

SOBRE A ESTABILIZAÇÃO GLOBAL DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA
EQUAÇÃO DE RICCATI DEPENDENTE DO ESTADO

Lilian Kawakami Carvalho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

Prof. Amit Bhaya, Ph.D.

Prof. José Cláudio Geromel, Docteur d'Etat

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 2005

CARVALHO, LILIAN KAWAKAMI

Sobre a Estabilização Global de Sistemas Não Lineares via Equação de Riccati Dependente do Estado [Rio de Janeiro] 2005

xv, 150 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Elétrica, 2005)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Equação de Riccati Dependente do Estado
2. Controle não linear
3. Estabilização
4. Função de Lyapunov

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais Itajaci e Helena,
meus irmãos Laura e Rubens

Agradecimentos

Ao meu orientador Liu Hsu pelo seu apoio, disponibilidade, paciência e amizade durante todo este trabalho.

Ao Prof. Fernando Lizarralde e Prof. Ramon R. Costa pela ajuda e atenção durante o desenvolvimento da tese.

Ao pessoal do laboratório GSCAR que sempre procuraram contribuir positivamente para o sucesso deste trabalho, em especial ao Tiago Roux, Josiel Gouvêa, Antonio Leite, Moisés Baceda e Alexandro Jacoud.

Aos amigos pelo companheirismo e solidariedade e em especial ao Wanderley Fernandes.

A todos que de alguma forma que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho, o meu muito obrigado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SOBRE A ESTABILIZAÇÃO GLOBAL DE SISTEMAS NÃO LINEARES VIA EQUAÇÃO DE RICCATI DEPENDENTE DO ESTADO

Lilian Kawakami Carvalho

Novembro/2005

Orientador: Liu Hsu

Programa: Engenharia Elétrica

Nesta tese considera-se a propriedade de estabilidade global de sistemas não-lineares com controle de regulação baseado na solução de uma equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE). Sabe-se que tal método fornece uma solução do controle ótimo quadrático apenas em uma vizinhança do ponto de regulação e portanto a estabilidade local assintótica é obtida. Entretanto, a estabilidade global assintótica não é em princípio garantida formalmente, exceto em casos muito restritos. Apesar disso, o desempenho do controle SDRE é surpreendentemente eficiente em muitos casos, mesmo que esses não estejam dentro das categorias restritas já mencionadas. Neste trabalho, investiga-se primeiramente, por simulação, o potencial do controle SDRE em estabilizar sistemas fortemente não-lineares, incluindo um sistema de levitação magnética, pêndulos invertido (com base) linear ou rotativa e um veículo espacial. Este controle foi implementado experimentalmente para um pêndulo invertido rotativo. Os resultados experimentais indicam a melhora significativa de robustez obtida com o controle SDRE em comparação com um regulador linear. Como tópico adicional, propõe-se um método para modificar a lei de controle de modo a poder garantir teoricamente a estabilidade exponencial global de uma classe de sistemas não lineares. A modificação é baseada em uma Função de Lyapunov de Controle (CLF) especial denominada “Função de Lyapunov de Controle Exponencial”.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ON THE GLOBAL STABILIZATION OF NONLINEAR SYSTEMS VIA
STATE-DEPENDENT RICCATI EQUATION

Lilian Kawakami Carvalho

November/2005

Advisor: Liu Hsu

Department: Electrical Engineering

In this dissertation, we consider the property of global stability of nonlinear systems with regulation control law based on the solution of a State Dependent Riccati Equation (SDRE). Such method is known to yield a solution for the quadratic optimal control problem only in a small neighborhood of the regulation point. However, no formal guarantee of the global asymptotic stability has been obtained to date, except in certain rather restrictive categories. In spite of this, the performance of the SDRE controller is surprisingly efficient in many cases which do not necessarily fall in the restrictive categories just mentioned. In this work, we first investigate, by simulation, the potential of the SDRE control to globally stabilize strongly nonlinear systems, including a magnetic levitation system, a conventional (cart-pendulum) and a rotary pendulum, and an spacecraft. A real-time implementation of the SDRE control for a rotary inverted pendulum is obtained. The experimental results indicate the robustness improvement of the SDRE controller with respect to a linear stabilizing control law. As a further topic, a method for modifying the SDRE control law is proposed for a certain class of systems so that global exponential stability is theoretically guaranteed. The method is based on a special Control Lyapunov Function (CLF) denominated Exponential Control Lyapunov Function.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiv
Nomenclatura	xv
1 Introdução	1
1.1 Revisão Bibliográfica	2
1.2 Objetivos	5
1.3 Organização da Tese	5
2 Controle Baseado na Equação de Riccati Dependente do Estado	7
2.1 Solução do Problema de Controle Ótimo Linear Quadrático	8
2.2 Controle Ótimo Dependente do Estado	9
2.3 O Método SDRE	11
2.3.1 Forma Linear Dependente do Estado	11
2.4 Resumo da Técnica SDRE	13
3 Análise de Estabilidade do Sistema Controlado via SDRE	14
3.1 Estabilidade Local do Controlador SDRE	15
3.2 Existência de Estabilização com Controle SDRE	18
3.3 Estabilidade Global de Sistemas de Segunda Ordem Usando Controle SDRE	20
3.4 Conclusão	26
4 Sistemas Subatuados	27
4.1 Controle a Estrutura Variável com Setor Deslizante	28
4.1.1 Controle a Estrutura Variável Dependente do Estado com Setor Deslizante	31
4.2 Carro-Pêndulo Invertido	32
4.2.1 Resultados de Simulações: Realizando <i>Swing up</i>	33
4.2.1.1 Carro-Pêndulo Simplificado	33
4.2.1.2 Carro-Pêndulo Completo	41
4.2.1.3 Sistema Virtual Carro-Pêndulo	43
4.3 Pêndulo Invertido Rotativo	44
4.3.1 Descrição do Sistema	44
4.3.1.1 Modelagem do Sistema	47

4.3.1.2	Pêndulo Invertido Rotativo Quanser	48
4.3.2	Resultados de Simulação: Realizando <i>Swing up</i>	49
4.3.2.1	Modelo Virtual	53
4.3.3	Resultados Experimentais	53
4.4	Conclusão	64
5	A Estabilização global de Sistemas com Controle SDRE	65
5.1	Estabilização de Sistemas no Conjunto Satisfatório	66
5.1.1	Noção Básica de Controle Satisfatório	66
5.1.2	Controle Satisfatório Robusto	68
5.1.3	Projeção do Controlador SDRE no Conjunto Satisfatório	70
5.1.4	Realização da Projeção no Conjunto Satisfatório	73
5.2	Estabilização Exponencial	75
5.2.1	Sistemas com CLF exponencial	75
5.2.2	Sistemas Não Lineares na Forma Normal	78
5.2.2.1	Motivação	78
5.2.2.2	Transformação para a Forma Normal	81
5.2.2.3	Projeto do Sinal de Controle Exponencialmente Estabilizante	86
5.2.3	Controle Exponencialmente Estabilizante	89
5.3	Método do <i>Backstepping</i>	91
5.4	Exemplos	95
5.4.1	Comparação entre <i>Backstepping</i> e SDRE	95
5.4.2	Estabilização Exponencial de Sistemas com Realimentação Estrita Usando Controle SDRE	99
5.4.2.1	Comparação entre <i>Backstepping</i> ótimo e SDRE	106
5.5	Conclusão	111
6	Comparação entre os Controladores: Exemplos de Aplicações	112
6.1	Aspectos da Simulação	112
6.2	Levitador Magnético	113
6.2.1	Descrição do sistema	113
6.2.2	Mudança de variáveis	115
6.2.3	Resultados de Simulações	116
6.3	Veículo Espacial	122
6.3.1	Veículo Espacial Sem Incerteza no Modelo	123
6.3.2	Veículo Espacial com Perturbação	128
6.4	Conclusão	129
7	Discussão e Conclusões Gerais	133
	Apêndices	135
A	Equação Algébrica de Riccati	135
B	Controle Ótimo Linear Quadrático	141
B.1	Solução do Problema de Otimização sem Restrição	141
B.2	Prova do Teorema 2.1	143

Lista de Figuras

3.1	Plano de fase.	17
3.2	Conjuntos de níveis com e sem <i>star-convexity</i>	19
4.1	Diagrama esquemático do carro-pêndulo invertido.	32
4.2	Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SDRE realizando <i>swing up</i> : estados do sistema, sinal de controle e plano de fase.	36
4.3	Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SDRE realizando <i>swing up</i> : distância percorrida e velocidade do carrinho.	37
4.4	Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SDRE realizando <i>swing up</i> com ruído de medição: estados do sistema, sinal de controle e plano de fase.	38
4.5	Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador via SDRE realizando <i>swing up</i> com ruído de medição: distância percorrida e velocidade do carrinho.	39
4.6	Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SSVSC realizando <i>swing up</i> : estados do sistema, sinal de controle e plano de fase.	40
4.7	Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SSVSC realizando <i>swing up</i> : representação do setor deslizante.	41
4.8	Carro-pêndulo realimentado com o controlador SDRE realizando <i>swing up</i> : estados do sistema.	42
4.9	Carro-pêndulo realimentado com o controlador SDRE realizando <i>swing up</i> : sinal de controle.	43
4.10	Carro-pêndulo visualizado pelo <i>toolbox virtual reality</i> do <i>Matlab</i>	43
4.11	Pêndulo de Furuta.	44
4.12	Esquema do pêndulo invertido rotativo.	45
4.13	Pêndulo invertido rotativo fabricado pela Quanser.	49
4.14	Pêndulo rotativo realimentado com o controlador SDRE: resposta do sistema; (a) θ (rad); (b) α (rad); (c) $\dot{\theta}$ (rad/s); (d) $\dot{\alpha}$ (rad/s).	50
4.15	Pêndulo rotativo realimentado com o controlador SDRE: sinal de controle.	51
4.16	Pêndulo rotativo realimentado com o controlador SDRE (linha sólida) e LQR (linha tracejada) com saturação $[-1, 1]$: resposta do sistema; (a) θ (rad); (b) α (rad); (c) $\dot{\theta}$ (rad/s); (d) $\dot{\alpha}$ (rad/s);.	52
4.17	Pêndulo rotativo realimentado com o controlador SDRE (linha sólida) e LQR (linha tracejada) com saturação $[-1, 1]$: sinal de controle.	52
4.18	Imagem do simulador 3D do pêndulo invertido rotativo.	53

4.19	Algoritmo de Kleinman.	55
4.20	Diagrama Simulink: experiência do pêndulo invertido.	56
4.21	Diagrama Simulink: representação o modelo não linear do sistema e os ganhos do controlador SDRE.	57
4.22	Diagrama Simulink: cálculo do P_{i+1}	59
4.23	Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE (linha sólida) e LQR (linha tracejada) com $x_0 = [0 \ 20^0 \ 0 \ 0]^T$: resposta do sistema; (a) θ (graus); (b) α (graus); (c) $\dot{\theta}$ (graus/s); (d) $\dot{\alpha}$ (graus/s).	60
4.24	Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE (linha sólida) e LQR (linha tracejada) com $x_0 = [0 \ 20^0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle.	61
4.25	Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE com $x_0 = [0 \ 20^0 \ 0 \ 0]^T$: ganho do controlador; (a) k_1 ; (b) k_2 ; (c) k_3 ; (d) k_4	61
4.26	Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador LQR com $x_0 = [-40^0 \ 30^0 \ 0 \ 0]^T$: resposta do sistema; (a) θ (graus); (b) α (graus); (c) $\dot{\theta}$ (graus/s); (d) $\dot{\alpha}$ (graus/s).	62
4.27	Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE com $x_0 = [-40^0 \ 30^0 \ 0 \ 0]^T$: resposta do sistema; (a) θ (graus); (b) α (graus); (c) $\dot{\theta}$ (graus/s); (d) $\dot{\alpha}$ (graus/s).	63
4.28	Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE com $x_0 = [-40^0 \ 30^0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle.	63
5.1	Conjunto satisfatório no espaço de controle 2-D.	72
5.2	Margem de ganho no espaço de controle.	73
5.3	Representação em diagrama de blocos do sistema representado pelas equações (5.94)–(5.95).	92
5.4	Representação em diagrama de blocos do sistema representado pelas equações (5.94)–(5.95) introduzindo o termo $-\phi(\eta)$	93
5.5	Representação em diagrama de blocos do sistema representado pelas equações (5.94)–(5.95) com "backstepping" do termo $-\phi(\eta)$ através do integrador.	93
5.6	Comparação do controlador <i>backstepping</i> com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.106): estados do sistema.	97
5.7	Comparação do controlador <i>backstepping</i> com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.106).	97
5.8	Comparação do controlador <i>backstepping</i> com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.106) com os parâmetros da tabela 5.1: estados do sistema.	98
5.9	Comparação do controlador <i>backstepping</i> com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.106) com os parâmetros da tabela 5.1.	98
5.10	Comparação do controlador SDRE/EE com o controlador SDRE e <i>backstepping</i> aplicado ao sistema (5.106) com os parâmetros da tabela 5.1.	102
5.11	Comparação do controlador SDRE/EE com o controlador SDRE e <i>backstepping</i> aplicado ao sistema (5.106) com os parâmetros da tabela 5.1: CLF V , V_p é a derivada de V , $\Delta = \ u_{SDRE} - u_{SDRE/EE}\ $	102
5.12	Sistema 5.116 realimentado com os controladores SDRE e SDRE/EE: estados do sistema.	105

5.13	Sistema 5.116 realimentado com os controladores SDRE e SDRE/EE: sinal de controle, CLF V , $\Delta = \ u_{SDRE} - u_{SDRE/EE}\ $, V_p a derivada de V .	105
5.14	Comparação do controlador <i>backstepping</i> ótimo com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.123): estados do sistema.	107
5.15	Comparação do controlador <i>backstepping</i> ótimo com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.123).	108
5.16	Sistema (5.123) realimentado com o controlador SDRE/EE.	109
5.17	Sistema do exemplo (5.123) realimentado com o controlador SDRE/EE: CLF V , V_p a derivada de V , $\Delta = \ u_{SDRE} - u_{SDRE/EE}\ $.	109
5.18	Comparação do controlador LQR com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.123).	110
5.19	Comparação do controlador LQR com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.123).	110
6.1	Representação esquemática da simulação.	113
6.2	Foto de um levitador magnético.	114
6.3	Representação esquemática do levitador magnético.	114
6.4	Levitador magnético com o controlador SDRE e condição inicial $x_1(0)$ de $\pm 0.004\text{m}$: y_1 posição da esfera, x_1 e x_2 estados do sistema, U sinal de controle.	117
6.5	Levitador magnético com o controlador satisfatório: y_1 posição da esfera, x_1 e x_2 estados do sistema, U sinal de controle.	118
6.6	Levitador magnético com o controlador satisfatório: x_1 e x_2 estados do sistema, u sinal de controle, Δ .	119
6.7	Levitador magnético com o controlador satisfatório: V CLF, V_p derivada de V .	119
6.8	Levitador magnético com o controlador SDRE/EE: x_1 e x_2 estados do sistema, u sinal de controle.	120
6.9	Levitador magnético realimentado com o controlador SDRE/EE: V CLF, V_p derivada de V , Δ .	121
6.10	Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório: estados do sistema.	124
6.11	Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório: sinal de controle.	125
6.12	Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório: CLF (V), derivada de V (V_p), $\Delta = [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3]^T$.	125
6.13	Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório com $V = x^T P_0 x$: estados do sistema.	126
6.14	Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório com $V = x^T P_0 x$: sinal de controle.	127
6.15	Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório com $V = x^T P_0 x$: CLF (V), derivada de V (V_p), $\Delta = [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3]^T$.	127
6.16	Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador SDRE: estados do sistema.	128
6.17	Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador SDRE: sinal de controle.	129

6.18	Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador satisfatório robusto: estados do sistema.	130
6.19	Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador satisfatório robusto: sinal de controle.	130
6.20	Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador satisfatório robusto: (a) CLF (V), (b) derivada de V (V_p).	131
6.21	Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador satisfatório robusto: Δ	131

Lista de Tabelas

4.1	Valores dos parâmetros utilizados na simulação do carro-pêndulo. . . .	33
4.2	Parâmetros da equação de Riccati da simulação do carro-pêndulo. . . .	35
4.3	Parâmetros da equação de Riccati da simulação do carro-pêndulo. . . .	42
4.4	Valores dos parâmetros utilizados na simulação do pêndulo invertido rotativo.	49
4.5	Parâmetros da equação de Riccati da simulação do pêndulo rotativo. . .	50
4.6	Variáveis do diagrama 4.20.	57
4.7	Parâmetros do controlador LQR na implementação do pêndulo rotativo da Quanser.	59
4.8	Parâmetros da equação de Riccati na implementação do pêndulo rotativo da Quanser.	60
5.1	Novos parâmetros do controlador SDRE utilizados na simulação do sistema (5.106)	97
5.2	Parâmetros utilizados na simulação do sistema	104
5.3	Parâmetros utilizados na simulação do sistema 5.123	107
6.1	Parâmetros do levitador magnético.	115
6.2	Parâmetros da equação de Riccati na simulação do levitador magnético. .	116
6.3	Parâmetros utilizados na equação de Riccati.	123

Nomenclatura

LQR	Regulador Linear Quadrático (<i>Linear Quadratic Regulator</i>).
SDRE	Equação de Riccati Dependente do Estado (<i>State-dependent Riccati Equation</i>).
HJE	Equação de Hamilton-Jacobi (<i>Hamilton-Jacobi Equation</i>).
SSVSC	Controle a Estrutura Variável com Setor Deslizante (<i>Sliding-sector Variable Structure Control</i>).
CLF	Função de Lyapunov de Controle (<i>Control Lyapunov Function</i>).

Capítulo 1

Introdução

Numerosas técnicas foram criadas para sintetizar leis de controle para sistemas não lineares. Essas técnicas incluem linearização por Jacobiano, *feedback linearization* (Marino & Tomei 1995), controle passivo (Beard, Young & Stirling 2001), *backstepping* recursivo (Krstić, Kanellakopoulos & Kokotović 1995), controle por modo deslizante (Slotine & Li 1991) e controle adaptativo (Khalil 2002). Entretanto, a lei de controle é geralmente determinada por algum método de análise. Isto é verdade para vários métodos baseados em funções de Lyapunov, sendo a estabilidade em malha fechada determinada pela teoria de estabilidade de Lyapunov. Esses métodos resultam em controladores não muito intuitivos para a implementação prática.

Erdem & Alleyne (2004) argumentam que, até a publicação do trabalho de (Cloutier, D’Souza & Mracek 1996), não se dispunha de um bom método de projeto que permitisse estabelecer um compromisso entre erro de estado e o esforço do controle para sistemas não lineares, como o método do regulador linear quadrático (*Linear Quadratic Regulator* – LQR) (Anderson & Moore 1990, Zhou, Doyle & Glover 1996). Desde a sua concepção, na década de 1960, o método LQR tem sido muito pesquisado (Lublin & Athans 1996). O LQR nada mais é do que a solução de um problema convexo de otimização por mínimos quadrados que tem algumas propriedades muito interessantes. Em outras palavras, o controle ótimo automaticamente assegura um sistema em malha fechada estável e é simples de ser calculado. O objetivo do controle ótimo pode essencialmente ser visto como a escolha de um controle que traga o sistema à sua posição de equilíbrio tão rápido quanto possível minimizando o erro de estado e sem usar esforço

de controle excessivo. Este método tem sido usado com sucesso em diversas aplicações, entretanto sua aplicabilidade é praticamente restrita a sistemas lineares ou linearizados.

Recentemente Cloutier (1996), dentro do espírito do regulador LQR, aplicou a equação de Riccati a sistemas não lineares desenvolvendo a metodologia da Equação de Riccati Dependente do Estado (*State Dependent Riccati Equation* – SDRE). O nome SDRE vem da construção da lei de controle, esta construção utiliza a solução da Equação Algébrica de Riccati, que depende do estado.

Nesse projeto, primeiramente um sistema linear dependente do estado, também conhecido como “forma pseudolinear”, é obtido do modelo do sistema não linear. Os parâmetros do controle são determinados pela solução da Equação de Riccati ponto a ponto no espaço de estado. A lei de controle é, em geral, uma solução subótima de horizonte infinito.

O controle SDRE pode ser implementado de forma sistemática. Contudo, caso não seja possível obter a solução da Equação de Riccati de forma analítica, torna-se necessário resolvê-la a todo instante com uma frequência relativamente alta. Isto só é possível com o alto poder computacional obtido com os computadores atuais, o que tornou esta técnica mais atrativa. Este método está sendo usado em problemas de interesse atual como controle de helicóptero (Wan & Bogdanov 2001), míssil guiado (Palumbo & Jackson 1999), filtros não lineares (Mracek, Cloutier & D’Souza 1996), controle do pêndulo de Furuta (Furuta 2003) dentre outros.

1.1 Revisão Bibliográfica

No artigo (Cloutier et al. 1996), é introduzida a técnica da Equação de Riccati Dependente do Estado, que representa um meio sistemático e efetivo de projeto de controladores não lineares, observadores e filtros. Nesse artigo, expõe-se um panorama geral sobre várias técnicas de projeto SDRE, como reguladores não lineares via SDRE, H_∞ não linear via SDRE, H_2 não linear via SDRE e filtros não lineares via SDRE. Infelizmente, o controlador SDRE produz uma solução em malha fechada que só garante estabilidade assintótica local para o sistema.

Existem alguns trabalhos que buscam analisar as propriedades globais de estabilidade dos sistemas. No artigo (Shamma & Cloutier 2003), apresentou-se que, se existir

alguma realimentação estabilizante que admite uma função de Lyapunov com conjuntos de nível *star-convex* (Huang & Lu 1996), então existe sempre uma representação do sistema tal que o controle baseado no SDRE é globalmente estabilizante e a matriz dinâmica do sistema em malha fechada em uma representação dependente do estado é ponto a ponto Hurwitz. Infelizmente, uma hipótese chave é a existência de uma lei de realimentação estabilizante para a qual uma função de Lyapunov especial é disponível. Assim, o resultado não é construtivo e não permite levar a um controle SDRE globalmente estabilizante.

Já o artigo (Erdem & Alleyne 2004), realiza uma análise sobre a estabilidade global para sistemas de segunda ordem sob controle SDRE. Nesse artigo, é mostrado que por uma parametrização conveniente da matriz $A(x)$, a Equação de Riccati Dependente do Estado pode ser resolvida analiticamente. Com o resultado, obtém-se, de forma analítica, a equação do sistema em malha fechada. A análise da estabilidade global é desenvolvida utilizando a análise de Lyapunov e o princípio de LaSalle. Desta maneira, pode-se chegar a uma condição para estabilidade assintótica global do sistema em malha fechada.

Entretanto, para um sistema com dimensão maior que dois, a análise de estabilidade é inviável devido à dificuldade de resolver explicitamente a Equação de Riccati Dependente do Estado. Tentando superar este problema, propôs-se no artigo (Curtis & Beard 2002) combinar o SDRE com o controle satisfatório (*satisficing control*). A estratégia de controle satisfatório é baseada na teoria de decisão satisfatória (Beard et al. 2001, Curtis & Beard 2001) e define um conjunto de leis de controle assintoticamente estabilizantes. Essas leis são parametrizadas para atender de forma instantânea uma desigualdade entre uma função que quantifica o benefício e outra que quantifica o custo. Ao aplicar teoria satisfatória, uma lei de controle baseada em uma Função de Lyapunov de Controle (*Control Lyapunov Function - CLF*) (Artstein 1983, Sontag 1983) garante a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Essencialmente, o controle baseado em SDRE é projetado ponto a ponto no conjunto satisfatório. Assim sendo, gera-se um conjunto de controle dependente do estado que torna o sistema em malha fechada estável com respeito a uma CLF conhecida.

No artigo (Suzuki, Furuta & Pan 2003), foram combinados o método de controle ótimo dependente do estado e a técnica de estrutura variável por setor deslizante

(*Sliding-Sector Variable Structure Control* – SSVSC), propondo um método de controle não linear que resulta em uma grande robustez contra distúrbios que os autores alegam ser globalmente estável. O setor deslizante é definido como um subconjunto no espaço do estado, dentro do qual alguma norma do estado diminui com entrada zero do controle. No artigo (Furuta & Pan 2000), um setor deslizante invariante é definido como um tipo de controle deslizante cuja norma, com alguma lei do controle, continua decrescendo dentro do setor e o setor é um subconjunto invariante. Em outras palavras, o estado não se moverá para fora do setor se o estado inicial estiver dentro do setor ou depois que o estado atinge o setor por alguma lei de controle.

O controlador a estrutura variável com o setor deslizante invariante assegura que o estado se move de fora para dentro do setor em um tempo finito e depois desse instante permanece dentro do setor. Assegura em particular que a norma do estado continua decrescendo no espaço do estado com uma lei de controle suave a estrutura variável. O controle resultante é quadraticamente estável. O controlador obtido nesse artigo apresenta bom desempenho sem *chattering*.

A junção dos dois métodos é utilizada para modificar um problema não linear em um sistema de comportamento linear e para obter uma solução de Riccati necessária para calcular o setor deslizante do SSVSC. A eficiência do controlador foi apresentada em (Suzuki et al. 2003) por simulação e experimento no controle de *swing-up*/estabilização de um pêndulo de Furuta. O controle resultante do pêndulo permite uma única lei de controle juntando o *swing-up* e a estabilização. Diferente de quase todos os métodos tradicionais que precisam de um projeto de controle para realizar o *swing-up* e de outro para estabilizar separadamente, segundo esse artigo a técnica apresentada não requer o chaveamento. Entretanto não foi demonstrado formalmente um resultado global de estabilidade.

Outro artigo interessante é (Singh & Yim 2003), que considera a estabilização de um protótipo aeroelástico da asa com não linearidade estrutural. Este modelo é tradicionalmente usado para as análises experimentais e teóricas do comportamento aeroelástico bidimensional. Um controle simples foi usado para a supressão da vibração. Outra lei de controle utilizando o método da Equação de Riccati Dependente do Estado foi projetada. Esta lei de controle não linear realiza regulação assintótica do movimento de arfagem para o equilíbrio do sistema com deflexões zero. Verifica-se que a lei linear

do controle, baseada no modelo linearizado do modelo aeroelástico, não estabiliza o sistema não linear. Já, o sistema de controle não linear que usa o método de SDRE produz, ao menos, alguma região de estabilidade perto da origem no espaço de estado. Esse artigo mostra que, em malha fechada, o controlador projetado é eficaz na supressão da vibração. Ao contrário dos controladores lineares, o método SDRE produz um controlador que estabiliza o sistema.

1.2 Objetivos

Pretende-se primeiramente investigar o desempenho do controle SDRE para diversos sistemas não-lineares cuja estabilização não seja estritamente local e possivelmente global para quase todas as condições iniciais. Sistemas subatuados como o pêndulo invertido não são linearmente estabilizáveis a não ser localmente, podendo resultar em um domínio de estabilidade muito pequeno. Um dos objetivos aqui é verificar a possibilidade do controlador SDRE propiciar um sistema com domínio de estabilidade maior ou mesmo resultar em estabilidade global prática, por exemplo, realizando o *swing-up* do pêndulo invertido. Inicialmente, a avaliação da estabilidade deverá ser feita por simulação, utilizando diversas plantas típicas. Em seguida, será realizada a implementação prática e avaliação do controle SDRE em um experimento real com um pêndulo invertido rotativo. A intenção aqui é conhecer a dificuldade da implementação em tempo real de um controlador desse tipo bem como de avaliar seu desempenho experimental. Além desses aspectos, pretende-se contribuir para desenvolver modificações que permitam que o controle SDRE modificado leve à estabilização global do sistema.

1.3 Organização da Tese

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No **Capítulo 2**, faz-se uma revisão bibliográfica, situando os aspectos a serem aqui tratados. Também são apresentados os conceitos básicos do método SDRE.

No **Capítulo 3**, apresentam-se alguns resultados básicos existentes na literatura sobre a estabilidade do controlador SDRE.

No **Capítulo 4** avalia-se a estabilização global do controle SDRE aplicado em

sistemas subatuados, como o pêndulo invertido rotativo e o carro-pêndulo realizando o *swing up*. São apresentados simulações e resultados experimentais.

No **Capítulo 5**, apresentam-se métodos de estabilização global com o controlador SDRE em sistemas não lineares. Primeiramente, faz-se uma revisão do Controle Satisfatório (Curtis & Beard 2001) e suas propriedades. Algumas destas propriedades são utilizadas para garantir a estabilidade global de sistemas não lineares controlados via Equação de Riccati Dependente do Estado.

Posteriormente, um novo método baseado em CLF exponencial permite encontrar uma lei de controle a partir do método SDRE garantindo estabilidade global exponencial de uma classe de sistemas. Em seguida, mostra-se que a solução da equação de Riccati para a classe de sistemas não lineares representados na forma normal resulta em uma CLF exponencial. Apresentam-se ainda exemplos para ilustrar esse novo método comparando-o com o método de *backstepping*.

No **Capítulo 6**, comprovam-se, por meio de simulações, os resultados teóricos para o controlador SDRE apresentados no Capítulo 5. Os sistemas, levitador magnético e veículo espacial, ilustram os métodos de estabilização global do controlador SDRE aqui considerados, em particular, aquele utilizando CLF exponencial proposto neste trabalho.

O **Capítulo 7** encerra este trabalho com conclusões gerais e propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Controle Baseado na Equação de Riccati Dependente do Estado

O controle baseado na Equação de Riccati Dependente do Estado (*State-Dependent Riccati Equation* – SDRE), denominado controlador SDRE, foi proposto e elaborado inicialmente no final da década de 90 por J. R. Cloutier através da publicação do artigo (Cloutier 1997).

O método SDRE pode ser pensado como uma “versão não linear” do projeto de controlador LQR, em que as matrizes de estado e de controle do sistema, respectivamente, $A(x)$, $B(x)$ e as matrizes de penalidade, de erro de estado e de magnitude de controle, respectivamente $Q(x)$, $R(x)$ são funções dos estados. Portanto, a solução da Equação Algébrica de Riccati $P(x)$ é também dependente do estado, assim como a lei de controle $u(x)$. A principal vantagem oferecida pelo SDRE é a flexibilidade de projeto no ajuste das matrizes de penalidades do estado $Q(x)$ e da entrada $R(x)$, como funções do estado.

Este capítulo apresenta os conceitos básicos necessários para a formulação da técnica SDRE bem como uma discussão sobre as características do SDRE como método de controle não linear.

2.1 Solução do Problema de Controle Ótimo Linear Quadrático

Considere-se o seguinte sistema linear invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.2)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, o par (A, B) é controlável e o par (A, C) é observável.

O problema é encontrar um sinal de controle $u(t)$ que estabilize o sistema realimentado e que minimize

$$J(x, u) = \int_0^\infty [x^T(t)C^T Cx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (2.3)$$

Este problema pode ser visto como um problema de otimização com restrição.

Problema: Minimizar $J(x, u)$ sujeita a $Ax(t) + Bu(t) - \dot{x}(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Este problema pode ser resolvido, introduzindo-se o chamado multiplicador de Lagrange, que o transforma em um problema de otimização sem restrição.

$$J(x, u) = \int_0^\infty L(x, u, \nu) dt \quad (2.4)$$

onde $L(x, u, \nu) := x^T(t)C^T Cx(t) + u^T(t)Ru(t) + \nu^T(t) [Ax(t) + Bu(t) - \dot{x}(t)]$ e $\nu(t)$ é o multiplicador de Lagrange.

A equação (2.4) é resolvida como apresentado no apêndice B, e o seguinte Teorema pode ser formulado:

Teorema 2.1 (Zhou et al. 1996) *O sinal de controle $u(t) = -Kx(t)$, que minimiza o custo $J(x, u)$, é dada por $u(t) = -R^{-1}B^T X x(t)$, onde X é a solução da seguinte equação algébrica de Riccati*

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + C^T C = 0$$

Além disso, $A - BR^{-1}B^T X$ é estável

Prova: ver apêndice B.2

2.2 Controle Ótimo Dependente do Estado

Para um sistema não linear suave¹ descrito pela seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = \bar{f}(x, u, t), \quad (2.5)$$

o seguinte índice de desempenho é considerado

$$V(x(t), u(\cdot), t) := \int_t^T \phi(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \varphi(x(T)), \quad (2.6)$$

onde x, u e t , respectivamente, são as variáveis de estado, entrada e tempo, e supõe-se que f, ϕ e φ são continuamente diferenciáveis para todos os argumentos. Considere T , finito, sendo especificado como o tempo final. O problema ótimo consiste em encontrar um sinal de controle $u^*(t), t \in [t, T]$ que minimize V , ou seja, que satisfaça o seguinte índice de desempenho ótimo

$$V^*(x(t), t) = \min_{u(t)} \left[\int_t^T \phi(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \varphi(x(T)) \right], \quad (2.7)$$

onde $V^*(x(t), t)$ é obtida pela solução da Equação de Hamilton-Jacobi (*Hamilton-Jacobi Equation* – HJE) (Anderson & Moore 1990)

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} = -\min_{u(t)} \left[\phi(x(t), u(t), t) + \left(\frac{\partial V^*}{\partial x} \right)^T \bar{f}(x(t), u(t), t) \right]. \quad (2.8)$$

Geralmente, é impossível obter a solução analítica da equação (2.8). Entretanto, se o sistema da equação (2.5) é restrito para uma classe de sistemas não lineares afins no controle e ϕ for escolhida como uma forma quadrática, a HJE pode ser resolvida por

¹Sejam $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^l$ conjuntos abertos. Um mapeamento $f : U \mapsto V$ é chamado de suave, se todas as derivadas parciais de qualquer ordem existem e são contínuas (Sastry 1999).

aproximação (Suzuki et al. 2003). Considere-se o sistema:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.9)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$. Assume-se que f e g são suficientemente suaves ($f(x) \in C^k$ e $g(x) \in C^k$) e o sistema tem o ponto de equilíbrio na origem, i.e., $f(0) = 0$. Estabelecendo $\phi(x(t), u(t), t) \rightarrow x^T Q(x)x + u^T R(x)u$ na equação (2.6), obtém-se:

$$V^*(x) = \min_{u(t)} \int_0^\infty (x^T Q(x)x + u^T R(x)u) dt, \quad (2.10)$$

onde $Q(x) \geq 0$ e $R(x) > 0$ são suficientemente suaves ($Q(x) \in C^k$ e $R(x) \in C^k$), de modo que $V(x)$ é continuamente diferenciável. Portanto, para o sistema (2.9), os termos na equação (2.8) podem ser transformados em:

$$\begin{aligned} & x^T Q(x)x + u^T R(x)u + \left(\frac{\partial V^*}{\partial x} \right)^T (f(x) + g(x)u) = \quad (2.11) \\ & = x^T Q(x)x + \left(\frac{\partial V^*}{\partial x} \right)^T f(x) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V^*}{\partial x} \right)^T g(x) R^{-1}(x) g(x)^T \frac{\partial V^*}{\partial x} + \\ & \quad + \left(u + \frac{1}{2} R^{-1}(x) g(x)^T \frac{\partial V^*}{\partial x} \right)^T R(x) \left(u + \frac{1}{2} R^{-1}(x) g(x)^T \frac{\partial V^*}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Portanto, o controle ótimo é dado por

$$u = -\frac{1}{2} R^{-1}(x) g^T(x) \frac{\partial V^*}{\partial x}. \quad (2.12)$$

Em geral, utiliza-se a solução não negativa da equação HJE:

$$\left(\frac{\partial V^*}{\partial x} \right)^T f(x) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial V^*}{\partial x} \right)^T g(x) R^{-1}(x) g(x)^T \frac{\partial V^*}{\partial x} + x^T Q(x)x = 0. \quad (2.13)$$

Em geral é impossível obter uma solução analítica da equação (2.13) (Suzuki et al. 2003), todavia uma solução pode ser obtida por aproximações utilizando-se a série de Taylor ou pelo método de diferenças finita. A solução da equação (2.13) será de fundamental importância na abordagem utilizada no método SDRE apresentado na próxima seção.

2.3 O Método SDRE

Agora será apresentado o procedimento para construir o controlador usando-se o método SDRE. O sistema não linear (2.9) pode ser representado pela seguinte estrutura pseudolinear

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad (2.14)$$

onde as matrizes $A(x)$ e $B(x)$ são dependentes do estado.

Sabe-se que se existir um índice de desempenho ótimo V^* para o sistema linear (2.14), este estará na forma quadrática $x^T P x$ com matriz simétrica, sendo também um índice de desempenho quadrático da equação (2.10) (Anderson & Moore 1990). Portanto, se $V^* \rightarrow x^T P x$, o controle é obtido através de

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x \quad (2.15)$$

com a solução $P(x)$ positiva definida da seguinte equação SDRE

$$A^T(x)P(x) + P(x)A(x) + Q(x) - P(x)B(x)R^{-1}B^T(x)P(x) = 0. \quad (2.16)$$

Para cada x fixo, as equações (2.15) e (2.16) são similares as obtidas pelo método LQR. Assim, a lei de realimentação (2.15) pode ser computada com o algoritmo LQR onde a variável x é fixada.

2.3.1 Forma Linear Dependente do Estado

A forma linear dependente do estado (2.14) pode ser apresentada de vários modos a partir de um sistema não linear. Considere-se o sistema não linear (2.9) reescrito na forma linear dependente do estado

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x)x \\ g(x) &= B(x), \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde os coeficientes são dependentes do estado, e $A(x)$ e $B(x)$ são funções suaves. A forma (2.17) pode ser chamada de pseudolinear.

Como mencionado anteriormente, é importante notar que a escolha de $A(x)$ não é única (Cloutier et al. 1996). Na realidade, há infinitas parametrizações que correspondem a uma mesma função $f(x)$ resultando em diferentes matrizes $A(x)$.

Exemplo 2.1 *Considere-se o seguinte sistema não linear*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 + u. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Colocando-se o sistema em uma possível forma linear dependente do estado

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

A matriz $A(x)$ também pode ser escrita em outra forma linear dependente do estado, como

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Observa-se a não unicidade da representação pseudo-linear.

■

Associadas à forma pseudolinar com coeficientes dependentes do estado, têm-se as seguintes definições.

Definição 1 *$A(x)$ é uma parametrização observável (detectável) do sistema não linear [na região Ω] se o par $(C(x), A(x))$ é ponto a ponto observável (detectável) no sentido linear para todo $x \in \Omega$.*

Definição 2 *$A(x)$ é uma parametrização controlável (estabilizável) do sistema não linear [na região Ω] se o par $(A(x), B(x))$ é ponto a ponto controlável (estabilizável) no sentido linear para todo $x \in \Omega$.*

O método SDRE requer que o vetor de estados completo esteja disponível e o par $(A(x), B(x))$ seja controlável ponto a ponto no contexto de sistemas lineares $\forall x$. A

controlabilidade pode ser verificada através da matriz de controlabilidade como no caso de sistemas lineares, verificando-se se a referida matriz tem posto completo no domínio de interesse. Esta condição simplesmente garante que a equação algébrica de Riccati tem solução para um estado particular x nesse domínio. A controlabilidade ponto a ponto não necessariamente equivale à controlabilidade não linear (Hammett, Hall & Ridgely 1998). Devido à não unicidade de $A(x)$, diferentes escolhas de $A(x)$ podem produzir diversas matrizes de controlabilidade e, portanto, distintas características de controlabilidade ponto a ponto.

Caso o sistema apresente as características de estabilidade e observabilidade, a solução da Equação de Riccati ponto a ponto será única. Este resultado é formalizado no lema 2.1.

Lema 2.1 *Para existir uma única solução ponto a ponto para a Equação de Riccati, é suficiente que o sistema (2.14) seja estabilizável e detectável ponto a ponto.*

Prova: ver (Huang & Lu 1996).

2.4 Resumo da Técnica SDRE

Nesta seção, será apresentado um resumo do algoritmo para o método SDRE. É importante frisar que este método obtém a solução do problema (2.9) e (2.10). Seguem, abaixo, os passos para a resolução do controle via SDRE.

1. Represente o sistema não linear (2.9) na forma pseudolinear (2.17)
2. Resolva a *Equação de Riccati Dependente do Estado* (SDRE)

$$A^T(x)P(x) + P(x)A(x) + Q(x) - P(x)B(x)R^{-1}B^T(x)P(x) = 0$$

para obter $P \geq 0$. Note que P é uma função de x .

3. Construa o controle em malha fechada não linear

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x).$$

Capítulo 3

Análise de Estabilidade do Sistema Controlado via SDRE

Como mencionado na referência (Cloutier & Stansbery 2002), o controlador baseado na solução da *Equação de Riccati Dependente do Estado* (SDRE) demonstra bom desempenho em numerosas aplicações. Entretanto, a análise de estabilidade é complicada. Uma barreira é a dificuldade de resolver analiticamente a equação de Riccati dependente do estado. Mesmo que tal solução fosse obtida, possivelmente a análise de estabilidade não seria trivial (vide o caso de dimensão dois abordado em (Erdem & Alleyne 2004)). Outra possibilidade seria analisar a estabilidade sem resolver a equação de Riccati. Entretanto, como já vimos, o resultado disponível é apenas de existência e não permite a priori garantir a estabilidade de um dado sistema pseudolinear controlado via SDRE. O fato é que existem poucos resultados sobre a análise de estabilidade deste método.

O único resultado geral existente é estabilidade e otimalidade no sentido puramente local. Assim sendo, a estabilidade global é apenas verificada via simulação a partir de várias condições iniciais longe do equilíbrio.

Sabe-se que a lei de controle SDRE faz com que a origem seja um ponto de equilíbrio com estabilidade assintótica para o sistema realimentado. Contudo, o controle SDRE não garante estabilidade global em malha fechada (Cloutier 1997). Alguns trabalhos analisam a estabilidade do controlador SDRE, em especial em (Shamma & Cloutier 2003) apresentou-se uma condição para a existência de um controlador SDRE globalmente estável.

No artigo (Erdem & Alleyne 2004), recentemente publicado, resolve-se a equação de Riccati analiticamente para um sistema de segunda ordem, gerando condições necessárias para se obter a estabilidade global do sistema pela equação de Lyapunov.

3.1 Estabilidade Local do Controlador SDRE

Aplicando-se a lei de controle SDRE (2.15) no sistema pseudolinear (2.17), obtém-se o seguinte sistema de malha fechada:

$$\dot{x} = [A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x)]x = A_{cl}(x)x. \quad (3.1)$$

A matriz de malha fechada $A_{cl} = A(x) - B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x)$ é Hurwitz ponto a ponto $\forall x$, em particular para $x = 0$. Então, a origem do sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável a partir da equação de Riccati (Cloutier 1997). A estabilidade local do sistema realimentado com o controlador SDRE é estabelecida com o teorema a seguir.

Teorema 3.1 *Sejam $f(x)$, $B(x) = g(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ pertencentes a C^k , $k \geq 1$. Assuma que a parametrização $A(x)$ é suave (i.e., C^k , $k \geq 1$), detectável e estabilizável ponto a ponto, no sentido linear para todo $x \in \Omega$. Então, o regulador não linear SDRE produz uma solução em malha fechada que é localmente assintoticamente estável.*

Prova: (Mracek & Cloutier 1998) Assumindo que $A_{cl}(x)$ é suave e as colunas $\text{col}\{P(x)\} \in C^1$, sabe-se então que as colunas $\text{col}\{A_{cl}(x)\} \in C^1$ (Mracek & Cloutier 1998). Aplicando o Teorema do Valor Médio em $\text{col}\{A_{cl}(x)\}$, tem-se

$$\text{col}^j\{A_{cl}(x)\} = \text{col}^j\{A_{cl}(0)\} + \frac{\partial \text{col}^j\{A_{cl}(z_j)\}}{\partial x} x, j = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

onde z_j verifica a igualdade em (3.2). A substituição de (3.2) na $\text{col}\{A_{cl}(x)\}$ em (3.1) resulta

$$\dot{x} = A(0)x + \left[\frac{\partial \text{col}^1\{A_{cl}(z_1)\}}{\partial x} x : \frac{\partial \text{col}^2\{A_{cl}(z_2)\}}{\partial x} x : \dots : \frac{\partial \text{col}^n\{A_{cl}(z_n)\}}{\partial x} x \right] x \quad (3.3)$$

$$\dot{x} = A(0)x + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i x_j \frac{\partial \text{col}^j\{A_{cl}(z_j)\}}{\partial x_i} \quad (3.4)$$

Multiplicando e dividindo o segundo termo em (3.4) por $\|x\|$ e definindo

$$\psi(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{x_i x_j}{\|x\|} \frac{\partial \text{col}^j \{A_{cl}(z_j)\}}{\partial x_i}, \quad (3.5)$$

gera-se

$$\dot{x} = A_{cl}(0)x + \psi(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \|x\| \quad (3.6)$$

onde

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \psi(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0. \quad (3.7)$$

A expansão (3.6) é válida para qualquer subconjunto aberto de Ω . Na vizinhança da origem, o termo linear que tem uma matriz de coeficientes estáveis constantes domina o termo de ordem superior produzindo estabilidade assintótica local. Portanto, a linearização do sistema em malha fechada perto da origem é dada por $\dot{x} = A_{cl}(0)x$. Pelo método de Lyapunov indireto, a origem é assintoticamente estável. ■

Note-se que localmente o sistema (3.1) é estável, mas nada pode ser afirmado sobre a estabilidade global.

Considerando que a matriz $A(x)$ é sempre *Hurwitz* em todo o espaço de estado poderíamos esperar que os sistema fosse globalmente estável. Tal expectativa é inspirada pela conjectura de Markus-Yamabe, enunciada a seguir.

Conjectura 3.1 *Markus-Yamabe*

(Markus & Yamabe 1960) Seja $\dot{x} = F(x)$ um sistema diferencial onde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é C^1 . Se este sistema é Hurwitz¹ e a origem é um ponto de equilíbrio ($F(0) = 0$), então a origem é uma solução globalmente assintoticamente estável.

Tal conjectura foi provada por (Fessler 1995, Glutsyuk 1994, Gutiérrez 1995). Entretanto, a condição de ser *Hurwitz* diz respeito à matriz jacobiana e não à matriz $A(x)$ da forma pseudolinear e essa não coincidem em geral. Ainda assim, poderia-se esperar que, pelo menos no caso de dimensão dois, pudesse concluir a estabilidade

¹O sistema $\dot{x} = F(x)$ é Hurwitz se sua matriz Jacobiana $DF(x)$ é Hurwitz para todo ponto $x \in \mathbb{R}^2$ (Markus & Yamabe 1960)

global com controle SDRE. Infelizmente isso não é verdade pois contra exemplos relativamente simples podem ser construídos segundo nos explicou **N. Barabanov** em correspondência privada. Com efeito, basta pensar nos bem conhecidos exemplos de sistemas a estrutura variável nos quais as estruturas individuais são todas estáveis ou assintoticamente estáveis e ainda assim o sistema global é instável. Um desses exemplos em R^2 consiste de duas estruturas com curvas integrais elípticas, uma com eixo maior segundo o eixo horizontal do plano de fase e outro segundo o eixo vertical. Com uma comutação adequada obtém-se um comportamento instável ainda que cada estrutura seja estável. Poderíamos culpar a descontinuidade pela instabilização. Entretanto, esse argumento cai por terra facilmente. Basta fazer uma comutação “suave”, por exemplo, usando uma função do tipo sigmóide ou $\tan^{-1}(\cdot)$ no lugar da função sinal. Ainda assim se obtém um comportamento instável a partir de condições iniciais a uma certa distância da origem. Note-se que no caso continuamente diferenciável, a origem é garantidamente assintoticamente estável, conforme o Teorema 3.1. Concluindo, mesmo no caso de dimensão dois não é fácil obter condições de estabilidade global para o regulador SDRE. Veremos mais adiante, o que já foi obtido recentemente na literatura sobre o SDRE aplicado a sistemas planares.

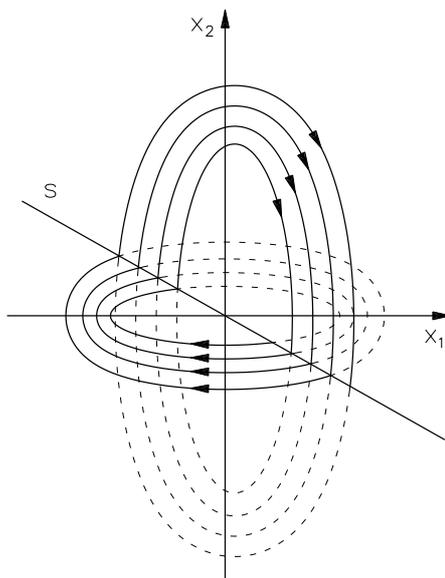


FIGURA 3.1: Plano de fase.

3.2 Existência de Estabilização com Controle SDRE

Sabe-se que a estabilidade do sistema em malha fechada com o controle SDRE não é garantida *a priori*, contudo resultados de simulações têm mostrado que o método gera leis de controle estabilizantes. Em (Shamma & Cloutier 2003), mostrou-se que se existe alguma realimentação estabilizante levando a uma função de Lyapunov com conjunto de nível *star-convex* (Shamma & Cloutier 2003), então existe uma representação do sistema dinâmica tal que o controle SDRE é estabilizante. Mais precisamente, o seguinte teorema foi demonstrado.

Teorema 3.2 *Sejam o sistema não linear*

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad (3.8)$$

e $u = k(x) = K(x)x$ uma lei de controle que admita uma função Lyapunov diferenciável, $V(x)$, tal que

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x)x, \quad (3.9)$$

para alguma matriz $P(x)$ e

$$\frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + B(x)k(x)) = x^T P(x)(A(x) + B(x)K(x))x \leq -x^T Q(x)x \quad (3.10)$$

com $x^T Q(x)x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$. Se $x^T P(x)x > 0$, então existe um $E(x)$ tal que

$$E(x)x = 0, \quad (3.11)$$

e $A(x) + E(x) + B(x)K(x)$ é ponto a ponto Hurwitz para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$

Prova: Ver (Shamma & Cloutier 2003). ■

A hipótese principal exigida pelo teorema 3.2 é que

$$x^T P(x)x = x^T \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.12)$$

Esta hipótese, também usada em (Huang & Lu 1996), pode ser interpretada como o conjunto de nível $V(x)$ que satisfaz a propriedade de *star-convex*. Seja

$$S_\lambda = \{x : V(x) \leq \lambda\}. \quad (3.13)$$

Então $x \in S_\lambda \Rightarrow \alpha x \in S_\lambda, \forall \alpha \in [0, 1]$. Em outras palavras,

$$V(\alpha x) \leq V(x), \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (3.14)$$

A figura 3.2 ilustra o conceito de *star-convexity*. A seguir, mostra-se que sob as mes-

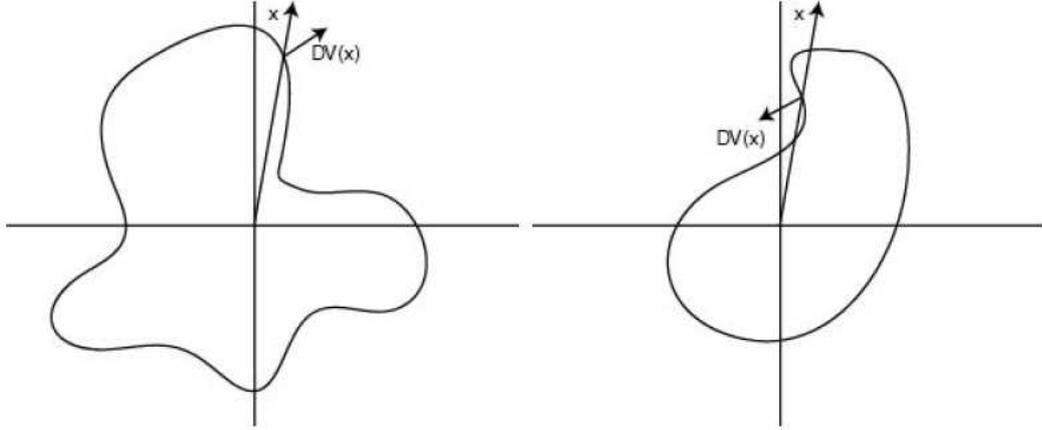


FIGURA 3.2: Conjuntos de níveis com e sem *star-convexity*.

mas hipóteses do teorema 3.2, um ganho de controle dependente do estado pode ser encontrado pela equação de Riccati.

Teorema 3.3 *Sob as hipóteses do teorema 3.2, existem matrizes $E(x)$ e $\tilde{Q}(x)$, e uma função escalar positiva $\gamma(x)$, tal que*

$$E(x)x = 0 \text{ e } \tilde{Q}(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (3.15)$$

e SDRE (omitindo a dependência em x)

$$P(A + E) + (A + E)^T P + \tilde{Q} - \gamma P B B^T P = 0 \quad (3.16)$$

cuja solução leva à realimentação estabilizante

$$u = -\gamma(x)B^T(x)P(x)x. \quad (3.17)$$

■

A principal hipótese no resultado do teorema 3.3 é a existência de alguma realimentação estabilizante que leva a uma função de Lyapunov com conjuntos de níveis *star-convex* seja disponível. Sob esta condição, mostra-se que existe sempre uma representação dependente do estado do sistema dinâmico em malha aberta tal que a matriz do sistema em malha fechada em uma representação dependente do estado é *Hurwitz* ponto a ponto. Além disso, uma lei de controle estabilizante pode ser encontrada via equação de Riccati dependente do estado. Infelizmente, o método descrito não é construtivo e requer o conhecimento de uma função de Lyapunov especial.

3.3 Estabilidade Global de Sistemas de Segunda Ordem Usando Controle SDRE

No caso de sistemas de dimensão dois, um resultado de estabilidade global com SDRE foi encontrado. Nesta seção, serão apresentadas detalhadamente as condições para a estabilização de sistemas de segunda ordem realimentados com o controlador SDRE exposto no artigo (Erdem & Alleyne 2004).

Considere o sistema não linear de segunda ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x) + g(x)u \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$. Usando a formulação pseudolinear em (3.18), obtém-se uma representação dependente do estado dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A(x)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}}_{B(x)} u(x). \quad (3.19)$$

Como mencionado na subseção 2.3.1, esta parametrização não é única. Aqui ela é escolhida explicitamente para tornar o problema da estabilidade analiticamente tratável. Por conveniência, a parametrização SDRE é realizada de forma que $a_{11}(x) = a_{21}(x) = 0$, assim a equação de Riccati (2.16) produz apenas equações quadráticas a serem resolvidas para elementos de $P(x)$, diferentemente das equações de quarta ordem quando $a_{11}(x) \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & f_1(x)/x_2 \\ 0 & f_2(x)/x_2 \end{bmatrix}}_{A(x)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ g(x) \end{bmatrix}}_{B(x)} u(x) \quad (3.20)$$

Para a formulação da análise de estabilidade, faz-se necessário formular algumas condições para o sistema e sobre SDRE.

Hipótese 1 *Assumindo as seguintes condições:*

- *Os elementos $a_{12} = f_1/x_2$ e $a_{22} = f_2/x_2$ são supostos bem definidos $\forall x$ e têm valores finitos $a_{12}(0)$ e $a_{22}(0)$ para $x = 0$.*
- *$\text{sgn}(b_2(x)a_{12}(x)) = 1 \forall x$ onde $a_{12} \equiv f_1/x_2$.*
- *$Q(x) = \text{diag}(q_1(x), q_2(x))$ e $R(x) = r(x)$ onde $q_1(x) > 0, q_2(x) \geq 0, r(x) > 0$.*

■

Inicialmente deve-se verificar se a parametrização em (3.20) é controlável ponto a ponto $\forall x$. A matriz de controlabilidade é

$$W_{ctrb}(x) = \begin{bmatrix} B(x) & A(x)B(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g(x)f_1(x)/x_2 \\ g(x) & g(x)f_2(x)/x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

A condição a ser satisfeita para a controlabilidade ponto a ponto $\forall x$ é

$$\det(W_{ctrb}(x)) = -g^2(x) \frac{f_1(x)}{x_2} = -b_2(x)(b_2(x)a_{12}(x)) \neq 0. \quad (3.22)$$

Naturalmente, deve-se ter $g(x) \neq 0$ ($b_2(x) \neq 0$). Então, se

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{x_2} \quad (3.23)$$

é finito e não nulo, a parametrização é controlável.

Agora, pode-se prosseguir com a análise da estabilidade. A matriz $P(x)$, simétrica positiva definida, é da forma

$$P(x) = \begin{bmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{12}(x) & p_{22}(x) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

A substituição das matrizes $A(x)$ e $B(x)$ (equação (3.20)), $Q(x)$ e $R(x)$ (Hipótese 1) na equação algébrica de Riccati dependente do estado (2.16), resulta nas três equações escalares para $p_{11}(x)$, $p_{12}(x)$ e $p_{22}(x)$ mostradas abaixo. Para simplificação da notação, a dependência de x das variáveis é omitida.

$$\begin{aligned} q_1 - \frac{1}{r}p_{12}^2b_2^2 &= 0 \\ a_{12}p_{11} + a_{22}p_{12} - \frac{1}{r}p_{12}b_2^2p_{22} &= 0 \\ 2a_{12}p_{12} + a_{22}p_{22} + q_2 - \frac{1}{r}p_{22}^2b_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Colocando-se os termos p_{ij} em evidência, chega-se às seguintes equações

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{\nu\sqrt{q_1r}\sqrt{a_{22}^2+q_2b_2^2/r+2a_{12}b_2\sqrt{q_1/r}}}{a_{12}b_2} \\ p_{12} &= \frac{\sqrt{q_1r}}{b_2} \\ p_{22} &= \frac{a_{22}+\nu\sqrt{a_{22}^2+q_2b_2^2/r+2a_{12}b_2\sqrt{q_1/r}}}{a_{12}b_2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde

$$\nu = \operatorname{sgn}(a_{12}(x)b_2(x)). \quad (3.26)$$

Pela Hipótese 1, sabe-se que o termo ν é igual a 1. Conseqüentemente, isto resulta na $P(x)$ positiva definida. Isto pode ser verificado examinando os menores principais de $P(x)$.

Obtendo $P(x)$, pode-se escrever o controle SDRE (2.15) de forma explícita

$$\begin{aligned} u(x) &= -R^{-1}(x)B^T(x)P(x) \\ &= -\frac{b_2}{r}(p_{12}x_1 + p_{22}x_2). \end{aligned}$$

Substituindo os valores de p_{12} e p_{22} da equação (3.25), obtém-se

$$u(x) = -\sqrt{\frac{q_1}{r}}x_1 - \frac{a_{22}x_2}{b_2} - \frac{x_2}{b_2}\sqrt{a_{22}^2 + q_2b_2^2/r + 2a_{12}b_2\sqrt{q_1/r}}. \quad (3.27)$$

Recordando que $b_2 = g(x)$, $a_{12}x_2 = f_1$ e $a_{22}x_2 = f_2$, a equação (3.27) pode ser reescrita em termos das funções originais (3.18) como

$$u(x) = -\sqrt{\frac{q_1}{r}}x_1 - \frac{f_2}{g} - \frac{\text{sgn}(x_2)}{g}\sqrt{f_2^2 + q_2x_2^2g^2/r + 2f_1x_2g\sqrt{q_1/r}}. \quad (3.28)$$

A lei do controle em (3.28) não contém nenhuma divisão por zero, mesmo que a matriz $A(x)$ na formulação em (3.20) contenha x_2 como denominador.

Substituindo (3.28) nas equações do sistema (3.18), obtém-se a dinâmica do sistema em malha fechada.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x) = a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g\sqrt{\frac{q_1}{r}}x_1 - \text{sgn}(x_2)\sqrt{f_2^2 + q_2x_2^2g^2/r + 2f_1x_2g\sqrt{q_1/r}} \\ &= -\left(b_2\sqrt{\frac{q_1}{r}}\right)x_1 - \left(\sqrt{a_{22}^2 + q_2b_2^2 + 2a_{12}b_2\sqrt{q_1/r}}\right)x_2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Considere-se $V(x)$ uma candidata a função quadrática de Lyapunov para análise da estabilidade do sistema (3.29), com coeficientes escalares definidos $\alpha, \delta > 0$,

$$V(x) = \frac{1}{2}(\alpha x_1^2 + \delta x_2^2). \quad (3.30)$$

A derivada (3.30) ao longo da trajetória do sistema (3.29) resulta em

$$\dot{V}(x) = \underbrace{\left(\alpha a_{12} - \delta b_2\sqrt{\frac{q_1}{r}}\right)}_{\text{sinal indefinido}} x_1 x_2 - \underbrace{\left(\delta\sqrt{a_{22}^2 + q_2b_2^2/r + 2a_{12}b_2\sqrt{q_1/r}}\right)}_{>0} x_2^2. \quad (3.31)$$

Os coeficientes α e δ podem ser utilizados para eliminar o termo de sinal indefinido dentro da equação (3.31). Para que o termo de sinal indefinido desapareça, a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\alpha a_{12} - \delta b_2\sqrt{\frac{q_1}{r}} = 0, \quad \forall x. \quad (3.32)$$

Assim a equação (3.32) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{a_{12}}{b_2} = \frac{\delta}{\alpha} \sqrt{\frac{q_1}{r}}. \quad (3.33)$$

Considerando $k \equiv \delta/\alpha$ e utilizando a Hipótese 1, onde $q_1(x) > 0$ e $r(x) > 0$, chega-se a que k deve ser positivo ($k > 0$) e $k \in \mathbb{R} \forall x$, satisfazendo a condição (3.33). Assim, o termo de sinal indefinido desaparece na equação (3.31). Portanto, o resultado da derivada da função de Lyapunov é

$$\dot{V}(x) = - \underbrace{\left(\delta \sqrt{a_{22}^2 + q_2 b_2^2 / r + 2 a_{12} b_2 \sqrt{q_1 / r}} \right)}_{>0} x_2^2 \leq 0. \quad (3.34)$$

A equação (3.34) é uma função negativa semidefinida. Examinando-se a malha fechada (3.29), pode-se facilmente ver que

$$\dot{V}(x) = 0 \forall x \Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) = 0. \quad (3.35)$$

Conseqüentemente, $\dot{V}(x) = 0$ pode ocorrer somente na origem. Pelo teorema de La-Salle (Khalil 2002), a origem de (3.34) é globalmente assintoticamente estável. Logo, o sistema realimentado é globalmente assintoticamente estável. Este resultado está resumido no teorema a seguir.

Teorema 3.4 (Erdem & Alleyne 2004) *Sejam as condições da Hipótese 1 satisfeitas e $q_1(x)$ e $r(x)$ escolhidos tais que*

$$\frac{a_{12}}{b_2} = k \sqrt{\frac{q_1}{r}}, \quad \forall x, \quad (3.36)$$

onde $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, então o sistema (3.18) realimentado com o controlador SDRE

$$u(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x, \quad (3.37)$$

onde $P(x)$ é dado pela Equação de Riccati Dependente do Estado, é globalmente assintoticamente estável.

■

Com o intuito de ilustrar a possibilidade da estabilização global assintótica de sistemas não lineares realimentados com o controlador SDRE, apresenta-se o exemplo do artigo (Kokotović & Marino 1986) a seguir.

Exemplo 3.1 *Considere as equações do sistema não linear*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{3}x_2^3 + u.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Uma parametrização para este sistema é obtida a partir da equação (3.20) onde $a_{12}(x) = 1$, $a_{22}(x) = x_2^2/3$ e $g(x) = 1$. Verifica-se facilmente que $\det(W_{ctrb}(x)) = 1 \forall x$, portanto o sistema é controlável ponto a ponto. A condição (3.36) para a estabilidade global assintótica requer que

$$1 = k\sqrt{\frac{q_1(x)}{r(x)}}, \quad \forall x, \quad k > 0.\tag{3.39}$$

Esta condição pode ser satisfeita por uma infinidade de escolhas de $q_1(x)$ e $r(x)$, bastando que sejam positivos e proporcionais. A escolha mais simples seria $q_1(x)$ e $r(x)$ constantes, como por exemplo $q_1(x) = r(x) = 1$. O controle resultante desta escolha (com $q_2(x) = 1$) é

$$u(x) = -x_1 - \frac{1}{3}x_2^3 - x_2\sqrt{\frac{27 + x_2^4}{9}}\tag{3.40}$$

e as equações do sistema em malha fechada ficam

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2\sqrt{\frac{27 + x_2^4}{9}}.\end{aligned}$$

Se a função de Lyapunov é escolhida como

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),\tag{3.41}$$

sua derivada

$$\dot{V}(x) = -x_2^2\sqrt{\frac{27 + x_2^4}{9}}\tag{3.42}$$

é negativa semidefinida. Entretanto, nota-se que $\dot{V}(x) = 0 \forall x \Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \Rightarrow$

$\dot{x}_2(t) \equiv 0$ e aplicando-se o teorema de LaSalle, é fácil verificar que o sistema controlado é globalmente assintoticamente estável. ■

Os resultados teóricos encontrados também serão verificados através de simulações numéricas para o sistema levitador magnético, apresentado no capítulo 6.

3.4 Conclusão

A principal motivação deste capítulo foi apresentar alguns resultados básicos sobre a estabilidade de sistemas não lineares com o controlador SDRE. Inicialmente, foi considerado o problema de estabilidade local (Cloutier & Stansbery 2002) em que a lei de controle SDRE garante que a origem do sistema em malha fechada seja um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável.

Em seguida, apresenta-se um resultado da literatura pelo qual a existência de um controle SDRE que estabiliza globalmente o sistema é garantida se uma função de Lyapunov com conjuntos de níveis *star-convex* estiver disponível (Shamma & Cloutier 2003).

Posteriormente, condições para a estabilidade global de sistemas de segunda ordem foram apresentadas. Tais condições foram obtidas através da parametrização da matriz $A(x)$ de forma que a solução da equação de Riccati dependente do estado e a lei de controle pudessem ser calculadas analiticamente. A análise de estabilidade apresentada utiliza o método de Lyapunov e o Princípio da Invariância de LaSalle, resultando nas condições de estabilidade global (Erdem & Alleyne 2004).

Capítulo 4

Sistemas Subatuados

Sistemas subatuados são caracterizados por possuírem mais graus de liberdade do que variáveis de controle (Bullo & Lewis 2004). Aeronaves, veículos espaciais e veículos submarinos são exemplos de sistemas com dinâmica subatuada. É conveniente notar que um sistema pode torna-se subatuado devido a falha de alguns dos seus atuadores. Uma alternativa para aumentar a robustez do sistema é adicionar atuadores redundantes. Em geral esta alternativa aumenta a complexidade e o custo do sistema de controle tornando a reconfiguração do sistema de controle numa condição de falha uma opção mais interessante. Neste sentido, obter métodos de projeto para a síntese de controladores para sistemas subatuados é bastante relevante. Incluem-se nesta linha as técnicas de controle tolerante a falhas (Noura, Sauter, Hamelin & Theilliol 2000), por exemplo, as técnicas de controle robusto e adaptativo, que garantem a robustez do sistema em malha fechada (Bodson & Groszkiewicz 1997), reduzindo o número de redundâncias implementadas em *hardware* e, conseqüentemente, o custo do projeto. Além disso, a análise de sistemas subatuados permite a avaliação do número mínimo de atuadores necessários para a realização de uma determinada tarefa. Em particular, em sistemas robóticos, isto permite uma redução do tamanho e do peso de um manipulador robótico.

Uma alternativa para uma avaliação preliminar das dificuldades da análise e do projeto de sistemas de controle de grande porte (ordem elevada) é a realização do controle de sistemas de pequeno porte que apresentem uma dinâmica representativa dos sistemas subatuados de interesse prático. Neste sentido, este capítulo apresenta um

estudo do controle SDRE baseada em simulações numéricas do controle dos sistemas pêndulo invertido rotativo e carro-pêndulo. No caso do pêndulo rotativo, o regulador SDRE é implementado e avaliado experimentalmente. Nesta classe de sistemas mecânicos, as juntas passivas são controladas indiretamente pelas juntas ativas através do acoplamento dinâmico entre os elos do sistema, o que caracteriza claramente um sistema subatuado.

Inicialmente, será apresentado o controlador a estrutura variável com setor deslizante (SSVSC) que foi anteriormente aplicado no pêndulo de Furuta, em (Suzuki et al. 2003). O SSVSC é um método não linear de estabilização global que combina um regulador ótimo dependente do estado com a técnica de estrutura variável com setor deslizante. Este controlador utiliza a solução da equação de Riccati dependente do estado para determinar o setor deslizante.

Em seguida, são apresentados resultados de simulações numéricas dos controladores SSVSC e SDRE aplicados ao carro-pêndulo. A eficiência e a robustez do controlador SDRE são avaliadas na presença de ruído de medição. Finalmente, apresentam-se resultados experimentais e numéricos com o pêndulo invertido rotativo controlado pelo SDRE para realizar o posicionamento automático (*swing up*) e a estabilização global do pêndulo. Os resultados experimentais comprovam a viabilidade da implementação prática do controlador SDRE.

4.1 Controle a Estrutura Variável com Setor Deslizante

Como uma alternativa ao algoritmo do controle a estrutura variável (*Variable Structure Control-VSC*) (Utkin 1992), vem sendo proposto o setor deslizante para substituir o modo deslizante no projeto de VSC livre do fenômeno de *chattering* em implementações de sistemas de controle discreto (Furuta & Pan 2000). O setor deslizante PR (Furuta & Pan 1995) foi definido como um subconjunto do espaço de estado, dentro do qual alguma norma do estado decresce com o sinal de controle nulo. O controlador a estrutura variável é projetado de modo que o estado seja levado para o interior desse setor e dentro do setor o sinal de controle é nulo. A este controle denomina-se *lazy control*,

uma vez que a lei de controle VS é ativa somente fora do setor deslizante PR.

O Controle a Estrutura Variável com setor deslizante (*Sliding-Sector Variable Structure Control* – SSVSC), proposto originalmente para um sistema linear contínuo e invariante no tempo com uma entrada única, será descrito brevemente a seguir.

Seja um sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.1)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}$ são o vetor de estado e a entrada, respectivamente. A e B são matrizes constantes de dimensão apropriada e supõe-se que o par (A, B) é controlável. Para especificar o setor deslizante, define-se a norma a seguir:

Definição 3 (*Furuta & Pan 2000*) *A norma-P ($\|\cdot\|_P$) do estado do sistema é definida como*

$$\|x\|_P := (x^T P x)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

onde $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica positiva definida. ■

O quadrado da norma-P é denotado como

$$L(t) = \|x\|_P^2 = x^T P x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad (4.3)$$

que será considerado como uma candidata à função de Lyapunov.

Utilizando-se a norma-P, o setor deslizante PR pode ser definido como se segue.

Definição 4 *O setor deslizante PR (PR sliding-sector) é definido no espaço de estado \mathbb{R}^n como*

$$\Omega = \{x : |s(x)| \leq \delta(x), x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (4.4)$$

dentro do qual a norma-P decresce com entrada zero e a derivada da candidata a função de Lyapunov $L(t)$ da equação (4.3) satisfaz

$$\dot{L}(t) = \frac{d}{dt}(x^T(t) P x(t)) \leq -x^T(t) \bar{R} x(t), \quad \forall x(t) \in \Omega, \quad (4.5)$$

onde $\bar{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica positiva semidefinida. ■

O setor deslizante PR é um subconjunto de \mathbb{R}^n ao redor de um hiperplano $s(x) = 0$ e é limitado por duas superfícies $s(x) = \pm\delta(x)$ (Suzuki et al. 2003). Uma das formas para projetar um setor deslizante PR baseia-se na utilização da equação de Riccati.

Teorema 4.1 (*Furuta & Pan 2000*) *Para qualquer planta controlável (4.1), se a solução P , simétrica positiva definida, da equação de Riccati*

$$A^T P + PA - PBB^T P = -Q, \quad (4.6)$$

for utilizada para definir a norma- P e a matriz simétrica \bar{R} , positiva semidefinida, for escolhida de tal modo que $Q - \bar{R} > 0$, então o setor deslizante PR em Ω (4.4) pode ser determinado pelas equações abaixo

$$s(x) = Sx, S := B^T P \in \mathbb{R}^{l \times n} \quad (4.7)$$

$$\delta(x) = \sqrt{x^T \Delta x}, \Delta := Q - \bar{R} > 0. \quad (4.8)$$

■

Prova: Seja P a solução da equação de Riccati, utilizada para definir a norma- P . Então, para entrada zero, obtém-se a seguinte equação:

$$\dot{L}(t) = x^T (A^T P + PA)x = x^T (PBB^T P)x - x^T Qx. \quad (4.9)$$

Substituindo $Q = \Delta + \bar{R}$, tem-se

$$\dot{L}(t) = x^T (PBB^T P)x - x^T \Delta x - x^T \bar{R}x. \quad (4.10)$$

Reescrevendo a equação (4.10) em função de $s(x)$ e $\delta(x)$,

$$\dot{L}(t) = s^2(x) - \delta^2(x) - x^T \bar{R}x \quad (4.11)$$

$$\leq -x^T \bar{R}x, \forall x(t) \in \Omega. \quad (4.12)$$

Então (4.4) define um setor deslizante simplificado.

■

A lei de controle a estrutura variável deveria ser projetada de modo que o estado se mova para dentro do setor em tempo finito, no qual a norma-P continua decrescendo. Com o setor deslizante PR em Ω , utilizando-se as equações (4.7) e (4.8), a lei de controle SSVSC é resumida como:

$$u = \begin{cases} -SAx - k\delta(x, t)\text{sgn}(s(x)), & x(t) \in \Omega \\ -SAx - ks(x), & x(t) \bar{\in} \Omega. \end{cases} \quad (4.13)$$

A equação (4.13) assegura que o estado se move para dentro do setor em tempo finito, e o resultado do sistema com o controle a estrutura variável é quadraticamente estável (Suzuki et al. 2003).

4.1.1 Controle a Estrutura Variável Dependente do Estado com Setor Deslizante

O SSVSC dependente do estado (*State-Dependente SSVSC* – SD-SSVSC) é um tipo de SSVSC cujos parâmetros são determinados em todos os intervalos de controle utilizando a técnica Controle Ótimo Dependente do Estado (*State-Dependent Optimal Control* – SDOC). O procedimento para o cálculo é sintetizado a seguir.

1. Para o estado $x(t)$, calcula-se um sistema linear dependente do estado $\{A(x), B(x)\}$.
2. Escolhe-se uma matriz simétrica positiva definida $Q(x)$.
3. Resolve-se a equação de Riccati dependente do estado (SDRE). Então, obtém-se $P(t)$.
4. Escolhe-se $\bar{R} = (1 - \bar{r})Q$ onde $\bar{r}(0 < \bar{r} < 1)$ é uma constante positiva definida. Assim, $\Delta = \bar{r}Q$.
5. Calcula-se a função $s(x)$ e $\delta(x)$ pelas equações (4.7) e (4.8).
6. Obtém-se o controle pela equação (4.13).
7. Repetir os passos acima em todo intervalo de controle.

Na próxima seção, o sistema carro-pêndulo é apresentado. Resultados de simulações caracterizam a robustez do controlador SDRE a ruídos de medição. Além disso, para efeito de comparação, simulações do controlador SSVSC também são realizadas.

4.2 Carro-Pêndulo Invertido

O carro-pêndulo invertido é um sistema dinâmico não linear instável em malha aberta (Franklin, Powell & Emami-Naeini 2002). Seu diagrama esquemático se apresenta na figura 4.1.

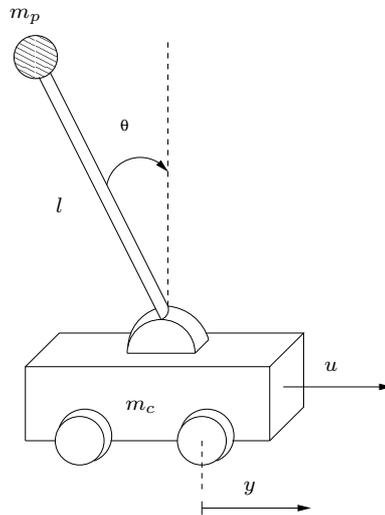


FIGURA 4.1: Diagrama esquemático do carro-pêndulo invertido.

Onde:

- m_c - massa do carro (Kg);
- m_p - massa do pêndulo (Kg);
- l - comprimento da haste (m);
- J - inércia do pêndulo (Kg m²);
- u - entrada aplicada no carro (N);
- θ - ângulo de rotação do pêndulo (rad);

- y - posição do carro (m).

O pêndulo tem uma massa m_p concentrada na extremidade. O pêndulo gira livremente no plano da folha no sentido horário. As equações dinâmicas que descrevem o movimento deste sistema são:

$$\begin{aligned} (m_c + m_p)\ddot{y} + m_p l \cos(\theta)\ddot{\theta} - m_p l \sin(\theta)\dot{\theta}^2 &= u \\ J\ddot{\theta} + m_p l \cos(\theta)\ddot{y} - m_p l g \sin(\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde $J = m_p l^2$ é a inércia do pêndulo, g é a aceleração da gravidade, θ é o ângulo do pêndulo com relação a sua posição vertical superior, e y é o deslocamento horizontal do carrinho.

4.2.1 Resultados de Simulações: Realizando *Swing up*

O objetivo destas simulações é regular o pêndulo invertido na posição de equilíbrio instável. Os parâmetros do sistema carro-pêndulo são descritos na tabela 4.1 e foram baseados em (Goodwin, Graebe & Salgado 2000).

TABELA 4.1: Valores dos parâmetros utilizados na simulação do carro-pêndulo.

Parâmetro	Valor
m_p	0.1 Kg
m_c	1 Kg
l	0.5 m
g	9.8 m/s ²

4.2.1.1 Carro-Pêndulo Simplificado

Para uma primeira análise, é considerada somente a dinâmica do subsistema pêndulo invertido (Teel 1996, Angeli 2001, Holzhüter 2004). Considera-se que $\dot{y} = v$ em (4.14), resultando a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= v \\ \ddot{\theta} &= \frac{g}{l} \sin(\theta) - \frac{1}{l} \cos(\theta)v, \end{aligned}$$

Esta equação pode ser vista como um modelo de um pêndulo invertido montado sobre um carrinho com uma massa muito maior que a massa do pêndulo. A partir desta relação, a dinâmica do sistema está concentrada no pêndulo, e a entrada v do sistema pode ser vista simplesmente como a aceleração do carrinho. Simplificando os cálculos, considera-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= v \\ \ddot{\theta} &= \text{sen}(\theta) - \cos(\theta)v.\end{aligned}$$

Para simular o sistema (4.15) em malha fechada, usando o controlador SDRE, definiram-se as variáveis de estado $x = [\theta \ \dot{\theta}]^T$ e considera-se a planta na forma linear dependente do estado ($\dot{x} = A(x) + b(x)u$), como se segue:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\text{sen}(x_1)}{x_1} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -\cos(x_1) \end{bmatrix} u. \quad (4.15)$$

Antes de projetar o controle, é preciso verificar se o par $(A(x), B(x))$ é controlável ponto a ponto. Para tanto, calculando a matriz de controlabilidade do sistema (4.15)

$$W_{\text{contr}}(x) = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(x_1) \\ -\cos(x_1) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

observa-se que $\cos^2(x_1) = 0$ caracteriza a região do espaço de estado na qual o sistema não é controlável ($\det W_{\text{contr}} = 0$), ou seja, para o sistema ser controlado $x_1 \neq \frac{(2n-1)\pi}{2}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Esta configuração corresponde à posição física horizontal do pêndulo. Satisfazendo esta condição, o par $(A(x), B(x))$ é controlável ponto a ponto na região do espaço de estado.

Considerando-se que $\theta \in [0, 2\pi]$, a descrição do sistema nesta representação apresenta dois problemas:

1. A perda de controlabilidade quando $\theta = \pi/2$.
2. Uma singularidade em $\theta = 0$ que pode ser removida.

As seguintes alterações foram realizadas para contornar estes problemas:

- Quando $\theta \approx \pi/2$, o valor do $\cos(\theta)$ é substituído por um valor constante conforme segue.

Se $|\cos(x_1)| < \cos(\epsilon)$,

então, $b_2 = -\cos(\epsilon) \operatorname{sgn}(\cos(x_1))$, onde ϵ é, neste caso, igual a 1.4 rad.

- Quando $\theta \approx 0$, o valor de $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1$.

Se $|x_1| < 0.01$,

então, $a_{21} = \frac{\operatorname{sen}(x_1)}{x_1} = 1$

Para simular o controlador SDRE, é necessário definir as matrizes R e Q da equação de Riccati. Estas matrizes, inicialmente, foram escolhidas com base no artigo (Suzuki et al. 2003) sendo dadas pela equação (4.17) e pela tabela 4.2.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$R = r_1 + r_2 + 2 \times 10^{-4}$$

As funções de peso são escolhidas em função dos estados do sistema pêndulo invertido.

TABELA 4.2: Parâmetros da equação de Riccati da simulação do carro-pêndulo.

Parâmetro	Valor
q_1	$3 \times 10^{-3}(2 - \cos(\theta))$
q_2	$1 + \frac{1 \times 10^{-2}}{1 + \exp(10(\theta - \pi/6))}$
r_1	$0.1 \exp(-10(\theta - (\pi/2)^2))$
r_2	$\frac{0.001}{(1 + \exp(50(\theta - \pi/6)))}$

O pesos q_1 e q_2 são dependentes do movimento do pêndulo, fazendo com que a variável de estado θ convirja para a região ($\theta \in [\pi/6, 0]$). Uma vez nesta região, o peso q_2 , conforme definido na tabela (4.2), é aumentado de forma a frear o pêndulo e conduzir o estado para o ponto de equilíbrio desejado.

A matriz de peso (R), em relação à entrada, é escolhida com base em dois fatores. O primeiro fator r_1 tem como objetivo anular a entrada na posição horizontal do pêndulo, que é uma posição singular. O segundo fator r_2 tem como objetivo estabilizar o pêndulo na posição ($\theta \in [\pi/6, 0]$).

Na figura 4.2, apresentam-se as variáveis de estado, o sinal de controle e o plano de fase do sistema com condições iniciais $x_0 = [\pi \ 0]^T$, quando utilizado o controlador SDRE. Pode-se observar nesta figura que o controlador SDRE consegue realizar o *swing up* e a troca do sinal de controle que ocorre quando o sistema passa por $\theta = \pi/2$.

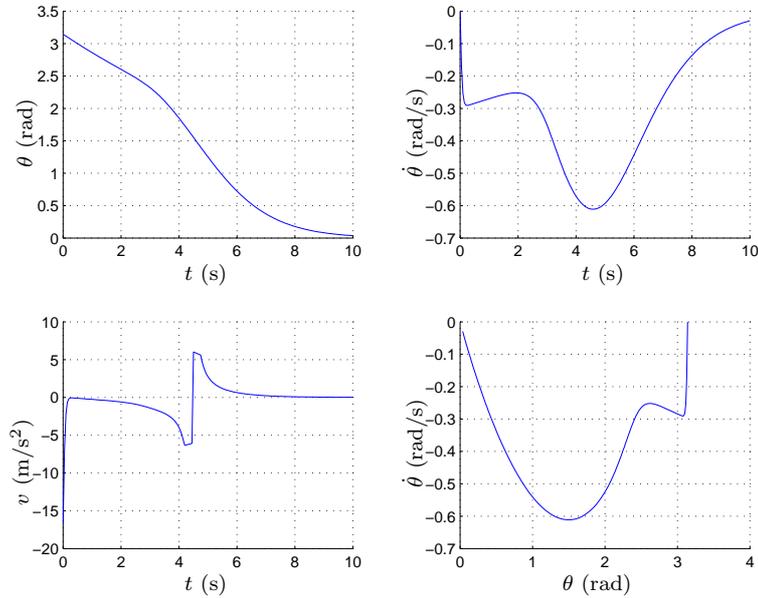


FIGURA 4.2: Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SDRE realizando *swing up*: estados do sistema, sinal de controle e plano de fase.

Como o sinal de controle do modelo simplificado é a própria aceleração do carrinho, a sua velocidade e posição são obtidas por integrações sucessivas. Os resultados podem ser vistos na figura 4.3. Pode-se também verificar nesta figura que a velocidade final do carrinho é constante. O controlador estabiliza o sistema pêndulo invertido orientando a haste na posição de equilíbrio, porém o carro continua se movendo com velocidade constante. Esta é uma consequência de se utilizar o modelo simplificado que não inclui o controle de posição do carrinho.

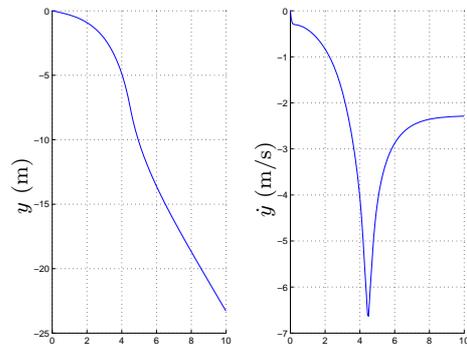


FIGURA 4.3: Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SDRE realizando *swing up*: distância percorrida e velocidade do carrinho.

- Efeito do Ruído de Medição

Com o intuito de analisar a robustez do controlador SDRE a ruídos de medição, é adicionado um ruído gaussiano randômico com média zero e variância 0.1 na velocidade do pêndulo com base (Curtis & Beard 2002).

Pode-se observar, na figura 4.4, que o sistema realimentado com o controlador SDRE converge para o ponto de equilíbrio, realizando o *swing up*. A resposta da velocidade e o deslocamento do carrinho podem ser observados na figura 4.5.

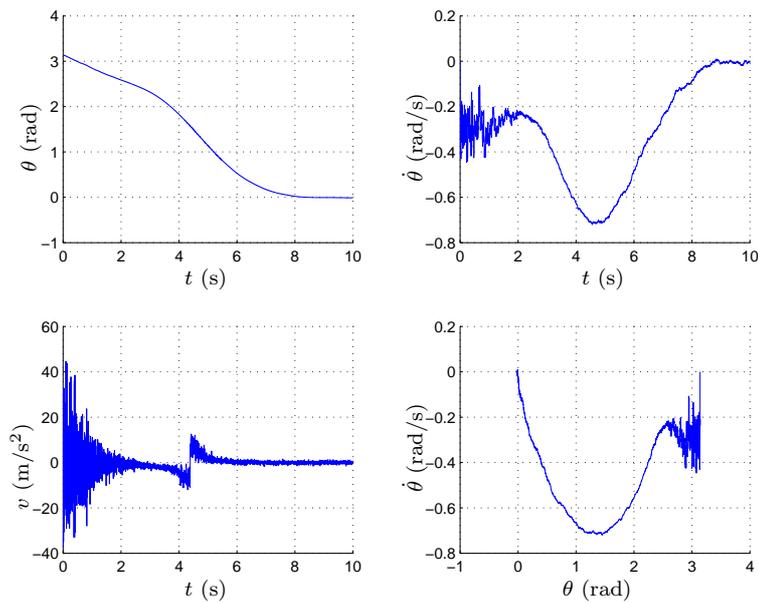


FIGURA 4.4: Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SDRE realizando *swing up* com ruído de medição: estados do sistema, sinal de controle e plano de fase.

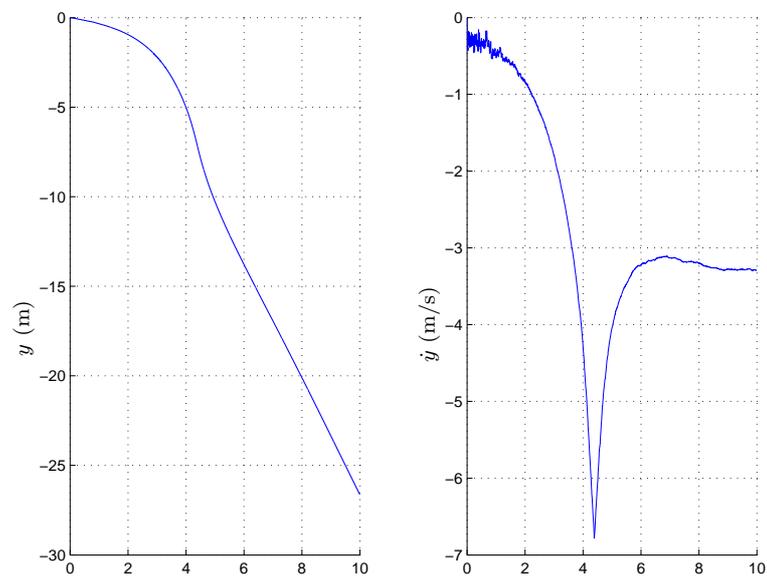


FIGURA 4.5: Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador via SDRE realizando *swing up* com ruído de medição: distância percorrida e velocidade do carrinho.

- **Comparação com o Controlador a Estrutura Variável com Setor Deslizante**

O sistema carro-pêndulo foi simulado com o controlador a estrutura variável com setor deslizante (SSVSC) descrito na seção 4.1, utilizando os mesmos parâmetros Q e R descritos na tabela 4.2.

Pode-se observar, nas figuras 4.6 e 4.2, que o tempo de estabilização do sistema com o controlador SSVSC é menor que o tempo obtido com o controlador SDRE para realizar o *swing up* do pêndulo. Todavia, o sinal de controle SSVSC apresenta uma amplitude maior do que o do controlador SDRE.

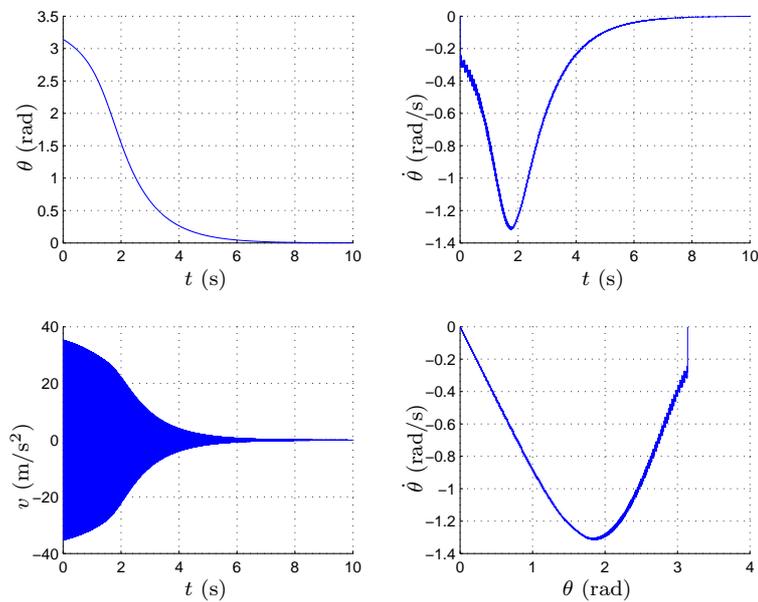


FIGURA 4.6: Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SSVSC realizando *swing up*: estados do sistema, sinal de controle e plano de fase.

Na figura 4.7, verifica-se que o estado permanece dentro do setor deslizante ($|s(x)| < \delta(x)$), garantindo a convergência dos estados.

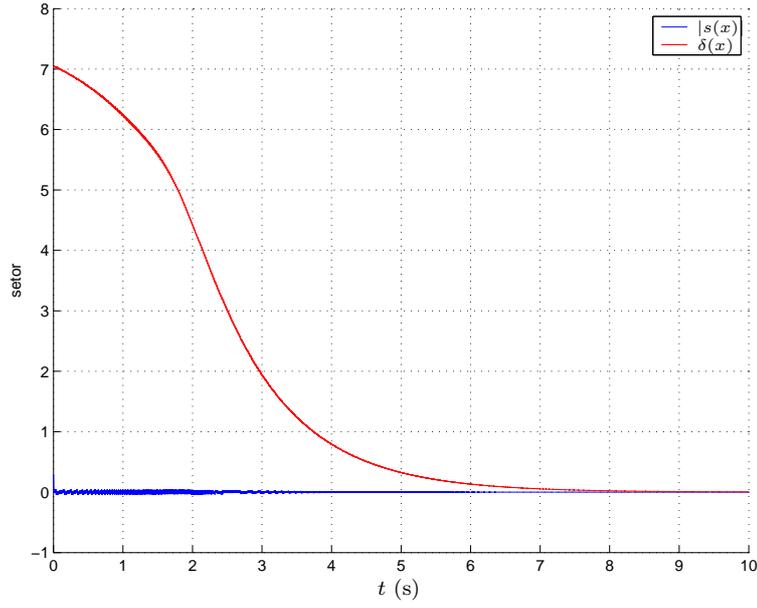


FIGURA 4.7: Carro-pêndulo simplificado realimentado com o controlador SSVSC realizando *swing up*: representação do setor deslizante.

4.2.1.2 Carro-Pêndulo Completo

O sistema completo carro-pêndulo (equação (4.14)) é representado na forma linear dependente do estado cujas variáveis de estado são $x = [\theta \ \dot{\theta} \ y \ \dot{y}]^T$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{m_p(m_c+m_p)gl \sin(\theta) - m_p^2 l^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\theta[(m_c+m_p)J - m_p^2 l^2 \cos^2(\theta)]} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_p^2 l^2 g \sin(\theta) \cos(\theta) + m_p l J \dot{\theta}^2 \sin(\theta)}{\theta[(m_c+m_p)J - m_p^2 l^2 \cos^2(\theta)]} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-m_p l \cos(\theta)}{(m_c+m_p)J - m_p^2 l^2 \cos^2(\theta)} \\ 0 \\ \frac{J}{(m_c+m_p)J - m_p^2 l^2 \cos^2(\theta)} \end{bmatrix} u \quad (4.18)$$

Como já mencionado, esta representação expõe dois pontos de singularidades. Um ponto, devido à perda de controlabilidade, quando $\theta = \pi/2$, e o outro ponto de descontinuidade, quando $\theta = 0$. Estes problemas são resolvidos da mesma forma que na representação simplificada (seção 4.2.1.1).

Para simular o controlador SDRE, é necessário definirem-se os parâmetros R e Q da equação de Riccati. A escolha destes parâmetros inicialmente foi baseada no artigo (Suzuki et al. 2003). Os parâmetros foram modificados, pois o estado y (distância do carrinho) convergia lentamente. Com o objetivo de melhorar a convergência deste

estado, novos valores para os parâmetros foram obtidos empiricamente e estão na tabela (4.3), onde $Q = \text{diag}(q_1, q_2, q_3, q_4)$ e $R = r$.

TABELA 4.3: Parâmetros da equação de Riccati da simulação do carro-pêndulo.

Parâmetro	Valor
q_1	$0.25(2 - \cos(\theta))$
q_2	0
q_3	$1 + \frac{3}{1 + \exp(10(\theta - \pi/5))}$
q_4	1
r	0.05

Simulando o sistema para a condição inicial $x_0 = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$, obtiveram-se as figuras 4.8 e 4.9. Pelos gráficos, pode-se observar o bom desempenho do controlador SDRE com relação ao tempo de convergência ao realizar o *swing up*. Na figura 4.8, pode-se observar que o estado y demora a convergir em comparação aos demais estados. No gráfico do sinal de controle (figura 4.9), sua escala é alterada para melhor observar a troca de sinal que ocorre quando o sistema passa por $\theta = \pi/2$.

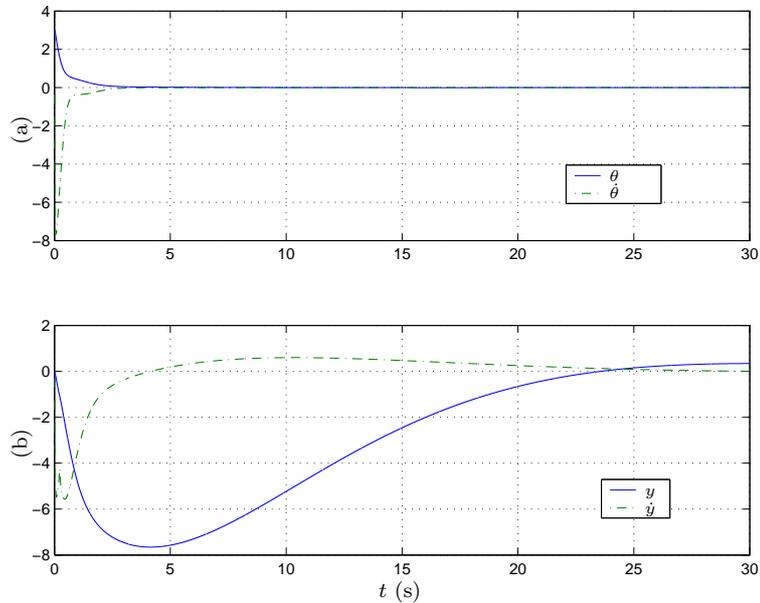


FIGURA 4.8: Carro-pêndulo realimentado com o controlador SDRE realizando *swing up*: estados do sistema.

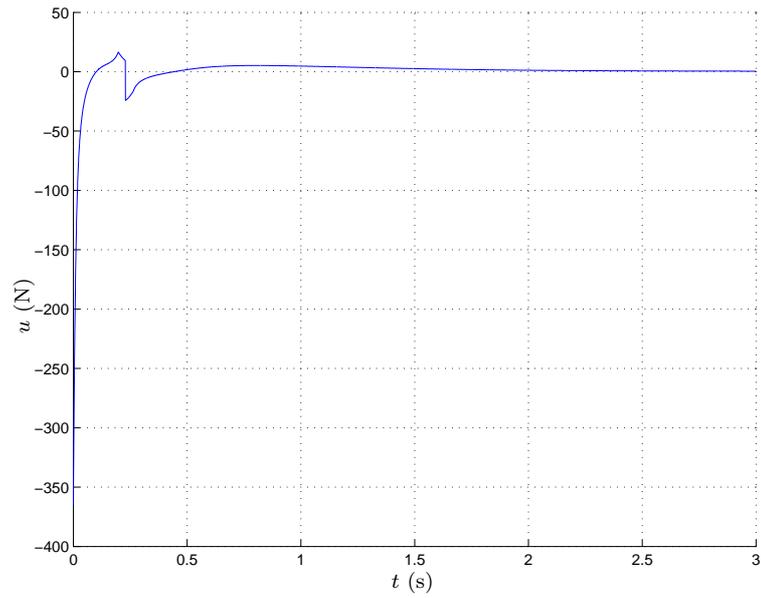


FIGURA 4.9: Carro-pêndulo realimentado com o controlador SDRE realizando *swing up*: sinal de controle.

4.2.1.3 Sistema Virtual Carro-Pêndulo

Usando o *toolbox virtual reality* do Matlab, foi possível visualizar graficamente o carro-pêndulo. No *Simulink*, este toolbox é acrescentado na simulação do sistema, o que propicia uma visualização de como se comportaria o sistema na prática.



FIGURA 4.10: Carro-pêndulo visualizado pelo *toolbox virtual reality* do Matlab.

4.3 Pêndulo Invertido Rotativo

Para ilustrar a viabilidade da implementação prática do controlador SDRE, considere-se o sistema Pêndulo Invertido Rotativo. Este é um sistema não linear de quarta ordem, em que se controla a posição do pêndulo através de um motor DC.

O objetivo desta experiência é fazer com que o controle SDRE seja capaz de realizar o *swing up* do pêndulo. O controle do *swing up* tem sido tratado freqüentemente como um exemplo de controle não linear (Åström & Furuta 2000). Usualmente, dois controles são usados para realizar o *swing up* e para estabilizar o pêndulo. Será mostrado adiante que o controle SDRE pode realizar não somente o *swing up*, mas também a estabilização do pêndulo.

O pêndulo invertido com um elo rotativo é chamado de pêndulo de Furuta, como na figura 4.11. Este pêndulo será modelado usando a formulação de Lagrange, e a única entrada da planta é o torque fornecido pelo motor. Outras duas variáveis de interesse são a posição do braço e o ângulo do pêndulo.

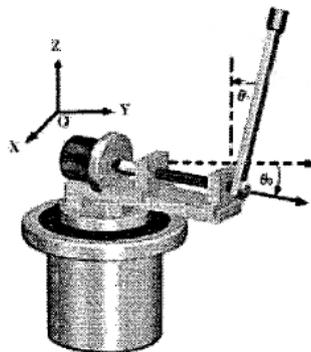


FIGURA 4.11: Pêndulo de Furuta.

4.3.1 Descrição do Sistema

O pêndulo de Furuta é descrito por um modelo de espaço de estados. A figura 4.12 mostra um diagrama esquemático geral do sistema.

A seguir serão apresentadas as variáveis e os parâmetros utilizados para descrever o sistema.

- m_P - massa do pêndulo;

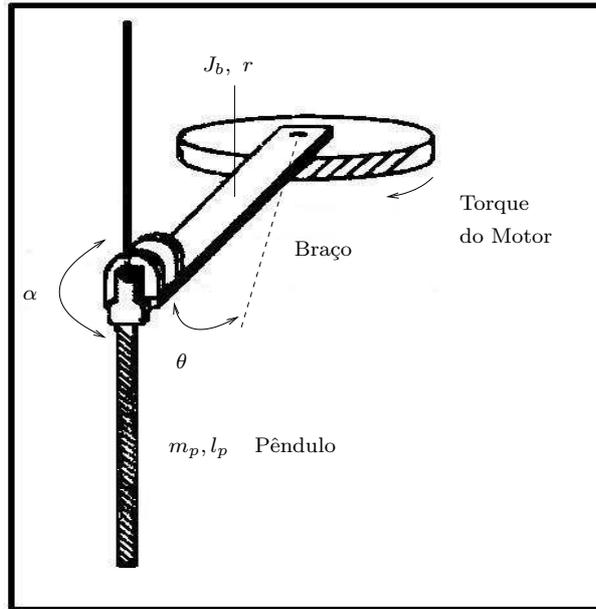


FIGURA 4.12: Esquema do pêndulo invertido rotativo.

- l_p - comprimento da haste;
- g - aceleração gravitacional;
- r - comprimento do braço;
- J_b - inércia do braço e da engrenagem;
- τ - torque do motor;
- θ - ângulo do braço na posição zero;
- α - ângulo do pêndulo na posição vertical para cima;

As equações não lineares do movimento do pêndulo invertido rotativo serão determinadas pela formulação de Lagrange. O modelo a seguir somente considera a dinâmica do braço e do pêndulo.

A dinâmica do modelo descreve a relação entre o torque das juntas atuadas e o movimento da estrutura. Com a formulação de Lagrange, a equação do movimento pode ser derivada de forma sistemática e independente de sistemas de coordenadas.

Considere-se a massa do pêndulo (m_p) toda concentrada na sua extremidade. O sistema é parametrizado por duas variáveis, α e θ , que medem o deslocamento do

ângulo do braço e do pêndulo. Define-se o ângulo positivo no pêndulo como, quando de frente para o mesmo, o pêndulo se desloca para a direita (sentido horário).

As componentes da velocidade do pêndulo em relação à base são:

$$v_{px} = r\dot{\theta} + l_p\dot{\alpha} \cos \alpha \quad (4.19)$$

$$v_{py} = -l_p\dot{\alpha} \sin \alpha. \quad (4.20)$$

Assim, a velocidade total do pêndulo é

$$v_p^2 = (r\dot{\theta} + l_p\dot{\alpha} \cos \alpha)^2 + (-l_p\dot{\alpha} \sin \alpha)^2. \quad (4.21)$$

A energia cinética é

$$T = \frac{J_b\dot{\theta}^2}{2} + m_p \frac{(r\dot{\theta} + l_p\dot{\alpha} \cos \alpha)^2 + l_p^2\dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha}{2} \quad (4.22)$$

e a energia potencial é

$$U = m_p g l_p (1 + \cos \alpha). \quad (4.23)$$

Deste modo, o Lagrangiano ($L = T - U$) é dado por

$$L = \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p \left((r\dot{\theta} + l_p\dot{\alpha} \cos \alpha)^2 + l_p^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha \right) - m_p g l_p (1 + \cos \alpha). \quad (4.24)$$

Substituindo L da equação (4.24) na equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F, \quad (4.25)$$

obtém-se a seguinte equação em função de θ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left[J_b \dot{\theta} + m_p (r\dot{\theta} + l_p\dot{\alpha} \cos \alpha) r \right] - 0 = \tau. \quad (4.26)$$

A equação (4.25) também é escrita em função de α

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= \frac{d}{dt} \left[(r\dot{\theta} + l_p\dot{\alpha} \cos \alpha) l_p \cos \alpha + l_p^2 \dot{\alpha} \sin^2 \alpha \right] m_p + \\ &- \left[r\dot{\theta} + l_p\dot{\alpha} \cos \alpha \right] l_p \dot{\alpha} (-\sin \alpha) + l_p^2 \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha \left[m_p + m_p g l_p \sin \alpha \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Expandindo os termos da equação (4.26) e também os termos da equação (4.27), chega-se, respectivamente, aos resultados

$$J_b\ddot{\theta} + m_p(r^2\ddot{\theta} + rl_p\ddot{\alpha} \cos \alpha - rl_p\dot{\alpha}^2 \operatorname{sen} \alpha) = \tau, \quad (4.28)$$

e

$$\begin{aligned} & m_p \left[r\ddot{\theta} + l_p\ddot{\alpha} \cos \alpha + l_p\dot{\alpha}^2(-\operatorname{sen} \alpha) \right] l_p \cos \alpha + \\ & \quad + m_p(r\dot{\theta} + l_p\dot{\alpha} \cos \alpha)l_p\dot{\alpha}(-\operatorname{sen} \alpha) + \\ & \quad + m_pl_p^2\ddot{\alpha} \operatorname{sen}^2 \alpha + 2m_pl_p^2\dot{\alpha}^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \\ & - \left[-rl_p\dot{\theta}\dot{\alpha} \operatorname{sen} \alpha - l_p^2\dot{\alpha}^2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + l_p^2\dot{\alpha}^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right] m_p + \\ & \quad - m_pg l_p \operatorname{sen} \alpha = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Por fim, simplificando os termos das equações (4.28)–(4.29), encontram-se as seguintes equações que descrevem o movimento do pêndulo rotativo

$$(m_p r^2 + J_b)\ddot{\theta} + (m_p r I_p \cos(\alpha))\ddot{\alpha} + (m_p r I_p \dot{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha))\dot{\alpha} = 0 \quad (4.30)$$

$$(m_p r I_p \cos(\alpha))\ddot{\theta} + (m_p I_p^2)\ddot{\alpha} + (m_p r I_p \dot{\alpha} \operatorname{sen}(\alpha))\dot{\theta} - gm_p I_p \operatorname{sen}(\alpha) = \tau. \quad (4.31)$$

4.3.1.1 Modelagem do Sistema

Considere-se um sistema mecânico não linear descrito por

$$M(\phi)\ddot{\phi} + C(\phi, \dot{\phi})\dot{\phi} + F\dot{\phi} + G(\phi) = \tau, \quad (4.32)$$

onde $M(\phi)(> 0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $C(\phi, \dot{\phi}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $G(\phi) \in \mathbb{R}^m$, $\phi \in \mathbb{R}^m$ e $\tau \in \mathbb{R}^m$ são, respectivamente, matriz de inércia, matriz centrífuga-Coriolis, matriz de atrito viscoso, termo gravitacional, variáveis de estado e o torque de controle. Com o intuito de se obter um sistema linear dependente do estado, a equação (4.32) é reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{\phi} = -M(\phi)^{-1}C(\phi, \dot{\phi})\dot{\phi} - M(\phi)^{-1}F\dot{\phi} - M(\phi)^{-1}G(\phi) + M(\phi)^{-1}\tau. \quad (4.33)$$

Definindo-se o estado x para o sistema descrito pelas equações (4.30)–(4.31) como $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T$, o sistema pode ser representado na forma linear dependente do estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}\overline{G} & -M^{-1}(C + F) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}L \end{bmatrix} \tau. \quad (4.34)$$

Os termos da equação (4.34) são mostrados a seguir:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m_p r^2 + J_b & m_p r I_p \cos(\alpha) \\ m_p r I_p \cos(\alpha) & m_p I_p^2 \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & m_p r I_p \dot{\alpha} \sin(\alpha) \\ m_p r I_p \dot{\alpha} \sin(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g m_p I_p \sin(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

4.3.1.2 Pêndulo Invertido Rotativo Quanser

Utilizou-se o Pêndulo Invertido Rotativo (*Self-Eracting Inverted Pendulum*) fabricado pela Quanser Consulting Inc. (ver figura 4.13) descrito no manual (Apkarian 1995, Apkarian 1996) e disponível no Laboratório de Controle da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

A posição do pêndulo (α) e a do braço (θ) são medidas por *encoders* ópticos incrementais com resolução de 1024 pulsos por volta ($\theta_m = 360/4096 = 0.09$ graus, $4 \times$ decodificação).

Os controladores são implementados em uma placa de controle equipada com um processador de sinais digitais (*DSP*) fabricada pela *Arcs Inc.* Esta placa (padrão *PC-ISA*) utiliza o processador *TMS320C31* e possui entradas para *encoders*, assim como conversores digitais-analógicos (*D/A*) para acionar os amplificadores de potência dos motores. Utiliza-se a plataforma *Linux*, e a transferência de dados é realizada por meio de dispositivos de baixo nível (*drivers*) e de uma interface desenvolvida em *Java*.

Os valores das constantes da equação (4.34) são obtidos do manual do sistema

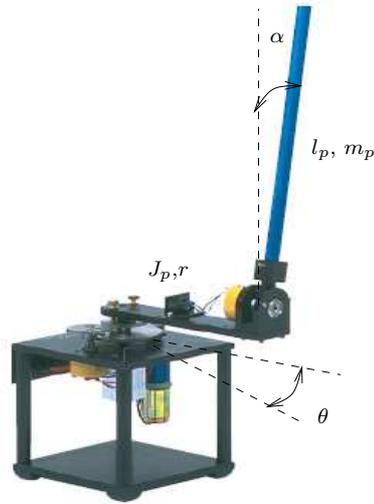


FIGURA 4.13: Pêndulo invertido rotativo fabricado pela Quanser.

Rotary Pendulum Experiment da Quanser (Apkarian 1996). Estes valores estão na tabela 4.4.

TABELA 4.4: Valores dos parâmetros utilizados na simulação do pêndulo invertido rotativo.

Variável	Valor
J_b	$0.044 \text{ Kg}m^2$
L_p	0.43 m
m_p	0.14 Kg
r	0.2 m

4.3.2 Resultados de Simulação: Realizando *Swing up*

Para simular o sistema com o controlador SDRE, foi utilizado o modelo que está na forma linear dependente do estado $\dot{x} = A(x) + b(x)u$, mostrado na equação (4.34). Contudo, nesta representação, existem dois problemas: quando $\alpha = \pi/2$ ocorre perda de controlabilidade; e para $\alpha = 0$ o sistema possui uma singularidade. Estes problemas foram solucionados como na subseção 4.2.1.1.

Na simulação, para que a planta do sistema seja mais próxima do sistema real, o efeito da perda de controlabilidade é considerado.

Inicialmente, simula-se o sistema com o controlador SDRE utilizando a seguinte

condição inicial $x_0 = [0 \ \pi \ 0 \ 0]$ para realizar o *swing-up* do pêndulo. Os parâmetros $Q = \text{diag}([q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4])$ e R utilizados para a solução da equação de Riccati estão na tabela 4.5. Estes parâmetros foram obtidos do manual da Quanser.

Observando-se as figuras 4.14 e 4.15, verifica-se um bom desempenho do controlador SDRE ao realizar o *swing up*, já que o sistema converge em 3 segundos. Pode-se observar nestas figuras a troca de sinal do controle que ocorre quando o sistema passa por $\alpha = \pi/2$ gerando uma descontinuidade nos sinais de estado.

TABELA 4.5: Parâmetros da equação de Riccati da simulação do pêndulo rotativo.

Parâmetro	Valor
q_1	0.25
q_2	4
q_3	0
q_4	1
R	0.05

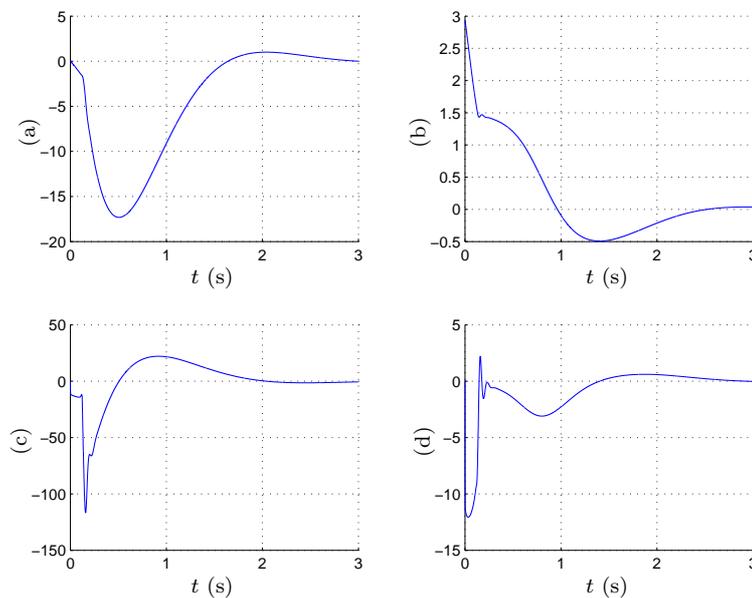


FIGURA 4.14: Pêndulo rotativo realimentado com o controlador SDRE: resposta do sistema; (a) θ (rad); (b) α (rad); (c) $\dot{\theta}$ (rad/s); (d) $\dot{\alpha}$ (rad/s).

A partir dos parâmetros da tabela 4.5, foi calculado o controlador LQR e obteve-se o ganho fixo $K = [-2.2361 \ -30.8966 \ -1.7262 \ -6.2264]$. Na simulação, observou-se que, variando apenas o parâmetro α e mantendo os demais parâmetros iguais a zero, este

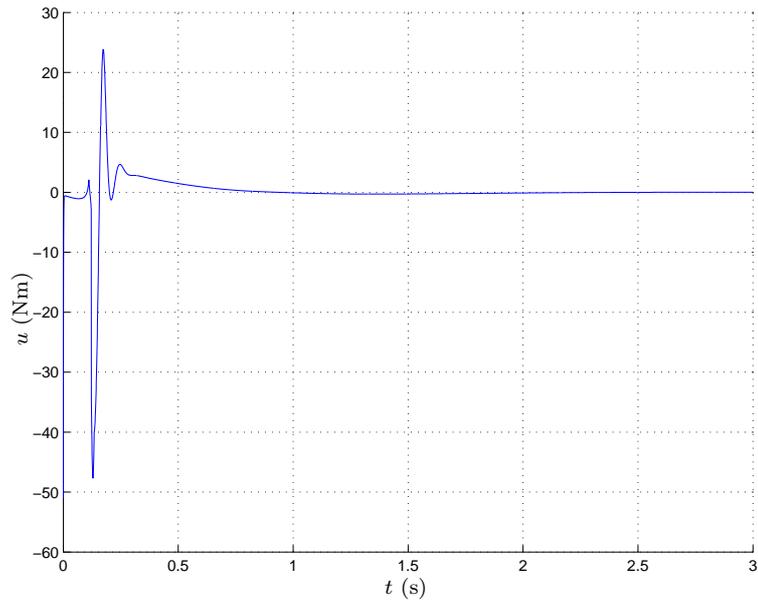


FIGURA 4.15: Pêndulo rotativo realimentado com o controlador SDRE: sinal de controle.

controle falha na estabilização do sistema se o ângulo α for maior que $\pi/4$ radianos. Este resultado demonstra a vantagem de se usar a equação de estado não linear no projeto do controle ao em vez de usar uma equação linearizada.

Na tentativa de aproximar o sistema simulado do real, limita-se a magnitude da entrada para $[-1, 1]$ Nm, que é o torque máximo fornecido pelo motor DC. Neste caso, o controlador LQR não consegue estabilizar o sistema para um ângulo α maior que $\pi/6$ radianos. Por outro lado, o controlador SDRE consegue estabilizar o sistema para um ângulo α até $\pi/3$ radianos.

Nas figuras 4.16 e 4.17, as respostas do controlador SDRE e LQR são mostradas com as condições iniciais $x_0 = [0 \ \pi/3 \ 0 \ 0]$. Pode-se observar que o controlador SDRE estabiliza facilmente o sistema, enquanto o controlador LQR não consegue fazê-lo. Este resultado demonstra que o uso de uma equação de estado não linear no lugar de uma equação linearizada pode aumentar o desempenho e a região de estabilização do sistema de malha fechada.

Outra preocupação para a implementação do sistema foi a frequência de amostragem do ganho do controlador e dos estados, devido ao processamento do DSP. Verificou-se por simulação que, ao amostrar os estados com uma frequência maior que

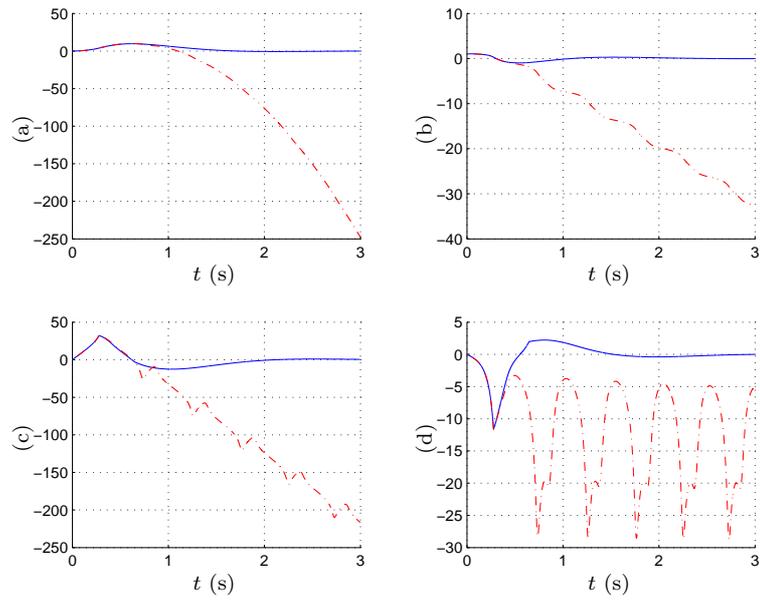


FIGURA 4.16: Pêndulo rotativo realimentado com o controlador SDRE (linha sólida) e LQR (linha tracejada) com saturação $[-1, 1]$: resposta do sistema; (a) θ (rad); (b) α (rad); (c) $\dot{\theta}$ (rad/s); (d) $\dot{\alpha}$ (rad/s);.

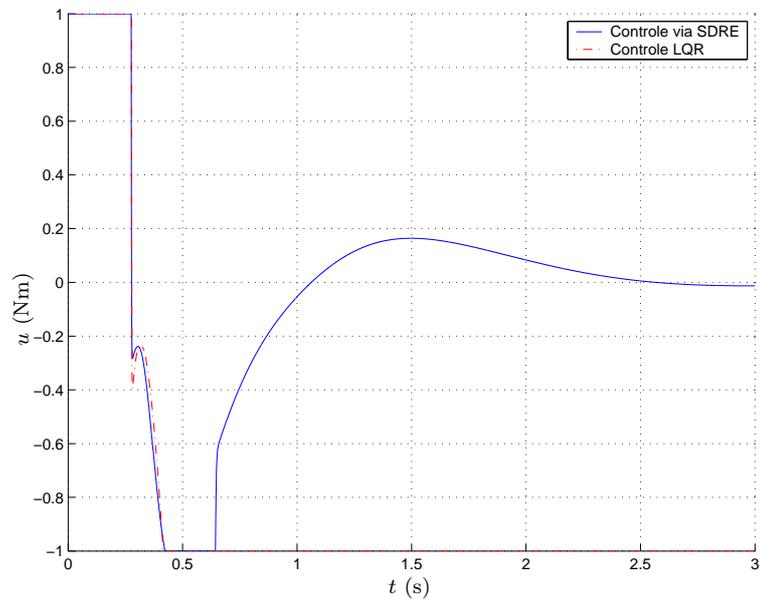


FIGURA 4.17: Pêndulo rotativo realimentado com o controlador SDRE (linha sólida) e LQR (linha tracejada) com saturação $[-1, 1]$: sinal de controle.

1 KHz, o sistema converge. Para o cálculo do ganho do controlador, observou-se que, para a frequência mínima de 1 Hz, o sistema converge.

4.3.2.1 Modelo Virtual

Um modelo 3D foi elaborado para o sistema eletromecânico (pêndulo invertido rotativo) utilizando-se técnicas de computação gráfica em *Java* com base em (Lugon 2004). O modelo simula os movimentos do sistema controlado e é uma alternativa para que o usuário possa visualizar o comportamento do sistema.

O modelo virtual 3D (figura 4.18) utiliza os dados de simulação, obtidos nessa seção, onde se aplica o controlador SDRE na realização do *swing-up* e na estabilização do pêndulo.

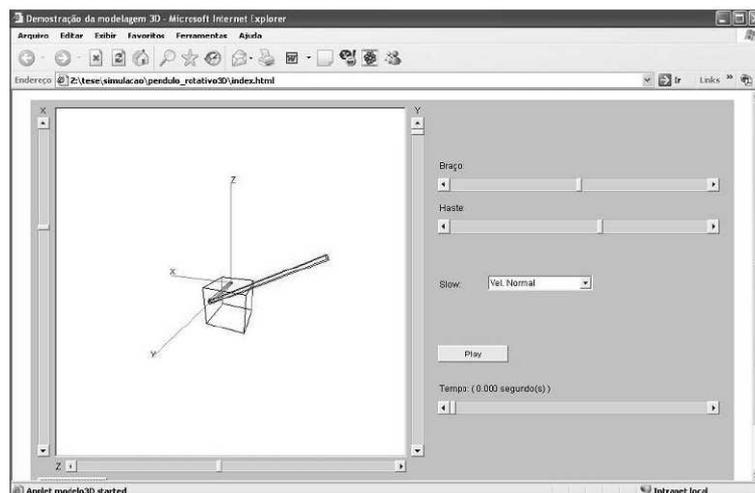


FIGURA 4.18: Imagem do simulador 3D do pêndulo invertido rotativo.

4.3.3 Resultados Experimentais

O algoritmo do controlador SDRE é codificado num diagrama de blocos através do *software* Simulink/MatLab 6.1 para gerar um programa executável carregado na placa de controle (DSP) através da interface em *Java*. O algoritmo de controle é implementado através de integração numérica pelo método de Euler.

Para a implementação em tempo real do controlador SDRE, utilizou-se o *Real-Time Workshop* (RTW) do MatLab 6.1. Uma vez que o RTW não é compatível com a

estrutura *User-Defined Functions*, não foi possível a utilização do *lqr.m*. Na tentativa de solucionar este problema, pesquisaram-se formas alternativas de se implementar a solução da equação de Riccati em tempo real. Nesta pesquisa, chegou-se a algumas conclusões (Menon, Lam, Crawford & Cheng 2002):

- A primeira aproximação é utilizar o método direto baseado na decomposição de Schur da matriz Hamiltoniana (Laub 1979, Anderson & Moore 1990).
- A segunda aproximação é um algoritmo iterativo que encontra a solução da equação de Riccati, usando o algoritmo de Kleinman, a partir de uma dada condição inicial (Kleinman 1968, Anderson 1978).

Esses métodos estão disponíveis no pacote de álgebra linear LAPACK de domínio público (Anderson 1999).

Para implementar o controlador SDRE, foi utilizado o algoritmo iterativo de Kleinman, uma vez que não existe uma forma simples de se calcularem os autovalores de uma matriz utilizando o Simulink. Na figura 4.19, está explicitada a representação do algoritmo de Kleinman.

A escolha de K_0 (ver segundo bloco do diagrama ilustrado na figura 4.19) se faz a partir da solução *off-line* da equação de Riccati com condições iniciais x_0 . Assim, quanto mais próxima do valor real for a escolha das condições iniciais, mais rápida será a convergência do algoritmo.

Em (Kleinman 1968, Anderson 1978), foi demonstrado que o algoritmo converge para a solução real se a condição inicial do ganho K_0 estabiliza o sistema em malha fechada. Para resolver a equação de Lyapunov $(P_{i+1}(A + BK_i^T) + (A + BK_i^T)^T P_{i+1} = -K_i R K_i^T - Q)$, este algoritmo utiliza o método de Newton (Ruggiero & Lopes 1996).

A implementação em tempo real do controlador foi realizada com duas taxas de amostragem. Os sinais do sistema foram amostrados com uma taxa de 1 kHz enquanto o cálculo do sinal de controle e as matrizes $A(x)$ e $B(x)$ do modelo não linear foi realizado com uma taxa de 10 Hz.

A inviabilidade da realização do *swing-up* com o controlador SDRE deve-se ao baixo torque do motor (1 Nm) (Apkarian 1995). Para contornar este problema, aplica-se um sinal de controle fazendo com que o pêndulo comece a oscilar até que este chegue

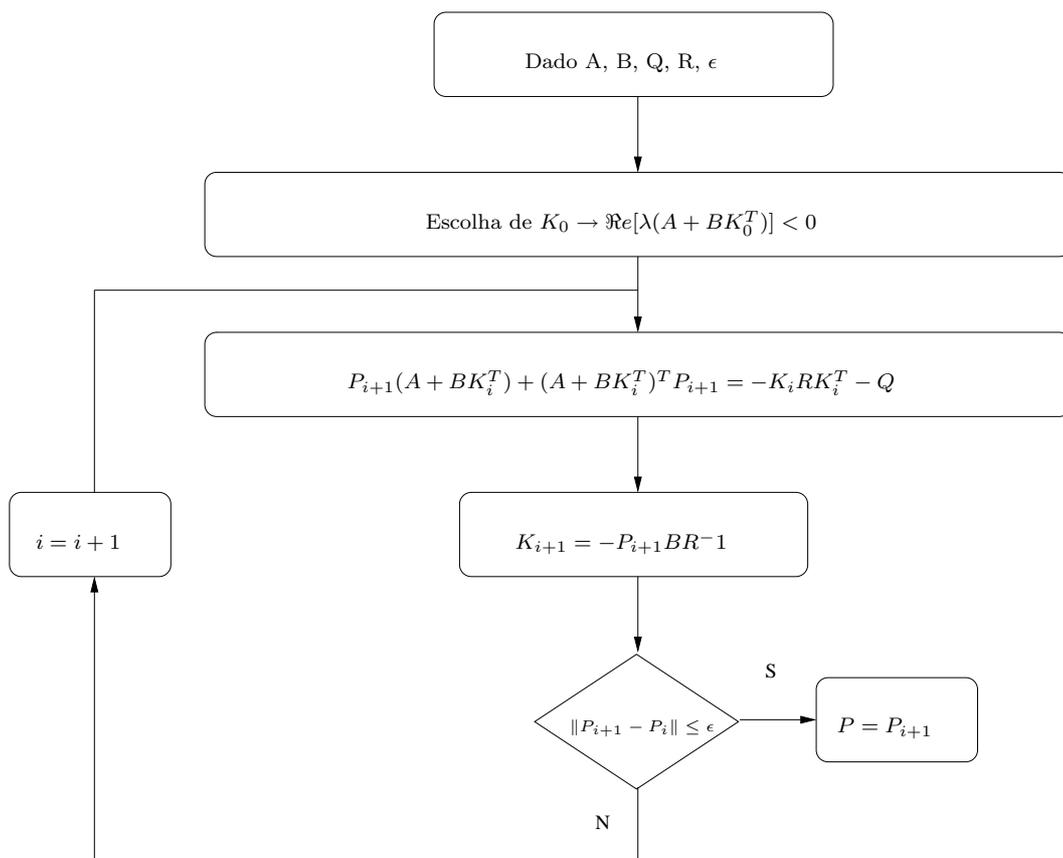


FIGURA 4.19: Algoritmo de Kleinman.

próximo à posição $\alpha = \pi/4$. Este controle é chamado controle de *swing-up* com base (Apkarian 1995).

A figura 4.20 mostra o diagrama no Simulink da aquisição das variáveis de estado, a lógica de chaveamento dos controladores SDRE e *swing-up* e a aplicação do sinal de controle no sistema. A tabela 4.6 apresenta as variáveis da experiência do pêndulo invertido do diagrama 4.20.

O bloco “Reference Generator” é responsável pela geração do sinal de referência. Na experiência realizada com o pêndulo invertido o sinal de referência é zero, pois trata-se de um problema de regulação.

O bloco “Seleção da lógica de controle” possui uma saída que deve ser multiplicada pelo controle de *swing-up* e uma saída que deve ser multiplicada pelo controle de estabilização. Estas saídas valem um ou zero, habilitando ou desabilitando o respectivo controle.

No bloco de “estabilização” encontra-se os ganhos do controlador SDRE e bloco de “*swing-up*” implementa o controlador PD que instabiliza o pêndulo.

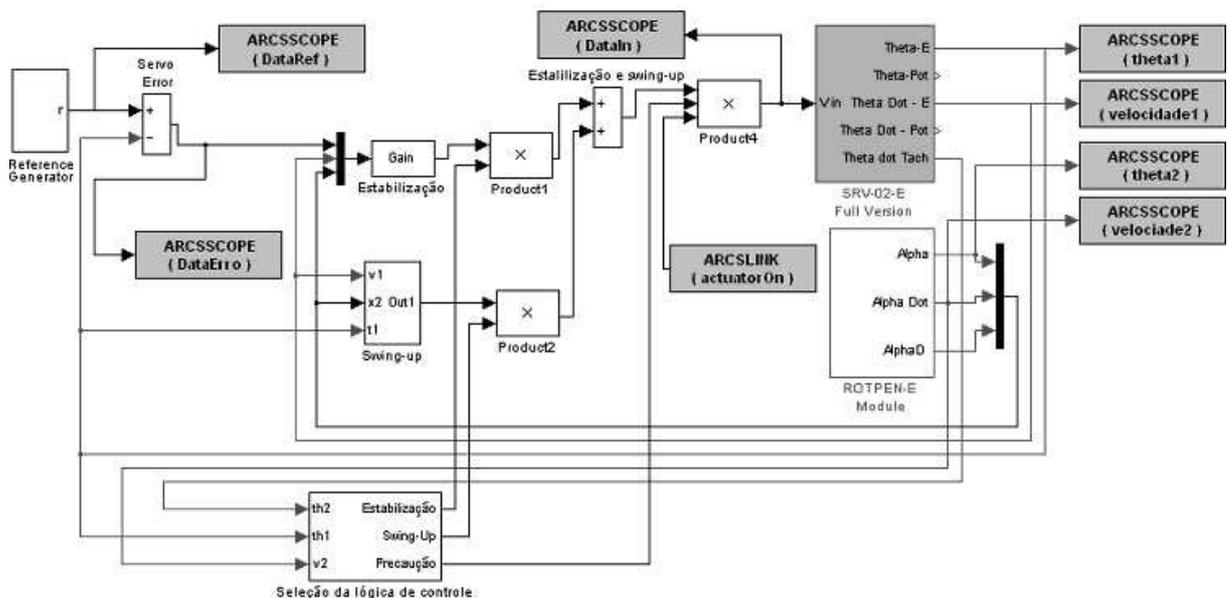


FIGURA 4.20: Diagrama Simulink: experiência do pêndulo invertido.

A figura 4.21 mostra o diagrama no Simulink do cálculo do sinal de controle e das matrizes $A(x)$ e $B(x)$ do modelo não linear do sistema.

A fim de diminuir o tempo de processamento, o modelo não linear foi implementado

TABELA 4.6: Variáveis do diagrama 4.20.

Nome	Descrição
ActuatorOn	Habilita o atuador
DataIn	Tensão aplicada ao motor
Theta1	Posição angular do braço
Velocidade1	Velocidade angular do braço
Theta2	Posição angular do pêndulo
Velocidade2	Velocidade angular do pêndulo
DataRef	Sinal de referência
DataErro	Diferença entre o sinal de referência e o ângulo do braço

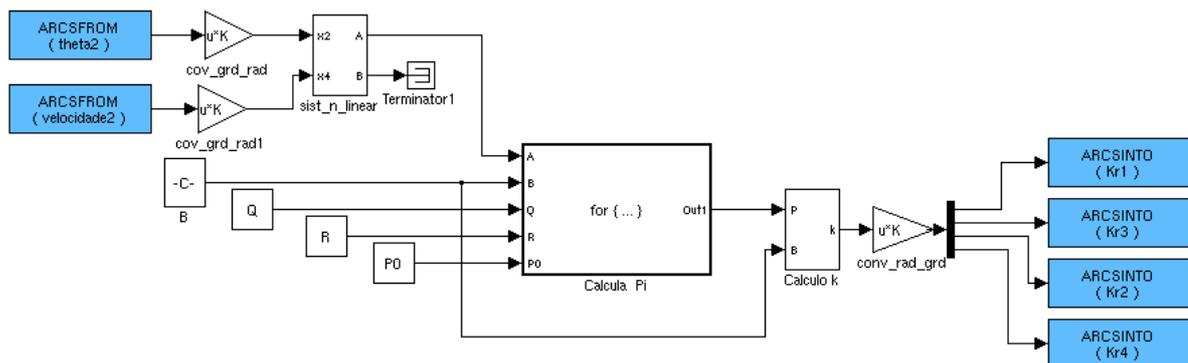


FIGURA 4.21: Diagrama Simulink: representação o modelo não linear do sistema e os ganhos do controlador SDRE.

de forma analítica apresentada em (4.38) – (4.39), considerando-se as condições de contorno da subseção 4.2.1.1 no bloco “sist_n_linear”.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{r \cos(\alpha) m_p g}{-m_p r^2 J_b + m_p r^2 \cos(\alpha)^2} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} & 0 & \frac{-(m_p r I_p \dot{\alpha} \text{sen}(\alpha))}{-m_p r^2 - J_b + m_p r^2 \cos(\alpha)^2} \\ 0 & \frac{-(m_p r^2 + J_b) g / I_p}{-m_p r^2 J_b + m_p r^2 \cos(\alpha)^2} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} & 0 & \frac{r^2 \cos(\alpha) m_p \dot{\alpha} \text{sen}(\alpha)}{-m_p r^2 - J_b + m_p r^2 \cos(\alpha)^2} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{-m_p r^2 J_b + m_p r^2 \cos(\alpha)^2} \\ \frac{r}{I_p} \frac{\cos(\alpha)}{-m_p r^2 - J_b + m_p r^2 \cos(\alpha)^2} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

O algoritmo de Kleinman na figura 4.19 é implementado no bloco “calcula P_i ” onde 3 iterações são realizadas para obter-se a solução da equação de Riccati aproximada fornecendo os ganhos do controlador no bloco “estabilização” da figura 4.20.

O diagrama na figura 4.21 é o subsistema do bloco “calcula P_i ”. O cálculo P_{i+1} é fornecido pela solução da equação de Lyapunov $A_m^T P + P A_m = -Q_m$ onde $A_m = A + B K_i^T$ e $Q_m = K_i R K_i^T + Q$ (ver figura 4.19). Como mencionando anteriormente, devido a impossibilidade de utilizar-se *User-Defined Functions*, tal como *lyap.m*, é necessário resolver a equação de Lyapunov por aproximação do método de Newton. O bloco “lyapap” calcula a solução da equação de Lyapunov linear nos parâmetros em que $F = A_m^T P + P A_m + Q_m$ e

$$\begin{aligned} F(P_0 + \Delta P, \alpha_0 + \Delta \alpha) &\cong F(P_0, \alpha_0) + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial F}{\partial P} \Delta P = \\ &= F(P_0, \alpha_0 + \Delta \alpha) + \frac{\partial F}{\partial P} \Delta P = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde $F(P_0, \alpha_0) = 0$ pela própria definição de F e ΔF é a variação da função de Lyapunov F em relação aos parâmetros A_m e Q_m . Assim, $\Delta P = -J^{-1} \Delta F$ onde $J = \frac{\partial F}{\partial P}$ foi pré-calculado simbolicamente. Para o cálculo de ΔF , considerou-se que $P_0 = 0$ obtendo-se $\Delta F = Q_m$.

Os primeiros testes foram realizados com pequenos ângulos, aproximando os ganhos do controlador SDRE aos ganhos do controlador LQR ($u = -[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T x$), implementados como descrito na tabela 4.7.

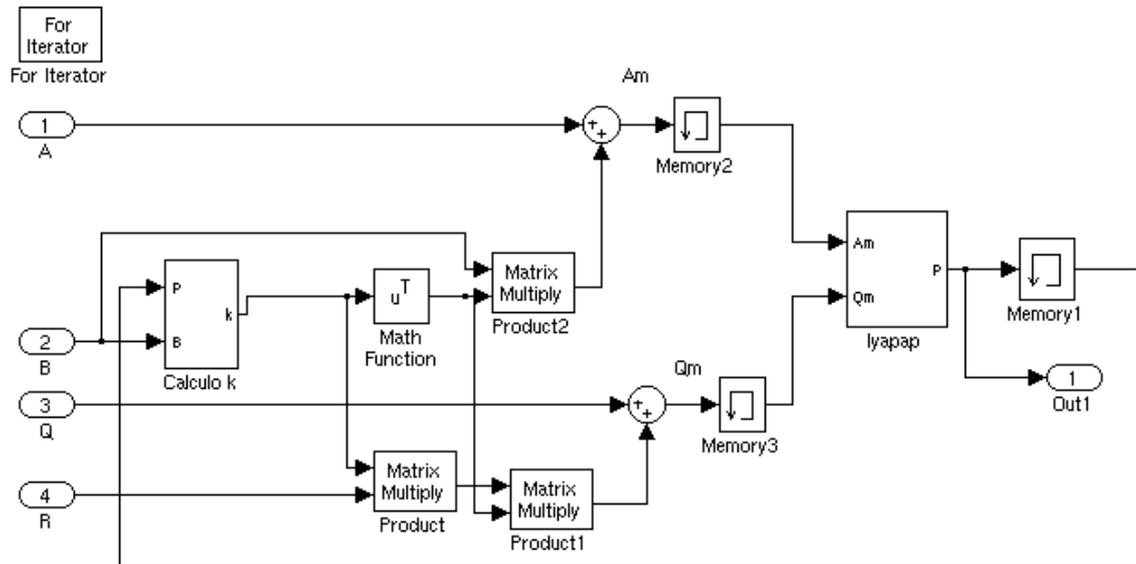


FIGURA 4.22: Diagrama Simulink: cálculo do P_{i+1} .

TABELA 4.7: Parâmetros do controlador LQR na implementação do pêndulo rotativo da Quanser.

Parâmetro	Valor
k_1	-0.039
k_2	-0.033
k_3	-0.32
k_4	-0.033

Para se obterem os ganhos dos controladores LQR e SDRE, foram utilizadas as matrizes de penalidades $Q(x) = \text{diag}([q_1; q_2 \ q_3 \ q_4])$ e R apresentadas na tabela 4.8.

TABELA 4.8: Parâmetros da equação de Riccati na implementação do pêndulo rotativo da Quanser.

Parâmetro	Valor
q_1	0.25
q_2	4
q_3	0
q_4	0.1
R	0.05

As figuras 4.23 – 4.24 apresentam os resultados experimentais dos controladores LQR e SDRE, com condições iniciais $x_0 = [0 \ 20^0 \ 0 \ 0]^T$. Pode-se constatar que com a escolha da matriz de penalidade na tabela 4.8, o desempenho dos dois controladores se assemelham, contudo a figura 4.24 evidencia um maior esforço por parte do controlador LQR em relação ao controlador SDRE na estabilização do pêndulo. Na figura 4.25, observa-se a variação dos ganhos do controlador SDRE ao longo do tempo.

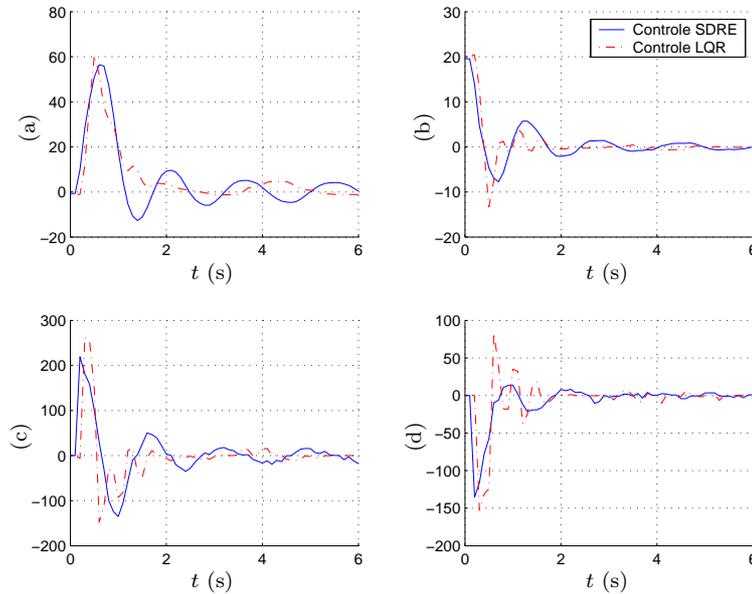


FIGURA 4.23: Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE (linha sólida) e LQR (linha tracejada) com $x_0 = [0 \ 20^0 \ 0 \ 0]^T$: resposta do sistema; (a) θ (graus); (b) α (graus); (c) $\dot{\theta}$ (graus/s); (d) $\dot{\alpha}$ (graus/s).

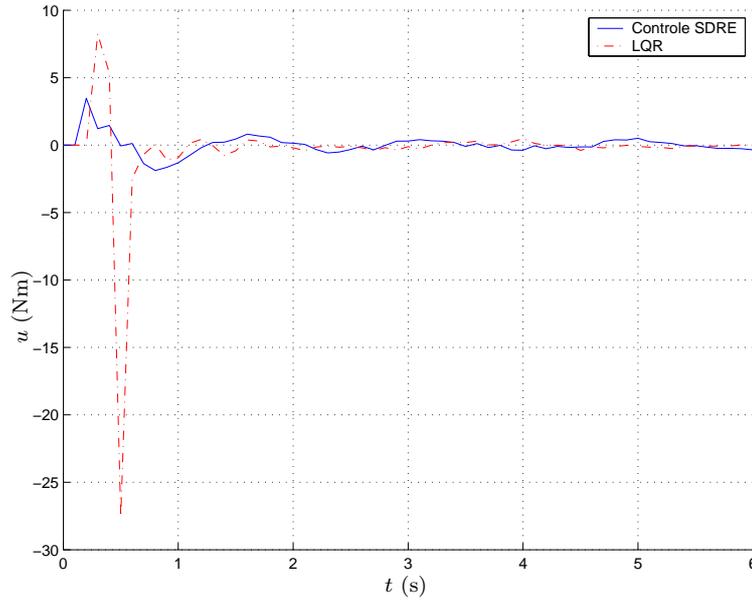


FIGURA 4.24: Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE (linha sólida) e LQR (linha tracejada) com $x_0 = [0 \ 20^0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle.

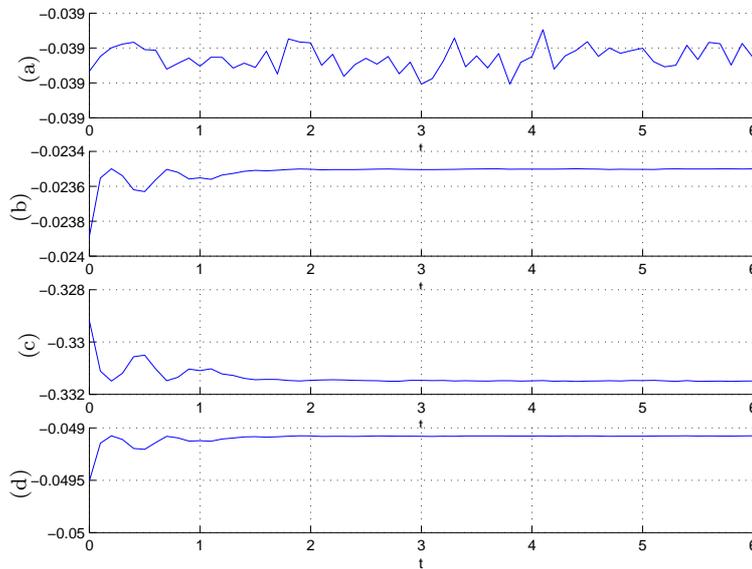


FIGURA 4.25: Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE com $x_0 = [0 \ 20^0 \ 0 \ 0]^T$: ganho do controlador; (a) k_1 ; (b) k_2 ; (c) k_3 ; (d) k_4 .

Com o intuito de avaliar a região de convergência em torno do ponto de equilíbrio instável, aumenta-se o ângulo inicial α , de forma que o novo estado inicial x_0 seja representado por $x_0 = [-40^0 \ 30^0 \ 0 \ 0]^T$. A necessidade da variação do ângulo θ se deve à restrição do movimento do braço no plano horizontal.

Os resultados experimentais são mostrados nas figuras 4.26, 4.27 e 4.28 para os controladores LQR e SDRE, respectivamente. Pode-se observar que o sistema realimentado com o controlador LQR não converge, porém o controlador SDRE consegue levar o pêndulo para a posição de equilíbrio desejada.

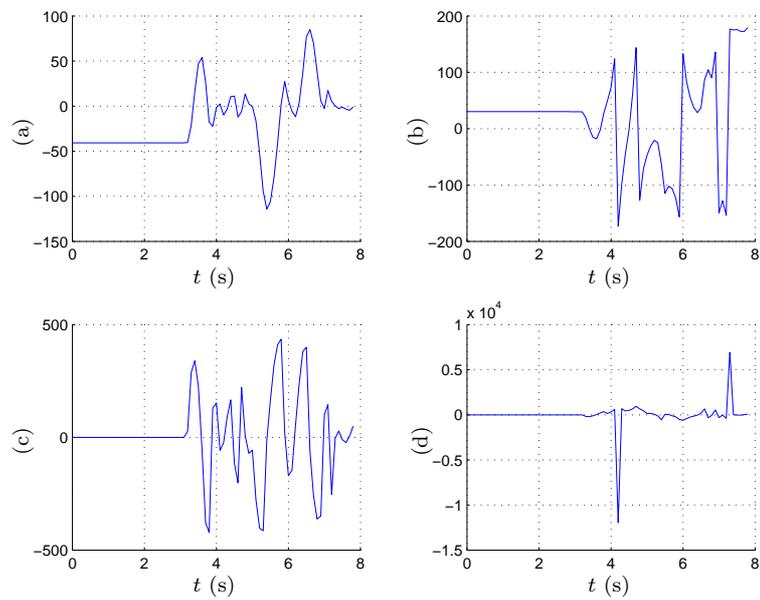


FIGURA 4.26: Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador LQR com $x_0 = [-40^0 \ 30^0 \ 0 \ 0]^T$: resposta do sistema; (a) θ (graus); (b) α (graus); (c) $\dot{\theta}$ (graus/s); (d) $\dot{\alpha}$ (graus/s).

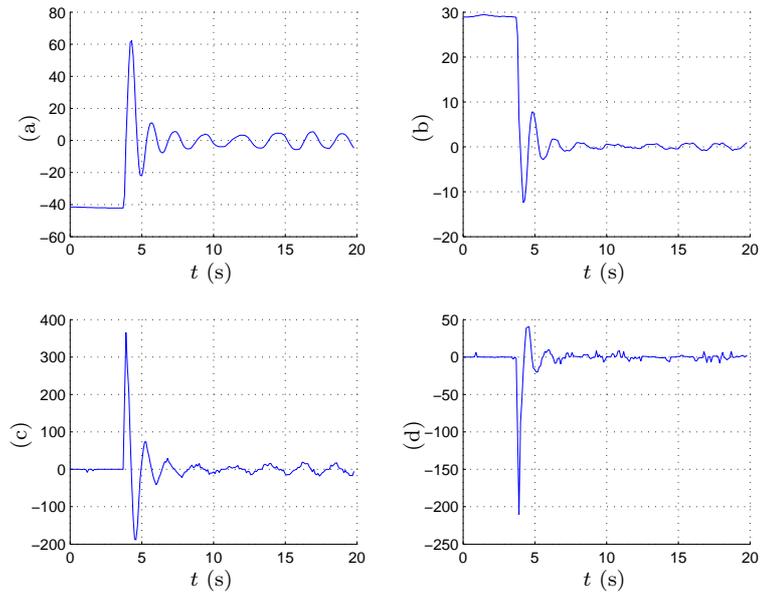


FIGURA 4.27: Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE com $x_0 = [-40^0 \ 30^0 \ 0 \ 0]^T$: resposta do sistema; (a) θ (graus); (b) α (graus); (c) $\dot{\theta}$ (graus/s); (d) $\dot{\alpha}$ (graus/s).

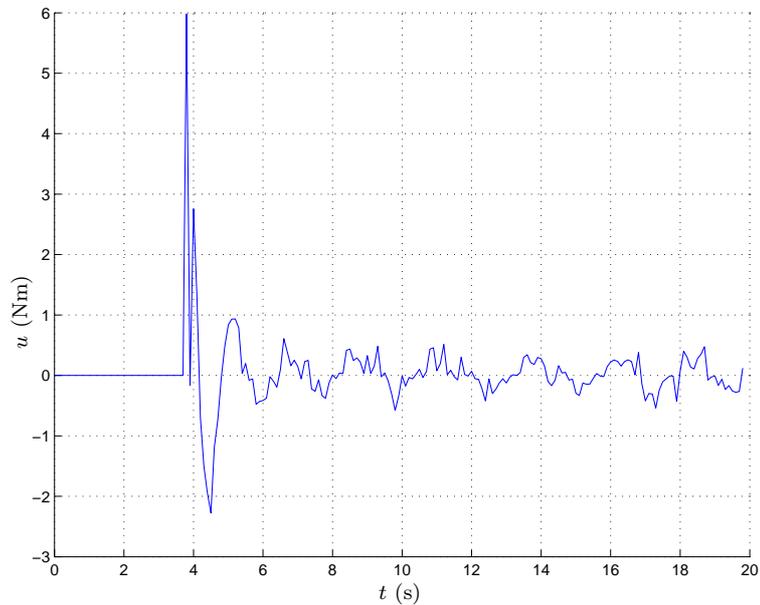


FIGURA 4.28: Pêndulo rotativo da Quanser realimentado com o controlador SDRE com $x_0 = [-40^0 \ 30^0 \ 0 \ 0]^T$: sinal de controle.

4.4 Conclusão

O controle SDRE foi aplicado ao carro-pêndulo e pêndulo rotativo na simulação do *swing up* mostrando sua capacidade em estabilizar globalmente o sistema. Entretanto, a estabilidade global assintótica não é garantida.

Além disso, comparou-se o controle SDRE com SSVSC, no carro-pêndulo, observando que os dois controles conseguem realizar *swing up*. Também verificou-se a robustez do controle SDRE à ruído de medição.

O método de controle não linear SDRE oferece uma grande flexibilidade de projeto, podendo ser explorado para atingir um desempenho desejado. Em razão da sua formulação implicitamente dependente do estado, fica clara a sua adequação à implementação *on-line*. Infelizmente, a complexidade computacional para resolver a equação de Riccati tem impedido as aplicações através SDRE. As vantagens oferecidas aqui têm mais relevância que a complexidade computacional, uma vez que esta deixa de ser um problema pelo desenvolvimento de dispositivos com maior poder computacional.

A principal contribuição deste capítulo foi a utilização do controlador não linear SDRE na implementação do pêndulo rotativo da Quanser. Neste experimento, um sistema não linear de 4^a ordem pode ser controlado em tempo real com a taxa de amostragem de 10 Hz nas proximidades do ponto de equilíbrio instável. Pode-se observar que o desempenho do controlador SDRE é tão bom quanto o controlador clássico LQR com ganhos constantes, e possivelmente melhor se a flexibilidade de projeto do SDRE for completamente utilizada.

O uso do referido controlador apresentou uma maior robustez à perturbações externas, além de um aumento significativo da região de convergência em torno do ponto de equilíbrio instável, quando comparado à abordagem clássica do LQR.

É importante salientar a inviabilidade da realização do *swing-up* a partir do ponto de equilíbrio estável ($\alpha = \pi$), devido a limitações físicas do esquema considerado como, por exemplo, o baixo torque no motor (1 Nm) (Apkarian 1995).

Capítulo 5

A Estabilização global de Sistemas com Controle SDRE

Sabe-se que as Funções de Lyapunov de Controle (CLF) (Sontag 1989, Artstein 1983, Sontag 1983) podem ser utilizadas no desenvolvimento de leis de controle assintoticamente estabilizantes para sistemas não lineares. O desempenho do controlador depende da CLF utilizada e a existência de uma CLF pode conduzir à estabilização assintótica do sistema. Neste capítulo introduz-se um novo conceito denominado CLF exponencial, ou seja, uma CLF que permite encontrar uma lei de controle que estabilize exponencialmente o sistema, ao menos em uma representação de estados adequada.

Um método de estabilização, desenvolvido no artigo (Curtis & Beard 2002), consiste em realizar a projeção “ponto a ponto” do controle SDRE num conjunto de leis de controle para as quais a estabilidade do sistema realimentado é garantida, unindo o bom desempenho do controle SDRE com a garantia de estabilidade deste conjunto. No artigo de (Curtis & Beard 2002) o conjunto considerado é chamado conjunto satisfatório. Este método garante estabilidade em malha fechada, modificando o controlador SDRE quando necessário, utilizando um sinal de controle do conjunto satisfatório gerado através de uma CLF.

Uma das classes de sistemas para a qual se pretende provar a estabilidade exponencial com o controlador SDRE é a dos sistemas que podem ser levados para a forma normal. Sabe-se que todo sistema não linear linearizável por realimentação pode ser colocado na forma normal via transformação e realimentação de estado (*Linearização*

por Realimentação). A principal razão de se trabalhar com esta classe de sistemas é que a equação de Riccati fornece uma CLF explícita. Então, um controle exponencialmente estabilizante é proposto utilizando a CLF exponencial e o método SDRE.

Neste capítulo também será apresentado o controlador *backstepping* (Khalil 2002). *Backstepping* é um processo recursivo que combina a escolha de uma função de Lyapunov com o projeto de controle realimentado. Esta técnica garante forte propriedade de estabilidade global.

Por fim, compara-se os controladores exponencialmente estabilizante (controlador SDRE/EE) com o *backstepping*.

5.1 Estabilização de Sistemas no Conjunto Satisfatório

5.1.1 Noção Básica de Controle Satisfatório

Nesta seção, apresenta-se o controlador satisfatório desenvolvido por Curtis & Beard (2001), que utiliza a teoria de decisão satisfatória, apresentada em (Simon 1955, Godrich, Stirling & Frost 1998), juntamente com Funções de Lyapunov de Controle (Artstein 1983, Sontag 1983), definidas a seguir.

Definição 5 (ver (Sepulchre, Jankovic & Kokotović 1997)) Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com derivadas de primeira ordem contínuas (C^2), é uma Função de Lyapunov de Controle (CLF) para o sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (5.1)$$

se $V(x)$ for definida positiva, radialmente ilimitada e se $\exists u$

$$\inf_u V_x^T (f + gu) < 0, \quad (5.2)$$

para $\forall x \neq 0$, onde $V_x = \nabla V(x)$.

■

As CLFs podem ser construídas pela técnica de *backstepping* do integrador para sistemas com uma estrutura em cascata. Porém, encontrar uma CLF de forma sistemática para um sistema não linear é geralmente um problema em aberto.

Para o desenvolvimento do controle satisfatório, Curtis & Beard (2001) associaram a noção de seletividade à estabilidade e a noção de rejeitabilidade com custo instantâneo do controle.

Define-se a função seletividade como:

$$p_s(u, x) = -V_x^T(f + gu), \quad (5.3)$$

onde $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Esta função é contínua não negativa para todo x ($V(x) \geq 0$) com $V(0) = 0$. Conclui-se então que somente controladores estabilizantes fazem $p_s(u, x)$ positivo. Já a função rejeitabilidade é definida como:

$$p_r(u, x) = l(x) + u^T R u, \quad (5.4)$$

onde $R = R^T > 0$ e $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa $\forall x$ ($l(x) \geq 0$), portanto, também tem-se $p_r \geq 0$. Observe que $l(x)$ penaliza o estado e R penaliza o sinal de controle.

O controle satisfatório é baseado, ponto a ponto, na relação custo-benefício, em que os benefícios são definidos em termos da função $V(x)$, que pode ser uma CLF (Curtis & Beard 2001), e os custos refletem a penalidade do controle e do estado. Segue, abaixo, a definição do conjunto satisfatório.

Definição 6 *O conjunto satisfatório $S(x, b)$ é definido como o conjunto de valores de controle, tal que a seletividade é maior que a rejeitabilidade multiplicada pelo índice de seletividade, isto é:*

$$S(x, b) = \{u \in \mathbb{R}^m : p_s(u, x) \geq b p_r(u, x)\},$$

onde $b > 0$ é o índice de seletividade.

Para as funções p_s e p_r definidas pelas equações (5.3) e (5.4), o conjunto satisfatório será:

$$S(x, b) = \{u \in \mathbb{R}^m : -V_x^T(f + gu) \geq b(l(x) + u^T Ru)\}. \quad (5.5)$$

Dada a definição do conjunto satisfatório $S(x, b)$ (definição 6), qualquer sinal de controle $u(x)$ contínuo em \mathbb{R}^n e pertencente a $S(x, b)$ é considerado um controle satisfatório, como apresentado na definição abaixo.

Definição 7 *A lei de controle $u=k(x)$, com $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, é um controle satisfatório se:*

1. $S(x, b(x))$ não é vazio para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $k(x) \in S(x, b(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
3. k é contínuo em \mathbb{R}^n .

Teorema 5.1 *Se $u = k(x)$ é um controle satisfatório, então o sistema em malha fechada $\dot{x} = f(x) + g(x)k(x)$ é uniformemente assintoticamente estável.*

Prova: vide (Beard et al. 2001, Gouvêa 2004).

5.1.2 Controle Satisfatório Robusto

Na seção 5.1.1 apresentou-se que todo controle satisfatório garante estabilidade assintótica. No entanto, a robustez da lei de controle satisfatório não foi considerada. A robustez à perturbações de entrada pode ser mensurada de várias maneiras, contudo uma abordagem direta é realizada através do conceito de margem de estabilidade em que se define a margem de alteração do sinal de controle pela qual é garantida a estabilidade do sistema. Esta definição é formalizada a seguir:

Definição 8 *Uma lei de controle assintoticamente estabilizante, $u = k(x)$, tem margem de estabilidade (m_1, m_2) onde*

$$-1 \leq m_1 < m_2 \leq \infty,$$

se para todo $\alpha \in (m_1, m_2)$, $u = (1 + \alpha)k(x)$ também estabiliza o sistema assintoticamente.

A margem de estabilidade é importante nas aplicações práticas. Em (Tsitsiklis & Athans 1984), mostra-se que o controle ótimo tem margem de estabilidade $[-\frac{1}{2}, \infty)$. Esta margem de estabilidade é um dos principais motivos para se considerar a lei de controle inversamente ótimo (Freeman & Kokotović 1996). Vê-se em (Sepulchre et al. 1997) que todas as leis de controle baseadas na CLF ($u = -k(x, V_x)$) satisfazendo

- $u = k(x) = -\frac{1}{2}R^{-1}(x)g^T V_x$;
- u tem margem de ganho $[-\frac{1}{2}, \infty)$.

são ótimas com relação à função custo

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} (l(x) + k^T R(x)k) dt, \quad (5.6)$$

onde $R(x) = R^T(x) > 0$ e $l(x) \geq 0 \forall x$, sendo $V(x)$ a função de Lyapunov e $x \in \mathbb{R}^n$ o estado do sistema. Sabe-se (Zubov 1966, Jacobson 1977, Sontag 1998) que o problema de controle ótimo pode ser resolvido através da solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Dessa forma, uma lei de controle inversamente ótima pode ser definida como mostrado abaixo.

Definição 9 *Uma lei de controle $u = k(x)$ que estabiliza assintoticamente o sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)k(x)$ é inversamente ótima se para todo x existir uma função $V(x)$ definida positiva e radialmente ilimitada, uma função $l(x) \geq 0$ e uma função $\tilde{R}(x) = \tilde{R}^T(x) > 0$ tal que:*

$$u = k(x) = -\frac{1}{2}\tilde{R}^{-1}g^T V_x$$

minimiza a função custo da equação (5.6), onde $V(x)$ satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$V_x^T f(x) + l(x) - \frac{1}{4}V_x^T g(x)\tilde{R}^{-1}(x)g^T(x)V_x = 0 \quad (5.7)$$

para todo x .

Este resultado foi utilizado em (Curtis & Beard 2004) para representar o subconjunto de S , chamado de conjunto satisfatório robusto.

Definição 10 O conjunto satisfatório robusto, $S_r(x)$, é um conjunto de valores de controle dependentes do estado definido como:

$$S_r(x) = \{k(x, \nu) \in S(x) : V_x^T g R^{-1/2} \nu \leq 0\}, \quad (5.8)$$

com $\|\nu\| < 1$. ■

Observa-se que $S_r(x)$ é um subconjunto de $S(x)$ em que os valores de controle tornam a derivada da função de Lyapunov mais negativa (Curtis & Beard 2004, Gouvêa 2004).

A próxima definição mostra que qualquer controlador pertencente ao conjunto satisfatório robusto é denominado controle satisfatório robusto.

Definição 11 Um controle satisfatório robusto, $k_r(x)$, é uma função que satisfaz $k_r(0) = 0$ e é localmente Lipschitz em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que $k_r(x) \in S_r(x)$ para todo x diferente de zero.

O teorema a seguir estabelece que todo controlador satisfatório robusto é inversamente ótimo e determina a sua margem de estabilidade.

Teorema 5.2 Se $k_r(x)$ é um controle satisfatório robusto, então:

1. $k_r(x)$ tem margem de estabilidade de $[-\frac{1}{2}, \infty)$;
2. $k_r(x)$ pode ser escrita da forma $k_r(x) = -\frac{1}{2} \tilde{R}^{-1}(x) g^T V_x$;
3. $k_r(x)$ é inversamente ótima.

Prova: Vide (Curtis & Beard 2004, Gouvêa 2004).

5.1.3 Projeção do Controlador SDRE no Conjunto Satisfatório

Com o intuito de projetar o controlador em S para algum x fixo, é necessário conhecer a fronteira de S (denotado por ∂S).

Para encontrar ∂S , deve-se verificar que, à medida que o parâmetro b se aproxima do infinito, a condição de pertinência a S se torna

$$V_x^T f + V_x^T g u < 0. \quad (5.9)$$

O teorema seguinte mostra que ∂S é dependente unicamente do vetor $g^T V_x$.

Teorema 5.3 *Um controle arbitrário de valor $u = -\beta g^T V_x + \xi$ (com $\xi(x)$ ortogonal a $g^T V_x$) está dentro de S se e somente se*

$$\beta > \frac{V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}. \quad (5.10)$$

Prova: Seja a condição de pertinência em S

$$V_x^T f + V_x^T g u < 0$$

$$V_x^T g u < -V_x^T f.$$

Substituindo $u = -\beta g^T V_x + \xi$, obtém-se

$$-\beta V_x^T g g^T V_x + V_x^T g \xi < -V_x^T f.$$

Como ξ é ortogonal a $g^T V_x$, o produto $V_x^T g \xi = 0$, logo

$$\begin{aligned} -\beta V_x^T g g^T V_x &< -V_x^T f \\ \beta &> \frac{V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}. \end{aligned}$$

■

A restrição de β (parte de u que é paralela a $g^T V_x$) pode ser visualizada geometricamente na figura 5.1 (Curtis & Beard 2001). O conjunto satisfatório é a região do espaço de controle, para todo x fixo, que contém todos os valores do controle que atendam à condição da equação (5.9). Também é um espaço semi-aberto, limitado por um hiperplano que é perpendicular ao vetor $g^T V_x$.

A fronteira de S_R (∂S_R) pode ser encontrada de forma análoga à análise anterior, somente com a restrição adicional de que um valor de controle arbitrário u_R em S_R precisa satisfazer $\alpha u_R \in S$, onde $\alpha \in [\frac{1}{2}, \infty)$.

Teorema 5.4 *Um controle arbitrário de valor $u = -\beta g^T V_x + \xi$ (com $\xi(x)$ ortogonal a $g^T V_x$) está dentro S_R se e somente se*

$$\beta > \max \left(0, \frac{2 V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x} \right). \quad (5.11)$$

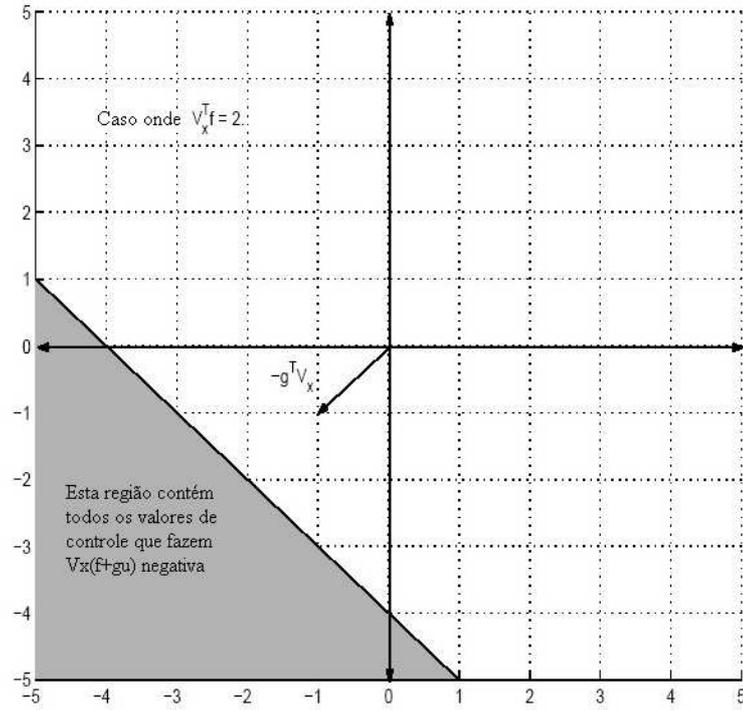


FIGURA 5.1: Conjunto satisfatório no espaço de controle 2-D.

Prova: Primeiramente, nota-se que quando $-u_R^T g^T V_x > 0$ (ou $u_R = -\beta g^T V_x + \xi$ com $\beta > 0$), obtém-se, conseqüentemente, que a margem de estabilidade aumenta com ganho infinito uma vez que $-\alpha u_R^T g^T V_x > 0$ para qualquer $\alpha \geq 1$. Assim, a condição requerida para aumentar a margem de estabilidade para um controle satisfatório robusto arbitrário reduz-se a tornar $\beta \geq 0$. A condição sobre u_R para reduzir a margem de ganho em 50% (assumindo que $\beta \geq 0$ já foi satisfeito) pode ser dada por:

$$\begin{aligned} V_x^T f + \frac{1}{2} V_x^T g u_R &< 0 \\ V_x^T g u_R &< -2 V_x^T f. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Substituindo $u_R = -\beta g^T V_x + \xi$ em (5.12), obtém-se

$$-\beta V_x^T g g^T V_x + V_x^T g \xi < -2 V_x^T f.$$

Como ξ é ortogonal a $g^T V_x$, o produto $V_x^T g \xi = 0$, logo

$$\begin{aligned} -\beta V_x^T g g^T V_x &< -2 V_x^T f \\ \beta &> \frac{2 V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

As condições $\beta \geq 0$ e (5.13) implicam em (5.11). ■

Portanto, ∂S_R pode ser interpretada (ver figura 5.2 (Curtis & Beard 2001)) como um hiperplano aberto que é perpendicular a $-g^T V_x$ e que está dentro de S (exceto quando $g^T V_x = 0$, que é o ponto $S = S_R = 0$).

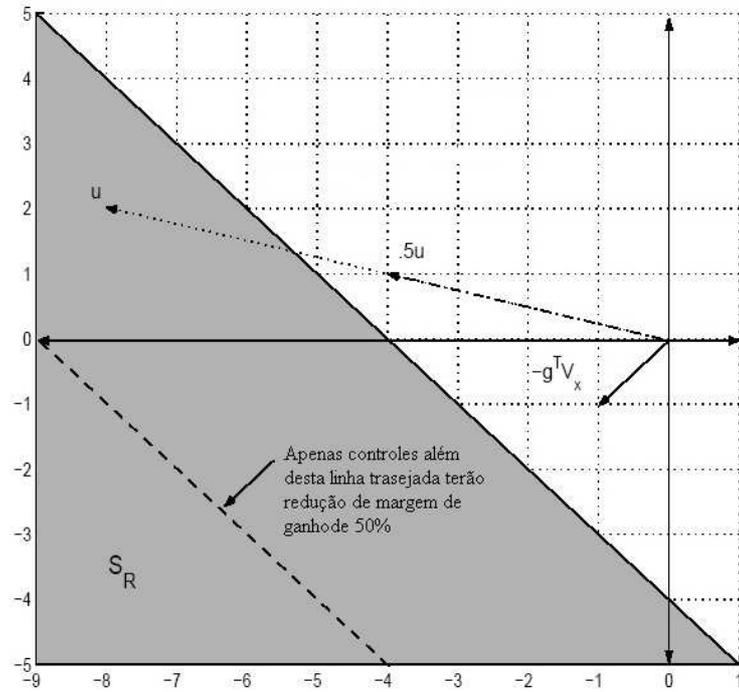


FIGURA 5.2: Margem de ganho no espaço de controle.

5.1.4 Realização da Projeção no Conjunto Satisfatório

Uma vez que a fronteira de S e S_R são hiperplanos, realizar a projeção do controle SDRE dentro destes conjuntos é relativamente simples. O teorema a seguir formaliza este procedimento que garante estabilidade do sistema com o controle SDRE modificado.

Teorema 5.5 Se u_{SDRE} é um valor do controle SDRE arbitrário e β é definido como

$$\beta = -\frac{u_{SDRE}^T g^T V_x}{V_x^T g g^T V_x}, \quad (5.14)$$

então, $\beta > \frac{V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}$ implica $u_{SDRE} \in S$. Caso contrário, o valor do controle

$$\hat{u}_{SDRE} = u_{SDRE} - \left(\frac{V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x} - \beta + \epsilon \right) g^T V_x, \quad (5.15)$$

é a projeção de u_{SDRE} no conjunto satisfatório, onde ϵ é um número muito pequeno.

Prova: (Curtis & Beard 2004) A primeira afirmação segue diretamente do Teorema 5.3. A segunda afirmativa vem do Teorema da Projeção. ■

O teorema 5.5 fornece um método construtivo para a projeção de um sinal de controle SDRE arbitrário no conjunto satisfatório S (com algum erro ϵ predeterminado).

Uma operação similar pode ser realizada para projetar um sinal de controle no conjunto satisfatório robusto S_R , se características de desempenho como robustez à perturbações de entrada e otimalidade inversa são desejadas.

Teorema 5.6 Se u_{SDRE} é um valor do controle SDRE arbitrário e β é definido como

$$\beta = -\frac{u_{SDRE}^T g^T V_x}{V_x^T g g^T V_x}, \quad (5.16)$$

então, $\beta > \max\left(0, \frac{2V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}\right)$ implica $u_{SDRE} \in S_R$. Caso contrário, o valor do controle

$$\hat{u}_{SDRE} = u_{SDRE} - \left(\max\left(0, \frac{2V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}\right) - \beta + \epsilon \right) g^T V_x, \quad (5.17)$$

é a projeção de u_{SDRE} no conjunto satisfatório robusto, onde ϵ é um número muito pequeno.

Prova: (Curtis & Beard 2004) A primeira afirmação segue diretamente do Teorema 5.4. A segunda vem do Teorema da Projeção. ■

5.2 Estabilização Exponencial

Nesta seção será discutida a estabilização exponencial de sistemas realimentados com o controlador SDRE. Como já foi dito, na seção 3.1, o controlador SDRE não garante, *a priori*, estabilidade global em malha fechada. Na seção anterior foram vistos alguns resultados sobre a análise de estabilidade e a estabilização assintótica de sistemas com controle SDRE através da projeção no conjunto satisfatório (controle satisfatório). Nesta seção define-se o conceito de CLF exponencial tendo em vista a possibilidade de encontrar uma lei de controle que garanta estabilidade exponencial e global do sistema a partir de uma lei de controle SDRE.

5.2.1 Sistemas com CLF exponencial

Seja um sistema invariante no tempo

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (5.18)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $f(0, 0) = 0$. Deseja-se projetar uma lei $\phi(x)$ para a variável de controle u tal que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema em malha fechada

$$\dot{x} = f(x, \phi(x)) \quad (5.19)$$

seja globalmente exponencialmente estável. Para tal, deseja-se encontrar uma candidata a função de Lyapunov $V(x)$ tal que sua derivada ao longo das trajetórias de (5.19) satisfaça

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, \phi(x)) < -\alpha V, \quad \forall x \neq 0, \quad (5.20)$$

sendo para uma α constante positiva. Se existir uma $V(x)$ e um α que satisfaçam (5.20), diz-se que o sistema possui uma CLF exponencial, conforme formalizado a seguir.

Definição 12 *Seja um sistema invariante no tempo*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (5.21)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ e $f(0, 0) = 0$.

Uma função suave, positiva definida e radialmente ilimitada $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ é chamada Função de Lyapunov de Controle Exponencial (CLF exponencial) se

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) \right\} < -\alpha V, \quad \forall x \neq 0, \quad (5.22)$$

onde α é uma constante positiva. ■

Para sistemas afins no controle,

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad f(0) = 0, \quad (5.23)$$

a desigualdade (5.20) torna-se

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \phi(x) < -\alpha V. \quad (5.24)$$

Se $V(x)$ é uma CLF exponencial para (5.23), então uma lei particular de controle exponencialmente estabilizante $\phi(x)$, suave para todo $x \neq 0$, é dada por

$$u = \phi(x) = \begin{cases} -\frac{(\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \alpha V) + \sqrt{(\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \alpha V)^2 + (\frac{\partial V}{\partial x} g(x))^4}}{\frac{\partial V}{\partial x} g(x)}, & \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \neq 0 \\ 0, & \frac{\partial V}{\partial x} g(x) = 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Deve-se notar que (5.24) é satisfeita somente se

$$\frac{\partial V}{\partial x} g(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} f(x) < -\alpha V, \quad (5.26)$$

ou seja,

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \alpha V < 0. \quad (5.27)$$

Neste caso pode-se afirmar, pelo lema da comparação (Khalil 2002), que $V(t)$ decresce exponencialmente. Entretanto ainda não se pode concluir a respeito da estabilização exponencial do sistema.

O teorema a seguir mostra as condições na CLF para existir u que estabilize exponencialmente o sistema.

Teorema 5.7 *Considere um sistema não linear*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (5.28)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $x = 0$ é o ponto de equilíbrio para $u = 0$ e $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio contendo a origem. Suponha que o sistema tem uma CLF exponencial $V(x)$ continuamente diferenciável tal que

$$W_1(x) \leq V(x) \leq W_2(x), \quad (5.29)$$

$\forall x \in D$ onde $W_1(x)$ e $W_2(x)$ são funções definidas, contínuas e positivas no domínio de interesse D e

$$W_1(x) \geq k_1 \|x\|^c, \quad W_2(x) \leq k_2 \|x\|^c, \quad k_1, k_2, c > 0. \quad (5.30)$$

Então existe um controle u que estabiliza exponencialmente o sistema não linear para todo $x \in D$.

Prova: Seja a derivada de $V(x)$ ao longo das trajetórias de (5.28)

$$\dot{V}(x) = V_x^T f(x) + V_x^T g(x)u. \quad (5.31)$$

A lei de controle (5.25) satisfaz a desigualdade (5.24), portanto

$$\dot{V}(x) < -\alpha V. \quad (5.32)$$

Utilizando o lema da comparação (Khalil 2002) na equação (5.32), obtém-se

$$V(t) < e^{-(\alpha t)} V(0). \quad (5.33)$$

Pela hipótese (5.29), tem-se

(i) $V(x) \leq k_2 \|x\|^c$

(ii) $V(x) \geq k_1 \|x\|^c$

Reescrevendo o item **(ii)** em termos de $\|x\|$, obtém-se

$$\|x\| \leq \left(\frac{V(x)}{k_1} \right)^{\frac{1}{c}}. \quad (5.34)$$

Utilizando a equação (5.33), tem-se

$$\|x\| \leq \left(\frac{e^{-(\alpha t)} V(0)}{k_1} \right)^{\frac{1}{c}} \quad (5.35)$$

Pelo o item **(i)**, tem-se

$$\|x\| \leq \left(\frac{e^{-(\alpha t)} k_2 \|x(0)\|^c}{k_1} \right)^{\frac{1}{c}}. \quad (5.36)$$

Assim, a estimativa do transitório é dado por

$$\|x\| < \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^{\frac{1}{c}} e^{-\left(\frac{1}{c}\alpha t\right)} \|x(0)\|. \quad (5.37)$$

Portanto, o estado do sistema decai exponencialmente a zero. Então, a origem é exponencialmente estável. ■

Se $V(x)$ e $W_1(x)$ forem radialmente ilimitadas, o sistema é globalmente exponencialmente estável.

5.2.2 Sistemas Não Lineares na Forma Normal

Nesta seção, examina-se o caso de sistemas que podem ser levados à forma normal via transformação e realimentação de estados. A principal razão de se trabalhar com tais sistemas é que a equação de Riccati fornece uma maneira construtiva para obter uma CLF.

5.2.2.1 Motivação

Para introduzir a forma normal utiliza-se o modelo de um pêndulo atuado (Khalil 2002)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a[\sin(x_1 + \delta) - \sin\delta] - bx_2 + cu. \end{aligned} \quad (5.38)$$

onde $a = g/l$, $b = k/m$, $c = 1/ml^2$, l é o comprimento da haste, m é a massa do pêndulo, k é coeficiente de atrito e δ é o ângulo que deseja-se estabilizar o pêndulo.

É fácil ver que se introduzir uma nova variável de controle v através da substituição

$$u = \frac{a}{c} [\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen}\delta] + \frac{v}{c} \quad (5.39)$$

cancela-se o termo não linear $a[\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen}\delta]$. O sistema resultante é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + v. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Na realidade a substituição (5.39) corresponde a fazer uma realimentação de estados que torna o sistema linear (linearização por realimentação). Desta forma, o problema de estabilização de um sistema não linear é reduzido ao problema de estabilização de um sistema linear controlável.

Utilizando a lei de controle por realimentação de estados linear

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2 \quad (5.41)$$

para alocar os pólos do sistema em malha fechada nos valores desejados, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1x_1 - (k_2 + b)x_2. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Logo, o sistema será estável para valores de k_1 e k_2 apropriados.

Portanto, a lei de controle por realimentação de estados é dada por

$$u = \frac{a}{c} [\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen}\delta] - \frac{1}{c}(k_1x_1 + k_2x_2). \quad (5.43)$$

Contudo, não espera-se que seja sempre possível obter um cancelamento das não linearidades de maneira simples para o caso geral. Na realidade, o cancelamento só é possível se o sistema satisfizer certas propriedades estruturais. O cancelamento por uma subtração de um termo não linear $d(x)$ ocorre quando o sinal de controle u e a não linearidade $d(x)$ aparecem somados na forma $u + d(x)$. Para cancelar por divisão um

termo não linear $\gamma(x)$, o sinal de controle u e a não linearidade $\gamma(x)$ devem aparecer como um produto $\gamma(x)u$. Se a matriz $\gamma(x)$ é não singular no domínio de interesse, então esta pode ser cancelada por $u = \beta(x)v$, onde $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ é a inversa da matriz $\gamma(x)$. Conseqüentemente, o sistema não linear é linearizado por realimentação e a equação de estado passa a ter a seguinte estrutura, denominada Forma Normal

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - d(x)], \quad (5.44)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, A é $n \times n$, B é $n \times p$, e o par (A, B) é controlável, a função $d(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $\gamma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ são definidas no domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contém a origem, e a matriz $\gamma(x)$ é não singular $\forall x \in D$.

Para linearizar o sistema (5.44), pode-se utilizar a seguinte lei de controle

$$u = d(x) + \beta(x)v, \quad (5.45)$$

onde $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$.

Substituindo (5.45) em (5.44), obtém-se o seguinte sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bv. \quad (5.46)$$

Finalmente, para estabilizar o sistema (5.46), projeta-se $v = -Kx$, de forma que $A - BK$ seja *Hurwitz*, o que é sempre possível devido a hipótese do sistema ser controlável.

A lei de controle não linear final é

$$u = d(x) - \beta(x)Kx.$$

Suponha-se que a equação de estado não linear não tenha a estrutura (5.46). Mesmo assim pode-se eventualmente tentar linearizar o sistema via realimentação lembrando que as variáveis de estado podem ser transformadas obtendo-se uma nova representação de estado. Resumindo, deseja-se descobrir as condições para que um sistema não linear possa ser levado à forma normal (5.44), utilizando uma mudança de variáveis

$$z = T(x). \quad (5.47)$$

Definição 13 *Um sistema não linear*

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u, \quad (5.48)$$

onde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $G : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ são suficientemente suaves em um domínio de interesse $D \subset \mathbb{R}^n$, é dito linearizável por realimentação se existir um difeomorfismo $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $D_Z = T(D)$ contém a origem e a mudança de variáveis $z = T(x)$ transforma o sistema (5.48) na forma

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - d(x)] \quad (5.49)$$

com (A, B) controlável e $\gamma(x)$ não singular para todo $x \in D$.

5.2.2.2 Transformação para a Forma Normal

A seguir, será apresentada uma condição necessária e suficiente para que um dado sistema possa ser levado à forma normal. Para isso, serão introduzidos alguns conceitos básicos necessários para o entendimento do teorema correspondente.

Definição 14 *Seja $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ uma função escalar suave e $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ um campo vetorial suave no \mathbb{R}^n . Então, a derivada de Lie de h com respeito a f ou ao longo de f é uma função escalar definida por*

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x). \quad (5.50)$$

Esta é a noção familiar da derivada de h ao longo das trajetórias do sistema $\dot{x} = f(x)$.

A seguinte notação é conveniente quando se repete o cálculo da derivada com respeito ao mesmo vetor de campo. Por exemplo,

$$\begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) \\ L_f^2 h(x) &= L_f L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} f(x) \\ L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h)}{\partial x} f(x). \end{aligned}$$

Analogamente, se g é outro campo vetorial, a derivada de Lie pode ser calculada com

o novo campo vetorial

$$L_g L_f h(x) = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g(x). \quad (5.51)$$

Definição 15 Considere-se o seguinte sistema não linear

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x). \end{aligned} \quad (5.52)$$

O sistema (5.52) possui grau relativo ρ , $1 \leq \rho \leq n$, na região $D_0 \subset D$ se

$$\begin{aligned} L_g L_f^{i-1} h(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, \rho - 1 \\ L_g L_f^{\rho-1} h(x) &\neq 0, \end{aligned}$$

para $\forall x \in D_0$.

Segue a seguir a definição da operação denominada colchete de Lie (Dubrovin, Fomenko & Novikov 1984).

Definição 16 Sejam f e g dois campos vetoriais em $D \subset \mathbb{R}^n$, o **colchete de Lie** $[f, g]$ é um outro campo vetorial definido por

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (5.53)$$

onde $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são matrizes jacobianas.

O **colchete de Lie** $[f, g]$ é comumente escrito como $ad_f g(x)$, onde ad significa adjunto.

Colchetes de Lie repetidos podem ser definidos recursivamente por

$$\begin{aligned} ad_f^0 g(x) &= g(x) \\ ad_f g(x) &= [f, g](x) \\ ad_f^k g(x) &= [f, ad_f^{k-1} g(x)], \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Definição 17 Um conjunto de campos vetoriais $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ é dito **involutivo** se

e somente se existem funções escalares $\alpha_{ijk} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ tais que

$$[f_i, f_j](x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk}(x) f_k(x), \quad \forall i, j. \quad (5.54)$$

Involutividade significa que o colchete de Lie formado por qualquer par de campos vetoriais do conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ pode ser expresso como uma combinação linear desses mesmos campos vetoriais.

O teorema que se segue fornece condições necessárias e suficientes para a solução de equações diferenciais em derivadas parciais (EDP) de primeira ordem.

Teorema 5.8 (Frobenius) *Sejam f_1, f_2, \dots, f_k um conjunto de campos vetoriais linearmente independentes. Este conjunto é completamente integrável se e somente se for involutivo.*

Definição 18 *Considere os campos vetoriais f_1, f_2, \dots, f_k em $D \subset \mathbb{R}^n$. Seja*

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)\} \quad (5.55)$$

o sub-espaço do \mathbb{R}^n gerado pelos vetores de f_1, f_2, \dots, f_k para todo $x \in D$ fixo. A coleção de todos os espaços vetoriais $\Delta(x)$ para cada $x \in D$ é chamada **distribuição**, sendo referida por

$$\Delta(x) = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}. \quad (5.56)$$

A dimensão de $\Delta(x)$, definida por

$$\dim(\Delta(x)) = \text{posto}[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)] \quad (5.57)$$

pode variar com x , mas se $\Delta(x) = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$, onde $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ são linearmente independentes para todo $x \in D$, então $\dim(\Delta(x)) = k, \forall x \in D$. Neste caso, é dito que $\Delta(x)$ é uma distribuição não singular em D , gerada por f_1, f_2, \dots, f_k .

Definição 19 *Uma distribuição Δ é involutiva se*

$$g_1 \in \Delta \text{ e } g_2 \in \Delta \Rightarrow [g_1, g_2] \in \Delta. \quad (5.58)$$

Se Δ é não singular em D , então Δ é involutiva se e somente se

$$[f_i, f_j] \in \Delta, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k. \quad (5.59)$$

Os sistemas que atendem ao teorema abaixo podem ser levados à forma normal (Khalil 2002).

Teorema 5.9 *O sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ pode ser transformado na forma normal se e somente se existir um domínio $D_0 \subset D$ tal que*

1. *A matriz $\mathcal{G}(x) = [g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)]$ possui posto n para $\forall x \in D_0$;*
2. *A distribuição $\mathcal{D} = \text{span}\{g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{m-2} g(x)\}$ é involutiva em D_0 .*

Teorema 5.10 *Considere o sistema não linear (5.52), e suponha que ele possua grau relativo $\rho = n$ em D , então $\forall x \in D$, existe uma vizinhança N de x_0 tal que o mapeamento*

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{k-1} h(x) \end{bmatrix}$$

restrito a N , é um difeomorfismo em N . As funções $\gamma(x)$ e $d(x)$ são determinadas

$$\gamma(x) = L_g L_f^{\rho-1} \text{ e } d(x) = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1}} \quad (5.60)$$

em termos de f , g e h

■

Para ilustrar o uso dos teoremas 5.9 e 5.10 será apresentado um exemplo a seguir.

Exemplo 5.1 *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Calculando o colchete de Lie do sistema (5.61), obtém-se

$$ad_f g = [f, g] = -\frac{\partial f}{\partial x} g = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

Sendo

$$\mathcal{G}(x) = [g, ad_f g] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

onde o posto(\mathcal{G}) = 2, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. A distribuição $\mathcal{D} = \text{span}\{g\}$ é involutiva. Desta forma, as condições do teorema 5.9 são satisfeitas no domínio $D_0 \in \mathbb{R}^2$. Para achar a mudança de variáveis que transforma o sistema na forma normal, deve-se encontrar $h(x)$ que satisfaça

- $\frac{\partial h}{\partial x} g = 0$;
- $\frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g \neq 0$;
- $h(0) = 0$.

Da condição $\frac{\partial h}{\partial x} g = 0$, tem-se

$$\frac{\partial h}{\partial x} g = \frac{\partial h}{\partial x_2} g = 0. \quad (5.64)$$

Logo, h deve ser independente de x_2 . Portanto,

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1^3 + x_2). \quad (5.65)$$

A condição

$$\frac{\partial(L_f h)}{\partial x} g = \frac{\partial(L_f h)}{\partial x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_1} \quad (5.66)$$

é satisfeita no domínio D_0 por qualquer escolha de h , para a qual $(\frac{\partial h}{\partial x_1} \neq 0)$. Escolhendo $h(x) = x_1$, tem-se a seguinte transformação de variável

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 - x_1^3 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo o sistema com as novas variáveis

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= 2z_1z_2 - 3z_1^2z_2 + u,\end{aligned}\tag{5.67}$$

este é levado à forma normal.

5.2.2.3 Projeto do Sinal de Controle Exponencialmente Estabilizante

Nessa seção, mostra-se que o sistema na forma normal tem uma CLF exponencial dada pela equação de Riccati, como enunciado no teorema a seguir.

Teorema 5.11 *Considere-se um sistema não linear representado na forma normal*

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - d(x)].\tag{5.68}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, as funções $\alpha(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $\gamma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ são funções definidas num domínio D que contém a origem e a matriz $\gamma(x)$ é não singular $\forall x \in D$. Se P_0 é a solução da equação de Riccati para o par (A, B) e $\alpha < \lambda_{\min}(Q)$, sendo α a taxa de decaimento exponencial de V e Q a matriz de penalidade da equação de Riccati. Então,

$$V = x^T P_0 x\tag{5.69}$$

é uma Função de Lyapunov de Controle exponencial (CLF exponencial) com coeficiente α .

Prova: Considere-se o sistema na forma normal e

$$V = x^T P_0 x,\tag{5.70}$$

onde P_0 é a solução da Equação de Riccati para o par (A, B) . Nota-se que A não é necessariamente uma matriz *Hurwitz*.

A função quadrática V é uma CLF exponencial se existir um sinal de controle u tal que

$$\dot{V} \leq -\alpha V.\tag{5.71}$$

A derivada de V ao longo das trajetórias de (5.68), definida por \dot{V} , é dada por

$$\dot{V} = x^T(P_0A + A^T P_0)x + 2x^T P_0 B \gamma(x)[u - d(x)]. \quad (5.72)$$

Substituindo a equação de Riccati ($A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P = -Q$) em (5.72), obtém-se

$$\dot{V} = -x^T Q x + x^T P_0 B R^{-1} B^T P_0 x + 2x^T P_0 B \gamma(x)[u - d(x)]. \quad (5.73)$$

Analisando a equação (5.73), verifica-se que quando $x^T P_0 B = 0$,

$$\dot{V} = -x^T Q x.$$

Pela desigualdade de Rayleigh

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2, \quad (5.74)$$

logo, para atender a condição (5.71), deve-se ter

$$\alpha < \lambda_{\min}(Q). \quad (5.75)$$

Note-se que é preciso que $Q > 0$ para a condição acima ser atendida. Considerando-se $x^T P_0 B \neq 0$ e satisfazendo a condição (5.71), um sinal do controle u possível seria

$$u = \begin{cases} 0 & , \dot{V} \leq -\alpha V \\ \frac{\gamma^{-1}(x) (x^T Q x - \alpha V - x^T P_0 B R^{-1} B^T P_0 x) B^T P_0 x}{2x^T P_0 B R^{-1} B^T P_0 x} + d(x) & , \dot{V} > -\alpha V. \end{cases} \quad (5.76)$$

Portanto, existe um sinal de controle que atende à condição (5.71). Então, V é uma CLF exponencial. ■

Apresenta-se no próximo teorema a estabilização exponencial de sistemas na forma normal com controle SDRE.

Teorema 5.12 *Considere-se o seguinte sistema não linear na forma normal*

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - d(x)]. \quad (5.77)$$

Seja a seguinte lei de controle modificada

$$u = \begin{cases} u_{SDRE} & , \dot{V}^* \leq -\alpha \|x\|^2 \\ u_{SDRE} + \Delta u & , \dot{V}^* > -\alpha \|x\|^2, \end{cases} \quad (5.78)$$

onde u_{SDRE} é o controle SDRE, $V = x^T P_0 x$ é uma CLF exponencial, \dot{V}^* é a derivada de V com $u = u_{SDRE}$ e

$$\Delta u = \frac{-(\gamma(x))^{-1} (\dot{V}^* + \alpha \|x\|^2) B^T P_0 x}{2x^T P_0 B B^T P_0 x}. \quad (5.79)$$

Suponha que $\alpha < \lambda_{\min}(Q)$ e $Q > 0$ então, o sistema realimentado é globalmente exponencialmente estável para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $\dot{V} \leq -\alpha \|x\|^2$.

Prova: Como V é uma CLF exponencial pelo teorema 5.11, sabe-se que existe um sinal de controle que

$$\dot{V} \leq -\alpha V. \quad (5.80)$$

Utilizando $u = u_{SDRE}$ na equação (5.73) e denominando \dot{V} como \dot{V}^* , tem-se

$$\dot{V}^* = -x^T Q x + x^T P_0 B R_{-1} B^T P_0 x + 2x^T P_0 B \gamma(x) [u_{SDRE} - d(x)]. \quad (5.81)$$

Analisando a equação (5.81), verifica-se que quando $x^T P_0 B = 0$

$$\begin{aligned} \dot{V}^* &= -x^T Q x + x^T P_0 B [R_{-1} B^T P_0 x + 2\gamma(x)(u_{SDRE} - d(x))] \\ &= -x^T Q x. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Rayleigh

$$\dot{V}^* \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2, \quad (5.82)$$

logo, para atender à condição (5.71), deve-se ter

$$\alpha < \lambda_{\min}(Q). \quad (5.83)$$

Quando $x^T P_0 B \neq 0$ e a condição (5.71) não é satisfeita, acrescenta-se uma parcela ao sinal do controle u de tal forma que $\dot{V}^* \leq -\alpha \|x\|^2$, ou seja, $\bar{u} = u_{SDRE} + \Delta u$. Substituindo o sinal de controle \bar{u} na equação (5.73), obtém-se

$$\dot{V} = \dot{V}^* + 2x^T P_0 B \gamma(x) \Delta u \leq -\alpha \|x\|^2, \quad (5.84)$$

onde o termo Δu é obtido ao colocá-lo em evidência na equação (5.84), como segue,

$$\begin{aligned} 2x^T P_0 B \gamma(x) \Delta u &\leq -(\dot{V}^* + \alpha \|x\|^2) \\ \Delta u &\leq \frac{-(\gamma(x))^{-1} (\dot{V}^* + \alpha \|x\|^2) B^T P_0 x}{2x^T P_0 B B^T P_0 x}, \end{aligned}$$

garantindo que $\dot{V} \leq -\alpha V$. Pelo lema da comparação (Khalil 2002) o sistema realimentado é exponencialmente estável. ■

5.2.3 Controle Exponencialmente Estabilizante

Para calcular o controlador SDRE com estabilização exponencial, denominado controle SDRE/EE, é necessário encontrar uma CLF exponencial para o sistema. Portanto, se o sistema estiver na forma normal a CLF exponencial é dada por $V = z^T P_0 z$ onde P_0 é a solução da equação de Riccati para o par (A,B) da forma normal.

Proposição 1 *Se existir um difeomorfismo $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $D_z = T(D)$ contém a origem e a mudança de variáveis $z = T(x)$ transforma o sistema na forma normal, então $V = z^T P_0 z$ é também uma CLF exponencial para a representação original onde P_0 a solução da equação de Riccati para o par (A,B) da forma normal.*

■

Prova: Como já foi mostrado no teorema 5.11, o sistema escrito na forma normal

$$\dot{z} = Az + B\bar{u}, \bar{u} = \gamma^{-1}(z)[u - d(z)], \quad (5.85)$$

tem uma CLF $V = z^T P_0 z$ e sabe-se que

$$\dot{V}(z) \leq -\alpha V(z). \quad (5.86)$$

Escrevendo $V(z)$ em função de x ($z=T(x)$), obtêm-se

$$V(T(x)) = T(x)^T P_0 T(x), \quad (5.87)$$

derivando $V(T(x))$ em relação ao tempo

$$\dot{V}(z) = \dot{V}(T(x)) \leq -\alpha V(z) = -\alpha V(T(x)). \quad (5.88)$$

Logo, com algum abuso de notação

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x), \quad (5.89)$$

sendo uma CLF para a representação original. ■

A CLF é calculada com as variáveis de estado do sistema original da seguinte forma

$$V = T(x)^T P_0 T(x), \quad (5.90)$$

e sua derivada no tempo é

$$\dot{V} = 2T(x)^T P_0 \nabla T(x) \dot{x}. \quad (5.91)$$

Então, o controle SDRE com estabilização exponencial (SDRE/EE) é um tipo de controle cujo os parâmetros são determinados para todo intervalo de controle utilizando o método SDRE. O procedimento para o cálculo do controle é resumido a seguir.

1. Represente o sistema com realimentação estrita na forma normal $\dot{z} = A_N z + B_N \gamma(x)[u - d(x)]$ através da transformação $z = T(x)$;
2. Calcule P_0 para o par (A_N, B_N) ;
3. Represente o sistema na forma pseudolinear $\dot{x} = A(x)x + B(x)u$;
4. Resolva a *Equação de Riccati Dependente do Estado* para obter a $P(x)$ a partir da forma pseudolinear;

5. Construa o controle SDRE/EE

$$u_{SDRE/EE} = \begin{cases} u_{SDRE} & , \dot{V}^* \leq -\alpha V \\ u_{SDRE} + \Delta u & , \dot{V}^* > -\alpha V, \end{cases} \quad (5.92)$$

onde u_{SDRE} é o controle SDRE, $V = T(x)^T P_0 T(x)$ é uma CLF exponencial, $\dot{V} = 2T(x)^T P_0 \nabla T(x) \dot{x}$, \dot{V}^* é a derivada de V com $u = u_{SDRE}$ e

$$\Delta u = \frac{-(\dot{V}^* + \alpha V) B^T \nabla^T T(x) P_0 T(x)}{2T(x)^T P_0 \nabla T(x) B B^T \nabla^T T(x) P_0 T(x)} \quad (5.93)$$

com $\alpha < \lambda_{min}(Q)$.

A seguir, será apresentado o método do *Backstepping* que também garante estabilidade ao sistema realimentado. Em seguida, controle SDRE/EE é comparado com o *backstepping* através de alguns exemplos.

5.3 Método do *Backstepping*

Considere-se o seguinte caso especial de *backstepping* do integrador para sistemas não lineares:

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \quad (5.94)$$

$$\dot{\xi} = u, \quad (5.95)$$

onde $[\eta^T, \xi]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ é o estado e $u \in \mathbb{R}$ é a entrada do controle. As funções $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ são suaves no domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contém $\eta = 0$ e $f(0) = 0$.

O objetivo deste método é projetar um controle em malha fechada que estabiliza a origem do sistema, assumindo que f e g são funções conhecidas.

Este sistema pode ser visto como uma ligação em cascata de dois subsistemas, como mostrado na figura 5.3. O primeiro subsistema é a equação (5.94), onde ξ é a entrada. O segundo subsistema é o integrador da equação (5.95). Suponha-se que a equação (5.94) do sistema possa ser estabilizada por uma lei de controle suave por realimentação

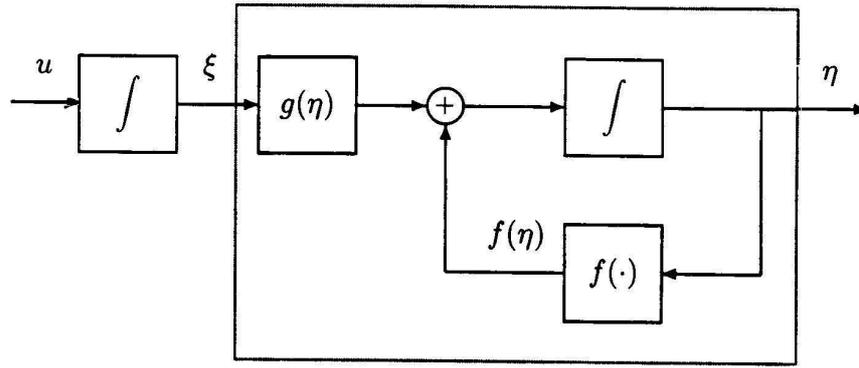


FIGURA 5.3: Representação em diagrama de blocos do sistema representado pelas equações (5.94)–(5.95).

de estado $\xi = \phi(\eta)$, com $\phi(0) = 0$. Deste modo, a origem de

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta) \quad (5.96)$$

é assintoticamente estável. Suponha-se ainda, que se conhece uma função de Lyapunov $V(\eta)$ (suave, positiva definida) que satisfaz a inequação

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta), \quad \forall \eta \in D, \quad (5.97)$$

onde $W(\eta)$ é uma matriz positiva definida. Somando e subtraindo $g(\eta)\phi(\eta)$ no lado direito da equação (5.94), a representação equivalente a seguir é obtida

$$\dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)[\xi - \phi(\eta)] \quad (5.98)$$

$$\dot{\xi} = u \quad (5.99)$$

e representada na figura 5.4.

A mudança de variáveis

$$z = \xi - \phi(\eta) \quad (5.100)$$

resulta no sistema

$$\dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z \quad (5.101)$$

$$\dot{z} = u - \dot{\phi}, \quad (5.102)$$

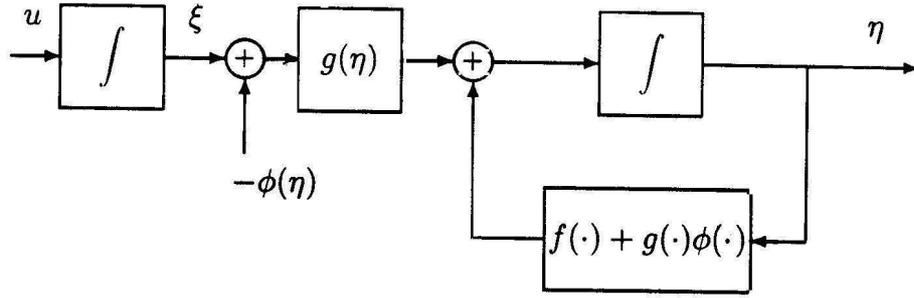


FIGURA 5.4: Representação em diagrama de blocos do sistema representado pelas equações (5.94)–(5.95) introduzindo o termo $-\phi(\eta)$.

e representado figura 5.5.

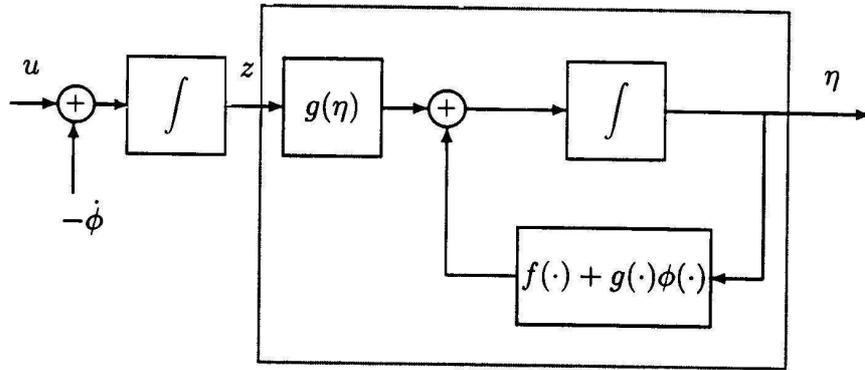


FIGURA 5.5: Representação em diagrama de blocos do sistema representado pelas equações (5.94)–(5.95) com "backstepping" do termo $-\phi(\eta)$ através do integrador.

Observando as figuras 5.3, 5.4 e 5.5, nota-se que a variável $-\phi(\eta)$ é deslocada para a entrada, caracterizando o *backstepping* através do integrador. Desde que as funções f , g e ϕ sejam conhecidas, a derivada $\dot{\phi}$ pode ser computada usando a expressão

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi]. \quad (5.103)$$

Considerando $v = u - \dot{\phi}$ em (5.102), o sistema é reduzido à conexão em cascata

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z \\ \dot{z} &= v \end{aligned}$$

que é similar ao sistema descrito pelas equações (5.94)–(5.95), com a diferença de que agora o primeiro subsistema tem uma origem assintoticamente estável quando a entrada é zero. Esta característica será explorada no projeto de v para estabilizar todo o sistema. Escolhendo

$$V_c(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2$$

como uma candidata à função de Lyapunov, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{V}_c(\eta, \xi) &= \frac{\partial V}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta)z + zv \\ &\leq -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta)z + zv.\end{aligned}$$

Escolhendo

$$v = -\frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta) - kz, \quad k > 0 \quad (5.104)$$

resulta na expressão

$$\dot{V}_c \leq -W(\eta) - kz^2$$

que mostra que a origem ($\eta = 0, z = 0$) é assintoticamente estável. Desde que $\phi(0)$ seja igual a zero, conclui-se que a origem ($\eta = 0, \xi = 0$) é assintoticamente estável. Substituindo $v = u - \dot{\phi}$, $z = \xi - \phi(\eta)$ e $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\xi]$ na equação (5.104), obtém-se a lei de controle por realimentação de estado

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)]. \quad (5.105)$$

O controlador descrito pela equação (5.105) é denominado controlador *backstepping*.

Se todas as hipóteses forem verdadeiras e $V(\eta)$ for radialmente ilimitada, conclui-se que a origem é globalmente assintoticamente estável. Essas conclusões serão resumidas no próximo lema.

Lema 5.1 *Considere-se o sistema descrito pelas equações (5.94)–(5.95). Sendo $\phi(\eta)$ uma lei de controle de realimentação de estado estabilizante para a equação (5.94) com $\phi(0) = 0$, e sendo $V(\eta)$ uma função de Lyapunov cuja derivada satisfaz (5.97) onde $W(\eta)$ é uma função positiva definida. Então, a lei de controle de realimentação de estado (5.105) estabiliza a origem de (5.94)–(5.95), com $V(\eta) + [\xi - \phi(\eta)]^2/2$ sendo*

a função de Lyapunov. Além do mais, se todas as hipóteses forem verdadeiras e $V(\eta)$ for radialmente ilimitada, a origem é globalmente assintoticamente estável.

5.4 Exemplos

5.4.1 Comparação entre *Backstepping* e SDRE

Considere-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \tag{5.106}$$

que está na forma (5.94)–(5.95) com $\eta = x_1$ e $\xi = x_2$. Deseja-se encontrar uma lei de controle $x_2 = \phi(x_1)$ que estabiliza o sistema escalar

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2$$

na origem. Utilizando a seguinte lei de controle

$$x_2 = \phi(x_1) = -x_1^2 - x_1,$$

cancela-se o termo não linear x_1^2 e obtém-se

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3.$$

Seja a função de Lyapunov $V(x_1) = x_1^2/2$ e sua derivada

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 \leq -x_1^2, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Assim, a origem de $\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3$ é globalmente exponencialmente estável.

Para realizar o *backstepping* em $\phi(x_1)$, utiliza-se a seguinte mudança de variáveis

$$z_2 = x_2 - \phi(x_1) = x_2 + x_1 + x_1^2,$$

transformando o sistema na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2). \end{aligned}$$

Utilizando

$$V_c(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$$

como uma composição das funções de Lyapunov, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_c(x) &= x_1(-x_1 - x_1^3 + z_2) + z_2[u + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2)] \\ &= -x_1^2 - x_1^4 + z_2[x_1 + (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) + u]. \end{aligned}$$

Escolhendo-se

$$u = -x_1 - (1 + 2x_1)(-x_1 - x_1^3 + z_2) - z_2$$

tem-se

$$\dot{V}_c = -x_1^2 - x_1^4 - z_2^2.$$

Consequentemente, a origem é assintoticamente estável.

Para calcular o controle SDRE é necessário escrever o sistema na forma linear dependente do estado ($\dot{x} = A(x)x + B(x)u$), obtendo-se

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (5.107)$$

onde $X = [x_1 \ x_2]^T$. Os valores dos parâmetros da Equação de Riccati dependente do estado são $Q = I_2$ e $R = 1$. Observando a figura 5.6 é possível verificar que nesse caso os dois controladores apresentam um desempenho praticamente idêntico com relação ao tempo de estabilização. Na figura 5.7(a), pode-se observar que a amplitude do sinal de controle é praticamente a mesma.

Modificando-se os parâmetros Q e R do controlador SDRE, conforme a tabela 5.1, e simulando o sistema novamente, é possível observar na figura 5.8, que o controlador SDRE apresenta um tempo de estabilização menor. Verifica-se que com uma

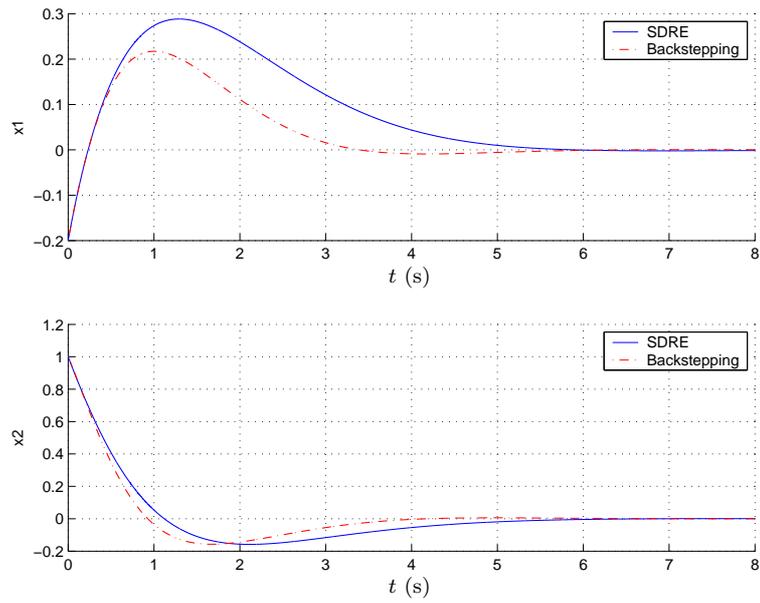
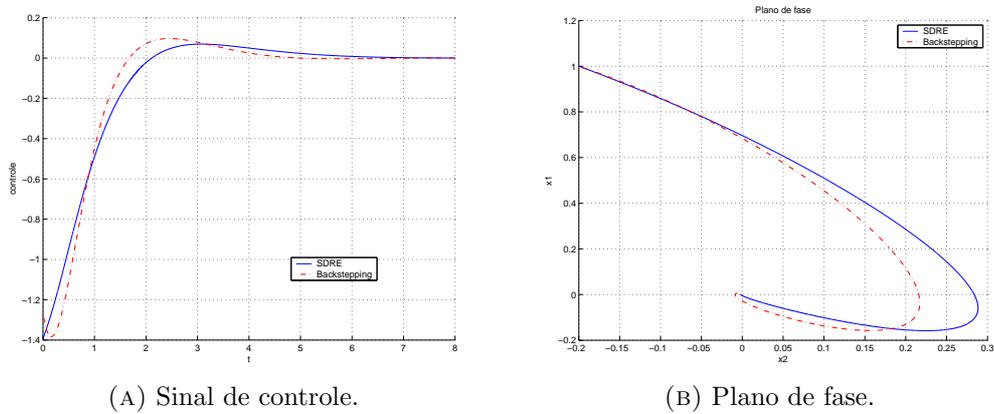


FIGURA 5.6: Comparação do controlador *backstepping* com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.106): estados do sistema.



(A) Sinal de controle.

(B) Plano de fase.

FIGURA 5.7: Comparação do controlador *backstepping* com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.106).

TABELA 5.1: Novos parâmetros do controlador SDRE utilizados na simulação do sistema (5.106)

Parâmetro	Valor
Q	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
R	0.3

simples mudança nos parâmetros do controlador SDRE, obtém-se uma convergência mais rápida dos estados, sem representar um aumento no sinal de controle (ver figura 5.9(a)). Entretanto, apenas o controlador *backstepping* garante a estabilidade do sistema realimentado.

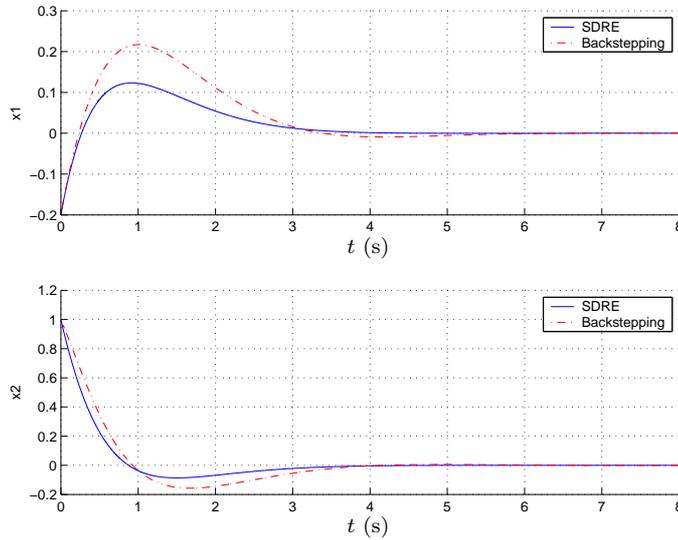
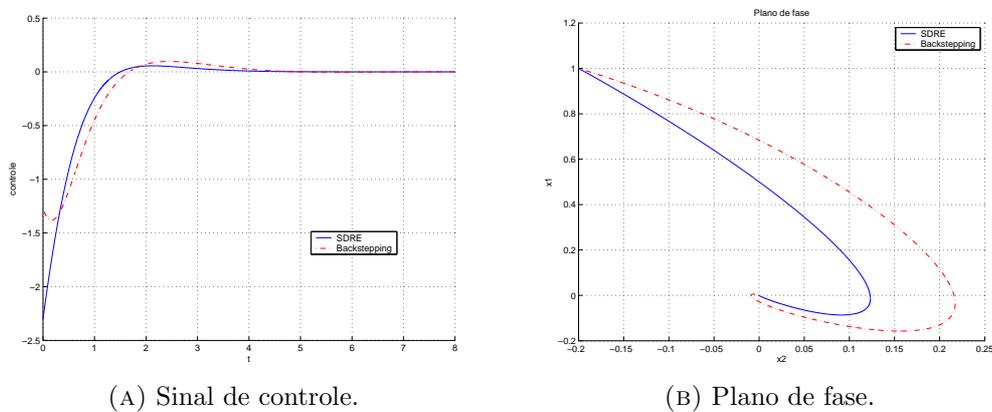


FIGURA 5.8: Comparação do controlador *backstepping* com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.106) com os parâmetros da tabela 5.1: estados do sistema.



(A) Sinal de controle.

(B) Plano de fase.

FIGURA 5.9: Comparação do controlador *backstepping* com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.106) com os parâmetros da tabela 5.1.

5.4.2 Estabilização Exponencial de Sistemas com Realimentação Estrita Usando Controle SDRE

Nessa subseção, será apresentada uma forma de obter a estabilização exponencial de plantas como o sistema (5.106) com o controlador SDRE.

Considere o seguinte sistema não linear com realimentação estrita (*strict-feedback*)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_0(x_1) + g_0(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)x_3 \\
 \dot{x}_3 &= f_2(x_1, x_2, x_3) + g_2(x_1, x_2, x_3)x_4 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{k-1} &= f_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) + g_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})x_k \\
 \dot{x}_k &= f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) + g_k(x_1, x_2, \dots, x_k)u
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

onde $x \in \mathbb{R}^k$ e f_0 até f_k tendem a zero na origem. A razão para referir-se ao sistema como uma realimentação estrita é que a não linearidade de f_i e g_i na equação \dot{x}_i ($i = 1, \dots, k$) depende somente de x_1, \dots, x_i . Assume-se que

$$g_i(x_1, \dots, x_i) \neq 0, \text{ para } 1 \leq i \leq k \tag{5.109}$$

no domínio de interesse.

Considerando a saída do sistema como sendo $h(x) = x_1$, pode-se verificar que o grau relativo da entrada u para a saída $h(x)$ é igual a k . Neste caso, existe uma mudança de variáveis que transforma o sistema na forma normal

$$\dot{x} = Ax + B\gamma(x)[u - d(x)] \tag{5.110}$$

Este resultado pode ser formalizado na proposição que se segue.

Proposição 2 *Considere o sistema não linear com realimentação estrita (equação (5.108)) e suponha que existe um mapeamento suave $h(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ que represente a saída do sistema. Se $h(x)$ for definido por $h(x) = x_1$, então o sistema (5.108) tem grau relativo $\rho = k$.*

■

Prova: O sistema (5.108) pode ser representado na seguinte forma

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_0(x_1) + g_0(x_1)x_2 \\ \vdots \\ f_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}) + g_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})x_k \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{bmatrix} u.$$

Calculando a derivada de Lie para o sistema acima com $h(x) = x_1$, obtém-se

$$\begin{aligned} L_g L_f^{i-1} h(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, k-1; \\ L_g L_f^{k-1} h(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

Então o sistema possui grau relativo k , uma vez que u aparece na k -ésima derivada de Lie. Então, pode-se concluir a partir do teorema 5.10 (Khalil 2002) que o sistema pode ser representado na forma normal (5.110) e existe uma transformação $z = T(x)$

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{k-1} h(x) \end{bmatrix}$$

que leva o sistema à forma normal (5.110) onde

$$\gamma(x) = L_g L_f^{\rho-1} e \quad d(x) = \frac{-L_f^\rho h(x)}{L_g L_f^{\rho-1}} \quad (5.111)$$

■

A seguir, um exemplo será apresentado para exemplificar a transformação do sistema com realimentação estrita para a forma normal.

Considere o sistema (5.106) descrito na subseção 5.4.1

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \quad (5.112)$$

que está na forma (5.94)–(5.95). Deseja-se levar o sistema (5.112) para a forma normal com a seguinte matriz de transformação

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 - x_1^3 + x_2 \end{bmatrix}.$$

O sistema transformado é

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u + 2z_1 z_2 - 3z_1^2 z_2]. \quad (5.113)$$

Considerando as variáveis de estado sendo $x = [x_1 \ x_2]^T$ e $V = x^T P_0 X$ onde P_0 é a solução da equação de Riccati para o par (A, B) da forma normal. Para este sistema a derivada de V é

$$\dot{V} = 2[x_1 \ x_1^2 - x_1^3 + x_2] P_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 - 3x_1^2 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}. \quad (5.114)$$

Na simulação do sistema utiliza-se os mesmos parâmetros de Riccati da tabela 5.1, além de $\alpha = 0.2$ e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1.73 & 1 \\ 1 & 1.73 \end{bmatrix}. \quad (5.115)$$

As figuras 5.10(a), 5.10(b) e 5.11 mostram os estados do sistema x_1 e x_2 , o sinal de controle, a CLF V , a sua derivada V_p e a parcela estabilizante $\Delta = \|u_{SDRE} - u_{SDRE/EE}\|$. Pode-se observar na figura 5.11 que o valor de Δ é zero refletindo que esta abordagem garante a estabilidade exponencial do sistema a partir da CLF exponencial não sendo necessária nenhuma alteração no controlador SDRE.

Nota-se que para o cálculo do *backstepping* fornece também uma CLF e simulando com esta nova CLF os resultados foram parecidos, isto é, o valor de Δ é igual a zero.

Adicionando um integrador na entrada do sistema (5.112), obtém-se um sistema não linear de ordem maior.

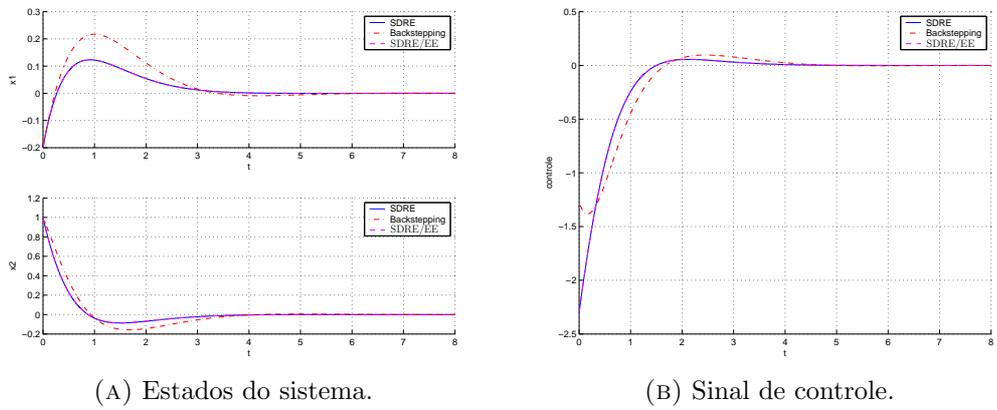


FIGURA 5.10: Comparação do controlador SDRE/EE com o controlador SDRE e *backstepping* aplicado ao sistema (5.106) com os parâmetros da tabela 5.1.

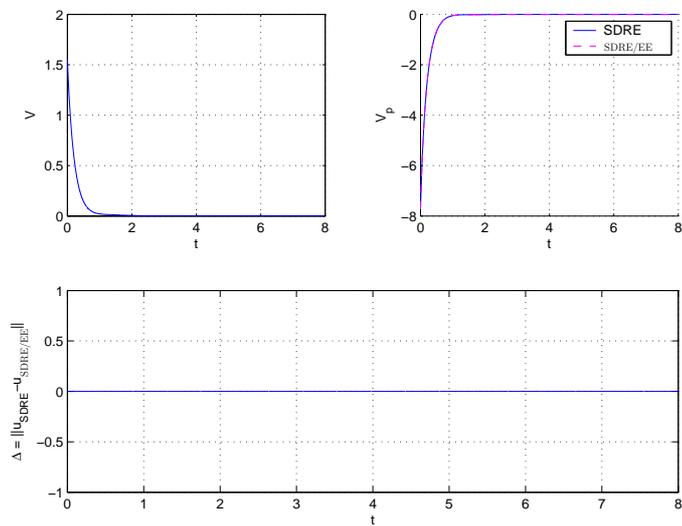


FIGURA 5.11: Comparação do controlador SDRE/EE com o controlador SDRE e *backstepping* aplicado ao sistema (5.106) com os parâmetros da tabela 5.1: CLF V , V_p é a derivada de V , $\Delta = \|u_{SDRE} - u_{SDRE/EE}\|$.

Considerando o seguinte sistema não linear de 3ª ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u. \end{aligned} \tag{5.116}$$

é composto do sistema de segunda ordem do exemplo anterior com uma integrador adicional na entrada.

O controlador utilizado na simulação do sistema (5.116) será exponencialmente estável e portanto é necessário encontrar a forma normal para obter-se a CLF. Realizando a transformação de coordenadas obtém-se a seguinte matriz

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ L_f^2 h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ (2x_1 - 3x_1^2)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + x_3 \end{bmatrix}. \tag{5.117}$$

O sistema em z

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= (2 - 6z_1)z_2^2 + z_1z_3(2 - 3z_1) + u. \end{aligned} \tag{5.118}$$

Escrevendo (5.118) na forma normal

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u + (2 - 6z_1^2)z_2^2 + (2 - 3z_1^2)z_1z_3] \tag{5.119}$$

Considerando que a função de Lyapunov é descrita por

$$V = z^T P_0 z, \tag{5.120}$$

onde P_0 é a solução da equação de Riccati para o par (A,B) da equação (5.119).

Calculando a derivada de V , obtém-se

$$\dot{V} = 2[x_1 \ x_1^2 - x_1^3 + x_2 \ (2x_1 - 3x_1^2)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + x_3]P_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_1 - 3x_1^2 & 1 & 0 \\ (2 - 6x_1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + (2x_1 - 3x_1^2)(2x_1 - 3x_1^2) & 2x_1 - 3x_1^2 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}.$$

Para a simulação do sistema (5.116) considera-se os parâmetros da tabela 5.4.2 e a constante $\alpha = 0.2$. No cálculo do controle SDRE utiliza-se a seguinte forma

TABELA 5.2: Parâmetros utilizados na simulação do sistema

Parâmetro	Valor
Q	I_3
R	1
P_0	$\begin{bmatrix} 2.41 & 2.41 & 1 \\ 2.41 & 4.83 & 2.41 \\ 1 & 2.41 & 2.41 \end{bmatrix}$

pseudolinear

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (5.121)$$

Simulando o sistema para os controladores SDRE e SDRE/EE com a seguinte condição inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad (5.122)$$

são obtidos os resultados apresentados nas figuras 5.12, 5.13. O valor de δ para este caso é diferente de zero (ver figura 5.13). Observa-se que quando se utiliza a parcela estabilizante, o sistema perde um pouco no desempenho na convergência dos estados. Também pode-se ver na figura 5.13 que a função de Lyapunov decresce exponencialmente e a derivada de V é modificada pelo termo estabilizante.

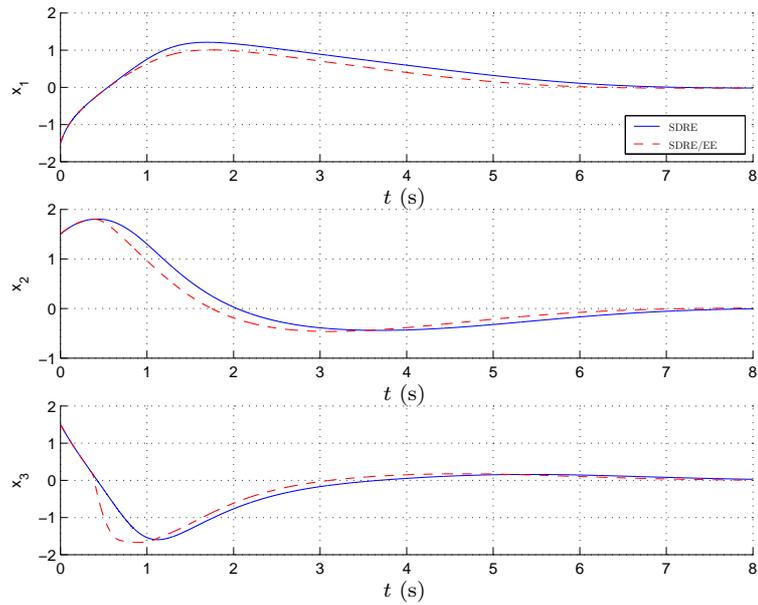


FIGURA 5.12: Sistema 5.116 realimentado com os controladores SDRE e SDRE/EE: estados do sistema.

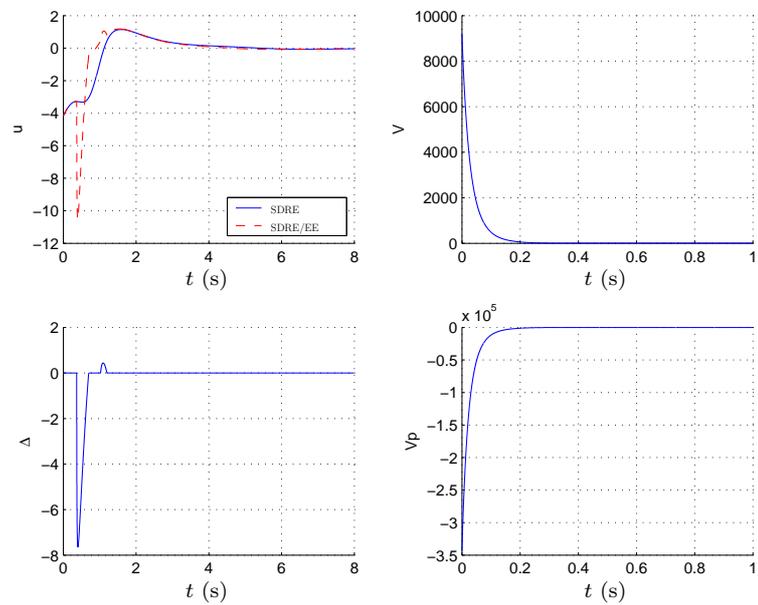


FIGURA 5.13: Sistema 5.116 realimentado com os controladores SDRE e SDRE/EE: sinal de controle, CLF V , $\Delta = \|u_{SDRE} - u_{SDRE/EE}\|$, V_p a derivada de V .

5.4.2.1 Comparação entre *Backstepping* ótimo e SDRE

Embora projetos ótimos, incluindo as técnicas \mathcal{H}_∞ , sejam comuns para sistemas lineares, o controle ótimo para sistemas não lineares torna-se difícil pela incapacidade de resolver-se a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Aproximações locais do controle ótimo são obtidas quando o sistema não linear admite uma linearização controlável e a função de custo pode ser expandida em série Taylor até os termos quadráticos. A solução da série de Taylor fornece uma aproximação adequada para a lei de controle ótima numa vizinhança próxima da origem. Apesar destas aproximações serem úteis, as propriedades de estabilidade não podem ser garantidas para todo o espaço de estado, e a região de convergência torna-se extremamente pequena.

Em (Ezal, Pan & Kokotović 2000, Pan, Ezal, Krener & Kokotović 2001), projeta-se controladores ótimos locais que garantem propriedades de estabilidade global. Este projeto modifica o procedimento do *backstepping* (Krstić et al. 1995) de maneira que em cada passo o controle virtual e a função de Lyapunov de controle são escolhidos sendo aproximações lineares quadráticas do problema do controle ótimo \mathcal{H}_∞ , obtendo-se atenuação local de perturbações limitadas do tipo \mathcal{L}_2 . Na ausência de perturbação, o equilíbrio ótimo local com o regulador LQR é globalmente assintoticamente estável (Ezal et al. 2000).

O exemplo do artigo (Ezal et al. 2000) ilustra o desempenho do controle *backstepping* ótimo local. Considera-se este exemplo sem a perturbação e compara-se este controlador com o controlador SDRE.

Considere-se o seguinte sistema não linear

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned} \tag{5.123}$$

Reescrevendo o sistema (5.123) na forma pseudolinear

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{5.124}$$

aplica-se o controle SDRE no sistema (5.124) utilizando os parâmetros da tabela 5.3.

Na simulação deste exemplo são consideradas as seguintes condições iniciais:

TABELA 5.3: Parâmetros utilizados na simulação do sistema 5.123

Parâmetro	Valor
Q	I_2
R	1

- $x_{01} = 0.7$
- $x_{02} = 1$

Verifica-se que o sistema realimentado com o controlador SDRE se comporta de forma semelhante a do artigo (Ezal et al. 2000), como pode ser observado nas figuras 5.14, 5.15(a) e 5.15(b). Entretanto, o sinal de controle do controlador SDRE tem uma amplitude menor do que o controlador *backstepping* ótimo (figura 5.15(a)).

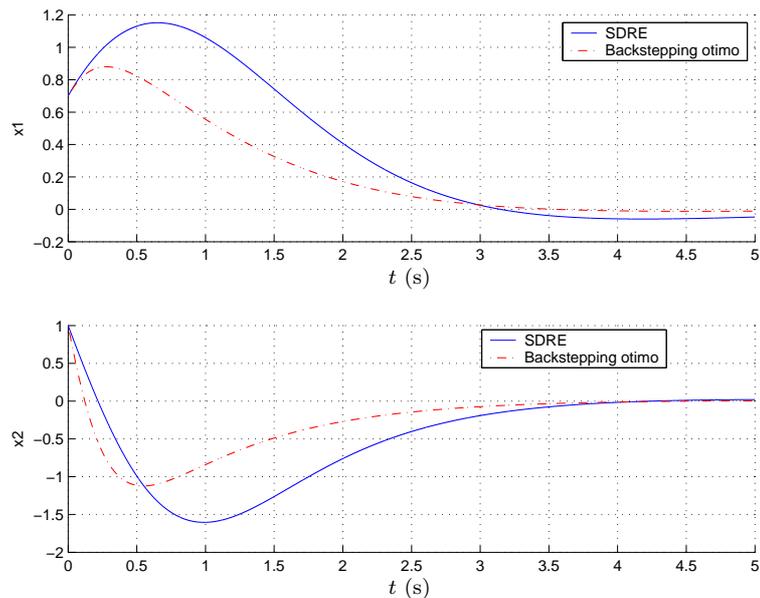


FIGURA 5.14: Comparação do controlador *backstepping* ótimo com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.123): estados do sistema.

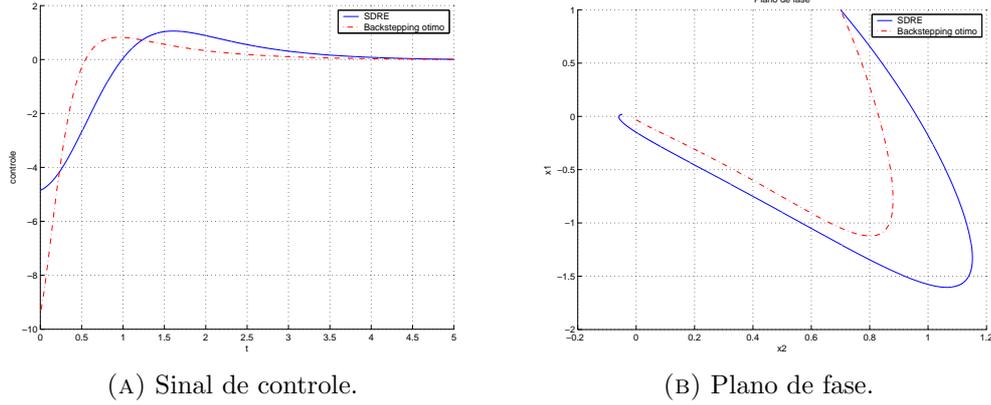


FIGURA 5.15: Comparação do controlador *backstepping* ótimo com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.123).

Agora, para calcular a CLF exponencial e encontrar um controlador exponencialmente estável via SDRE (controle SDRE/EE), deve-se transformar o sistema (5.123) na forma normal com a matriz $T(x)$ definida a seguir

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo o sistema nas novas variáveis

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u + 2z_1 z_2] \quad (5.125)$$

este é levado à forma normal. Considere a função de Lyapunov de controle (CLF) $V = T(x)^T P_0 T(x)$ onde P_0 é a solução da equação de Riccati na origem e o vetor de estados sendo $x = [x_1 \ x_2]^T$. A derivada de V é dada por

$$\dot{V} = 2[x_1 \ x_1^2 + x_2] P_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 & 1 \end{bmatrix} \dot{x}. \quad (5.126)$$

Na simulação, utiliza-se os parâmetros de Riccati da tabela 5.3, $\alpha = 0.2$ e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1.73 & 1 \\ 1 & 1.73 \end{bmatrix}. \quad (5.127)$$

Observa-se na figura 5.16(a) que apesar do sistema apresentar o mesmo tempo de

estabilização da figura 5.14 (controlador SDRE), agora pode-se garantir estabilidade (ver figura 5.17).

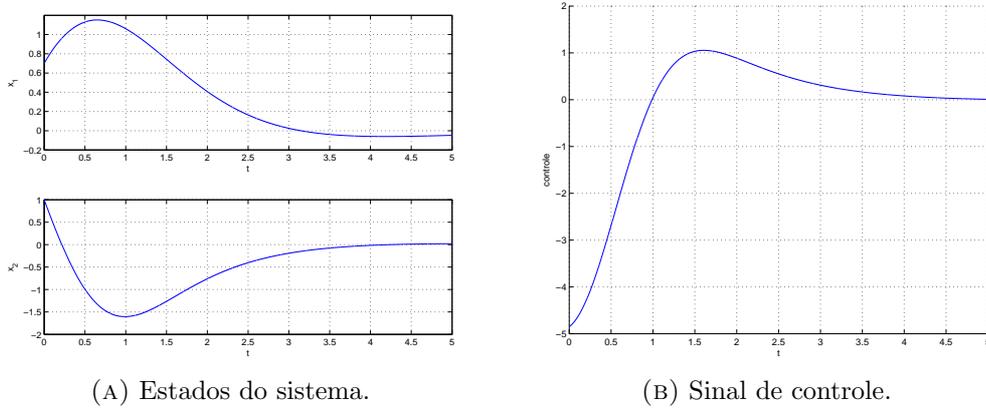


FIGURA 5.16: Sistema (5.123) realimentado com o controlador SDRE/EE.

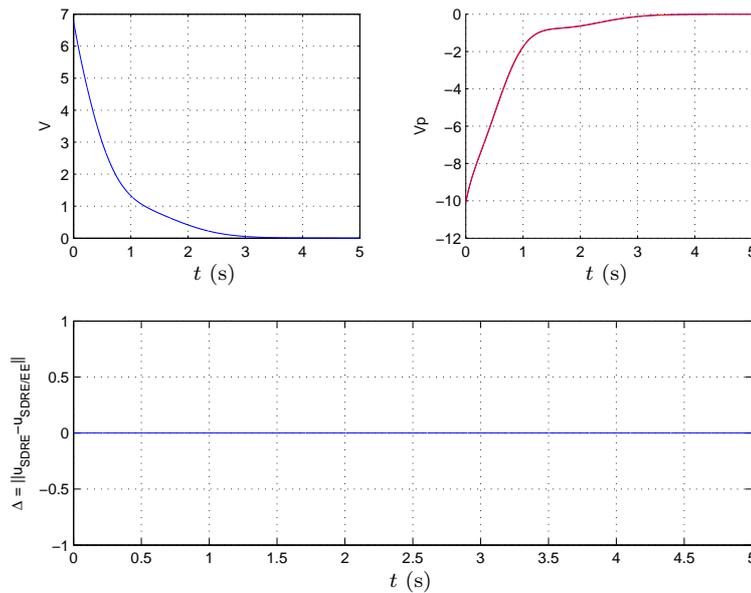


FIGURA 5.17: Sistema do exemplo (5.123) realimentado com o controlador SDRE/EE: CLF V , V_p a derivada de V , $\Delta = \|u_{SDRE} - u_{SDRE/EE}\|$.

Para o caso do sistema estar representado na forma normal ($\dot{z} = A_N z + B_N \gamma(z)[u - d(z)]$), pode-se utilizar o controlador LQR no par (A_N, B_N) em vez do controlador SDRE no sistema $(A(x), B(x))$. Em resumo, o sistema é levado à forma normal por uma transformação $T(x)$, e o sinal de controle u é calculado a partir da seguinte relação

$$u = v - d(z). \quad (5.128)$$

onde v é o controle LQR do par (A_N, B_N) .

Aplicando este método no sistema (5.123) e comparando com o desempenho obtido pelo controlador SDRE os resultados obtidos podem ser vistos nas figuras 5.18(a) e 5.18(b). Utiliza-se os parâmetros da tabela 5.3 na simulação.

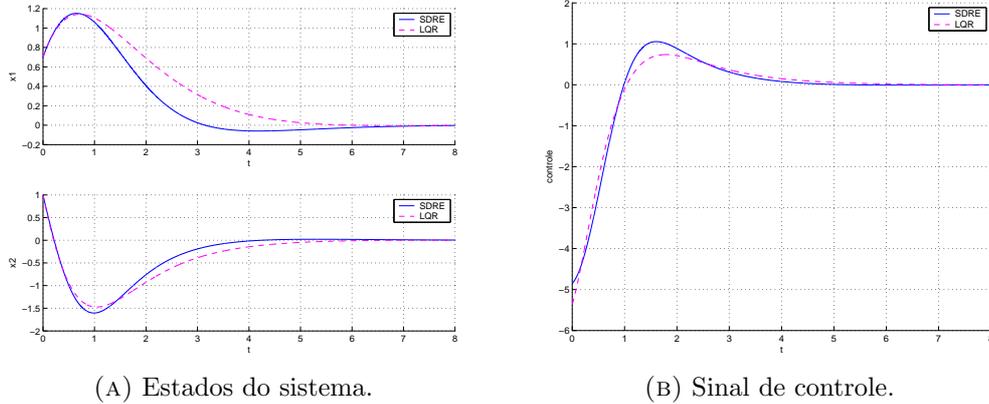


FIGURA 5.18: Comparação do controlador LQR com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.123).

Alterando as condições iniciais para $x_0 = [5 \ 1]^T$ e fazendo $Q = \text{diag}(10, 10)$, obteve-se os seguintes resultados (ver figuras 5.19(a) e 5.19(b)). A figura 5.19(a) mostra que o tempo de convergência do sistema com o controlador LQR é maior que com o controlador SDRE. Alterando o valor de Q , pode-se observar em 5.19(a) e 5.19(a) que o tempo de estabilização do sistema diminui.

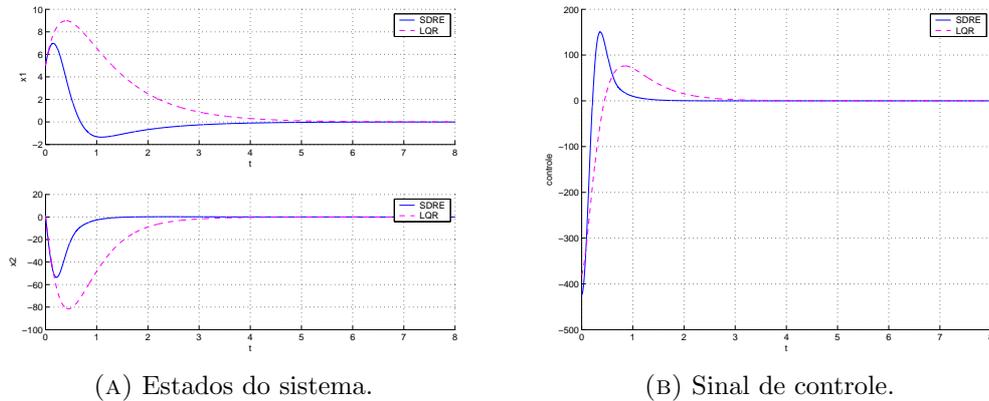


FIGURA 5.19: Comparação do controlador LQR com o controlador SDRE aplicado ao sistema (5.123).

5.5 Conclusão

Neste capítulo desenvolveu-se um método de estabilização global para o controle SDRE de sistemas não lineares. Inicialmente, os conceitos de controle satisfatório foram apresentados. Esta abordagem garante a estabilidade global do sistema em malha fechada a partir de uma CLF conhecida. A estabilização com o controle SDRE modificado é garantida através da projeção do controle SDRE no conjunto satisfatório quando necessária. Apesar da projeção do controle SDRE no conjunto satisfatório fornecer garantia de estabilidade global, o mesmo não pode ser instituído quanto a critérios de desempenho ou otimalidade. Em seguida foi apresentado o conceito de CLF exponencial e mostrou-se que caso um sistema tenha uma CLF exponencial, então existe um u que estabiliza globalmente exponencialmente o sistema através do controle SDRE modificado. Depois, apresentou-se a forma normal e as condições para levar o sistema a esta forma. Mostrou-se que se o sistema pode ser levado a forma normal, a equação de Riccati fornece uma CLF exponencial explícita. Finalmente, compara-se o desempenho do controlador SDRE com *backstepping*. Observa-se que o controle SDRE é simples de ser implementado uma vez que alterando os parâmetros da equação de Riccati, melhora-se o tempo de estabilização com o controlador SDRE. Pelos resultados obtidos por simulação, observa-se que o método do *backstepping* não garante otimalidade enquanto o controle SDRE/EE garante estabilidade global exponencial além de otimalidade.

Capítulo 6

Comparação entre os Controladores: Exemplos de Aplicações

Neste capítulo serão apresentados alguns exemplos representativos (Erdem & Alleyne 1999, Curtis & Beard 2002). Através desses exemplos compara-se o desempenho dos controladores SDRE, satisfatório e SDRE/EE, destacando-se suas principais características.

Inicialmente, será apresentado o sistema levitador magnético não linear instável em malha aberta. Neste exemplo as três técnicas de controle mencionadas são aplicadas. Em seguida, os controladores SDRE e satisfatório são aplicados no problema de controle de velocidade de um corpo rígido, veículo espacial, com e sem perturbação.

Em ambos os exemplos, o método SDRE puro parece estabilizar globalmente os sistemas, contudo a prova de estabilidade é uma questão ainda em aberto. Já os controladores SDRE/EE e satisfatório garantem estabilidade global para o sistema.

6.1 Aspectos da Simulação

Na implementação do método SDRE, uma possibilidade seria resolver analiticamente a equação de Riccati dependente do estado utilizando um programa com pacote simbólico tal como Mathematica ou MatLab.

Em geral, a solução analítica não pode ser encontrada. Portanto, resolve-se o SDRE ponto a ponto para todo os estados.

Nas simulações com o controle SDRE utilizou-se a função LQR do MatLab. O método de integração empregado foi Euler com passo fixo de 0.001. A figura 6.1 mostra o esquema no Simulink, onde o controle foi implementado, utilizando a estrutura *S-function*.

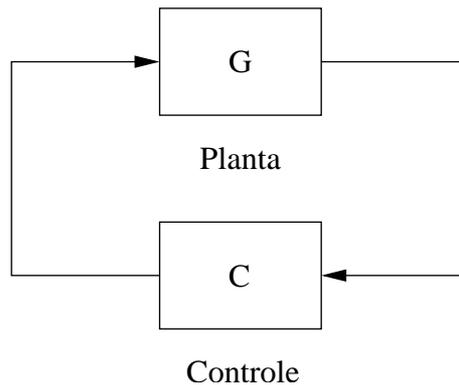


FIGURA 6.1: Representação esquemática da simulação.

6.2 Levitador Magnético

O sistema escolhido para avaliar o controlador desenvolvido neste trabalho foi o levitador magnético. Do ponto de vista da engenharia de controle, um sistema de levitação magnética é complexo não linear e naturalmente instável, não podendo ser estabilizado nem mesmo por realimentação negativa (Franklin, Powell & Emami-Naeini 1991).

6.2.1 Descrição do sistema

As figuras 6.2 e 6.3 ilustram um levitador magnético em que uma esfera de material ferro-magnético, de massa m , levita devido ao campo magnético induzido pela corrente no eletroímã. A força magnética gerada compensa a força da gravidade e faz com que a esfera seja suspensa no ar.

O movimento da esfera pode ser descrito pela equação não linear simplificada (6.1)



FIGURA 6.2: Foto de um levitador magnético.

(Alleyne & Pomykalski 2000),

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2 \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -g + \frac{k}{(\alpha + \bar{x}_1)^2} \bar{u}^2\end{aligned}\tag{6.1}$$

onde

\bar{x}_1 é a distância (m) entre o topo da esfera e a face do ímã;

\bar{x}_2 é a velocidade da esfera (m/s^2);

\bar{u} é a tensão de entrada que é proporcional à corrente.

Note que neste sistema de segunda ordem a indutância do eletroímã não é considerada .

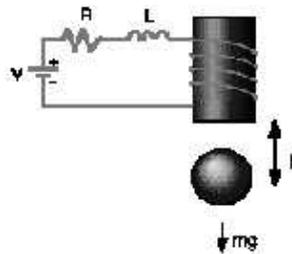


FIGURA 6.3: Representação esquemática do levitador magnético.

O movimento da esfera pode ser aproximado por um modelo mais simples (Erdem & Alleyne 1999) representado pela equação diferencial não linear (6.2).

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -g + \frac{K}{(\alpha + y_1)^2} U\end{aligned}\tag{6.2}$$

Considerando que o deslocamento y_1 é negativo para baixo e $y_1=0$ na face do imã, então y_1 só poderá assumir valores negativos.

Os valores dos parâmetros da equação (6.2) estão escritos na tabela 6.1.

TABELA 6.1: Parâmetros do levitador magnético.

Param	valor
g	$9.81m/s^2$
K	$5.695 \times 10^{-4}m^3/s^2$
α	$1.234 \times 10^{-2}m$

6.2.2 Mudança de variáveis

Observa-se na equação (6.2) que os valores de y_1 e U , no equilíbrio, não são nulos. Para aplicar o SDRE, a equação deve ser reescrita de modo que ambos os estados sejam zero no equilíbrio, assim como o sinal de controle. Representando y_e como posição de equilíbrio, uma mudança de coordenada pode ser realizada de tal forma que

$$y_1 = y_e + x_1 \text{ e } U = u_e + u, \quad (6.3)$$

onde $u_e = g(\alpha + y_e)^2/K$ é o sinal de controle necessário para manter a esfera na posição de equilíbrio y_e . Então, as equações de estado podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g(2\alpha + 2y_e + x_1)}{(\alpha + y_e + x_1)^2}x_1 + \frac{K}{(\alpha + y_e + x_1)^2}u. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Para que o sistema seja controlável ponto a ponto é necessário que $y_e + x_1 \neq -\alpha$. Tal condição pode ser atendida uma vez que y_e é um parâmetro a ser escolhido. O sistema (6.4) pode ser representado na forma linear dependente do estado onde as matrizes $A(x)$ e $B(x)$ foram escolhidas como

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g(2\alpha + 2y_e + x_1)}{(\alpha + y_e + x_1)^2} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{(\alpha + y_e + x_1)^2} \end{bmatrix} u. \quad (6.5)$$

Essa escolha difere do artigo (Erdem & Alleyne 1999) pelo fato de sua forma pseudolinear (equação (3.20)) ter uma singularidade no elemento a_{22} de sua matriz $A(x)$,

o que torna inviável sua utilização na simulação.

6.2.3 Resultados de Simulações

As primeiras simulações foram baseadas na referência (Erdem & Alleyne 1999). A posição de equilíbrio y_e foi escolhida como uma onda quadrada de amplitude de 2mm. Isso corresponde à regulação do sistema (6.5) com deslocamento inicial $x_1(0)$ de ± 4 mm. Os parâmetros utilizados na simulação são apresentados na tabela (6.2).

TABELA 6.2: Parâmetros da equação de Riccati na simulação do levitador magnético.

Parâmetro	Valor
q_1	1600 (m^{-2})
q_2	2500 ($(m/s)^{-2}$)
r	6×10^6
y_e	$-0.023 + 0.002 \text{ square}(\pi/2)t$ (m)

A simulação do sistema realimentado com o controlador SDRE é observada na figura 6.4. Essa figura mostra o bom desempenho do controlador SDRE com relação ao tempo de estabilização. Além disso, a amplitude do sinal de controle apresenta valores similares ao artigo (Erdem & Alleyne 1999).

O sistema (6.5) pode ser linearizado na origem. Assim, esse sistema pode ser reescrito da seguinte forma ($\dot{x} = A_0x + B_0\hat{u}$)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2g\frac{1}{(\alpha+y_e)} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{(\alpha+y_e)^2} \end{bmatrix} \hat{u}, \quad (6.6)$$

quando o sinal de controle u é dado por

$$u = \frac{(\alpha + y_e + x_1)^2}{K} \left[\frac{K}{(\alpha + y_e)^2} \hat{u} - \frac{2gx_1}{\alpha + y_e} + \frac{gx_1(2\alpha + 2y_e + x_1)}{(\alpha + y_e + x_1)^2} \right]. \quad (6.7)$$

Então, a partir do sinal de controle \hat{u} é possível encontrar u que estabilize o sistema (6.5). Assim, considere a forma quadrática $V = x^T P_0 x$ como uma candidata à CLF, sendo a matriz P_0 a solução da equação de Riccati para a aproximação linear do sistema

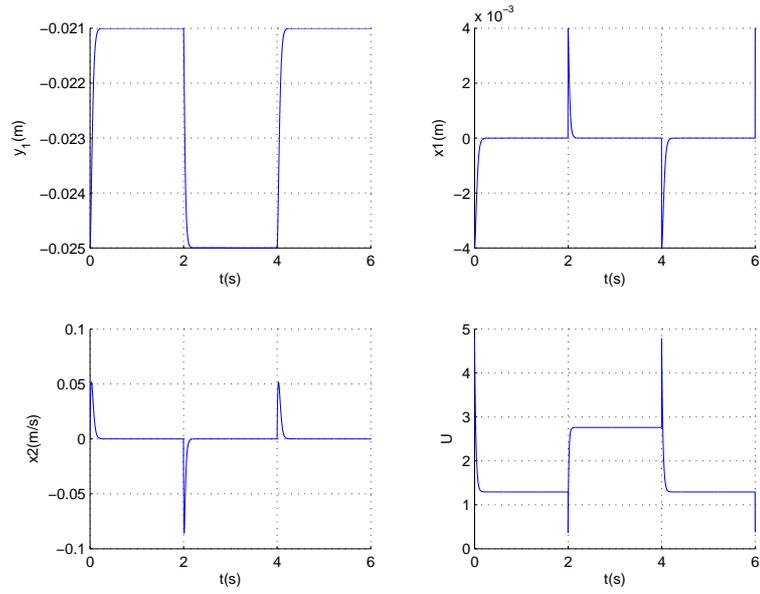


FIGURA 6.4: Levitador magnético com o controlador SDRE e condição inicial $x_1(0)$ de $\pm 0.004\text{m}$: y_1 posição da esfera, x_1 e x_2 estados do sistema, U sinal de controle.

no ponto de equilíbrio $x = 0$. A derivada de V ao longo das trajetórias de (6.6) será

$$\dot{V} = x^T (A_0^T P_0 + P_0 A_0) x + 2P_0 B_0 \hat{u}, \quad (6.8)$$

onde A_0 e B_0 (Khalil 2002) são

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2g \frac{1}{(\alpha + y_e)} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ K \frac{1}{(\alpha + y_e)^2} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Assim existe um \hat{u} que satisfaz a condição de $\dot{V} < 0$ para o sistema $\dot{x} = A_0 x + B_0 \hat{u}$. Logo, também existe u que satisfaz $V < 0$ para o sistema (6.5). Portanto, V é uma CLF para o sistema (6.5). O controlador satisfatório é projetado a partir desta CLF.

Para simular o sistema considera-se o controle satisfatório da seção 5.1.4 reescrito da seguinte forma

$$u_{satisfatorio} = \begin{cases} u_{SDRE} & , V_x^T f + V_x^T g u_{SDRE} \leq 0 \\ u_{SDRE} + \Delta & , V_x^T f + V_x^T g u_{SDRE} > 0, \end{cases} \quad (6.11)$$

onde $\Delta = -\frac{V_x^T f + V_x^T g u_{SDRE}}{V_x^T g}$, $V = x^T P_0 x$ e

$$P_0 = 10^9 \begin{bmatrix} 6.2876 & 0.1466 \\ 0.1466 & 0.0034 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

As figuras 6.5, 6.6 e 6.7 mostram os resultados da simulação para o levitador magnético com o controlador SDRE projetado no conjunto estabilizante utilizando os parâmetros da tabela 6.2. O valor de Δ neste caso é diferente de zero para $t \approx 2.2s$, como mostrado na figura 6.6. Isto evidencia que a parcela estabilizante foi utilizada de forma a garantir a estabilidade do sistema 6.5. Observa-se na figura 6.7 que a função de Lyapunov e sua derivada tendem a zero assintoticamente para o deslocamento inicial $x_1(0) = 0.004m$.

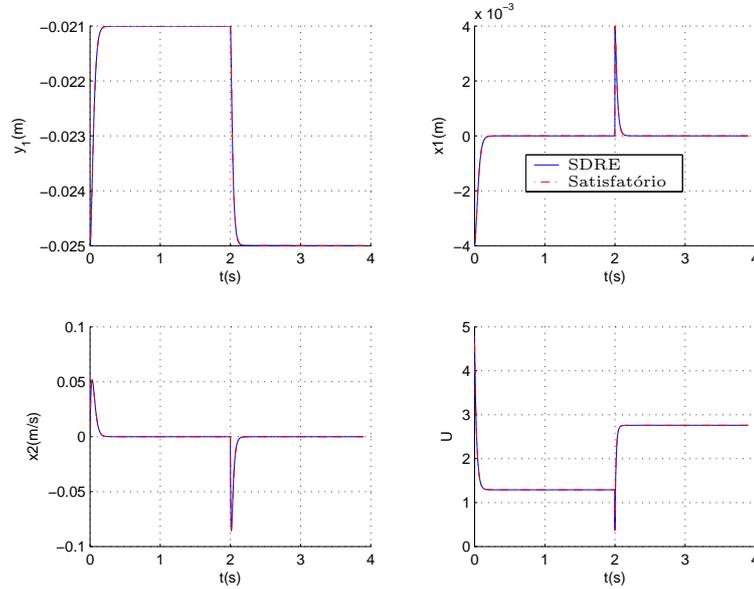


FIGURA 6.5: Levitador magnético com o controlador satisfatório: y_1 posição da esfera, x_1 e x_2 estados do sistema, U sinal de controle.

Para estabilizar exponencialmente o sistema (6.5), *via* controlador SDRE (controlador SDRE/EE), é necessária uma CLF exponencial. Assim, considera-se a forma

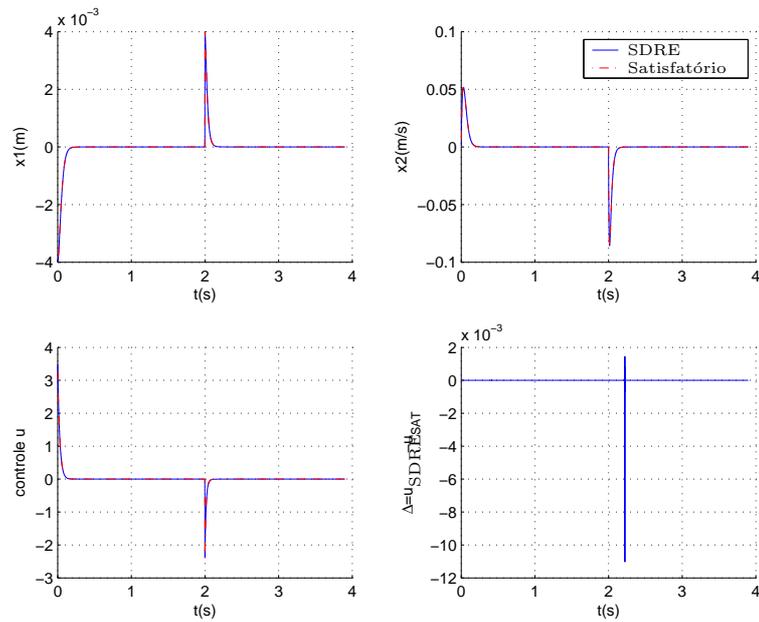


FIGURA 6.6: Levitador magnético com o controlador satisfatório: x_1 e x_2 estados do sistema, u sinal de controle, Δ .

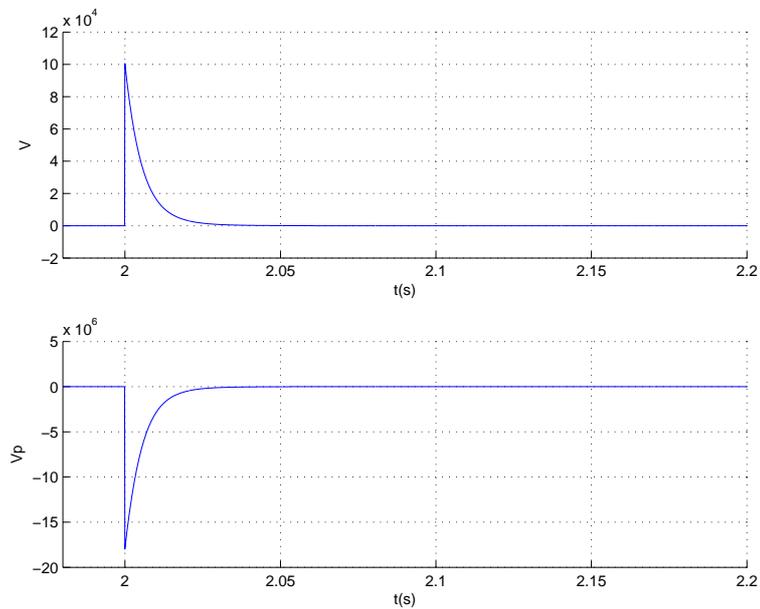


FIGURA 6.7: Levitador magnético com o controlador satisfatório: V CLF, V_p derivada de V .

quadrática $V = x^T P_0 x$ anterior como uma CLF exponencial, sendo a matriz P_0 a solução da equação de Riccati para a aproximação linear do sistema no ponto de equilíbrio $x = 0$. Portanto, o controle SDRE

$$u = \begin{cases} u_{SDRE} & , \dot{V} \leq -\alpha V \\ u_{SDRE} + \Delta u & , \dot{V} > -\alpha V, \end{cases} \quad (6.13)$$

onde u_{SDRE} é o controle SDRE, $\alpha = 0.2$ e

$$\Delta u = \frac{-g(x)^T V_x (\alpha V + V_x^T f(x) + V_x^T g(x) u_{SDRE})}{V_x^T g g^T V_x}, \quad (6.14)$$

garante estabilização exponencial.

As figuras 6.8 e 6.9 apresentam o desempenho do controlador SDRE/EE proposto na seção 5.2. Utilizam-se nas simulações os mesmos parâmetros apresentados na tabela 6.2. Observa-se na figura 6.9 que os instantes em que $\Delta \neq 0$, coincidem com os do controlador satisfatório, distinguindo-se apenas na amplitude de Δ . Esse resultado mostra que o controlador SDRE/EE mantém o desempenho do método SDRE, garantindo estabilização exponencial.

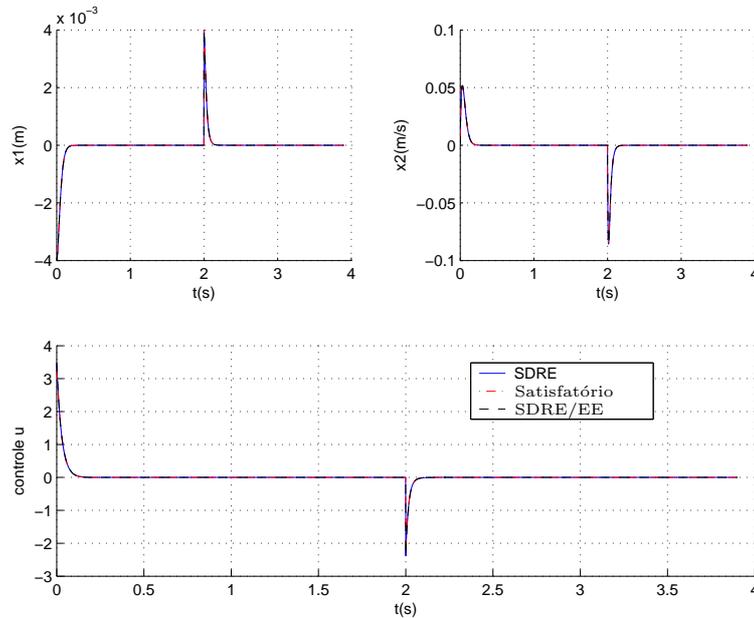


FIGURA 6.8: Levitador magnético com o controlador SDRE/EE: x_1 e x_2 estados do sistema, u sinal de controle.

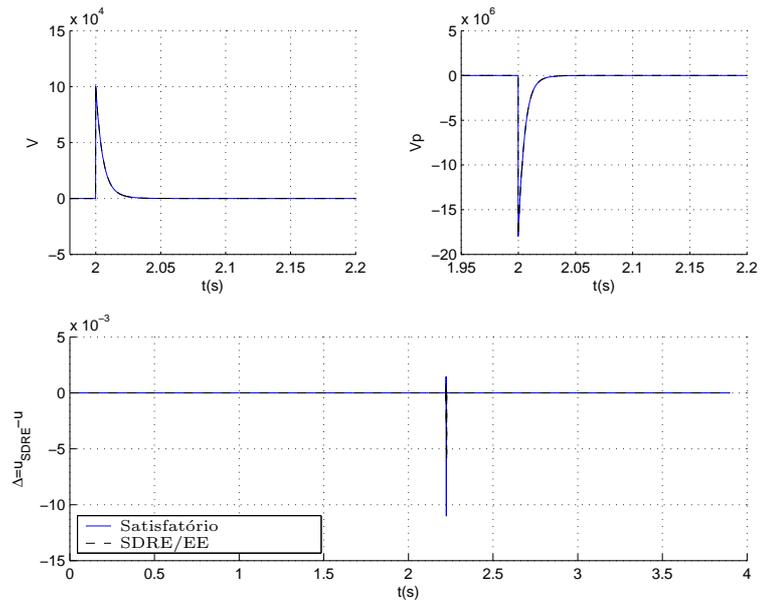


FIGURA 6.9: Levitador magnético realimentado com o controlador SDRE/EE: V CLF, V_p derivada de V , Δ .

6.3 Veículo Espacial

Considera-se o controle de um veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem, onde o modelo utilizado é obtido a partir da referência (Leonessa, Haddad & Hayakawa 2001). Assume-se $x \in \mathbb{R}^3$, sendo as velocidades angulares do veículo espacial em relação ao sistema de coordenadas de um corpo fixo, e $I_b \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ uma estimativa da matriz de inércia positiva definida. Considera-se ainda $u \in \mathbb{R}^3$ sendo o sinal de controle do torque induzido e a perturbação $d \in \mathbb{R}^3$ representando o erro na estimativa de I_b . Pode-se expressar a dinâmica do veículo espacial na forma de espaço de estados como

$$\dot{x} = -I_b^{-1}XI_b x + I_b^{-1}u + I_b^{-1}EI_b d, \quad x(0) = x_0. \quad (6.15)$$

onde X é a matriz antisimétrica

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

e

$$E = X + \begin{bmatrix} 0.04 & -0.1 & 0.02 \\ 0.01 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0.06 & -0.01 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

representa a incerteza na modelagem.

Então, reescreve-se a equação (6.15) na forma linear dependente do estado ($\dot{x} = A(x) + B(x)u$), desconsiderando a perturbação $d = 0$, com matrizes $A(x)$ e $B(x)$ dadas por

$$\begin{aligned} A(x) &= -I_b^{-1}XI_b \\ B(x) &= I_b^{-1}. \end{aligned}$$

Um controlador SDRE pode ser projetado para (6.15) resolvendo ponto a ponto a equação de Riccati

$$P(x)A(x) + A^T(x)P(x) + Q(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) = 0, \quad (6.18)$$

onde $Q(x)$ e $R(x) = R^T(x)$ são matrizes positivas definidas. A lei de controle pode ser construída, baseada na solução simétrica positiva definida $P(x)$ da equação de Riccati (6.18), como segue

$$u_{SDRE}(x) = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x. \quad (6.19)$$

Note que $V(x) = \frac{1}{2}x^T x$ é uma CLF válida para este sistema com $\rho(|d|) = |d|$ porque $V_x^T g = 0$ se e somente se $x = 0$ onde $\rho(|d|)$ é uma função de classe K_∞ tal que $|x| \geq \rho(|d|) \forall x \neq 0, \forall d \in \mathbb{R}^r$ (Curtis & Beard 2002). Usando esta CLF, pode-se projetar um controle ISS-satisfatório robusto (Curtis & Beard 2002) $k_r(x) = -\beta(x)g^T V_x + \xi(x)$, sendo $\xi(x)$ a projeção ponto a ponto do u_{SDRE} no espaço nulo de $g^T V_x$

$$\xi(x) = u_{SDRE}(x) - \frac{u_{SDRE}^T(x)g^T(x)V_x(x)}{\|g^T V_x\|^2} g^T V_x \quad (6.20)$$

e

$$\beta(x) = \frac{V_x^T f}{V_x^T g g^T V_x}. \quad (6.21)$$

Nas simulações que se seguem, escolhe-se a matriz de inércia sendo

$$I_b = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

e os parâmetros da equação de Riccati apresentados na tabela 6.3.

TABELA 6.3: Parâmetros utilizados na equação de Riccati.

Parâmetro	Valor
Q	diag(1, 1000, 300)
R	diag(10, 5, 5)

6.3.1 Veículo Espacial Sem Incerteza no Modelo

Considere primeiramente o problema de regulação sem perturbação. As simulações são realizadas com a CLF $V = x^T x$ (Curtis & Beard 2002) e são utilizadas as condições iniciais $x_0 = [-10 \ 7 \ 9]^T$ e os parâmetros apresentados na tabela 6.3.

As figuras 6.10 e 6.11 apresentam o desempenho do controlador SDRE e do controlador satisfatório (controlador SDRE projetado no conjunto satisfatório) para o problema de regulação, sendo que a figura 6.10 mostra os estados do sistema e a figura 6.11 o sinal de controle. A figura 6.12 mostra que somente no intervalo de tempo inicial ($t = [0, 0.22]$) o controle SDRE é projetado no conjunto satisfatório, $\Delta = \|u_{SDRE} - u_{SAT}\| \neq 0$. Este resultado mostra que o desempenho do método SDRE é conservado enquanto a propriedade de estabilidade do conjunto satisfatório é adicionada.

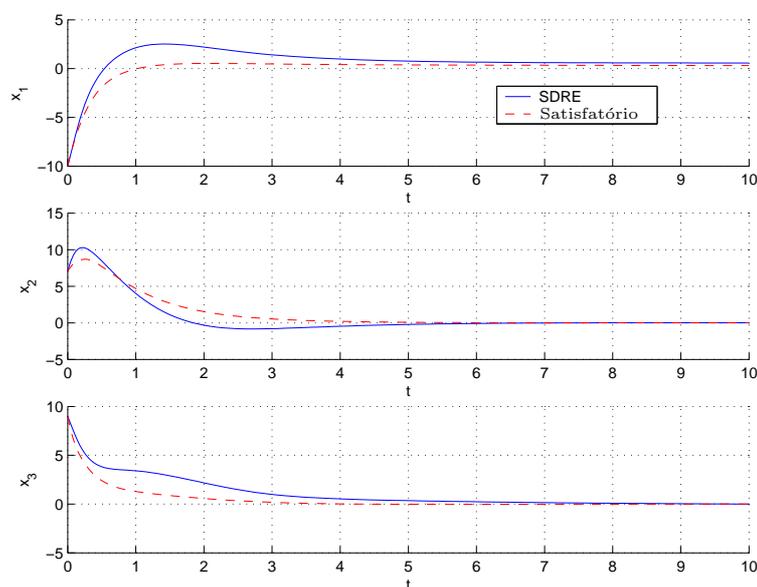


FIGURA 6.10: Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório: estados do sistema.

A modificação da CLF para $V = x^T P_0 x$, altera a resposta do sistema como visto nas figuras 6.13, 6.14 e 6.15 onde

$$P_0 = \begin{bmatrix} 47.49 & 0 & 4.01 \\ 0 & 919.24 & 0 \\ 4.01 & 0 & 345.94 \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

é a solução da equação de Riccati na origem. A figura 6.13 mostra que a convergência dos estados utilizando o controlador satisfatório ou o controlador SDRE é igual. Este resultado deve-se ao fato de que, localmente na origem, P_0 é a solução da equação

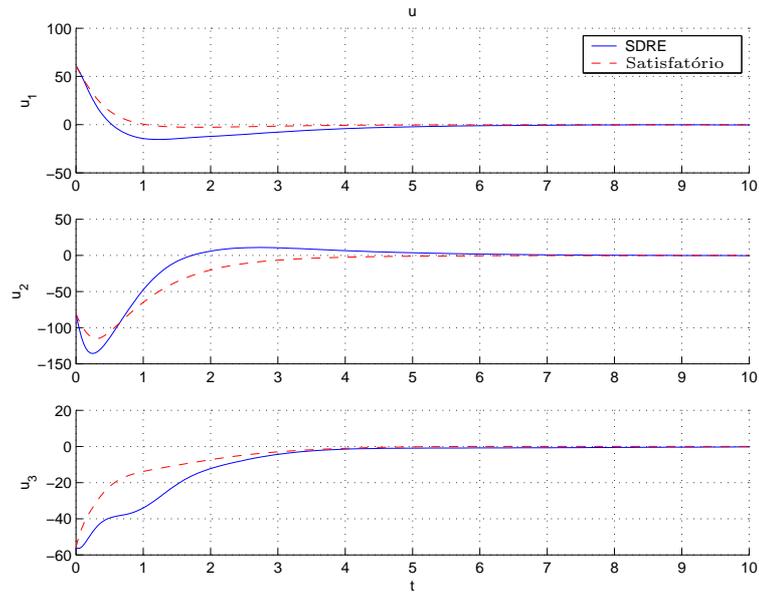


FIGURA 6.11: Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório: sinal de controle.

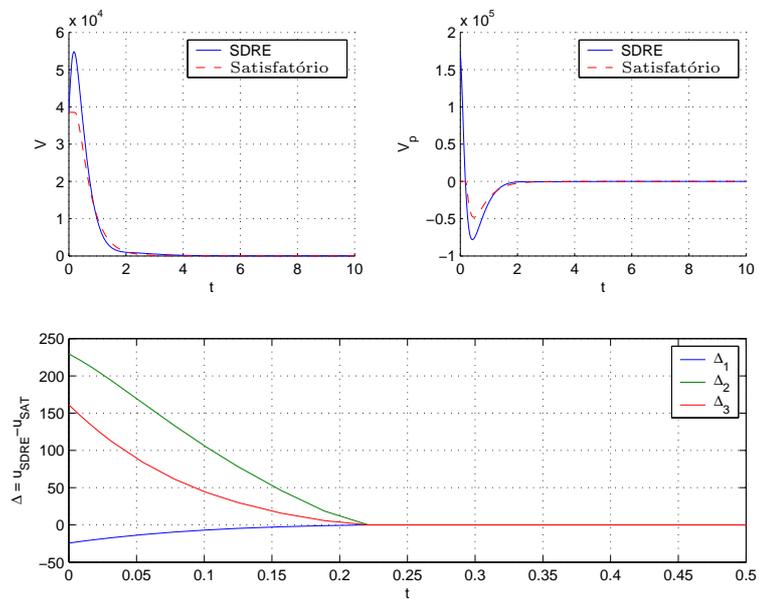


FIGURA 6.12: Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório: CLF (V), derivada de V (V_p), $\Delta = [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3]^T$.

de Riccati para o sistema $\dot{x} = A(0)x + B(0)u$ e o controlador satisfatório, com CLF $V = x^T P_0 x$, comporta-se como um regulador ótimo LQR. Contudo, a convergência dos estados utilizando o controlador satisfatório com CLF $V = x^T x$ é mais rápida do que quando utiliza-se a CLF $V = x^T P_0 x$.

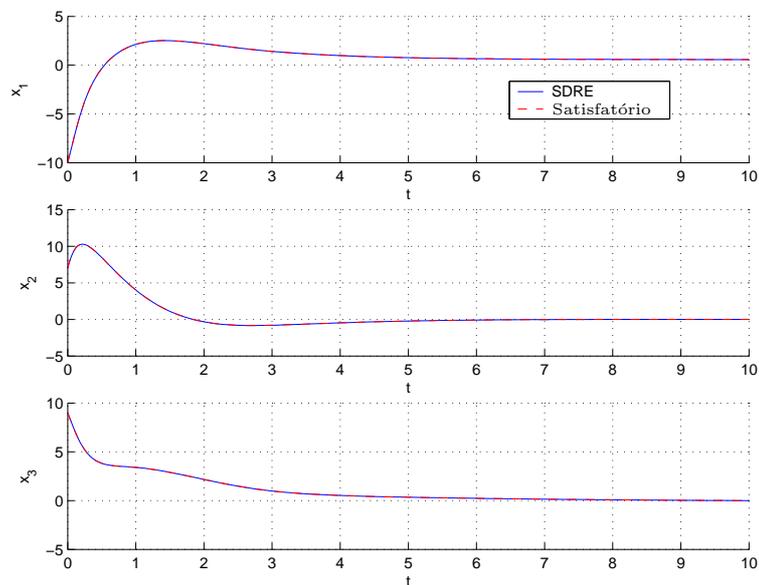


FIGURA 6.13: Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório com $V = x^T P_0 x$: estados do sistema.

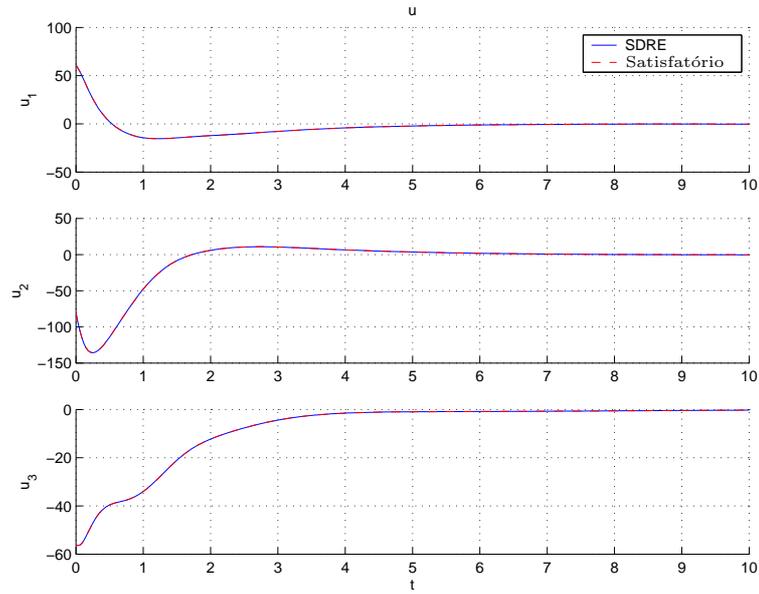


FIGURA 6.14: Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório com $V = x^T P_0 x$: sinal de controle.

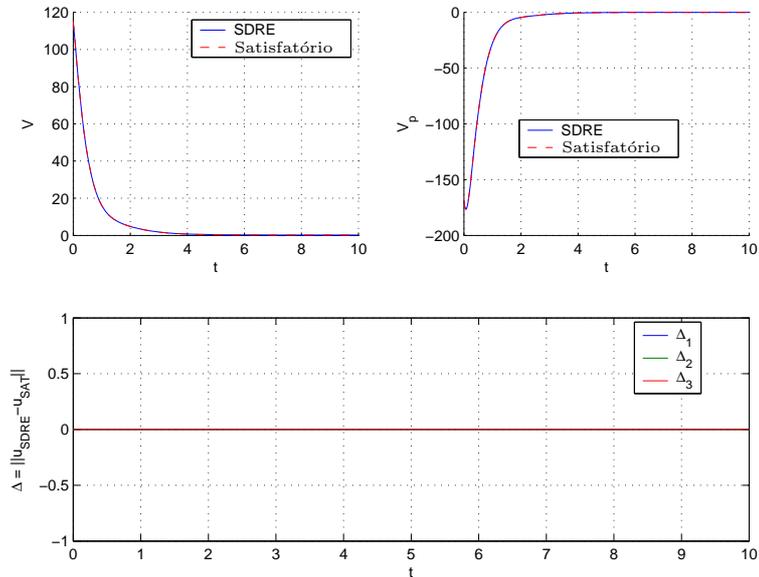


FIGURA 6.15: Veículo espacial com os controladores SDRE e satisfatório com $V = x^T P_0 x$: CLF (V), derivada de V (V_p), $\Delta = [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3]^T$.

6.3.2 Veículo Espacial com Perturbação

Esta subseção considera o sistema veículo espacial com perturbação Gaussiana ($d \neq 0$) com média zero e variância $\sigma^2(d_i) = 0.5$, assim como (Curtis & Beard 2002). As condições iniciais do sistema são $x_0 = [-10 \ 7 \ 6]^T$ e os parâmetros da equação de Riccati estão descritos na tabela 6.3.

Os resultados da simulação, apresentados nas figuras 6.16 e 6.17, comprovam a robustez do controlador SDRE à perturbação (incerteza na modelagem). Observa-se que o sistema perturbado realimentado com o controlador SDRE, quando comparado ao caso sem perturbação, mantém as características de desempenho tais como a convergência (figuras 6.10 e 6.16).

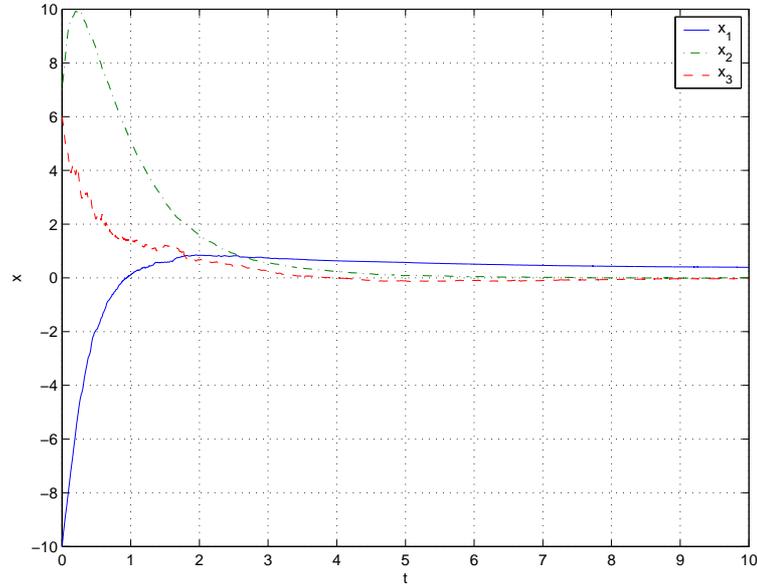


FIGURA 6.16: Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador SDRE: estados do sistema.

Aplica-se o controlador satisfatório robusto ao sistema veículo espacial. Utilizando-se a CLF $V = x^T x$ obtém-se o controle $k_r(x) = -\beta(x)g^T V_x + \xi(x)$, assim como em (Curtis & Beard 2002), com novo $\beta(x)$ sendo

$$\beta(x) = \max \left(2 \frac{V_x^T f + |V_x^T g_1| \rho^{-1}(|x|)}{V_x^T g g^T V_x}, 0 \right). \quad (6.24)$$

As figuras 6.18, 6.19, 6.20, 6.21 apresentam o desempenho do controlador satis-

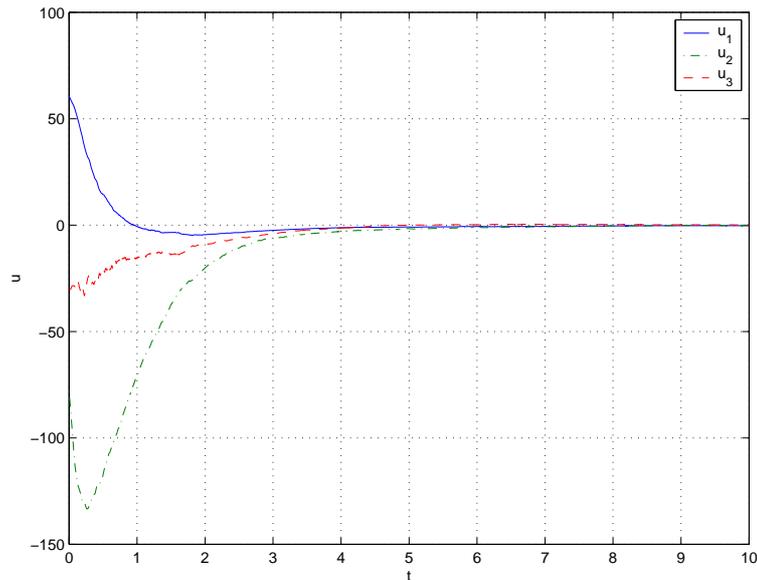


FIGURA 6.17: Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador SDRE: sinal de controle.

fatório robusto no problema com perturbação, em que a figura 6.18 mostra as variáveis de estado do sistema, a figura 6.19 o sinal de controle e a figura 6.20 a CLF $V = x^T x$ e sua derivada no tempo V_p . A figura 6.21 mostra quando o controlador SDRE é projetado no conjunto satisfatório robusto. Observa-se uma degradação no desempenho da convergência do sinal, contudo um ganho em robustez à perturbação é alcançado.

6.4 Conclusão

Os dois exemplos ilustrativos apresentados neste capítulo comprovam o desempenho dos controladores satisfatório, satisfatório robusto, SDRE e SDRE/EE.

Na seção 6.2 foi apresentado o exemplo do sistema levitador magnético testado com os controladores satisfatório, SDRE e SDRE/EE. Nas simulações realizadas, a parcela de estabilização Δ dos controladores satisfatório e SDRE/EE praticamente não atua. Portanto, os resultados obtidos com esses controladores assemelham-se ao bom desempenho em relação a convergência obtida com o controlador SDRE.

Na seção seguinte foi apresentado o sistema veículo espacial, um sistema de 3ª ordem não linear, com incerteza na modelagem. Nesse sistema, comparou-se o desempenho dos controladores satisfatório e SDRE desconsiderando a incerteza de modelagem.

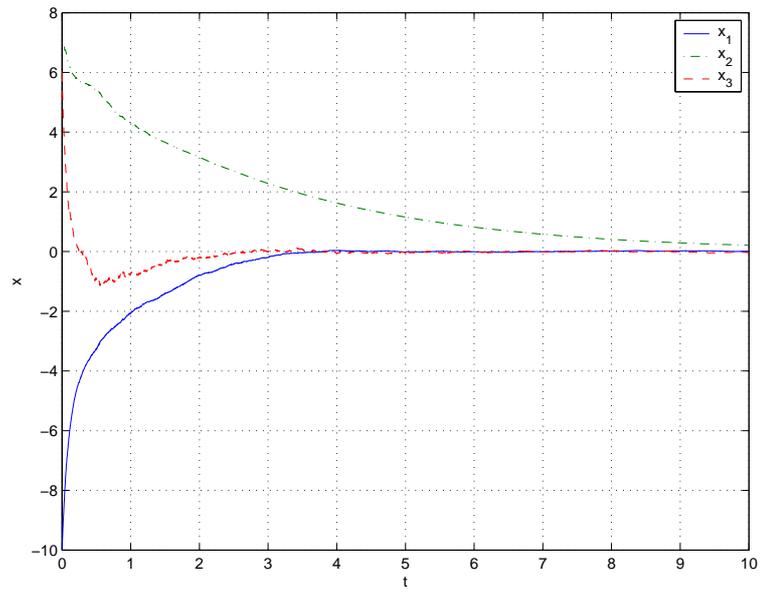


FIGURA 6.18: Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador satisfatório robusto: estados do sistema.

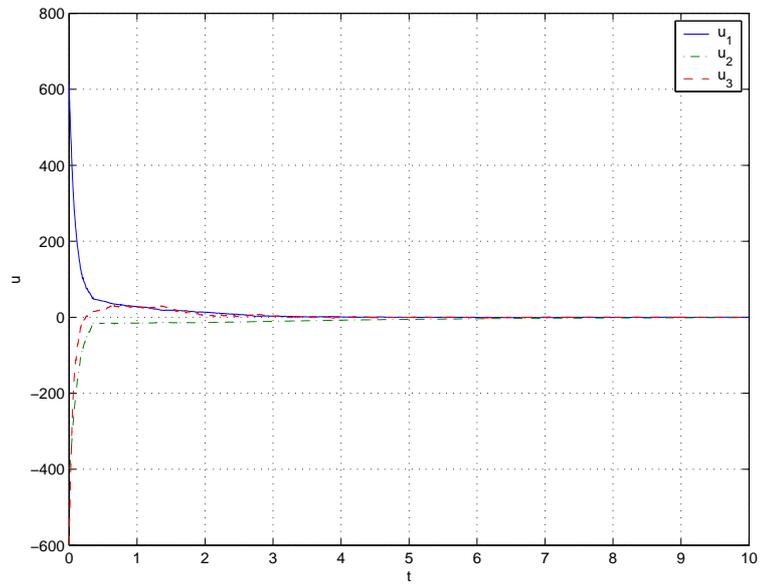


FIGURA 6.19: Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador satisfatório robusto: sinal de controle.

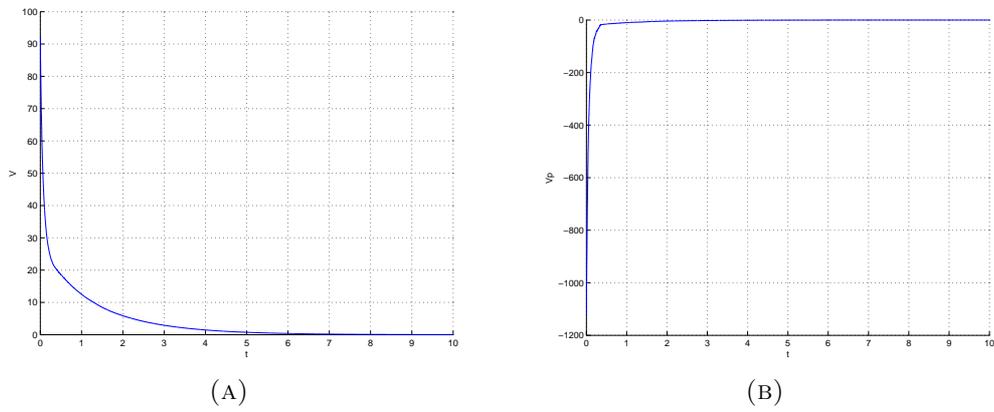


FIGURA 6.20: Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador satisfatório robusto: (a) CLF (V), (b) derivada de V (V_p).

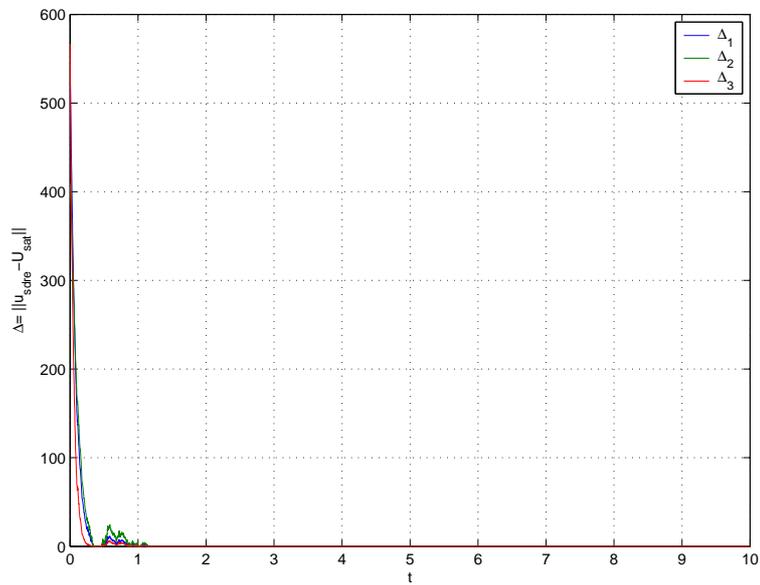


FIGURA 6.21: Veículo espacial sujeito a incerteza na modelagem com o controlador satisfatório robusto: Δ .

Verificou-se que a modificação da CLF altera a convergência dos estados do sistema. Quando utilizado a CLF $V = x^T P_0 x$, o controlador satisfatório se comportou como o controlador SDRE. Posteriormente, quando considerado a incerteza, comparou-se o desempenho dos controladores satisfatório robusto e SDRE. As simulações demonstram que ambos os métodos são robustos à incerteza na modelagem. Diferentemente do caso anterior, a parcela de estabilização Δ que é atuante, ocasiona uma convergência mais lenta.

Em ambos os exemplos mostrou-se que método o SDRE estabiliza os sistemas sem nenhuma modificação apesar de podermos garantir a estabilidade global apenas com os controladores satisfatório e SDRE/EE como demonstrado no capítulo anterior.

Capítulo 7

Discussão e Conclusões Gerais

Neste trabalho foi avaliada a estabilização global de sistemas não lineares com controle de regulação baseado na equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) (Cloutier 1997). Este método em princípio não garante formalmente a estabilidade global assintótica, exceto em casos ainda muito restritos. Apesar disso, o desempenho do controle SDRE é surpreendentemente eficiente em muitos casos, mesmo que esses não estejam dentro das categorias restritas já mencionadas.

A flexibilidade de projeto oferecida pelo método SDRE foi ilustrada neste trabalho através de exemplos como o carro-pêndulo e o pêndulo invertido. Observou-se a aparente capacidade deste controle em estabilizar globalmente os sistemas na realização do *swing up*.

Uma das principais contribuições desta tese foi comprovar a viabilidade da implementação prática do controlador não linear SDRE no pêndulo invertido rotativo. Através dos experimentos realizados neste trabalho, comparou-se o controle clássico LQR com o controle SDRE, resultando as seguintes observações:

- o controle SDRE apresentou uma maior robustez à perturbações externas;
- um aumento significativo da região de convergência em torno do ponto de equilíbrio instável do sistema realimentado com o controle SDRE.

Outra contribuição deste trabalho foi propor um controle exponencialmente estabilizante baseado no método SDRE para uma classe de sistemas que apresentam funções de Lyapunov de controle exponenciais. Este controle foi denominado SDRE/EE. Mostrou-

se que a solução da equação de Riccati para a classe de sistemas não lineares levada à forma normal é uma CLF exponencial.

Em seguida, comparou-se o desempenho do controlador SDRE/EE com o *backstepping*. Observou-se que o método do *backstepping* não garante otimalidade enquanto o controle SDRE/EE garante estabilidade global exponencial além de otimalidade.

Neste trabalho o desempenho dos controles satisfatório, satisfatório robusto, SDRE e SDRE/EE foi verificado nos exemplos levitador magnético e veículo espacial. Em ambos os exemplos mostrou-se que o método SDRE estabiliza os sistemas sem nenhuma modificação apesar de podermos garantir a estabilidade global apenas com o controladores satisfatório e SDRE/EE.

É importante ressaltar que não foram encontrados exemplos onde o controle SDRE instabilizasse o sistema.

Seguem algumas sugestões para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

1. Explorar os efeitos das diferentes escolhas da formas pseudolineares que resultem em um controlador ótimo.
2. Analisar o efeito de diferentes escolhas da matriz $A(x)$ na estabilidade do sistema em malha fechada com o controle SDRE.
3. Verificar se a implementação em tempo real do controlador SDRE poderia ser otimizada.
4. Estudar a viabilidade de se aplicar o controle SDRE/EE no pêndulo invertido.

Apêndice A

Equação Algébrica de Riccati

A Equação Algébrica de Riccati (Algebraic Riccati Equation - *ARE*) é dada por:

$$A^T X + X A - X R X + Q = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde A, R e $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R = R^T$ ($R \geq 0$) e $Q = Q^T$ ($Q \geq 0$).

Note-se que a equação de Lyapunov é um caso particular da ARE, em que $R = 0$, ($A^T X + X A = -Q$), A é estável e $Q > 0$.

A solução desta ARE pode ser obtida através da matriz Hamiltoniana definida por:

$$H := \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

onde $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$.

Deve-se destacar que o espectro de H , $\sigma(H)$, também é simétrico com respeito ao eixo imaginário. Para verificar este fato, considere-se a matriz

$$T := \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

que apresenta a propriedade $T^2 = -I$. Através da transformação de similaridade

$$\begin{aligned} T^{-1}HT &= \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -A^T & Q \\ R & A \end{bmatrix} = -H^T \end{aligned}$$

pode-se concluir que $\sigma(H) = \sigma(-H^T) = \sigma(-H) = -\sigma(H)$.

Teorema A.1 *Seja $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{2n}$ um subespaço invariante de H de dimensão n e sejam $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$\mathcal{V} = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right\}$$

Se X_1 for inversível, então $X = X_2X_1^{-1}$ é uma solução da ARE (A.1) e $\sigma(A - RX) = \sigma(H|_{\mathcal{V}})$. Além disso, a solução X é independente da base escolhida para \mathcal{V} .

Prova: Como \mathcal{V} é H -invariante, existe uma matriz $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda$$

Pós-multiplicando por X_1^{-1} , tem-se:

$$\begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} X_1 \Lambda X_1^{-1} \quad (\text{A.4})$$

Pré-multiplicando (A.4) por $\begin{bmatrix} -X & I \end{bmatrix}$, segue que:

$$\begin{bmatrix} -X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.5})$$

De (A.5), tem-se que:

$$-XA - A^T X + XRX - Q = 0,$$

logo X é de fato uma solução de (A.1). A equação (A.4) também mostra que:

$$A - RX = X_1 \Lambda X_1^{-1}.$$

Portanto $\sigma(A - RX) = \sigma(\Lambda)$. Todavia, por definição, Λ é uma representação matricial do mapa $H|_{\mathcal{V}}$, logo $\sigma(A - RX) = \sigma(H|_{\mathcal{V}})$. Finalmente, note-se que qualquer outra base que gere \mathcal{V} pode ser representada por

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} X_1 P \\ X_2 P \end{bmatrix}$$

para alguma matriz P não singular. A conclusão advém do fato de que $(X_2 P)(X_1 P)^{-1} = X_2 X_1^{-1} = X$.

■

Teorema A.2 *Se $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma solução da ARE (A.1), então existem matrizes $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com X_1 inversível, tal que $X = X_2 X_1^{-1}$ e as colunas de $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ formam uma base do subespaço invariante de H de dimensão n .*

Prova: Defina $\Lambda := A - RX$, multiplicando por X , resulta:

$$X\Lambda = XA - XRX = -Q - A^T X$$

onde a segunda igualdade vem do fato que X é uma solução de (A.1). Escrevendo, estas duas relações como

$$\begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \Lambda$$

pode-se concluir que as colunas de $\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ geram o subespaço invariante de H de dimensão n . Para finalizar a demonstração basta definir $X_1 := I$, e $X_2 := X$. ■

Assume-se que H não possua autovalores no eixo imaginário e considerem-se os dois subespaços espectrais \mathcal{X}_- e \mathcal{X}_+ de dimensão n , associados com os subespaços invariantes correspondentes aos autovalores estáveis e instáveis, respectivamente. Encontrando-se uma base para \mathcal{X}_- e particionando-se a matriz, obtém-se:

$$X_-(H) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (\text{A.6})$$

Lema A.1 *Se H não tem autovalor no eixo imaginário então \mathcal{X}_- e $\text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \right\}$ são complementares.*

Prova: ver (Zhou et al. 1996).

Do Lema A.1, pode-se verificar que X_1 é não singular, já que a matriz $\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_2 & I \end{bmatrix}$ é não singular.

Teorema A.3 *Sob a mesma hipótese do Lema A.1, existe uma matriz X tal que $\mathcal{X}_-(H) = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \right\}$. Além disso:*

(ii) X é única;

(iii) X satisfaz a Equação Algébrica de Riccati:

$$A^T X + X A - X R X + Q = 0$$

(iv) X é simétrica;

(v) $A - R X$ é estável.

Prova:

(i)

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_- &= \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \right\} = \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} I \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} X_1 \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \right\}, \text{ onde: } X = X_2 X_1^{-1}\end{aligned}$$

(ii) X é única.

Supondo-se que existam X e \bar{X} ($X \neq \bar{X}$) tais que para um $y \in \mathcal{X}_-(H)$, tem-se

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \theta_1 = \begin{bmatrix} I \\ \bar{X} \end{bmatrix} \theta_2.$$

Portanto:

$$\begin{aligned}y_1 &= \theta_1 = \theta_2 \\ y_2 &= X\theta_1 = \bar{X}\theta_2 \Rightarrow X\theta_1 = \bar{X}\theta_2\end{aligned}$$

$\Rightarrow (X - \bar{X})\theta_1 = 0 \Rightarrow X = \bar{X}$, uma vez que θ_1 pode ser escolhido arbitrariamente.

(iii) X é a solução da ARE (A.1).

Note-se que:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} X & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} &= 0 \\ H \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \Lambda_{\bar{H}}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} X & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} \Lambda_{\bar{H}} &= \begin{bmatrix} X & -I \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} X & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} XA + Q & -XR + A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} &= 0\end{aligned}$$

$$XA + Q - XRX + A^T X = 0$$

(iv) X é simétrica:

$$(A^T X + XA - XRX + Q)^T = 0^T = 0$$

$$A^T X^T + X^T A - X^T R X^T + Q = 0$$

$\Rightarrow X^T$ é também solução da ARE. Como X é única, então $X^T = X$.

(v) $A - RX$ é estável.

Sabe-se que os autovetores associados aos autovalores estáveis de H são dados por:

$$W = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} P$$

onde P é uma matriz inversível.

Portanto:

$$HW = W\Lambda_H^- \Rightarrow \begin{bmatrix} A & -R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} P\Lambda_H^-$$

$$\begin{bmatrix} A - RX \\ -(A^T X + Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\Lambda_H^- P^{-1} \\ X P\Lambda_H^- P^{-1} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A - RX = P\Lambda_H^- P^{-1} \Rightarrow A - RX$ é similar a $\Lambda_H^- \Rightarrow A - RX$ é estável.

Apêndice B

Controle Ótimo Linear Quadrático

B.1 Solução do Problema de Otimização sem Restrição

A equação (2.4) pode ser reescrita por

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} H(x, u, \nu) - \nu^T(t)\dot{x}(t)dt,$$

onde $H(x, u, \nu) = x^T(t)C^T Cx(t) + u^T(t)Ru(t) + \nu^T(t)[Ax(t) + Bu(t)]$.

Resolvendo a integral $\int_0^{\infty} -\nu^T(t)\dot{x}(t)dt$ por partes, o seguinte resultado pode ser obtido:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) = \nu^T(t) &\rightarrow d\tilde{u}(t) = \dot{\nu}^T(t)dt \\ dv(t) = \dot{x}(t)dt &\rightarrow v(t) = x(t)\end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} -\nu^T(t)\dot{x}(t)dt = \nu^T(t)x(t)|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \dot{\nu}^T(t)x(t)dt.$$

Desta forma:

$$J(x, u) = -\nu^T(t)x(t)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} H(x, u, \nu) + \dot{\nu}^T(t)x(t)dt.$$

Para uma entrada $u(t)$ que minimiza J devemos ter $\partial J = 0$ para pequenas variações ∂u em $u(t)$ (Kailath 1980). Assim,

$$\partial J = \frac{\partial J}{\partial x} \partial x + \frac{\partial J}{\partial u} \partial u$$

$$\partial J = \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\nu}(t) \right] dt \right\} \partial x + \left\{ \int_0^\infty \frac{\partial H}{\partial u} dt \right\} \partial u. \quad (\text{B.1})$$

A partir da expressão (B.1), tem-se que, se

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\nu}(t) = 0 \iff \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\nu}(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

então $\partial J = 0$ (condições suficientes).

Note-se que:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2C^T Cx(t) + A^T \nu(t) = -\dot{\nu}(t) \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2Ru(t) + B^T \nu(t) = 0$$

Portanto:

$$u(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T \nu(t)$$

De (2.1), pode-se obter o seguinte resultado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - \frac{1}{2}BR^{-1}B^T \nu(t) \quad (\text{B.3})$$

Agrupando-se (B.2) e (B.3), resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\nu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{2}BR^{-1}B^T \\ -2C^T C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix}$$

Usando a transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{\nu}(t) \end{bmatrix}$$

Tem-se portanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{\nu}}(t) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -C^TC & -A^T \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{\nu}(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{\nu}(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

uma vez que $x(t) = \hat{x}(t)$

De acordo com (Kailath 1980, pp. 228), pode ser verificado que sob estas hipóteses $\hat{\nu}(\cdot)$ e $x(\cdot)$ estão relacionados por

$$\hat{\nu}(t) = Xx(t), \quad (\text{B.5})$$

onde $X = X^T$ é a solução da seguinte ARE (*Algebraic Riccati Equation*):

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + C^T C = 0.$$

B.2 Prova do Teorema 2.1

Observe-se que a entrada $u(t)$ que minimiza J é dada por

$$u(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T \nu(t) = -R^{-1}B^T \hat{\nu}(t)$$

Substituindo-se (B.5) em (B.4), tem-se:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^T X) x(t) \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{\hat{\nu}}(t) = -(C^T C + A^T X) x(t) \quad (\text{B.7})$$

Como $\hat{\nu}(t) = Xx(t)$ então $\dot{\hat{\nu}}(t) = X\dot{x}(t)$. De (B.6) e (B.7), chega-se a:

$$-(C^T C + A^T X) x(t) = X (A - BR^{-1}B^T X) x(t).$$

Portanto:

$$(A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + C^T C) x(t) = 0$$

o que ocorrerá se X for solução da ARE associada à matriz H dada por

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -C^TC & -A^T \end{bmatrix}$$

Finalmente, pelo Teorema A.3, tem-se que $A - BR^{-1}B^TX$ é estável.

■

Referências Bibliográficas

- Alleyne, A. G. & Pomykalski, M. (2000), ‘Control of a class of nonlinear systems subject to periodic exogenous signals’, *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **8**(2), 283–287.
- Anderson, B. D. O. (1978), ‘Second-order convergent algorithms for the steady-state Riccati equation’, *Int. J. Control* **28**(2), 295–306.
- Anderson, B. D. O. & Moore, J. B. (1990), *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*, Prentice–Hall.
- Anderson, F. (1999), *LAPACK User’s Guide*, Society for industrial and Applied Mathematics (SIAM), <http://www.netlib.org/lapack>.
- Angeli, D. (2001), ‘Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state’, *Automatica* **37**, 1103–1108.
- Apkarian, J. (1995), *A Comprehensive and Modular Laboratory for Control Systems Design and Implementation*, Quanser Consulting.
- Apkarian, J. (1996), *Self-Erecting, Rotary Motion Inverted Pendulum*, Quanser Consulting.
- Artstein, Z. (1983), ‘Stabilization with relaxed controls’, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications* **7**(11), 1163–1173.
- Åström, K. J. & Furuta, K. (2000), ‘Swinging up a pendulum by energy control’, *Automatica* **36**, 287–295.
- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (1997), *Computer-Controlled Systems*, 3rd edn, Prentice–Hall.
- Beard, R., Young, B. & Stirling, W. (2001), Nonlinear regulation using the satisficing paradigm, in ‘Proc. American Contr. Conf.’, Washington (DC).
- Bodson, M. & Groszkiewicz, J. E. (1997), ‘Multivariable adaptive algorithms for reconfigurable flight control’, *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **5**(2), 217–229.
- Bullo, F. & Lewis, A. D. (2004), *Geometric Control of Mechanical Systems*, Springer–Verlag.
- Byrnes, C. I. (1980), Algebraic and geometric aspects of the analysis of the analysis of feedback systems, in C. I. Byrnes & C. F. Martin, eds, ‘Algebraic and Geometric Methods in Linear Systems Theory’, American Mathematical Society.

- Cloutier, J. R. (1997), State-dependent Riccati equation techniques: An overview, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, Albuquerque, NM, pp. 932–936.
- Cloutier, J. R. & Stansbery, D. T. (2002), The capabilities and art of state-dependent Riccati equation-based design, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, pp. 86–91.
- Cloutier, J. R., D’Souza, C. N. & Mracek, C. P. (1996), Nonlinear regulation and nonlinear h_∞ control via the state-dependent Riccati equation techniques: Part1, theory, part2, examples, *in* ‘Int. Conf. Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace’.
- Curtis, W. & Beard, R. (2001), A model-predictive satisficing approach to a nonlinear tracking problem, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Orlando.
- Curtis, W. & Beard, R. (2002), Ensuring stability of state-dependent Riccati equation controllers via satisficing, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Las Vegas, NV, pp. 2645–2650.
- Curtis, W. & Beard, R. (2004), ‘Satisficing: A new approach to constructive nonlinear control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **49**(7), 1090–1102.
- Desoer, C. A. & Vidyasagar, M. (1975), *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York.
- Dubrovin, B., Fomenko, A. T. & Novikov, S. P. (1984), *Modern Geometry – Methods and Applications*, Vol. 1, Springer–Verlang.
- Erdem, E. B. & Alleyne, A. G. (1999), Globally stabilizing second order nonlinear systems by SDRE control, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, San Diego, California, USA, pp. 2501–2505.
- Erdem, E. B. & Alleyne, A. G. (2004), ‘Design of a class of nonlinear controllers via state dependent Riccati equations’, *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **12**(1), 133–137.
- Ezal, K., Pan, Z. & Kokotović, P. V. (2000), ‘Locally optimal and robust backstepping design’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **45**(2), 260–271.
- Fessler, R. (1995), ‘A proof of the two-dimension Markus-Yamabe stability conjecture and a generalization’, *Ann. Polon. Math.* **62**, 45–74.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. & Emami-Naeini, A. (1991), *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3rd edn, Addison-Wesley.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. & Emami-Naeini, A. (2002), *Feedback Control of Dynamic Systems*, 4th edn, Addison-Wesley.
- Freeman, R. A. & Kokotović, P. V. (1996), *Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques. System & Control: Foudation & Application*, Birkhauser.

- Furuta, K. (2003), Control of pendulum: From super mechano-system to human adaptive mechatronics, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Maui, Hawaii USA, pp. 1498–1507.
- Furuta, K. & Pan, Y. (1995), A new approach to design of a sliding sector for vss controller, *in* ‘Proc. American Contr. Conf.’, Seattle, USA, pp. 1304–1308.
- Furuta, K. & Pan, Y. (2000), ‘Variable structure control with sliding sector’, *Automatica* **36**(2), 211–228.
- Glad, S. T. (1984), ‘On the gain margin of nonlinear and optimal regulators’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **29**, 615–620.
- Glutsyuk, A. A. (1994), ‘A complete solution of the jacobian problem for vector fields on the plane’, *Russian Math. Survey* **49**, 185–186.
- Goodrich, M., Stirling, W. & Frost, R. (1998), ‘A theory of satisficing decision and control’, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics - Part A* **28**(6), 763–779.
- Goodwin, G. C., Graebe, S. F. & Salgado, M. E. (2000), *Control System Design*, Prentice–Hall.
- Gouvêa, J. A. (2004), Controle de sistemas passivos utilizando o paradigma satisfatório, Master’s thesis, Programa de Engenharia Elétrica, COPPE/UFRJ.
- Gutiérrez, C. (1995), ‘A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture’, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **12**, 627–671.
- Hammett, K. D., Hall, C. D. & Ridgely, D. B. (1998), ‘Controllability issues in nonlinear the state-dependent Riccati equation control’, *Journal of Guidance Control & Dynamics* **21**(5), 767–773.
- Holzhüter, T. (2004), ‘Optimal regulator for the inverted pendulum via euler-lagrange backward integration’, *Automatica* **40**, 1613–1620.
- Huang, Y. & Lu, W. M. (1996), Nonlinear optimal control: alternatives to Hamilton-Jacobi equation, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Kobe, Japan, pp. 3942–3947.
- Hughes, P. C. (1986), *Spacecraft Attitude Dynamics*, J. Wiley & Sons.
- Jacobson, D. H. (1977), *Extension of linear-quadratic control, optimization and matrix theory*, Academic Press, New York.
- Kailath, T. (1980), *Linear Systems*, Prentice–Hall.
- Khalil, H. K. (1996), *Nonlinear Systems*, 2rd edn, Prentice–Hall.
- Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, 3rd edn, Prentice–Hall.
- Kirk, D. E. (1970), *Optimal Control Theory an Introduction*, Prentice–Hall.

- Kleinman, D. (1968), ‘On an interactive technique for Riccati equation computation’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **13**(1), 114–115.
- Kokotović, P. V. & Marino, R. (1986), ‘On vanishing stability regions in nonlinear systems with high gain feedback’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **31**(10), 967–970.
- Krstić, M., Kanellakopoulos, I. & Kokotović, P. (1995), *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley.
- Laub, A. (1979), ‘A Schur method for solving algebraic Riccati equations’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **24**(6), 913–921.
- Leonessa, A., Haddad, W. & Hayakawa, T. (2001), Adaptive tracking for nonlinear systems with control constraints, in ‘Proc. American Contr. Conf.’, Arlington, VA, pp. 1292–1297.
- Lin, Y. & Sontag, E. (1995), ‘Control-lyapunov universal formulas for restricted inputs’, *Control-Theory and Advanced Technology* **10**, 1981–2004.
- Lublin, L. & Athans, M. (1996), Linear quadratic regulator control, in ‘The Control Handbook’, William S. Levine, chapter 39.
- Lugon, F. W. (2004), Laboratório virtual de controle, Technical report, Departamento de Engenharia Eletrônica e Computação, DEL/EE/UFRJ.
- Luh, J., Walker, P. & Paul, R. (1980), ‘Resolved acceleration control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **25**(3), 468–474.
- Marino, R. & Tomei, P. (1995), *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive, and Robust*, Prentice–Hall.
- Markus, L. & Yamabe, H. (1960), ‘Global stability criterion for differential systems’, *Osaka Math. J.* **12**(2), 305–317.
- Menon, P., Lam, T., Crawford, L. & Cheng, V. (2002), Real-time computational methods for SDRE nonlinear control of missiles, in ‘Proc. American Contr. Conf.’, Anchorage, AK.
- Meriam, J. L. & Kraige, L. G. (2004), *Mecânica Dinâmica*, 5rd edn, LTC.
- Mracek, C. P. & Cloutier, J. R. (1998), ‘Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method’, *Int. J. Robust Nonlinear Control* **8**(4 - 5), 401–433.
- Mracek, C. P., Cloutier, J. R. & D’Souza, C. N. (1996), A new technique for nonlinear estimation, in ‘IEEE Int. Conf. Control Applications’, Dearborn, MI.
- Noura, H., Sauter, D., Hamelin, F. & Theilliol, D. (2000), ‘Fault-tolerant control in dynamic systems: application to a winding machine’, *IEEE Contr. Syst. Mag.* **20**(1), 33–49.

- Palumbo, A. A. & Jackson, A. A. (1999), Integrated missile guidance and control: A state dependent Riccati differential equation approach, *in* ‘IEEE Int. Conf. Control Applications’, Maui, Hawaii USA, pp. 243–248.
- Pan, Z., Ezal, K., Krener, A. J. & Kokotović, P. V. (2001), ‘Backstepping design with locally optimality matching’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **46**(7), 1014–1027.
- Rodman, L. (1980), On extremal solutions of the algebraic riccati equation, *in* C. I. Byrnes & C. F. Martin, eds, ‘Algebraic and Geometric Methods in Linear Systems Theory’, American Mathematical Society.
- Ruggiero, M. & Lopes, V. (1996), *Cálculo Numérico–Aspectos Teóricos e Computacionais*, Makron Books.
- Salcudean, S. (1988), On the control of magnetically levitated robot wrists, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Austin, TX, pp. 186–191.
- Sastry, S. (1999), *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*, Springer–Verlag.
- Sepulchre, R., Jankovic, M. & Kokotović, P. (1997), *Constructive Nonlinear Control*, Springer–Verlag.
- Shamma, J. S. & Cloutier, J. R. (2003), ‘Existence of SDRE stabilizing feedback’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **48**(3), 513–517.
- Simon, H. A. (1955), ‘A behavioral model of rational choice’, *Quart. J. Economics* **59**, 99–118.
- Singh, S. N. & Yim, W. (2003), State feedback control of an aeroelastic system with structural nonlinearity, *in* ‘Aerospace Science and Technology’, Vol. 7, pp. 23–31.
- Slotine, J. E. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice–Hall.
- Sontag, E. D. (1983), ‘A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability’, *SIAM Journal on Control and Optimization* **21**(3), 462–471.
- Sontag, E. D. (1989), ‘A universal construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization’, *Systems & Contr. Letters* **13**(12), 117–123.
- Sontag, E. D. (1998), *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer Verlag, New York.
- Suzuki, S., Furuta, K. & Pan, Y. (2003), State-dependent sliding-sector VS-control and application to swing-up control of pendulum, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Maui, Hawaii USA, pp. 251–256.
- Teel, A. (1996), ‘A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **41**(9), 1256–1270.
- Terashima, S., Iwase, M. & Furuta, K. (2003), A design of servo controller for nonlinear systems using state dependent Riccati equation, *in* ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Maui, Hawaii USA, pp. 3864–3869.

- Trumper, D. L., Olson, M. S. & Subrahmanyam, P. K. (1997), ‘Linearizing control of magnetic suspensions’, *IEEE Trans. Contr. Syst. Tech.* **5**(4), 427–439.
- Tsitsiklis, J. N. & Athans, M. (1984), ‘Guaranteed robustness properties of multivariable nonlinear stochastic optimal regulators’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **29**, 690–696.
- Utkin, U. I. (1992), *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer–Verlang.
- Wan, E. A. & Bogdanov, A. A. (2001), Model predictive neural control with applications to a 6 dof helicopter model, *in* ‘ACC’, Arlington, USA, pp. 488–493.
- Wen, J. T. & Kreutz-Delgado, K. (1992), ‘Motion and force control of multiple robotic manipulators’, *Automatica* **28**(4), 729–744.
- Williams, D., Friedland, B. & Madiware, A. (1987), ‘Modern control theory for design of autopilots for bank-to-turn missiles’, *Journal of Guidance, Control and Dynamic* **10**(4), 378–386.
- Xin, M. & Balakrishnan, S. N. (2003), ‘Missile longitudinal autopilot design using a new suboptimal nonlinear control method’, *IEEE Proceedings – Control Theory and Applications* **150**(6), 577–584.
- Zhou, K., Doyle, J. C. & Glover, K. (1996), *Robust and Optimal Control*, Prentice–Hall.
- Zubov, V. I. (1966), *Theory of optimal control*, Sudostroenie, Leningrad.