenho, governado pela dinâmica referente à equação da superfície deslizante.

Para ilustrar este fato considere o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5 \sin(x_1) - x_2 + u \\ u = -\text{sgn}(s) \\ s = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (3.7)$$

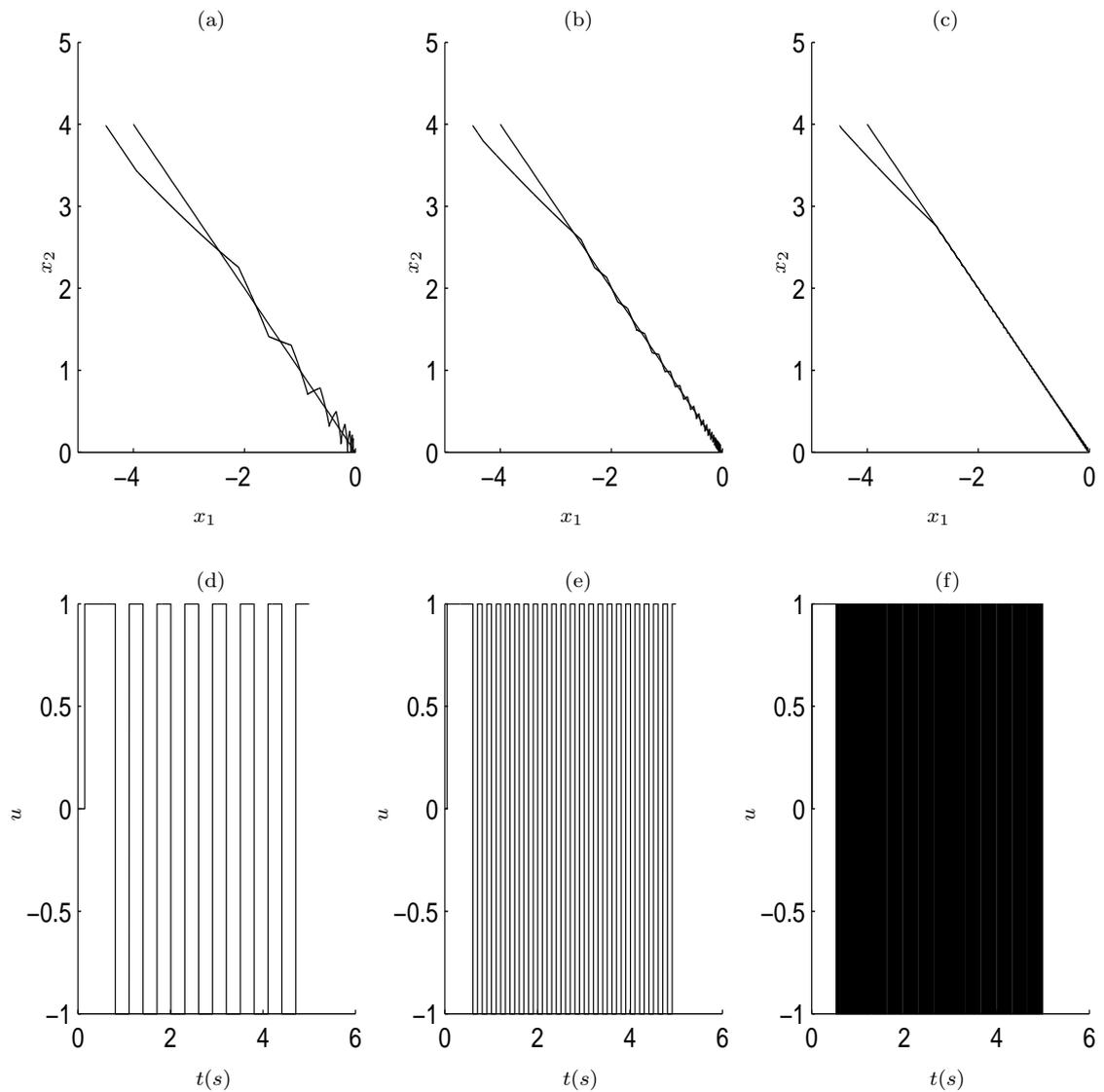


FIGURA 3.4: Trajetórias do sistema (3.4) para diferentes condições de atraso: (a) atraso igual a 0.1s; (b) atraso igual a 0.05s; (c) atraso igual a 0.01s. Sinal de controle do sistema (3.4) para diferentes condições de atraso: (d) atraso igual a 0.1s; (e) atraso igual a 0.05s; (f) atraso igual a 0.01s.

Observando o plano de fase do sistema (3.7), apresentado na Figura 3.5, pode ser visto que apesar da perturbação existente no sistema, as trajetórias continuam apontando na direção da superfície de deslizamento, garantindo, assim, que o sistema entre em modo deslizante. A partir deste momento o sistema se torna insensível à perturbação.

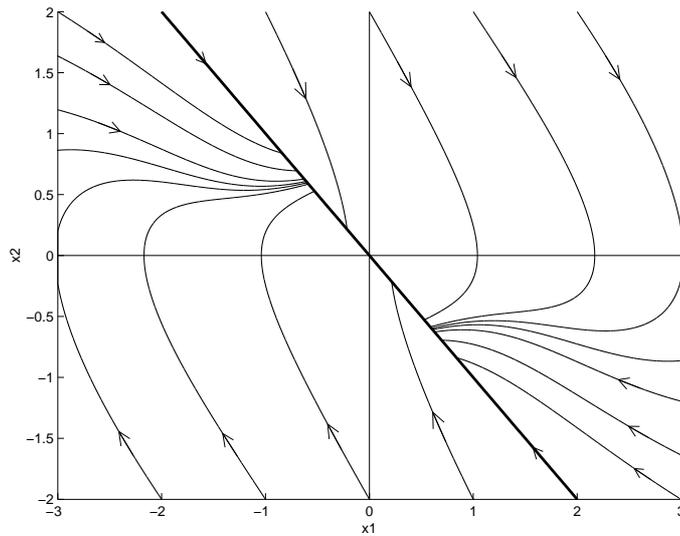


FIGURA 3.5: Plano de fase para o sistema (3.7).

3.3 Descrição Matemática de Modos Deslizantes

A descrição matemática de modos deslizantes não é simples, devido ao fato de que o sinal de controle descontínuo (equação (3.3)) e, conseqüentemente, o sistema (3.1), não serem definidos sobre a superfície de deslizamento. Além disso, a condição de *Lipschitz* para a existência e unicidade de solução de equações diferenciais é violada na vizinhança da superfície de chaveamento. Os métodos a seguir apresentam soluções para descrever, de maneira formal, o movimento durante o deslizamento.

3.3.1 Método de Filippov

Este método trata de forma axiomática a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.8)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(x, t)$ ($f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) é uma função mensurável (no sentido de Lebesgue) definida para quase todo (x, t) em um domínio E do espaço de fase (x, t) .

Além disso, para qualquer subconjunto compacto $D \subset E$, existe uma função $A(t)$ finita (localmente integrável) em quase todo (x, t) em D , tal que:

$$\|f(x, t)\| < A(t) \quad (3.9)$$

A solução da equação diferencial com lado direito descontínuo é dada pela definição a seguir, devido a (Filippov 1964).

Definição 10 (*Solução no sentido de Filippov*)

Uma função vetorial $x(\cdot)$ é denominada uma solução de (3.8), definida em $[t_0, t_1]$ se $x(\cdot)$ é absolutamente contínua em $[t_0, t_1]$, e se, para quase todo $t \in [t_0, t_1]$, tem-se:

$$\dot{x} \in \mathcal{K}[f(x, t)] \quad (3.10)$$

com

$$\mathcal{K}[f(x, t)] = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N=0} \text{conv} f[B(x, \delta) - N, t] \quad (3.11)$$

onde “conv” denota o fecho convexo, $B(x, \delta)$ é uma bola de raio δ centrada em x e μ é a medida no sentido de Lebesgue. A notação $\bigcap_{\mu N=0}$ denota a interseção de todos os conjuntos N de medida nula (no sentido de Lebesgue).

Esta definição é interpretada da seguinte forma:

- **Interpretação de $\mathcal{K}[f(x, t)]$** - considere um ponto x^s da superfície de descontinuidade $s(x) = 0$. $\mathcal{K}[f(x, t)]$ é o conjunto convexo mínimo que contém todos os valores de $f(x, t)$ para x variando em quase (a menos de um conjunto de medida

nula) toda uma vizinhança δ ($\delta \rightarrow 0$) do ponto x^s . Considere agora um ponto x^p que não pertença à superfície. $\mathcal{K}[f(x, t)]$ corresponde ao próprio campo vetorial $f(x^p, t)$.

- **Interpretação da relação (3.10)** - esta relação, denominada de inclusão diferencial, define, de forma axiomática, que o campo vetorial da solução no sentido de *Filippov* pertence a $\mathcal{K}[f(x, t)]$. A possibilidade de se rejeitar qualquer conjunto de medida nula em $\mathcal{K}[f(x, t)]$ é que permite a definição do campo vetorial na superfície de chaveamento.

Para o sistema de controle considerado (3.1)–(3.3), como $u(x)$ é uma função do estado, o sistema em malha fechada pode ser representado por:

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x, t) & \text{se } s(x) > 0 \\ f^-(x, t) & \text{se } s(x) < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

A superfície de chaveamento \mathcal{S} particiona o espaço de estado em duas regiões mutuamente excludentes, que são denotadas por $\mathcal{F}^+ := \{x : s(x) > 0\}$ e $\mathcal{F}^- := \{x : s(x) < 0\}$. A normal em um ponto $x \in \mathcal{S}$ é denotada¹ por $N_S(x)$ e os escalares $f_N^+(x, t) := N_S(x) \cdot f^+(x, t)$ e $f_N^-(x, t) := N_S(x) \cdot f^-(x, t)$ são as projeções de $f^+(x, t)$ e $f^-(x, t)$, respectivamente em $N_S(x)$.

Se a trajetória do sistema (3.1) iniciada em \mathcal{F}^+ ou \mathcal{F}^- atingir a superfície \mathcal{S} , i.e., $x(t^*) = x^* \in \mathcal{S}$, ela pode cruzar \mathcal{S} ou ser forçada a permanecer sobre \mathcal{S} . Por exemplo, se $f_N^+(x^*, t^*)$ e $f_N^-(x^*, t^*)$ possuírem o mesmo sinal, i.e., $f_N^+ f_N^- > 0$, então os dois vetores $f^+(x^*, t^*)$ e $f^-(x^*, t^*)$ apontarão para a mesma região e portanto a trajetória irá cruzar a superfície $s(x) = 0$. Se $f_N^+(x^*, t^*) \leq 0$, $f_N^-(x^*, t^*) \geq 0$ e $f_N^-(x^*, t^*) - f_N^+(x^*, t^*) > 0$ os dois vetores $f^+(x^*, t^*)$ e $f^-(x^*, t^*)$ estarão direcionados para a superfície \mathcal{S} . Neste caso pode ser mostrado que para $x^* \in \mathcal{S}$, o campo vetorial $f_0(x^*, t^*)$, da solução no sentido de Filippov, pode ser determinado pelos campos vetoriais $f^+(x^*, t^*)$ e $f^-(x^*, t^*)$ que são os valores limites de f obtidos através da aproximação da superfície \mathcal{S} a partir de

¹Por conveniência de notação, a direção positiva da normal $N_S(x)$ será definida como sendo de \mathcal{F}^- para \mathcal{F}^+ . Portanto, se o gradiente $\nabla_x s(x) \in \mathbb{R}^n$ da superfície \mathcal{S} em $x \in \mathcal{S}$ é direcionado de \mathcal{F}^- para \mathcal{F}^+ , então $N_S(x) = \nabla_x s(x)$ caso contrário $N_S(x) = -\nabla_x s(x)$.

\mathcal{F}^+ e \mathcal{F}^- respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_0(x^*, t^*) \\ f_0(x^*, t^*) &= \alpha f^+(x^*, t^*) + (1 - \alpha)f^-(x^*, t^*), \quad \alpha \in [0, 1]\end{aligned}$$

onde α é um escalar que depende das projeções f_N^+ e f_N^- dos campos f^+ e f^- sobre o vetor normal $N_S(x)$, respectivamente, do seguinte modo:

$$\alpha = \frac{f_N^-(x^*, t^*)}{f_N^-(x^*, t^*) - f_N^+(x^*, t^*)} \quad (3.13)$$

Note que para esta definição é fácil verificar que o campo vetorial $f_0(x^*, t^*)$ é ortogonal ao gradiente de \mathcal{S} , sendo, portanto, tangente a superfície $s(x) = 0$. Deste modo, as trajetórias do sistema são forçadas a permanecer sobre a superfície de deslizamento.

A interpretação geométrica da solução de Filippov na superfície de deslizamento \mathcal{S} é apresentada na Figura 3.6. No ponto $x^* \in \mathcal{S}$, os vetores f^+ , f^- estão direcionados para as regiões \mathcal{F}^- , \mathcal{F}^+ , respectivamente. O vetor f_0 do modo deslizante é a interseção do hiperplano tangente a \mathcal{S} em x^* com o segmento de linha que une f^+ e f^- .

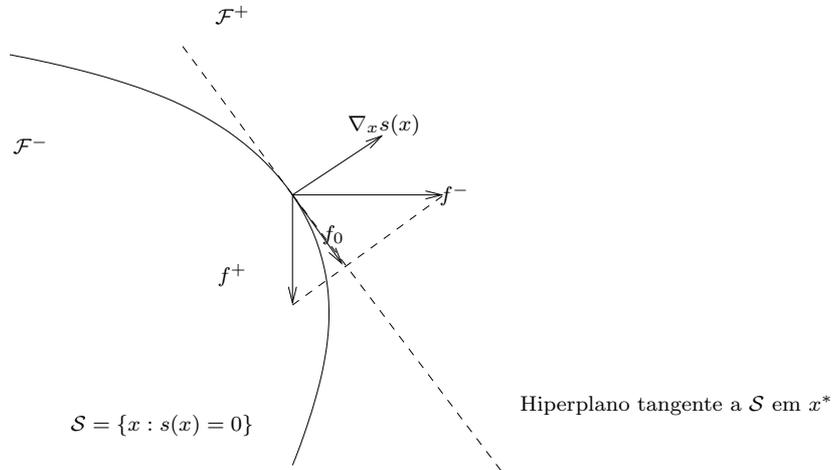


FIGURA 3.6: Interpretação geométrica da solução de Filippov.

Até este momento foram apresentadas as condições necessárias para a existência da solução do sistema (3.8) no sentido de Filippov. Para concluir, basta mostrar as condições para as quais esta solução seja única. Se f^+ e f^- forem localmente Lipschitz (em x) nas regiões \mathcal{F}^+ e \mathcal{F}^- respectivamente e f for contínua por partes, uma condição

suficiente para garantir a unicidade da solução é que pelo menos uma das desigualdades

$$f_N^- > 0, \quad f_N^+ < 0 \quad (3.14)$$

seja satisfeita para cada $x \in \mathcal{S}$.

3.3.2 Existência de Modo Deslizante

Intuitivamente, para que o sistema entre em modo deslizante, a superfície de deslizamento deve ser pelo menos localmente atrativa, i.e., deve existir um domínio envolvendo a superfície no qual as trajetórias do sistema apontem na sua direção. Este fato pode ser matematicamente expresso da seguinte forma:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad (3.15)$$

em algum domínio $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Neste caso a superfície de deslizamento seria:

$$\mathcal{D} = \mathcal{S} \cap \Omega = \{x \in \Omega : s(x) = 0\}$$

A expressão dada em (3.15) é freqüentemente substituída, pelo critério mais sucinto, porém equivalente dado por:

$$\dot{s}s < 0 \quad (3.16)$$

As condições (3.15) e (3.16) são denominadas **condições de alcançabilidade**. No caso da condição (3.16) ser satisfeita globalmente, i.e $\Omega = \mathbb{R}^n$, a função

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2$$

será uma função de Lyapunov para o estado s , uma vez que $\dot{V}(s) = \dot{s}s < 0$.

Embora as condições (3.15) e (3.16) sejam freqüentemente encontradas na literatura, elas não garantem a existência de um modo deslizante ideal, já que estas condições garantem apenas que a superfície de deslizamento seja alcançada assintoticamente.

Para garantir que a superfície de deslizamento seja alcançada em tempo finito, uma condição mais restritiva deve ser satisfeita. Uma condição muito utilizada na literatura

é a condição de alcançabilidade- η dada por:

$$\dot{s}s \leq -\eta |s| \quad (3.17)$$

onde η é uma constante positiva.

Reescrevendo a equação (3.17) como

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt} \leq -\eta |s|$$

e integrando de 0 a t_s , segue que:

$$|s(t_s)| - |s(0)| \leq -\eta t_s$$

Deste modo, o tempo necessário para atingir a superfície $s = 0$, representado por t_s , satisfaz:

$$t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \quad (3.18)$$

Nos casos analisados anteriormente, esta condição é satisfeita, garantindo, assim, o aparecimento do deslizamento ideal:

- sistema (3.4)

$$\begin{aligned} s &= x_1 + x_2 \\ \dot{s} &= -\text{sgn}(s) \\ s\dot{s} &\leq -|s| \end{aligned}$$

- sistema (3.7)

$$\begin{aligned} s &= x_1 + x_2 \\ \dot{s} &= 0.5 \sin(x_1) - \text{sgn}(s) \\ s\dot{s} &\leq -|s| (1 - 0.5 \sin(x_1)) \\ s\dot{s} &\leq -0.5 |s| \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.4 Caso Geral: Projeto da Lei de Controle

Considere o seguinte sistema não-linear monovariável (SISO)

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u, \\ s = s(x, t), \end{cases} \quad (3.20)$$

onde $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções suaves (contínuas no sentido de Lipschitz) e desconhecidas, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle e $s = s(x, t)$ é uma função de saída mensurável, cuja dinâmica dos zeros (ver, (Isidori 1995)) associada é estável e satisfaz o objetivo de controle (rastreamento ou estabilização).

O grau relativo do sistema n^* é assumido como conhecido e constante, sendo igual a 1. Isto significa de modo simplificado que o controle u só aparece explicitamente na primeira derivada de s .

O objetivo é garantir que o sistema entre em deslizamento ideal num tempo finito, i.e., a seguinte restrição deve ser satisfeita:

$$s(x, t) = 0, \quad \forall t > T_1 \quad (T_1 \text{ finito}). \quad (3.21)$$

Para satisfazer a restrição (3.21) basta atender a condição de alcançabilidade— η (3.17). Derivando $s(x, t)$ com respeito ao tempo, tem-se:

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} a(x, t) + \frac{\partial s}{\partial x} b(x, t)u = h(x, t) + g(x, t)u. \quad (3.22)$$

Para o projeto da lei de controle as seguintes hipóteses devem ser satisfeitas.

Hipótese 1 *Assume-se que os limitantes das funções $|g(x, t)|$ e $|h(x, t)|$ são conhecidos. Mais especificamente, são conhecidas funções positivas $H(x, t)$, $G_1(x, t)$ e $G_2(x, t)$ tais que, globalmente*

$$\begin{cases} |h(x, t)| \leq H(x, t) \\ 0 < G_1(x, t) \leq |g(x, t)| \leq G_2(x, t) \end{cases} \quad (3.23)$$

Hipótese 2 *Assume-se que o sinal de $g(x, t)$ seja conhecido.*

Portanto, o controle

$$u = -\frac{H(x, t) + \eta}{G_1(x, t)} \operatorname{sgn}(g(x, t)) \operatorname{sgn}(s(x, t)) \quad (3.24)$$

garante que a condição (3.17) seja satisfeita. Como resultado, $s(x, t)$ será globalmente conduzida para zero em algum tempo finito, independentemente do crescimento não-linear das incertezas.

Observação 1 *Note que a Hipótese 2 aponta a importância do conhecimento da direção de controle em esquemas baseados em modos deslizantes e estrutura variável.*

3.5 Controle Baseado em Observador

Texto extraído de Cunha (2004), exceto a Seção 3.5.2.

Devido à dificuldades práticas envolvidas na medição de todas as variáveis de estado, foram desenvolvidas diversas estratégias baseadas em realimentação de saída para SMC (vide Oh & Khalil (1995) e Shyu, Tsai, Yu & Chang (2000)). A esse respeito, o artigo pioneiro de Bondarev, Bondarev, Kostyleva & Utkin (1985) introduziu o uso de observadores assintóticos (Kailath 1980) no VSC para resolver um problema fundamental do SMC, ou seja, a realização do *modo deslizante “ideal”* na prática. A idéia chave de Bondarev et al. (1985) (vide também Utkin (1983) e Utkin et al. (1999)) é o projeto do controle para obter o modo deslizante no estado observado \hat{x} (Hsu 1997, Seção 2), (Hsu et al. 2002a, Seção 1.1).

Para ilustrar a aplicação de observadores em SMC, considere o observador assintótico

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_p \hat{x} + B_p u - L \tilde{y}, \\ \tilde{y} &= C_p \hat{x} - y, \end{aligned} \quad (3.25)$$

para a planta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_p x + B_p u, \\ y &= C_p x,\end{aligned}\tag{3.26}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^m$, no qual se assume o conhecimento dos valores das matrizes A_p , B_p e C_p da planta. A matriz de realimentação do erro de saída do observador (L) deve ser escolhida para que a matriz $(A_p - LC_p)$ seja Hurwitz, o que é sempre possível se o par $\{C_p, A_p\}$ for observável (Kailath 1980, Seções 4.1 e 7.3). Assim, garante-se que a dinâmica do erro de estimação do estado $\tilde{x}(t) := \hat{x}(t) - x(t)$, dada por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= (A_p - LC_p)\tilde{x}, \\ \tilde{y} &= C_p \tilde{x},\end{aligned}\tag{3.27}$$

seja assintoticamente estável. A variedade $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ em que ocorre o modo deslizante é dada em termos de

$$\sigma(\hat{x}) = S\hat{x}, \quad S \in \mathbb{R}^{m \times n},\tag{3.28}$$

cuja derivada em relação ao tempo obtida a partir de (3.25) é

$$\dot{\sigma} = SA_p \hat{x} + SB_p u - SLC_p \tilde{x},\tag{3.29}$$

onde o termo $SLC_p \tilde{x}$ decai exponencialmente a zero. Assim, a condição de *posto* $\text{posto}(SB_p) = m$ para a ocorrência do modo deslizante em $S\hat{x} = 0$ se aplica ao produto SB_p , i.e., a matriz S tem que ser escolhida para que SB_p tenha *posto completo*. Deve-se notar que σ é um erro auxiliar que pode ser calculado para qualquer S escolhido, uma vez que \hat{x} é totalmente conhecido.

Então, o deslizamento “ideal” pode ser obtido utilizando-se observadores de estado assintóticos, independentemente do grau relativo original da matriz de transferência da planta $G_{yu}(s)$.

Se o problema a ser resolvido for a estabilização da planta sem se requerer o casamento com um modelo de referência, então $G_{yu}(s)$ não precisa ser de fase mínima.

Este requisito se aplica apenas à matriz de transferência $G_{\sigma u}(s)$ (vide Figura 3.7), uma vez que o deslizamento é governado pelos zeros de transmissão de $G_{\sigma u}(s)$ (Young, Kokotović & Utkin 1977).

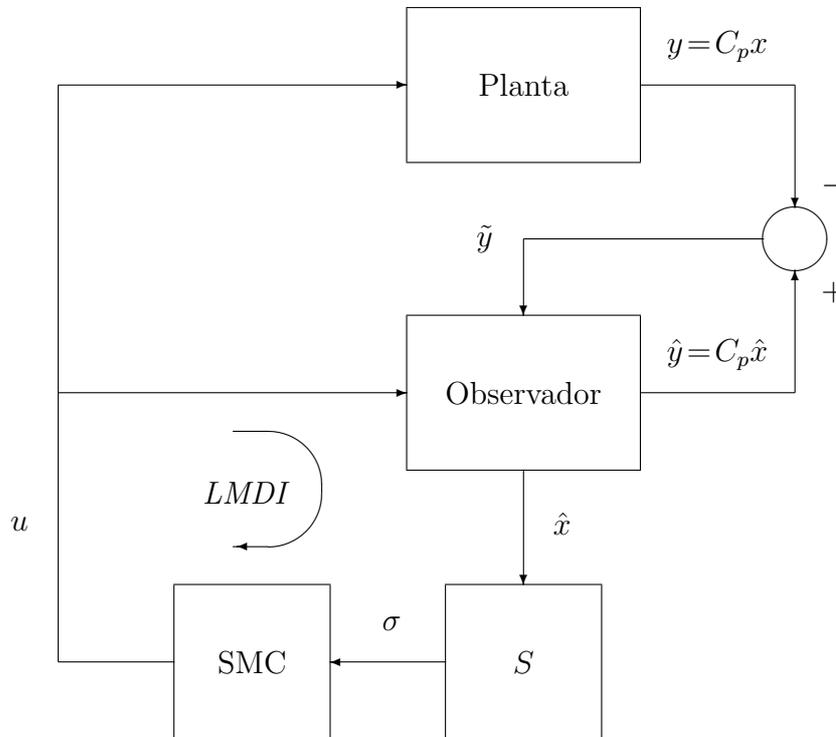


FIGURA 3.7: Controle por modo deslizante utilizando-se um observador de estado. *LMDI* indica o “Laço do Modo Deslizante Ideal”.

O ponto principal é que o sistema baseado no observador possibilita a existência de uma matriz de transferência linear com grau relativo uniforme $n^* = 1$ e de fase mínima fechando um laço, denominado “Laço do Modo Deslizante Ideal” (*LMDI*), em torno do bloco SMC (controle descontínuo), independentemente do grau relativo da planta, conforme é destacado na Figura 3.7. A existência de um *LMDI* é necessária para a realização do *modo deslizante “ideal”* (Utkin et al. 1999, Seção 8.3).

3.5.1 Observadores de alto ganho para sistemas incertos

Em Bondarev et al. (1985) e na seção anterior assume-se o conhecimento completo da planta. Para garantir robustez a incertezas na planta, foram desenvolvidos observadores por modos deslizantes (Slotine, Hedrick & Misawa 1987, Walcott & Żak 1988) ou de alto ganho (Emelyanov, Korovin, Nersisian & Nisenzon 1992a, Emelyanov, Korovin, Nersisian & Nisenzon 1992b, Esfandiari & Khalil 1992, Oh & Khalil 1995, Lu &

Spurgeon 1998, Lu & Spurgeon 1999).

Nos trabalhos anteriores sobre o controle baseado em observadores robustos, o objetivo mais usual é a estabilização através da realimentação da saída (Walcott & Žak 1988, Emelyanov et al. 1992a, Emelyanov et al. 1992b, Esfandiari & Khalil 1992, Žak & Hui 1993, Oh & Khalil 1995, Lu & Spurgeon 1998, Lu & Spurgeon 1999), mas o artigo Oh & Khalil (1997) aborda o rastreamento de trajetórias.

Um exemplo simples e ilustrativo de estabilização baseado em SMC utilizando-se um observador de alto ganho (*high gain observer* - HGO) é apresentado em Oh & Khalil (1995). Nessa abordagem, o *inverso* do ganho do observador é representado pelo parâmetro pequeno ε e um resultado típico é a existência de uma constante $\varepsilon^* > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$, então pode-se garantir o funcionamento do controlador. Por exemplo, considere a planta

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u + d(x_1), \\ y &= x_1.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Então, considerando que $d(x_1)$ é uma perturbação, um HGO poderia ser (Oh & Khalil 1995)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \frac{1}{\varepsilon}(y - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= u + \frac{1}{\varepsilon^2}(y - \hat{x}_1).\end{aligned}\tag{3.31}$$

O efeito da perturbação sobre o estado estimado (\hat{x}_1, \hat{x}_2) é reduzido na medida que $\varepsilon \rightarrow +0$. Este HGO apresenta problemas inerentes com sensibilidade a ruído, além de poder exibir o indesejável *fenômeno de pico* nos sinais do observador e do controlador (Esfandiari & Khalil 1992, Oh & Khalil 1995).

3.5.1.1 Fenômeno de Pico

O fenômeno de pico no observador de alto ganho é caracterizado pelo termo

$$\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1}) := \frac{k_{\mathcal{P}}}{\varepsilon^N} \|x_{\mathcal{P}}(0)\| e^{-\frac{\lambda_{\mathcal{P}}}{\varepsilon} t}, \quad (3.32)$$

presente nos majorantes do erro de estimação do estado (Cunha 2004). Por um lado deve-se escolher o parâmetro ε suficientemente pequeno para reduzir o erro de estimação residual e para tornar mais rápido o transitório do observador. Por outro lado, isto pode resultar no aumento do pico do erro de estimação do estado durante o transitório inicial na proporção de $1/\varepsilon^N$ (Cunha 2004).

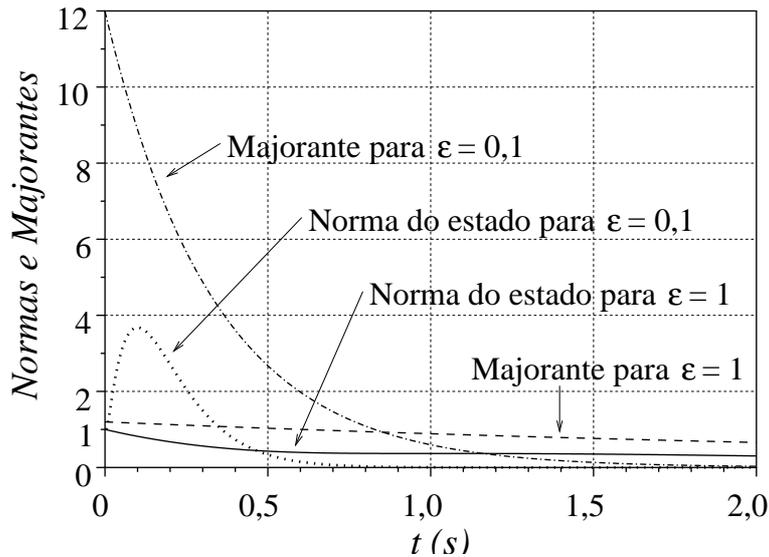


FIGURA 3.8: Fenômeno de pico no observador de alto ganho. A norma do estado é comparada com o seu majorante para dois valores do parâmetro ε .

A Figura 3.8 apresenta a norma do erro de estimação do estado durante o transitório. O fenômeno de pico fica evidente quando o parâmetro ε é reduzido de 1 para 0.1. Nota-se que majorantes estabelecidos a partir de termos como (3.32) são bastante conservadores, embora reflitam o pico pois a amplitude do majorante e a sua taxa de decaimento aumentam na medida em que o parâmetro ε é reduzido, tal qual ocorre com a norma do estado.

3.5.1.2 Tempo de Extinção do Pico

Um conceito importante sobre observadores de alto ganho é o *tempo de extinção do pico* (Cunha 2004), que é definido abaixo conforme a Figura 3.9.

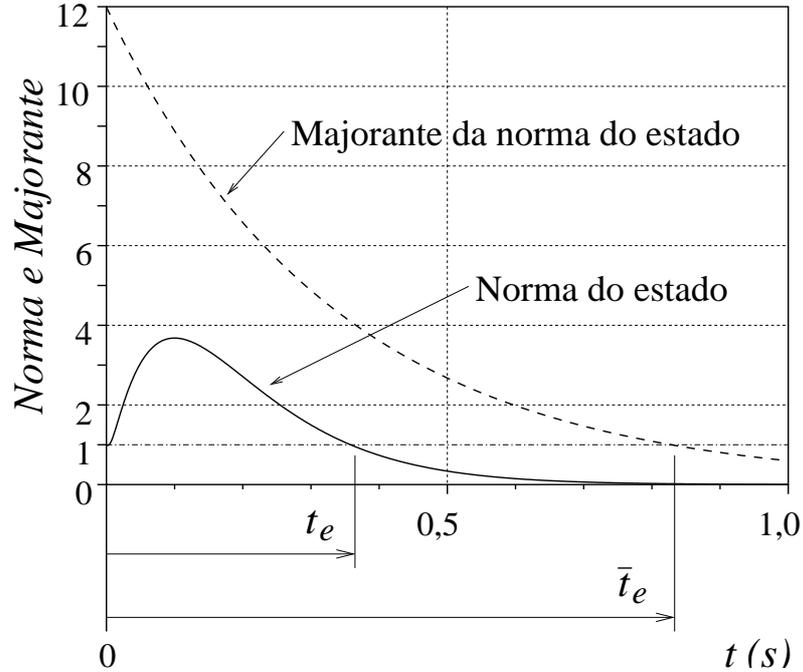


FIGURA 3.9: Tempo de extinção do pico (t_e) definido a partir da norma do termo $\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1})$ e um majorante do tempo de extinção do pico (\bar{t}_e) definido a partir de um determinado majorante para $\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1})$.

Definição 11 O tempo de extinção do pico (t_e) de qualquer termo $\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1})$, definido em (3.32), é o menor instante de tempo em que a desigualdade

$$|\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1})| \leq \|x_{\mathcal{P}}(0)\|, \quad \forall t \geq t_e \geq 0, \quad \forall x_{\mathcal{P}}(0), \quad (3.33)$$

é satisfeita para um valor fixo do parâmetro $\varepsilon \in (0, 1]$.

O tempo de extinção do pico pode ser difícil de ser calculado. Por isso, em vez de calculá-lo exatamente, pode ser mais conveniente estimá-lo através de majorantes para o termo $\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1})$. De (3.32) e (3.33), tem-se

$$\frac{k_{\mathcal{P}}}{\varepsilon^N} e^{-\frac{\lambda_{\mathcal{P}}}{\varepsilon} t} \leq 1, \quad \forall t \geq \bar{t}_e \geq 0, \quad (3.34)$$

onde $\bar{t}_e \geq t_e$ (vide Figura 3.9), da qual se conclui que

$$\bar{t}_e = \frac{N}{\lambda_{\mathcal{P}}} \varepsilon [N^{-1} \ln(k_{\mathcal{P}}) - \ln(\varepsilon)] . \quad (3.35)$$

Pode-se concluir que o *tempo de extinção de pico* é uniformemente limitado com respeito ao parâmetro $\varepsilon \in (0, 1]$ e tende para zero quando $\varepsilon \rightarrow +0$, visto que os valores de $k_{\mathcal{P}} \geq 1$, $\lambda_{\mathcal{P}} > 0$ e $N \geq 1$ são fixados.

Note que, para $t \geq t_e$, o termo com pico $\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1})$ pode ser majorado por

$$|\mathcal{P}(t, \varepsilon^{-1})| \leq \|x_{\mathcal{P}}(0)\| e^{-\frac{\lambda_{\mathcal{P}}}{\varepsilon}(t-t_e)} . \quad (3.36)$$

3.5.2 Observadores por Modos Deslizantes

Muitos autores têm utilizado observadores por modos deslizantes (*Sliding Mode Observers* - SMO) para sistemas lineares e não-lineares, e em muitas aplicações, tais como: robótica, robôs móveis, motores AC e conversores (Edwards & Spurgeon 1998, Perruquetti & Barbot 2002). Este tipo de observador é muito útil e foi desenvolvido por algumas razões:

- possui dinâmicas de erro de observação reduzidas;
- pode ser projetado sistematicamente;
- tempo de convergência finito para todos os estados observados;
- robusto a variações paramétricas.

Nesta seção, o SMO é apresentado a partir do seguinte exemplo. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) , \\ y &= x_1 , \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$ é o estado do sistema, $y \in \mathbb{R}$ é a saída do sistema e a função $f(x_1, x_2)$ é limitada ($|f(x_1, x_2)| < B$), mas não necessariamente suave, i.e. o sistema (3.37) é um caso particular de *estrutura variável dinâmica* (Perruquetti & Barbot 2002).

Deseja-se observar o estado x com a restrição adicional de se obter o valor real de x_2 em tempo finito. Para isso, além da estrutura tradicional de um SMO, utiliza-se o sinal auxiliar \tilde{x}_2 . Deste modo,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \mu_1 \text{sgn}(x_1 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(x_1, \tilde{x}_2) + E_1 \mu_2 \text{sgn}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2), \\ \hat{y} &= \hat{x}_1, \\ \tilde{x}_2 &= \hat{x}_2 + E_1 \mu_1 \text{sgn}(x_1 - \hat{x}_1),\end{aligned}\tag{3.38}$$

onde $\mu_1, \mu_2 > 0$ são constantes apropriadas, \hat{x} representa os valores estimados de x e $E_1 = 1$ se $x_1 = \hat{x}_1$, caso contrário $E_1 = 0$.

A partir de (3.37) e (3.38), a dinâmica do erro de estimação $e = x - \hat{x}$ é dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 - \mu_1 \text{sgn}(e_1), \\ \dot{e}_2 &= f(x_1, x_2) - f(x_1, \tilde{x}_2) - E_1 \mu_2 \text{sgn}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2).\end{aligned}\tag{3.39}$$

Considerando a *variedade* $S = e_1 = 0$ e a função de Lyapunov $V = \frac{1}{2}e_1^2$, prova-se a atratividade de S , visto que $\dot{V} = e_1 e_2 - \mu_1 e_1 \text{sgn}(e_1) < 0$ quando μ_1 é escolhido satisfazendo a relação $\mu_1 > |e_2|_{max}$, onde $|e|_{max}$ é o maior valor de $e, \forall t \geq 0$. Assim sendo, obtém-se a convergência para a superfície de deslizamento $S = 0$ em tempo finito \tilde{t} , além disso $|e|_{max} = |e|_{max}^{\tilde{t}}$, onde $|e|_{max}^{\tilde{t}}$ é o valor máximo de $e, \forall t \in [0, \tilde{t}]$. Então, para $\mu_1 > |e_2|_{max}$, \hat{x}_1 converge para x_1 em tempo finito e permanece igual a $x_1, \forall t > \tilde{t}$.

Adicionalmente, tem-se que $\dot{e}_1 = 0, \forall t > \tilde{t}$, deste modo, a partir de (3.39), obtém-se

$$e_2 = \mu_1 \text{sgn}(e_1).\tag{3.40}$$

Portanto, a saída do observador $\tilde{x}_2 = \hat{x}_2 + \mu_1 \text{sgn}(e_1)$ é igual a $x_2, \forall t > \tilde{t}$.

De agora em diante, prova-se que o observador (3.38) fornece a estimativa exata do estado do sistema (3.37) após algum tempo finito.

Observa-se que somente após $t = \tilde{t}$ e para $\mu_2 > 0$, o sinal de erro e_2 apresenta uma dinâmica estável e a condição $\mu_1 > |e_2|_{max}$ pode ser verificada. Isto é,

$$\dot{e}_2 = f(x_1, x_2) - f(x_1, \tilde{x}_2) - E_1 \mu_2 \text{sgn}(\tilde{x}_2 - \hat{x}_2).$$

com $\tilde{x}_2 = x_2$ e $E_1 = 1$, logo

$$\dot{e}_2 = -\mu_2 \text{sgn}(e_2).$$

Como \tilde{t} e $f(x_1, x_2)$ são limitados, conclui-se que $|e_2|_{max}^{\tilde{t}}$ também é limitado. Assim sendo, o observador (3.38), com hipóteses $\mu_1 > |e_2|_{max}^{\tilde{t}}$ e $\mu_2 > 0$, garante a *convergência local* de (e_1, e_2) para a origem do espaço de estado do erro.

3.6 Modos Deslizantes de Ordem Superior

A idéia básica no controle por modos deslizantes é garantir que o sistema satisfaça uma restrição apropriadamente escolhida. Para isto, o controle deve reagir imediatamente a qualquer desvio que o sistema apresente, conduzindo-o novamente para a restrição através de um controle suficientemente intenso.

O controle por modos deslizantes, por apresentar esta característica, é muito eficiente para o controle de sistemas incertos, tendo provado sua robustez e grande acurácia com respeito a diversas perturbações internas e externas.

Entretanto, a reação intensa e imediata ao mínimo desvio da restrição, pode provocar oscilações indesejadas de alta frequência no sistema. Este fenômeno denominado de *chattering* é um dos principais problemas deste controlador.

Recentemente proposto (Levant 1993), o controle por modos deslizantes de ordem superior (Higher Order Sliding Modes - HOSM) generaliza a idéia básica do controle por modos deslizantes atuando nas derivadas temporais de ordem superior do desvio em relação à restrição, em vez de influenciar a primeira derivada do desvio como acontece no controle por modos deslizantes convencional.

O controle por modos deslizantes de ordem superior além de preservar as principais vantagens do controle por modos deslizantes e fornecer uma acurácia ainda maior,

também possibilita a remoção do *chattering* (Fridman & Levant 2002).

O principal problema na implementação de um HOSM é o acréscimo de informação requerida. De forma geral, um controlador por modos deslizantes de ordem r , para manter a restrição $s = 0$, necessita que os sinais $s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}$ estejam disponíveis. Este problema foi resolvido, pelo menos de forma teórica, através dos diferenciadores exatos e robustos (Robust Exact Differentiators - REDs), apresentados em Levant (1999), Levant (2001*b*) e Levant (2001*a*).

Estes diferenciadores são capazes de fornecer em tempo real derivadas exatas até a ordem l , desde que a derivada de ordem $l + 1$ seja limitada. Na prática, devido a existência de atrasos e ruídos o diferenciador apresenta erros na estimativa das derivadas, embora possua desempenho assintoticamente ótimo na presença de pequenos ruídos de medição (Levant 2003).

3.6.1 Definições de Modos Deslizantes de Ordem Superior

O modo deslizante de ordem superior, é na verdade, um movimento num conjunto de descontinuidade do sistema dinâmico entendido no sentido de Filippov (Filippov 1964). A ordem do deslizamento caracteriza o grau de suavidade dinâmica na vizinhança do modo deslizante. Se a tarefa for garantir que uma função suave s seja mantida igual a zero, então a ordem do deslizamento é o número total de derivadas contínuas de s (incluindo a derivada zero, i.e., $s^{(0)} = s$), na vizinhança do modo deslizante. Desta forma, o modo deslizante de ordem r é determinado pelas igualdades $s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0$, que formam uma condição de dimensão r no espaço de estado do sistema dinâmico.

Deve ser ressaltado que para um deslizamento de ordem r a derivada $s^{(r)}$ não é uma função contínua das variáveis do espaço de estado ou não existe devido, talvez, à não unicidade da solução. O modo deslizante convencional, no qual a maior parte dos sistemas a estrutura variável é baseada é de primeira ordem (\dot{s} é descontínua).

Segundo a definição, para que o modo deslizante convencional se estabeleça, a convergência deve ocorrer em tempo finito. Já no caso dos modos deslizantes de ordem superior a convergência também pode ser assintótica.

Casos triviais de HOSM assintoticamente estáveis são encontrados em diversos con-

troles a estrutura variável. Por exemplo, considere um VSC que mantém a restrição $x + \dot{x} = 0$ por meio de um modo deslizante de primeira ordem. Neste caso, existe um modo deslizante de segunda ordem assintoticamente estável com respeito à restrição $x = 0$ na origem $x = \dot{x} = 0$ (somente neste ponto).

No modo deslizante convencional a precisão obtida é proporcional ao intervalo de tempo entre duas medições ou ao atraso de chaveamento², i.e. $|s| = \mathcal{O}(\tau)$. Já o modo deslizante de ordem r pode fornecer uma precisão de até a ordem r com respeito ao intervalo de medição ou ao atraso de chaveamento, i.e. $|s| = \mathcal{O}(\tau^r)$

Embora o controle por modos deslizantes de ordem superior apresente algumas vantagens sobre o controle por modos deslizantes convencional, o fato de não existir uma condição de alcançabilidade generalizada, dificulta muito o desenvolvimento deste tipo de controlador.

3.6.2 Diferenciador Exato e Robusto (RED)

A diferenciação de sinais em tempo real é um problema antigo e bem conhecido. Um diferenciador ideal deveria ser capaz de fornecer como saída a derivada exata de qualquer sinal de entrada. Entretanto, na prática, como os sinais são corrompidos por ruídos de alta frequência, que possuem derivadas com amplitudes muito elevadas, seria impossível para estes diferenciadores fornecerem uma estimativa razoável da derivada do sinal base de interesse.

Desta forma, o objetivo é encontrar um diferenciador capaz não só de fornecer a derivada exata para uma classe de sinais de entrada, mas também de rejeitar pequenos ruídos de alta frequência.

A maior parte dos diferenciadores conhecidos fornecem estimativas muito próximas das derivadas dos sinais de entrada, além de serem capazes de rejeitar parcialmente a presença de ruídos de alta frequência. No entanto, estes diferenciadores não são capazes de fornecer derivadas exatas na ausência de ruídos. Deste modo, esses diferenciadores são robustos, mas não são exatos.

Neste trabalho será considerada a seguinte classe de sinais de entrada: seja o sinal

²por conveniência de notação, neste momento será utilizado o mesmo símbolo τ para representar tanto o intervalo de tempo entre duas medições quanto o atraso de chaveamento

de entrada $f(t)$ uma função definida em $[0, \infty)$ constituída por um sinal base $f_0(t)$ desconhecido, cuja derivada de ordem n possui constante de Lipschitz C_{n+1} , e por um ruído mensurável (no sentido de Lebesgue) e limitado com propriedades desconhecidas.

Para esta classe de sinais foi provado em (Levant 1998b) que a melhor acurácia possível obtida por um diferenciador para a derivada de ordem i é proporcional a

$$C_{n+1}^{i/(n+1)} \varepsilon^{(n-i+1)/(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n$$

onde C_{n+1} é a constante de Lipschitz da derivada de ordem n e ε é a magnitude máxima do ruído de medição.

O problema é encontrar uma estimativa em tempo real de $\dot{f}_0(t), \ddot{f}_0(t), \dots, f_0^{(n)}(t)$ que seja robusta na presença de ruídos de medição, sendo exata na sua ausência.

Considere o seguinte diferenciador de ordem (n), baseado em modos deslizantes de ordem superior, apresentado em (Levant 2001a, Levant 2003):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = v_0, \\ v_0 = -\lambda_0 |z_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \operatorname{sgn}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1, \\ v_1 = -\lambda_1 |z_1 - v_0|^{(n-1)/n} \operatorname{sgn}(z_1 - v_0) + z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_i = v_i, \\ v_i = -\lambda_i |z_i - v_{i-1}|^{(n-i)/(n-i+1)} \operatorname{sgn}(z_i - v_{i-1}) + z_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = v_{n-1}, \\ v_{n-1} = -\lambda_{n-1} |z_{n-1} - v_{n-2}|^{1/2} \operatorname{sgn}(z_{n-1} - v_{n-2}) + z_n \\ \dot{z}_n = -\lambda_n \operatorname{sgn}(z_n - v_{n-1}) \end{array} \right. \quad (3.41)$$

O diferenciador apresentado em (3.41) pode ser expresso na seguinte forma não

recursiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = -\kappa_0 |z_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \operatorname{sgn}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\kappa_1 |z_0 - f(t)|^{(n-1)/(n+1)} \operatorname{sgn}(z_0 - f(t)) + z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_i = -\kappa_i |z_0 - f(t)|^{(n-i)/(n+1)} \operatorname{sgn}(z_0 - f(t)) + z_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n = -\kappa_n \operatorname{sgn}(z_0 - f(t)) \end{array} \right. \quad (3.42)$$

para algumas constantes κ_i , $i = 0, \dots, n$ calculadas com base em $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

O teorema a seguir apresenta a propriedade de convergência em tempo finito do diferenciador (3.41).

Teorema 3.1 *Considere o diferenciador (3.41) de ordem (n) , com sinal de entrada $f_0(t)$ mensurável cuja derivada de ordem n possui uma constante de Lipschitz C_{n+1} . Se as constantes λ_i , $i = 0, \dots, n$ forem escolhidas apropriadamente, as seguintes igualdades são verdadeiras após um processo transiente de tempo finito*

$$z_0 = f_0(t); \quad z_i = v_{i-1} = f_0^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Prova: ver (Levant 2003)

A partir deste teorema é possível concluir que as igualdades $z_i = f_0^{(i)}$, $i = 0, \dots, n-1$ são mantidas num modo deslizante de segunda ordem.

O sistema (3.41) é homogêneo, suas trajetórias são invariantes com respeito à transformação $\mathcal{G}_\eta : (t, f, z_i, v_i) \mapsto (\eta t, \eta^{n+1} f, \eta^{n-i+1} z_i, \eta^{n-i} v_i)$. Desta forma, utilizando o conceito de campos vetoriais homogêneos (Rosier 1992) é possível provar que o sistema (3.41) é estável no sentido de Lyapunov.

No teorema a seguir a performance do diferenciador (3.41) na presença de um ruído é investigada.

Teorema 3.2 *Considere o diferenciador (3.41) de ordem (n) . Se o ruído de entrada satisfizer $|f(t) - f_0(t)| \leq \varepsilon$, então as seguintes desigualdades são estabelecidas em tempo finito para algumas constantes positivas μ_i e ν_i que dependem exclusivamente*

dos parâmetros do diferenciador.

$$\left| z_i - f_0^{(i)}(t) \right| \leq \mu_i \varepsilon^{(n-i+1)/(n+1)}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\left| v_i - f_0^{(i+1)}(t) \right| \leq \nu_i \varepsilon^{(n-i)/(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

Prova: ver (Levant 2003)

Observação 2 Analisando o Teorema 3.2 é fácil verificar que o diferenciador de ordem k fornece uma derivada de ordem l ($l < k$), com uma acurácia muito maior que o diferenciador de ordem l .

A melhor forma de se sintonizar os parâmetros λ_i , $i = 0, \dots, n$ é através de simulações. Uma possível escolha para o diferenciador de ordem 4 é apresentada a seguir:

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v_0, & v_0 = -8C_5^{1/5} |z_0 - f(t)|^{4/5} \operatorname{sgn}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1, & v_1 = -5C_5^{1/4} |z_1 - v_0|^{3/4} \operatorname{sgn}(z_1 - v_0) + z_2 \\ \dot{z}_2 = v_2, & v_2 = -3C_5^{1/3} |z_2 - v_1|^{2/3} \operatorname{sgn}(z_2 - v_1) + z_3 \\ \dot{z}_3 = v_3, & v_3 = -1.5C_5^{1/2} |z_3 - v_2|^{1/2} \operatorname{sgn}(z_3 - v_2) + z_3 \\ \dot{z}_4 = -1.1C_5 \operatorname{sgn}(z_4 - v_3) \end{cases} \quad (3.43)$$

Deve-se destacar que os valores $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$, utilizados para o diferenciador de ordem $(n-1)$, também podem ser aplicados para o diferenciador de ordem (n) , e, portanto, para este diferenciador é necessário, apenas, escolher mais um parâmetro.

O princípio de separação (Atassi & Khalil 1999) é trivialmente satisfeito para o diferenciador (3.41). De fato, como o diferenciador (3.41) é exato, os únicos requisitos para sua implementação são a exigência de que alguma derivada de ordem superior do sinal de entrada seja limitada e que o sistema não apresente escape em tempo finito durante o transitório do diferenciador.

No lema a seguir será demonstrado que se a derivada de ordem $(n+1)$ do sinal de entrada for limitada, então todos os sinais presentes no diferenciador (3.41) de ordem (n) não poderão escapar em tempo finito.

Lema 3.1 Considere o sistema (3.41) e assuma que os sinais $f(t), \dot{f}(t), \dots, f^{(n)}(t)$ são limitados. Se $|f^{(n+1)}(t)| \leq K_{n+1} \forall t$, para alguma constante positiva K_{n+1} , então o estado do sistema não pode divergir em tempo finito. *Prova:* ver apêndice C

Capítulo 4

Controle Adaptativo por Modelo de Referência a Estrutura Variável

Diversas técnicas para o controle de sistemas incertos vêm sendo empregadas com sucesso. Dentre as técnicas existentes pode-se destacar o controle adaptativo. O objetivo básico do controle adaptativo é garantir que o sistema permaneça apresentando um desempenho satisfatório, independentemente das incertezas ou variações de parâmetros presentes no sistema. Para isto, o controlador se utiliza de informações provenientes dos sinais mensuráveis do sistema, visando a estar sempre adaptado às diferentes configurações apresentadas pelo sistema a cada instante.

O controle adaptativo pode ser abordado através de duas estratégias distintas. No método indireto os parâmetros desconhecidos da planta são estimados e, então, os parâmetros do controlador são calculados a partir destas estimativas. Já no método direto os parâmetros do controlador são estimados diretamente através de uma lei de adaptação. Este método, em contraste com o método indireto, não realiza a identificação da planta de forma explícita.

No controle adaptativo por modelo de referência (MRAC), deseja-se produzir um sinal de controle que torne o comportamento do sistema em malha fechada próximo ao de um modelo de referência arbitrado (rastreamento), mesmo na presença de incertezas ou variações nos parâmetros no sistema. Para atingir este objetivo, os parâmetros do controlador responsáveis pelo perfeito casamento da planta com o modelo de referência são estimados através de uma lei de adaptação, utilizando apenas informações

provenientes da entrada e da saída da planta.

Embora seja destinado para sistemas incertos, o controlador MRAC apresenta problemas de robustez na presença de perturbações ou dinâmicas não modeladas e comportamento transitório ruim (Hsu & Costa 1989).

Na tentativa de resolver os problemas apresentados pelo MRAC, foi desenvolvida uma técnica de controle denominada de controle adaptativo por modelo de referência a estrutura variável (VS-MRAC), onde a lei de adaptação do tipo integral foi substituída pela síntese direta do sinal de controle (Hsu & Costa 1989, Hsu 1990).

Assim como o MRAC, o VS-MRAC utiliza apenas medições da entrada e da saída da planta, sendo, deste modo, muito útil em diversas aplicações práticas, nas quais o estado completo não é acessível.

Para o caso de plantas com grau relativo $n^* > 1$, o controlador VS-MRAC utiliza um filtro *lead* para a compensação do grau relativo, conduzindo globalmente o estado completo do erro z para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\tau)$. Este fato ocorre devido à presença do atraso introduzido pelo filtro *lead*, que impossibilita que o estado z convirja para zero (Hsu, Lizarralde & Araújo 1997).

Na tentativa de solucionar este problema poderia se utilizar o diferenciador apresentado na Seção 3.6.2 que é robusto e exato, não introduzindo atrasos na malha de controle. Entretanto, apenas propriedades de convergência local podem ser garantidas quando este diferenciador é utilizado para realizar a realimentação do sistema em malha fechada

Desta forma, a idéia é combinar as duas técnicas de estimação consideradas preservando a estabilidade global e garantindo que o estado completo do erro z tenda assintoticamente para zero. Para atingir esta finalidade, o RED é utilizado como um elemento auxiliar responsável por sintetizar um sinal que será adicionado ao sistema com o objetivo de cancelar o erro de estimação cometido pelo filtro *lead*, possibilitando, assim, que o rastreamento seja assintoticamente exato.

Neste capítulo, será apresentada a estrutura básica de um sistema baseado em modelo de referência, bem como as hipóteses iniciais necessárias para o projeto do controlador. Detalhes sobre o desenvolvimento teórico do VS-MRAC serão apresentados, sendo discutidas as principais características deste controlador. Além disso, será apresentado o controlador GRED/VS-MRAC (Global Robust Exact Differentiator Variable

Structure Model-Reference Adaptive Control), baseado no VS-MRAC, que utiliza um filtro *lead* linear em conjunto com um diferenciador exato e robusto RED, para a compensação do grau relativo excedente da planta.

4.1 Controle Adaptativo por Modelo de Referência - MRAC

O objetivo do controlador MRAC é assegurar que o conjunto formado pela planta e pelo algoritmo de controle consiga rastrear o comportamento de um modelo de referência.

Considere uma planta incerta, monovariável (SISO), linear e invariante no tempo (LTI) (Hsu, Oliveira & Peixoto 2006)

$$y = G_p(s)[u + d_e(t)] = k_p(N_p(s)/D_p(s))[u + d_e(t)], \quad (4.1)$$

onde k_p é o ganho de alta frequência, u é o sinal de entrada, y é o sinal de saída, $N_p(s)$ e $D_p(s)$ são polinômios mônicos de ordem m e n , respectivamente e a perturbação d_e é casada com a entrada u .

As seguintes hipóteses, usuais no contexto de controle adaptativo, devem ser satisfeitas:

(H1) $G_p(s)$ é de fase mínima ($N_p(s)$ é Hurwitz), estritamente própria e seus parâmetros são desconhecidos mas pertencem a um conjunto compacto conhecido.

(H2) A ordem n de $D_p(s)$ é uma constante conhecida.

(H3) $G_p(s)$ tem grau relativo $n^* := n - m$ conhecido.

(H4) O sinal do ganho de alta frequência k_p é conhecido (assume-se positivo, sem perda de generalidade).

(H5) A perturbação casada d_e é contínua por partes, uniformemente limitada e se conhece um majorante $\bar{d}_e(t)$ tal que $|d_e(t)| \leq \bar{d}_e(t) \leq \bar{d}_{sup} < +\infty, \forall t \geq 0$.

As Hipóteses (H1)–(H4) acima são usuais em controle adaptativo, vide Ioannou & Sun (1996).

Modelo de Referência: o modelo de referência é definido por

$$y_m = M(s)r = (k_m/D_m(s))r, \quad (4.2)$$

onde o sinal de referência $r(t)$ é assumido contínuo por partes e uniformemente limitado. O polinômio $D_m(s)$ é mônico de ordem n^* e $k_m > 0$.

Objetivo de Controle: o objetivo de controle é obter estabilidade global e convergência do estado do erro com respeito a origem ou para algum pequeno conjunto residual em torno dela. Em particular, o erro de rastreamento

$$e_0(t) = y(t) - y_m(t) \quad (4.3)$$

deve tender assintoticamente para zero ou para um pequeno conjunto residual.

4.1.1 Esquema de Controle do MRAC

No MRAC, os coeficientes do numerador e do denominador da planta são considerados desconhecidos. Para contornar este problema, pode-se utilizar um procedimento baseado no princípio da equivalência certa. Neste princípio, os parâmetros do controlador são estimados e utilizados na lei de controle como se fossem os parâmetros ideais. O procedimento de projeto é baseado na combinação de uma lei de controle com uma lei de adaptação que gera estimativas em tempo real dos parâmetros do controlador.

Para gerar o sinal de controle, são utilizados os seguintes filtros de entrada e saída (Narendra & Annaswamy 1989)

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \Lambda v_1 + gu \\ \dot{v}_2 &= \Lambda v_2 + gy \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde v_1 e $v_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$, Λ é escolhido de modo que o polinômio $\det(sI - \Lambda)$ seja Hurwitz e g é um vetor constante, tal que (Λ, g) seja controlável.

O sinal de controle é gerado por meio de uma combinação linear do sinal de referência r , da saída da planta y e dos vetores v_1 e v_2 . Para facilitar a notação o vetor

ω , denominado de vetor regressor, será definido como:

$$\omega^T(t) := [v_1^T \quad y \quad v_2^T \quad r] \quad (4.5)$$

Desta forma o controle pode ser parametrizado do seguinte modo:

$$u(t) = \theta^T(t)\omega(t) \quad (4.6)$$

onde $\theta^T(t) := \left[\underbrace{\theta_1(t) \dots \theta_{n-1}(t)}_{\theta_{v_1}^T(t)} \quad \theta_n(t) \quad \underbrace{\theta_{n+1}(t) \dots \theta_{2n-1}(t)}_{\theta_{v_2}^T(t)} \quad \theta_{2n}(t) \right]$ é o vetor de parâmetros adaptativos.

Quando $d_e \equiv 0$, considerando as hipóteses assumidas, existe um único vetor constante θ^* , tal que a função de transferência em malha fechada com $u = u^* = \theta^{*T}\omega$ se adequie perfeitamente ao modelo, i.e. $y = G_p(s)u = G_p(s)\theta^{*T}\omega = M(s)r$.

O esquema completo do controlador MRAC para plantas sujeitas a perturbações de entrada pode ser visto na Figura 4.1.

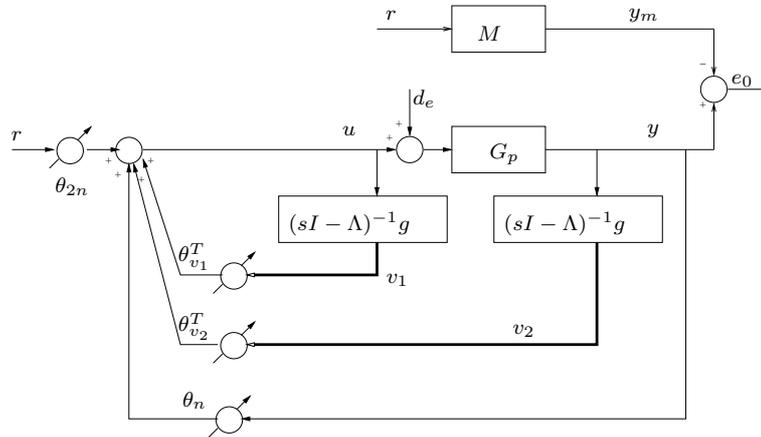


FIGURA 4.1: Estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência (MRAC).

O esquema do MRAC apresentado na Figura 4.1 pode ser representado, de forma equivalente, pelo esquema mostrado na figura 4.2.

Neste caso a **lei de controle** u é composta pelas saídas dos filtros $G_1(s)$ e $G_2(s)$ e

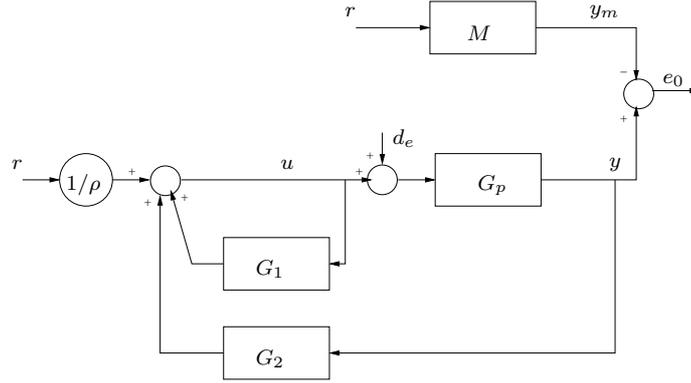


FIGURA 4.2: Representação equivalente da estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência (MRAC)

pela entrada de referência r , sendo dada por

$$u = \frac{1}{\rho} r + G_1(s)u + G_2(s)y, \quad (4.7)$$

onde:

- $\rho := \frac{k_p}{k_m}$.
- $G_1(s) := \frac{N_1(s)}{\Lambda(s)} = \theta_{v_1}^T (sI - \Lambda)^{-1} g$.
- $G_2(s) := \frac{N_2(s)}{\Lambda(s)} = \theta_{v_2}^T (sI - \Lambda)^{-1} g + \theta_n$.

com $\text{grau}[N_1(s)] \leq n - 2$, $\text{grau}[N_2(s)] \leq n - 1$ e $\text{grau}[\Lambda(s)] = n - 1$. Portanto, o filtro $G_1(s)$ é estritamente próprio e o filtro $G_2(s)$ é próprio.

Do mesmo modo que na representação anterior, também existe um controlador ideal $(\rho^*, G_1^*(s)$ e $G_2^*(s))$, para esta representação, que assegura o casamento perfeito entre o sistema em malha fechada e o modelo de referência, para o caso em que os parâmetros da planta sejam conhecidos e a perturbação de entrada d_e seja nula.

4.1.2 Equação do Erro de Saída do MRAC

Nesta seção a equação do erro de saída (ou erro de rastreamento) e_0 será desenvolvida.

Seja (A_p, B_p, C_p) uma realização mínima da planta $G_p(s)$ apresentada em (4.1) com

a seguinte representação no espaço de estados (Nunes 2004):

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + b_p u + b_p d_e \\ y &= C_p^T x_p\end{aligned}\quad (4.8)$$

Definindo o vetor de estado $X^T := [x_p^T \quad v_1^T \quad v_2^T]$ do sistema formado pelos filtros de entrada e de saída e pela planta, a seguinte representação no espaço de estado pode ser obtida:

$$\dot{X} = A_0 X + b_0 u + b'_0 d_e, \quad (4.9)$$

$$y = h_c^T X, \quad (4.10)$$

onde:

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ g C_p^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} b_p \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b'_0 = \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_c^T = \begin{bmatrix} C_p^T & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

O vetor regressor ω pode ser escrito em função do vetor de estados X da seguinte forma:

$$\omega = \Omega_1 X + \Omega_2 r, \quad \Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h_p^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Multiplicando a relação acima pelo vetor de parâmetros ideais θ^* , obtém-se a seguinte expressão para o controle ideal u^* :

$$\begin{aligned}u^* &= \theta^{*T} \omega \\ &= \theta^{*T} \Omega_1 X + \theta_{2n}^* r.\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $b_0 u^*$ na equação (4.9) tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \underbrace{[A_0 + b_0 \theta^{*T} \Omega_1]}_{A_c} X + \underbrace{(b_0 \theta_{2n}^*)}_{b_c} r + \underbrace{(b_0 \theta_{2n}^*)}_{b_c} \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*} \right) [u - u^*] + b'_0 d_e, \\ y &= h_c^T X.\end{aligned}\tag{4.13}$$

O sistema em malha fechada passa a ser representado por:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A_c X + b_c r + b_c \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*} \right) [u - u^*] + b'_0 d_e, \\ y &= h_c^T X.\end{aligned}$$

Note que, pela definição de controle ideal ($u = u^*$ e perturbação nula $d_e = 0$), a transferência de r para y deve ser igual a M . Portanto, (A_c, b_c, h_c) é uma realização, possivelmente não-mínima, da transferência M do modelo de referência. Sendo assim o modelo e sua saída podem ser representados por:

$$\begin{aligned}\dot{X}_m &= A_c X_m + b_c r, \\ y_m &= h_c^T X_m.\end{aligned}\tag{4.14}$$

A matriz A_c é Hurwitz, uma vez que o modelo de referência e os filtros de entrada e saída são estáveis. Definindo-se $X_e := X - X_m$ e $\rho^* = 1/\theta_{2n}^*$ a equação do erro de saída e_0 é dada por:

$$\dot{X}_e = A_c X_e + \rho^* b_c [u - u^*] + b'_0 d_e,\tag{4.15}$$

$$e_0 = h_c^T X_e.\tag{4.16}$$

Seja $\bar{W}_d := h_c^T (sI - A_c)^{-1} b'_0$, a função de transferência da perturbação d_e para o erro de rastreamento e_0 , com $u = u^*$ e $W_d := (\rho^* M)^{-1} \bar{W}_d$, tem-se que:

$$e_0 = \rho^* M (u - u^*) + \bar{W}_d d_e\tag{4.17}$$

$$= \rho^* M (u - u^* + W_d d_e).\tag{4.18}$$

Considerando a representação para o esquema de controle apresentada na Figura 4.2

a equação (4.18) pode ser representada pelo diagrama de blocos apresentado na Figura 4.3.

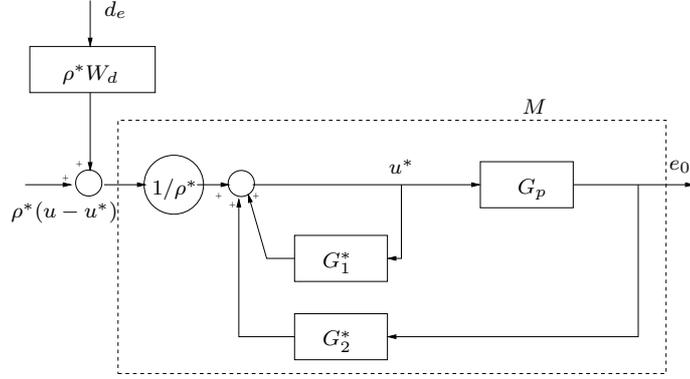


FIGURA 4.3: Esquema equivalente da estrutura do controlador MRAC com parâmetros ideais.

Note que $W_d = 1 - G_1^*$. Como a função de transferência G_1^* é estritamente própria e estável, pode-se concluir que a função de transferência W_d é própria e estável.

Assim sendo, o estado do erro $X_e := X - X_m$ e o erro de saída e_0 satisfazem:

$$\text{Espaço de Estado: } \dot{X}_e = A_c X_e + \rho^* b_c [u - \bar{u}], \quad (4.19)$$

$$e_0 = h_c^T X_e; \quad (4.20)$$

$$\text{Entrada-Saída: } e_0 = \rho^* M(s) [u - \bar{u}], \quad (4.21)$$

onde $\rho^* = k_p/k_m$ e

$$\bar{u} := u^* - W_d(s) * d_e \quad (4.22)$$

é o sinal de controle que casa a planta com o modelo de referência na presença de d_e (Hsu et al. 2006).

Visto que $X := X_e + X_m$ e que o vetor regressor satisfaz a relação (4.12), pode-se reescrever

$$\omega(t) = \Omega_1 X_e(t) + \Omega_1 X_m(t) + \Omega_2 r(t). \quad (4.23)$$

Como o sinal de referência r é, por hipótese, uniformemente limitado, então existem constantes positivas k_r e k_Ω , tal que $\|\Omega_1 X_m(t) + \Omega_2 r(t)\| \leq k_r, \forall t \geq 0$ e

$$\|\omega(t)\| \leq k_\Omega \|X_e(t)\| + k_r, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.24)$$

Como visto anteriormente, a função de transferência $W_d(s) = [\rho^* M(s)]^{-1} \bar{W}_d$ é própria e estável e $\bar{W}_d(s)$ é a função de transferência em malha fechada da perturbação de entrada d_e para o erro de saída e_0 sendo $u = u^*$. Visto que W_d é uma função de transferência própria, BIBO estável (*bounded-input-bounded-output stable*, i.e., estável no sentido entrada-saída) e d_e é uniformemente limitada, então existe uma constante positiva k_d tal que $|W_d(s) * d_e(t)| \leq k_d, \forall t \geq 0$, e \bar{u} satisfazendo

$$\forall t \geq 0 : \quad |\bar{u}(t)| \leq k_{\bar{\omega}} \|\omega(t)\| + k_d, \quad (4.25)$$

onde $k_{\bar{\omega}} := \|\theta^*\|$. Uma vez que \bar{u} deve satisfazer (4.25), é razoável restringir a classe de leis de controle admissíveis pela seguinte hipótese

(H6) A lei de controle satisfaz a desigualdade

$$\forall t \geq 0 : \quad |u(t)| \leq k_{\omega} \|\omega(t)\| + k_{\delta}, \quad (4.26)$$

onde k_{ω} e k_{δ} são constantes positivas.

Desta forma, os sinais do sistema serão regulares (*regular signals*) e, portanto, podem crescer no máximo exponencialmente (Sastry & Bodson 1989). Este limitante superior garante que todos os sinais no sistema pertençam a $L_{\infty e}$, evitando assim o escape em tempo finito.

4.2 VS-MRAC

O controlador VS-MRAC utiliza a mesma estrutura do controlador MRAC apresentado na Seção 4.1. Assim como no MRAC, o VS-MRAC utiliza apenas medições de entrada e de saída para gerar o sinal de controle.

Da mesma maneira que na Seção 4.1, o sistema representado por (4.1)-(4.4) e (4.19)-(4.21) será considerado. Além disso, serão adotadas as Hipóteses (H1)-(H5) usuais de projeto do MRAC (Narendra & Annaswamy 1989, p.183).

Novamente, o objetivo é projetar uma lei de controle $u(t)$ de forma que todos os sinais do sistema realimentado permaneçam limitados e o erro de rastreamento

$e_0 = y - y_m$ tenda assintoticamente para zero ou para algum pequeno conjunto residual em torno de zero para condições iniciais e sinais de referência arbitrários.

4.2.1 Lemas sobre o Controle à Estrutura Variável

A seguir são apresentados dois lemas que são aplicados no desenvolvimento do VS-MRAC para sistemas SISO (Hsu et al. 1997). O Lema 4.1 é utilizado na revisão do VS-MRAC para sistemas com grau relativo unitário. O Lema 4.2 é uma modificação simples, porém crucial, do (Hsu et al. 1997, Lemma 2), visto que o instante inicial $\bar{t}_0 \neq 0$ é considerado. O Lema 4.2 é aplicado na prova de estabilidade do VS-MRAC para sistemas com grau relativo arbitrário, além de fornecer o majorante na formulação da função de monitoração de sistemas com grau relativo arbitrário (ver Capítulo 6).

Lema 4.1 *Considere a seguinte relação entrada/saída:*

$$\varepsilon(t) = M(s)[u + d(t) + \pi(t)]$$

onde ε , u , d e π são sinais escalares, $M(s)$ é uma função de transferência estritamente real positiva (SPR), $d(t)$ é localmente integrável e $\pi(t)$ é uma função exponencialmente decrescente (i.e. $|\pi(t)| \leq R e^{-\lambda t}$, $\forall t \geq 0, R, \lambda \geq 0$). Seja x o vetor de estados de uma realização estável, possivelmente não-mínima, de M . Se u é dado pela lei descontínua de realimentação $u = -f(t) \operatorname{sgn}(\varepsilon(t))$, onde f é localmente integrável (LI) e satisfaz $f(t) \geq |d(t)|$, $\forall t$, então a desigualdade

$$|\varepsilon(t)| \text{ e } \|x(t)\| \leq [c_1 \|x(0)\| + c_2 R] e^{-\lambda_1 t}$$

é satisfeita $\forall t \geq 0$ para algumas constantes positivas c_1, c_2, λ_1 . Além disso, se $f(t)$ satisfaz $f(t) \geq |d(t)| + \delta$, $\forall t$, com uma constante positiva arbitrária δ , então $\varepsilon(t)$ torna-se identicamente igual a zero após algum tempo finito $t_r \geq 0$.

Prova: A demonstração está baseada na teoria de Lyapunov estendida para sistemas descontínuos. Para uma completa demonstração ver Lema V.1 de Araújo (1993, p. 43). ■

Lema 4.2 *Considere a relação entrada/saída*

$$\varepsilon(t) = \bar{M}(s)[u + d(t)] + \pi(t) + \beta(t), \quad (4.27)$$

onde $\bar{M}(s) = \bar{k}/(s + \bar{\alpha})$ ($\bar{k}, \bar{\alpha} > 0$), $d(t)$ é LI, $\beta(t)$ e $\pi(t)$ são absolutamente contínuos ($\forall t \geq \bar{t}_0 \geq 0$), sendo \bar{t}_0 qualquer instante inicial arbitrário. Assume-se que $|\pi(t)| \leq Re^{-\lambda(t-\bar{t}_0)}$, $\forall t \geq \bar{t}_0$, onde R e λ são constantes positivas. Seja $\gamma(t)$ uma função absolutamente contínua que satisfaz ($\forall t \geq \bar{t}_0$)

$$\gamma(t) \geq |\beta(t)| + |\pi(t)| \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}\gamma(t) \geq -\bar{\alpha}\gamma(t). \quad (4.28)$$

Se $u = -f(t) \operatorname{sgn}(\varepsilon)$, onde a função de modulação $f(t)$ é LI e satisfaz $f(t) \geq |d(t)|$, $\forall t \geq \bar{t}_0$, então o sinal $\bar{e}(t) := \varepsilon(t) - \beta(t) - \pi(t)$ é limitado por

$$|\bar{e}(t)| \leq |\varepsilon(t_i) - \beta(t_i)|e^{-\bar{\alpha}(t-t_i)} + \gamma(t), \quad (4.29)$$

sendo t_i qualquer instante arbitrário tal que $t_i \geq \bar{t}_0$. Se $\gamma(t) := Re^{-\bar{\alpha}_\lambda(t-\bar{t}_0)} + \|\beta_{t,\bar{t}_0}\|_\infty$, onde $\bar{\alpha}_\lambda := \min(\bar{\alpha}, \lambda)$, a seguinte desigualdade é verificada

$$|\bar{e}(t)| \leq |\varepsilon(t_i) - \beta(t_i)|e^{-\bar{\alpha}(t-t_i)} + Re^{-\bar{\alpha}_\lambda(t-\bar{t}_0)} + \|\beta_{t,\bar{t}_0}\|_\infty. \quad (4.30)$$

Prova: A prova é similar à apresentada em Hsu et al. (1997, Lemma 2). ■

Nesta Dissertação, a geração das funções de modulação nas leis de controle por modo deslizante emprega *aproximações por filtros de primeira ordem* (FOAF) (Hsu, Costa & Cunha 2003). O Lema 4.3 a seguir estende a aplicabilidade do Lema 3.1 de Ioannou & Tsakalis (1986), desenvolvido para sistemas SISO, a sistemas multivariáveis, ilustrando o que é e como se aplica a aproximação por FOAFs.

Lema 4.3 *Considere o sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Seja γ_0 a margem de estabilidade da matriz de

transferência $G(s) := C(sI - A)^{-1}B$ e seja $\gamma := \gamma_0 - \delta$ com $\delta > 0$ sendo uma constante arbitrária. Seja $\bar{u}(t)$ um majorante instantâneo de $u(t)$, i.e., $\|u(t)\| \leq \bar{u}(t)$, $\forall t \geq 0$. Então, $\exists c_1, c_2 > 0$ tais que a resposta impulsiva $g(t)$ do sistema (4.31) satisfaça

$$\|g(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t), \quad (4.32)$$

e as seguintes desigualdades sejam satisfeitas

$$\|g(t) * u(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \bar{u}(t), \quad (4.33)$$

$$\|y(t)\| \leq c_1 \exp(-\gamma t) * \bar{u}(t) + c_2 \exp[-(\lambda_0 - \delta)t] \|x(0)\|, \quad (4.34)$$

$\forall t \geq 0$, onde λ_0 é a margem de estabilidade da matriz A .

Prova: Vide Hsu et al. (2003, Lemma 2). ■

Observação 3 Se o sistema (4.31) for não-controlável ou não-observável, alguns autovalores de A não serão pólos de $G(s)$, então as margens de estabilidade obedecerão $\lambda_0 \leq \gamma_0$. Se o sistema for controlável e observável, então $\lambda_0 = \gamma_0$. Além disso, se o sistema autônomo for assintoticamente estável, então $0 < \lambda_0 \leq \gamma_0$.

Observação 4 Se a equação de saída do sistema (4.31) for $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, então a matriz de transferência do sistema é dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ e o Lema 4.3 se verifica adicionando-se o termo $c_4 \bar{u}(t)$ ($c_4 \geq \|D\|$) aos majorantes (4.33) e (4.34). Naturalmente a resposta impulsiva $g(t)$ deve ser modificada adequadamente.

Observação 5 O Lema 4.3 estabelece condições de existência para as constantes c_1 e c_2 e um majorante para γ de forma adequada à análise de estabilidade de sistemas de controle (e.g., (Hsu et al. 2002a)). No entanto, isto é insuficiente para a síntese dos FOAFs. No projeto de controladores por modo deslizante, os valores das constantes c_1 e γ devem ser selecionados para se manter as amplitudes dos sinais em níveis moderados. Com o intuito de contornar esses problemas, foram apresentados métodos para a computação dos valores dos coeficientes do FOAF em (Cunha 2004, pp. 51–67).

4.2.2 VS-MRAC : Plantas com Grau Relativo $n^* = 1$

A principal idéia do VS-MRAC para o caso de plantas com grau relativo $n^* = 1$ é fechar a malha do erro com um relé, com uma modulação $f(t)$ apropriada, ou seja o sinal de controle é dado por:

$$u = -f(t)\text{sgn}(e_0). \quad (4.35)$$

Neste caso, o modelo de referência pode ser escolhido como sendo estritamente real positivo (SPR), de forma que uma malha de deslizamento ideal (*ideal sliding loop* - ISL) (Hsu 1997) se forme ao redor da função de chaveamento, fazendo com que o estado do erro convirja para zero exponencialmente ou em tempo finito.

A Figura 4.4 apresenta o diagrama em blocos do VS-MRAC para o caso de plantas com grau relativo $n^* = 1$.

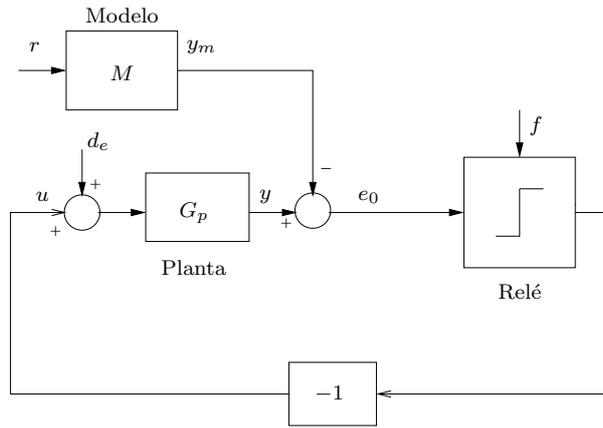


FIGURA 4.4: VS-MRAC - caso: grau relativo $n^* = 1$.

Como o VS-MRAC utiliza a mesma estrutura de controle do MRAC, a equação do erro de saída é descrita pela equação (4.21). De acordo com o Lema 4.1, quando o modelo de referência é escolhido de forma a ser SPR, para que o objetivo de controle seja satisfeito, a *função de modulação* deve atender a seguinte restrição:

$$f(t) \geq |u^*| + |W_d * d_e| + \delta, \quad (4.36)$$

onde δ é uma constante arbitrária não negativa. Neste caso o sistema é globalmente exponencialmente estável, possuindo todos os sinais uniformemente limitados. Se a constante δ for positiva o erro de rastreamento e_0 torna-se identicamente nulo após

algum tempo finito. Assim sendo, a função de modulação $f(t)$ pode ser implementada do seguinte modo:

$$f(t) = \bar{\theta}^T |\omega(t)| + \hat{d}_e(t) + \delta \quad (4.37)$$

onde $\bar{\theta}^T$ é um majorante para o vetor de parâmetros incertos, tal que $\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$ (Hsu, Araújo & Costa 1994) e $\hat{d}_e(t)$ é um majorante para $|W_d * d_e|$ obtido a partir do Lema 4.3.

Como esta implementação da função de modulação satisfaz a condição (4.36), os objetivos de controle são assegurados.

4.2.3 VS-MRAC: Plantas com Grau Relativo $n^* > 1$

Para o caso de plantas com grau relativo $n^* > 1$ o modelo de referência não pode ser escolhido SPR. Para resolver este problema pode-se utilizar um operador $L(s)$ (não-causal) de forma a compensar o grau relativo excedente da planta. Como o modelo de referência é conhecido, o operador $L(s)$ pode ser escolhido de forma que a função de transferência $ML(s)$ seja SPR, reduzindo o problema ao caso $n^* = 1$ ($L(s) = 1$), abordado na Seção 4.2.2.

Entretanto, como este operador não é causal, ele não pode ser implementado na prática. Na verdade, o que pode ser feito é uma realização aproximada deste operador. No controlador nomeado **LF/VS-MRAC**¹, este operador é realizado através de um compensador *lead* linear com a seguinte função de transferência (Nunes 2004):

$$\mathcal{L}(s) = \frac{L(s)}{F(\tau s)} \quad (4.38)$$

onde $F(\tau s)$ é um polinômio Hurwitz em τs , ou seja, $F(\tau s) = (\tau s + 1)^l$, onde l é o grau de $F(\tau s)$ e $F(0) = 1$.

O esquema do controlador LF/VS-MRAC para plantas com grau relativo $n^* > 1$ pode ser visto na Figura 4.5

À medida que τ tende para zero a função de transferência $L/F(s)$ tende para $L(s)$. Portanto o esquema apresentado na Figura 4.5 compensa aproximadamente o excesso de grau relativo da planta.

¹sigla em inglês, LF/VS-MRAC - *Lead Filter Variable Structure Model-Reference Adaptive Control*

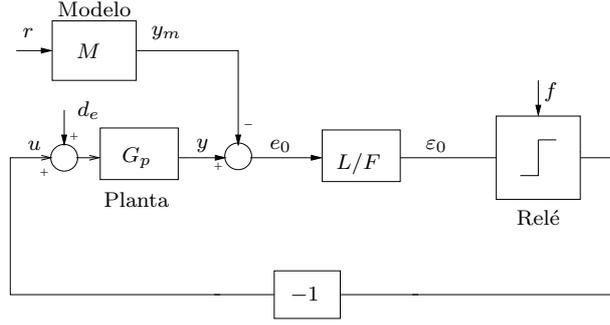


FIGURA 4.5: LF/Vs-MRAC: VS-MRAC usando um filtro *lead* linear para compensação de grau relativo.

O sinal de erro auxiliar ε_0 apresentado na Figura 4.5 pode ser definido como:

$$\varepsilon_0 = \frac{L(s)}{F(\tau s)} e_0. \quad (4.39)$$

Substituindo-se (4.21) em (4.39), após algumas manipulações algébricas, o seguinte resultado pode ser obtido:

$$\varepsilon_0 = \rho^* ML[u - \bar{u}] + \beta_{\bar{u}} + \beta_u, \quad (4.40)$$

onde

$$\beta_{\bar{u}} = - \left[\rho^* ML \left(\frac{F-1}{F} \right) \right] \bar{u} \quad (4.41)$$

$$\beta_u = - \left[\rho^* ML \left(\frac{F-1}{F} \right) \right] u. \quad (4.42)$$

Note que a função de transferência $M(s)L(s) \left[\frac{F(\tau s)-1}{F(\tau s)} \right]$ é estável e estritamente própria.

4.2.3.1 Análise de Estabilidade: LF/Vs-MRAC

Seja z o vetor de estado completo do sistema (4.19) e (4.40)-(4.42). A fim de levar em consideração as condições iniciais, é conveniente criar a seguinte partição do vetor de estado z :

$$z^T = [(z^0)^T, z_e^T] \quad z_e^T = [X_e^T, x_f^T] \quad (4.43)$$

onde o vetor x_f^T corresponde ao vetor de estado do filtro *lead* e o vetor z^0 denota o estado do transiente correspondente aos operadores W_d e $ML \left[\frac{F-1}{F} \right]$, de modo similar

ao vetor z^0 considerado em Hsu et al. (1997). No que se segue, EXP e EXP^0 denotam qualquer termo da forma $K\|z(0)\|e^{-at}$ e $K\|z^0(0)\|e^{-at}$, respectivamente, onde a é uma constante positiva genérica (Hsu 1997).

A proposição a seguir caracteriza as propriedades de convergência do erro auxiliar $\varepsilon_0(t)$. Esta proposição garante que, para funções de modulação apropriadas, o sinal $\varepsilon_0(t)$ é limitado por uma norma $L_{\infty e}$ do vetor regressor.

Proposição 1 *Considere a equação do erro auxiliar (4.40), com $u = -f(t)\text{sgn}(\varepsilon_0)$. Se a função de modulação do relé satisfaz a restrição (4.36) e a função de transferência $ML(s)$ é da forma $ML(s) = K_m/(s + a_m)$ ($K_m, a_m > 0$) então,*

$$|\varepsilon_0(t)| \leq \tau K_{\varepsilon_0} C(t) + EXP, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.44)$$

onde $K_{\varepsilon_0} > 0$ é uma constante, τ é a constante de tempo de F^{-1} e

$$C_1(t) = \sup_{0 \leq t_s \leq t} \|\omega(t_s)\|; \quad C(t) = K_{\theta} C_1(t) + K_{\beta} \quad (4.45)$$

para algumas constantes positivas K_{θ}, K_{β} .

Prova: Ver Apêndice D (Nunes 2004). ■

O resultado de estabilidade global é enunciado no teorema a seguir.

Teorema 4.1 *Considere o sistema (4.19) e (4.39), com $u = -f(t)\text{sgn}(\varepsilon_0)$. Assuma que a condição (4.36) é satisfeita e $ML(s) = K_m/(s + a_m)$ ($K_m, a_m > 0$). Então, para τ suficientemente pequeno, o sistema completo do erro, com estado z , é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem τ independentemente das condições iniciais, isto é, existem constantes positivas K_z e a tais que $\forall z(0), \forall t \geq 0, \|z(t)\| \leq K_z e^{-at} \|z(0)\| + \mathcal{O}(\tau)$.*

Prova: Ver Apêndice D (Nunes 2004). ■

Observação 6 *O Teorema 4.1 apenas garante a convergência do erro para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\tau)$, podendo assim ocorrer o fenômeno de chattering.*

Observação 7 *Note que o resultado de estabilidade enunciado anteriormente para o controlador LF/VS-MRAC é extremamente conservador, uma vez que o estado do filtro*

lead x_f apresenta o fenômeno de pico (vide Seção 3.5.1.1), assim como o majorante para o estado z (Teorema 4.1), sendo a constante K_z da ordem $\mathcal{O}(1/\tau^{n^*-1})$.

4.3 GRED/VS-MRAC

O princípio fundamental para a compensação do grau relativo consiste em reduzir o problema ao caso $n^* = 1$ introduzindo-se o operador

$$L(s) = s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \dots + a_0, \quad N := n^* - 1, \quad (4.46)$$

tal que $G_p L(s)$ tenha grau relativo unitário e $ML(s)$ seja SPR. Contudo, o operador $L(s)$ não é realizável (não-causal).

Nas Seções 3.6.2 e 4.2.3 duas soluções para a compensação do grau relativo foram discutidas. Observa-se que o filtro *lead* garante a estabilidade global, mas não fornece a estimativa exata de $\bar{e}_0 = L(s)e_0$, ocasionando o fenômeno de *chattering*. Por outro lado, o RED pode prover a estimativa exata de \bar{e}_0 , entretanto são verificadas apenas propriedades de convergência local.

Desta forma, uma idéia natural seria combinar as duas técnicas de estimação consideradas, de forma a preservar a estabilidade global e garantir que o estado completo do erro z , assim como o erro de rastreamento e_0 , tendam assintoticamente para zero.

O esquema de controle denominado GRED/VS-MRAC (ver Figura 4.6) atinge esses objetivos através de um esquema de chaveamento suave entre um filtro *lead* e um RED. Neste esquema, o relé, que idealmente teria como entrada o sinal \bar{e}_0 , recebe um sinal vindo de um bloco composto pelo filtro *lead* (L/F) e o RED. A saída deste bloco $\tilde{\varepsilon}_0$ consiste de uma combinação convexa das estimativas de L/F e do RED dada por

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \alpha(\tilde{e})\varepsilon_0(t) + [1 - \alpha(\tilde{e})]\bar{\varepsilon}_0(t), \quad (4.47)$$

onde ε_0 e $\bar{\varepsilon}_0$ são estimativas de \bar{e}_0 fornecidas por L/F e o RED, respectivamente, e $\tilde{e} = \bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0$ é a diferença entre ambas as estimativas. A função de chaveamento $\alpha(\tilde{e})$ é uma modulação contínua e dependente do estado que permite ao controlador trocar suavemente entre os dois estimadores. Esta função pode assumir valores no intervalo

$[0, 1]$ e será definida posteriormente.

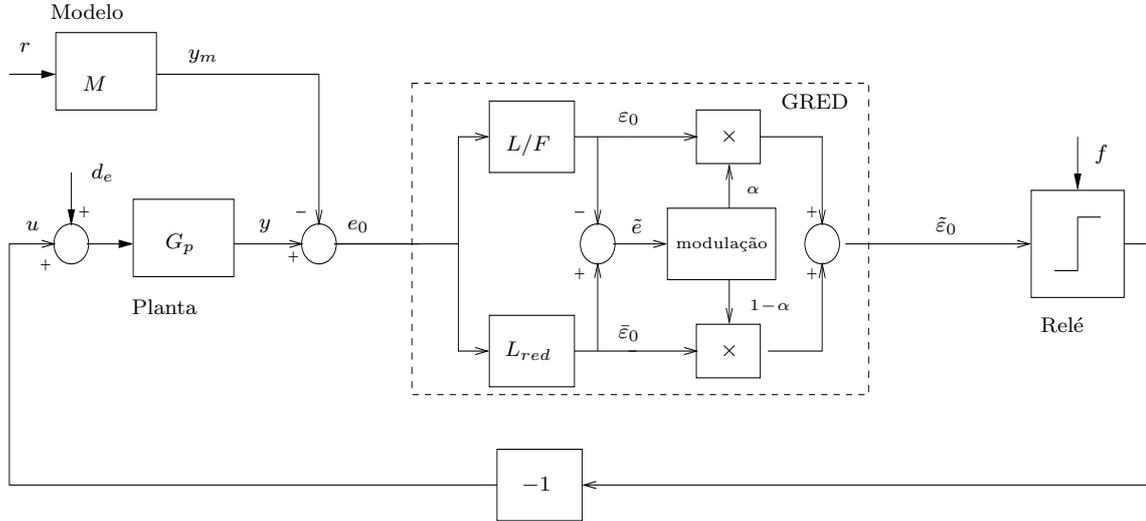


FIGURA 4.6: Esquema do controlador GRED/VS-MRAC para a compensação do grau relativo

As estimativas dadas pelo L/F e o RED podem ser escritas como:

$$\varepsilon_0(t) = \bar{\varepsilon}_0(t) + e_F(t), \quad (4.48)$$

$$\bar{\varepsilon}_0(t) = \bar{\varepsilon}_0(t) + e_r(t), \quad (4.49)$$

sendo $e_F(t)$ e $e_r(t)$ os erros de estimação.

Do mesmo modo que nos casos anteriores, a estimativa fornecida pelo GRED pode ser vista de forma equivalente por:

$$\tilde{\varepsilon}_0(t) = \bar{\varepsilon}_0(t) + \epsilon(t), \quad (4.50)$$

onde

$$\epsilon(t) = \alpha(\tilde{\varepsilon})e_F(t) + [1 - \alpha(\tilde{\varepsilon})]e_r(t), \quad (4.51)$$

O erro de estimação $\epsilon(t)$ pode ser considerado como sendo uma perturbação de

saída. Desta forma, o sistema GRED/VS-MRAC pode ser descrito da seguinte forma

$$\text{Espaço de Estado: } \dot{X}_e = A_c X_e + \rho^* b_c (u - \bar{u}), \quad (4.52)$$

$$\bar{e}_0 = h_L^T X_e, \quad h_L^T := \sum_{i=0}^N h_c^T A_c^i a_i,$$

$$\text{Entrada e Saída: } \bar{e}_0 = \rho^* M(s) L(s) [u - \bar{u}], \quad (4.53)$$

$$\text{Sinal de Controle: } u = -f(t) \text{sgn}(\bar{e}_0 + \epsilon), \quad (4.54)$$

onde X_e e \bar{u} foram definidos em (4.19)-(4.22). Deste modo, como o modelo de referência é conhecido, o operador $L(s)$ pode ser escolhido de forma que $M(s)L(s) = K_m/(s+a_m)$ e o sistema $\{A_c, b_c, \bar{h}_L^T\}$ seja SPR.

4.3.0.1 Função de Chaveamento Ponderada

A função de chaveamento deve preservar as características de estabilidade global apresentadas pelo filtro *lead*, além de possibilitar que o estado completo do erro z convirja para zero.

A idéia é utilizar uma função de chaveamento que torne a estrutura de controle do sistema similar a estrutura de um sistema controlado por um LF/VS-MRAC. Na realidade, a estrutura do sistema será equivalente exceto pela presença de uma perturbação de saída uniformemente limitada, que não deve interferir nas propriedades globais apresentadas quando o filtro *lead* é utilizado.

Assim, para uma determinada função de chaveamento o sistema apresentado na Figura 4.6 pode ser representado de forma equivalente pelo sistema apresentado na Figura 4.7, sendo descrito por:

$$\text{Espaço de Estado: } \dot{X}_e = A_c X_e + \rho^* b_c (u - \bar{u}), \quad (4.55)$$

$$e_0 = h_c^T X_e,$$

$$\text{Entrada e Saída: } e_0 = \rho^* M(s) [u - \bar{u}], \quad (4.56)$$

$$\varepsilon_0 = (L/F(s))e_0, \quad (4.57)$$

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 + \beta_\alpha, \quad (4.58)$$

onde

$$|\beta_\alpha| \leq \tau K_r \quad (K_r \text{ é uma constante positiva genérica}), \quad (4.59)$$

$$u = -f(t)\text{sgn}(\tilde{\varepsilon}_0). \quad (4.60)$$

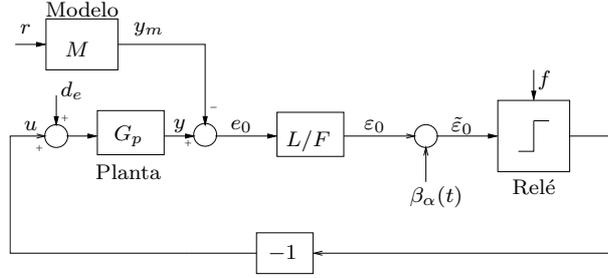


FIGURA 4.7: VS-MRAC utilizando um filtro *lead* para a compensação de grau relativo, com uma perturbação de saída uniformemente limitada.

Em (Nunes 2004), foi demonstrado que o sistema (4.55)-(4.60) apresenta as mesmas propriedades de estabilidade do sistema analisado na Seção 4.2.3, isto é, o estado z é globalmente exponencialmente estável com respeito a um conjunto residual de ordem τ .

Uma função de chaveamento $\alpha(\tilde{e})$ que satisfaz as condições acima e permite a representação equivalente da Figura 4.7 é dada por:

$$\alpha(\tilde{e}) = \begin{cases} 0, & \text{para } |\tilde{e}| < \epsilon_M - c \\ \frac{|\tilde{e}| - \epsilon_M + c}{c}, & \text{para } \epsilon_M - c \leq |\tilde{e}| < \epsilon_M \\ 1, & \text{para } |\tilde{e}| \geq \epsilon_M \end{cases} \quad (4.61)$$

onde:

$$\tilde{e} = \bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_0 = e_r - e_F, \quad (4.62)$$

$$0 < c < \epsilon_M, \quad (4.63)$$

$$\epsilon_M = \tau K_R, \quad (4.64)$$

onde K_R é uma constante positiva apropriada.

Assim sendo o seguinte lema pode ser formulado.

Lema 4.4 *Considere o sistema (4.51), (4.52) e (4.54). Se a função de chaveamento $\alpha(\tilde{e})$ for definida por (4.61), então este sistema pode ser representado, equivalentemente, por (4.55)-(4.60), com $|\beta_\alpha(\tilde{e})| < \epsilon_M$. Além disso, todos os sinais do sistema serão limitados para todo t finito.*

Prova: Vide Lema 4.1 em Nunes (2004, p. 77). ■

Deste modo, para a função de chaveamento (4.61), o sistema completo do erro com estado z também será globalmente exponencialmente estável com respeito a um conjunto residual de ordem τ (Nunes 2004).

Para concluir, falta mostrar que a função de chaveamento (4.61) também assegura que o estado z converge para zero. Para isto, primeiramente, será analisada a convergência do RED. Em seguida, será demonstrado que se a constante K_R for escolhida de forma apropriada o objetivo de controle é atingido.

4.3.0.2 Análise de Estabilidade

A seguinte proposição e corolários serão úteis na análise de estabilidade e convergência do GRED.

Proposição 2 *Para o sistema (4.19)-(4.20) as $N = n^* - 1$ derivadas de e_0 ($e_0^{(i)}, i = 1, \dots, N$) podem ser representadas por $e_0^{(i)} = h_i^T X_e$.*

Prova: Ver Apêndice E. ■

Corolário 4.1 *Para todo $R > 0$, $\exists \tau > 0$ suficientemente pequeno tal que para algum tempo finito T ,*

$$\|z(t)\| < R, \quad \forall t \geq T. \quad (4.65)$$

Corolário 4.2 *As n^* derivadas do sinal $e_0(t)$ ($e_0^{(i)}(t), i = 1, \dots, n^*$) são limitadas, i.e., existem constantes positivas tais que*

$$\left| e_0^{(i)}(t) \right| \leq K_i, \quad i = 1, \dots, n^* \quad \forall t \geq 0.$$

Prova: Ver Apêndice E. ■

O Teorema 3.1, apresentado na Seção 3.6.2, mostra que se a derivada $e_0^{(n^*)}$ for uniformemente limitada o RED converge independentemente de suas condições iniciais.

De acordo com o Corolário 4.1 o estado completo do erro é conduzido para um conjunto compacto e invariante $D_R := \{z : \|z(t)\| < R\}$ em um tempo finito $T_1 > 0$. Após o estado do erro entrar no conjunto D_R os sinais $e_0^{(i)}(t)$, $i = 0, \dots, n^*$ podem ser limitados de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 3 *Considere o esquema de controle apresentado na Figura 4.6, representado por (4.51), (4.52) e (4.54), com $\alpha(\tilde{e})$ definido em (4.61). A função de modulação é definida em (4.37). Como $\|X_e(t)\| < R$, $\forall t \geq T_1$, então:*

$$\sup_{t \geq T_1} |e_0^{(i)}(t)| \leq C_i, \quad i = 0, \dots, n^*.$$

Prova: Vide Proposição 5 em Nunes (2004, p. 78). ■

Para aplicar o Teorema 3.1 é necessário que a derivada $e_0^{(n^*)}$ seja uniformemente limitada por uma constante C_{n^*} positiva. A partir da Proposição 3 é possível encontrar este limitante para $t \geq T_1$. Como o RED é um sistema invariante no tempo suas condições iniciais podem ser consideradas em $t = T_1$. Do Lema 3.1 sabe-se que estas condições iniciais serão finitas. Desta forma, as condições do Teorema 3.1 são satisfeitas.

Portanto, se os parâmetros λ_i forem ajustados de forma correta o erro de estimação $e_r(t)$ converge para zero em um tempo finito T_2 . Este resultado de convergência está formalizado no Lema 4.5.

Lema 4.5 *Considere o sistema (4.51), (4.52) e (4.54). A função de chaveamento $\alpha(\tilde{e})$ é definida por (4.61) e a função de modulação $f(t)$ é definida em (4.37). Se os parâmetros λ_i forem ajustados de forma apropriada, então $\bar{e}_0(t) = \bar{e}_0(t), \forall t \geq T_2$.*

De acordo com o Lema 4.5 o erro de estimação $e_r(t)$ se torna zero em um tempo finito T_2 . Desta forma, se a partir deste instante apenas o RED for utilizado para estimação de \bar{e}_0 o operador $L(s)$ pode ser realizado perfeitamente e o sistema completo do erro passa a ser SPR.

Para que o RED permaneça ativo após este instante de tempo a constante K_R deve ser escolhida de forma que o limiar ϵ_M seja maior do que o limitante superior do resíduo para o qual o erro de estimação do filtro *lead* converge.

Uma maneira viável para fazer isto é escolher ϵ_M tal que $\epsilon_M > \bar{e}_F + c$, onde \bar{e}_F é o limitante superior para o erro de estimação do filtro *lead* $e_F(t)$ quando o estado completo do erro se encontra dentro do conjunto compacto e invariante D_R . Este limitante superior é caracterizado na Proposição 4.

Proposição 4 *Considere o esquema de controle apresentado na Figura 4.6, representado por (4.51), (4.52) e (4.54), com $\alpha(\tilde{e})$ definido em (4.61). A função de modulação é definida em (4.37). O erro de estimação do filtro *lead* $e_F(t)$, pode ser limitado para $t \geq T_1$ por*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{t_s \geq t} |e_F(t_s)| < \bar{e}_F \quad (4.66)$$

onde:

$$\bar{e}_F = \tau K_F \quad (K_F \text{ é uma constante positiva})$$

Prova: Vide Proposição 6 em Nunes (2004, p. 79). ■

Se a constante K_R for escolhida tal que $\epsilon_M = \tau K_R$ satisfaça

$$\epsilon_M > \bar{e}_F + c,$$

então $\alpha(\tilde{e}) = 0$, $\forall t \geq T_2$, o que implica pelo Lema 4.5 que o erro de estimação $\epsilon(t) = 0$, $\forall t \geq T_2$. Neste caso um deslizamento ideal será formado para o sistema (4.52)-(4.54).

Para o sistema equivalente apresentado na Figura 4.7, o mesmo resultado pode ser obtido. Neste caso a estimativa obtida através do RED pode ser vista como um sinal adicional β_α introduzido no sistema com a finalidade de cancelar o erro de estimação cometido pelo filtro *lead*, permitindo assim que o operador $L(s)$ possa ser realizado perfeitamente.

Os resultados de estabilidade e convergência são enunciados no Teorema 4.2.

Teorema 4.2 *Considere o controlador GRED/VS-MRAC, apresentado na Figura 4.6, representado por (4.51), (4.52) e (4.54), com $\alpha(\tilde{e})$ definido em (4.61). A função de modulação é definida em (4.37). Se K_R é tal que $\epsilon_M = \tau K_R$ satisfaz*

$$\epsilon_M > \bar{e}_F + c, \quad (4.67)$$

então, para τ suficientemente pequeno, o sistema completo do erro com estado z é globalmente exponencialmente estável com respeito a um conjunto residual de ordem τ . Além disso, após algum tempo finito a realização do operador $L(s)$ passa a ser exata, sendo feita exclusivamente pelo RED ($\alpha(\tilde{e}) = 0$), e o estado completo do erro z , bem como o erro de rastreamento $e_0(t)$ tendem exponencialmente para zero.

Prova: Vide Teorema 4.2 em Nunes (2004, p. 80). ■

Capítulo 5

Direção de Controle Desconhecida

Claramente, existem muitos casos para os quais a direção de controle, isto é, o sinal do ganho de alta frequência é conhecido *a priori*. Além disso, se a planta for estável pode-se introduzir sinais de alta frequência que identifiquem a direção correta de controle, antes de aplicá-la efetivamente ao sistema. Entretanto, em casos particulares, esta hipótese do conhecimento da direção de controle não parece realista.

Como exemplo de sistemas com direção de controle desconhecida pode-se mencionar o problema de controle de torque em acionamentos elétricos (Drakunov 1993) e o controle tolerante a falhas, onde um sistema supervisorio deve ser projetado de modo a tratar as mudanças no processo controlado (Frank, Steven & Birgit 2000). Outros exemplos são sistemas mecânicos em robótica, onde a variável de controle é a magnitude da força aplicada, enquanto sua direção depende das posições, velocidades e de diferentes fatores externos. Nesses sistemas, ocasionalmente, torna-se inviável ou mesmo indesejável o uso dessas informações para o projeto do controlador e assim prefere-se ter um esquema de controle onde essas medidas não sejam necessárias (Drakunov 1993). Pode-se ainda destacar o problema de frenagem em sistemas ABS (*Antilock Braking Systems*) em que os sinais dos coeficientes indicativos da direção de controle são desconhecidos (Drakunov, Özgüner, Dix & Ashrafi 1995). No problema de controle multivariável por servovisão quando o ângulo de rotação da câmera em torno do eixo ótico é considerado desconhecido, a matriz responsável pela direção de controle deve ser reformulada (Oliveira, Hsu & Peixoto 2006, Zergeroglu, Dawson, de Queiroz & Behal 1999).

Visto a relevância do estudo de sistemas com direção de controle desconhecida, este capítulo apresenta as principais técnicas e resultados existentes na literatura que tentam relaxar a condição sob o conhecimento da direção de controle.

5.1 Ganho de Nussbaum

No MRAC, discutido no Capítulo 4, o conhecimento do sinal do ganho de alta frequência é uma hipótese fundamental para o projeto das leis de controle e de adaptação (Tao 2003).

Para uma certa parametrização do controlador, a existência do vetor de parâmetros θ^* garante a solução da equação linear de casamento (equação Diofantina) (Ioannou & Sun 1996). Assim sendo, a equação do erro de saída do sistema pode ser escrita como

$$e = W(s)k_p[u - \theta^{*T}\omega], \quad (5.1)$$

onde k_p é uma constante desconhecida denominada ganho de alta frequência; e , ω e u são sinais mensuráveis e $W(s)$ é uma função de transferência própria conhecida com polos estáveis.

Quando o $\text{sgn}(k_p)$ é desconhecido, são necessárias algumas modificações na análise e projeto das leis de adaptação do MRAC (Ioannou & Sun 1996).

O problema no projeto de leis de adaptação para o sistema descrito por (5.1) com $\text{sgn}(k_p)$ desconhecido foi apresentado no contexto do MRAC por Morse (Morse 1982). Nesse trabalho Morse afirmou que o conhecimento do $\text{sgn}(k_p)$ era necessário para o projeto das leis de adaptação no problema de estabilização do MRAC. Nussbaum (Nussbaum 1983) utilizou um exemplo para mostrar que apesar da conjectura de Morse ser válida para uma determinada classe de leis de controle adaptativo, o $\text{sgn}(k_p)$ não era necessário se uma classe diferente de leis de adaptação e controle fossem aplicadas.

O então denominado *ganho de Nussbaum* serviu de ferramenta em diversos trabalhos (Mudgett & Morse 1985, Zhang et al. 2000, Imai et al. 2001) nos quais a hipótese existente sobre o conhecimento do sinal do ganho de alta frequência, também conhecido por direção de controle, foi relaxada.

O seguinte exemplo ilustra a técnica de Nussbaum, apontando as principais modi-

ficações necessárias, vantagens e desvantagens do método.

Exemplo 5.1 *Considere o sistema de primeira ordem invariante no tempo (Tao 2003)*

$$\dot{y} = a_p y(t) + b_p u(t), \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

com parâmetros desconhecidos constantes a_p e b_p , sendo o modelo de referência dado por

$$\dot{y}_m = -a_m y_m(t) + b_m r(t), \quad t \geq 0, \quad (5.3)$$

onde $a_m > 0$. O objetivo é encontrar uma lei de controle $u(t)$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_m(t)) = 0$ e os sinais do sistema em malha fechada fiquem limitados, sem o conhecimento dos parâmetros a_p e b_p .

Segundo Tao (2003) uma estrutura adequada para o controlador adaptativo é dada por

$$u(t) = k_1(t)y(t) + k_2(t)r(t), \quad (5.4)$$

onde $k_1(t)$ e $k_2(t)$ são estimativas dos parâmetros desconhecidos

$$k_1^* = \frac{-a_p - a_m}{b_p}, \quad k_2^* = \frac{b_m}{b_p}. \quad (5.5)$$

Os valores de $k_1(t)$ e $k_2(t)$ são obtidos a partir de uma lei de adaptação que utiliza o conhecimento do $\text{sgn}(b_p)$, isto é o sinal do ganho de alta frequência. A principal questão é como desenvolver um controlador adaptativo sem o conhecimento deste sinal.

Inicialmente, é apresentado o projeto das leis de controle do esquema tradicional do controlador adaptativo considerando o sinal do ganho de alta frequência conhecido (Síntese por Lyapunov). Para resolver o problema do controle adaptativo sem o conhecimento do $\text{sgn}(b_p)$, deve-se desenvolver uma estratégia de controle (Síntese com Ganho de Nussbaum) diferentemente da representada por (5.4).

(a) Síntese por Lyapunov

Primeiramente, introduz-se o vetor de parâmetros

$$\theta(t) = [k_1(t), k_2(t)]^T, \quad \theta^* = [k_1^*, k_2^*]^T, \quad (5.6)$$

o vetor regressor $\omega(t)$ e o erro de rastreamento $e(t)$

$$\omega(t) = [y(t), r(t)]^T, \quad e(t) = y(t) - y_m(t), \quad (5.7)$$

além disso, pode-se expressar a dinâmica do erro como sendo

$$\dot{e}(t) = -a_m e(t) + b_p(u(t) - \theta^{*T} \omega(t)). \quad (5.8)$$

Em (5.4), tem-se $u(t) = \theta^T(t) \omega(t)$. Este controlador aplicado em (5.8), resulta

$$\dot{e}(t) = -a_m e(t) + b_p(\theta(t) - \theta^*)^T \omega(t), \quad (5.9)$$

e utilizando a seguinte lei de adaptação, clássica no contexto de controle adaptativo, tem-se

$$\dot{\theta}(t) = \text{sgn}[b_p] \Gamma \omega(t) e(t), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0, \quad (5.10)$$

garantindo que todos os sinais do sistema em malha fechada são limitados e que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Um esquema de controle diferente, utiliza a seguinte lei de controle

$$u(t) = \text{sgn}[b_p](k_1(t)y(t) + k_2 r(t)), \quad (5.11)$$

onde $k_1(t)$ e $k_2(t)$ são estimativas de $\text{sgn}(b_p)k_1^*$ e $\text{sgn}(b_p)k_2^*$ para k_1^* e k_2^* em (5.5). A partir de (5.11), tem-se que $u(t) = \text{sgn}(b_p)\theta^T(t)\omega(t)$, onde $\theta(t)$ é a estimativa de $\bar{\theta}^* = \text{sgn}(b_p)\theta^*$ para θ^* em (5.6) e

$$\dot{e}(t) = -a_m e(t) + |b_p| (\theta(t) - \text{sgn}[b_p]\theta^*)^T \omega(t). \quad (5.12)$$

Baseado na nova dinâmica do erro (5.12), a seguinte modificação na lei de adaptação é proposta

$$\dot{\theta}(t) = -\Gamma \omega(t) e(t), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0. \quad (5.13)$$

Essa nova lei de adaptação ainda é capaz de garantir que os sinais do sistema em malha fechada sejam limitados e que o erro de rastreamento convirja assintoticamente

para zero. Essas propriedades podem ser verificadas considerando-se a função positiva definida

$$V(e, \tilde{\theta}) = e^2 + |b_p| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}, \quad \tilde{\theta} = \theta - \text{sgn}[b_p] \theta^*, \quad (5.14)$$

cuja derivada no tempo é $\dot{V} = -2a_m e^2(t)$.

(b) Síntese com Ganho de Nussbaum

Quando o conhecimento do $\text{sgn}(b_p)$ não está disponível, utiliza-se o seguinte esquema de controle

$$u(t) = N(v(t)) \theta^T(t) \omega(t), \quad (5.15)$$

$$\dot{v}(t) = \theta^T(t) \omega(t) e(t), \quad v(t) \in \mathbb{R}, \quad v(0) = v_0, \quad (5.16)$$

$$N(v(t)) = v^2(t) \sin v(t), \quad (5.17)$$

onde o vetor de parâmetros θ é atualizado segundo a lei de adaptação abaixo

$$\dot{\theta}(t) = -\Gamma \omega(t) e(t), \quad \Gamma = \Gamma^T > 0. \quad (5.18)$$

Note que a função $N(v): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em (5.17) apresenta as seguintes propriedades caracterizando o que se denomina *Nussbaum-type function*:

$$\limsup_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta} \int_0^\zeta N(\nu) d\nu = +\infty, \quad (5.19)$$

$$\liminf_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta} \int_0^\zeta N(\nu) d\nu = -\infty. \quad (5.20)$$

A função $N(v)$ é responsável pela direção de controle e indiretamente pelo ganho de adaptação, sendo por isso muitas vezes denominada *ganho de Nussbaum*. De modo geral, $N(v)$ supera a falta de conhecimento do $\text{sgn}(b_p)$ trocando o sinal do controle $u(t)$ periodicamente com respeito ao sinal $v(t)$. Com a lei de controle (5.15), o sistema de erro (5.8) fica

$$\dot{e}(t) = -a_m e(t) + b_p (N(v(t)) \theta^T(t) \omega(t) - \theta^{*T} \omega(t)). \quad (5.21)$$

Para a análise deste esquema de controle adaptativo, considera-se a função positiva

definida $V(e, \tilde{\theta}(t))$ em (5.14), cuja derivada no tempo é agora dada por

$$\dot{V} = -2a_m e^2(t) + 2b_p N(v(t)) \theta^T(t) \omega(t) e(t) - 2|b_p| \theta^T(t) \omega(t) e(t). \quad (5.22)$$

A partir de (5.16), integrando-se (5.22), tem-se

$$\begin{aligned} V(e(t), \tilde{\theta}(t)) + 2a_m \int_0^t e^2(\tau) d\tau &= \\ V(e(0), \tilde{\theta}(0)) + 2b_p \int_{v_0}^v \nu^2 \sin \nu d\nu - 2|b_p| \int_{v_0}^v d\nu &\triangleq \pi(v(t)), \end{aligned} \quad (5.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \pi(v(t)) &= V(e(0), \tilde{\theta}(0)) + v(t)(|b_p| + 2b_p \sin v(t)) + 2b_p \cos v(t) \\ &\quad - b_p v^2(t) \cos v(t) - v_0(|b_p| + 2b_p \sin v_0) - 2b_p \cos v_0 + b_p v_0^2 \cos v_0, \end{aligned} \quad (5.24)$$

com $\pi(v(0)) = \pi(v_0) = V(e(0), \tilde{\theta}(0)) \geq 0$.

Por inspeção de $\pi(v(t))$, demonstra-se que para v suficientemente grande, o termo $b_p v^2(t) \cos v(t)$ domina os demais termos em (5.24) oscilando entre $-v^2$ e v^2 .

Como

$$V(e(t), \tilde{\theta}(t)) + 2a_m \int_0^t e^2(\tau) d\tau = \pi(v(t)), \quad (5.25)$$

e $V(t) \geq 0$, portanto v tem de ser limitado, caso contrário a desigualdade $V \geq 0$ seria violada para v demasiadamente grande. Deste modo, a partir de (5.24), conclui-se que $\pi(v)$ também é limitado, além disso, de (5.25) verifica-se que $V(e(t), \tilde{\theta}(t))$ é limitada e $e(t) \in \mathcal{L}_2$. Então, tem-se que $y(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dot{e}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ em (5.21), logo $u(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e aplicando o Lema B.1 (Apêndice B.5) tem-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

5.1.1 Resultados de Simulação

Nesta seção o problema de *estabilização adaptativa* (Byrnes & Willems 1984) de sistemas com sinal do ganho de alta frequência desconhecido é ilustrado. Na literatura de controle, uma lei de controle adaptativo, denominada *controlador universal* (Ryan 1994), foi proposta como uma possível solução para o problema mencionado, em

que nenhum conhecimento com relação a taxas de crescimento das funções desconhecidas do sistema é necessário. Assim sendo, considere o sistema descrito na Tabela 5.1.

TABELA 5.1: Planta e esquema de controle.

Planta	$\dot{y} = y^2 + u, y(0) = 0.5$
Adaptação	$\dot{v} = e^{ y }y^2, v(0) = 0$
Controle	$u = \alpha N(v)e^{ y }y, \alpha = 10$
Ganho de Nussbaum	$N(v) = e^{v^2} \cos v$

Nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 são apresentados os resultados de simulação para o sistema apresentado na Tabela 5.1.

Uma deficiência bem conhecida nos estabilizadores adaptativos é que alguns sinais que teoricamente permaneceriam finitos podem tornar-se excessivamente grandes como conseqüência do ruído de medição. Isto pode ser explicado na lei de adaptação $\dot{v} = e^{|y|}y^2$ pois o sinal y medido será igual ao ruído de medição quando o sinal y verdadeiro for nulo. Assim, o ganho adaptativo v , e conseqüentemente o ganho de Nussbaum $N(v)$, crescerão indefinidamente ainda que a saída verdadeira da planta seja nula.

- Principais Desvantagens:

- Apresenta o fenômeno de pico;
- Falta de robustez à ruídos de medição;
- Comportamento transitório ruim.

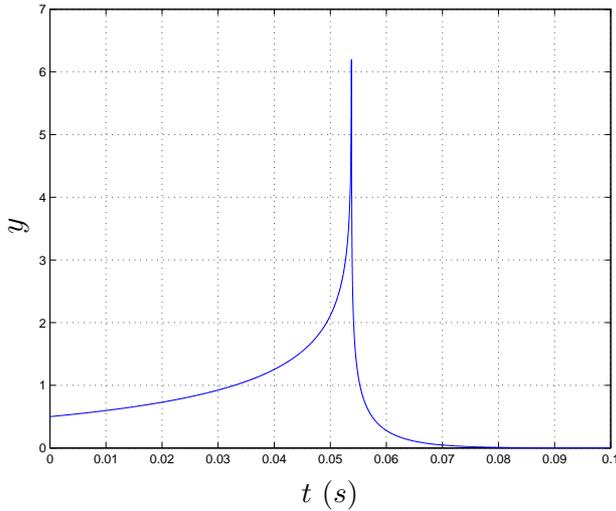


FIGURA 5.1: Saída da planta y .

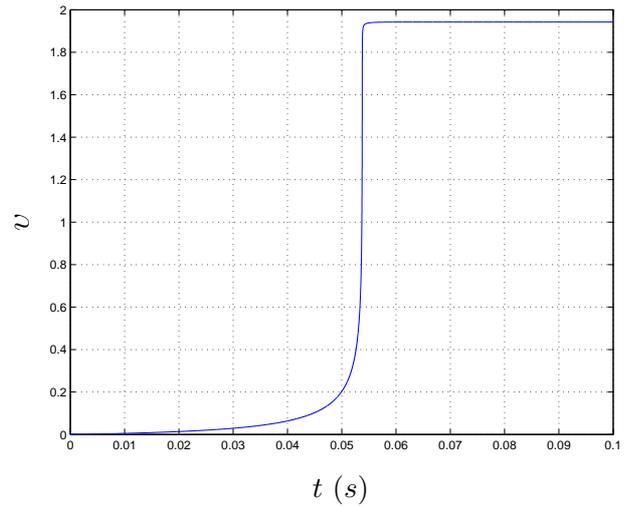


FIGURA 5.3: Lei de adaptação v .

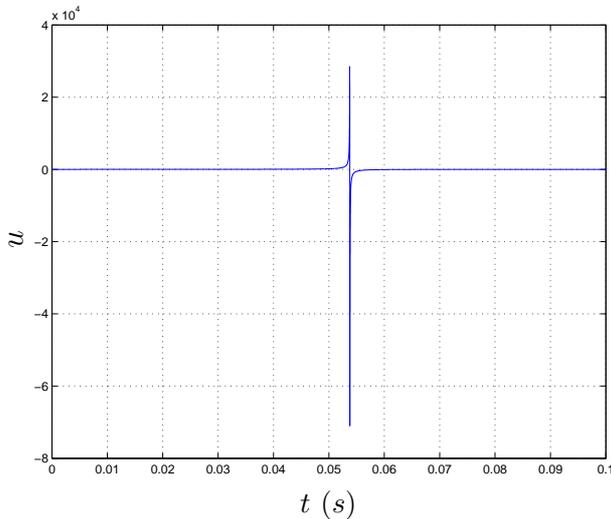


FIGURA 5.2: Sinal de controle u .

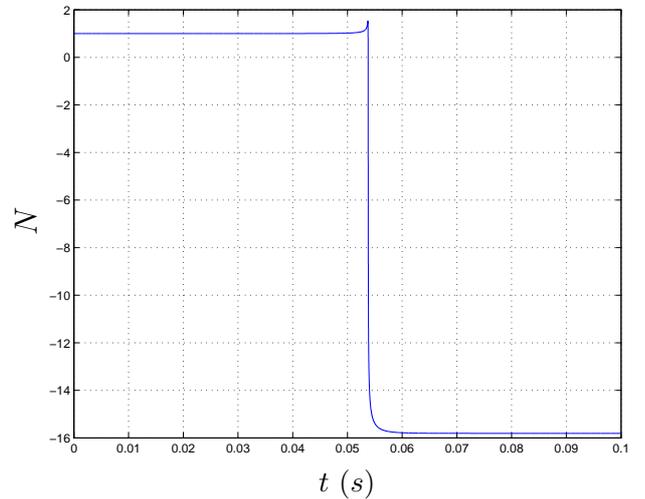


FIGURA 5.4: Ganho de Nussbaum N .

5.2 Método da Função Periódica

O controle por modos deslizantes é comumente utilizado para a classe de sistemas não-lineares

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u \quad (5.26)$$

em que a matriz B é incerta (Drakunov 1993). Tradicionalmente, as propriedades de robustez do controle por modos deslizantes são exploradas com respeito a perturbações externas. Tais perturbações podem ser vistas como incertezas no modelo. Existem

muitas aplicações práticas nas quais essas perturbações influenciam na direção do controle, ou seja, na matriz B (Drakunov 1993). Sabe-se que esta estratégia de controle é robusta a variações ΔB suficientemente pequenas, de tal forma que as condições para a existência do modo deslizante não sejam violadas (Utkin 1977). No entanto, esta robustez não é garantida para variações muito grandes da matriz B , como por exemplo, variações que possam ocasionar mudança na direção de controle.

A seguinte estratégia tenta superar o problema da incerteza na direção do vetor de controle. Para isto é utilizado um controlador por modos deslizantes com uma *função de chaveamento periódica* (Drakunov 1993).

O projeto da lei de controle é baseado na partição do espaço de estado em regiões nas quais o vetor de controle é fixo. Isto resulta em múltiplos pontos de equilíbrio estáveis para o sistema. Em geral, estes pontos são diferentes para diferentes valores de B . Cada um destes pontos de equilíbrio correspondem a estabilidade da origem do sistema considerado. Se a região de atração para os múltiplos pontos de equilíbrio cobrirem todo o espaço de estado, o controlador proposto permite estabilizar o sistema mesmo se a direção de controle for desconhecida.

Esta abordagem e particionamento permitem manter o sistema em uma superfície de deslizamento desejada, ainda que a direção de controle seja desconhecida ou mude durante o controle de um determinado processo.

5.2.1 Formulação do Problema

Seja um sistema não-linear

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u, \quad (5.27)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$, a formulação geral do problema consiste em encontrar uma lei de controle estabilizante que não requeira o conhecimento da matriz $B(t, x)$. Nestas circunstâncias, no contexto de controle por modos deslizantes, o objetivo é conduzir o estado de (5.27) para a superfície de deslizamento

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid S(x) = 0\}, \quad (5.28)$$

onde $S(x) = \text{col}^1(s_1(x), \dots, s_m(x))$ é uma função suave tal que o sistema (5.27), restrito à variedade \mathcal{M} , seja estável.

5.2.2 Projeto do Controlador

A idéia principal do projeto do controlador consiste em dividir o sub-espço \tilde{S} ($\tilde{S} = \text{col}(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_r) \in \mathbb{R}^r$) do sistema considerado em regiões com fronteiras suaves. Em um caso particular, elas podem formar um ϵ -grid (Drakunov 1993),

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{k=0, \pm 1, \dots} \{\tilde{s}_i = \epsilon k\}. \quad (5.29)$$

Em cada região a direção de controle é constante. Alternando-se os valores do controle ao longo dessas regiões, obtém-se um conjunto de pontos de equilíbrio estáveis P_{st} para qualquer B , sob condições de não-singularidades. Em contraste com o controle por modos deslizantes tradicional, no qual a variedade é $S(x)=0$, o modo deslizante ocorrerá em $\tilde{S} = \text{constante}$. O erro de regime pode ser facilmente removido utilizando-se um *compensador dinâmico*. Os compensadores baseados em modos deslizantes fornecem convergência em tempo finito de $S(x)$ para a origem.

No caso de *controle escalar*, o reticulado uniforme corresponde a uma *função de chaveamento periódica*.

Considere o sistema:

$$\dot{x} = f(t, x) + b^T(t, x)u, \quad (5.30)$$

onde $u \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = 0\}$ é a variedade desejada, com $s(x) \in \mathbb{R}$ e $b(t, x) = \text{col}(b_1(t, x), \dots, b_m(t, x))$ considerado desconhecido. Seja

$$G(x) = \frac{\partial s(x)}{\partial x}, \quad (5.31)$$

então

$$\dot{s} = G(x)f(t, x) + G(x)b^T(t, x)u. \quad (5.32)$$

Para que o deslizamento ocorra na variedade \mathcal{M} , a lei de controle com função de

¹o espaço gerado por todas as combinações lineares das colunas de uma matriz A é denotado $\text{col}(A)$ e denominado *espaço coluna* de A

chaveamento periódica (Drakunov 1993) é utilizada

$$u = M_0 \operatorname{sgn} \left(\sin \left[\frac{\pi}{\epsilon} \left(s(t) + \lambda \int_0^t \operatorname{sgn}(s(\tau)) d\tau \right) \right] \right), \quad (5.33)$$

onde $\lambda > 0$. Seja

$$\sigma = s(t) + \lambda \int_0^t \operatorname{sgn}(s(\tau)) d\tau, \quad (5.34)$$

logo

$$\dot{\sigma} = Gf + Gb^T M_0 \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{\pi}{\epsilon} \sigma \right) \right) + \lambda \operatorname{sgn}(s). \quad (5.35)$$

O segundo termo do lado direito da equação (5.35) é constante por partes. Nas vizinhança dos pontos

$$\sigma = k\epsilon, \quad (5.36)$$

para valores pares de k ($k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$), tem-se

$$\operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{\pi}{\epsilon} \sigma \right) \right) = \operatorname{sgn}(\sigma - k\epsilon) \quad (5.37)$$

e para valores ímpares de k ($k = 1, \pm 3, \pm 5, \dots$)

$$\operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{\pi}{\epsilon} \sigma \right) \right) = -\operatorname{sgn}(\sigma - k\epsilon). \quad (5.38)$$

Portanto, se a condição

$$|G(x)b^T(t, x)M_0| > |G(x)f(t, x)| + \lambda \quad (5.39)$$

é satisfeita, o deslizamento ocorre em uma das variedades $\sigma = k\epsilon$ para qualquer sinal de $G(x)b^T(t, x)M_0$. A equação do sistema em modo deslizante pode ser obtida a partir

da derivada de (5.36) e utilizando-se a relação (5.34)

$$\dot{\sigma} = \dot{s}(t) + \frac{d}{dt} \left(\lambda \int_0^t \operatorname{sgn}(s(\tau)) d\tau \right), \quad (5.40)$$

$$0 = \dot{s}(t) + \lambda \operatorname{sgn}(s(t)), \quad (5.41)$$

assim,

$$\dot{s} = -\lambda \operatorname{sgn}(s). \quad (5.42)$$

Portanto a variedade $\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid s(x) = 0\}$ é alcançada em tempo finito. Durante o regime deslizante, a propriedade de rejeição às perturbações é preservada.

A lei de controle (5.33) não requer o conhecimento do sinal de $G(x)b^T(t, x)$. Este sinal pode ser diferente em diferentes partes do espaço de estado, significando que o sistema vai para uma ou para outra superfície de deslizamento. Contudo, uma vez que a distância entre as superfícies de deslizamento ϵ pode ser escolhida arbitrariamente pequena, e sob a condição de que $G(x)b^T(t, x) = 0$ não coincide com a superfície desejada, a igualdade (5.42) é violada somente por um curto período de tempo, que tende a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$.

5.2.3 Análise de Estabilidade

Nesta seção é apresentada uma prova da estabilidade do sistema com controlador para o caso escalar.

A partir de uma conveniente simplificação da equação (5.35), obtém-se

$$\dot{\sigma} = A(t) + Gb^T M_0 \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{\pi}{\epsilon} \sigma \right) \right), \quad (5.43)$$

onde $A(t) = Gf + \lambda \operatorname{sgn}(s)$. Sendo assim, propõe-se a seguinte candidata à função de Lyapunov

$$V = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{\epsilon} \sigma \right), \quad (5.44)$$

cuja derivada no tempo é

$$\dot{V} \leq \frac{\pi}{\epsilon} (|A(t)| + Gb^T M_0) \left| \sin \left(\frac{\pi}{\epsilon} \sigma \right) \right|. \quad (5.45)$$

Se a condição (5.39) for satisfeita, isto é

$$|G(x)b^T(t, x)M_0| > |A(t)|, \quad (5.46)$$

$\dot{V} \leq 0$ quando $\text{sgn}(Gb^T M_0) < 0$ e σ tenderá para os mínimos de V , que ocorrem para valores pares de k em (5.36). Analogamente, escolhendo $V = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{\epsilon}\sigma\right)$, prova-se que $\dot{V} \leq 0$ quando $\text{sgn}(Gb^T M_0) > 0$ e σ tenderá para os mínimos de V , que ocorrem para valores ímpares de k em (5.36).

As Figuras 5.5 e 5.6 mostram As trajetórias de fase juntamente com as funções de Lyapunov apropriadas para os casos $\text{sgn}(Gb^T M_0) < 0$ e $\text{sgn}(Gb^T M_0) > 0$, respectivamente.

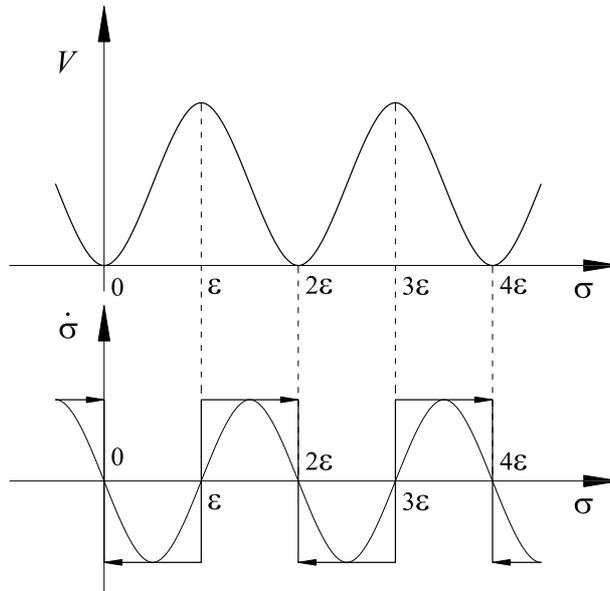


FIGURA 5.5: Trajetória de fase para $\text{sgn}(Gb^T M_0) < 0$ e $V = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\epsilon}\sigma\right)$.

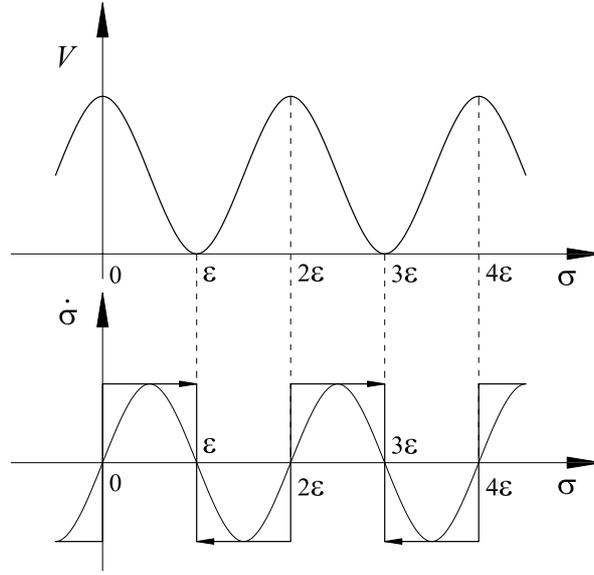


FIGURA 5.6: Trajetória de fase para $\text{sgn}(Gb^T M_0) > 0$ e $V = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{\epsilon}\sigma\right)$.

5.2.4 Resultados de Simulação

Considere o problema de estabilização para o sistema escalar não-linear

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 5\cos(5t) + bu \\ y = x, \end{cases} \quad (5.47)$$

onde $b \in [1, -1], b \neq 0$. Os resultados de simulação são apresentados na Figura 5.7 e os parâmetros do controlador na Tabela 5.2.

TABELA 5.2: Parâmetros do controlador.

CI's	$y(0) = 5, \sigma(0) = 0$
Modulação do Relé	$M_0 = 2y^2 + 10$
Variedade (5.28)	$s(y) = y$
Constantes de Projeto	$\lambda = 10, \epsilon = 1$

- Principais Desvantagens:

- Necessidade do vetor de estado completo.

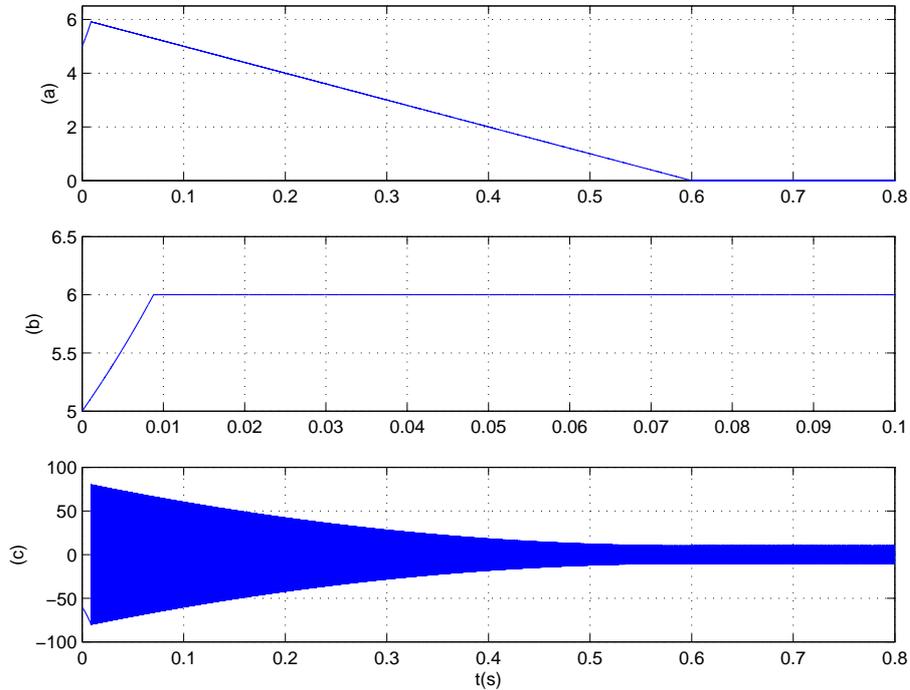


FIGURA 5.7: Resultados de simulação - (a) sinal de saída y , (b) variedade σ e (c) sinal de controle u .

5.3 Método de Bartolini

Em Bartolini et al. (2003), foi proposto um outro esquema para resolver o problema de estabilização em sistemas não-lineares incertos com escape em tempo finito e direção de controle desconhecida.

Como dito anteriormente, sabe-se da necessidade do conhecimento da direção de controle no controlador por modos deslizantes. Em virtude disto, a seguir é apresentada uma técnica baseada em chaveamento em que um controlador para determinada classe de sistemas é capaz de garantir a existência do modo deslizante, independentemente da direção de controle, tal que a origem do espaço de estados seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Este controlador é projetado em duas fases. Primeiramente, nenhum controle é aplicado (sistema em malha aberta) e a não-linearidade é estimada através de um

observador por modos deslizantes (SMO) (ver Seção 3.5.2). Posteriormente, a lei de controle é aplicada com amplitude igual ao termo estimado devidamente escalonado por um limitante inferior para o termo que pré-multiplica o vetor de controle (equivalente ao ganho de alta frequência). O sinal correto do vetor de controle é então identificado no sistema em malha fechada a partir de uma lógica apropriada.

5.3.1 Formulação do Problema

Considere a classe de sistemas não-lineares escalares SISO na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = cx, \end{cases} \quad (5.48)$$

sob as seguintes hipóteses:

(A1) $x, u \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^*$;

(A2) $f(x), g(x) \in C^{\infty 2}$ e são incertos;

(A3) $f(x)$ tem um majorante variante no tempo do tipo $|f(x)| < \bar{k} + e^{|y|}$;

(A4) $f(x)$ é de tal forma que $x(t)$ tem tempo de existência de solução em $[0, t^*]$ com $u = 0$;

(A5) O $\text{sgn}(g(x))$ é desconhecido e $0 < g_1 \leq |g(x)| \leq g_2$, onde g_1 e g_2 são constantes conhecidas.

O objetivo é encontrar uma lei de controle para a classe de sistemas acima considerada que torne a origem do espaço de estados um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

5.3.2 Algoritmo para o Controle por Modos Deslizantes

O algoritmo aqui apresentado estabiliza assintoticamente a origem do espaço de estado do sistema considerado e sua construção pode ser dividida em duas etapas:

²uma função $f(t) \in C^{\infty}$ se tiver derivadas de qualquer ordem contínuas.

(A) Encontrar em tempo finito um majorante para o termo $f(x)$

(B) Identificar a direção de controle correta e, ao mesmo tempo, garantir que as trajetórias do sistema estejam contidas em uma vizinhança limitada da origem do espaço de estado

- Fase A

Um majorante para a estimativa do termo $f(x)$ é obtido fazendo $u = 0$ em (5.48) e introduzindo um SMO da forma

$$\dot{\omega} = \alpha e^{|\omega|} \operatorname{sgn}(y - \omega), \quad (5.49)$$

onde α é uma constante positiva. Quando o sinal de erro $\varepsilon = y - \omega$ alcança a variedade $\varepsilon = 0$, no instante $t = \tilde{t}$, esta fase termina. Devido ao *princípio da invariância* do observador por modos deslizantes (SMO) (Utkin 1992), o sub-sistema constituído pelo observador permanecerá em deslizamento ($y = \omega$) a partir do instante \tilde{t} .

Proposição 5 *Dado o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & y = cx \\ \dot{\varepsilon} = cf(x) - \alpha e^{|\omega|} \operatorname{sgn}(\varepsilon), & \omega = y - \varepsilon \end{cases} \quad (5.50)$$

onde $f(x)$ satisfaz as Hipóteses (A2)-(A4), e, em particular, $|f(x)| < \bar{k} + e^{|y|}$, ε vai para zero em tempo finito.

Prova: Considere $V = \frac{1}{2}\varepsilon^2$ como candidata à função de Lyapunov. Então

$$\begin{aligned} \dot{V} &:= \varepsilon \dot{\varepsilon} = \varepsilon (cf(x) - \alpha e^{|\omega|} \operatorname{sgn}(\varepsilon)) \leq \varepsilon \left(c(\bar{k} + e^{|y|}) - \alpha \frac{e^{|y|}}{e^{|\varepsilon|}} \right) \\ &\leq -\gamma|\varepsilon| \quad \text{para } y \notin \mathcal{B}_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \varepsilon\}, \varepsilon \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

A relação (5.51) mantém-se para

$$e^{|y|}(ce^{|\varepsilon|} - \alpha) < -c\bar{k}. \quad (5.52)$$

Isto é, na hipótese de que é sempre possível escolher $\alpha > c$, a seguinte desigualdade se mantém

$$e^{|y|} > \frac{c\bar{k}}{\alpha - ce^{|\epsilon|}}. \quad (5.53)$$

Observando o lado direito da desigualdade (5.53), conclui-se que sempre existirá um valor ϵ que torne a relação verdadeira $\forall y \notin [-\epsilon, \epsilon]$. De fato, a função $\frac{c\bar{k}}{\alpha - ce^{|\epsilon|}}$ é limitada por $\frac{c\bar{k}}{\alpha - c}$. A função $e^{|y|}$ tem um limitante inferior e tende ao infinito quando $y \rightarrow \infty$. Esta situação está descrita na Figura 5.8. ■

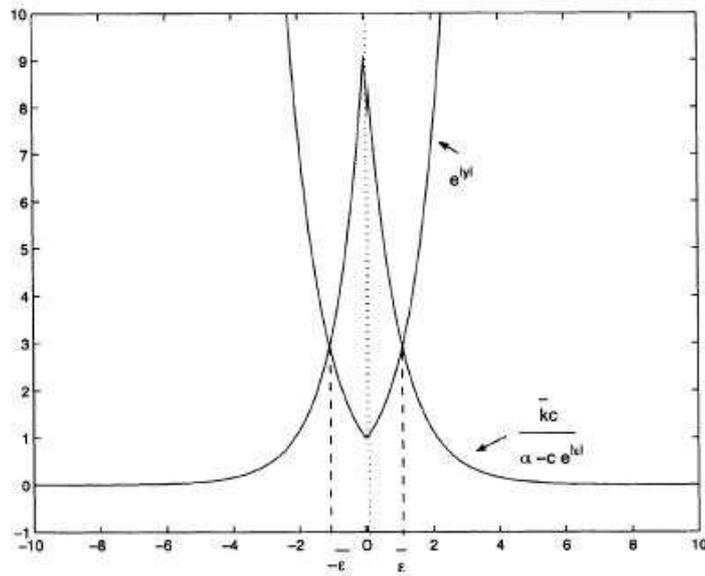


FIGURA 5.8: Comparação entre as funções $e^{|y|}$ e $\frac{c\bar{k}}{\alpha - ce^{|\epsilon|}}$.

Esta primeira etapa é realizável mesmo se houver escape em tempo finito do sistema $\dot{x} = f(x)$, se o tempo de escape do observador (5.49) é menor que o tempo de escape da solução x . Este argumento é demonstrado na proposição abaixo.

Proposição 6 *Seja $\dot{x} = f(x)$, onde $f(x)$ é qualquer função que satisfaz as Hipóteses (A2)–(A4), e que, em particular, seja possível definir um intervalo mínimo de existência de solução $[0, t^*]$. Então, a partir de (5.48) e (5.49), conclui-se que existe um α , para o qual um modo deslizante seja estabelecido na variedade $\epsilon = 0$ em um instante de tempo pré-determinado $\tilde{t} = \beta t^*$, com $\beta < 1$.*

Prova: Este resultado é obtido a partir da solução da equação diferencial (5.49): $\omega(t) = \pm \ln(1 - \alpha t)$. De fato, (5.49) apresenta escape no instante $t = \frac{1}{\alpha}$. Se α for

escolhido de forma que $\frac{1}{\alpha} < t^*$, o instante de tempo em que $\alpha e^{|\omega|}$ torna-se maior que $|f(x)|$ é claramente menor que $\frac{1}{\alpha}$ e conseqüentemente menor que t^* (ver Figura 5.9). ■

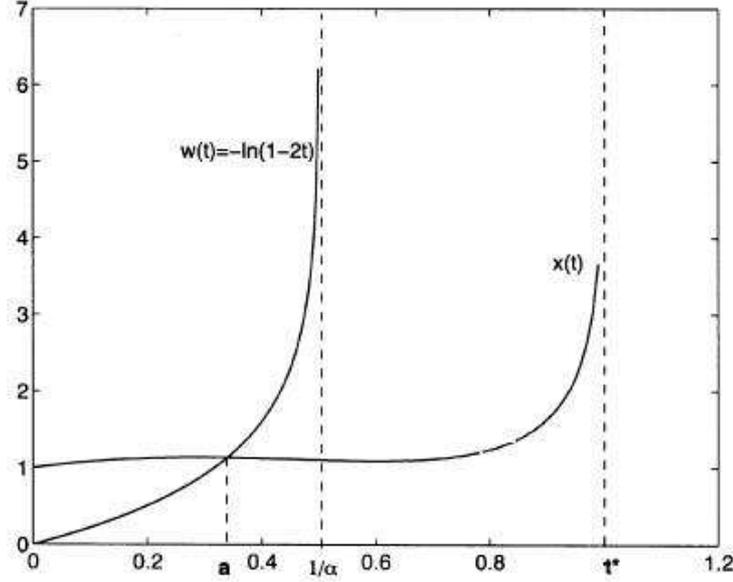


FIGURA 5.9: Resultados da Proposição 6: situação descrita com $\alpha = 2$ e $c = 1$.

- Fase B

A partir do instante de tempo \tilde{t} , definido na Proposição 6, a quantidade $\alpha e^{|\omega|} \text{sgn}(\varepsilon)$ é equivalente, no sentido de Filippov, ao termo $cf(x)$, sendo portanto um majorante para este termo. Deste modo, no instante $t = \tilde{t}$, com $\tilde{y} = y(\tilde{t})$, o sinal de controle

$$u = -\frac{\alpha}{g_1} e^{|\omega|} \rho(t) \text{sgn}(y) \text{sgn}(\tilde{y} + \Delta \text{sgn}(\tilde{y}) - y), \quad (5.54)$$

$$\dot{\omega} = \alpha e^{|\omega|} \text{sgn}(\varepsilon) + cg_2 |u| \text{sgn}(\varepsilon), \quad (5.55)$$

$$\rho(t) \in -1, 1, \quad \rho(\tilde{t}) = 1, \quad (5.56)$$

é aplicado, onde Δ é uma constante apropriada e $\rho(t)$ é o equivalente ao ganho de alta frequência que é chaveado entre 1 e -1 , segundo uma lógica de comutação.

O sinal de controle permanece dominando a função $f(x)$ em malha fechada devido à parcela $g_2 |u| \text{sgn}(\varepsilon)$ de (5.55) que majora o termo $|g(x)|u$.

Duas situações podem surgir no intervalo de tempo $(\tilde{t}, t^*]$:

(B1) Um deslizamento ocorre na variedade $y = \tilde{y} + \Delta \operatorname{sgn}(\tilde{y})$, quando $\rho \operatorname{sgn}(g(x)) = -1$;

(B2) Um deslizamento ocorre na variedade $y = \bar{y} < \tilde{y}$, quando $\rho \operatorname{sgn}(g(x)) = 1$.

Na situação (B2), \bar{y} pode ser nulo, ou seja, $\bar{y} = 0$. Assim sendo, a seguinte proposição pode ser estabelecida.

Proposição 7 *A partir de instante $t = \tilde{t}$, uma e somente uma entre as variedades $S_1 = \bar{y}$ e $S_2 = \tilde{y} + \Delta \operatorname{sgn}(\tilde{y})$ será atrativa.*

Prova: Vide Bartolini et al. (2003). ■

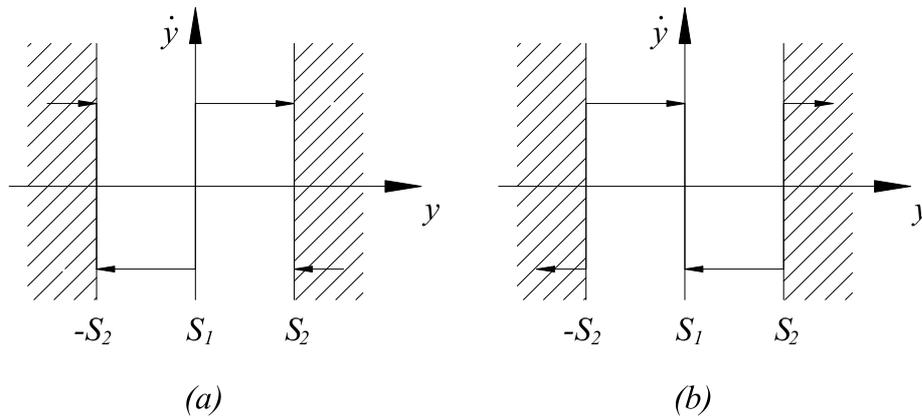


FIGURA 5.10: Proposição 7 - (a) sob a condição de direção de controle incorreta, a variedade S_1 é repulsiva, enquanto $S_2(-S_2)$ torna-se atrativa, (b) uma vez ajustada a direção de controle, S_1 e $S_2(-S_2)$ invertem as funções. As regiões hachuradas representam trechos proibidos para y, \tilde{y} .

Observação 8 *Comparando-se as técnicas apresentadas nas Seções 5.2 e 5.3, observa-se que a última é um caso particular da primeira, onde apenas dois dos múltiplos pontos de equilíbrio $\sigma = k\epsilon$ são utilizados, isto é, as variedades S_1 e $S_2(-S_2)$.*

Como \tilde{y} está contido em uma região compacta delimitada pelas duas variedades $y = 0$ e $y = \tilde{y} + \Delta \operatorname{sgn}(\tilde{y})$, conseqüentemente, y e x ($y = cx$) permanecem limitados por uma quantidade fixa, mesmo quando a direção de controle estiver incorreta (ver Figura 5.11).

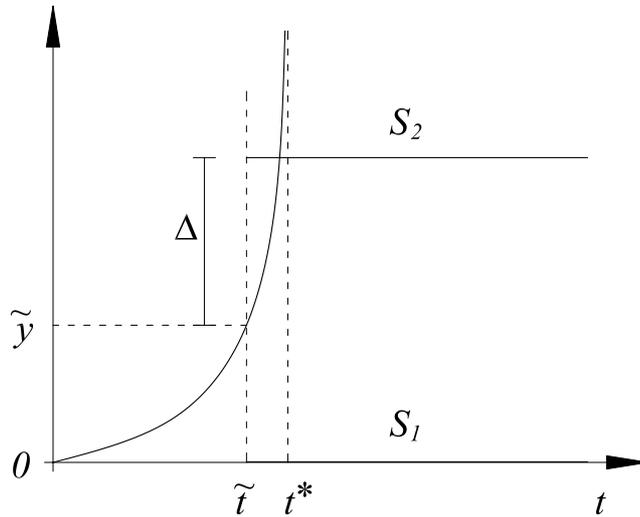


FIGURA 5.11: Variedades limitantes: $S_1 = 0$ e $S_2 = \tilde{y} + \Delta \operatorname{sgn}(\tilde{y})$.

5.3.3 Lógica de Chaveamento

Nesta seção é apresentada a lógica de comutação da variável $\rho(t)$ presente na lei de controle definida em (5.54), (5.55) e (5.56), além disso, são feitas algumas considerações sobre o fenômeno de *pico*.

Inicialmente o sistema é considerado em malha aberta, isto é, $\rho = 0$ (Fase A). Como visto na Seção 5.3.2, esta etapa dura até o instante $t = \tilde{t}$, onde o deslizamento proporcionado pelo SMO é estabelecido na variedade $\varepsilon = 0$ e o valor da variável ρ é comutado para 1, por exemplo. Assim entra-se na Fase B: se a direção de controle estiver correta (e.g., $\rho = 1$), a saída do sistema em malha fechada y convergirá para a variedade $y = \tilde{y} = 0$. Caso $\rho = 1$ represente a estimativa incorreta para a direção de controle, a saída do sistema y irá crescer até atingir a variedade $y = \tilde{y} + \Delta \operatorname{sgn}(\tilde{y})$, onde mais uma troca na variável ρ será estabelecida ($\rho = -1$). Assim, estima-se corretamente a direção de controle e o processo de comutação termina (ver Figura 5.12).

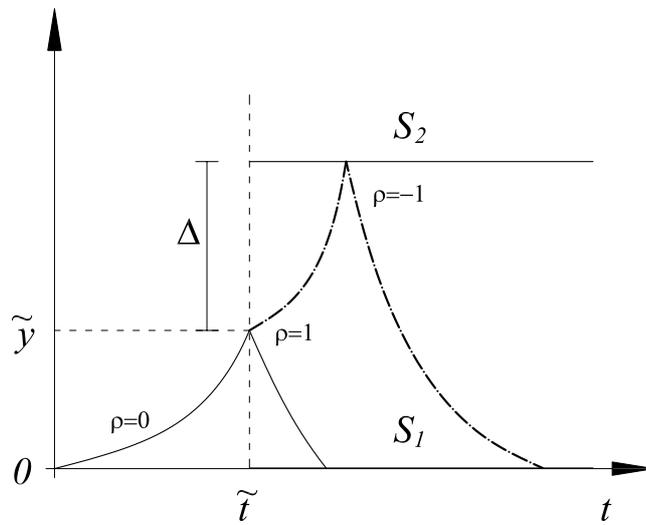


FIGURA 5.12: Demonstração da lógica de chaveamento observando a trajetória de saída do sistema.

De fato, enquanto o ganho do observador é insuficiente ($t < t^*$), a trajetória do sistema é crescente e continua aumentando de amplitude se a direção de controle estiver incorreta. Entretanto, o valor máximo atingido pela trajetória é $\tilde{y} + \Delta$, onde \tilde{y} depende da constante de tempo do observador, podendo ser reduzida aumentando-se o valor da constante α . Devido a natureza da lei de controle, apenas um *pico* aparece durante o transitório e sua amplitude pode ser reduzida através do ajuste apropriado do parâmetro Δ (ver Figura 5.13).

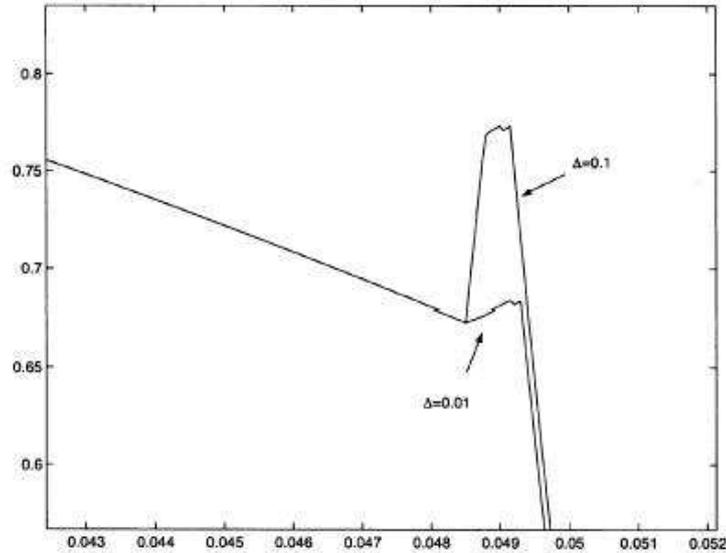


FIGURA 5.13: Amplitude do *pico* com $\Delta = 0.01$ e $\Delta = 0.1$.

5.3.4 Resultados de Simulação

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + 5\cos(t) + gu, \\ y = x, \end{cases} \quad (5.57)$$

onde $g_1 \leq |g| \leq g_2$, $g \neq 0$, $g_1 = 0.9$ e $g_2 = 1.1$. Note que o termo de *drift* é composto por uma parte *homogênea* e outra *não-homogênea* e limitada. Os resultados de simulação são apresentados nas Figuras 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17, quando a lei de controle (5.54)-(5.56) e o algoritmo de chaveamento (Seção 5.3.3) são aplicados no sistema (5.57).

A condição inicial do sinal de saída é $y(0) = 3$, enquanto $\rho(0) = 0$ e o estado inicial do SMO é $\omega(0) = 0$. No sinal de controle (5.54), $\Delta = 1$ e $\alpha = 100$.

- Principais Desvantagens:

- Abordagem limitada a sistemas de 1^a ordem;
- Necessidade de detectar o deslizamento no SMO;
- Amplitudes grandes para o sinal de controle.

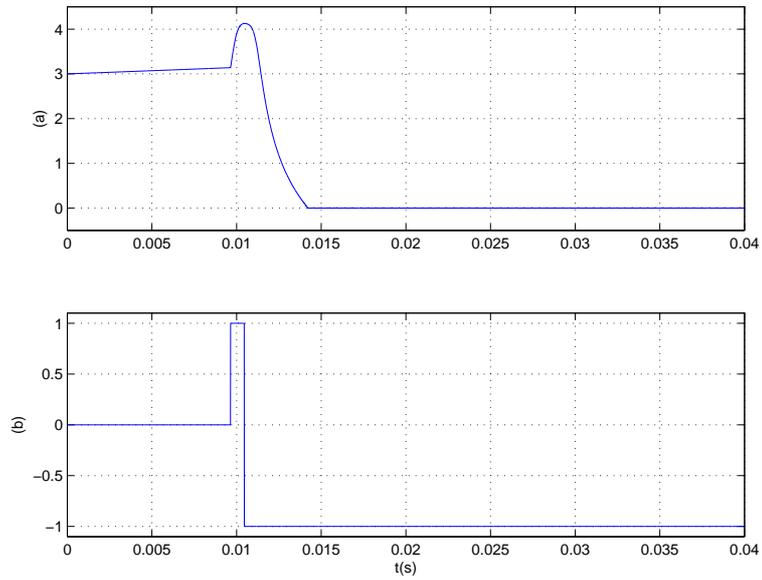


FIGURA 5.14: (a) sinal de saída y e (b) direção de controle ρ .

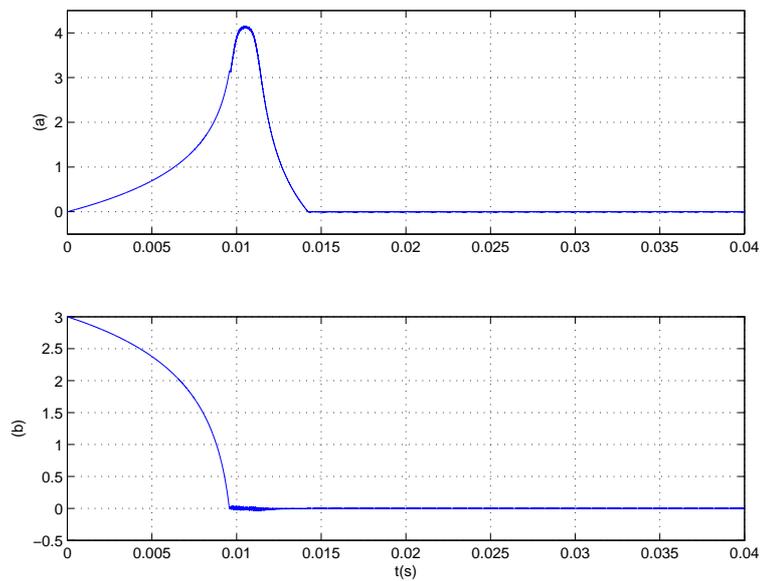


FIGURA 5.15: (a) estado ω do SMO e (b) erro de observação ε .

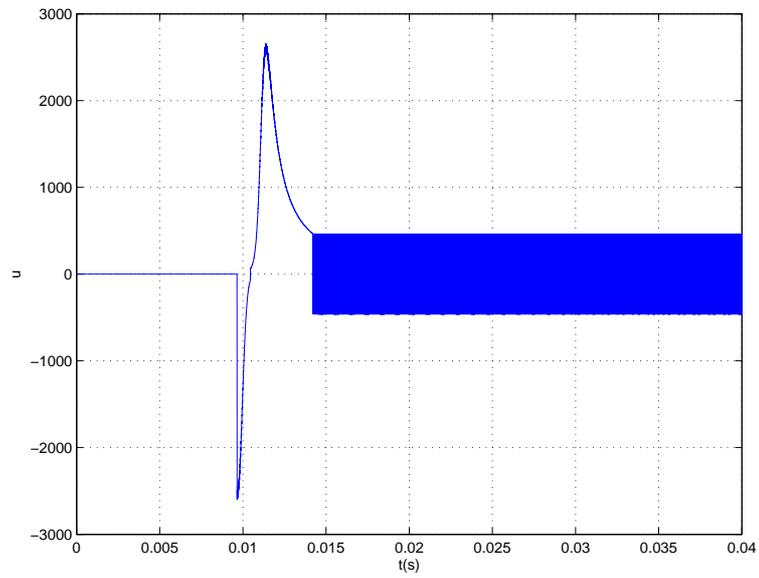


FIGURA 5.16: Sinal de controle u .

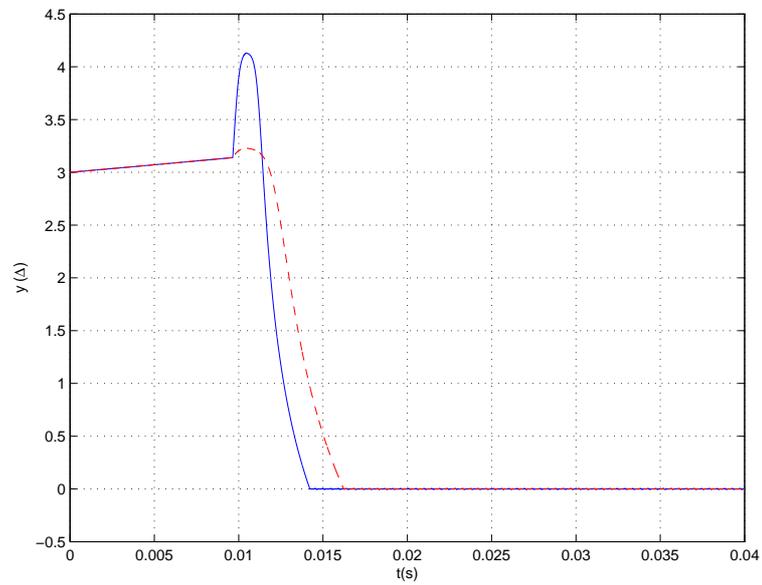


FIGURA 5.17: Amplitude do *pico* no sinal de saída y para valores distintos $\Delta = 1$ e $\Delta = 0.1$.

Capítulo 6

Controle de Sistemas Incertos com Direção de Controle Desconhecida

Neste capítulo, trata-se o problema de rastreamento de trajetórias, utilizando SMC e realimentação de saída, para plantas lineares monovariáveis (SISO) incertas de grau relativo *unitário* (Yan et al. 2003) ou arbitrário (Oliveira et al. 2006, Peixoto, Oliveira & Hsu 2006). Para o caso $n^* = 1$, utiliza-se uma estratégia de chaveamento baseada em uma função de monitoração para o erro saída. A extensão para plantas com grau relativo arbitrário utiliza um esquema híbrido (Nunes et al. 2004) para compensar o grau relativo excedente, combinando filtros *lead* lineares convencionais com diferenciadores robustos e exatos (Levant 2003). Ao empregar esta compensação híbrida, a função de monitoração deve ser apropriadamente modificada, a fim de superar a falta do conhecimento da direção de controle e preservar um bom desempenho transitório no intervalo entre trocas da direção de controle.

Além disso, apresentam-se generalizações para sistemas não-lineares (Hsu et al. 2006) e multivariáveis (MIMO) (Oliveira et al. 2006). Resultados de simulação são apresentados para todas as generalizações propostas, e em particular o caso multivariável é ilustrado através do problema de controle por servovisão.

Uma importante parte deste capítulo é a verificação experimental do controlador proposto para sistemas SISO de grau relativo arbitrário (Peixoto et al. 2006). Os experimentos são realizados em um motor DC, onde a aplicabilidade prática do controlador é avaliada em condições do mundo real, tais como discretização e ruído de medição.

6.1 Sistemas Lineares Monovariáveis

O controladores aqui propostos utilizam a mesma estrutura do controlador MRAC apresentado na Seção 4.1. Assim como no MRAC, serão utilizadas apenas medições de entrada e de saída para gerar o sinal de controle.

O objetivo é projetar uma lei de controle $u(t)$ de forma que todos os sinais do sistema realimentado permaneçam limitados e o erro de rastreamento $e_0 = y - y_m$ tenda assintoticamente ou em tempo finito para zero.

Da mesma maneira que na Seção 4.1, o sistema representado por (4.1)-(4.4) e (4.19)-(4.21) será considerado. Além disso, serão adotadas as Hipóteses (H1)-(H3) usuais de projeto do MRAC (Seção 4.1).

Neste capítulo a Hipótese (H4) é substituída pela hipótese mais específica:

(H4.a) O sinal do ganho de alta frequência $k_p \neq 0$ é desconhecido.

Inicialmente, assume-se que a perturbação d_e atua na entrada da planta e satisfaz a Hipótese (H5). Na Seção 6.2 consideram-se não-linearidades casadas com a entrada e dependentes da saída.

Considerando a abordagem apresentada nas Seções 4.1.2 e 4.3, o estado do erro X_e , a equação do erro de rastreamento e_0 e a equação do erro auxiliar \bar{e}_0 são dados por:

$$\text{Espaço de Estado: } \dot{X}_e = A_c X_e + \rho^* b_c [u - \bar{u}], \quad (6.1)$$

$$e_0 = h_c^T X_e, \quad (6.2)$$

$$\bar{e}_0 = L(s)e_0 = h_L^T X_e, \quad h_L^T := \sum_{i=0}^N h_c^T A_c^i a_i; \quad (6.3)$$

$$\text{Entrada-Saída: } e_0 = \rho^* M(s)[u - \bar{u}], \quad (6.4)$$

$$\bar{e}_0 = \rho^* M(s)L(s)[u - \bar{u}], \quad (6.5)$$

onde $\rho^* = k_p/k_m$ e

$$\bar{u} := u^* - W_d(s) * d_e \quad (6.6)$$

é o sinal de *controle ideal* que assegura o casamento perfeito da planta com o modelo de referência na presença da perturbação d_e e $u^* = \theta^{*T} \omega(t)$. O *vetor regressor* ω é composto pelos estados dos filtros de entrada e saída (4.4), pelo sinal de saída y e pelo

signal de referência r . Suponha que (Hsu et al. 1994): (1) O *vetor de parâmetros ideais* θ^* é desconhecido mas conhece-se um majorante para a sua incerteza, i.e, existe um vetor conhecido $\bar{\theta}^T$, tal que $\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$. (2) A função de transferência $W_d(s) = [\rho^* M(s)]^{-1} \bar{W}_d$ é própria e estável, sendo $\bar{W}_d(s)$ a função de transferência de d_e para e_0 .

O sinal de controle ideal \bar{u} será tratado como uma perturbação casada e para isso será conveniente obter uma estimativa de sua norma. Visto que W_d é uma função de transferência BIBO estável, própria e lembrando que $\bar{d}_e(t)$ ($> |d_e(t)|$) é uniformemente limitada, então, aplicando-se o Lema 4.3 na convolução $W_d(s) * d_e(t)$, é possível obter constantes $k_d, c_d, \gamma_d > 0$ tais que $|W_d(s) * d_e(t)| \leq \hat{d}_e \leq k_d, \forall t \geq 0$, onde

$$\hat{d}_e(t) := \bar{d}_e(t) + c_d e^{-\gamma_d t} * \bar{d}_e(t). \quad (6.7)$$

Portanto, a partir de (6.6), tem-se que

$$\forall t \geq 0 : \quad |\bar{u}(t)| \leq k_{\bar{\omega}} \|\omega(t)\| + k_d, \quad (6.8)$$

onde $k_{\bar{\omega}} := \|\theta^*\|$. Uma vez que \bar{u} deve satisfazer (6.8), é razoável restringir a classe de leis de controle admissíveis pela Hipótese (H6) em (4.26), reproduzida abaixo

$$\forall t \geq 0 : \quad |u(t)| \leq k_{\omega} \|\omega(t)\| + k_{\delta}, \quad (6.9)$$

onde k_{ω} e k_{δ} são constantes positivas.

6.1.1 Estrutura do Controlador para Grau Relativo Unitário

Esta seção apresenta o projeto da lei de controle à estrutura variável para plantas com grau relativo $n^* = 1$ e $\text{sgn}(k_p)$ desconhecido, assim como a função de monitoração apropriada para o erro de rastreamento e_0 (Yan et al. 2003).

- Lei de controle

Suponha que o $\text{sgn}(k_p)$ é desconhecido, então, o sinal de controle u é definido como:

$$u = \begin{cases} u^+ = -f(t) \text{sgn}(e_0) & , \quad t \in T^+, \\ u^- = f(t) \text{sgn}(e_0) & , \quad t \in T^-, \end{cases} \quad (6.10)$$

onde uma função de monitoração (Yan et al. 2003) para o erro de rastreamento e_0 é utilizada para decidir quando u deve ser chaveado de u^+ para u^- e vice versa, possibilitando a detecção de qualquer estimativa errada do $\text{sgn}(k_p)$. Os conjuntos T^+ e T^- são tais que $T^+ \cup T^- = [0, \infty)$ e $T^+ \cap T^- = \emptyset$, e ambos têm a forma $[t_k, t_{k+1}) \cup \dots \cup [t_l, t_{l+1})$. Aqui, t_k ou t_l denotam instantes de chaveamento para u .

A Figura 6.1 apresenta o diagrama em blocos do VS-MRAC e esquema de monitoração para o caso de plantas com grau relativo $n^* = 1$.

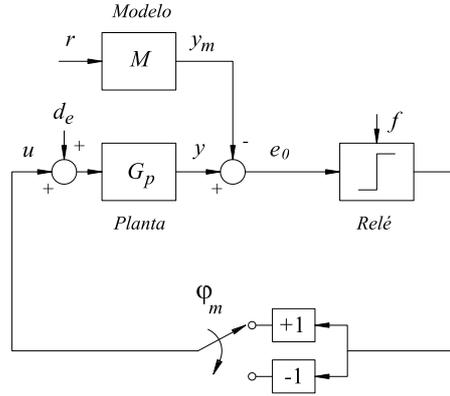


FIGURA 6.1: VS-MRAC - caso: grau relativo $n^* = 1$ e esquema de monitoração (φ_m).

- Função de modulação

De acordo com a Seção 4.2.2 e a partir de (6.4), a *função de modulação* $f(t)$ deve ser projetada de forma a superar, em magnitude, o sinal de controle ideal \bar{u} . Note que, a partir de (6.8), uma possível escolha para $f(t)$ satisfazer a desigualdade $f(t) \geq |\bar{u}(t)|$, com \bar{u} dado em (6.6), é

$$f(t) = \bar{\theta}^T |\omega(t)| + \hat{d}_e(t) + \delta, \quad (6.11)$$

ou ainda

$$f(t) = \|\bar{\theta}\| \|\omega(t)\| + \hat{d}_e(t) + \delta, \quad (6.12)$$

onde a constante arbitrária $\delta > 0$ garante que a convergência do erro de saída e_0 ocorra em tempo finito.

- Majorante para o erro de saída e_0

Considere por simplicidade $M(s) = k_m/(s + a_m)$ ($a_m, k_m > 0$). Então, para $\text{sgn}(k_p)$ conhecido, escolhe-se o controle u^+ ou u^- , se $k_p > 0$ ou $k_p < 0$, respectivamente. Assim sendo, e_0 satisfaz

$$\dot{e}_0(t) = -a_m e_0(t) + k_p[u(t) - \bar{u}(t)] + \pi(t), \quad (6.13)$$

onde $\pi(t)$ denota termos transientes devido às condições iniciais do sub-sistema observável e não-controlável da realização não-mínima (A_c, b_c, h_c^T) de $M(s)$ em (6.4), utilizada na teoria de MRAC (Ioannou & Sun 1996). Note que, se a direção de controle é correta e $f(t) > |\bar{u}|$ então $\text{sgn}(u - \bar{u}) = -\text{sgn}(e_0)$ e aplicando-se o *Teorema da Comparação* (Filippov 1964) (ver Apêndice B), $|e_0|$ é limitado pela solução da seguinte equação diferencial

$$\dot{\xi}(t) = -a_m \xi(t) + \pi(t), \quad \xi(\bar{t}_0) = e_0(\bar{t}_0), \quad (6.14)$$

i.e., $\forall t \geq \bar{t}_0$, tem-se

$$|e_0(t)| \leq |\xi(t)|, \quad (6.15)$$

onde \bar{t}_0 é qualquer instante de tempo inicial.

6.1.1.1 Função de Monitoração ($n^* = 1$)

A construção da função de monitoração é baseada na solução da equação (6.14) e no majorante (6.15). Visto que o termo π decai exponencialmente, existem constantes $R, \lambda > 0$ (independentes de \bar{t}_0), tais que $|\pi(t)| \leq R e^{-\lambda t}, \forall t \geq 0$, e a solução de (6.14) é dada por

$$\xi(t) = e^{-a_m(t-\bar{t}_0)} |e_0(\bar{t}_0)| + e^{-a_m t} * \pi, \quad \forall t \geq \bar{t}_0. \quad (6.16)$$

Um majorante para $\xi(t)$ é assim obtido de (6.16)

$$\begin{aligned} |\xi(t)| &= e^{-a_m(t-\bar{t}_0)} |e_0(\bar{t}_0)| + |e^{-a_m t} * \pi(t)| \\ &\leq e^{-a_m(t-\bar{t}_0)} |e_0(\bar{t}_0)| + |e^{-a_m t} * R e^{-\lambda t}| \\ &\leq e^{-a_m(t-\bar{t}_0)} |e_0(\bar{t}_0)| + c_0 e^{-\delta_0 t}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde $c_0 = \frac{2R}{|a_m - \lambda|} e^{-\delta_0 \bar{t}_0}$ e $\delta_0 < \min\{a_m, \lambda\}$ são constantes positivas e desconhecidas.

A partir de (6.15) e (6.17), considere a função auxiliar φ_k a seguir:

$$\varphi_k(t) = e^{-a_m(t-t_k)} |e_0(t_k)| + a(k) e^{-b(k)t}, \quad (6.18)$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}), \quad t_0 := 0, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

onde t_k é o instante de chaveamento a ser definido, $a(k)$ e $b(k)$ são seqüências que satisfazem

$$k \rightarrow +\infty : \begin{cases} a(k) = k + 1 \rightarrow +\infty \\ b(k) = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

com $b(0) < a_m$. Assim sendo, a *função de monitoração* φ_m pode ser definida como

$$\varphi_m(t) := \varphi_k(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (6.20)$$

Comparando (6.17) e (6.18), nota-se que (6.18) é obtida substituindo-se as constantes c_0 e δ_0 em (6.17) pelos termos $a(k)$ e $b(k)$, respectivamente.

Relembrando que a desigualdade (6.15) é satisfeita se o $\text{sgn}(k_p)$ é corretamente estimado, parece natural utilizar ξ como referência para decidir se um chaveamento de u é necessário. Entretanto, visto que π não está disponível, substitui-se ξ por φ_m e assim, φ_m faz o papel de monitoração. Note que, a partir de (6.20), $|e_0(t_k)| < \varphi_k(t_k)$ em $t = t_k$. Por esta razão, o instante de chaveamento t_k para u de u^- para u^+ (ou u^+ para u^-) é definido por ($\forall k \geq 0$):

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min\{t > t_k : |e_0(t)| = \varphi_k(t)\}, & \text{se este existir,} \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.21)$$

A Figura 6.2 ilustra o chaveamento da função de monitoração.

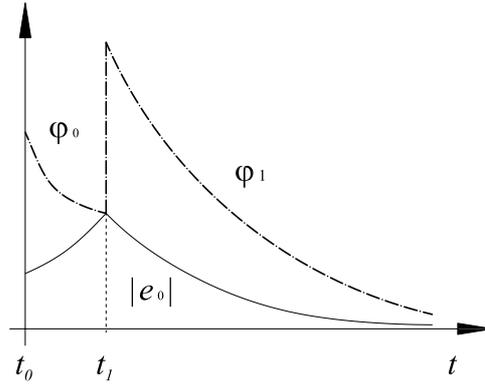


FIGURA 6.2: Trajetórias da função de monitoração φ_m e do erro de rastreamento $|e_0|$.

6.1.1.2 Resultado Principal para $n^* = 1$

A convergência exponencial global é garantida através do seguinte teorema (Yan et al. 2003, Theorem 1).

Teorema 6.1 *Suponha que (H1)–(H3), (H4.a) e (H5) sejam satisfeitas. Considere o sistema definido por (4.1), (4.2), (6.10) e função de modulação dada em (6.12). Então, a troca da direção de controle, acionada pela função de monitoração (6.20), termina após um número finito de chaveamentos e o erro de rastreamento e_0 e o estado completo X_e convergem para zero ao menos exponencialmente.*

Prova: A prova é dividida em três partes. 1ª Parte: Prova-se que o número de chaveamentos é finito ($k = k^*$). Suponha que u chaveie entre u^+ e u^- indefinidamente. Visto que, c_0 e δ_0 são constantes, então, após um número finito de chaveamentos k^* , a direção de controle poderá estar correta e ao mesmo tempo $c_0 e^{-\delta_0 t} < (k^* + 1)e^{-t/(k^*+1)}$. Deste modo, a partir de (6.17), tem-se que $|\xi| < \varphi_{k^*}, \forall t \geq t_{k^*}$. Além disso, para uma escolha correta da direção de controle, $e_0(t)$ satisfaz (6.15) e $|e_0| < \varphi_{k^*}, \forall t \geq t_{k^*}$. Assim sendo, a partir de (6.21), conclui-se que nenhum outro chaveamento ocorre. Nota-se que a possibilidade do chaveamento terminar com a direção de controle incorreta não é excluída. Contudo, neste caso a relação $|e_0| < \varphi_{k^*}, \forall t \geq t_{k^*}$ continuaria válida, caso contrário, mais um chaveamento ocorreria recaindo-se no caso anterior (direção de controle correta). 2ª Parte: Independentemente da direção de controle

ser corretamente estimada, visto que φ_k converge para zero exponencialmente, $e_0(t)$ também irá convergir para zero, ao menos exponencialmente. 3ª Parte: Finalmente, a convergência do estado completo de erro X_e pode ser mostrada utilizando-se a *forma regular* (Young et al. 1977, Cunha 2004) para a realização de espaço de estado de (6.1)-(6.2). ■

Corolário 6.1 *No Teorema 6.1, se a função de modulação (6.12) adicionalmente satisfizer a desigualdade $f > \frac{a_m}{k_p}|e_0|$, o chaveamento da direção de controle termina e o $\text{sgn}(k_p)$ é identificado corretamente ao final da monitoração, i.e., para $t > t_{k^*}$, $u = u^+$, se $k_p > 0$ e $u = u^-$, se $k_p < 0$.*

Prova: A prova é baseada no *argumento da dinâmica reversa*. Sabe-se que se a direção de controle é correta, todas as trajetórias do sistema convergem para a origem do espaço de estado do erro (Lema 4.1).

Argumento da Dinâmica Reversa: Considere a equação da dinâmica do erro de saída (6.13) reescrita abaixo

$$\frac{d}{dt}e_0(t) = -a_m e_0(t) + k_p u(t), \quad (6.22)$$

onde os termos π e \bar{u} foram omitidos apenas por simplificação. Sem perda de generalidade, assumamos que $\text{sgn}(k_p) > 0$ e que a direção final do sinal de controle esteja incorreta, i.e, $u = f(t)\text{sgn}(e_0)$. Aplicando-se a inversão do tempo $t \rightarrow -t$ em (6.22), tem-se

$$t_1 = -t, \quad dt_1 = -dt, \quad (6.23)$$

$$\frac{d}{dt_1}x(t_1) = a_m x(t_1) - k_p v(t_1), \quad (6.24)$$

sendo $x(t_1) = e_0(-t_1)$ e $v(t_1) = u(-t_1) = f(t_1)\text{sgn}(x)$. Considere $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ como candidata à função de Lyapunov, então

$$\dot{V} = a_m x^2 - k_p f|x|. \quad (6.25)$$

Assim sendo, se $f > \frac{a_m}{k_p}|x|$, $\dot{V} < 0$ e o estado x do sistema (6.24) convergirá para a origem a partir de qualquer condição inicial.

Portanto, aplicando a inversão no tempo, as equações resultantes têm as mesmas propriedades de estabilidade que aquelas obtidas com a direção correta do sinal de controle e, por isso, todas as trajetórias a partir de qualquer condição inicial convergiam para a origem. Deste modo, no sentido direto do tempo, todas as trajetórias fora da origem divergiam ilimitadamente. Isto é uma contradição, visto que a partir do Teorema 6.1 o estado converge para a origem. Portanto a direção final do sinal de controle estará correta. ■

6.1.1.3 Resultados de Simulação

Considere a seguinte planta instável de grau relativo unitário ($n^* = 1$)

$$G_p(s) = \frac{s + 1}{(s + 2)(s - 1)}, \quad (6.26)$$

sendo controlada pelo controlador VS-MRAC da Figura 6.1. Uma vez assumido que alguns parâmetros de $G_p(s)$ são incertos, o cálculo do majorante $\|\bar{\theta}\|$ é realizado a partir da estimativa mais pessimista (maior amplitude) para a norma do vetor $\|\theta^*\|$ considerando-se a planta $\hat{G}_p(s) = k_p \frac{s+1}{(s+a)(s-1)}$, onde $|k_p| \leq 2$ (sendo $|k_p| > b$, $b > 0$ uma constante suficientemente pequena) e $1.5 \leq a \leq 2.5$. Os parâmetros do controlador estão incluídos na Tabela 6.1.

TABELA 6.1: Sistema de controle.

CI's	$y(0) = 10, \dot{y}(0) = 2$
Modelo	$M(s) = \frac{2}{(s+2)}, r(t) = \sin(t)$
Perturbação	$d_e(t) = 50 \cos(5t)$
Filtros I/O (4.4)	$\Lambda = -2, g = 1$
Modulação	$\ \bar{\theta}\ = 5, \hat{d}_e(t) = 50, \delta = 1$
Monitoração	$a(k) = k + 1, a_m = 2, b(k) = \frac{1}{k+1}$

Na Figura 6.3, são apresentados o erro de rastreamento e_0 , a função de monitoração φ_m e o sinal de controle u . A realimentação é positiva em $t = 0s$ (direção de controle incorreta).

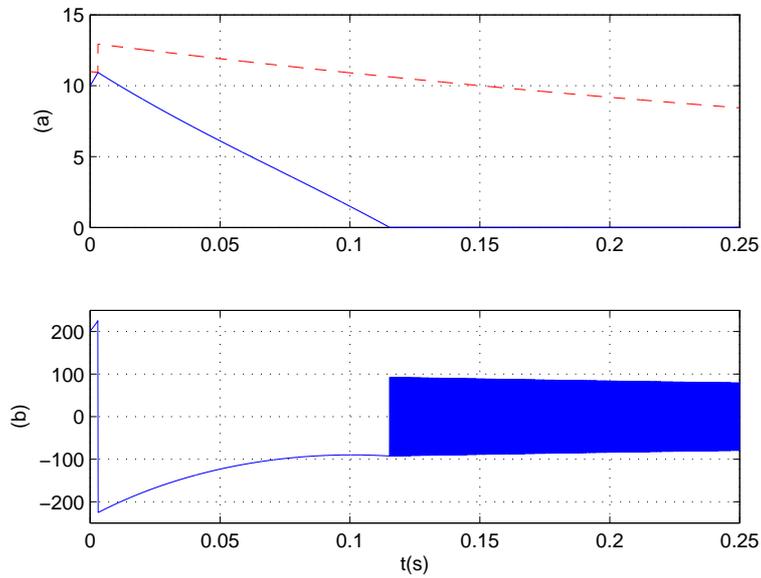


FIGURA 6.3: Resultados de simulação [$n^* = 1$] - (a) erro de rastreamento $|e_0|$ (—) e função de monitoração φ_m (---), (b) sinal de controle u .

Os resultados de simulação mostram que o erro de rastreamento é zero após o sistema entrar em regime de deslizamento em $t = 0.012s$. O sistema mostra-se insensível à perturbação $d_e(t) = 50 \cos(5t)$ durante o deslizamento.

A Figura 6.4 mostra a robustez do algoritmo proposto quando uma dinâmica não-modelada de atuador com função de transferência $D(s) = \frac{1}{0.02s+1}$ é adicionada na entrada da planta. Observa-se que o atraso introduzido pela dinâmica não-modelada leva à ocorrência do fenômeno de *chattering* no sinal de controle e à convergência de e_0 para um pequeno conjunto residual.

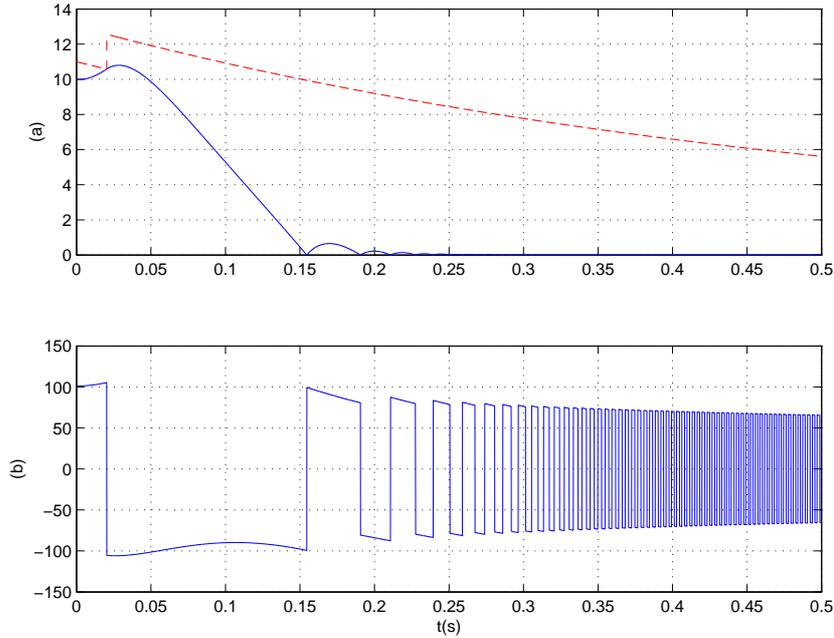


FIGURA 6.4: Resultados de simulação [$n^* = 1$] - (a) erro de rastreamento $|e_0|$ (—) e função de monitoração φ_m (---), (b) sinal de controle u .

6.1.2 Estrutura do Controlador para Grau Relativo Arbitrário

Como visto na Seção 4.2.3, para plantas de grau relativo $n^* = 1$, o modelo de referência $M(s)$ em (6.4) pode ser SPR. No caso de $\text{sgn}(k_p)$ conhecido (e.g., $k_p > 0$), o controle a estrutura variável $u = -f(t)\text{sgn}(e_0)$ garante estabilidade global e $e_0(t) \rightarrow 0$ assintoticamente ou em tempo finito (Hsu et al. 1994). O caso de $\text{sgn}(k_p)$ desconhecido ($n^* = 1$) foi resolvido em Yan et al. (2003) através da monitoração do erro de saída e_0 . Entretanto, para plantas de grau relativo $n^* > 1$, $M(s)$ não pode ser escolhida SPR e uma possível monitoração de e_0 deve ser reavaliada.

A idéia central da generalização para $n^* > 1$ consiste em reduzir o problema ao caso $n^* = 1$ introduzindo-se o operador $L(s)$, definido em (4.46), tal que $G_p L(s)$ tenha

grau relativo unitário e $ML(s)$ seja SPR. Contudo, o operador $L(s)$ não é realizável (não-causal). Como será demonstrado, a aproximação dada pelo filtro *lead*

$$\mathcal{L}(s) = L(s)/F(\tau s), \quad F(\tau s) = (\tau s + 1)^N \quad \text{e} \quad \tau > 0, \quad (6.27)$$

assegura estabilidade global apenas com respeito a um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\tau)$. Devido ao atraso τ introduzido pelo filtro *lead*, o sistema apresenta erro de rastreamento residual e o fenômeno de *chattering* aparece no sinal de controle. Por outro lado, o operador $L(s)$ pode ser implementado utilizando-se diferenciadores exatos e robustos (RED). Desta forma, o rastreamento exato pode ser obtido mas somente estabilidade local é assegurada (Nunes et al. 2004).

A estratégia de controle proposta (Figura 6.5) utiliza uma estrutura híbrida para implementar o operador $L(s)$, denominada de diferenciador global robusto e exato (GRED). Através de uma lei de chaveamento $\alpha(\cdot)$, combina-se de forma convexa o filtro *lead* (L/F , com saída ε_0), e o diferenciador robusto e exato (L_{red} , com saída $\bar{\varepsilon}_0$), obtendo assim uma compensação assintoticamente exata do grau relativo e ao mesmo tempo garantindo propriedades de estabilidade global (Nunes et al. 2004).

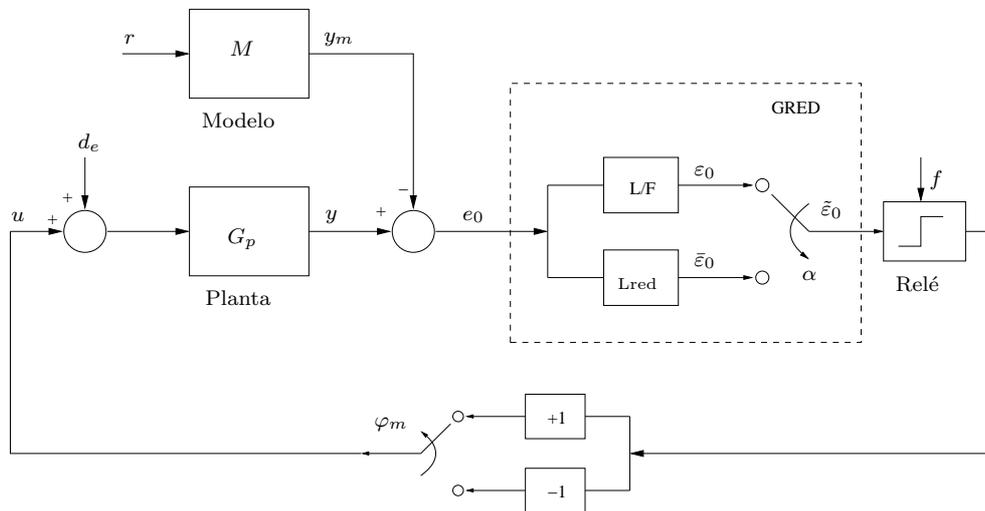


FIGURA 6.5: VS-MRAC com o filtro *lead* híbrido (GRED) e esquema de monitoração.

- Lei de controle

O sinal de controle u é definido em (6.10), substituindo e_0 por $\tilde{\varepsilon}_0 = (1-\alpha)\bar{\varepsilon}_0 + \alpha\varepsilon_0$ (ver Figura 6.5), i.e.,

$$u = \begin{cases} u^+ = -f(t) \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_0) & , \quad t \in T^+ , \\ u^- = f(t) \operatorname{sgn}(\tilde{\varepsilon}_0) & , \quad t \in T^- . \end{cases} \quad (6.28)$$

A estratégia de chaveamento da direção de controle, assim como a nova função de monitoração serão definidas mais adiante.

- Função de modulação

O projeto da função de modulação para sistemas de controle com grau relativo arbitrário é idêntico ao desenvolvido para sistemas com grau relativo unitário. Deste modo, a partir de (6.4), a *função de modulação* $f(t)$ deve ser projetada de forma a superar, em magnitude, o sinal de controle ideal \bar{u} . Note que, a partir de (6.8), uma possível escolha para $f(t)$ satisfazer a desigualdade $f(t) \geq |\bar{u}(t)|$, com \bar{u} dado em (6.6), é

$$f(t) = \bar{\theta}^T |\omega(t)| + \hat{d}_e(t) + \delta, \quad (6.29)$$

onde $\delta > 0$ é uma constante arbitrária. A utilização do parâmetro δ na função de modulação é desnecessário para sistemas com grau relativo $n^* > 1$, pois como visto e revisto nos Teoremas 4.1 e 6.2 adiante, não se pode garantir *a priori* a convergência do erro de saída em tempo finito mesmo que se escolha $\delta > 0$. Assim sendo, utiliza-se $\delta=0$ na função de modulação (6.29).

6.1.2.1 Estrutura equivalente para o filtro híbrido

De acordo com o Lema 4.4, escolhendo-se uma lei de chaveamento $\alpha(\cdot)$ apropriada, o filtro híbrido (GRED) é *equivalente* ao filtro *lead* linear acrescido de uma perturbação de saída uniformemente limitada β_α de ordem τ (a menos de termos transientes que decaem exponencialmente), ver Figura 6.6. Entretanto, com o intuito de simplificar a análise, esses termos serão ignorados de forma que $\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0$ ($\alpha=1$). Na Seção 6.1.2.6, os resultados serão revistos a fim de considerar de forma a levar em conta as perturbações de saída e o estado completo do bloco L_{red} omitidos.

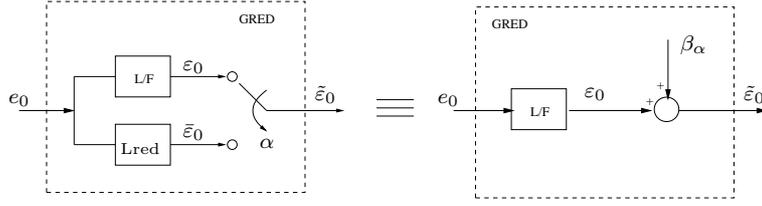


FIGURA 6.6: Equivalência entre o filtro híbrido (GRED) e o filtro *lead* linear.

6.1.2.2 Compensação do grau relativo através do filtro *lead*

Considerando apenas a aproximação para \bar{e}_0 dada pelo filtro *lead* linear (Figura 6.5),

$$\varepsilon_0 := \frac{L(s)}{F(\tau s)} e_0. \quad (6.30)$$

Seja $b_i (i = 0, \dots, N - 1)$ os coeficientes do binômio

$$F(\tau s) = (\tau s + 1)^N = (\tau s)^N + b_{N-1}(\tau s)^{(N-1)} + \dots + b_0,$$

e o polinômio $L(s)$ apresentado em (4.46). Então, o filtro *lead* linear pode ser realizado na forma canônica controlável como

$$\text{Espaço de Estado: } \dot{x}_{fc} = A_{fc} x_{fc} + B_{fc} e_0, \quad (6.31)$$

$$\tau^N \varepsilon_0 = C_{fc} x_{fc} + e_0, \quad (6.32)$$

onde as matrizes (A_{fc}, B_{fc}, C_{fc}) são dadas por

$$A_{fc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{b_0}{\tau^N} & -\frac{b_1}{\tau^{(N-1)}} & -\frac{b_2}{\tau^{(N-2)}} & \dots & -\frac{b_{N-1}}{\tau} \end{bmatrix},$$

$$B_{fc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \text{e}$$

$$C_{fc} = \begin{bmatrix} a_0 - b_0/\tau^N & a_1 - b_1/\tau^{(N-1)} & \dots & a_{N-1} - b_{N-1}/\tau \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se a transformação de similaridade $T := \text{diag}\{1/\tau^N, 1/\tau^{(N-1)}, \dots, 1/\tau\}$ para a realização canônica controlável de L/F , obtém-se a realização

$$\text{Espaço de Estado: } \tau \dot{x}_f = A_f x_f + B_f e_0, \quad (6.33)$$

$$\tau^N \varepsilon_0 = C_f x_f + e_0, \quad (6.34)$$

onde

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \text{ e}$$

$$C_f = \begin{bmatrix} \tau^N a_0 - b_0 & \tau^{(N-1)} a_1 - b_1 & \dots & \tau a_{N-1} - b_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Filtro Lead \times HGO : Os filtros lead representados por (6.31)-(6.32) e (6.33)-(6.34) são análogos ao observador de alto ganho (HGO) com pico e livre de pico, respectivamente, avaliados em Cunha (2004).

A solução de (6.33) é dada por

$$x_f(t) = e^{A_f t/\tau} x_f(0) + \frac{1}{\tau} e^{A_f t/\tau} B_f * e_0(t), \quad (6.35)$$

e a seguinte desigualdade pode ser verificada

$$\|x_f(t)\| \leq \|e^{A_f t/\tau}\| \|x_f(0)\| + \frac{\|B_f\|}{\tau} (\|e^{A_f t/\tau}\| * |e_0(t)|). \quad (6.36)$$

A partir do Corolário F.1 (Apêndice F), e lembrando que todos os autovalores de A_f são iguais a um, a matriz exponencial $e^{A_f t}$ é dada por

$$e^{A_f t} = \sum_{i=0}^{N-1} g_i(t) A_f^i,$$

onde

$$g_i(t) := \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{ji} \frac{t^j}{j!} e^{-t},$$

e α_{ji} são constantes independentes de τ para $(j = 0, \dots, N-1)$ e $(i = 0, \dots, N-1)$.

Aplicando-se a transformação de variável $t \rightarrow t/\tau$, tem-se

$$e^{A_f t/\tau} = \sum_{i=0}^{N-1} g_i(t/\tau) A_f^i, \quad (6.37)$$

onde

$$g_i(t/\tau) := \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\alpha_{ji}}{j!} \frac{t^j}{\tau^j} e^{-t/\tau}. \quad (6.38)$$

Assim sendo, utilizando-se o Lema F.1 (Apêndice F) em (6.38) e, a partir de (6.37), conclui-se que existe uma constante k_f independente de τ tal que

$$\|e^{A_f t/\tau}\| \leq k_f e^{-t/\bar{\tau}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.39)$$

$\bar{\tau} > \tau$. A desigualdade (6.36) é reescrita como

$$\|x_f(t)\| \leq k_f \|x_f(0)\| e^{-t/\bar{\tau}} + \|B_f\| k_f \left(\frac{1}{\tau} e^{-t/\bar{\tau}} * |e_0(t)| \right). \quad (6.40)$$

Note que

$$\left\| \frac{1}{\tau} e^{-t/\bar{\tau}} \right\|_1 = \frac{\bar{\tau}}{\tau} \leq \varsigma, \quad (6.41)$$

onde $\varsigma > 1$ e $\bar{\tau} = \varsigma\tau$. Então, utilizando-se a relação (1.5) na convolução presente em (6.40), conclui-se que

$$\|(x_f)_t\|_\infty \leq k_f \|x_f(0)\| + (\varsigma \|B_f\| k_f) \|(e_0)_t\|_\infty. \quad (6.42)$$

- Fenômeno de *Pico*

Ao utilizar a realização (6.33)-(6.34), apenas o erro auxiliar ε_0 apresenta o fenômeno de *pico*, enquanto o estado x_f é livre deste. Devido as características da função $\text{sgn}(\cdot)$, a lei de controle (6.28) impede a transmissão do *pico* para a planta. Além disso, com intuito de evitar que $\varepsilon_0(0)$ assuma valores muito grandes quando o sistema é inicializado, pode-se fazer $\varepsilon_0(0) = 0$ ajustando-se as condições iniciais $x_f(0)$, tal que

$C_f x_f(0) + e_0(0) = 0$ em (6.34). Assim sendo, o fenômeno de *pico* também pode ser eliminado em $t = 0$ através de uma inicialização conveniente do estado do filtro *lead*.

6.1.2.3 Erros Auxiliares para Análise e Projeto

Nesta seção são apresentadas as equações dos erros auxiliares obtidas no projeto do controlador proposto em que a compensação do grau relativo é realizada através do filtro *lead*. Além disso, é definido o vetor de estados do sistema do erro utilizado na análise de estabilidade.

Seja o erro do filtro *lead* linear dado por

$$e_F := \varepsilon_0 - \bar{e}_0. \quad (6.43)$$

Pode-se reescrever (6.4) como

$$e_0 = \rho^* M * [u - \bar{u}] + h_c^T e^{A_c t} X_e(0), \quad \forall t \geq 0, \quad (6.44)$$

e a partir de (6.33)-(6.34), e_F satisfaz

$$e_F = \frac{L}{F} * e_0 + \frac{1}{\tau^N} C_f e^{A_f t / \tau} x_f(0) - \bar{e}_0, \quad \forall t \geq 0. \quad (6.45)$$

Substituindo-se (6.44) em (6.45), tem-se

$$\begin{aligned} e_F &= \frac{\rho^* M L}{F} * [u - \bar{u}] + \frac{L}{F} * [h_c^T e^{A_c t} X_e(0)] + \\ &+ \frac{1}{\tau^N} C_f e^{A_f t / \tau} x_f(0) - \bar{e}_0, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (6.46)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} e_F &= \rho^* M L * [u - \bar{u}] - \bar{e}_0 + \beta_U + \\ &+ \frac{L}{F} * [h_c^T e^{A_c t} X_e(0)] + \frac{1}{\tau^N} C_f e^{A_f t / \tau} x_f(0), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (6.47)$$

onde β_U é definido por

$$\beta_U := \rho^* M L(s) [1 - F(\tau s)] F^{-1}(\tau s) * (u - \bar{u}). \quad (6.48)$$

Uma vez que $\bar{e}_0 = \rho^* ML * [u - \bar{u}] + h_L^T e^{A_c t} X_e(0)$ (ver (6.5)), pode-se redefinir o erro do filtro *lead* (6.43) a partir de (6.47) como sendo

$$e_F = \beta_{\mathcal{U}} + e_F^0, \quad (6.49)$$

onde

$$e_F^0 := \frac{L}{F} * h_c^T e^{A_c t} X_e(0) - h_L^T e^{A_c t} X_e(0) + \frac{1}{\tau N} C_f e^{A_f t / \tau} x_f(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (6.50)$$

Deste modo, o erro auxiliar ε_0 satisfaz

$$\varepsilon_0 = \rho^* ML [u - \bar{u}] + \beta_{\mathcal{U}} + e_F^0. \quad (6.51)$$

- Majorantes para os erros auxiliares

Relembrando que $e_F = \beta_{\mathcal{U}} + e_F^0$, um majorante para $|e_F|$ pode ser obtido diretamente dos limitantes para $\beta_{\mathcal{U}}$ and e_F^0 .

Como a função de transferência em (6.48) é BIBO estável, estritamente própria e de ordem $\mathcal{O}(\tau)$, então a partir da Hipótese (H6) e de (4.24) e (4.25), o seguinte majorante para a norma de $\beta_{\mathcal{U}}$ pode ser verificado ($\forall t \geq 0$)

$$\|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty} \leq \tau k_a \| (X_e)_t \|_{\infty} + \tau k_b, \quad (6.52)$$

onde $k_a, k_b > 0$ são constantes apropriadas.

Aplicando a expansão em frações parciais nos termos com função de transferência do tipo $\frac{L(s)}{F(\tau s)(s+a)^b}$ (onde $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{N}$), a convolução em (6.50) pode ser majorada por

$$\left| \frac{L}{F} * h_c^T e^{A_c t} X_e(0) \right| \leq \frac{k_{e\tau}}{\tau N} |X_e(0)| e^{-\frac{t}{\bar{\tau}}} + k_e |X_e(0)| e^{-\lambda_e t}, \quad (6.53)$$

onde $k_e, k_{e\tau}, \lambda_e > 0$ são constantes independentes de τ e $\bar{\tau} > \tau$. O desenvolvimento completo da desigualdade (6.53) é apresentado no Apêndice F.

A partir de (6.50) e (6.53), o seguinte majorante pode ser obtido para e_F^0

$$|e_F^0| \leq R_1 e^{-\lambda_c t} + \frac{R_2}{\tau N} e^{-\frac{t}{\bar{\tau}}} \leq R_a e^{-\lambda_a(t-t_e(\tau))}. \quad (6.54)$$

As constantes positivas R_1, R_2, R_a e λ_c são *independentes* de $\tau > 0$; λ_c é um limitante inferior para a margem de estabilidade de A_c e $0 < \lambda_a < \min(\lambda_c, 1/\bar{\tau})$, com $\bar{\tau} > \tau$. As constantes R_1, R_2 e R_a são combinações lineares das condições iniciais $X_e(0)$ e $x_f(0)$. A primeira desigualdade em (6.54) é válida $\forall t \geq 0$, enquanto a última é válida somente $\forall t \geq t_e$, onde t_e é o *tempo de extinção de pico* (ver Seção 3.5.1.2 - Definição 11), i.e, o menor instante de tempo tal que a desigualdade $\frac{R_2}{\tau^N} e^{-\frac{t}{\tau}} \leq R_2, \forall t \geq t_e(\tau), \forall R_2$ é satisfeita para um valor fixo do parâmetro $\tau \in (0, 1]$.

- Majorante para o tempo de extinção de pico

A partir da Definição 11, pode-se concluir que $t_e(\tau)$ é uniformemente limitado por uma função da classe \mathcal{K} de τ . Além disso, existe um majorante $\bar{t}_e(\tau) \in \mathcal{K}$ tal que

$$t_e(\tau) \leq \bar{t}_e(\tau), \quad (6.55)$$

obtido a partir dos limitantes conhecidos dos parâmetros da planta.

- Vetor de estado do sistema do erro

Para analisar a estabilidade do sistema do erro composto por (6.1) e (6.33), utiliza-se o seguinte vetor de estado¹

$$z^T := [X_e^T, x_f], \quad z \in \mathbb{R}^{3n-2+N}. \quad (6.56)$$

A seguinte proposição é consequência da continuidade das soluções de Filippov e da particular realização associada ao estado x_f .

Proposição 8 *Considere (H1)–(H3), (H4.a), (H5) e o sistema do erro (6.1), (6.2), (6.28), (6.33) e (6.34) com estado z definido em (6.56). Seja $t_e(\tau) \in \mathcal{K}, \forall \tau \in (0, 1]$. Então, existe $\tau_1 \in (0, 1]$, suficientemente pequeno, tal que $\forall \tau \in (0, \tau_1]$,*

$$\|z(t)\| \leq k_{z0}\|z(0)\| + \mathcal{V}(\tau), \quad \forall t \in [0, t_e(\tau)], \quad (6.57)$$

onde $\mathcal{V} \in \mathcal{K}$ e $k_{z0} > 0$ é uma constante.

¹os estados do sistema representado pelo bloco L_{red} da Figura 6.5 serão considerados na Seção 6.1.2.6.

Prova: Ver Apêndice G. ■

A Proposição 8 independe do $\text{sgn}(k_p)$ e fornece um limitante para o estado z válido durante o tempo de extinção de pico t_e , sendo utilizada na análise de estabilidade.

6.1.2.4 Resultado de Estabilidade para o Caso de Direção de Controle Conhecida

Esta seção apresenta a análise de estabilidade global para sistemas em que a direção de controle é conhecida e correta e, sem perda de generalidade, assume-se $k_p > 0$. A análise desenvolvida aqui difere dos resultados prévios discutidos nas Seções 4.2 e 4.3 devido a particular atenção dada ao *fenômeno de pico*.

Aplicando o Lema 4.2 em (6.51), onde $\bar{t}_0 := \bar{t}_e$, sendo $\bar{t}_e \geq t_e$ (6.55), então para uma função de modulação apropriada ($f \geq |\bar{u}|$) e $\forall t_k$ tal que $t_k \geq \bar{t}_e$, o seguinte majorante é válido ($\forall t \geq t_k$)

$$|\bar{e}_0| \leq |\varepsilon_0(t_k) - \beta_{\mathcal{U}}(t_k)| e^{-a_m(t-t_k)} + R_a e^{-\bar{\lambda}_a(t-\bar{t}_e)} + \|(\beta_{\mathcal{U}})_{t, \bar{t}_e}\|_{\infty}. \quad (6.58)$$

O termo $R_a e^{-\bar{\lambda}_a(t-\bar{t}_e)}$ é um majorante para $|e_{\bar{F}}^0|$, válido $\forall t \geq \bar{t}_e$ e $\bar{\lambda}_a = \min\{a_m, \lambda_a\}$.

- Majorante para X_e ($\forall t \geq \bar{t}_e$)

Um limitante para a norma do vetor de estado X_e pode ser obtido colocando-se o sistema (6.1) e (6.3) na *forma regular* (Young et al. 1977, Cunha 2004). Note que isto é sempre possível já que a função de transferência $ML(s)$ em (6.5) é de fase mínima e tem grau relativo unitário. Assim sendo, existe uma transformação não-singular $\bar{X}_e := TX_e$, tal que a parcela $\Phi := \begin{bmatrix} \chi^T & \bar{e}_0 \end{bmatrix}^T$ referente ao sub-sistema controlável e observável de (6.1) e (6.3) pode ser reescrita como

$$\dot{\chi} = A_0 \chi + B_0 \bar{e}_0, \quad (6.59)$$

$$\dot{\bar{e}}_0 = -\bar{a}_0 \bar{e}_0 + \rho^*(u - \bar{u}) - C_0 \chi, \quad (6.60)$$

onde $\bar{X}_e := \begin{bmatrix} \Phi^T & \Psi^T \end{bmatrix}^T$ e Ψ representa os demais estados que compõem o vetor de estado \bar{X}_e .

A Figura 6.7 representa a equivalência entre o sub-sistema controlável e observável de (6.1) e (6.3) e a função de transferência $ML(s)$ (ver equivalência entre sistemas - Apêndice F).

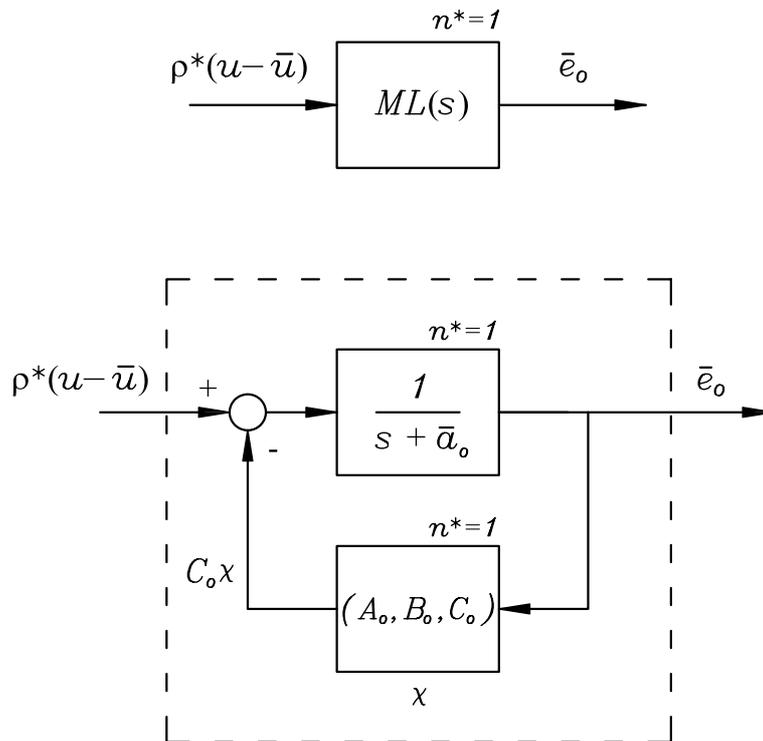


FIGURA 6.7: Equivalência entre sistemas.

Desta forma, a dinâmica dos zeros (6.59) pode ser representada como um sistema BIBO estável com realização (A_o, B_o, C_o) e vetor de estado χ , cuja entrada é \bar{e}_o , sendo \bar{a}_o uma constante positiva. Além disso, pode-se mostrar que os demais estados representados por Ψ são exponencialmente estáveis e que

$$\|\Psi(t)\| \leq k_\Psi \|X_e(0)\| e^{-\lambda_\Psi t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.61)$$

onde $k_\Psi > 0$ é uma constante e $\lambda_\Psi > 0$ é um limitante inferior para a margem de estabilidade de A_c (Cunha 2004).

A solução de (6.59), para um instante de tempo arbitrário $t_k \geq \bar{t}_e \geq 0$, é dada por

$$\chi(t) = \chi(t_k)e^{A_0(t-t_k)} + B_0e^{A_0t} * \bar{e}_0(t), \quad \forall t \geq t_k \geq 0. \quad (6.62)$$

Aplicando-se o Lema 4.3 em (6.59), tem-se

$$\|\chi(t)\| \leq \bar{k}_{\chi_0}\|\chi(t_k)\|e^{-\lambda(t-t_k)} + \bar{k}_{\chi_1}e^{-\gamma_0t} * |\bar{e}_0|, \quad \forall t \geq t_k \geq 0, \quad (6.63)$$

onde $\bar{k}_{\chi_0}, \bar{k}_{\chi_1} > 0$ são constantes e $\lambda, \gamma_0 > 0$ são limitantes inferiores para a margem de estabilidade de A_0 . Note que, (6.59) é estável da entrada \bar{e}_0 para o estado χ (*input-to-state stable* – ISS, ver Apêndice B). Visto que, $X_e = T^{-1}\bar{X}_e = T^{-1}[\chi^T \bar{e}_0 \Psi^T]^T$, então $\|X_e\| \leq \|T^{-1}\|(\|\chi\| + |\bar{e}_0| + \|\Psi\|)$ e a partir de (6.61) e (6.63), tem-se ($\forall t \geq t_k \geq 0$)

$$\begin{aligned} \|X_e(t)\| &\leq k_{\chi_0}\|\chi(t_k)\|e^{-\lambda(t-t_k)} + k_{\chi_1}e^{-\gamma_0t} * |\bar{e}_0| + \\ &+ \|T^{-1}\|(|\bar{e}_0(t)| + k_{\Psi}\|T^{-1}\|\|\chi(t_k)\|e^{-\lambda(t-t_k)}), \end{aligned} \quad (6.64)$$

onde $k_{\chi_0}, k_{\chi_1} > 0$. De (6.64) e relembrando que $\chi = [I \ 0 \ 0] T X_e$, a seguinte desigualdade pode ser verificada ($\forall t \geq t_k \geq 0$)

$$\|X_e(t)\| \leq k_{X_{e0}}\|X_e(t_k)\|e^{-\lambda_0(t-t_k)} + k_{X_{e1}}e^{-\gamma_0t} * |\bar{e}_0(t)| + k_{X_{e2}}|\bar{e}_0(t)|, \quad (6.65)$$

com $k_{X_{e0}}, k_{X_{e1}}, k_{X_{e2}} > 0$ e $\lambda_0 \leq \min(\lambda, \lambda_{\Psi})$.

A ordem de $ML(s)$: Note que, a análise acima admite a possibilidade da função de transferência $ML(s)$ ser de ordem qualquer. Contudo, um resultado semelhante à desigualdade (6.65) pode ser obtido considerando $ML(s)$ de primeira ordem. Portanto, a partir da equação (6.5) e de $ML(s) = k_m/(s + a_m)$ ($K_m, a_m > 0$), pode-se concluir que

$$u - \bar{u} = [\dot{\bar{e}}_0 + a_m\bar{e}_0] / k_m\rho^*. \quad (6.66)$$

Substituindo (6.66) em (6.1), tem-se

$$\dot{X}_e = A_c X_e + b_c [\dot{\bar{e}}_0 + a_m\bar{e}_0] / k_m. \quad (6.67)$$

Então, para eliminar o termo derivativo $\dot{\bar{e}}_0$, será realizada a transformação de variável

$\hat{X}_e := X_e - [b_c \bar{e}_0]/k_m$ que resulta em

$$\dot{\hat{X}}_e = A_c \hat{X}_e + \bar{B} \bar{e}_0, \quad (6.68)$$

onde $\bar{B} = (A_c + I a_m) \frac{b_c}{k_m}$. Assim sendo, aplicando-se o Lema 4.3 em (6.68), obtém-se

$$\|\hat{X}_e(t)\| \leq \bar{k}_{\hat{X}_{e0}} \|\hat{X}_e(t_k)\| e^{-\lambda_c(t-t_k)} + \bar{k}_{\hat{X}_{e1}} e^{-\gamma_c t} * |\bar{e}_0|, \quad \forall t \geq t_k \geq 0, \quad (6.69)$$

onde $\bar{k}_{\hat{X}_{e0}}, \bar{k}_{\hat{X}_{e1}} > 0$ são constantes e $\lambda_c, \gamma_c > 0$ são limitantes inferiores para a margem de estabilidade de A_c . Note que, (6.68) é estável da entrada \bar{e}_0 para o estado \hat{X}_e (*input-to-state stable* – ISS). Visto que, $X_e = \hat{X}_e + [b_c \bar{e}_0]/k_m$, então a partir de (6.69) e após algumas manipulações algébricas, a seguinte desigualdade pode ser verificada ($\forall t \geq t_k \geq 0$)

$$\|X_e(t)\| \leq k_{X_{ea}} \|X_e(t_k)\| e^{-\lambda_c(t-t_k)} + k_{X_{eb}} e^{-\gamma_c t} * |\bar{e}_0(t)| + k_{X_{ec}} |\bar{e}_0(t)|, \quad (6.70)$$

com $k_{X_{ea}}, k_{X_{eb}}, k_{X_{ec}} > 0$, caracterizando as mesmas propriedades presentes em (6.65).

Assim sendo, daqui por diante considera-se a desigualdade (6.65) na tentativa de obter um majorante válido para X_e ($\forall t \geq \bar{t}_e$). Como $\bar{e}_0 = \varepsilon_0 - \beta_U - e_F^0$, subentende-se que

$$|\varepsilon_0(t) - \beta_U(t)| \leq |\bar{e}_0(t)| + |e_F^0(t)|,$$

e, a partir de (6.54),

$$|e_F^0(t)| \leq R_a e^{-\lambda_a(t-\bar{t}_e)} \leq R_a e^{-\bar{\lambda}_a(t-\bar{t}_e)}, \quad (6.71)$$

$$|\varepsilon_0(t) - \beta_U(t)| \leq |\bar{e}_0(t)| + R_a e^{-\bar{\lambda}_a(t-\bar{t}_e)}, \quad \forall t \geq \bar{t}_e. \quad (6.72)$$

Substituindo-se (6.72) na relação (6.58), válida para $\forall t \geq t_k \geq \bar{t}_e$, e lembrando que $\bar{e}_0 = h_L^T X_e$, tem-se

$$\begin{aligned} |\bar{e}_0| &\leq (\|h_L\| \|X_e(t_k)\|) e^{-a_m(t-t_k)} + R_a e^{-\bar{\lambda}_a(t_k-\bar{t}_e)} e^{-a_m(t-t_k)} + R_a e^{-\bar{\lambda}_a(t-\bar{t}_e)} + \|(\beta_U)_{t,\bar{t}_e}\|_\infty \\ &\leq (\|h_L\| \|X_e(t_k)\| + R_a) e^{-a_m(t-t_k)} + R_a e^{-\bar{\lambda}_a(t-\bar{t}_e)} + \|(\beta_U)_{t,\bar{t}_e}\|_\infty \\ &\leq k_a e^{-\bar{\lambda}_a t} + \|(\beta_U)_{t,\bar{t}_e}\|_\infty, \end{aligned} \quad (6.73)$$

onde

$$k_a := (\|h_L\| \|X_e(t_k)\| + R_a) e^{\bar{\lambda}_a t_k} + R_a e^{\bar{\lambda}_a \bar{t}_e}. \quad (6.74)$$

De acordo com (6.73), a convolução em (6.65) pode ser majorada por

$$e^{-\gamma_0 t} * |\bar{e}_0(t)| \leq e^{-\gamma_0 t} * k_a e^{-\bar{\lambda}_a t} + e^{-\gamma_0 t} * \|(\beta_U)_{t, \bar{t}_e}\|_\infty. \quad (6.75)$$

Aplicando-se o Corolário F.2 (Apêndice F) na primeira convolução no lado direito de (6.75) e visto que $\|e^{-\gamma_0 t}\|_1 = \frac{1}{\gamma_0}$, então, a partir da relação (1.5), conclui-se que

$$e^{-\gamma_0 t} * |\bar{e}_0(t)| \leq k_a k_b e^{-\bar{\lambda} t} + \frac{1}{\gamma_0} \|(\beta_U)_{t, \bar{t}_e}\|_\infty, \quad (6.76)$$

sendo $\bar{\lambda} \leq \min(\bar{\lambda}_a, \gamma_0)$ e k_b é uma constante positiva. Portanto o majorante (6.65) pode ser reescrito como ($\forall t \geq t_k \geq \bar{t}_e \geq 0$)

$$\begin{aligned} \|X_e(t)\| &\leq k_{X_{e0}} \|X_e(t_k)\| e^{-\lambda_0(t-t_k)} + k_{X_{e1}} k_a k_b e^{-\bar{\lambda} t} + \frac{k_{X_{e1}}}{\gamma_0} \|(\beta_U)_{t, \bar{t}_e}\|_\infty + \\ &+ k_{X_{e2}} k_a e^{-\bar{\lambda}_a t} + k_{X_{e2}} \|(\beta_U)_{t, \bar{t}_e}\|_\infty, \end{aligned} \quad (6.77)$$

ou de forma equivalente,

$$\|X_e(t)\| \leq k_{X_{e0}} \|X_e(t_k)\| e^{-\lambda_0(t-t_k)} + k_a k_c e^{-\bar{\lambda} t} + k_d \|(\beta_U)_{t, \bar{t}_e}\|_\infty, \quad (6.78)$$

sendo $k_c := k_{X_{e1}} k_b + k_{X_{e2}}$ e $k_d := \frac{k_{X_{e1}}}{\gamma_0} + k_{X_{e2}}$ constantes positivas. Em particular, para $t_k = \bar{t}_e$ em (6.78), tem-se ($\forall t \geq \bar{t}_e$)

$$\|X_e(t)\| \leq k_{X_{e0}} \|X_e(\bar{t}_e)\| e^{-\lambda_0(t-\bar{t}_e)} + k_a k_c e^{-\bar{\lambda} t} + k_d \|(\beta_U)_{t, \bar{t}_e}\|_\infty, \quad (6.79)$$

onde k_a é definido a partir de (6.74) sendo

$$k_a := (\|h_L\| \|X_e(\bar{t}_e)\| + 2R_a) e^{\bar{\lambda}_a \bar{t}_e}. \quad (6.80)$$

Conforme (6.54) ($\forall t \geq \bar{t}_e$), sabe-se que R_a é formada por combinações lineares de $X_e(0)$

e $x_f(0)$. Assim sendo,

$$R_a := k_{X_{ea}} \|X_e(0)\| + k_{x_{fa}} \|x_f(0)\|, \quad (6.81)$$

com $k_{X_{ea}}, k_{x_{fa}} > 0$ e independentes de τ .

Aplicando-se a Proposição 8 para a parcela X_e do estado completo z definido em (6.56), resulta (em particular $\forall t \in [0, \bar{t}_e]$)

$$\|X_e(\bar{t}_e)\| \leq k_{X_{eb}} \|X_e(0)\| + k_v \mathcal{V}(\tau). \quad (6.82)$$

Substituindo-se (6.82) em (6.79), obtém-se

$$\begin{aligned} \|X_e(t)\| &\leq k_{X_{e0}} (k_{X_{eb}} \|X_e(0)\| + k_v \mathcal{V}(\tau)) e^{\lambda_0 \bar{t}_e} e^{-\bar{\lambda}_0 t} + \\ &+ k_a k_c e^{-\bar{\lambda}_0 t} + k_d \|(\beta_U)_{t, \bar{t}_e}\|_\infty, \end{aligned} \quad (6.83)$$

onde $\bar{\lambda}_0 < \min(\lambda_0, \bar{\lambda})$. Deste modo, de acordo com (6.80), (6.81) e (6.82), observa-se que

$$\begin{aligned} k_a &\leq [\|h_L\| (k_{X_{eb}} \|X_e(0)\| + k_v \mathcal{V}(\tau)) + 2R_a] e^{\bar{\lambda}_a \bar{t}_e} \\ &\leq k_{X_{ec}} \|X_e(0)\| + k_{x_{fb}} \|x_f(0)\| + k_{v\tau a}, \end{aligned} \quad (6.84)$$

sendo $k_{X_{ec}} = [\|h_L\| k_{X_{eb}} + 2k_{X_{ea}}] e^{\bar{\lambda}_a \bar{t}_e}$, $k_{x_{fb}} = 2k_{x_{fa}} e^{\bar{\lambda}_a \bar{t}_e}$ e $k_{v\tau a} = k_v \|h_L\| \mathcal{V}(\tau) e^{\bar{\lambda}_a \bar{t}_e}$. Então, a partir de (6.83) e (6.84) o seguinte majorante para $\|X_e\|$ é válido $\forall t \geq \bar{t}_e$

$$\begin{aligned} \|X_e(t)\| &\leq k_{X_e} \|X_e(0)\| e^{-\bar{\lambda}_0 t} + k_{x_f} \|x_f(0)\| e^{-\bar{\lambda}_0 t} + \\ &+ k_{v\tau} \mathcal{V}(\tau) e^{-\bar{\lambda}_0 t} + k_{\beta U} \|(\beta_U)_{t, \bar{t}_e}\|_\infty, \end{aligned} \quad (6.85)$$

com constantes positivas $k_{X_e} = k_{X_{e0}} k_{X_{eb}} e^{\lambda_0 \bar{t}_e} + k_{X_{ec}} k_c$, $k_{x_f} = k_{x_{fb}} k_c$, $k_{v\tau} = k_v k_c \|h_L\| e^{\bar{\lambda}_a \bar{t}_e} + k_{X_{e0}} k_v e^{\lambda_0 \bar{t}_e}$ e $k_{\beta U} = k_d$.

- Majorante para X_e ($\forall t \geq 0$)

A partir da Proposição 8 e da definição do vetor de estado z em (6.56), existem constantes positivas $\bar{k}_{X_{e0}}$, \bar{k}_v e uma função \mathcal{V} classe- \mathcal{K} , tal que $\forall t \in [0, \bar{t}_e]$

$$\|X_e(t)\| \leq [\bar{k}_{X_{e0}}\|X_e(0)\| + \bar{k}_v\mathcal{V}(\tau)] e^{\bar{\lambda}_0\bar{t}_e} e^{-\bar{\lambda}_0 t}. \quad (6.86)$$

Uma vez que $\|(\beta_{\mathcal{U}})_{t, \bar{t}_e}\|_{\infty} \leq \|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty}$, somando-se os majorantes obtidos em (6.85) e (6.86), obtém-se um majorante para X_e , válido $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|X_e(t)\| &\leq \bar{k}_{X_e}\|X_e(0)\|e^{-\bar{\lambda}_0 t} + k_{x_f}\|x_f(0)\|e^{-\bar{\lambda}_0 t} + \\ &+ \bar{\mathcal{V}}(\tau)e^{-\bar{\lambda}_0 t} + k_{\beta_{\mathcal{U}}}\|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty}, \end{aligned} \quad (6.87)$$

onde $\bar{\mathcal{V}} \in \mathcal{K}$ e $\bar{k}_{X_e} = k_{X_e} + \bar{k}_{X_{e0}}e^{\bar{\lambda}_0\bar{t}_e}$.

- Majorante para z ($\forall t \geq 0$)

Um majorante para a norma de z é deduzido a seguir. Relembrando a desigualdade (6.40) e $e_0 = h_c^T X_e$, observa-se que $\|x_f\|$ satisfaz

$$\|x_f(t)\| \leq k_f\|x_f(0)\|e^{-t/\bar{\tau}} + k_f\|B_f\|\|h_c\|\left(\frac{1}{\tau}e^{-t/\bar{\tau}} * \|X_e(t)\|\right). \quad (6.88)$$

Substituindo-se (6.87) em (6.88), tem-se

$$\begin{aligned} \|x_f(t)\| &\leq k_f\|x_f(0)\|e^{-t/\bar{\tau}} + k_{f1}\|X_e(0)\|\left(\frac{1}{\tau}e^{-t/\bar{\tau}} * e^{-\bar{\lambda}_0 t}\right) + \\ &+ k_{f2}\|x_f(0)\|\left(\frac{1}{\tau}e^{-t/\bar{\tau}} * e^{-\bar{\lambda}_0 t}\right) + k_{f3}\bar{\mathcal{V}}(\tau)\left(\frac{1}{\tau}e^{-t/\bar{\tau}} * e^{-\bar{\lambda}_0 t}\right) + \\ &+ k_{f4}\|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty}, \end{aligned} \quad (6.89)$$

onde $k_{f1} = k_f\|B_f\|\|h_c\|\bar{k}_{X_e}$, $k_{f2} = k_f\|B_f\|\|h_c\|k_{x_f}$, $k_{f3} = k_f\|B_f\|\|h_c\|$ and $k_{f4} = \varsigma k_f\|B_f\|\|h_c\|k_{\beta_{\mathcal{U}}}$. A última desigualdade vem do fato de $\left\|\frac{1}{\tau}e^{-t/\bar{\tau}}\right\|_1 = \frac{\bar{\tau}}{\tau} \leq \varsigma$, sendo $\bar{\tau} > \tau$ e $\varsigma > 1$ ($\bar{\tau} = \varsigma\tau$). Além disso, aplicando-se o Corolário F.2 (Apêndice F) na convolução em (6.89), obtém-se

$$\left|\frac{1}{\tau}e^{-t/\bar{\tau}} * e^{-\bar{\lambda}_0 t}\right| \leq \frac{2\varsigma}{|1 - \bar{\lambda}_0\bar{\tau}|} e^{-\bar{\lambda}_1 t},$$

com $\bar{\lambda}_1 < \min(\bar{\lambda}_0, 1/\bar{\tau})$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \|x_f(t)\| &\leq k_f \|x_f(0)\| e^{-t/\bar{\tau}} + \bar{k}_{f1} \|X_e(0)\| e^{-\bar{\lambda}_1 t} + \bar{k}_{f2} \|x_f(0)\| e^{-\bar{\lambda}_1 t} + \\ &+ \bar{k}_{f3} \bar{\mathcal{V}}(\tau) e^{-\bar{\lambda}_1 t} + k_{f4} \|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty}, \end{aligned} \quad (6.90)$$

onde $\bar{k}_{f1} = k_{f1} \frac{2\delta}{|1-\bar{\lambda}_0\bar{\tau}|}$, $\bar{k}_{f2} = k_{f2} \frac{2\delta}{|1-\bar{\lambda}_0\bar{\tau}|}$, $\bar{k}_{f3} = k_{f3} \frac{2\delta}{|1-\bar{\lambda}_0\bar{\tau}|}$. Visto que $\bar{\lambda}_1 < \min(\bar{\lambda}_0, 1/\bar{\tau})$, a desigualdade (6.90) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \|x_f(t)\| &\leq \bar{k}_f \|x_f(0)\| e^{-\bar{\lambda}_1 t} + \bar{k}_{f1} \|X_e(0)\| e^{-\bar{\lambda}_1 t} + \\ &+ \bar{k}_{f3} \bar{\mathcal{V}}(\tau) e^{-\bar{\lambda}_1 t} + k_{f4} \|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty}, \end{aligned} \quad (6.91)$$

onde $\bar{k}_f = k_f + \bar{k}_{f2}$. Conseqüentemente, a partir de (6.87) e (6.91), obtém-se um majorante para a norma do vetor de estado z , definido em (6.56), válido ($\forall t \geq 0$),

$$\|z(t)\| \leq k_{z1} \|z(0)\| e^{-\lambda_2 t} + \mathcal{V}_z(\tau) e^{-\lambda_2 t} + k_{z2} \|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty}, \quad (6.92)$$

com constantes positivas $k_{z1}, k_{z2}, \lambda_2$ apropriadas e $\mathcal{V}_z \in \mathcal{K}$.

Note que a desigualdade (6.92) representa uma propriedade de estabilidade entrada-estado (*input-to-state stability* – ISS, ver Apêndice B) de $\beta_{\mathcal{U}}$ para z (desconsiderando o termo $\mathcal{V}_z(\tau)$).

A partir de (6.52) e recordando que $|X_e| \leq |z|$, tem-se ($\forall t \geq 0$)

$$|\beta_{\mathcal{U}}(t)| \leq \|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty} \leq \tau k_a \|(z)_t\|_{\infty} + \tau k_b, \quad (6.93)$$

o que representa uma propriedade de estabilidade entrada-saída (*input-to-output stability* – IOS, ver Apêndice B) de z para $\beta_{\mathcal{U}}$ (desconsiderando o termo de ordem $\mathcal{O}(\tau)$). Visto que a Proposição 8 foi utilizada para deduzir (6.92), o parâmetro τ deve pertencer ao intervalo $\tau \in (0, \tau_1]$.

O resultado de estabilidade global é enunciado no teorema a seguir.

Teorema 6.2 *Assumindo-se que (H1)–(H3) e (H5) sejam atendidas e que sem perda de generalidade $k_p > 0$, que a função de modulação satisfaça (6.29) e $ML(s) = k_m/(s + a_m)$ com $(k_m, a_m > 0)$. Deste modo, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, o sistema completo do erro (6.1), (6.2) e (6.30), com estado z definido em (6.56) e $u = -f(t)\text{sgn}(\varepsilon_0)$, é globalmente exponencialmente estável com respeito a um conjunto residual de ordem τ , no sentido de que existem constantes positivas k_z e a , tais que*

$$\|z(t)\| \leq k_z \|z(t_i)\| e^{-a(t-t_i)} + \mathcal{O}(\tau),$$

$\forall t \geq t_i \geq 0$, sendo t_i qualquer instante de tempo inicial.

Prova: Se a direção de controle é conhecida e correta, a estabilidade global exponencial do sistema em malha fechada, representado por (6.92) e (6.93), será garantida a partir do teorema dos pequenos ganhos (*Small-Gain Theorem*, (Khalil 2002, p. 217)). Ver apêndice G para a prova completa. ■

Observação 9 *Diferentemente dos resultados obtidos nos Teoremas 4.1 e 4.2, o majorante para o estado z estabelecido no Teorema 6.2 é livre do fenômeno de pico. Isso deve-se à realização de estado associada à x_f e à estratégia adotada, em que majorantes menos conservadores para o estado completo z são alcançados utilizando-se o conceito de tempo de extinção de pico t_e .*

6.1.2.5 Função de Monitoração

Enquanto no caso $n^* = 1$, monitora-se o erro de saída e_0 , aqui o $\text{sgn}(k_p)$ correto será identificado monitorando-se o erro auxiliar ε_0 . Sabe-se que o Lema 4.2 fornece um majorante para $|\varepsilon_0|$, válido quando $\text{sgn}(k_p)$ for *correto* e $t \geq \bar{t}_e$.

Relembrando que $\varepsilon_0 = \beta_{\mathcal{U}} + \bar{e}_0 + e_F^0$, então $|\varepsilon_0| \leq |\beta_{\mathcal{U}}| + |\bar{e}_0| + |e_F^0|$. Aplicando-se o Lema 4.2 em (6.51) e considerando-se $\bar{t}_0 := \bar{t}_e$ e $ML(s) = k_m/(s + a_m)$ (por simplicidade), tem-se a partir de (6.54) $\forall t, t_k$ ($t \geq t_k \geq \bar{t}_e$),

$$\begin{aligned} |\varepsilon_0(t)| &\leq (|\varepsilon_0(t_k)| + |\beta_{\mathcal{U}}(t_k)|) e^{-a_m(t-t_k)} + \\ &+ (2R_a e^{\bar{\lambda}_a \bar{t}_e}) e^{-\bar{\lambda}_a t} + 2\|(\beta_{\mathcal{U}})_{t, \bar{t}_e}\|_{\infty}, \end{aligned} \quad (6.94)$$

onde $\bar{\lambda}_a < \min\{a_m, \lambda_a\}$. Note que, de acordo com o Lema 4.2, a desigualdade (6.94) é válida para a função de modulação dada em (6.29). Aplicando o Lema 4.3 na relação (6.48), obtém-se o sinal mensurável

$$\bar{\beta}_u = 2\bar{\rho}^* W_\beta(s) * f(t), \quad (6.95)$$

onde $\bar{\rho}^* \geq \rho^*$ e $W_\beta(s)$ é uma aproximação por filtro de primeira ordem (FOAF) para a função de transferência $ML(s) [1 - F(\tau s)] F^{-1}(\tau s)$.

Resposta Impulsiva \times FOAF : Como a aproximação por FOAF para a resposta impulsiva $h_a(t)$ correspondente à função de transferência $ML(s) [1 - F(\tau s)] F^{-1}(\tau s)$ contém termos com pico, o majorante $|h_a(t) * (u - \bar{u})| \leq W_\beta(s) * 2f(t)$ para (6.48) torna-se muito conservador. Uma vez que todos os coeficientes de $ML(s) [1 - F(\tau s)] F^{-1}(\tau s)$ são conhecidos, pode-se aplicar a expansão em frações parciais de forma a obter majorantes menos conservadores para $h_a(t)$ e $|h_a(t) * (u - \bar{u})|$. Assim sendo,

$$M(s)L(s) \left[\frac{1 - F(\tau s)}{F(\tau s)} \right] = \frac{\bar{r}_1}{(s + a_m)} + \sum_{i=1}^N \frac{\bar{r}_i}{(s + 1/\tau)^i},$$

onde \bar{r}_1, \bar{r}_i são resíduos, com $M(s) = k_m/(s + a_m)^{N+1}$ e $L(s) = (s + a_m)^N$. Deste modo, os seguintes majorantes para $h_a(t)$ e $|h_a(t) * (u - \bar{u})|$ são válidos $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} |h_a(t)| &\leq h_b(t) \\ |h_a(t) * (u - \bar{u})| &\leq h_b(t) * 2f(t), \end{aligned}$$

onde

$$h_b(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{|\bar{r}_1|}{(s + a_m)} + \sum_{i=1}^N \frac{|\bar{r}_i|}{(s + 1/\tau)^i} \right\}. \quad (6.96)$$

A partir do Lema F.1 (Apêndice F), conclui-se que os termos com multiplicidade i em (6.96) podem ser majorados por exponenciais, tais que

$$|\bar{r}_i| t^{i-1} e^{-t/\tau} = \frac{|\bar{k}_i|}{\tau^{i-1}} t^{i-1} e^{-t/\tau} \leq k_i e^{-t/\bar{\tau}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (6.97)$$

onde $|\bar{k}_i|$ é de ordem $\mathcal{O}(1)$ com respeito a τ , isto é, o $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{|\bar{k}_i(\tau)|}{\tau^0}$ existe, além disso,

$\bar{\tau} = \varsigma\tau$ ($\varsigma > 1$) e $k_i = |\bar{k}_i| \left(\frac{e^{-1(i-1)}}{1-1/\varsigma} \right)^{i-1}$. Portanto, existe uma função $h(t)$ que satisfaz as seguintes propriedades

$$|h_b(t)| \leq h(t), \quad (6.98)$$

$$h(t) = |\bar{r}_1|e^{-a_m t} + \sum_{i=1}^N k_i e^{-t/\bar{\tau}}. \quad (6.99)$$

Finalmente, a relação (6.95) é redefinida, obtendo-se

$$\bar{\beta}_{\mathcal{U}} := 2\bar{\rho}^* h(t) * f(t). \quad (6.100)$$

Note que, a partir de (6.28), (6.29) e (6.48), tem-se $|\beta_{\mathcal{U}}(t)| \leq |\bar{\beta}_{\mathcal{U}}(t)|$ ($\forall t \geq 0$). Seja

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &:= (|\varepsilon_0(t_k)| + |\bar{\beta}_{\mathcal{U}}(t_k)|)e^{-a_m(t-t_k)} + \\ &+ a(k)e^{-\lambda_c t} + 2\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty}, \end{aligned} \quad (6.101)$$

definida $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$, sendo $a(k)$ qualquer seqüência positiva monotonicamente crescente e ilimitada e λ_c um limitante inferior para a margem de estabilidade de A_c , dada em (6.54).

Observação 10 *Visto que os autovalores de A_c são os zeros da planta, os pólos do modelo de referência e dos filtros de entrada e saída do MRAC, é sempre possível encontrar um limitante para a margem de estabilidade de A_c .*

A função de monitoração para sistemas com grau relativo arbitrário φ_m é então definida por

$$\varphi_m(t) := \varphi_k(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (6.102)$$

Note que φ_m é descontínua em t . O instante de chaveamento t_k de u^- para u^+ (ou u^+ para u^-) é definido por

$$t_{k+1} := \min\{t > t_k : |\varepsilon_0(t)| = \varphi_k(t)\}, \quad (6.103)$$

onde $k \geq 1$, $t_0 := 0$, $t_1 := \bar{t}_e$. Seja ainda k^* o primeiro índice para o qual o mínimo em (6.103) não existe e o chaveamento termina. Por conveniência, $\varphi_0(t) = 0$, $\forall t \in [t_0, t_1)$.

A seguinte proposição decorre diretamente da definição (6.102).

Proposição 9 *O erro auxiliar $\varepsilon_0(t)$ é limitado por*

$$|\varepsilon_0(t)| \leq \varphi_m(t), \quad \forall t \geq t_1. \quad (6.104)$$

A Figura 6.8 ilustra a Proposição 9 com o erro auxiliar ε_0 apresentando o fenômeno de *pico*.

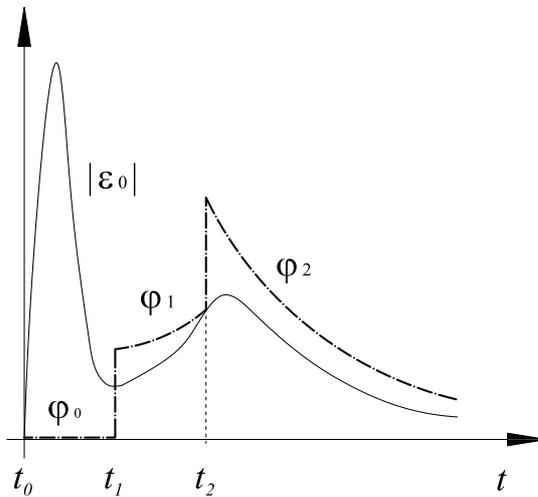


FIGURA 6.8: Proposição 9. Trajetórias da função de monitoração φ_m e do erro auxiliar $|\varepsilon_0|$.

- Função de monitoração decrescente

É notável que uma função de monitoração menos conservadora pode ser obtida substituindo-se $\|(\bar{\beta}_u)_t\|_\infty$ em (6.101) por uma função não-monotonicamente crescente que torna-se arbitrariamente pequena quando a norma instantânea de $|\bar{\beta}_u(t)|$ tende para um valor suficientemente pequeno. Deste modo, transitórios grandes seriam evitados após uma mudança da direção de controle (*direção de controle variante no tempo*) (Kaloust & Qu 1997). Adicionalmente, a função substitutiva para $\|(\bar{\beta}_u)_t\|_\infty$ deve satisfazer as desigualdades em (4.28). Assim sendo, uma possível escolha para a função γ em (4.28) é:

$$\gamma(t) := Re^{-\bar{\alpha}\lambda(t-\bar{t}_0)} + f_d(t), \quad (6.105)$$

onde

$$f_d(t) := \begin{cases} \|(\bar{\beta}_u)_{t, \bar{T}_0}\|_\infty & \bar{T}_0 < t \leq T_1, \\ \|(\bar{\beta}_u)_{t, \bar{T}_{j-1}}\|_\infty e^{-\sigma(t-T_j)} & T_j < t \leq \bar{T}_j, \\ \|(\bar{\beta}_u)_{t, \bar{T}_j}\|_\infty & \bar{T}_j < t \leq T_{j+1}, \end{cases} \quad (6.106)$$

com $(\forall j \geq 1)$ e $\sigma \leq a_m$. Os instantes de tempo T_j $(\forall j \in [0, j^*])$ e \bar{T}_j $(\forall j \in [1, \bar{j}^*])$ são definidos por

$$T_{j+1} := \min\{t > \bar{T}_j : |\bar{\beta}_u(t)| \leq \mu f_d(t)\}, \quad (6.107)$$

$$\bar{T}_j := \min\{t > T_j : f_d(t) < |\bar{\beta}_u(t)|\}, \quad (6.108)$$

onde $T_0 = \bar{T}_0 = 0$, $0 < \mu < 1$ e j^* (ou \bar{j}^*) é o primeiro índice para o qual o mínimo em (6.107) (ou (6.108)) não existe e o chaveamento termina. Aqui T_j ou \bar{T}_j denotam os instantes de chaveamento para f_d . A taxa de decaimento σ comporta-se como um fator de esquecimento, conferindo uma propriedade de desvanecimento ao termo $\|(\bar{\beta}_u)_t\|_\infty$, sem afetar a análise de estabilidade. A Figura 6.9 ilustra funções representativas para $|\bar{\beta}_u|$, $\|(\bar{\beta}_u)_t\|_\infty$ e f_d .

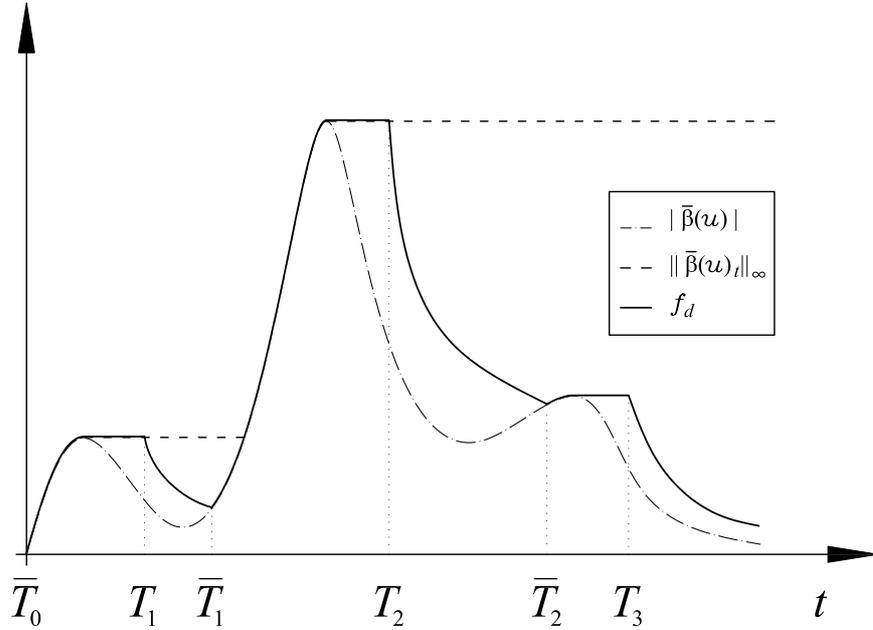


FIGURA 6.9: Comparação entre as trajetórias de $|\bar{\beta}_u|$, $\|(\bar{\beta}_u)_t\|_\infty$ e f_d .

Assim sendo, uma função de monitoração menos conservadora pode ser obtida substituindo-se o termo $\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|_{\infty}$ pelo termo f_d em (6.101), obtendo-se ($\forall t \in [t_k, t_{k+1})$)

$$\begin{aligned} \varphi_k^d(t) &:= (|\varepsilon_0(t_k)| + |\bar{\beta}_{\mathcal{U}}(t_k)|)e^{-a_m(t-t_k)} + \\ &+ a(k)e^{-\lambda_c t} + 2f_d(t). \end{aligned} \quad (6.109)$$

6.1.2.6 Resultados de Estabilidade

A proposição a seguir garante que se o processo de identificação do $\text{sgn}(k_p)$ terminar, o estado do sistema do erro estará limitado.

Proposição 10 *Suponha que (H1)–(H3), (H4.a) e (H5) sejam satisfeitas. Considere o sistema completo do erro (6.1), (6.2), (6.28), (6.33) e (6.34), com estado z definido em (6.56). Seja k o índice de chaveamento da função de monitoração dada em (6.102), tal que $t > t_k \geq 0$. Então, existe $\tau_2 > 0$ (dependente de k) suficientemente pequeno, tal que $\forall \tau \in (0, \tau_2]$ o estado do sistema do erro $\forall t \geq 0$ é limitado por*

$$\|z(t)\| \leq k_{z0}\|z(0)\| + k_a \sum_{i=1}^k a(i) + \Psi(\tau) + \tau k_{\tau} k + \mathcal{O}(\tau), \quad (6.110)$$

onde $\Psi \in \mathcal{K}$ e k_{z0}, k_a, k_{τ} são constantes positivas.

Prova: Ver apêndice G . ■

Para a compensação com filtro *lead* linear, o resultado principal é estabelecido pelo seguinte teorema.

Teorema 6.3 *Suponha que (H1)–(H3), (H4.a) e (H5) sejam verificadas, a função de modulação satisfaz ($f \geq |\bar{u}|$) e $ML(s) = k_m/(s + a_m)$ com ($k_m, a_m > 0$). Então, para $\tau > 0$ suficientemente pequeno, a troca da direção de controle, acionada pela função de monitoração (6.102), termina após um número finito de chaveamentos e o sistema do erro (6.1), (6.2), (6.28), (6.33) e (6.34), com estado z definido em (6.56) é globalmente assintoticamente estável com respeito a um conjunto compacto e exponencialmente convergente para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\tau)$, ambos os conjuntos sendo independentes das condições iniciais.*

Prova: As Proposições 9 e 10 são utilizadas para provar que a modificação da direção de controle termina após um número finito de chaveamentos ($k = k^*$) e que,

durante esta fase, o estado do erro permanece uniformemente limitado. Assim sendo, $\varphi_m = \varphi_{k^*}$ é um majorante válido para $|\varepsilon_0|$, i.e., $|\varepsilon_0(t)| < \varphi_{k^*}, \forall t \geq t_{k^*}$ e, conseqüentemente, nenhum outro chaveamento ocorre. Além disso, a estimativa da direção final de controle estará correta e o Teorema 6.2 poderá ser aplicado. Caso contrário, prova-se que o sistema já terá convergido para uma região de ordem $\mathcal{O}(\tau)$. Ver Apêndice G para a prova completa. ■

- Eliminação de *Chattering* e Rastreamento Exato

Na Figura 6.5, o bloco L_{red} representa o “filtro *lead* exato” que implementa o operador $L(s)$ utilizando o RED. A partir de (3.41), o algoritmo do RED que calcula as duas primeiras derivadas de e_0 é dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_0 &= v_0, \\ v_0 &= -\lambda_0 |\eta_0 - e_0|^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}(\eta_0 - e_0) + \eta_1 \\ \dot{\eta}_1 &= v_1, \\ v_1 &= -\lambda_1 |\eta_1 - v_0|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\eta_1 - v_0) + \eta_2 \\ \dot{\eta}_2 &= -\lambda_2 \operatorname{sgn}(\eta_2 - v_1)\end{aligned}\tag{6.111}$$

onde $\eta_0(t) \rightarrow e_0(t)$, $\eta_1(t) \rightarrow \dot{e}_0(t)$ e $\eta_2(t) \rightarrow \ddot{e}_0(t)$ e $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ são constantes apropriadas. Então, pode-se estabelecer o seguinte resultado de rastreamento exato.

Corolário 6.2 *Com o filtro lead híbrido e função de monitoração definida para $\tilde{\varepsilon}_0$ (ver Figura 6.5), todos os resultados do Teorema 6.3 continuam válidos e o rastreamento exato é alcançado em tempo finito ou ao menos exponencialmente. Além disso, $\operatorname{sgn}(k_p)$ é identificado corretamente ao final da monitoração.*

Prova: O resultado de estabilidade global e convergência do esquema modificado pode ser facilmente provado visto que, a partir de uma função de chaveamento adequada $\alpha(\cdot)$, o filtro *lead* híbrido introduz apenas uma perturbação de saída β_α que é limitada por uma constante de projeto k_τ de ordem $\mathcal{O}(\tau)$, a menos de termos exponenciais que podem ser incluídos em e_F^0 . Adicionando-se k_τ ao sinal $\bar{\beta}_U$ definido em (6.100) e redefinindo-se φ_m apropriadamente de forma a monitorar $\tilde{\varepsilon}_0$, pode-se provar que o chaveamento do sinal de controle irá parar em tempo finito, seguindo os mesmos passos da demonstração do Teorema 6.3. Uma vez que o estado do erro entra em um conjunto

residual, o RED ($\alpha=0$) fornecerá as estimativas exatas das derivadas de e_0 , e portanto o problema recai no caso $n^* = 1$. Neste caso, aplica-se o argumento da dinâmica reversa (ver prova do Teorema 6.1) para mostrar que o chaveamento da direção de controle termina com o sinal correto. ■

6.1.2.7 Resultados de Simulação

Esta seção apresenta um exemplo que ilustra o desempenho do controlador proposto.

Exemplo 6.1 Considere a planta instável $G_p(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)(s-1)}$ ($n^* = 3$), sendo controlada pelo controlador VS-MRAC da Figura 6.5. Uma vez assumido que alguns parâmetros de $G_p(s)$ são incertos, o cálculo do majorante $\bar{\theta}$ é realizado a partir da estimativa mais pessimista (maiores elementos) do vetor θ^* considerando-se a planta $\hat{G}_p(s) = \frac{k_p}{(s+a)(s+1)(s-1)}$, onde $|k_p| \leq 2$ (sendo $|k_p| > b$, $b > 0$ uma constante suficientemente pequena) e $1.5 \leq a \leq 2.5$.

A lei de chaveamento $\alpha(\cdot)$ é uma versão simplificada de (4.61), dada por

$$\alpha(\tilde{e}) = \begin{cases} 0, & \text{para } |\tilde{e}| < \epsilon_M \\ 1, & \text{para } |\tilde{e}| \geq \epsilon_M, \end{cases} \quad (6.112)$$

onde $\tilde{e} = \bar{e}_0 - \epsilon_0$ e $\epsilon_M = 600\tau$. A fim de suplantar a perturbação β_α introduzida pelo GRED, uma constante $k_\tau = \epsilon_M$ é adicionada ao termo $\bar{\beta}_U$. As condições iniciais da planta são $y(0) = 10$, $\dot{y}(0) = 10$ e $\ddot{y}(0) = 10$, enquanto as condições iniciais do modelo de referência são nulas e portanto $e(0) = y(0) - y_m(0) = 10$. A realimentação é positiva em $t = 0s$ (direção de controle incorreta). Os demais parâmetros do controlador encontram-se na Tabela 6.2.

Deste modo, a Figura 6.10 apresenta os sinais $|\tilde{e}_0|$, φ_m , α e e_0 . A Figura 6.10 (a) mostra que apenas um chaveamento, após o intervalo de tempo \bar{t}_e , é necessário para o ajuste da direção do sinal de controle (segundo salto de φ_m quando este encontra $|\tilde{e}_0|$). Assim sendo, a direção de controle é corretamente identificada e o erro auxiliar \tilde{e}_0 , assim como o erro de rastreamento e_0 , desvanecem em tempo finito. A Figura 6.10 (b) mostra as trocas entre o filtro lead linear ($\alpha=1$) e o não-linear RED ($\alpha=0$). Observa-se que o RED é escolhido por último na estratégia de chaveamento do filtro híbrido GRED. Isto garante a convergência para zero (em tempo finito) do erro auxiliar \tilde{e}_0 e

TABELA 6.2: Sistema de controle (Exemplo 6.1).

Modelo	$M(s) = \frac{4}{(s+2)^3}, r(t) = \sin(t)$
Perturbação	$d_e(t) = sqw(5t)$
Modulação (6.29)	$\bar{\theta}^T = [2 \ 2 \ 30 \ 15 \ 10 \ 5], \hat{d}_e(t) = 1$
Resposta Impulsiva $h(t)$ (6.100)	$\bar{\rho}^* = 4, \bar{r}_1 = 0.004, k_1 = 0.996, k_2 = 4.047, \bar{\tau} = 1.1\tau$
Monitoração (6.102)	$a(k) = k + 1, a_m = 2, \lambda_c = 1, t_1 = \bar{t}_e = 0.1s$
Filtro lead	$\frac{L}{F} = \frac{(s+2)^2}{(\tau s+1)^2}, \tau = 10^{-3}$
Realização x_f (6.33)-(6.34)	$x_{f1}(0) = 0, x_{f2}(0) = \frac{-e_0(0)}{4\tau-2}$
RED (6.111)	$\lambda_0 = 3C_3^{\frac{1}{3}}, \lambda_1 = 1.5C_3^{\frac{1}{2}}, \lambda_2 = 1.1C_3, C_3 = 250$
Filtros I/O (4.4)	$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

do erro de rastreamento e_0 , indicando que o sinal de saída da planta segue exatamente o sinal de saída do modelo de referência (Figura 6.10 (c)). A Figura 6.11 apresenta o sinal de controle u .

A Figura 6.12 destaca a vantagem de se utilizar uma função de monitoração menos conservadora. Quando a função de monitoração $\varphi_m = \varphi_k^d$ é implementada utilizando $f_d(t)$ ($\mu = 0.8$ e $\sigma = 1$), ver Figura 6.12 (c) (---), o transitório de e_0 fica praticamente inalterado após uma mudança na direção de controle em $t = 4s$, ver Figura 6.12 (a) (-). Em contraste, implementando $\varphi_m = \varphi_k$ com o termo conservador $\|(\bar{\beta}_u)_t\|$, ver Figura 6.12 (b) (---), observa-se uma acentuada degradação do transitório de e_0 (Figura 6.12 (a) (---)).

A Figura 6.13 compara os dois majorantes para $\bar{\beta}_u$ utilizados na implementação da função de monitoração φ_m . O majorante $\|(\bar{\beta}_u)_t\|_\infty$ é mostrado na Figura 6.13 (a), juntamente com o termo $\bar{\beta}_u$, enquanto que f_d é indicada na Figura 6.13 (b). A propriedade de desvanecimento de f_d permite a formação de uma função de monitoração menos conservadora (Figura 6.12 (c)).

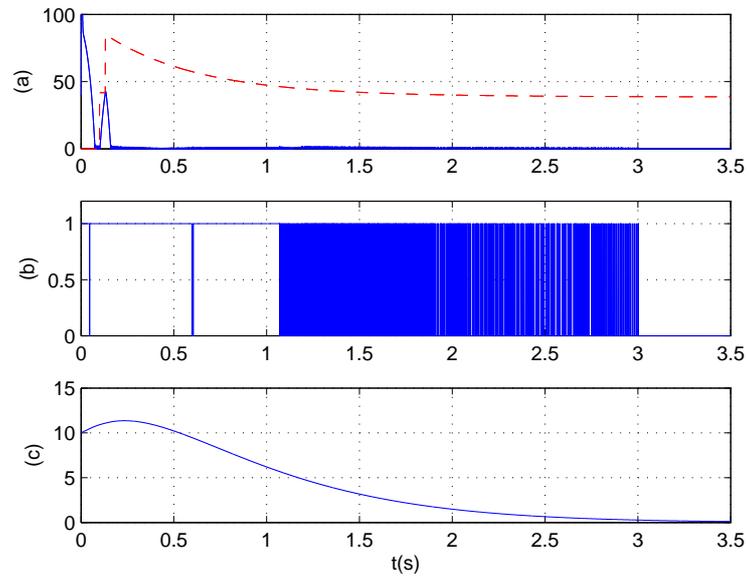


FIGURA 6.10: Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - (a) erro auxiliar $|\tilde{\epsilon}_0|$ (—) e função de monitoração φ_m (---), (b) lei de chaveamento α , (c) erro de rastreamento e_0 .

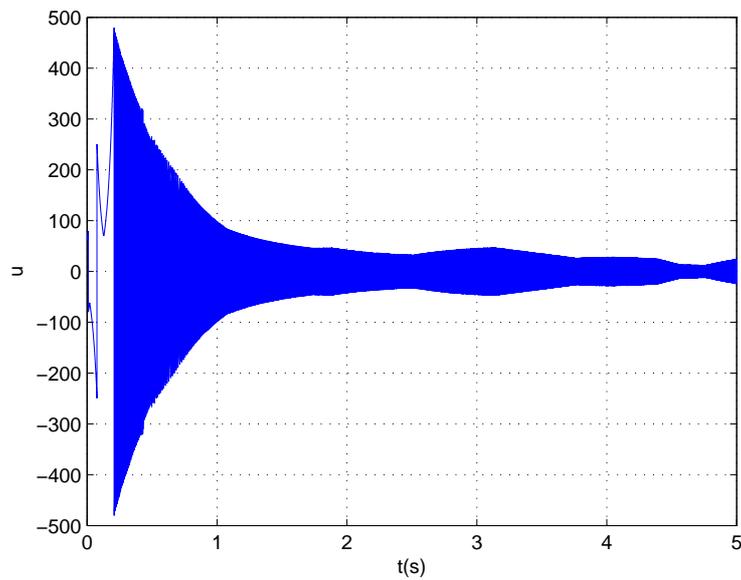


FIGURA 6.11: Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - sinal de controle u .

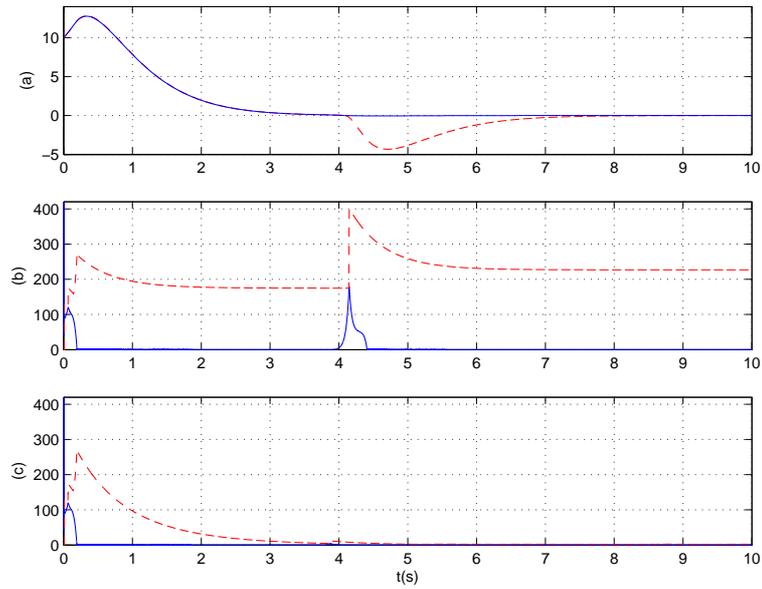


FIGURA 6.12: Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - Duas versões de função de monitoração $[\varphi_m = \varphi_k, \varphi_k^d]$: (a) erro de saída e_0 , (b)-(c) erro auxiliar $|\tilde{e}_0|$ (—) e função de monitoração φ_m (---).

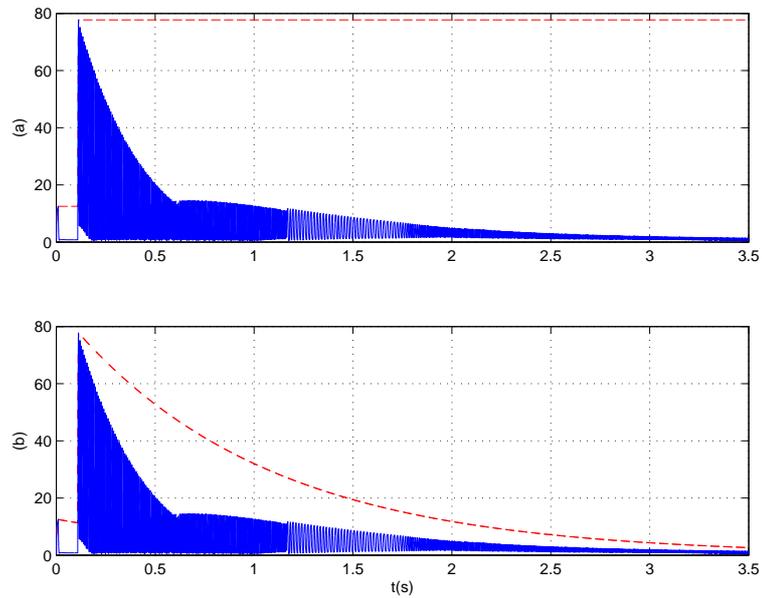


FIGURA 6.13: Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - (a) termo $\bar{\beta}_U$ (—), majorante conservador $\|(\beta_U)_t\|_\infty$ (---) e (b) majorante f_d (---).

A Figura 6.14 mostra que o erro de rastreamento é diminuído quando o RED é acionado, visto que este é menos sensível à dinâmica não-modelada de atuador $D(s) = \frac{1}{0.1s+1}$ do que o filtro lead linear.

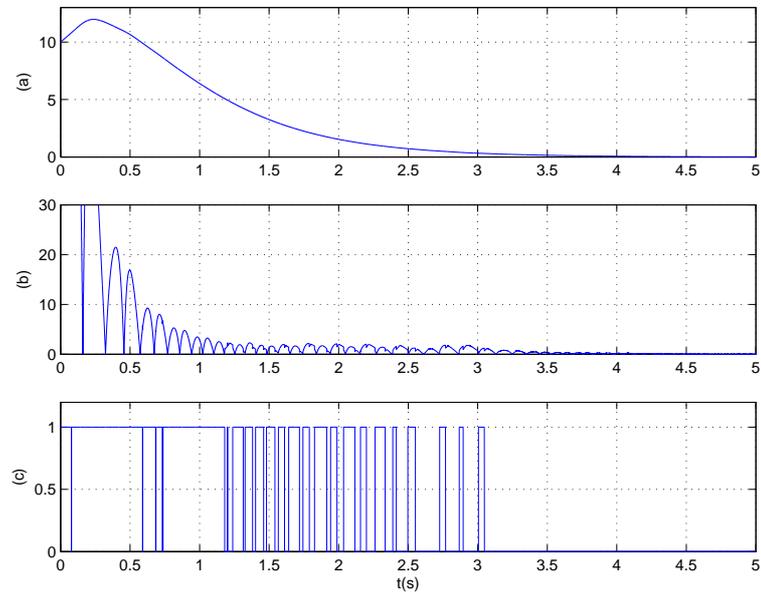


FIGURA 6.14: Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - (a) erro de rastreamento e_0 , (b) erro auxiliar $|\tilde{e}_0|$ e (c) lei de chaveamento α .

A Figura 6.15 mostra o escape exponencial do sistema quando a função de monitoração φ_m (implementada com o termo $\bar{\beta}_u = 0$) é aplicada ao erro de saída e_0 , ressaltando a necessidade de se monitorar o erro auxiliar \tilde{e}_0 .

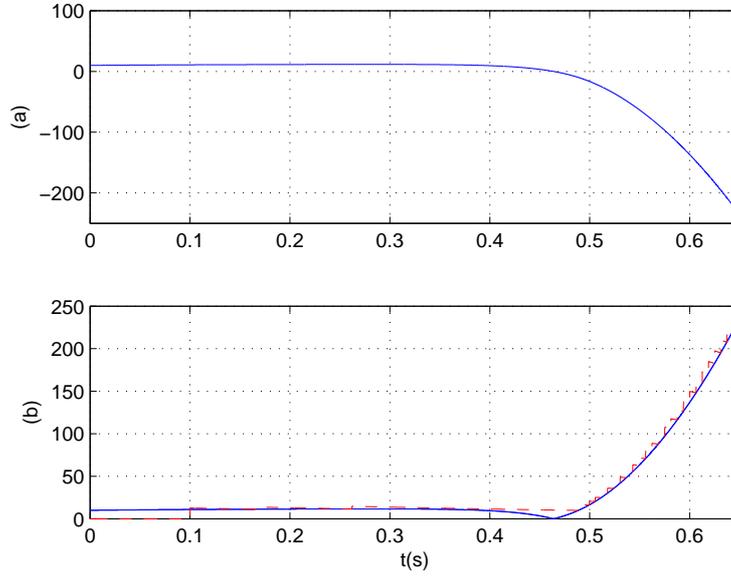


FIGURA 6.15: Resultados de simulação (Exemplo 6.1) - (a) escape do erro de saída e_0 , (b) escape da função de monitoração φ_m (—).

6.2 Sistemas Não-Lineares Monovariáveis

A generalização para sistemas não-lineares foi apresentada em Hsu et al. (2006), onde a classe de sistemas tratada é representada pela função de transferência (4.1) para a qual as Hipóteses (H1)-(H3), (H4.a) são verificadas e a perturbação d_e , atuando na entrada da planta, satisfaz as hipóteses:

(H5.a) A perturbação $d_e(y, t)$ é localmente Lipschitz em y , $\forall y$, e contínua por partes em t , $\forall t$.

(H5.b) O termo não-linear $d_e(y, t)$ satisfaz

$$|d_e(y, t)| \leq \bar{d}_e(y, t), \quad \forall(y, t),$$

onde $\bar{d}_e : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função conhecida, contínua por partes em t e

contínua em y , satisfazendo $\bar{d}_e(y, t) \leq \Psi(|y|) + k_\Psi$, onde Ψ é uma função classe \mathcal{K}_∞ e k_Ψ é uma constante positiva.

A Hipótese (H5.a) permite desenvolver uma lei de controle u que garanta a unicidade e a existência local de solução para (4.1).

Na Hipótese (H5.b), nenhuma condição particular sobre o crescimento do termo não-linear $d_e(y, t)$ é imposta. Portanto, pode-se ter $d_e(y, t) = |y|^2$ e o escape em tempo finito não é impedido *a priori*.

Devido à possibilidade de escape em tempo finito introduzida pela não-linearidade $d_e(y, t)$, obtém-se apenas a *estabilidade semi-global assintótica* do sistema em malha fechada com relação a um conjunto compacto e convergência exponencial com relação a um conjunto residual de ordem τ (Hsu et al. 2006).

Para o caso não-linear SISO, em Hsu et al. (2006) é estabelecido que a estabilidade assintótica será global se a perturbação não-linear for *globalmente Lipschitz*, o que é mais restritivo do que a hipótese (H5.a).

Além disso, demonstra-se que o rastreamento exato é alcançado em tempo finito, ou ao menos exponencialmente, e que o processo de chaveamento da direção de controle termina com o $\text{sgn}(k_p)$ corretamente estimado (Hsu et al. 2006).

Deve-se enfatizar que o desenvolvimento completo do esquema de controle e as propriedades de estabilidade para sistemas não-lineares monovariáveis com direção de controle desconhecida serão abordados em trabalhos futuros.

6.3 Sistemas Multivariáveis

Nesta seção é apresentada uma extensão do controlador proposto para plantas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), com grau relativo unitário e *matriz de ganho de alta frequência* (HFGM) K_p desconhecida.

Se K_p fosse conhecida, um majorante para a norma do estado do erro poderia ser encontrado de acordo com a Proposição 11 a seguir.

Proposição 11 *Considere o sistema MIMO*

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + K_p [u + d(t) + \pi(t)] , \quad (6.113)$$

$$u = -\varrho(e, t) \frac{e}{\|e\|} , \quad (6.114)$$

onde $A, K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $d(t)$ e ϱ são LI. Assume-se que o sinal $\pi(t)$ é LI e exponencialmente decrescente. Se $-K_p$ é Hurwitz e

$$\varrho(e, t) \geq \delta + c_e \|e(t)\| + (1 + c_d) \|d(t)\| , \quad \forall t \geq 0 , \quad (6.115)$$

onde $c_e, c_d \geq 0$ são constantes adequadas e $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrária, então $\exists k_1, k_2, \lambda_1 > 0$ tais que a desigualdade

$$\|e(t)\| \leq (k_1 \|e(0)\| + k_2 R) e^{-\lambda_1 t} \quad (6.116)$$

é satisfeita $\forall t \geq 0$. Assim, o sistema é globalmente exponencialmente estável quando $\pi(t) \equiv 0$. Além disso, se $\delta > 0$, então o modo deslizante no ponto $e = 0$ é iniciado em algum tempo finito $t_s \geq 0$.

Prova: Vide Hsu et al. (2002a, Proposition 1). ■

Observa-se que a única condição imposta é que $-K_p$ seja Hurwitz. Para o caso em que K_p é desconhecida, define-se uma família de matrizes S_q , $q \in \mathcal{Q}$, onde \mathcal{Q} é um conjunto indexado finito tal que $K_p S_q$ seja anti-Hurwitz para algum $q \in \mathcal{Q}$ (Ryan 1993).

A função de monitoração definida em (6.18), (6.20) e (6.21), para sistemas SISO com $n^* = 1$, pode ser aplicada para a norma do estado do erro de sistemas MIMO, e o instante de chaveamento t_k indicará a troca da matriz S_q , $q \in \mathcal{Q}$. Assim, o algoritmo de chaveamento comuta ciclicamente a matriz S_q a ser utilizada na lei de controle (Byrnes & Willems 1984, Ryan 1993).

A seguir é apresentada a proposição, considerando o *controle vetorial unitário* (UVC) (Hsu, Cunha, Costa & Lizarralde 2002b), que garante a estabilidade para sistemas MIMO com HFGM desconhecida.

Proposição 12 *Considere o sistema MIMO*

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + K_p[u + d(t) + \pi(t)], \quad (6.117)$$

onde $A, K_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $u, e \in \mathbb{R}^m$. Os sinais $d(t), \pi(t) \in \mathbb{R}^m$ são LI. Seja K_p a HFGM desconhecida e $S_q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $q \in \mathcal{Q}$, onde $\mathcal{Q} \subset \mathcal{GL}(m, \mathbb{R})^2$ é um conjunto indexado finito. Suponha que a função de monitoração para $\|e\|$ e os instantes de chaveamento t_k são ajustados de acordo com (6.18) e (6.21), tal que $-K_p S_q$ seja Hurwitz para algum $q \in \mathcal{Q}$. Se

$$u = -S_q \varrho(e, t) \frac{e}{\|e\|}, \quad (6.118)$$

$$\varrho(e, t) \geq \delta + c_e \|e(t)\| + (1 + c_d) \|S_q^{-1} d(t)\|, \quad (6.119)$$

onde ϱ é LI, $c_e \geq 0$ e $c_d \geq 0$ são constantes apropriadas, e $\delta \geq 0$ é uma constante arbitrariamente pequena, então, o sistema em malha fechada (6.117)–(6.118) é globalmente assintoticamente estável com respeito a um conjunto compacto e exponencialmente convergente para zero. Assim, para cada $e(0)$, a troca da matriz S_q pará após um número finito de chaveamentos ($k = k^*$) e a seguinte desigualdade é válida ($\forall t \geq t_{k^*}$)

$$\|e(t)\| \leq \|e(t_{k^*})\| e^{-a_m(t-t_{k^*})} + a(k^*) e^{-b(k^*)t} \quad (6.120)$$

sendo $a_m, a(k^*), b(k^*) > 0$ constantes. Além disso, se $\delta > 0$, então um modo deslizante no ponto $e(t) \equiv 0$ é alcançado após algum tempo finito $t_s \geq 0$.

Prova: A prova é obtida por contradição. Suponha que o algoritmo de chaveamento não pare de comutar entre as matrizes S_q do conjunto \mathcal{Q} . Então, após um número finito de chaveamentos $k = k^*$, a matriz S_q que torna $-K_p S_q$ Hurwitz é selecionada e o termo $a(k) e^{-b(k)t}$ (onde $a(k)$ é uma função crescente com k e $b(k)$ é decrescente com k) torna a função de monitoração $\varphi_{k^*} = |\varepsilon(t_{k^*})| e^{-a_m(t-t_{k^*})} + a(k^*) e^{-b(k^*)t}$ um majorante válido para $|e(t)|$, $\forall t \geq t_{k^*}$. Deste modo, nenhum outro chaveamento ocorre e $\|e(t)\| < \varphi_{k^*}$, $\forall t \geq t_{k^*}$. Visto que φ_{k^*} converge para zero exponencialmente, $|e(t)|$ convergirá para zero ao menos exponencialmente. ■

² $\mathcal{GL}(m, \mathbb{R})$ é o grupo das matrizes reais quadradas $m \times m$ que são inversíveis.

Observação 11 Para o caso multivariável, é possível que o chaveamento termine com uma matriz $-K_p S_q$ que não seja Hurwitz? Sabe-se que se $-K_p S_q$ for Hurwitz, todas as trajetórias do sistema convergem para a origem do espaço de estado do erro (Proposição 11). Assuma que $-K_p S_q$ não seja Hurwitz. Então $K_p S_q$ será:

(a) um nó instável ou um foco instável

No sentido direto do tempo, todas as trajetórias diveririam ilimitadamente, o que seria uma contradição com a Proposição 12.

(b) um centro

No sentido direto do tempo, as trajetórias representariam oscilações que em algum instante iriam encontrar a função de monitoração (esta decai exponencialmente) e o chaveamento iria recomeçar.

(c) um ponto de sela

No sentido direto do tempo, a maior parte das trajetórias divergem ilimitadamente. No entanto, existe uma região do plano de fase para a qual as trajetórias convergem para a origem (Figura 6.16). Deste modo, tem-se um caso particular em que uma matriz $-K_p S_q$ não seria Hurwitz e mesmo assim a convergência ocorreria.

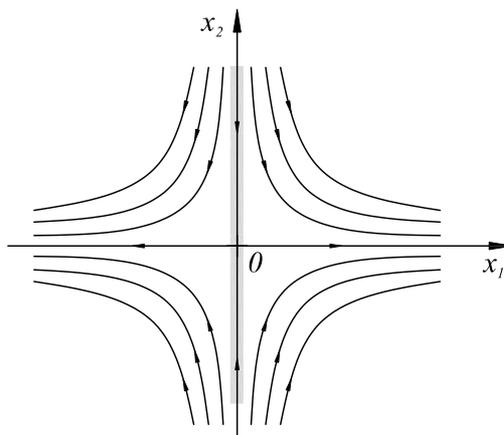


FIGURA 6.16: Ponto de sela. Conjunto de medida nula destacado em cinza.

Portanto, o resultado da Proposição 12 continua válido, uma vez que garantia de convergência existe apenas para $K_p S_q$ anti-Hurwitz, e o caso descrito em (c) seria um conjunto de medida nula favorável. Assim sendo, garante-se que o chaveamento sempre termina e, a menos de um conjunto de condições iniciais de medida nula, uma matriz $K_p S_q$ anti-Hurwitz é selecionada. Nota-se que este resultado é um pouco diferente do conceito de quasi-stability ou almost stability (Rantzer 2001), no qual “funções de densidade” são utilizadas para garantir que “quase todas as trajetórias” tendem assintoticamente para a origem do espaço de estado.

6.3.1 Resultados de Simulação

Exemplo 6.2 Neste exemplo, considera-se o problema de controle multivariável por servovisão com $n^* = 1$ (Zergeroglu et al. 1999). O modelo simplificado para o movimento da imagem de um ponto (alvo) do efetuador do robô no sistema de coordenadas da imagem (Figuras 6.17 e 6.18) é dado por:

$$\dot{x}(t) = K_p u = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} u, \quad (6.121)$$

onde K_p é a matriz de ganho de alta frequência, ψ é o ângulo de rotação da câmera em torno do eixo ótico e $h_i (i=1,2)$ considera os parâmetros de calibração da câmera. Supõem-se aqui que ψ e h_i são incertos. A trajetória desejada para a imagem do efetuador (alvo) é definida pelo modelo de referência:

$$\dot{x}_d(t) = -x_d(t) + r, \quad x_d, r \in \mathbb{R}^2. \quad (6.122)$$

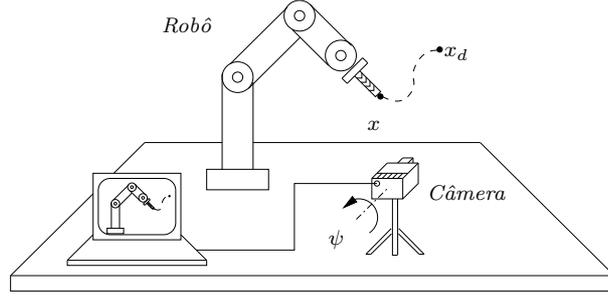


FIGURA 6.17: Problema de servovisão.

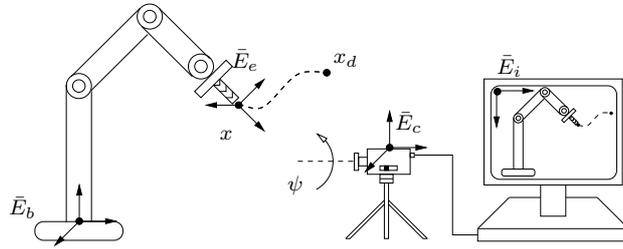


FIGURA 6.18: Movimento do efetuador (alvo) do robô no sistema de coordenadas da imagem: $\bar{E}_b, \bar{E}_e, \bar{E}_c$ e \bar{E}_i são os sistemas de coordenadas da base, do efetuador, da câmera e da imagem, respectivamente.

A dinâmica do erro $e = x - x_d$ é dada por

$$\dot{e}(t) = -e(t) + K_p(u - \bar{u}), \quad (6.123)$$

onde $\bar{u} = -K_p^{-1}(x - r)$. Note que um majorante para $\|\bar{u}\|$ pode ser obtido a partir de um majorante para K_p^{-1} conhecido. A função de monitoração $\varphi_m(t) = \|e(t_k)\|e^{-a_m(t-t_k)} + a(k)e^{-b(k)t}$ para $\|e\|$ e os instantes de chaveamento t_k para S_q^ψ são obtidos de (6.18) e (6.21), com $a(k) = k + 1$, $b(k) = \frac{1}{k+1}$ e $a_m = 1$. O conjunto de matrizes possíveis S_q^ψ , $q \in \mathcal{Q} = [0, 1, 2, 3]$, que tornam $K_p S_q^\psi$ anti-Hurwitz é constituído por:

$$S_0^{\pm\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad S_1^{0, \pm 2\pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ S_2^{-\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3^{\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.124)$$

Note que para ψ diferentes dos aqui indicados, a matriz $K_p S_q^\psi$ é anti-Hurwitz para algum S_q^ψ em (6.124). Desta forma, a restrição $|\psi| < 90^\circ$ e os pontos de singularidade $\psi = \pm 90^\circ$, presentes em Zergeroglu et al. (1999), são removidos. As condições iniciais da planta são $x_1(0) = x_2(0) = 0$, e as referências são $r_1(t) = 2 \cos(t)$ e $r_2(t) = 2 \sin(t)$. Os fatores de escala são $h_1 = h_2 = 1$. O ângulo de desalinhamento $\psi = 90^\circ$ e a função de modulação para o controle UVC que satisfaz (6.119), onde $d(t) = \bar{u}$, é escolhida constante igual a 5.

A trajetória do alvo no plano da imagem é ilustrada na Figura 6.19, onde pode-se notar que o rastreamento é alcançado mesmo na presença de singularidades. A função de monitoração e $\|e\|$ são ilustradas na Figura 6.20. Percebe-se que apenas no terceiro chaveamento ($k = k^* = 3$) a matrix $S_3^{\pi/2}$ é selecionada e a norma do erro converge para zero. Os sinais de controle u_1 e u_2 são apresentados na Figura 6.21, onde a aproximação sigmoïdal para o controle vetorial unitário $u = -S_q \rho \frac{e}{\|e\| + 0.001}$ foi utilizada (Edwards & Spurgeon 1998, pp. 15–17, 62–63).

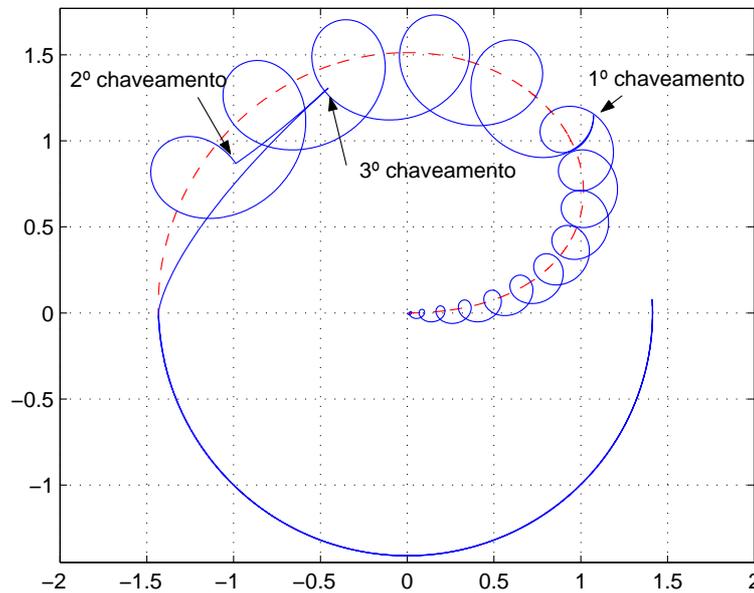


FIGURA 6.19: Resultados de simulação (Exemplo 6.2) - imagem do alvo (efetuator do robô) (—), trajetória de referência no plano da imagem (---).

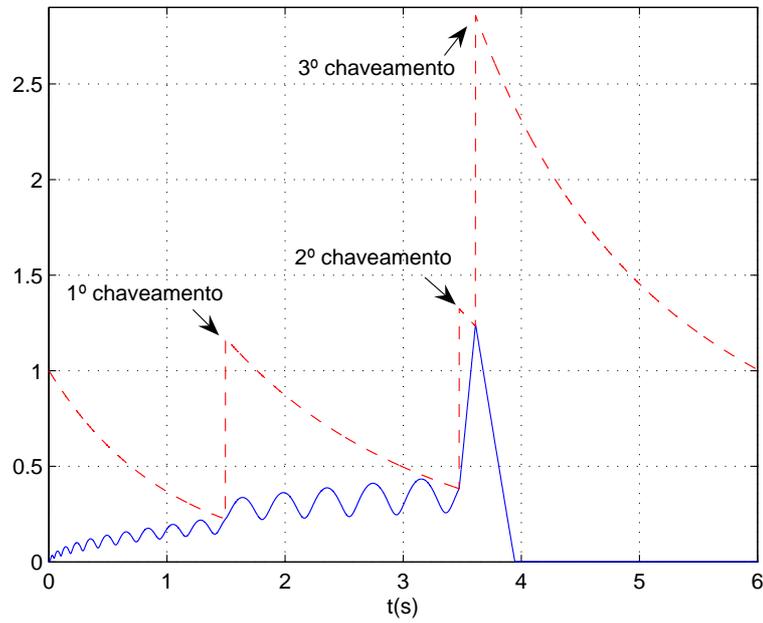


FIGURA 6.20: Resultados de simulação (Exemplo 6.2) - norma do erro $\|e\|$ (—) e função de monitoração φ_m (---).

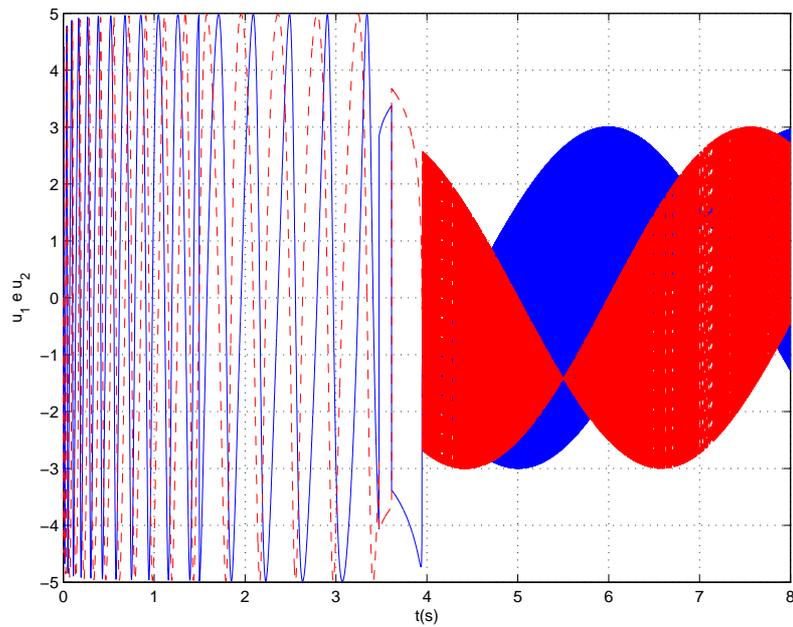


FIGURA 6.21: Resultados de simulação (Exemplo 6.2) - sinais de controle.

6.4 Resultados Experimentais

Até agora, não existe SMC que seja imune à ruídos de medição. Isto torna-se crítico em esquemas com realimentação de saída, onde a diferenciação do sinal de saída é fundamental para estes controladores, incluindo controladores baseados em HGOs e o controlador apresentado aqui. Por outro lado, deve ser enfatizado que o parâmetro τ pode se escolhido não tão pequeno, de modo que o ruído de alta frequência seja filtrado. A função do filtro *lead* linear é apenas garantir a estabilidade, enquanto o RED trata da precisão do rastreamento.

Nesta seção, experimentos com um motor DC são apresentados para verificar a aplicabilidade da estratégia de controle proposta na Seção 6.1.2 em sistemas reais. Os experimentos foram realizados utilizando-se um protótipo de laboratório baseado em um motor DC (2342024-CR) da MicroMo Electronics, Inc., com caixa de engrenagens (1:43), controlado por tensão de armadura. O algoritmo de controle foi implementado em uma placa DSP de controle de movimentos (Arcs Inc.) conectada à um PC. A placa contém entradas integradas para *encoders* assim como conversores digitais-analógicos de *12-bits* para um *drive* de potência. A frequência de amostragem utilizada foi de 2.5 kHz. A posição angular do motor foi medida utilizando-se *encoders* óticos tendo resolução de 1000 *pulses per turn (ppt)*. A resolução do posicionamento angular da carga é de 172000 ppt devida à caixa de engrenagens e à eletrônica da placa.

Omitindo-se constantes de tempo elétrica, pode-se obter o seguinte modelo nominal ($n^* = 2$) para o motor DC

$$G_p(s) = \frac{y}{u} = \frac{20k_p}{s(s+10)}, \quad (6.125)$$

onde y é a posição angular dada em graus, $k_p \in [30, 50]$, podendo ter o sinal variante no tempo, e a tensão de armadura é dada por u .

Dois experimentos são discutidos aqui. No primeiro, o objetivo é validar o desempenho do controlador proposto para condições iniciais grandes do erro de rastreamento e direção inicial de controle incorreta. A direção de controle é alterada a fim de verificar a capacidade de recuperação do controlador devido a mudanças “*on-the-fly*”. Várias destas mudanças foram realizadas durante este experimento. O objetivo do segundo experimento é avaliar a vantagem da implementação prática do RED ($\alpha = 0$), quando comparado com o filtro *lead* linear ($\alpha = 1$) em uma aplicação real.

Em ambos os experimentos, o modelo de referência é $M(s) = \frac{20}{(s+5)(s+20)}$ e o filtro *lead* linear é dado por $\frac{L}{F} = \frac{(s+5)}{(\tau s+1)}$, com $\tau = 0.002$. A partir de (3.42), o algoritmo do filtro não-linear RED que calcula as duas primeiras derivadas de e_0 é implementado por:

$$\begin{aligned}\dot{z}_0 &= z_1, \\ \dot{v} &= -\mu_1 \text{sgn}(z_0 - e_0), \\ z_1 &= v - \mu_0 |z_0 - e_0|^{\frac{1}{2}} \text{sgn}(z_0 - e_0),\end{aligned}\tag{6.126}$$

onde $\mu_0 = 100$ e $\mu_1 = 2500$. A função de chaveamento α , em (4.61), do filtro *lead* híbrido foi escolhida tal que $\epsilon_M = 80$ e $c = 0$. A função de monitoração é obtida de (6.102) com $a(k) = k + 1$, $a_m = 20$ e $\bar{\lambda}_c = 1$. A fim de neutralizar a perturbação β_α introduzida pelo filtro *lead* híbrido (ver (Nunes et al. 2004)), uma constante de $k_\tau = 80$ foi adicionada ao termo $\bar{\beta}_U$. Além disso, uma constante igual a 10 foi também incluída na função de monitoração de forma a reduzir as modificações espúrias na estimativa da direção de controle devido ao ruído de medição. Com o intuito de simplificar a implementação do controlador, a função de modulação foi escolhida constante $f(t) = 5$, que é suficiente para garantir o rastreamento do modelo.

Doravante, discute-se em detalhes os resultados de cada experimento.

6.4.1 Experimento I

No primeiro experimento o sinal de referência é uma senóide tal que y_m tem amplitude 50° e frequência 0.5 Hz . As condições iniciais da planta são $y(0) = 100^\circ$, $\dot{y}(0) = 0$ e a realimentação é inicialmente positiva em $t = 0\text{s}$ (direção de controle incorreta). Várias mudanças na direção de controle foram artificialmente introduzidas durante o experimento como esclarecido acima. A resposta inicial, até o instante $t = 7\text{s}$, é mostrada na Figura 6.22(a). A resposta transitória a mudanças na direção de controle foi completamente satisfatória (um erro transitório menor que 21°), ver Figura 6.22(b). As mudanças na direção de controle podem ser notadas a partir dos picos no erro de rastreamento.

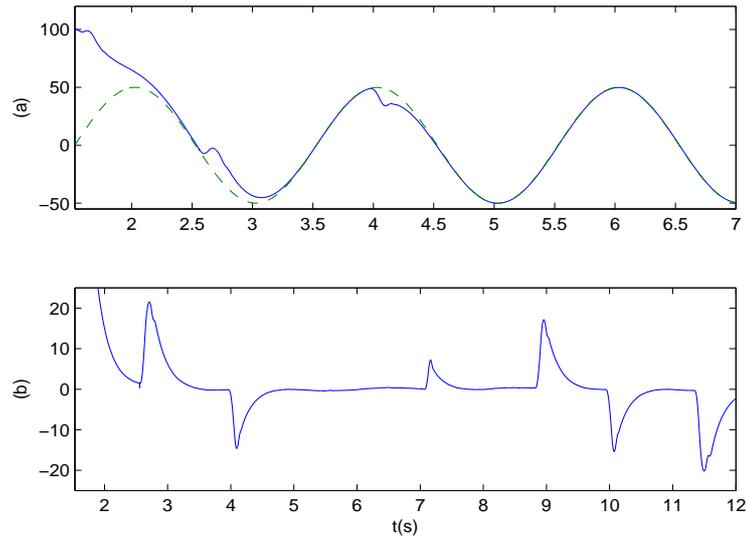


FIGURA 6.22: Experimento I: (a) condição inicial da saída da planta y (—) e saída do modelo de referência y_m (---), (b) erro de rastreamento e_0 com várias mudanças na direção de controle (representadas pelos picos).

Na Figura 6.23(a), são apresentados a função de monitoração φ_m e o erro auxiliar monitorado $\tilde{\varepsilon}_0$ (ver Figura 6.5). Note que a escala de tempo na Figura 6.23(b) é maior, enfatizando que o RED ($\alpha = 0$) é no final escolhido pela estratégia de chaveamento do filtro *lead* híbrido .

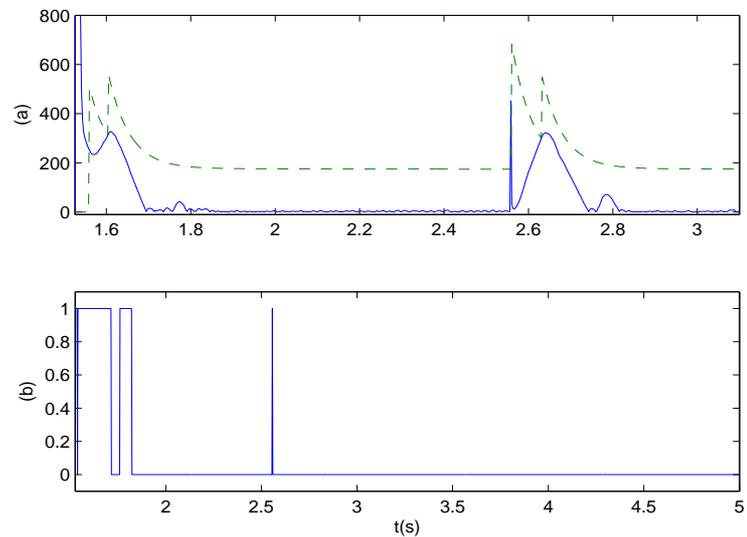


FIGURA 6.23: Experimento I: (a) função de monitoração φ_m (---) e erro auxiliar $\tilde{\varepsilon}_0$ (—), (b) função de chaveamento α : $\alpha = 1$ (filtro *lead* linear) e $\alpha = 0$ (RED).

6.4.2 Experimento II

Neste experimento não ocorrem trocas na direção de controle. Na Figura 6.24(a), inicia-se o processo com o filtro *lead* linear. Em seguida, para $t \in [16, 26]$, comuta-se manualmente para o RED ($\alpha = 0$) e então finalmente comuta-se novamente para o filtro *lead* linear. Pode-se notar claramente um melhor desempenho do RED e a degradação do desempenho devido ao atraso de fase introduzido pelo filtro *lead* linear, com $\tau = 0.002$ (este parâmetro foi *experimentalmente* sintonizado tão pequeno quanto possível, de modo que o *chattering* no sinal de controle fosse considerado aceitável).

As Figuras 6.24(b) e (c) correspondem a resposta do sistema a mudanças em de-grau no sinal de referência. Para $t \in [14, 28]$ e $t \in [37, 45]$, somente o RED é utilizado, enquanto que nos intervalos de tempo restantes, o filtro *lead* linear é utilizado. Observando-se o comportamento em regime permanente, nota-se claramente os efeitos adversos do *chattering* no seguimento do sinal de referência mencionado acima. Em contraste, o *chattering* é praticamente eliminado quando o RED é utilizado. Portanto, um desempenho consideravelmente superior na tarefa de *regulação* é observado quando utiliza-se o RED.

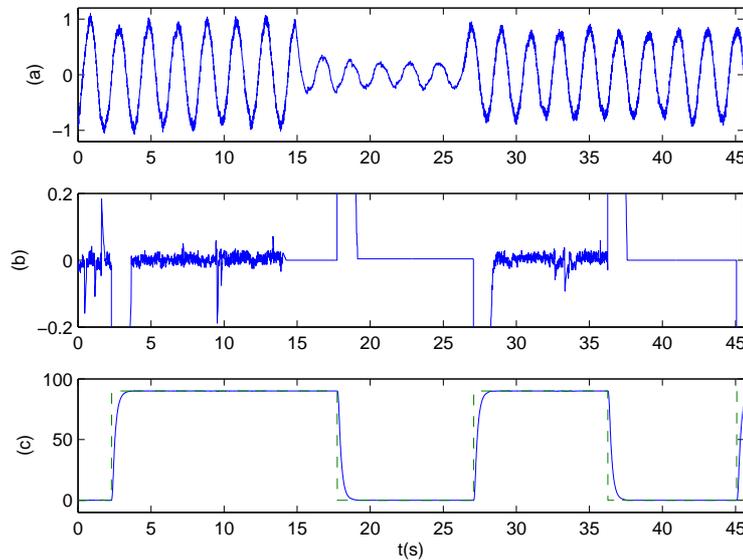


FIGURA 6.24: Experimento II: utilizando o filtro *lead* linear ou RED; (a) erro de saída e_0 (rastreamento de uma senóide); (b) erro de rastreamento e_0 na resposta a uma onda quadrada; (c) saída da planta y (—) e onda quadrada de referência y_m (---).

Capítulo 7

Discussão e Conclusões Gerais

Nesta Dissertação foi desenvolvido um controlador por modelo de referência e modos deslizantes baseado na realimentação de saída para plantas incertas, monovariáveis, lineares e invariantes no tempo com grau relativo arbitrário e direção de controle desconhecida.

O controlador proposto requer dois esquemas de chaveamento: um que ajuste a direção de controle e outro para compensar o grau relativo, de modo a manter a estabilidade global e o rastreamento exato da saída do modelo de referência.

O ajuste da direção de controle foi baseado em uma função de monitoração adequada construída somente com sinais de entrada e saída.

A compensação do grau relativo foi alcançada através do chaveamento entre um filtro *lead* linear e um diferenciador exato, baseado em modos deslizantes de ordem superior.

Neste trabalho foi apresentada uma análise teórica completa sobre a estabilidade do sistema considerado. O controlador garante estabilidade assintótica global com respeito a um conjunto compacto. Além disso, após algum tempo finito o estado completo do erro converge exponencialmente para zero e o sistema entra em deslizamento ideal. Este é um novo resultado no contexto de controle por modos deslizantes por realimentação de saída.

A partir dos resultados de simulação verifica-se que o controlador proposto não só consegue preservar a estabilidade global como também mostra-se robusto à perturbações externas de grande intensidade. Diferentemente dos resultados alcançados

com outras abordagens para direção de controle desconhecida, o sistema realimentado com o controlador proposto apresenta bom comportamento transitório.

Através dos resultados experimentais é possível comprovar a viabilidade da implementação prática do controlador proposto.

Adicionalmente, os resultados de convergência e estabilidade obtidos para sistemas com direção de controle *conhecida* são menos conservadores do que os já existentes para o controlador VS-MRAC.

Uma generalização do controlador proposto para o caso multivariável com grau relativo unitário ($n^* = 1$) também foi apresentada.

Diversos tópicos parecem interessantes para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

1. O esquema proposto claramente pode ser estendido para sistemas com direção de controle variante no tempo.
2. Uma vez que a extensão para sistemas não-lineares já foi realizada em Hsu et al. (2006) para sistemas com não-linearidades casadas com a entrada e dependentes apenas da saída, torna-se natural tratar de classes de sistemas não-lineares mais amplas, em que as não-linearidades aparecem descasadas da entrada e sejam dependentes do estado não-medido.
3. Sistemas multivariáveis e controle descentralizado são dois outros campos ricos para futuros desenvolvimentos e aplicações. A generalização para sistemas multivariáveis pode ser realizada utilizando-se o conceito de fatoração SDU e LDU da matriz de ganho de alta frequência (Imai et al. 2001, Imai, Costa, Hsu, Tao & Kokotovic 2004).
4. Tentativa de reformulação do *método da função periódica* (Seção 5.2) em uma abordagem entrada/saída.
5. Os esquemas de controle desenvolvidos nesta Dissertação são bastante robustos à incertezas paramétricas e perturbações na planta, o que é conseguido assumindo-se que os sinais de saída utilizados na realimentação são livres de ruído. Porém os testes experimentais motivam a avaliação da influência do ruído de medição, possivelmente conjugado a outras imperfeições (e.g., dinâmica não modelada), no

desempenho do sistema de controle. Naturalmente, isso motivará o desenvolvimento de estratégias para reduzir os efeitos danosos do ruído no desempenho do controlador proposto.

6. Estudar a viabilidade de se utilizar uma compensação não linear para tornar o rastreamento exato.
7. Fazer um estudo sobre o desempenho do controlador para diferentes técnicas de suavização do sinal de controle.

Apêndice A

Trabalhos Publicados

Para evidenciar a divulgação dos resultados obtidos nesta Dissertação de Mestrado, este apêndice lista as principais publicações realizadas até este momento:

1. Hsu, L., Oliveira, T. R. and Peixoto, A. J. (2006), “*Sliding mode control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction*”, 9th International Workshop on Variable Structure Systems - (Hsu et al. 2006).
2. Peixoto, A. J., Oliveira, T. R. and Hsu, L. (2006), “*Sliding mode control of uncertain systems with arbitrary relative degree and unknown control direction: Theory and Experiments*”, Proc. IEEE Conf. on Decision and Control - (Peixoto et al. 2006).
3. Oliveira, T. R., Hsu, L. e Peixoto, A. J. (2006), “*Controle por Modos Deslizantes de Sistemas Incertos com Grau Relativo Arbitrário e Direção de Controle Desconhecida*”, Congresso Brasileiro de Automática - (Oliveira et al. 2006).

Apêndice B

Estabilidade

Neste apêndice primeiramente revisa-se brevemente conceitos básicos da teoria de estabilidade de Lyapunov, restringindo a atenção para sistemas autônomos (invariantes no tempo) na forma

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.1})$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função localmente Lipschitz. Assume-se também que a origem é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (B.1), i.e., $f(0) = 0$.

B.1 Definições de Estabilidade

Visto que o sistema (B.1) é invariante no tempo, escolhe-se um instante inicial $t_0 = 0$ sem perda de generalidade. A origem é dita um ponto de equilíbrio *estável* de (B.1), no sentido de Lyapunov, se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$|x(0)| \leq \delta_1 \Rightarrow |x(t)| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0. \quad (\text{B.2})$$

Neste caso, pode-se dizer que o sistema (B.1) é *estável*.

O sistema (B.1) é dito *assintoticamente estável* se ele for estável e existir um $\delta_2 > 0$ para o qual

$$|x(0)| \leq \delta_2 \Rightarrow |x(t)| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (\text{B.3})$$

O conjunto de todos os estados iniciais dos quais as trajetórias partem e convergem para a origem é chamado de *região de atração*. Se a condição acima for verificada para

todo δ_2 , ou seja, a origem é um ponto de equilíbrio estável e sua região de atração é todo o espaço de estados, então o sistema (B.1) é dito *globalmente assintoticamente estável*.

Se o sistema não é necessariamente estável mas tem a propriedade de que todas as soluções com condições iniciais em alguma vizinhança da origem convergem para ela, então o sistema é dito *localmente atrativo*. Pode-se dizer que o sistema é *globalmente atrativo* se suas soluções convergem para a origem a partir de quaisquer condições iniciais.

O sistema (B.1) é dito *exponencialmente estável* se existirem constantes positivas δ_2 , c e λ tal que todas as soluções de (B.1) com $|x(0)| \leq \delta_2$ satisfazem a desigualdade

$$|x(t)| \leq c|x(0)|e^{-\lambda t}, \forall t \geq 0. \quad (\text{B.4})$$

Se esta desigualdade é verificada para todo δ_2 , o sistema é dito *globalmente exponencialmente estável*.

B.2 Método Direto de Lyapunov

Considere uma função positiva definida continuamente diferenciável ($\in \mathcal{C}^1$) $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuja a derivada ao longo das soluções do sistema (B.1) satisfaz

$$\dot{V} \leq 0, \forall x. \quad (\text{B.5})$$

Conclui-se portanto que o sistema (B.1) é estável. Se a derivada de V satisfaz

$$\dot{V} < 0, \forall x \neq 0 \quad (\text{B.6})$$

então (B.1) é assintoticamente estável. Além disso, se V for *radialmente ilimitada*, neste caso (B.1) será globalmente assintoticamente estável.

B.3 Estabilidade Entrada-Estado

É interessante estender os conceitos de estabilidade para sistemas em que as entradas são consideradas. No caso linear, representado pelo sistema

$$\dot{x} = Ax + Bd, \quad (\text{B.7})$$

sabe-se que se a matriz A for Hurwitz, i.e., se o sistema *não-forçado* $\dot{x} = Ax$ for assintoticamente estável, então entradas limitadas d levam a estados limitados e entradas convergentes para zero geram estados convergentes para zero.

Considere agora um sistema não linear na forma

$$\dot{x} = f(x, d) \quad (\text{B.8})$$

onde d é uma perturbação de entrada localmente essencialmente limitada. Geralmente, a estabilidade assintótica global de sistemas não-forçados $\dot{x} = f(x, 0)$ não garantem as propriedades da entrada para o estado mencionadas acima. Por exemplo, o sistema $\dot{x} = -x + xd$ apresenta trajetórias ilimitadas quando a entrada limitada $d = 2$ é utilizada. Isto motiva o importante conceito introduzido por Sontag & Wang (1995). O sistema (B.8) é dito estável da entrada para o estado (*input-to-state stable - ISS*) com respeito a d , se para algumas funções $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ e $\beta \in \mathcal{KL}$, todo o estado inicial $x(0)$ e toda a entrada d , a solução correspondente de (B.8) satisfaz a desigualdade

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \forall t \geq 0. \quad (\text{B.9})$$

B.4 Estabilidade Entrada-Saída

Na Seção B.3, apenas a estabilidade dos estados com respeito a entradas foi considerada. Para sistemas $\dot{x} = f(x, u)$, com saídas $y = h(x)$, se substituirmos os estados pelas saídas na desigualdade (B.8), obtém-se o conceito de estabilidade da entrada para a saída (*input-to-output stability - IOS*) formalizado a seguir.

Se existirem funções $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ e $\beta \in \mathcal{KL}$, então

$$|y(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \forall t \geq 0. \quad (\text{B.10})$$

B.5 Convergência de Sinais

Uma tarefa importante em controle adaptativo é mostrar que os sinais do erro, tal como o erro de rastreamento, convergem para zero quando $t \rightarrow \infty$. Essa convergência é baseada em propriedades em que o sinal de erro pertence a \mathcal{L}_2 e sua derivada pertence a \mathcal{L}_∞ . O seguinte lema estabelece a relação entre as propriedades \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_∞ e a convergência de sinais (Tao 2003, p. 80).

Lema B.1 *Se $\dot{f}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $f(t) \in \mathcal{L}_2$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.*

B.6 Teorema da Comparação

(Filippov 1964) Considerando-se as equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t), & x(t_0) &= x_0, & x &\in \mathbb{R} \\ \dot{y} &= g(y, t), & y(t_0) &= y_0, & y &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

onde $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas $\forall (x, t)$, exceto para os conjuntos de medida nula, e integráveis no sentido de Lebesgue em um domínio $M \subset \mathbb{R}$. Para qualquer subconjunto compacto $D \subset M$, existem $A(t)$ e $B(t)$ integráveis tais que $|f(x, t)| \leq A(t)$ e $|g(y, t)| \leq B(t)$ para quase todo (x, t) em D . Se $y_0 \leq x_0$ e $g(y, t) \leq f(x, t)$ para quase todo (x, t) em D , então $y(t) \leq x(t)$ para quase todo $t \geq t_0$.

Apêndice C

Sistemas a Estrutura Variável

C.1 Demonstração do Lema 3.1

Considere a forma não recursiva equivalente do diferenciador (3.41). Utilizando-se a seguinte mudança de variáveis,

$$\sigma_i = z_i - f^{(i)}(t), \quad i = 0, \dots, n$$

o esquema não-recursivo (3.42) pode ser reescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_0 = -\kappa_0 |\sigma_0|^{n/(n+1)} \operatorname{sgn}(\sigma_0) + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 = -\kappa_1 |\sigma_0|^{(n-1)/(n+1)} \operatorname{sgn}(\sigma_0) + \sigma_2 \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_i = -\kappa_i |\sigma_0|^{(n-i)/(n+1)} \operatorname{sgn}(\sigma_0) + \sigma_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_n = -\kappa_n \operatorname{sgn}(\sigma_0) - f^{(n+1)}(t). \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

As equações $\dot{\sigma}_i = -\kappa_i |\sigma_0|^{(n-i)/(n+1)} \operatorname{sgn}(\sigma_0) + \sigma_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$ podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_i = -a_i(\sigma_0)\sigma_0 - b_i(\sigma_0) + \sigma_{i+1}$$

onde

$$a_i(\sigma_0) = \begin{cases} \kappa_i & , \quad |\sigma_0| \leq 1 \\ \frac{\kappa_i}{|\sigma_0|^{(i+1)/(n+1)}} & , \quad |\sigma_0| > 1 \end{cases}$$

$$b_i(\sigma_0) = \begin{cases} \kappa_i |\sigma_0|^{\frac{n-i}{n+1}} \operatorname{sgn}(\sigma_0) - \kappa_i \sigma_0 & , \quad |\sigma_0| \leq 1 \\ 0 & , \quad |\sigma_0| > 1 \end{cases}$$

Note que $|a_i(\sigma_0)| < K_i$ e $|b_i(\sigma_0)| < c_i$, onde c_i são constantes positivas.

A equação $\dot{\sigma}_n = -\kappa_n \operatorname{sgn}(\sigma_0) - f^{(n+1)}(t)$ pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\dot{\sigma}_n = -a_n(\sigma_0) - b_n$$

onde

$$a_n(\sigma_0) = \kappa_n \operatorname{sgn}(\sigma_0)$$

$$b_n = f^{(n+1)}(t)$$

Note que $|a_n(\sigma_0)| < K_n$ e $|b_n| < K_{n+1}$.

Definindo o vetor de estados completo como sendo $\Sigma = [\sigma_0 \ \sigma_1 \ \dots \ \sigma_n]^T$, o sistema (C.1) pode ser reescrito como:

$$\dot{\Sigma} = A(\Sigma)\Sigma + b(\Sigma) \tag{C.2}$$

onde

$$A(\Sigma) = \begin{bmatrix} -a_0(\sigma_0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1(\sigma_0) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1}(\sigma_0) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(\sigma_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$b(\Sigma) = \begin{bmatrix} -b_0(\sigma_0) \\ -b_1(\sigma_0) \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Deve-se destacar que $\|A(\Sigma)\| < c_1$ e $\|b(\Sigma)\| < c_2$, onde $c_1, c_2 > 0$ são constantes.

Considere a seguinte função de Lyapunov:

$$V(\Sigma) = \Sigma^T \Sigma \quad (\text{C.3})$$

De (C.2) a função de Lyapunov (C.3) tem a seguinte derivada temporal:

$$\dot{V}(\Sigma) = \Sigma^T [A(\Sigma) + A^T(\Sigma)] \Sigma + 2\Sigma^T b(\Sigma) \quad (\text{C.4})$$

De (C.4), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\Sigma) &\leq c_3 \|\Sigma\|^2 + c_4 \|\Sigma\| \\ \dot{V}(\Sigma) &\leq c_3 \|\Sigma\|^2 \\ \dot{V}(\Sigma) &\leq c_3 V(\Sigma) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

onde c_3 e c_4 são constantes positivas.

A partir da equação de comparação

$$\dot{V}_c(\Sigma) = c_3 V_c(\Sigma)$$

sabe-se que se $V_c(0) = V(0)$, então:

$$V(t) \leq V_c(t), \quad \forall t \geq 0$$

Como $V_c(t) = e^{c_3 t} V_c(0)$, então:

$$V(t) \leq e^{c_3 t} V(0)$$

Logo, $V(t)$ não escapa em tempo finito para qualquer constante K_{n+1} finita.

Apêndice D

LF / VS-MRAC

D.1 Demonstração da Proposição 1

De acordo com a Hipótese (H6), é sempre possível escolher constantes K_θ, K_β tais que

$$\|\bar{u}_t\| \leq C(t)$$

Então, de (4.41), tem-se

$$\|(\beta_{\bar{u}} - \beta_{\bar{u}}^0)_t\| \leq \underbrace{\left\| \left[\rho^* ML \left(\frac{F-1}{F} \right) \right] \right\|}_{\mathcal{O}(\tau)} C(t) = \tau K_{\beta_{\bar{u}}} C(t) \quad (\text{D.1})$$

De (4.42) e (4.26) tem-se

$$\|(\beta_u - \beta_u^0)_t\| \leq \underbrace{\left\| \left[\rho^* ML \left(\frac{F-1}{F} \right) \right] \right\|}_{\mathcal{O}(\tau)} C(t) = \tau K_{\beta_u} C(t) \quad (\text{D.2})$$

Através destes resultados pode-se concluir que:

$$\|(\beta_{\bar{u}})_t\| \leq \tau K_{\beta_{\bar{u}}} C(t) + EXP^0 \quad (\text{D.3})$$

$$\|(\beta_u)_t\| \leq \tau K_{\beta_u} C(t) + EXP^0 \quad (\text{D.4})$$

Utilizando os resultados obtidos em (D.3) e (D.4), se $f(t) \geq |\bar{u}|$, aplicando o Lema 4.2

na equação (4.40), o seguinte resultado pode ser obtido:

$$|\varepsilon_0| \leq \tau K_{\varepsilon_0} C(t) + EXP \quad (D.5)$$

Deve-se destacar que o termo EXP aparece na equação (D.5) no lugar de EXP^0 , devido a presença do termo de decaimento exponencial dependente da condição inicial de ε_0 . ■

D.2 Demonstração do Teorema 4.1

Da equação (4.40) e de $ML(s) = k_m/(s + a_m)$ ($K_m, a_m > 0$), pode-se concluir que

$$u - \bar{u} = \left[\dot{\hat{\varepsilon}} + a_m \hat{\varepsilon} \right] / k_m \rho^* \quad (D.6)$$

onde $\hat{\varepsilon} := \varepsilon_0 - \beta_{\bar{u}} - \beta_u + EXP^0$, onde o termo EXP^0 leva em conta todos os termos transientes de $\varepsilon_0, \beta_{\bar{u}}$ and β_u .

Substituindo (D.6) em (4.19), tem-se

$$\dot{X}_e = A_c X_e + b_c \left[\dot{\hat{\varepsilon}} + a_m \hat{\varepsilon} \right] / k_m. \quad (D.7)$$

Então, para eliminar o termo derivativo $\dot{\hat{\varepsilon}}$, será realizada a transformação de variável $\hat{X}_e := X_e - [b_c \hat{\varepsilon}] / k_m$ que resulta em:

$$\dot{\hat{X}}_e = A_c \hat{X}_e + (A_c + I a_m) \frac{b_c}{k_m} \hat{\varepsilon} \quad (D.8)$$

Note que (4.39) está imerso em (4.40), logo o limitante (4.44) também é válido para (4.39). Deste modo, como A_c é *Hurwitz*, pode-se concluir que $\hat{X}_e(t)$ é limitado por $\|\hat{X}_e(t)\| \leq \tau \bar{K} C(t) + EXP$. Além disso,

$$\|X_e(t)\| \leq \tau K_{X_e} C(t) + EXP \quad (D.9)$$

$$C_1(t) \leq \tau K_1 C(t) + K_2 \|z(0)\| + K_{\omega_m} \quad (D.10)$$

$$C(t) \leq \frac{K'_{rd} + K_4 \|z(0)\|}{1 - \tau K_3} \quad (D.11)$$

De fato, a desigualdade (D.9) é verificada a partir de $\hat{X}_e = X_e - b_c \hat{\varepsilon} / k_m$. Da relação $\omega = \omega_m + \Omega X_e$, onde $\omega_m^T = [v_{m1}^T \ y_m \ v_{m2}^T \ r]$ é o vetor regressor correspondente ao modelo de referência e Ω , é uma matriz constante, segue que $\|\omega\| \leq K_{\omega_m} + K_{\Omega} \|X_e\|$ e, como $C_1(t) = \sup_t \|\omega(t)\|$, então de (D.9) obtém-se (D.10), onde $K_2 \|z(0)\|$ resulta do valor inicial do termo EXP que aparece no limitante (D.9) de $\|X_e\|$. Agora, de (4.45) e (D.10), $C(t)$ pode ser limitado por $C(t) \leq \tau K_3 C(t) + K_4 \|z(0)\| + K'_{rd}$, logo, após algumas manipulações algébricas, obtém-se (D.11), válida para $\tau < K_3^{-1}$. Assim sendo, a partir de (4.43), pode-se escrever que:

$$\|z^0(t)\| \leq K_z e^{-a_z t} \|z^0(0)\| \quad (\text{D.12})$$

$$\|z_e(t)\| \leq \tau K_5 (\|z_e(0)\| + \|z^0(0)\|) + \mathcal{O}(\tau) + \text{EXP}. \quad (\text{D.13})$$

De fato, z^0 é limitado por EXP^0 , onde somente as condições iniciais de z^0 aparecem. Agora, de (4.45), (D.9) e (D.11) segue (D.13), onde $\mathcal{O}(\tau)$ é independente das condições iniciais.

Percebendo que o tempo inicial é irrelevante no desenvolvimento da expressões acima, pode-se escrever que, para $t \geq t_0 \geq 0$ arbitrário, algum $T_1 > 0$ e $\lambda < 1$,

$$\|z_e(t)\| \leq [\tau K_5 + K_6 e^{-a(t-t_0)}] [\|z_e(t_0)\| + \|z^0(t_0)\|] + \mathcal{O}(\tau) \quad (\text{D.14})$$

$$\|z^0(t)\| \leq K_z e^{-a_z(t-t_0)} \|z^0(t_0)\| \quad (\text{D.15})$$

$$\|z_e(t_0 + T_1)\| \leq \lambda (\|z_e(t_0)\| + \|z^0(t_0)\|) + \mathcal{O}(\tau) \quad (\text{D.16})$$

$$\|z^0(t_0 + T_1)\| \leq \lambda \|z^0(t_0)\|. \quad (\text{D.17})$$

Equações (D.16) e (D.17) são obtidas de (D.14) e (D.15) da seguinte maneira: para $\tau < K_5^{-1}$, existe $T_1 > 0$ tal que $\lambda = \max[\tau K_5 + K_6 e^{-aT_1}, K_z e^{-a_z T_1}] < 1$. Então, as desigualdades recursivas (D.16) e (D.17) são satisfeitas e conclui-se facilmente que, para τ suficientemente pequeno, o sistema do erro é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem τ . Além disso, este conjunto residual é independente das condições iniciais. ■

Apêndice E

GRED/VS-MRAC

E.1 Demonstração da Proposição 2

Visto que o sistema tem grau relativo n^* , sabe-se que $h_c^T b_c = h_c^T A_c b_c = \dots = h_c^T A_c^{n^*-2} b_c = 0$. De (4.19)-(4.20), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= h_c^T A_c X_e + \underbrace{\rho^* h_c^T b_c [u - \bar{u}]}_0 = h_1^T X_e \\ \ddot{e}_0 &= h_c^T A_c^2 X_e + \underbrace{\rho^* h_c^T A_c b_c [u - \bar{u}]}_0 = h_2^T X_e \\ &\vdots \\ e_0^{(n^*-1)} &= h_c^T A_c^{n^*-1} X_e + \underbrace{\rho^* h_c^T A_c^{n^*-2} b_c [u - \bar{u}]}_0 = h_{n^*-1}^T X_e \\ e_0^{(n^*)} &= h_c^T A_c^{n^*} X_e + \rho^* h_c^T A_c^{n^*-1} b_c [u - \bar{u}] \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Assim sendo $e_0^{(i)} = h_i^T X_e$, onde $h_i^T = h_c^T A_c^i$ ($i=1, \dots, n^*-1$). ■

E.2 Demonstração da Corolário 4.2

De (4.55) segue que

$$e_0^{(i)} = h_c^T A_c^{(i)} X_e, \quad i = 1, \dots, n^* - 1.$$

Como o vetor de estados $X_e(t)$ é uniformemente limitado, então existem constantes

K_i , $i = 1, \dots, n^* - 1$ tais que:

$$\left| e_0^{(i)} \right| \leq K_i, \quad i = 1, \dots, n^* - 1 \quad \forall t \geq 0.$$

A derivada n^* do sinal e_0 é dada por

$$e_0^{n^*} = h_c^T A_c^{n^*} X_e + \rho^* h_c^T A_c^{n^*-1} b_c [u - \bar{u}].$$

Como os sinais u e \bar{u} também são uniformemente limitados, então existe uma constante positiva K_{n^*} tal que:

$$\left| e_0^{n^*} \right| \leq K_{n^*}, \quad \forall t \geq 0.$$

■

Apêndice F

Sistemas com Direção de Controle Desconhecida: Parte A

F.1 Lemas e Corolários

Lema F.1 *Seja*

$$\bar{g}(t) := \frac{t^j}{\tau^j} e^{-t/\tau}, \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{F.1})$$

onde j é um inteiro positivo e $\tau > 0$. Assim sendo, existe uma constante $k_{\bar{g}} > 0$, independente de τ , tal que

$$\bar{g}(t) \leq k_{\bar{g}} e^{-t/\bar{\tau}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{F.2})$$

sendo $\bar{\tau} > \tau$.

Prova: A partir de (F.1), tem-se

$$\frac{d}{dt} \bar{g}(t) = [\tau j - t] \frac{t^{(j-1)}}{\tau^{(j+1)}} e^{-t/\tau}. \quad (\text{F.3})$$

O valor máximo de \bar{g} é atingido em $t = t_{max}$, para o qual $\frac{d}{dt} \bar{g}(t_{max}) = 0$. De (F.3), tem-se $t_{max} = \tau j$ e, conseqüentemente, a partir de (F.1), o valor máximo de $\bar{g}(t)$ (a segunda derivada é negativa em $t = t_{max}$) é dado por

$$\bar{g}(t) \leq \bar{g}(t_{max}) = j^j e^{-j}, \quad (\text{F.4})$$

que é independente de τ . Então, é possível encontrar uma constante $k_{\bar{g}} > 0$ (independente de τ) de forma que

$$\bar{g}(t) \leq k_{\bar{g}} e^{-t/\bar{\tau}}, \quad (\text{F.5})$$

com $\bar{\tau} > \tau$. A constante $k_{\bar{g}}$, na desigualdade (F.5), pode ser determinada da seguinte maneira. Seja $\varsigma > 1$ tal que $\bar{\tau} = \varsigma\tau$, então

$$\bar{\bar{g}}(t) := \bar{g}(t)e^{t/(\tau\varsigma)} \leq k_{\bar{g}}, \quad (\text{F.6})$$

e, a partir de (F.1), tem-se

$$\bar{\bar{g}}(t) := \frac{t^j}{\tau^j} e^{-\frac{t}{\tau}(1-\frac{1}{\varsigma})} \leq k_{\bar{g}}. \quad (\text{F.7})$$

Seguindo os mesmos passos em (F.3) e (F.4), conclui-se que $\bar{\bar{g}}$ tem valor máximo em $t = \bar{t}_{max}$, de modo que $\bar{t}_{max} = \tau j / (1 - \frac{1}{\varsigma})$ e

$$\bar{\bar{g}}(\bar{t}_{max}) = \left(\frac{j}{(1 - 1/\varsigma)} \right)^j e^{-j}. \quad (\text{F.8})$$

Escolhendo $k_{\bar{g}} := \bar{\bar{g}}(\bar{t}_{max})$, obtém-se (F.5). ■

Corolário F.1 *Utilizando-se o Teorema de Cayley-Hamilton (Chen 1999, p. 63), a matriz exponencial $e^{A_f t}$ é dada por*

$$e^{A_f t} = \sum_{k=0}^{N-1} g_k(t) A_f^k,$$

onde

$$g_k(t) := \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{jk} \frac{t^j}{j!} e^{-t},$$

e α_{jk} são constantes para $(j = 0, \dots, N-1)$ e $(k = 0, \dots, N-1)$. Portanto, tem-se

$$(sI - A_f)^{-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{r_j}{(s+1)^{(j+1)}}, \quad (\text{F.9})$$

sendo

$$r_j = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{jk} A_f^k. \quad (\text{F.10})$$

A partir da propriedade de escalamento na frequência da transformada de Laplace, conclui-se que

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\tau} e^{A_f t / \tau} \right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{r_j}{(\tau s + 1)^{(j+1)}}.$$

Corolário F.2 Seja $t_i \geq 0$ qualquer instante de tempo inicial, então a seguinte relação é válida $\forall t \geq t_i$

$$|ce^{-\gamma t} * Re^{-\lambda t}| \leq \frac{2Rc}{|(\gamma - \lambda)|} e^{-\lambda_m(t-t_i)}, \quad (\text{F.11})$$

onde $\lambda_m \leq \min(\lambda, \gamma)$.

Prova: A prova é obtida diretamente da integral de convolução, i.e.,

$$ce^{-\gamma t} * Re^{-\lambda t} = \frac{Rce^{-\lambda t_i}}{\gamma - \lambda} (e^{-\lambda(t-t_i)} - e^{-\gamma(t-t_i)}),$$

logo,

$$|ce^{-\gamma t} * Re^{-\lambda t}| \leq \frac{Rc}{|(\gamma - \lambda)|} (e^{-\lambda(t-t_i)} + e^{-\gamma(t-t_i)}),$$

obtendo-se assim o resultado do corolário. ■

F.2 Demonstração da Equação (6.53)

Primeiramente, recordando que $A_c \in \mathbb{R}^{(3n-2) \times (3n-2)}$, então a partir do *Teorema de Cayley-Hamilton* (Chen 1999, p. 63), a matriz exponencial $e^{A_c t}$ é dada por

$$e^{A_c t} = \sum_{k=0}^{3n-3} f_k(t) A_c^k,$$

onde

$$f_k(t) := \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{\mu_i-1} \alpha_{ijk} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t},$$

sendo λ_i ($i = 0, \dots, p$) os p autovalores distintos de A_c (com multiplicidade μ_i) e α_{ijk} são constantes para ($j = 0, \dots, \mu_i - 1$) e ($k = 0, \dots, 3n - 3$). Assim sendo, tem-se

$$h_c^T (sI - A_c)^{-1} X_e(0) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{\mu_i-1} \frac{r_{ij}}{(s + \lambda_i)^{(j+1)}}, \quad (\text{F.12})$$

onde

$$r_{ij} = \sum_{k=0}^{3n-3} \alpha_{ijk} h_c^T A_c^k X_e(0). \quad (\text{F.13})$$

De acordo com (F.12), a transformada de Laplace do termo $\frac{L}{F} * h_c^T e^{A_c t} X_e(0)$ em (6.50) é dada por

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{L}{F} * h_c^T e^{A_c t} X_e(0) \right\} = \frac{L}{F} \mathcal{L} \left\{ h_c^T e^{A_c t} X_e(0) \right\},$$

então,

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{L}{F} * h_c^T e^{A_c t} X_e(0) \right\} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{\mu_i-1} \frac{r_{ij} L(s)}{F(\tau s) (s + \lambda_i)^{(j+1)}}.$$

Note que os termos com função de transferência $\frac{L(s)}{F(\tau s)(s+a)^b}$ (onde $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{N}$) pode ser expandido em frações parciais

$$\frac{L(s)}{F(\tau s)(s+a)^b} = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{r}_i}{(s + 1/\tau)^i} + \sum_{j=1}^b \frac{\bar{\bar{r}}_j}{(s+a)^j},$$

onde os resíduos \bar{r}_i e $\bar{\bar{r}}_j$ são calculados da seguinte maneira

$$\bar{r}_i(\tau) = \frac{1}{\tau^N (N-i)!} \left\{ \frac{d^{(N-i)}}{ds^{(N-i)}} \left[\frac{L(s)}{(s+a)^b} \right] \right\}_{s=-\frac{1}{\tau}} \quad (\text{F.14})$$

$$\bar{\bar{r}}_j(\tau) = \frac{1}{(b-j)!} \left\{ \frac{d^{(b-j)}}{ds^{(b-j)}} \left[\frac{L(s)}{F(\tau s)} \right] \right\}_{s=-a} \quad (\text{F.15})$$

A partir de (F.14), pode-se verificar que a derivada de ordem $N - i$ é uma função racional em s , onde os graus do numerador e do denominador são $i + b(2^{(N-i)} - 1)$ e $b2^{(N-i)}$, respectivamente. Portanto, \bar{r}_i satisfaz

$$\bar{r}_i = \frac{1}{\tau^N} \frac{\bar{k}_i(\tau) \tau^{[b2^{(N-i)}]}}{\tau^{[i+b(2^{(N-i)}-1)]}} = \frac{1}{\tau^N} \frac{\bar{k}_i \tau^b}{\tau^i},$$

onde $\bar{k}_i(\tau)$ é de ordem $\mathcal{O}(1)$ com respeito a τ , isto é, o $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\bar{k}_i(\tau)}{\tau^0}$ existe. Além disso, a derivada de ordem j em (F.15) é uma função racional em s , onde o numerador é um polinômio em τ e o denominador é $F^{2j}(\tau s)$. Visto que $F(0) \neq 0$, conclui-se que $\bar{r}_j(\tau)$ é ao menos de ordem $\mathcal{O}(1)$ com respeito a τ e, portanto satisfaz

$$\bar{r}_j(\tau) \leq \bar{k}_j,$$

sendo \bar{k}_j uma constante positiva independente de τ . Deste modo,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{r}_i}{(s + 1/\tau)^i} \right\} = \frac{\bar{r}_i t^{(i-1)}}{(i-1)!} e^{-t/\tau} \quad (\forall t \geq 0),$$

e

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\bar{r}_j}{(s + a)^j} \right\} = \frac{\bar{r}_j t^{(j-1)}}{(j-1)!} e^{-at} \quad (\forall t \geq 0).$$

Aplicando-se o Lema F.1 aos termos $\frac{\bar{r}_i t^{(i-1)}}{(i-1)!} e^{-t/\tau}$ and $\frac{\bar{r}_j t^{(j-1)}}{(j-1)!} e^{-at}$, os seguintes majorantes são válidos $\forall t \geq 0$

$$\left| \frac{\bar{r}_i t^{(i-1)}}{(i-1)!} e^{-t/\tau} \right| \leq k_{\bar{r}_i} \frac{\bar{r}_i \tau^{(i-1)}}{(i-1)!} e^{-t/\bar{\tau}},$$

$$\left| \frac{\bar{r}_j t^{(j-1)}}{(j-1)!} e^{-at} \right| \leq k_{\bar{r}_i} \frac{\bar{r}_i}{a^{(i-1)}(i-1)!} e^{-at},$$

onde $k_{\bar{r}_i}, k_{\bar{r}_i} > 0$ são constantes independentes de τ , $\bar{\tau} > \tau$ e $\underline{a} < a$. Desta maneira, obtém-se que

$$\left| \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{L(s)}{F(\tau s)(s + a)^b} \right\} \right| \leq \frac{1}{\tau^N} \bar{k} e^{-\frac{t}{\bar{\tau}}} + \bar{k} e^{-at}, \quad (\text{F.16})$$

e um limitante para a convolução em (6.50) é assim obtido

$$\left| \frac{L}{F} * h_c^T e^{Act} X_e(0) \right| \leq \frac{k_{e\tau}}{\tau^N} \|X_e(0)\| e^{-\frac{t}{\bar{\tau}}} + k_e \|X_e(0)\| e^{-\lambda_e t}, \quad (\text{F.17})$$

onde $k_e, k_{e\tau}, \lambda_e$ são constantes positivas independentes de τ e a relação $|r_{ij}| \leq k_r \|X_e(0)\|$, obtida a partir de (F.13), com $k_r > 0$ constante foi utilizada na dedução de (F.17).

Apêndice G

Sistemas com Direção de Controle Desconhecida: Parte B

Nesta parte do trabalho, redefine-se a notação com intuito de tornar as demonstrações menos *enfadonhas*. Assim sendo, $|x|$ e $|A|$ denotam a norma Euclidiana de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ e a correspondente norma induzida da matriz A , respectivamente. A norma $\mathcal{L}_{\infty e}$ do sinal $x(t)$ é definida como $\|x_{t, \bar{t}_0}\| := \sup_{\bar{t}_0 \leq \iota \leq t} |x(\iota)|$. Para $\bar{t}_0 = 0$, tem-se $\|x_t\| := \sup_{0 \leq \iota \leq t} |x(\iota)|$.

Doravante, k_i denota constantes positivas que dependem apenas dos parâmetros da planta e do controlador e $\Psi_i(\cdot)$ denota funções de classe \mathcal{K} .

G.1 Prova da Proposição 8

Considere a solução da equação de estado (6.1) $\forall t \geq 0$,

$$X_e(t) = \rho^*(sI - A_c)^{-1} b_c * [u(t) - \bar{u}(t)] + e^{A_c t} X_e(0). \quad (\text{G.1})$$

Aplicando o Lema 4.3 em (G.1), tem-se

$$|X_e(t)| \leq c_1 e^{-\gamma_c t} * \hat{u}(t) + c_2 e^{-\lambda_c t} |X_e(0)|, \quad (\text{G.2})$$

onde $\lambda_c > 0$ e $\gamma_c > 0$ são limitantes inferiores para a margem de estabilidade de A_c e da função de transferência $(sI - A_c)^{-1} b_c$, respectivamente. As constantes $c_1, c_2 > 0$

são escolhidas apropriadamente e $|u(t) - \bar{u}(t)| \leq \hat{u}(t)$. Visto que $\lambda_c \geq \gamma_c$, o seguinte majorante é válido $\forall t \geq 0$

$$|X_e(t)| \leq c_1 e^{-\lambda_c t} * \hat{u}(t) + c_2 e^{-\lambda_c t} |X_e(0)|. \quad (\text{G.3})$$

De (4.24), (6.8) e (6.9), tem-se $\forall t \geq 0$

$$|u - \bar{u}| \leq k_1 |X_e| + k_2 := \hat{u}. \quad (\text{G.4})$$

Conseqüentemente, de (G.3), (G.4) e aplicando-se o *Teorema da Comparação* (Filippov 1964), obtém-se

$$|X_e(t)| \leq \bar{x}_e(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{G.5})$$

onde $\bar{x}_e(t) := e^{-\lambda_c t} * [k_1 |X_e(t)| + k_2] + c_2 e^{-\lambda_c t} |X_e(0)|$ é a solução da seguinte equação diferencial ($\forall t \geq 0$)

$$\dot{\bar{x}}_e = -\lambda_c \bar{x}_e + [k_1 |X_e| + k_2], \quad \bar{x}_e(0) := c_2 |X_e(0)|. \quad (\text{G.6})$$

A partir de (G.5) e (G.6), conclui-se que \bar{x}_e satisfaz

$$\dot{\bar{x}}_e \leq -\lambda_c \bar{x}_e + [k_1 \bar{x}_e + k_2], \quad \bar{x}_e(0) := c_2 |X_e(0)|, \quad (\text{G.7})$$

ou, equivalentemente,

$$\dot{\bar{x}}_e \leq (k_1 - \lambda_c) \bar{x}_e + k_2, \quad \bar{x}_e(0) := c_2 |X_e(0)|. \quad (\text{G.8})$$

Assim sendo,

$$\bar{x}_e \leq \frac{k_2}{(k_1 - \lambda_c)} (e^{(k_1 - \lambda_c)t} - 1) + c_2 |X_e(0)| e^{(k_1 - \lambda_c)t}, \quad (\text{G.9})$$

e, conseqüentemente, de (G.5), tem-se

$$|X_e(t)| \leq c_2 e^{\lambda_2 t} |X_e(0)| + k_3 (e^{\lambda_2 t} - 1), \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{G.10})$$

onde $\lambda_2 := k_1 - \lambda_c$ e $k_3 = k_2 / \lambda_2$. Visto que $t_e(\tau)$ é limitado por uma função de classe \mathcal{K} de τ , então existe $0 < \tau_1 \leq 1$, $\forall \tau \in (0, \tau_1]$, tal que o seguinte limitante para a norma

de X_e é válido $\forall t \in [0, t_e(\tau)]$,

$$|X_e(t)| \leq (k_4 + k_5\tau)|X_e(0)| + \Psi_1(\tau). \quad (\text{G.11})$$

Finalmente, a partir de (G.11), $\|(X_e)_t\| \leq (k_4 + k_5\tau)|X_e(0)| + \Psi_1(\tau)$, $\forall t \in [0, t_e]$, além disso, recordando que $e_0 = h_c^T X_e$, a partir de (6.42), obtém-se o resultado da proposição, i.e.,

$$|z(t)| \leq k_6|z(0)| + \Psi_2(\tau). \quad (\text{G.12})$$

■

G.2 Prova do Teorema 6.2

A partir de (6.92), tem-se

$$\|(z)_t\| \leq k_{z1}|z(0)| + k_{z2}\mathcal{V}(\tau) + k_{z3}\|(\beta\mathcal{U})_t\|, \quad (\text{G.13})$$

e, de (6.93), segue

$$\|(z)_t\| \leq \bar{k}_{z1}|z(0)| + \bar{k}_{z2}\mathcal{V}(\tau) + \tau\bar{k}_{z3}, \quad (\text{G.14})$$

que é válido se $\tau < \frac{1}{k_{z3}k_a}$, onde $\bar{k}_{z1} := \frac{k_{z1}}{1-\tau k_{z3}k_a}$, $\bar{k}_{z2} := \frac{k_{z2}}{1-\tau k_{z3}k_a}$ e $\bar{k}_{z3} := \frac{k_{z3}k_b}{1-\tau k_{z3}k_a}$. Então, de (6.93)

$$\begin{aligned} \|(\beta\mathcal{U})_t\| &\leq \tau k_a \bar{k}_{z1}|z(0)| + \tau k_a \bar{k}_{z2}\mathcal{V}(\tau) + \\ &+ \tau^2 k_a \bar{k}_{z3} + \tau k_b, \\ &\leq \tau k_a \bar{k}_{z1}|z(0)| + \tau k_{o1}, \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

onde $k_{o1} := k_a \bar{k}_{z2}\mathcal{V}(\tau) + \tau k_a \bar{k}_{z3} + k_b$. Portanto, a partir de (6.92), o seguinte majorante continua válido

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq k_{z1}|z(0)|e^{-\lambda_2 t} + \mathcal{V}(\tau)e^{-\lambda_2 t} + \\ &+ \tau k_{z4}|z(0)| + \tau k_{z5}, \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

onde $k_{z4} := k_{z2}k_a\bar{k}_{z1}$ e $k_{z5} := k_{z2}k_{o1}$.

Rescreve-se (G.16) como

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq [k_{z1}e^{-\lambda_2 t} + \tau k_{z4}] |z(0)| + \\ &+ \mathcal{V}(\tau)e^{-\lambda_2 t} + \tau k_{z5}. \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

Para $\tau < 1/k_{z4}$, existe $T_1 > 0$ tal que

$$\lambda_z := [k_{z1}e^{-\lambda_2 T_1} + \tau k_{z4}] \leq 1,$$

então, para $i = 0, 1, \dots$, tem-se

$$\begin{aligned} |z(\bar{t}_i + T_1)| &\leq \lambda_z |z(\bar{t}_i)| + \\ &+ \mathcal{V}(\tau)e^{-\lambda_2 T_1} + \tau k_{z5}. \end{aligned} \quad (\text{G.18})$$

Portanto, a desigualdade recursiva (G.18) é satisfeita e facilmente leva a conclusão que, para τ suficientemente pequeno, o sistema do erro é globalmente exponencialmente estável com respeito a um conjunto residual de ordem τ . Além disso, conclui-se que o instante de tempo inicial é irrelevante na análise e o resultado de estabilidade continua válido $\forall t \geq t_i \geq 0$. ■

G.3 Prova da Proposição 10

A partir da Proposição 9, $|\varepsilon_0(t)| \leq |\varphi_m(t)|$ ($\forall t \geq t_1$), e conseqüentemente de (6.101)-(6.102), tem-se

$$|\varepsilon_0(t)| \leq |\varepsilon_0(t_k)| + a(k) + 3\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|, \quad (\text{G.19})$$

que é válida $\forall t \geq t_1$, onde t_k é o maior instante de chaveamento onde $0 \leq t_k \leq t \leq t_{k+1}$ (note que t_k depende de t). A relação $|\bar{\beta}_{\mathcal{U}}(t_k)| \leq \|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|$ foi utilizada no resultado de (G.19). Considerando a seqüência t_1, t_2, \dots, t_k de instantes de chaveamento, a seguinte desigualdade recursiva é verificada

$$|\varepsilon_0(t_{k+1})| \leq |\varepsilon_0(t_k)| + a(k) + 3\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_{t_{k+1}}\|, \quad (\forall k \geq 1), \quad (\text{G.20})$$

o que leva a conclusão de

$$|\varepsilon_0(t_k)| \leq |\varepsilon_0(t_1)| + \sum_{i=1}^{k-1} a(i) + 3 \sum_{i=1}^{k-1} \|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_{t_{i+1}}\|, \quad (\forall k \geq 2). \quad (\text{G.21})$$

Note que $\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_{t_i}\| \leq \|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_{t_{i+1}}\|$ ($\forall i$), assim sendo, o seguinte majorante para $\varepsilon_0(t_k)$ é obtido a partir de (G.21)

$$|\varepsilon_0(t_k)| \leq |\varepsilon_0(t_1)| + a_{\Sigma}(k) + 3(k-1)\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_{t_k}\|, \quad \forall k \geq 1, \quad (\text{G.22})$$

onde

$$a_{\Sigma}(k) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{k-1} a(i), & k \geq 2, \\ 0, & k = 1. \end{cases}$$

De acordo com (G.19) e (G.22), obtém-se

$$\begin{aligned} |\varepsilon_0(t)| &\leq |\varepsilon_0(t_1)| + a_{\Sigma}(k) + 3(k-1)\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_{t_k}\| + \\ &+ a(k) + 3\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|, \quad (\forall t \geq t_1, k \geq 1). \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

Note que $\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_{t_k}\| \leq \|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|$ (uma vez que $t \geq t_k$), e redefinindo-se $a_{\Sigma}(k)$

$$a_{\Sigma}(k) := \sum_{i=1}^k a(i), \quad k \geq 1,$$

a seguinte desigualdade é válida $\forall t \geq t_1$ (o que implica em $k \geq 1$)

$$|\varepsilon_0(t)| \leq |\varepsilon_0(t_1)| + a_{\Sigma}(k) + 3k\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|. \quad (\text{G.24})$$

Visto que k , $a_{\Sigma}(k)$ e $\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|$ são positivos e crescentes com t , então a desigualdade (G.24) é também comprovada em termos da norma $\mathcal{L}_{\infty e}$ de ε_0 ($\forall t \geq t_1$), i.e,

$$\|(\varepsilon_0)_{t,t_1}\| \leq |\varepsilon_0(t_1)| + a_{\Sigma}(k) + 3k\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|. \quad (\text{G.25})$$

Observe que a relação $\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_{t,t_1}\| \leq \|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|$ foi utilizada no resultado da desigualdade (G.25).

Além disso, de (6.43) e (6.49), tem-se

$$\bar{e}_0 = \varepsilon_0 - \beta_{\mathcal{U}} - e_F^0,$$

então, como $\bar{e}_0 = h_L^T X_e$, as seguintes desigualdades podem ser obtidas

$$|\varepsilon_0(t_1)| \leq k_1 |X_e(t_1)| + |\beta_{\mathcal{U}}(t_1)| + |e_F^0(t_1)|, \quad (\text{G.26})$$

$$\|(\bar{e}_0)_{t,t_1}\| \leq \|(\varepsilon_0)_{t,t_1}\| + \|(\beta_{\mathcal{U}})_{t,t_1}\| + \|(e_F^0)_{t,t_1}\|, \quad (\text{G.27})$$

onde $k_1 := |h_L|$. Da segunda desigualdade em (6.54), tem-se

$$|e_F^0(t)| \leq R_a, \forall t \geq t_e,$$

onde R_a é dado por

$$R_a := k_{X_{e_a}} \|X_e(0)\| + k_{x_{f_a}} \|x_f(0)\|. \quad (\text{G.28})$$

Visto que $t_1 := \bar{t}_e \geq t_e$, então $|e_F^0(t_1)| \leq \|(e_F^0)_{t,t_1}\| \leq R_a$. Recordando que $|\beta_{\mathcal{U}}(t_1)| \leq \|(\beta_{\mathcal{U}})_{t,t_1}\|$, de (G.25), (G.26) e (G.27), o seguinte majorante pode ser verificado

$$\begin{aligned} \|(\bar{e}_0)_{t,t_1}\| &\leq k_1 |X_e(t_1)| + 2R_a + a_{\Sigma}(k) + \\ &+ 2\|(\beta_{\mathcal{U}})_{t,t_1}\| + 3k\|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|. \end{aligned} \quad (\text{G.29})$$

Colocando-se o sistema descrito por (6.1) e (6.3) na *forma regular*, o estado completo X_e pode ser limitado por

$$\|(X_e)_{t,t_1}\| \leq k_2 |X_e(t_1)| + k_3 \|(\bar{e}_0)_{t,t_1}\|. \quad (\text{G.30})$$

O majorante (G.30) é obtido da solução da equação de estado (na forma regular), com t_1 sendo o instante de tempo inicial. Portanto, de (G.29) e (G.30), tem-se

$$\begin{aligned} \|(X_e)_{t,t_1}\| &\leq k_4 |X_e(t_1)| + 2k_3 R_a + k_3 a_{\Sigma}(k) + \\ &+ 2k_3 \|(\beta_{\mathcal{U}})_{t,t_1}\| + 3k_3 k \|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|, \end{aligned} \quad (\text{G.31})$$

onde $k_4 := k_1 k_3 + k_2$. De acordo com a Proposição 8, obtém-se

$$\|(X_e)_t\| \leq k_5 |X_e(0)| + \Psi_1(\tau), \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (\text{G.32})$$

A partir da soma de (G.31) e (G.32) conclui-se que, $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|(X_e)_t\| &\leq k_6 |z(0)| + k_3 a_\Sigma(k) + \Psi_2(\tau) + \\ &+ 2k_3 \|(\beta_{\mathcal{U}})_t\| + 3k_3 k \|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\|, \end{aligned} \quad (\text{G.33})$$

onde $\|(\beta_{\mathcal{U}})_{t,t_1}\| \leq \|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|$, $|X_e(t_1)| \leq \|(X_e)_{t_1}\|$ e (G.28) foram utilizados. Note que os operadores que aparecem em (6.48) e (6.100) são de ordem $\mathcal{O}(\tau)$. Portanto, a partir de (4.24), (6.9), (6.29) e (6.52), conclui-se que

$$\|(\beta_{\mathcal{U}})_t\|, \|(\bar{\beta}_{\mathcal{U}})_t\| \leq \tau k_7 (\|(X_e)_t\|) + \tau k_8. \quad (\text{G.34})$$

De (G.33) e (G.34), tem-se

$$\begin{aligned} |X_e(t)| &\leq k_9 |z(0)| + k_{10} a_\Sigma(k) + \\ &+ \Psi_3(\tau) + \tau k_{11} k + \tau k_{12}, \end{aligned} \quad (\text{G.35})$$

se $\tau \in (0, \tau_2]$, onde $\tau_2 < \frac{1}{k_3 k_7 (2+3k)}$. Finalmente, lembrando que $e_0 = h_c^T X_e$ então, a partir de (6.42), segue o resultado da Proposição 10, i.e.,

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq k_{13} |z(0)| + k_{14} a_\Sigma(k) + \\ &+ \Psi_5(\tau) + \tau k_{15} k + \tau k_{16}. \end{aligned} \quad (\text{G.36})$$

■

G.4 Prova do Teorema 6.3

O chaveamento da função de monitoração termina em $k = k^*$. De fato, uma vez que $a(k)$ cresce ilimitadamente à medida que $k \rightarrow \infty$, existe um valor finito k_1 para o qual $k \geq k_1$ e $a(k) \geq (2R_a e^{\bar{\lambda} a \bar{t}_e})$, ver (6.94). Seja k^* tão pequeno quanto k_1 , conclui-se que

k^* pode ser associado com $R_0 := |z(0)|$ através de R_a definido em (6.81). Assim sendo, pode-se escrever

$$k^* \leq \mathcal{V}_k(R_0) + k_0, \quad (\text{G.37})$$

onde $k_0 > 0$ é uma constante e $\mathcal{V}_k \in \mathcal{K}_\infty$. A partir da Proposição 10 e para τ suficientemente pequeno

$$|z(t)| \leq \mathcal{V}_z(R_0) + c_z, \quad (\text{G.38})$$

onde $c_z > 0$ é uma constante e $\mathcal{V}_z \in \mathcal{K}_\infty$. Então, se $R > \mathcal{V}_z(R_0) + c_z$, o estado do sistema ficará dentro da bola de raio R para todo $t \geq 0$. Assim, a estabilidade com respeito a bola de raio c_z é garantida para condições iniciais contidas na bola R_0 . Visto que R_0 pode ser escolhida arbitrariamente grande, a estabilidade global é assegurada. Pode-se concluir também que o chaveamento da função de monitoração φ_k termina com a direção de controle correta, caso contrário, o estado z teria de estar em um conjunto residual de ordem τ para todo tempo após o último chaveamento ter ocorrido. De fato, suponha que a última afirmação não seja verdadeira. Então, pelo *argumento da dinâmica reversa*, se a direção de controle estiver correta, foi mostrado que o conjunto residual de ordem τ é globalmente atrativo e as trajetórias teriam de divergir além do limitante (G.38), o que é um absurdo. Portanto, para o caso de direção final de controle incorreta (altamente improvável), o sistema já terá convergido para o conjunto residual de ordem τ , independentemente da bola R_0 . Se no último chaveamento $k = k^*$, a direção de controle for corretamente estimada, o Teorema 6.2 poderá ser aplicado. Isto demonstra o Teorema 6.3. ■

Apêndice H

Algoritmos de Simulação e de Projeto

H.1 Resolução Numérica de Equações Diferenciais

O método de resolução numérica que tem parecido o mais adequado a equações diferenciais com sinais descontínuos é o *método de Euler* que utiliza passo de integração fixo (Hamming 1973, pp. 382–383).

Assim, geralmente se aplicou nesta Dissertação o *método de Euler* com passo de integração suficientemente pequeno para que o resultado da simulação convirja para uma solução numérica que seja coerente com o comportamento dinâmico esperado. Com exceção da Seção 6.3.1, não foram utilizadas aproximações suaves para as discontinuidades para se evitar o surgimento de erros de rastreamento que poderiam ser causados por essas aproximações.

A Tabela H.1 relaciona o intervalo de integração adotado em cada simulação realizada com o *software* Simulink/Matlab 6.5.

TABELA H.1: Passo de integração utilizado em cada simulação.

Simulação	Passo de integração (μs)
seção 5.1.1	0.9
seção 5.2.4	10
seção 5.3.4	5
seção 6.1.1.3	10
seção 6.1.2.7	100
seção 6.3.1	1000

Referências Bibliográficas

- Ambrosino, G., Celentano, G. & Garofalo, F. (1984), ‘Variable structure MRAC systems’, *Int. J. Contr.* **39**(6), 1339–1349.
- Araújo, A. D. (1993), Contribuição à Teoria de Controle Adaptativo por Modelo de Referência e Estrutura Variável: Uma Abordagem Entrada/Saída, PhD thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Atassi, N. A. & Khalil, H. K. (1999), ‘A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **44**, 1672–1687.
- Aubin, J. P. & Cellina, A. (1984), *Differential Inclusions*, Springer-Verlag.
- Bacciotti, A. & Ceragioli, F. (2004), Control loop stabilization of switched systems, Technical report, Dipartimento di Matematica del Politecnico di Torino, C.so Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino - Italy.
- Bartolini, G., Ferrara, A. & Giacomini, L. (2003), ‘A switching controller for systems with hard uncertainties’, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. **50**(8), 984–990.
- Bartolini, G. & Zolezzi, T. (1988), ‘The V.S. approach to the model reference control of nonminimal phase linear plants’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **33**(9), 859–863.
- Bloch, A. M. (2003), *Nonholonomic Mechanics and Control*, Springer-Verlag.
- Bondarev, A. G., Bondarev, S. A., Kostyleva, N. E. & Utkin, V. I. (1985), ‘Sliding modes in systems with asymptotic state observers’, *Autom. Remote Control* **46**(6), 679–684. Pt. 1.
- Byrnes, C. I. & Willems, J. C. (1984), Adaptive stabilization of multivariable linear systems, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Las Vegas, NV, pp. 1574–1577.
- Chen, C. T. (1999), *Linear System Theory and Design*, Oxford.
- Cunha, J. P. V. S. (2004), Controle de Sistemas Multivariáveis Incertos por Realimentação de Saída e Modo Deslizante, PhD thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Hsu, L. (2003), Design of first order approximation filters applied to sliding mode control, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Maui, Hawaii, pp. 3531–3536.

- Drakunov, S. (1993), Sliding mode control of the systems with uncertain direction of control vector, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, pp. 2477–2478.
- Drakunov, S., Özgüner, ., Dix, P. & Ashrafi, B. (1995), ‘ABS control using optimum search via sliding modes’, *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **3**(1), 79–85.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. K. (1998), *Sliding Mode Control: Theory and Applications*, Taylor & Francis Ltd.
- Emelyanov, S. V. (1970), *Theory of variable structure systems*, Nauka.
- Emelyanov, S. V., Korovin, S. K., Nersisian, A. L. & Nisenzon, Y. Y. (1992a), ‘Discontinuous output feedback stabilizing an uncertain MIMO plant’, *Int. J. Contr.* **55**(1), 83–107.
- Emelyanov, S. V., Korovin, S. K., Nersisian, A. L. & Nisenzon, Y. Y. (1992b), ‘Output feedback stabilization of uncertain plants: a variable structure systems approach’, *Int. J. Contr.* **55**(1), 61–81.
- Esfandiari, F. & Khalil, H. K. (1992), ‘Output feedback stabilization of fully linearizable systems’, *Int. J. Contr.* **56**, 1007–1037.
- Filippov, A. F. (1964), ‘Differential equations with discontinuous right-hand side’, *American Math. Soc. Translations* **42**(2), 199–231.
- Frank, P. M., Steven, X. D. & Birgit, K. S. (2000), ‘Current developments in the theory of FDI’, *proceedings of Safe Process* pp. 16–23.
- Fridman, L. & Levant, A. (2002), Higher order sliding modes, *in* Perruquetti & B. J. P., eds, ‘Sliding Mode Control in Engineering’, Marcel Dekker, New York, pp. 53–101.
- Fu, M. & Barmish, B. R. (1986), ‘Adaptive stabilization of linear systems via switching control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **31**(12), 1097–1103.
- Glatzl, A., Murphy, S., Wen, J. & Kopacek, P. (1993), Discrete implementation and adaptation of sliding mode control for robot manipulators, *in* ‘Proc. IEEE Conf. Robotics&Automation’, Vol. 2, Atlanta, pp. 539–544.
- Hamming, R. W. (1973), *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd edn, Dover Publications.
- Hespanha, J. P., Liberzon, D. & Morse, A. S. (2003a), ‘Hysteresis-based switching algorithms for supervisory control of uncertain systems’, *Automatica* **39**, 263–272.
- Hespanha, J. P., Liberzon, D. & Morse, A. S. (2003b), ‘Overcoming the limitations of adaptive control by means of logic-based switching’, *Systems & Contr. Letters* **49**, 49–65.
- Hsu, L. (1990), ‘Variable structure model reference adaptive control using only I/O measurement: General case’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **35**(11), 1238–1243.
- Hsu, L. (1997), ‘Smooth sliding control of uncertain systems based on a prediction error’, *Int. J. on Robust and Nonlinear Control* **7**, 353–372.

- Hsu, L., Araújo, A. D. & Costa, R. R. (1994), ‘Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(1), 4–21.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1989), ‘Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurement: Part I’, *Int. J. Contr.* **49**(2), 399–416.
- Hsu, L., Costa, R. R. & Cunha, J. P. V. S. (2003), ‘Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems’, *Asian Journal of Control* **5**(4), 543–556.
- Hsu, L., Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2002a), Multivariable output-feedback sliding mode control, in X. Yu & J.-X. Xu, eds, ‘Variable Structure Systems: Towards the 21st Century’, Springer-Verlag, pp. 283–313.
- Hsu, L., Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2002b), Unit vector control of multivariable systems, in ‘Preprints of the 15th IFAC World Congress’, Barcelona.
- Hsu, L., Lizarralde, F. & Araújo, A. D. (1997), ‘New results on output-feedback variable structure adaptive control: design and stability analysis’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**(3), 386–393.
- Hsu, L., Oliveira, T. R. & Peixoto, A. J. (2006), ‘Sliding mode control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction’, *9th International Workshop on Variable Structure Systems*. **To be published.**
- Hung, J. Y., Gao, W. & Hung, J. C. (1993), ‘Variable structure control: a survey’, *IEEE Trans. on Ind. Electronics* **40**(1), 2–22.
- Imai, A., Costa, R. & Hsu, L. (2001), Multivariable MRAC using Nussbaum gain, in ‘Proc. 2001 International symposium on adaptive and intelligent systems and control’.
- Imai, A. K., Costa, R. R., Hsu, L., Tao, G. & Kokotovic, P. V. (2004), ‘Multivariable adaptive control using high-frequency gain matrix factorization’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **49**(7), 1152–1157.
- Ioannou, P. A. & Sun, J. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall.
- Ioannou, P. & Tsakalis, K. (1986), ‘A robust direct adaptive controller’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **31**(11), 1033–1043.
- Isidori, A. (1995), *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag.
- Itkis, U. (1976), *Control Systems of Variable Structure*, Wiley.
- Kailath, T. (1980), *Linear Systems*, Prentice Hall.
- Kaloust, J. & Qu, Z. (1997), ‘Robust control design for nonlinear uncertain systems with an unknown time-varying control direction’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**(3), 393–399.
- Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, 3rd edn, Prentice Hall.

- Knowles, G. (1981), *An Introduction to Applied Optimal Control*, Academic Press.
- Levant, A. (1993), ‘Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control’, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* **58**(6), 1247–1263.
- Levant, A. (1998*a*), Arbitrary-order sliding modes with finite time convergence, in ‘Proc. 6th IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems’, Alghero, Sardinia, Italy.
- Levant, A. (1998*b*), ‘Robust exact differentiation via sliding mode technique’, *Automatica* **34**(3), 379–384.
- Levant, A. (1999), Controlling output variables via higher order sliding modes, in ‘Proc. of the European Control Conference’, Karlsruhe, Germany.
- Levant, A. (2001*a*), Higher order sliding modes and arbitrary-order exact robust differentiation, in ‘Proc. of the European Control Conference’, Porto, Portugal, pp. 996–1001.
- Levant, A. (2001*b*), ‘Universal SISO sliding-mode controllers with finite time convergence’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **46**, 1447–1451.
- Levant, A. (2002), Universal SISO output-feedback controller, in ‘Proceedings of IFAC’, Barcelona, Spain, pp. 21–26.
- Levant, A. (2003), ‘Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control’, *Int. J. Contr.* **76**(9), 924–941.
- Liberzon, D. (2001), Control using logic and switching, part 1: switching in systems and control, Handout Notes, CDC’01 Workshop, University of Illinois, at Urbana-Champaign.
- Lu, X. Y. & Spurgeon, S. K. (1998), ‘Output feedback stabilization of SISO nonlinear systems via dynamic sliding modes’, *Int. J. Contr.* **70**(5), 735–759.
- Lu, X. Y. & Spurgeon, S. K. (1999), ‘Output feedback stabilization of MIMO nonlinear systems via dynamic sliding mode’, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* **9**, 275–305.
- Mareels, I. & Polderman, J. W. (1996), *Adaptive systems an introduction*, Birkhauser.
- Morse, A. S. (1982), Recent problems in parameter adaptive control, in ‘Colloquium on Development and Utilization of Mathematical Models in Automat. Contr.’, pp. 733–740.
- Mudgett, D. R. & Morse, A. S. (1985), ‘Adaptive stabilization of linear systems with unknown high frequency gains’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **30**, 549–554.
- Narendra, K. & Annaswamy, A. (1989), *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall.
- Narendra, K., Lin, S. & Valavani, L. (1980), ‘Stable adaptive controller design: Part II’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **25**(3), 570–583.

- Narendra, K. & Valavani, L. (1978), ‘Stable adaptive controller design-direct control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **23**(8), 570–583.
- Nunes, E. V. L. (2004), Controle por modos deslizantes de ordem superior com estabilidade global, Master’s thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Nunes, E. V. L., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2004), ‘Globally stable output-feedback sliding mode control with asymptotic exact tracking’, *Proc. American Contr. Conf.* pp. 638–643.
- Nunes, E. V. L., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2006), ‘Output-feedback sliding mode control for global asymptotic tracking of uncertain systems using locally exact differentiators’, *Proc. American Contr. Conf.* . **To be published.**
- Nussbaum, R. D. (1983), ‘Some results on a conjecture in parameter adaptive control’, *Systems & Contr. Letters* **3**, 243–246.
- Oh, S. & Khalil, H. K. (1995), ‘Output feedback stabilization using variable structure control’, *Int. J. Contr.* **62**(4), 831–848.
- Oh, S. & Khalil, H. K. (1997), ‘Nonlinear output-feedback tracking using high-gain observer and variable structure control’, *Automatica* **33**(10), 1845–1856.
- Oliveira, T. R., Hsu, L. & Peixoto, A. J. (2006), ‘Controle por modos deslizantes de sistemas incertos com grau relativo arbitrário e direção de controle desconhecida’, *Congresso Brasileiro de Automática* . **To be published.**
- Peixoto, A. J., Oliveira, T. R. & Hsu, L. (2006), ‘Sliding mode control of uncertain systems with arbitrary relative degree and unknown control direction: Theory and experiments’, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control* . **To be published.**
- Perruquetti, W. & Barbot, J. P. (2002), *Sliding Mode Control in Engineering*, Marcel Dekker.
- Rantzer, A. (2001), ‘A dual to Lyapunov’s stability theorem’, *Systems & Contr. Letters* **42**, 161–168.
- Rosier, L. (1992), ‘Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field’, *Systems & Contr. Letters* **19**, 467–473.
- Ryan, E. P. (1993), ‘Adaptive stabilization of multi-input nonlinear systems’, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* **3**(2), 169–181.
- Ryan, E. P. (1994), ‘A nonlinear universal servomechanism’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(4), 753–761.
- Sastry, S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice-Hall.
- Sastry, S. S. (1984), ‘Model-reference adaptive control: stability, parameter convergence and robustness’, *IMA J. Math. Contr. Inform.* **1**, 27–66.

- Shyu, K. K., Tsai, Y. W., Yu, Y. & Chang, K. C. (2000), ‘Dynamic output feedback sliding mode design for a class of linear unmatched uncertain systems’, *Int. J. Contr.* **73**(16), 1463–1474.
- Slotine, J. J. E., Hedrick, J. K. & Misawa, E. A. (1987), ‘On sliding observers for nonlinear systems’, *ASME J. Dynamic Systems Measurement and Control* **109**, 245–252.
- Slotine, J. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall.
- Sontag, E. D. (1998), *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2nd edn, Springer-Verlag.
- Sontag, E. D. & Wang, Y. (1995), ‘On characterizations of the input-to-state stability property’, *Systems & Contr. Letters* **24**, 351–359.
- Tao, G. (2003), *Adaptive Control Design and Analysis*, Wiley.
- Teel, A. R. (1996), ‘A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **41**, 1256–1270.
- Utkin, V., Guldner, J. & Shi, J. (1999), *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor & Francis Ltd.
- Utkin, V. I. (1977), ‘Variable structure systems with sliding modes’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **22**, 212–222.
- Utkin, V. I. (1983), ‘Variable structure systems: Present and future’, *Automation and Remote Control* **44**(9), 1105–1120.
- Utkin, V. I. (1992), *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag.
- van der Schaft, A. & Schumacher, H. (2000), *An Introduction to Hybrid Dynamical Systems*, Springer, London.
- Walcott, B. L. & Žak, S. (1988), ‘Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications’, *IEEE Trans. Syst. Man and Cyber.* **18**(1), 88–104.
- Yan, L., Hsu, L., Costa, R. R. & Lizarralde, F. (2003), ‘Variable structure model reference adaptive control for systems with unknown high frequency gain’, *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control* pp. 3525–3530.
- Yan, L. & Xu, J. (2004), ‘A model reference robust control with unknown high frequency gain sign’, *Proc. American Contr. Conf.* pp. 3291–3296.
- Young, K. K. D., Kokotović, P. V. & Utkin, V. I. (1977), ‘A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **22**(6), 931–938.
- Žak, S. H. & Hui, S. (1993), ‘Output feedback variable structure controllers and state estimators for uncertain/nonlinear dynamic systems’, *IEE Proc.-D.* **140**(1), 41–50.

- Zergeroglu, E., Dawson, D. M., de Queiroz, M. S. & Behal, A. (1999), Vision-based nonlinear tracking controllers with uncertain robot-camera parameters, *in* ‘Proc. IEEE/ASME Int. Conf. Advanced Intelligent Mechatronics’, Atlanta, USA, pp. 854–859.
- Zhang, Y., Wen, C. & Soh, Y. C. (2000), ‘Adaptive backstepping control design for systems with unknown high-frequency gain’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **45**(12), 2350–2354.