

PROJETOS DE FILTROS DIGITAIS PARA ANÁLISE
DE SINAIS DO SISTEMA ELÉTRICO

André Luiz Lins Miranda

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Eduardo Antônio Barros da Silva, Ph.D.

Dr. Marco Antonio Macciola Rodrigues, D.Sc.

Prof. Gelson Vieira Mendonça, Ph.D.

Prof. Maria Dias Bellar, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 2005

MIRANDA, ANDRÉ LUIZ LINS

Projetos de Filtros Digitais para Análise
de Sinais do Sistema Elétrico [Rio de Janeiro]
2005

XVI, 157 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Elétrica, 2005)

Tese – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Processamento de Sinais
2. Filtros Digitais
3. Fasores
4. Oscilografia

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho
a *Evelyn Vinocur*,
com todo carinho, respeito e gratidão,
pela grande guerreira que é,
pela grande beleza que tem
e pela enorme luz que iluminou o meu trabalho.

AGRADECIMENTOS

A conclusão desta tese significa para mim uma grande superação, pois no transcorrer deste trabalho eu consegui superar uma série de dificuldades com a ajuda de muitas pessoas, mas algumas em especial. Por isso, os meus agradecimentos às pessoas abaixo são realmente profundos e sinceros:

Para minha mãe Luiza e minha irmã Janaína, por terem me aturado esse tempo todo e por terem torcido por mim;

Para Danielle por seu carinho e paciência e pela força que me deu durante a finalização do meu trabalho;

Ao Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPEL, no qual adquiri experiência e conhecimento na área de oscilografia e em especial a Marco Antonio Macciola Rodrigues por sua competente coorientação e sua grande amizade;

Ao meu orientador Eduardo Antônio Barros da Silva, por sua amizade, pelo seu incentivo e pela sua orientação perfeita ao longo do desenvolvimento deste trabalho;

A Fernanda Lopes Torres, pelo incentivo, carinho e paciência de me ouvir nas horas mais difíceis do desenvolvimento deste trabalho e por estar me colocando sempre para cima com sua energia maravilhosa;

A Fátima Aparecida, por sua amizade, pelo incentivo que me deu sempre e pela sua presença na hora certa;

A Marlana por tudo o que me ajudou e por sua força espiritual;

A Paulo Bulkool, por sua amizade e por toda ajuda durante esse tempo de tese;

Aos servidores do Instituto de Artes da UERJ, pelo apoio ao meu mestrado em especial a grande Tereza, mas sem me esquecer de Valdir, Genciara, Alberto Cipiniuk, Maria Lúcia Galvão e Ricardo Basbaum;

A Carjan Camilo, por sua amizade de anos e pelo seu incentivo e ajuda para que eu fizesse a minha tese e pela força e disponibilidade sempre constantes;

A Suelaine Diniz, Flávia Lares, Michel, Ana Paula, Alberto Kopiler e Valdir, pela alegria que acrescentavam aos meus dias de trabalho.

Enfim, para todos os outros amigos que sempre acreditaram na conclusão deste trabalho. Pela força espiritual nos momentos de fraqueza e pelo carinho e amizade sempre presentes na hora certa.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

PROJETOS DE FILTROS DIGITAIS PARA ANÁLISE
DE SINAIS DO SISTEMA ELÉTRICO

André Luiz Lins Miranda

Fevereiro/2005

Orientadores: Eduardo Antônio Barros da Silva
Marco Antônio Macciola Rodrigues

Programa: Engenharia Elétrica

Esta dissertação aborda o problema do cálculo de fasores e analisa a filtragem de Fourier e os problemas relativos a ela tanto no domínio da frequência, quanto com relação aos transitórios. Além disso, propõe uma metodologia para o projeto de filtros maximamente planos na banda de passagem que reduz os efeitos do vazamento espectral em comparação aos filtros de Fourier, com ou sem janelas no tempo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DIGITAL FILTERS DESIGN TO ANALYSIS
OF ELECTRICAL SYSTEM SIGNALS

André Luiz Lins Miranda

February/2005

Advisors: Eduardo Antônio Barros da Silva
Marco Antônio Macciola Rodrigues

Department: Electrical Engineering

This dissertation addresses the problem of the phasor calculation. It begins with an analysis of phasor calculation using the Fourier Transform in both frequency and time domains. Then, it is proposed a design technique for maximally flat passband filters which reduces the effects of leakage in comparison to the Fourier filters, with or without time-domain windows.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	OSCILOGRAFIA E MEDIDAS FASORIAIS EM SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA	1
1.2	ESTRUTURA DA TESE	4
2	TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA AO SINAL ELÉTRICO	6
2.1	INTRODUÇÃO.....	6
2.2	FASORES [7]	6
2.3	ALGORITMOS DE FOURIER.....	8
2.4	VAZAMENTO ESPECTRAL	10
2.5	TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA AO SINAL ELÉTRICO	12
2.5.1	<i>Expressão analítica da resposta do filtro no domínio da frequência.....</i>	<i>19</i>
2.5.2	<i>Relação entre o módulo da resposta em frequência e o comprimento da janela T_w.....</i>	<i>22</i>
2.5.3	<i>Análise do ângulo da resposta de frequência para janela T_w múltiplas de meio ciclo de fundamental.....</i>	<i>25</i>
2.5.4	<i>Análise do ângulo da resposta de frequência quando a janela T_w não é múltipla de meio ciclo de fundamental.....</i>	<i>27</i>
2.6	SIMULAÇÕES REALIZADAS	29
2.7	EFEITO DAS JANELAS NO FILTRO DE FOURIER.....	32
2.8	EFEITO DO USO DE JANELAS QUANDO A FREQUÊNCIA DA REDE VARIA.....	35
3	UM FILTRO PARA O CÁLCULO DE FASORES.....	48
3.1	INTRODUÇÃO.....	48
3.2	FILTRO PROPOSTO	48
3.2.1	<i>Relação entre K e $Q(z)$.....</i>	<i>52</i>
3.2.2	<i>Projeto do filtro no caso onde K é par</i>	<i>55</i>
3.2.3	<i>Determinação dos coeficientes do filtro usando a técnica de Mínimos Quadrados Ponderados.....</i>	<i>59</i>
3.2.4	<i>Projeto do filtro no caso onde K é ímpar</i>	<i>61</i>

3.3	PARÂMETROS DO FILTRO	64
3.3.1	<i>Comprimento do filtro</i>	64
3.3.2	<i>Fator K</i>	65
3.3.3	<i>A matriz de pesos</i>	67
3.3.4	<i>Frequência de corte e dos zeros</i>	72
3.3.5	<i>Frequência inicial de simulação (f_{Sim})</i>	74
4	RESULTADOS	75
4.1	INTRODUÇÃO.....	75
4.2	CONJUNTO DE SINAIS DE TESTE	75
4.3	FIGURAS DE MÉRITO	77
4.4	PROJETO DOS FILTROS	80
4.4.1	<i>Comprimento do Fourier</i>	82
4.4.2	<i>Família de filtros</i>	84
5	CONCLUSÃO.....	91
5.1	TRABALHOS FUTUROS.....	92
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	94
7	APÊNDICES	99
7.1	FILTRAGEM DE FOURIER USANDO JANELAS	99
7.2	COEFICIENTES E RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DOS FILTROS PROJETADOS	123
7.3	PARÂMETROS $MSEMOD(F)$ E $MEDMOD(F)$ DOS FILTROS PROJETADOS	146

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Exemplo de um sinal senoidal.....	7
Figura 2 – Resposta em frequência do filtro de Fourier de meio, um e dois ciclos.....	10
Figura 3 – Representação do Vazamento Espectral.....	11
Figura 4 – Digitalização do sinal elétrico	13
Figura 5 – Módulo da resposta em frequência da função co-seno amostrada	19
Figura 6 – Componente $Y_L(k)$ da equação (59) correspondendo à frequência Ω_0	24
Figura 7 – Diagrama fasorial de $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$ para janelas cujo comprimento é um múltiplo inteiro de um ciclo de fundamental.....	26
Figura 8 - Diagrama fasorial de $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$ para janelas cujo comprimento é um múltiplo ímpar de meio ciclo da fundamental	27
Figura 9 - Diagrama fasorial de $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$ para taxas de amostragem não múltiplas da frequência fundamental	28
Figura 10 – Exemplo do efeito de oscilação no módulo do fasor.....	28
Figura 11 – Resposta em frequência de $Y_L(1)$ e $Y_R(1)$	30
Figura 12 – Resposta em frequência de $Y_L(2)$ e $Y_R(2)$	30
Figura 13 – Influência do tamanho da janela na resposta em frequência	31
Figura 14 – Exemplo da utilização da janela retangular e da modulação.....	32
Figura 15 - Trecho de uma senóide multiplicado pela janela de Hamming.	33
Figura 16 – Resposta em frequência das janelas da Tabela 2.....	34
Figura 17 - Resultado do módulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 59,5 Hz	35
Figura 18 - Resultado do ângulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 59,5 Hz	36
Figura 19 – Módulo da filtragem de Fourier usando janelas de Hamming e triangular (as duas melhores) de um ciclo para um sinal de 59,5 Hz	37
Figura 20 – Ângulo da filtragem de Fourier usando janelas de Hamming e triangular (as duas melhores) de um ciclo para um sinal de 59,5 Hz	38
Figura 21 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos	39
Figura 22 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos	40

Figura 23 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos	41
Figura 24 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos	42
Figura 25 – Resultado do módulo na análise do transitório para janelas de um a quatro ciclos	43
Figura 26 – Resultado do ângulo na análise do transitório para janelas de um a quatro ciclos	45
Figura 27 - Comparação da planura da resposta em freqüência das janelas triangulares de um a quatro ciclos na origem	47
Figura 28 – Resposta em freqüência do filtro ideal	48
Figura 29 – Limites de amplitude e freqüência do filtro protótipo	49
Figura 30 – Exemplo de um filtro com número ímpar de coeficientes	51
Figura 31 – Limites de amplitude e freqüência do filtro $R(\omega)$	52
Figura 32 - Efeito do parâmetro K na planura do filtro	66
Figura 33 – Freqüência de corte desejada	72
Figura 34 -Intervalo de freqüência com distribuição não-uniforme	73
Figura 35 -Intervalo de freqüência usado na otimização <i>WLS</i>	74
Figura 36 – Exemplo de sinal usado para teste dos filtros	76
Figura 37 – Gráfico exemplificando a oscilação no módulo	78
Figura 38 – Gráfico mostrando um sinal com sobrepico	79
Figura 39 – Gráfico mostrando um sinal sem sobrepico	80
Figura 40 – Gráfico comparativo entre o filtro proposto a janela triangular	83
Figura 41 – Figuras de mérito $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$	86
Figura 42 – Comparação das figuras de mérito de cada filtro projetado	87
Figura 43 – Exemplo de um filtro cujos fatores de mérito são piores do que os fatores de mérito da janela triangular	88
Figura 44 – Exemplo de dois filtros cujos fatores de mérito são melhores do que os fatores de mérito da janela triangular	89
Figura 45 - Resultado do módulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 59,7 Hz	99
Figura 46 - Resultado do ângulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 59,7 Hz	100

Figura 47 - Comparação do módulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 59,7 Hz	101
Figura 48 - Comparação do ângulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 59,7 Hz	102
Figura 49 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 59,7 Hz	103
Figura 50 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 59,7 Hz	104
Figura 51 – Resultado do módulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 59,7 Hz ..	105
Figura 52 – Resultado do ângulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 59,7 Hz ..	106
Figura 53 - Resultado do módulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 60,1 Hz	107
Figura 54 - Resultado do ângulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 60,1 Hz	108
Figura 55 - Comparação do módulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 60,1 Hz	109
Figura 56 - Comparação do ângulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 60,1 Hz	110
Figura 57 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,1 Hz	111
Figura 58 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,1 Hz	112
Figura 59 – Resultado do módulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,1 Hz ..	113
Figura 60 – Resultado do ângulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,1 Hz ..	114
Figura 61 - Resultado do módulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 60,5 Hz	115
Figura 62 - Resultado do ângulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 60,5 Hz	116
Figura 63 - Comparação do módulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 60,5 Hz	117

Figura 64 - Comparação do ângulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 60,5 Hz	118
Figura 65 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,5 Hz	119
Figura 66 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,5 Hz	120
Figura 67 – Resultado do módulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,5 Hz ..	121
Figura 68 – Resultado do ângulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,5 Hz ..	122
Figura 69 – Resposta em freqüência do filtro P252#1.....	123
Figura 70 – Resposta em freqüência do filtro P332#1.....	124
Figura 71 – Resposta em freqüência do filtro P412#1.....	125
Figura 72 – Resposta em freqüência do filtro P414#1.....	126
Figura 73 – Resposta em freqüência do filtro P492#1.....	127
Figura 74 – Resposta em freqüência do filtro P492#2.....	128
Figura 75 – Resposta em freqüência do filtro P494#1.....	129
Figura 76 – Resposta em freqüência do filtro P494#2.....	130
Figura 77 – Resposta em freqüência do filtro P496#1.....	131
Figura 78 – Resposta em freqüência do filtro P496#2.....	132
Figura 79 – Resposta em freqüência do filtro P572#1.....	133
Figura 80 – Resposta em freqüência do filtro P574#1.....	134
Figura 81 – Resposta em freqüência do filtro P574#2.....	135
Figura 82 – Resposta em freqüência do filtro P574#3.....	136
Figura 83 – Resposta em freqüência do filtro P574#4.....	137
Figura 84 – Resposta em freqüência do filtro P574#5.....	138
Figura 85 – Resposta em freqüência do filtro P576#1.....	139
Figura 86 – Resposta em freqüência do filtro P576#2.....	140
Figura 87 – Resposta em freqüência do filtro P576#3.....	141
Figura 88 – Resposta em freqüência do filtro P654#1.....	142
Figura 89 – Resposta em freqüência do filtro P654#2.....	143
Figura 90 – Resposta em freqüência do filtro P656#1.....	144
Figura 91 – Resposta em freqüência do filtro P656#2.....	145
Figura 92 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P252#1	146

Figura 93 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P332#1	147
Figura 94 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P412#1	147
Figura 95 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P414#1	148
Figura 96 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P492#1	148
Figura 97 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P492#2	149
Figura 98 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P494#1	149
Figura 99 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P494#2	150
Figura 100 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P496#1	150
Figura 101 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P496#2	151
Figura 102 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P572#1	151
Figura 103 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#1	152
Figura 104 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#2	152
Figura 105 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#3	153
Figura 106 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#4	153
Figura 107 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#5	154
Figura 108 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P576#1	154
Figura 109 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P576#2	155
Figura 110 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P576#3	155
Figura 111 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P654#1	156
Figura 112 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P654#2	156
Figura 113 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P656#1	157
Figura 114 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P656#2	157

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Características da oscilografia [1].....	2
Tabela 2 – Definições de algumas janelas típicas [17].....	33
Tabela 3 – Características das famílias de filtros maximamente planos	84
Tabela 4 – Parâmetros de desempenho do filtro triangular	86
Tabela 5 – Coeficientes do filtro P252#1	123
Tabela 6 – Coeficientes do filtro P332#1	124
Tabela 7 – Coeficientes do filtro P412#1	125
Tabela 8 – Coeficientes do filtro P414#1	126
Tabela 9 – Coeficientes do filtro P492#1	127
Tabela 10 – Coeficientes do filtro P492#2	128
Tabela 11 – Coeficientes do filtro P494#1	129
Tabela 12 – Coeficientes do filtro P494#2	130
Tabela 13 – Coeficientes do filtro P496#1	131
Tabela 14 – Coeficientes do filtro P496#2	132
Tabela 15 – Coeficientes do filtro P572#1	133
Tabela 16 – Coeficientes do filtro P574#1	134
Tabela 17 – Coeficientes do filtro P574#2	135
Tabela 18 – Coeficientes do filtro P574#3	136
Tabela 19 – Coeficientes do filtro P574#4	137
Tabela 20 – Coeficientes do filtro P574#5	138
Tabela 21 – Coeficientes do filtro P576#1	139
Tabela 22 – Coeficientes do filtro P576#2	140
Tabela 23 – Coeficientes do filtro P576#3	141
Tabela 24 – Coeficientes do filtro P654#1	142
Tabela 25 – Coeficientes do filtro P654#2	143
Tabela 26 – Coeficientes do filtro P656#1	144
Tabela 27 – Coeficientes do filtro P656#2	145

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES

RDP	Registrador Digital de Perturbações
CAL	função de <i>Walsh</i> do tipo co-seno
SAL	função de <i>Walsh</i> do tipo seno
$\ v(t)\ , \ i(t)\ $	módulos de tensão e corrente, respectivamente
$\phi_v(t), \phi_i(t)$	ângulos de tensão e corrente, respectivamente
DC	Corrente Contínua (<i>Direct Current</i>)
$v(t)$	sinal monofásico de tensão
$i(t)$	sinal monofásico de corrente
ω_0	freqüência angular da rede elétrica
ω_s	freqüência angular de amostragem
φ_0	ângulo inicial de defasagem
T_0	período do sinal elétrico
T	período amostragem do sinal
Z_+^*	conjunto dos números inteiros positivos excluindo o zero
DFT	Transformada Discreta de Fourier (<i>Discrete Fourier Transform</i>)
$\Re[x]$	valor real do número complexo x
$\Im[x]$	valor imaginário do número complexo x
$h_{LP}(n)$	resposta ao impulso do filtro protótipo passa-baixas
FIR	Resposta ao Impulso Finita (<i>Finite Impulse Response</i>)
WLS	Mínimos Quadrados Ponderados (<i>Weighted Least Squares</i>)
f_s	freqüência de amostragem do sinal
N	número de amostras
$x_a(t)$	sinal contínuo no domínio analógico
$x(n)$	sinal discreto e não quantizado
$x_i(t)$	sinal contínuo modulado por um trem de impulsos
$F(j\Omega)$	Transformada de Fourier do sinal contínuo
δ_p	erro na banda de passagem do filtro

δ_s	erro na banda de rejeição do filtro
ω_p	freqüência digital máxima da banda de passagem do filtro
ω_s	freqüência digital mínima da banda de rejeição
<i>MSE</i>	Erro Médio Quadrático (<i>Mean Square Error</i>)
<i>ONS</i>	Operador Nacional do Sistema Elétrico

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

1.1 Oscilografia e medidas fasoriais em sistemas elétricos de potência

O termo oscilografia se aplica à medição de grandezas elétricas (principalmente de tensão e corrente) ao longo do tempo.

Os tipos de oscilografia mais importantes em sistemas elétricos de potência seguem a seguinte classificação [1]:

- Oscilografia de curta duração: utilizada na análise de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão ou em equipamentos elétricos, envolvendo um tempo total de medição pequeno (de alguns ciclos de fundamental a alguns segundos), porém com frequências de amostragem altas (da ordem de kHz). Os medidores mais utilizados atualmente são os *RDPs* (registradores digitais de perturbação), que armazenam os valores medidos em arquivos digitais. Alguns relés mais modernos também possuem funções de oscilografia e são bastante utilizados por empresas transmissoras de energia elétrica [2].
- Oscilografia de longa duração: utilizada na análise do comportamento de sistemas de grande porte, provocados pela variação abrupta da geração ou carga ou por modos de interação existentes no sistema elétrico. Envolve um grande tempo de medição (da ordem de vários minutos), com frequências de amostragem inferiores a poucas dezenas de Hertz. Os medidores utilizados são equipamentos mais específicos (medidores fasoriais).

A Tabela 1 explica as principais diferenças das oscilografias de curta e longa duração.

Tabela 1 – Características da oscilografia [1]

Característica	Oscilografia de Curta Duração	Oscilografia de Longa Duração
Fenômeno de Interesse	Transitórios eletromagnéticos de alta frequência	Transitórios eletromecânicos lentos e interações
Tempo Total de Medição	Dezenas de milissegundos a vários segundos	Vários minutos
Período de Amostragem	Dezenas de microssegundos	Dezenas de milissegundos
Faixa de Frequência Usual	De 60 Hz a 1200 Hz (20º harmônico)	Décimos de Hertz a dezenas de Hertz
Equipamento	<i>RDP</i>	Medidor Fasorial
Principais Grandezas Medidas	Tensões e correntes nas três fases e no neutro, além dos estados lógicos do sistema	Potência ativa e reativa, frequência fundamental e variação da frequência fundamental
Objetivo Principal	Detectar falhas nos esquemas de proteção ou defeito em equipamentos	Detectar a condição operativa do sistema e modos de oscilação presentes Melhorar os modelos utilizados nos sistemas de proteção e controle

Cabe ressaltar que os sistemas de supervisão e controle não permitem obter nenhuma das duas formas de oscilografia citadas, pois o período de amostragem que eles costumam utilizar é muito grande.

Nosso trabalho está focado nos problemas relativos à análise de perturbação usando oscilografia de curta duração. Pode-se citar como os principais objetivos na análise de uma perturbação [3]-[5]:

- A verificação da correção da atuação das proteções envolvidas em um desligamento;
- A observação do comportamento dos disjuntores;
- A identificação de falhas em equipamentos;
- O acompanhamento do comportamento do sistema como resposta a esta perturbação.

Os resultados das análises podem ser utilizados para diversas finalidades:

- Ajuste de proteção;
- Manutenção da proteção;

- Manutenção de equipamentos;
- Área de estudos elétricos (planejamento e operação);
- Área técnica (estatística de desempenho);
- Qualidade de energia.

No curso deste trabalho vamos nos referir a qualquer dispositivo de oscilografia como *RDP*, por simplicidade. As concessionárias de energia elétrica estão, cada vez mais, utilizando estes dispositivos. Tal tendência se explica, em geral, por três motivos:

- (i) as alterações na estrutura do setor elétrico obrigaram as empresas a monitorar mais pontos no sistema, quer seja para comprovar a qualidade de seus serviços, quer seja por força da legislação;
- (ii) o custo dos equipamentos de medição tem caído bastante nos últimos anos;
- (iii) por força da legislação, que obriga as empresas a terem um número mínimo de *RDPs* instalados [4].

Esta preocupação com o correto entendimento das causas e conseqüências das perturbações elétricas [1] permitiu a ampliação do parque oscilográfico nacional, e criou a necessidade de se melhorar os algoritmos de processamento de sinais aplicados a sinais de potência.

Uma das questões mais sensíveis está relacionada ao cálculo dos fasores. Grande parte dos algoritmos para análise de dados de oscilografia usam valores fasoriais, que são, em geral, calculados pelo filtro de Fourier [6] [21] [22]. Existem, entretanto, outros métodos, cada um com suas vantagens e limitações [6]-[8]: os filtros de Walsh (*CAL-SAL*), os filtros de Seno e co-seno, os filtros de mínimos quadrados [9], os filtros de Kalman, entre outros.

O presente trabalho analisa o filtro de Fourier no domínio da frequência e propõe um filtro maximamente plano que reduz o vazamento espectral do filtro de Fourier no caso em que há variação na frequência da rede.

1.2 Estrutura da tese

Esta dissertação está dividida em 5 capítulos e um anexo. O conteúdo dos diversos capítulos é descrito a seguir.

O capítulo 2 explica ao leitor o filtro de Fourier e suas características principais. Neste capítulo, o fasor é conceituado e se apresentam os principais algoritmos de Fourier usados para o cálculo do fasor. O problema do vazamento espectral é abordado e exemplificado. Depois é feita uma análise minuciosa do filtro de Fourier e da sua utilização para o cálculo de fasores, assim como de suas limitações no domínio da frequência, abordando o problema do vazamento espectral. No final temos algumas simulações computacionais realizadas para mostrar o comportamento em frequência e a resposta no tempo do filtro de Fourier. Também é abordada a técnica da aplicação de janelas no tempo para a redução de efeitos indesejáveis em frequência. Alguns sinais são simulados para a avaliar o efeito das janelas e compará-los com a resposta do filtro de Fourier.

O capítulo 3 propõe uma técnica de projeto de filtros maximamente planos que reduzem o vazamento espectral causado quando ocorre um descasamento entre a frequência da rede e a frequência de amostragem do sinal, ou seja, quando a frequência da rede varia no intervalo de $\pm 0,5 \text{ Hz}$. É feita a análise teórica do filtro e são apresentados os detalhes do projeto usando *WLS* (método dos mínimos quadrados ponderados).

O capítulo 4 apresenta os resultados dos projetos de filtros maximamente planos que reduzem o erro do módulo no cálculo do fasor para o caso em que a frequência da rede varia. Os resultados são comparados com os resultados do filtro de Fourier com janela triangular, sendo superior em quase todos os casos.

O capítulo 5 contém as conclusões do trabalho e propõe estudos futuros.

O anexo contém os gráficos dos resultados da filtragem de Fourier usando janelas no tempo para o cálculo dos fasores quando o sinal possui uma pequena variação no valor da frequência fundamental, os coeficientes de cada filtro maximamente plano projetado, os gráficos das respostas em frequência e os parâmetros de mérito de cada um deles.

CAPÍTULO 2

2 TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA AO SINAL ELÉTRICO

2.1 Introdução

A Transformada de Fourier é um dos métodos mais populares para estimação espectral em sinais elétricos. Isso acontece devido à sua simplicidade e aos bons resultados apresentados. A Transformada de Fourier é usada, em particular, para a estimação dos fasores do sinal, ou seja, a determinação da componente fundamental.

Este capítulo faz uma análise da transformada de Fourier aplicada a sinais elétricos enfatizando o problema gerado quando existe um descasamento entre a frequência de amostragem e a frequência da rede elétrica, o que introduz o efeito conhecido como *vazamento espectral*¹.

Também é analisado o efeito da multiplicação no tempo pelas janelas visando reduzir os efeitos do vazamento espectral quando se utiliza o filtro de Fourier para o cálculo de fasores.

2.2 Fasores [7]

Uma tensão ou corrente senoidal em regime permanente, indicada na Figura 1, é representada pelo fasor que pode ser definido como a componente fundamental da série de Fourier [23]:

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1)$$

¹ *Leakage*, em inglês.

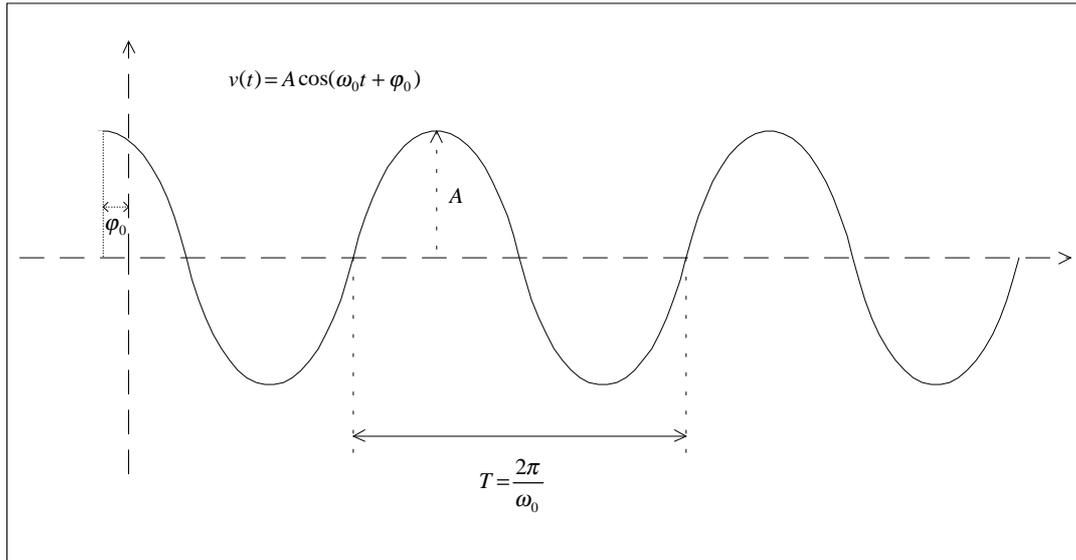


Figura 1 – Exemplo de um sinal senoidal

Então, para efeito de representação dos sinais do sistema elétrico, a tensão e a corrente são representadas pelo módulo e pelo ângulo do fasor, e grande parte dos algoritmos de proteção e controle do sistema elétrico utilizam os valores de módulo e ângulo como variável. O valor da frequência fundamental ω_0 não é utilizado, ou porque é considerado constante, ou porque o fasor é calculado sobre uma janela de um período, independentemente da frequência. A primeira abordagem funciona com um erro pequeno, que em certas situações é tolerável, enquanto que a segunda, sendo mais precisa, exige um custo maior para ser implementada, pois é necessário sincronizar a medição com a frequência instantânea da rede.

Dessa forma, o sinal da equação (1) pode ser descrito na forma de módulo (2) e ângulo (3):

$$\|v(t)\| = A \quad (2)$$

$$\phi_v(t) = \varphi_0 \quad (3)$$

Para calcular a componente fasorial das grandezas elétricas é bastante comum a utilização do Filtro de Fourier, baseado na *DFT* (transformada discreta de Fourier), apesar de existirem outras técnicas, conforme citado no capítulo anterior [8].

2.3 Algoritmos de Fourier

O filtro de Fourier extrai do sinal elétrico a informação da componente fundamental. Os algoritmos clássicos de filtros de Fourier podem usar janela de dois ciclos, um ciclo ou meio ciclo [10], como representado abaixo:

Filtro de Fourier de dois ciclos:

$$Y_c(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} v(k+l-2N+1) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}l\right) \quad (4)$$

$$Y_s(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{2N-1} v(k+l-2N+1) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}l\right) \quad (5)$$

$$\|v(k)\| = \sqrt{Y_c^2(k) + Y_s^2(k)} \quad (6)$$

$$\phi_v(k) = -\arctan \frac{Y_s(k)}{Y_c(k)} \quad (7)$$

Filtro de Fourier de um ciclo:

$$Y_c(k) = \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} v(k+l-N+1) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}l\right) \quad (8)$$

$$Y_s(k) = \frac{2}{N} \sum_{l=0}^{N-1} v(k+l-N+1) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}l\right) \quad (9)$$

$$\|v(k)\| = \sqrt{Y_c^2(k) + Y_s^2(k)} \quad (10)$$

$$\phi_v(k) = -\arctan \frac{Y_s(k)}{Y_c(k)} \quad (11)$$

Filtro de Fourier de meio ciclo:

$$Y_c(k) = \frac{4}{N} \sum_{l=0}^{N/2-1} v(k+l - N/2 + 1) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}l\right) \quad (12)$$

$$Y_s(k) = \frac{4}{N} \sum_{l=0}^{N/2-1} v(k+l - N/2 + 1) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}l\right) \quad (13)$$

$$\|v(k)\| = \sqrt{Y_c^2(k) + Y_s^2(k)} \quad (14)$$

$$\phi_v(k) = -\arctan \frac{Y_s(k)}{Y_c(k)} \quad (15)$$

O filtro de Fourier com janela retangular de um ciclo é o normalmente utilizado para o cálculo dos fasores, devido ao bom compromisso entre o atraso do processamento e o resultado do cálculo fasorial.

O filtro de Fourier usando janela de dois (ou mais) ciclos melhora o resultado do cálculo fasorial. São utilizados em aplicações que toleram um processamento mais lento do que o proporcionado pelo filtro de Fourier com a janela de um ciclo.

O filtro de Fourier de meio ciclo é bem útil quando é necessária uma resposta rápida, como em aplicações de proteção e controle. Vale notar que, apesar de o filtro de Fourier de meio ciclo ser usado em algumas aplicações para a determinação do fasor, ele é muito suscetível à variação de freqüência e não consegue filtrar nem o segundo harmônico, nem o nível *DC* (corrente contínua) do sinal, sendo necessário um pré-processamento do sinal para minimizar esses efeitos.

A Figura 2 mostra a resposta em freqüência dos filtros de Fourier para janelas de meio, um e dois ciclos de fundamental. Como se pode perceber, à medida que o tamanho da janela aumenta, o filtro de Fourier torna-se mais seletivo. A mesma figura também mostra que o filtro de meio ciclo não possui zero em *DC*.

Neste exemplo, a janela de um ciclo tem o comprimento de 12 amostras.

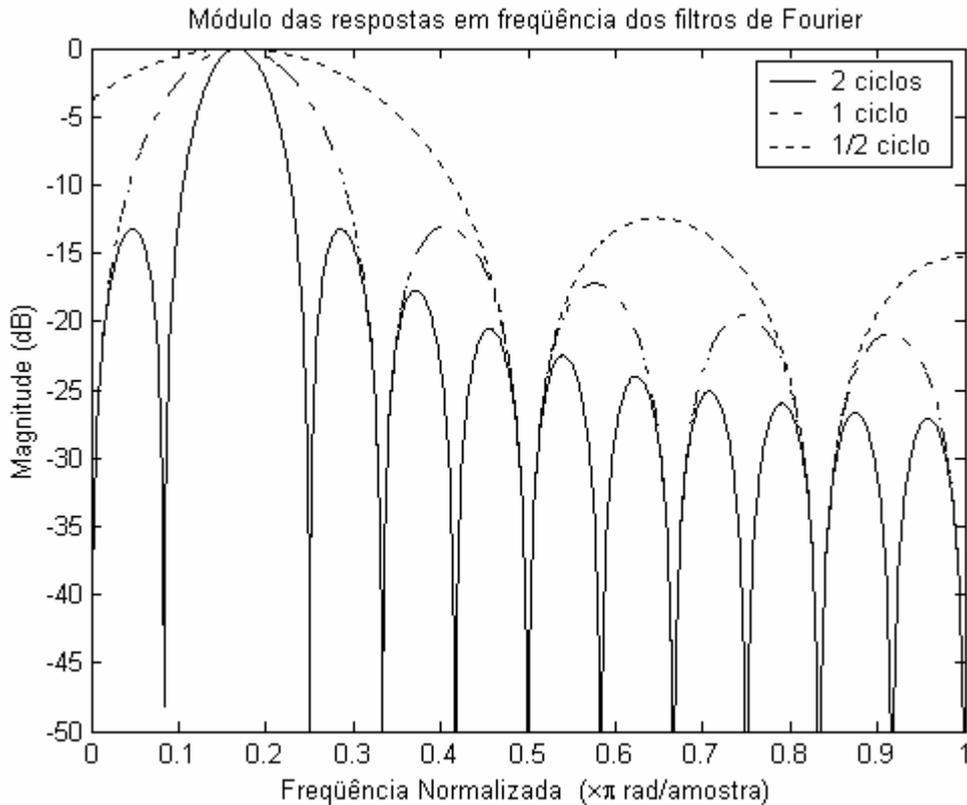


Figura 2 – Resposta em frequência do filtro de Fourier de meio, um e dois ciclos

2.4 Vazamento Espectral

A Transformada de Fourier implementada pela *DFT* produz um espectro discreto em frequência, ou seja, uma representação consistindo de “raias espectrais”, cada uma indicando a intensidade do espectro contínuo do sinal original, em um conjunto discreto de frequências, onde devem estar incluídas a componente fundamental (60 Hz, no caso brasileiro) e suas harmônicas. Entretanto, isto somente acontece quando a quantidade de amostras (N), utilizadas no cálculo, corresponde exatamente a um múltiplo inteiro do período da fundamental ($N = i * f_s / 60$ no exemplo anterior, sendo i um número inteiro e f_s a frequência de amostragem). Quando isto não ocorre, a energia da componente fundamental se espalha pelo espectro, como se houvesse um “vazamento” da energia desse componente – esse fenômeno é então chamado de *vazamento espectral*. A Figura 3 mostra um sinal senoidal onde foi utilizada uma janela de amostragem de 1,25 ciclo (primeiro gráfico – o trecho janelado aparece em cinza

forte). No segundo gráfico aparece o espectro do sinal infinito e no terceiro gráfico o espectro obtido com janelamento de 1,25 ciclo, onde o vazamento espectral está bem claro.

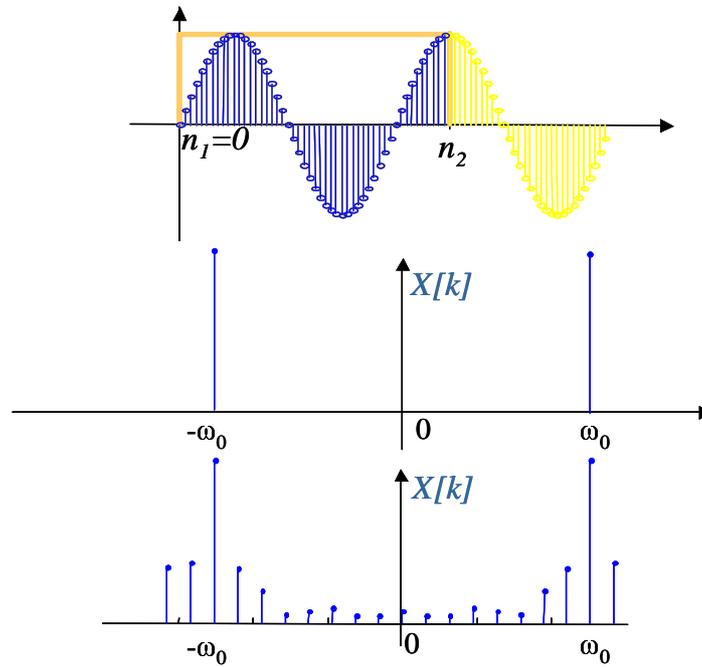


Figura 3 – Representação do Vazamento Espectral

2.5 Transformada de Fourier aplicada ao sinal elétrico

Uma grande parte dos algoritmos de proteção e controle utiliza algoritmos baseados no filtro de Fourier e o que torna necessária uma análise mais detalhada da transformada de Fourier para entender os problemas causados principalmente pelo vazamento espectral.

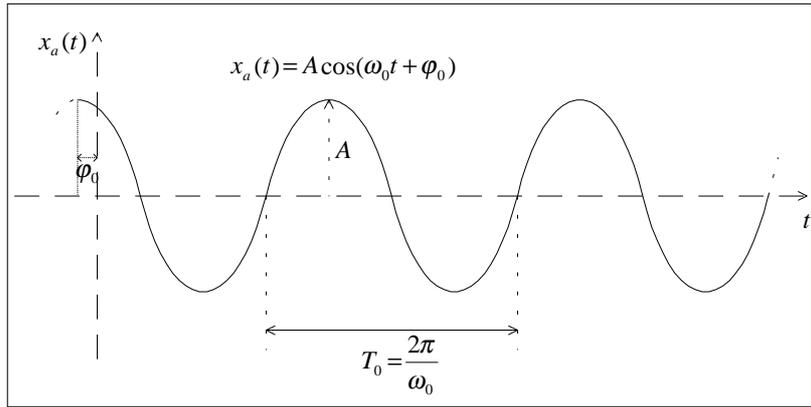
Esta seção faz a análise da transformada de Fourier no domínio da frequência e indica as condições de frequência para as quais o filtro de Fourier pode ser usado sem distorcer a informação exata do fasor elétrico.

Esta seção faz a dedução matemática da transformada de Fourier do sinal elétrico no domínio da frequência e mostra que não haverá o efeito do vazamento espectral no cálculo dos fasores para o caso em que a frequência de amostragem do sinal for múltipla inteira da metade da frequência fundamental da rede elétrica².

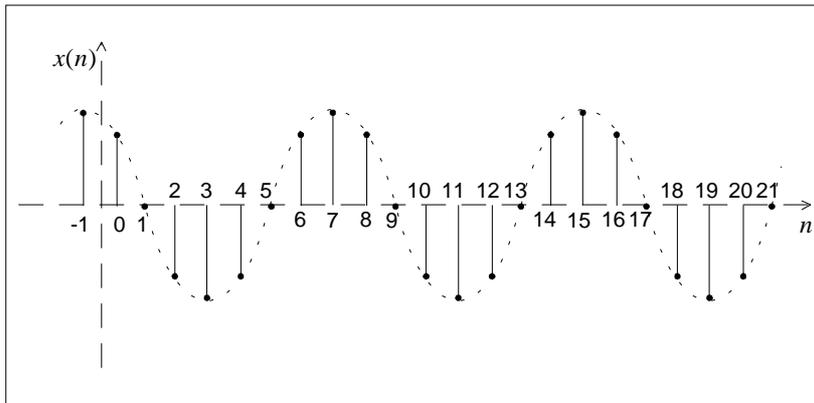
Vale lembrar que a frequência de amostragem deve obedecer o critério de *Nyquist*, isto é, frequência de amostragem ser no mínimo igual a duas vezes a frequência da rede elétrica [11]. Assim, para as simulações realizadas nesta dissertação é usada uma taxa de amostragem de 960 amostras por segundo.

Os sinais elétricos de tensão e corrente são inicialmente filtrados e digitalizados para serem registrados e armazenados pelos *RDPs*. A Figura 4 exemplifica o processo de digitalização do sinal da rede elétrica pelo Registrador Digital de Perturbações (*RDP*) ou pelo Relé:

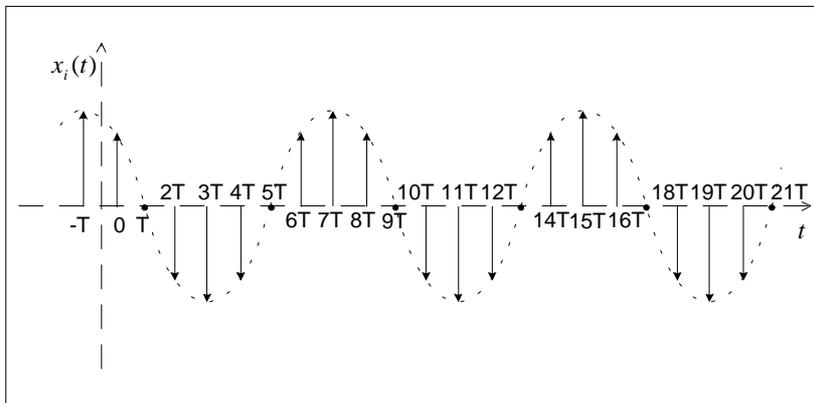
² 60 Hz, no sistema elétrico brasileiro.



(a)



(b)



(c)

Figura 4 – Digitalização do sinal elétrico

A Figura 4(a) mostra o sinal analógico que, para efeito de análise, varia, no tempo, de $-\infty$ a $+\infty$. Por conveniência, está expresso na equação (16).

$$x_a(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (16)$$

A Figura 4(b) e a equação (17) mostram o sinal discreto com uma taxa de amostragem suficiente para representar o sinal contínuo no domínio discreto.

$$x(n) = x_a(nT) \quad (17)$$

Entretanto, para poder entender corretamente o problema do janelamento do sinal para ser usado pela DFT vamos utilizar a representação do sinal discreto no domínio do tempo contínuo mostrado na Figura 4(c), equação (18).

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \delta(t - nT) \quad (18)$$

Reproduzimos a dedução a seguir de acordo com [11] e [25], por motivos didáticos.

Substituindo (17) em (18):

$$x_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \cdot \delta(t - nT) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = x_a(t) \cdot p(t) \quad (19)$$

Onde,

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (20)$$

A equação (21) representa a multiplicação de duas funções no domínio do tempo, enquanto a equação (22) mostra a transformada de Fourier de $x(t)$, que será diretamente proporcional à convolução das Transformadas de Fourier de $a(t)$ e de $b(t)$.

Se

$$x(t) = a(t) \cdot b(t) \quad (21)$$

Então:

$$X(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} A(j\Omega) * B(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(j\Omega - j\Omega') \cdot B(j\Omega') \cdot d\Omega' \quad (22)$$

Então, usando as equações (19) e (22) podemos obter $X_i(j\Omega)$, a Transformada de Fourier de $x_i(t)$:

$$X_i(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\Omega') \cdot P(j\Omega') \cdot d\Omega' \quad (23)$$

Toda função periódica pode ser representada pela série de Fourier, assim, na equação (24), considera-se $x(t)$ uma função periódica.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \Rightarrow a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt \quad (24)$$

Como $p(t)$ é periódica ela pode ser representada pela série de Fourier, conforme as equações (25) e (26), lembrando que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \delta(t)$, no intervalo

$$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right].$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T} \quad (25)$$

$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} \quad (26)$$

A transformada de Fourier de uma função $f(t)$ está representada conforme a equação (27).

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\Omega t} dt \quad (27)$$

$$P(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} e^{-j\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} 1(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}kt} e^{-j\Omega t} dt \quad (28)$$

A equação (28) aplica a propriedade da Transformada de Fourier onde a multiplicação no tempo por uma exponencial complexa gera um desvio na frequência [25]. No caso, uma função constante $1(t) = 1, -\infty \leq t \leq \infty$, cuja transformada de Fourier é $2\pi\delta(\Omega)$, foi multiplicada. Assim, teremos $\delta(\Omega)$ deslocada em $(2\pi k/T)$ para cada valor de k , pois o somatório não é eliminado.

Assim,

$$P(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1(t) \cdot e^{j\frac{2\pi}{T}kt} e^{-j\Omega t} dt \quad (29)$$

e a Transformada de $p(t)$ é o trem de impulsos da equação (30).

$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \frac{2\pi}{T}k) \quad (30)$$

Substituindo em (23):

$$X_i(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\Omega') \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega' - \frac{2\pi}{T}k) \cdot d\Omega' \quad (31)$$

$$X_i(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\Omega') \cdot \delta(\Omega' - \frac{2\pi}{T}k) \cdot d\Omega' \quad (32)$$

A integral somente será diferente de zero para $\Omega' = \frac{2\pi}{T}k$. Logo,

$$X_i(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k) \quad (33)$$

$$X_i(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j\Omega_s k) \quad (34)$$

onde:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (35)$$

Se considerarmos, para efeito desta análise, que o sinal elétrico $x_a(t)$ é periódico, logo podemos representá-lo pela série de Fourier.

$$x_a(t) = \cos(\Omega_0 t + \varphi_0) = \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi_0\right) \quad (36)$$

onde:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (37)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi_0\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt} dt \quad (38)$$

$$a_k = \frac{1}{2T_0} \left\{ \int_{T_0/2}^{T_0/2} e^{j\left[\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi_0\right]} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt} dt + \int_{-T_0/2}^{-T_0/2} e^{-j\left[\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi_0\right]} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T_0} kt} dt \right\} \quad (39)$$

$$a_k = \frac{1}{2T_0} \left\{ \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\left[\frac{2\pi}{T_0} t(1-k) + \varphi_0\right]} dt + \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j\left[\frac{2\pi}{T_0} t(1+k) + \varphi_0\right]} dt \right\} \quad (40)$$

$$a_k = \frac{e^{j\varphi_0}}{2T_0 \cdot j \left[\frac{2\pi}{T_0} (1-k) \right]} e^{j \left[\frac{2\pi}{T_0} t(1-k) \right]} \Bigg|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} + \frac{e^{-j\varphi_0}}{2T_0 \cdot (-j) \left[\frac{2\pi}{T_0} (1+k) \right]} e^{-j \left[\frac{2\pi}{T_0} t(1+k) \right]} \Bigg|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \quad (41)$$

$$a_k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen}[\pi(1-k)]}{\pi(1-k)} e^{j\varphi_0} + \frac{\text{sen}[\pi(1+k)]}{\pi(1+k)} e^{-j\varphi_0} \right\} \quad (42)$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{j\varphi_0}, & k = 1 \\ \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0}, & k = -1 \\ 0, & \text{outro } k \end{cases} \quad (43)$$

$$x_a = \frac{e^{j\frac{2\pi}{T_0} t} e^{j\varphi_0} + e^{-j\frac{2\pi}{T_0} t} e^{-j\varphi_0}}{2} \quad (44)$$

$$X_a(j\Omega) = \frac{e^{-j\varphi_0}}{2} \delta(j(\Omega - \Omega_0)) + \frac{e^{j\varphi_0}}{2} \delta(j(\Omega + \Omega_0)) \quad (45)$$

Assim, para o sinal periódico da equação (36), quando amostrado, podemos obter sua Transformada de Fourier a partir das equações (34) e (45).

$$X_i(\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\varphi_0}}{2} \delta(\Omega - \Omega_s k - \Omega_0) + \frac{e^{j\varphi_0}}{2} \delta(\Omega - \Omega_s k + \Omega_0) \quad (46)$$

$$X_i(\Omega) = \frac{1}{2T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - (\Omega_s k + \Omega_0)) e^{j\varphi_0} + \delta(\Omega - (\Omega_s k - \Omega_0)) e^{-j\varphi_0} \quad (47)$$

A Figura 5 é uma amostra do módulo do sinal $X_i(\Omega)$ no intervalo de $-1 \leq k \leq 1$.

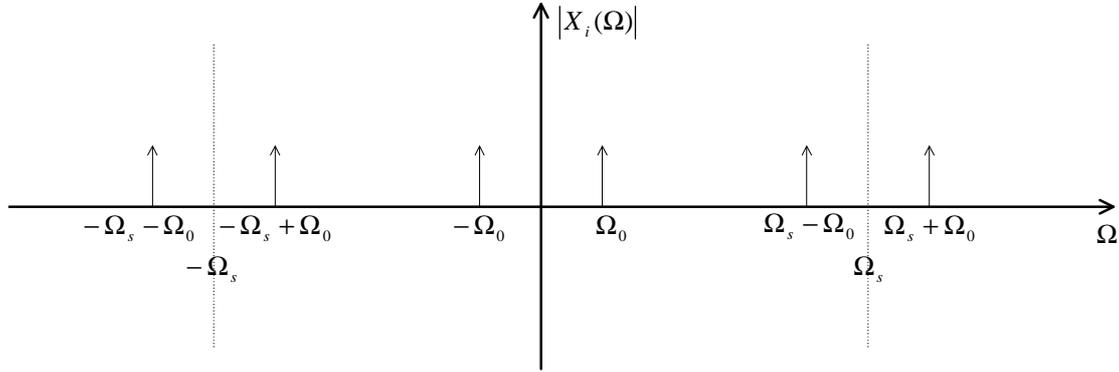


Figura 5 – Módulo da resposta em frequência da função co-seno amostrada

2.5.1 Expressão analítica da resposta do filtro no domínio da frequência

Agora vamos calcular o espectro do sinal amostrado, após passar pela *DFT*. O resultado da filtragem será o produto de $X_i(\Omega)$ pela resposta em frequência das funções base da *DFT*.

Os coeficientes das funções base da *DFT* estão expressos na equação (48), onde h é o índice do harmônico e M é o tamanho da janela sendo que $M \in \mathbb{Z}_+^*$

$$f(k) = \frac{1}{M} e^{j\frac{2\pi}{M}hn}, 0 \leq k \leq M - 1 \quad (48)$$

Como as funções base da *DFT* são discretas, precisamos representá-las no tempo contínuo:

$$f(t) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}hk} \delta(t - kT) \quad (49)$$

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}hk} \delta(t-kT) \cdot e^{-j\Omega t} dt \quad (50)$$

$$F(j\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}hk} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \cdot e^{-j\Omega t} dt}_{e^{-j\Omega kT}} \quad (51)$$

A transformada de Fourier das funções base da DFT pode ser expressa pela equação (52), abaixo.

$$F(j\Omega) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}hk} e^{-j\Omega kT} \quad (52)$$

E resolvendo a série finita de (52), obtemos (53)

$$F(j\Omega) = \frac{1}{M} \times \frac{1 - e^{-j\Omega T_W}}{1 - e^{-j(\Omega T - \frac{2\pi}{M}h)T}} \quad (53)$$

$$F(j\Omega) = \frac{1}{M} \times \frac{e^{-j\Omega \frac{T_W}{2}}}{e^{-j(\frac{\Omega T}{2} - \frac{\pi}{M}h)T}} \times \frac{\text{sen}\left(\Omega \frac{T_W}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Omega T}{2} - \frac{\pi}{M}h\right)} \quad (54)$$

Onde T_W é o comprimento da janela.

Para o cálculo da fundamental, $h = 1$, então

$$F(j\Omega) = \frac{1}{M} e^{-j\frac{\pi}{M}} e^{-j\Omega \frac{T}{2}(M-1)} \times \frac{\text{sen}\left(\Omega \frac{T_W}{2}\right)}{\text{sen}\left(\Omega \frac{T}{2} - \frac{\pi}{M}h\right)} \quad (55)$$

A Transformada de Fourier de um sinal amostrado após filtragem no filtro de Fourier é indicada na equação (56).

$$Y(\Omega) = X_i(\Omega) \times F(\Omega) \quad (56)$$

Desenvolvendo a equação (56), usando as equações (47) e (55) para obter o cálculo da fundamental, tem-se como resultado a equação (57).

$$Y(\Omega) = \frac{-1}{2MT} e^{-j\frac{\pi}{M}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} [Y_R(k) + Y_L(k)] \quad (57)$$

Onde:

$$Y_R(k) = e^{-j[\Omega - \Omega_0 - \Omega_s k] \frac{T}{2} (M-1) + j\varphi_0} \frac{\text{sen}\left([\Omega - \Omega_0 - \Omega_s k] \frac{T_w}{2}\right)}{\text{sen}\left([\Omega - \Omega_0 - \Omega_s k] \frac{T}{2} - \frac{\pi}{M}\right)} \quad (58)$$

$$Y_L(k) = e^{-j[\Omega + \Omega_0 - \Omega_s k] \frac{T}{2} (M-1) - j\varphi_0} \frac{\text{sen}\left([\Omega + \Omega_0 - \Omega_s k] \frac{T_w}{2}\right)}{\text{sen}\left([\Omega + \Omega_0 - \Omega_s k] \frac{T}{2} - \frac{\pi}{M}\right)} \quad (59)$$

e

$$M = \frac{T_w}{T}, \quad M \in Z_+^* \quad (60)$$

$Y_R(k)$ e $Y_L(k)$ das equações (58) e (59), respectivamente, são aqui chamados de *espelhos de frequência* e serão válidos para $-\infty \leq k \leq \infty$. Eles representam fisicamente a repetição do espectro de frequência da janela retangular que foi amostrada a uma taxa de amostragem igual a Ω_s .

Cabe lembrar que T_W é o comprimento ou duração da janela usada para o cálculo da DFT , T é o período da amostragem e da janela, Ω_s é dado pela equação (35) (sendo proporcional à frequência de amostragem) e Ω_0 está ligado ao sinal $x_a(t)$ da equação (36).

2.5.2 Relação entre o módulo da resposta em frequência e o comprimento da janela T_W

Esta seção mostra, pelas equações (57)-(60), que o módulo da resposta em frequência será igual ao módulo do fasor para a frequência fundamental e zero para todas as frequências harmônicas quando a janela T_W for um múltiplo inteiro do período da fundamental:, ou seja $T_W = nT$, para todo $n \in Z_+^*$.

Analisando as funções seno da equações (58) temos que para

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{T_W}{2}[\Omega - \Omega_0 - \Omega_s k]\right)}{\text{sen}\left(\frac{T}{2}[\Omega - \Omega_0 - \Omega_s k] - \frac{\pi}{M}\right)} = 1 \quad (61)$$

A equação (61) é válida para duas condições possíveis:

$$\text{1ª condição: } \begin{cases} \frac{T_W}{2}[\Omega - \Omega_0 - \Omega_s k] = (2q+1)\frac{\pi}{2}, q \in Z \\ \frac{T}{2}[\Omega - \Omega_0 - \Omega_s k] - \frac{\pi}{M} = (2q'+1)\frac{\pi}{2}, q' \in Z \end{cases} \quad \text{e} \quad (62)$$

Desenvolvendo as equações de (62) chega-se a (63)

$$q' = \frac{2qn - 1}{2} \quad (63)$$

A equação (63) não possui solução para q e $q' \in Z$.

$$\text{2ª condição: } \begin{cases} \frac{T_w}{2} [\Omega - \Omega_0 - \Omega_s k] = q\pi, & q \in Z \\ \frac{T}{2} [\Omega - \Omega_0 - \Omega_s k] = q'\pi, & q' \in Z \end{cases} \quad \text{e} \quad (64)$$

Da mesma forma, desenvolvendo as equações de (64) conclui-se que

$$q \cdot n = q' \quad (65)$$

Assim temos que

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_s (k + qn) \quad (66)$$

Como $q = 0$ satisfaz a equação, então

$$\Omega' = \Omega_s k + \Omega_0 \quad (67)$$

Da mesma forma, para equação (59) temos que para

$$\text{sen}\left(\frac{\Omega'' + \Omega_0 - \Omega_s k}{2} T_w\right) = 1 \quad (68)$$

é necessário que

$$\frac{\Omega'' + \Omega_0 - \Omega_s k}{2} T_w = 0 \quad (69)$$

$$\Omega'' = \Omega_s k - \Omega_0 \quad (70)$$

Onde Ω' e Ω'' indicam a frequência em que $Y_R(\Omega')$ e $Y_L(\Omega'')$ assumem o valor máximo.

A Figura 6 mostra o módulo da função $Y_L(k)$ e os zeros desta função.

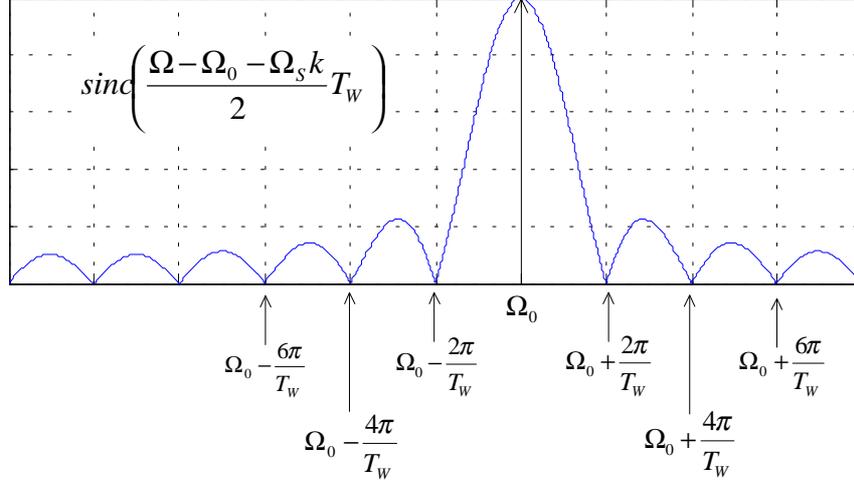


Figura 6 – Componente $Y_L(k)$ da equação (59) correspondendo à frequência Ω_0

O valor de $Y_R(\Omega')$ e $Y_L(\Omega'')$ serão nulos para:

$$\frac{\Omega' - \Omega_0 - \Omega_s k}{2} T_w = n_R \pi \quad \forall n_R \in \mathbb{Z}^* \quad (71)$$

$$\frac{\Omega'' + \Omega_0 - \Omega_s k}{2} T_w = n_L \pi \quad \forall n_L \in \mathbb{Z}^* \quad (72)$$

Dessa forma:

$$\Omega' = \Omega_s k + \Omega_0 + \frac{2\pi}{T_w} n_R \quad (73)$$

$$\Omega'' = \Omega_s k - \Omega_0 + \frac{2\pi}{T_w} n_L \quad (74)$$

Para que $Y_R(\Omega')$ e $Y_L(\Omega'')$ cruzem por zero em pontos coincidentes, deve existir um conjunto de n_R e n_L tal que $\Omega' = \Omega''$.

$$\Omega' = \Omega_s k + \Omega_0 + \frac{2\pi}{T_w} n_R = \Omega'' = \Omega_s k - \Omega_0 + \frac{2\pi}{T_w} n_L \quad (75)$$

$$\frac{2\pi}{T_W}(n_L - n_R) = 2\Omega_0 = 2\frac{2\pi}{T_0} \quad (76)$$

$$n_L - n_R = 2\frac{T_W}{T_0} \quad (77)$$

Para que a equação (77) seja satisfeita

$$2\frac{T_W}{T_0} = N \quad \forall N \in \mathbb{Z}_+^* \quad (78)$$

As equações (77) e (78) mostram que a resposta em frequência para janelas de comprimento T_W que são múltiplas de um ciclo possuem zeros em frequências harmônicas. Por outro lado, se o comprimento T_W for um múltiplo ímpar de meio ciclo de fundamental seus zeros estarão nas frequências dos harmônicos ímpares. Outra conclusão é que para a T_W um múltiplo ímpar de meio ciclo só será válido se o período tiver comprimento par.

2.5.3 Análise do ângulo da resposta de frequência para janela T_W múltiplas de meio ciclo de fundamental

Faremos a análise do ângulo para janelas cujo comprimento T_W é múltiplo do ciclo da fundamental e para janelas que são múltiplos ímpares de meio ciclo.

Analisando o ângulo das equações (58) e (59) temos;

$$\angle Y_R(k) = e^{j(\Omega_0 + \Omega_S k)\frac{T_W}{2}} = e^{j\pi(Mk + M\frac{T}{T_0})} \cdot e^{j\varphi_0} \quad (79)$$

$$\angle Y_L(k) = e^{-j(\Omega_0 - \Omega_S k)\frac{T_W}{2}} = e^{j\pi(Mk - M\frac{T}{T_0})} \cdot e^{-j\varphi_0} \quad (80)$$

Se

$$M \frac{T}{T_0} = N \quad \forall N \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \angle Y_R(k) = \pm e^{j\varphi_0} \quad (81)$$

$$\Rightarrow \angle Y_L(k) = \pm e^{-j\varphi_0}$$

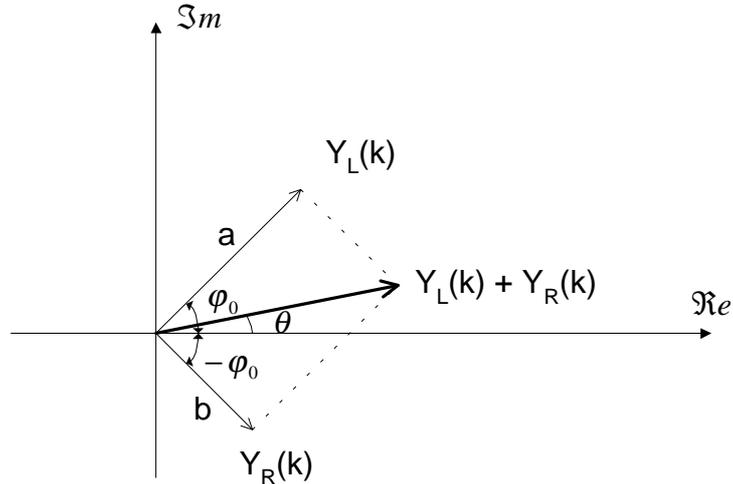


Figura 7 – Diagrama fasorial de $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$ para janelas cujo comprimento é um múltiplo inteiro de um ciclo de fundamental

$$M \frac{T}{T_0} = \frac{N}{2} \quad \forall N = 2n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \angle Y_R(k) = \pm j e^{j\varphi_0} \quad (82)$$

$$\Rightarrow \angle Y_L(k) = \mp e^{-j\varphi_0}$$

Para que a equação (82) seja satisfeita, M deve ser par.

O gráfico da Figura 7 mostra a soma de cada uma das componentes de $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$, para $-\infty \leq k \leq \infty$, para o caso em que o comprimento da janela T_W é um múltiplo inteiro de um ciclo da fundamental. O resultado da soma é o fasor que está representado graficamente na Figura 7 pelo vetor em negrito, cujo módulo é o comprimento do vetor e o ângulo está indicado na figura como θ e φ_0 é o ângulo inicial do sinal analisado. O gráfico da Figura 8 mostra o resultado do fasor onde o comprimento da janela T_W é um múltiplo ímpar de meio ciclo da fundamental.

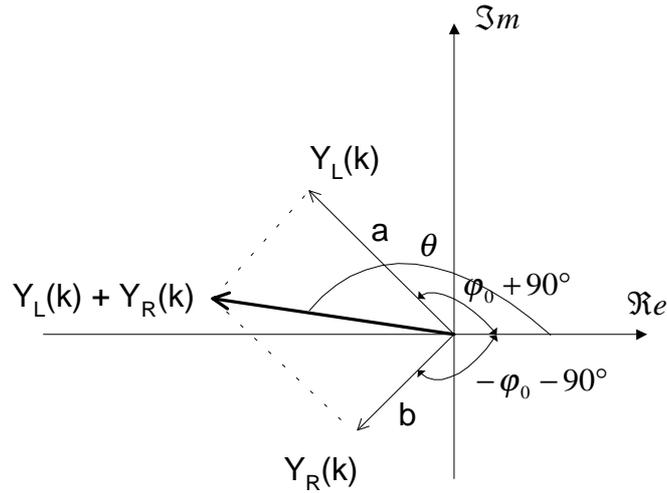


Figura 8 - Diagrama fasorial de $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$ para janelas cujo comprimento é um múltiplo ímpar de meio ciclo da fundamental

2.5.4 Análise do ângulo da resposta de frequência quando a janela T_W não é múltipla de meio ciclo de fundamental

Para analisarmos o caso em que a taxa de amostragem não é múltipla da frequência fundamental temos que

$$M \frac{T}{T_0} = \alpha \quad \forall \alpha \in R \quad (83)$$

$$e^{j\pi(Mk+\alpha)+j\varphi_0} = \begin{cases} e^{j(\pi\alpha+\varphi_0)}, & M \text{ par} \\ \pm e^{j(\pi\alpha+\varphi_0)}, & M \text{ ímpar} \end{cases} \quad (84)$$

$$e^{j\pi(Mk-\alpha)-j\varphi_0} = \begin{cases} e^{-j(\pi\alpha+\varphi_0)}, & M \text{ par} \\ \pm e^{-j(\pi\alpha+\varphi_0)}, & M \text{ ímpar} \end{cases} \quad (85)$$

As equações (84) e (85) indicam que os espelhos de frequência têm os ângulos simétricos um em relação ao outro.

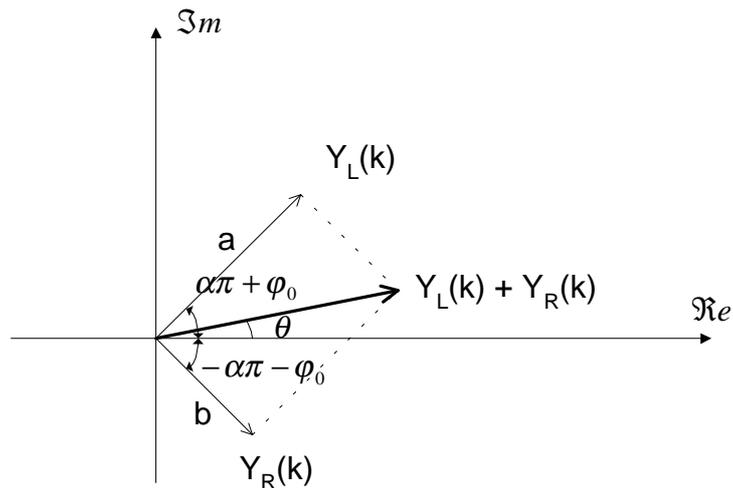


Figura 9 - Diagrama fasorial de $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$ para taxas de amostragem não múltiplas da frequência fundamental

A Figura 9 mostra o fasor resultante do somatório de todos os espelhos de frequência, como nas duas figuras anteriores.

Quando se desloca a janela do filtro no tempo é equivalente a variar φ_0 . Assim, o módulo do fasor não é constante à medida que se desloca a janela. Por exemplo, este efeito pode ser observado no gráfico da Figura 10, onde mostra o resultado do cálculo do fasor para um sinal senoidal de amplitude um e frequência de 59,5 Hz.

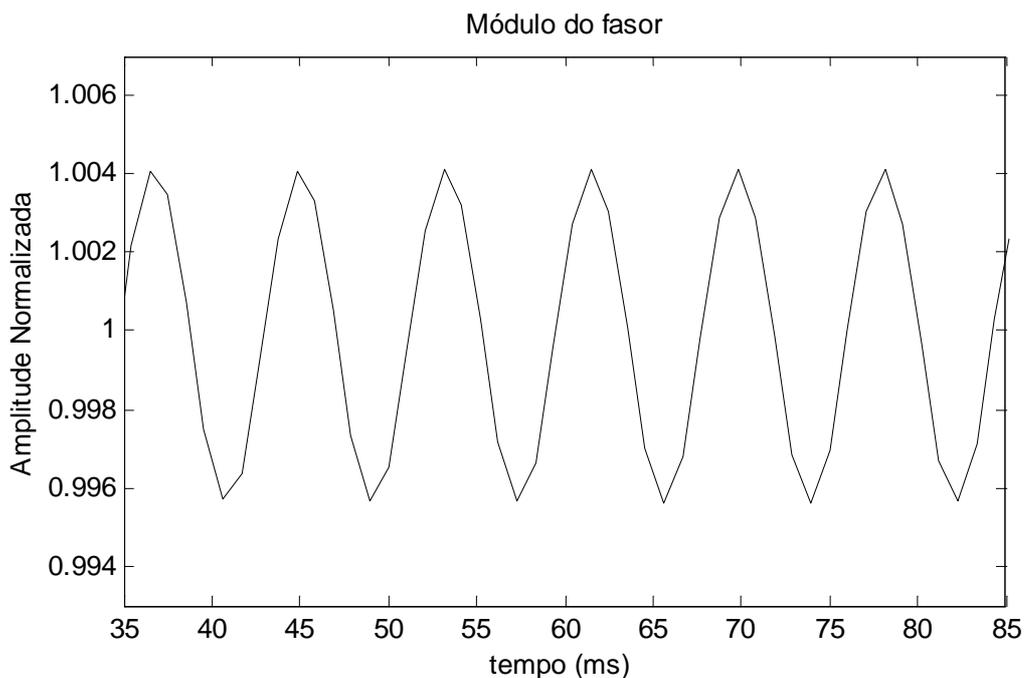


Figura 10 – Exemplo do efeito de oscilação no módulo do fasor

2.6 Simulações realizadas

Foram feitas simulações computacionais para representar o erro causado pelo truncamento do somatório da equação (57), que é repetida, por conveniência, na equação (86), abaixo.

$$Y(\Omega) = \frac{-1}{2MT} e^{-j\frac{\pi}{M}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} [Y_R(k) + Y_L(k)] \quad (86)$$

As simulações confirmam que o valor do módulo é sempre bem representado pelo conjunto dos *espelhos de frequência* das funções $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$.

A Figura 11 mostra a resposta em frequência de $Y_L(1)$ e $Y_R(1)$, e confirma as equações (82) e (86) para um filtro de Fourier calculado sobre uma janela retangular de meio ciclo. Neste exemplo em particular $fs = 960$ amostras/segundo.

A Figura 12 mostra a influência que cada componente $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$ exerce na resposta em frequência do filtro de Fourier para $k = \pm 2$. Para cada função temos sobrepostos no gráfico os resultados para $k = 2$ (linha cheia) e $k = -2$ (linha pontilhada). A forma de visualização dos gráficos em réplicas positiva e negativa sobrepostas para $Y_L(k)$ e $Y_R(k)$ mostra claramente que o módulo de cada componente se anula em todas as frequências harmônicas para o caso em que a janela de amostragem é um múltiplo inteiro do período da fundamental. Como também pode ser visto, a contribuição da fase dos ângulos de frequências positiva e negativa são iguais para qualquer réplica e os ângulos são simétricos.

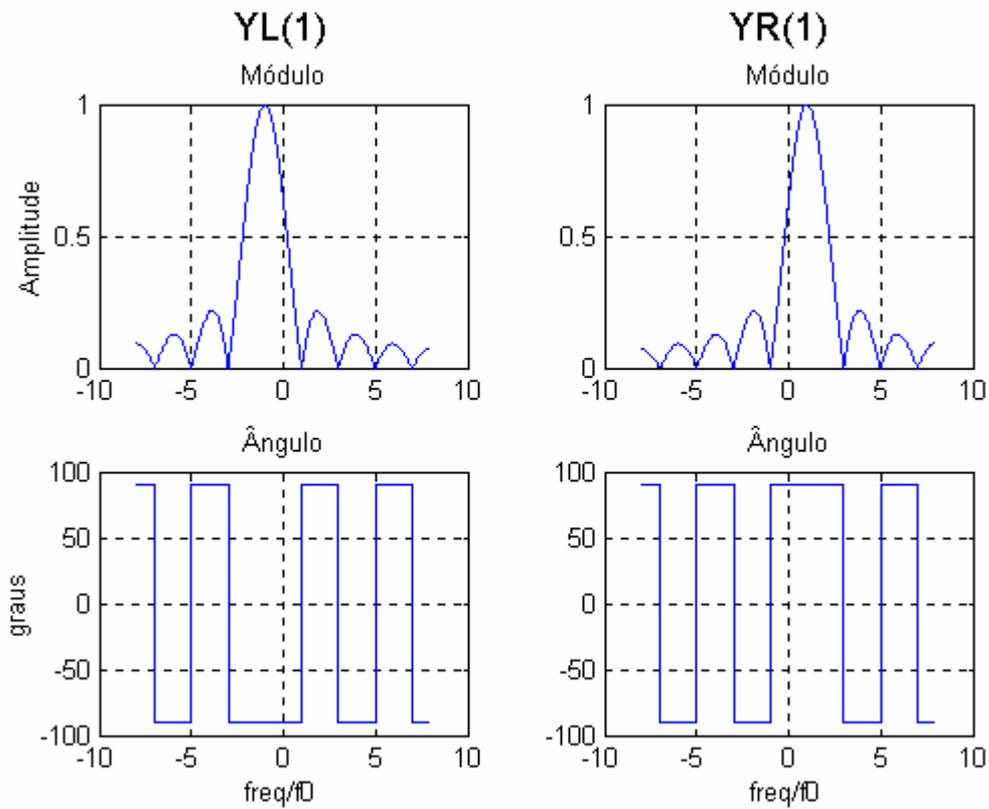


Figura 11 – Resposta em frequência de $Y_L(1)$ e $Y_R(1)$

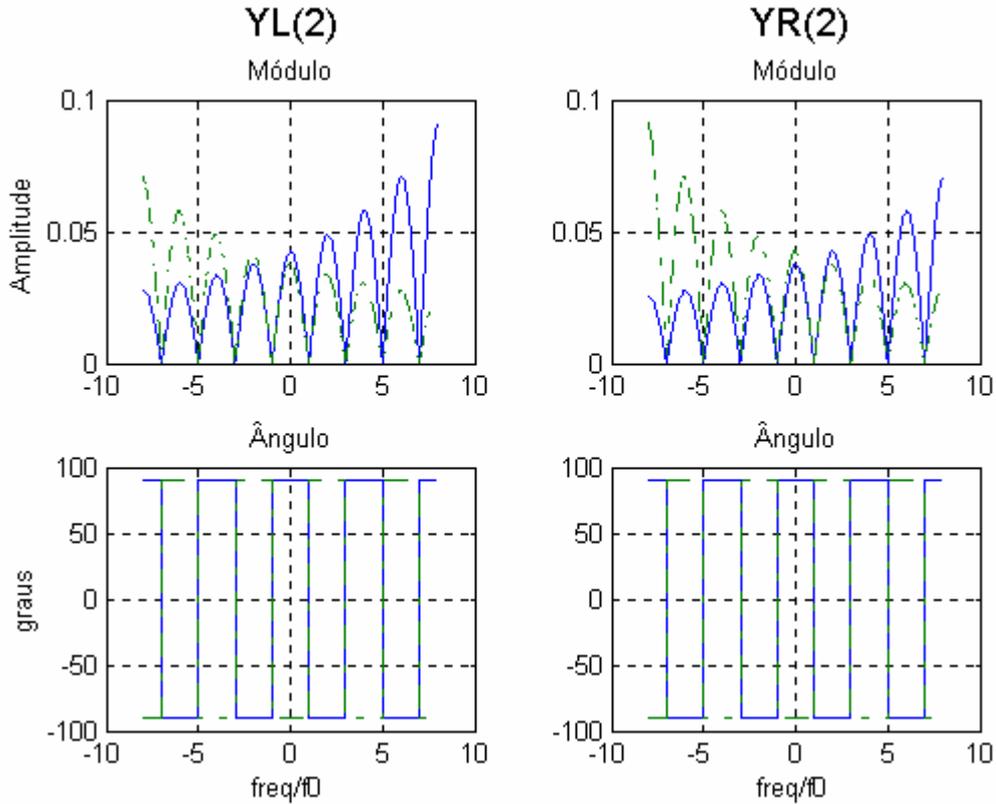


Figura 12 – Resposta em frequência de $Y_L(2)$ e $Y_R(2)$

Foi feita a simulação de $\sum_{k=-5}^5 [Y_R(k) + Y_L(k)]$ para avaliar o efeito desse somatório na resposta em frequência do sinal. Para taxas não múltiplas o ângulo tem o comportamento não linear, conforme pode ser observado na Figura 13.

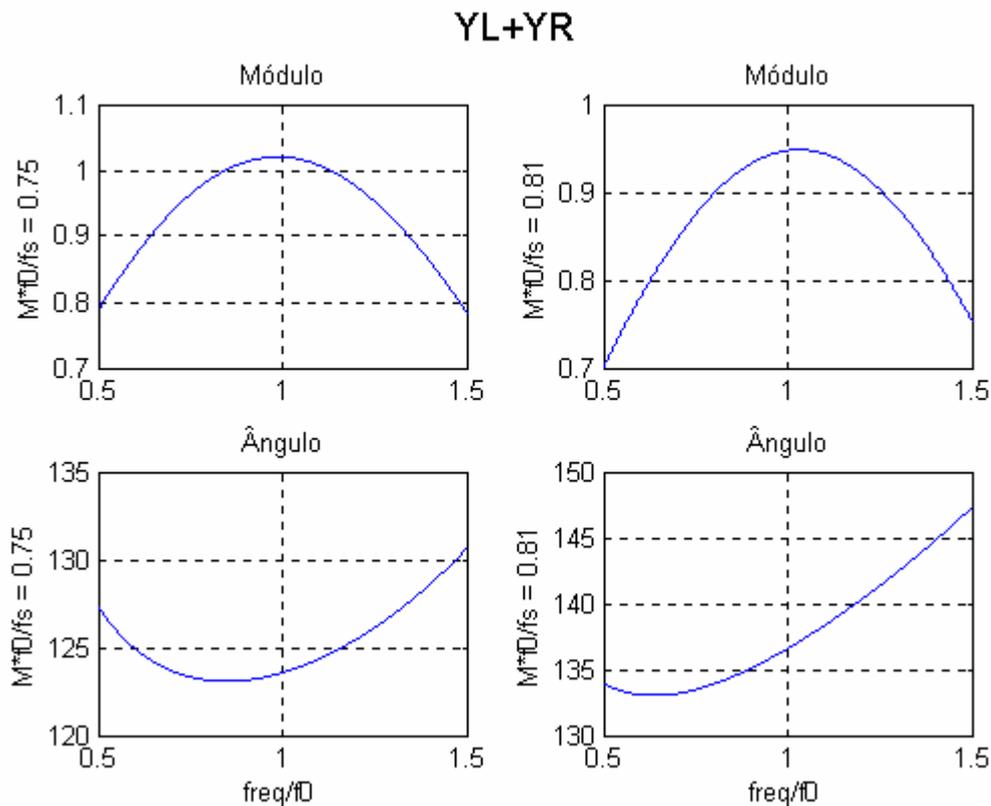


Figura 13 – Influência do tamanho da janela na resposta em frequência

Esta seção teve como objetivo desenvolver a dedução matemática para melhorar o entendimento do fenômeno do vazamento espectral sob o ponto de vista do domínio da frequência, pelo filtro de Fourier. A próxima seção aborda a questão das janelas como uma solução possível para minimizar os efeitos do vazamento espectral sem utilizar técnicas de estimação de frequência [12]-[15] [26]-[30], nem técnicas de interpolação dos sinais [14] [16] [27] [29] [30].

2.7 Efeito das janelas no filtro de Fourier

São amplamente conhecidos os efeitos que a aplicação de janelas específicas sobre um sinal no domínio do tempo pode gerar em sua resposta em frequência [11] [16] [17], e entre eles podemos contabilizar a redução do efeito do vazamento espectral.

O objetivo da utilização das janelas está relacionado com a interpretação no tempo do fenômeno de vazamento espectral: para a *DFT* o trecho do sinal analisado (de N amostras) é periódico, com período N , ou seja, ele se repete infinitamente. Pode-se então dizer que a *DFT* usa, implicitamente, uma janela retangular. A Figura 14 mostra a resposta em frequência da janela retangular utilizada pela *DFT* para se obter o fasor do sinal elétrico.

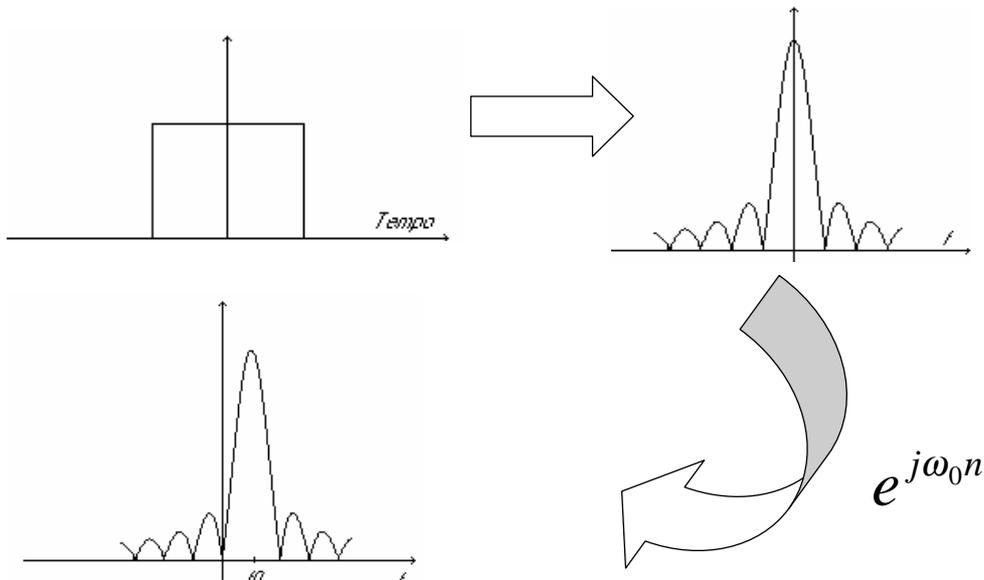


Figura 14 – Exemplo da utilização da janela retangular e da modulação

Quando o trecho utilizado não possuir uma quantidade inteira de períodos da fundamental, surgem descontinuidades na fronteira do trecho utilizado. O objetivo da janela é reduzir estas descontinuidades. A Figura 15 apresenta um trecho com 1,75 ciclo de uma senóide que foi multiplicada pela janela de Hamming, resultando em um sinal atenuado na fronteira do trecho utilizado, o que reduz o vazamento.

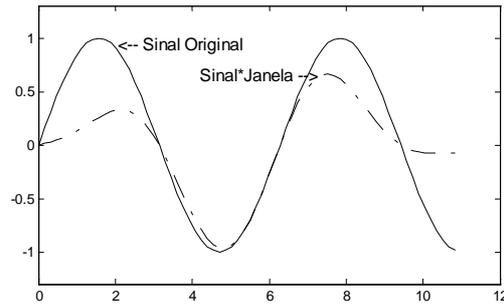


Figura 15 - Trecho de uma senoide multiplicado pela janela de Hamming.

A Tabela 2 mostra o exemplo de algumas janelas com sua função no tempo e a resposta em frequência.

Tabela 2 – Definições de algumas janelas típicas [17]

Nome da Janela	Resposta ao impulso $w[n]$	Resposta em frequência $W(f)$
Retangular	1	$D_N(f)$
Triangular	$1 - 2 \cdot t[n] $	$\frac{2}{N} D_N^2(f/2)$
Janela de <i>Hann</i>	$0,50 + 0,50 \cdot \cos(2\pi \cdot t[n])$	$0,50 D_N(f) + 0,25 [D_N(f - 1/NT) + D_N(f + 1/NT)]$
Janela de <i>Hamming</i>	$0,54 + 0,46 \cdot \cos(2\pi \cdot t[n])$	$0,54 D_N(f) + 0,23 [D_N(f - 1/NT) + D_N(f + 1/NT)]$

Na Tabela 2, T é o período de amostragem do sinal. A resposta ao impulso da janela $w[n]$ é definida no intervalo de $0 \leq n \leq N - 1$. $D_N(f)$ é a resposta em frequência do filtro de Fourier multiplicado no tempo pela janela retangular.

A Figura 16 faz uma comparação entre as resposta em frequência das diferentes janelas. Como pode ser observado neste gráfico a janela retangular tem uma pior atenuação na banda de rejeição. A janela triangular tem uma melhor atenuação do que a atenuação da janela retangular e pior do que as outras duas janelas. A janela de hann consegue ter uma atenuação melhor do que a da janela de hamming para frequências maiores, mas perde para esta em frequências mais próximas do ponto de

corde. A janela de hamming tem resposta em frequência relativamente constante na banda de rejeição (“*equiripple*”).

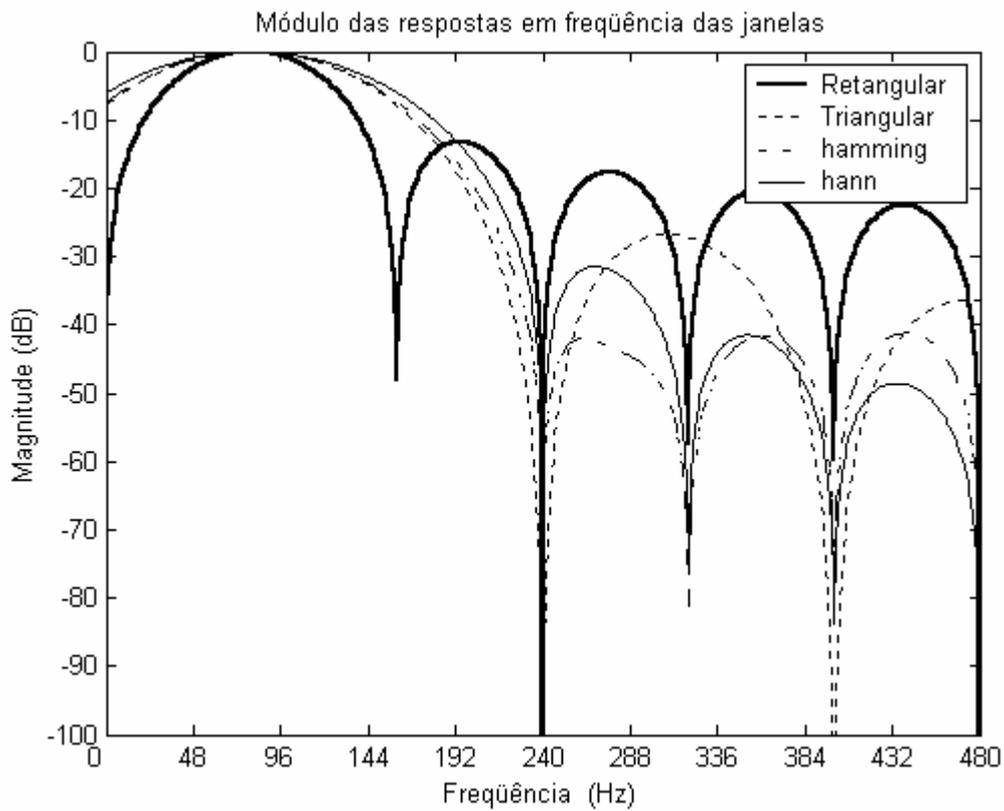


Figura 16 – Resposta em frequência das janelas da Tabela 2

A próxima seção faz a análise de cada uma dessas janelas levando-se em conta o efeito do sinal no tempo e a resposta ao transitório.

2.8 Efeito do uso de janelas quando a frequência da rede varia

Em geral, os sistemas de proteção e controle toleram uma pequena variação da frequência da rede elétrica. Esse fenômeno acontece de forma lenta, de modo que um registro oscilográfico sempre irá conter um sinal cuja frequência pode ser distinta da frequência nominal, mas será constante.

Quando o sinal elétrico a ser analisado possuir a frequência fundamental distinta da exata frequência nominal da rede elétrica, o valor da componente fundamental calculada pelo filtro de Fourier irá apresentar um erro, que aparece na forma de uma oscilação no valor da amplitude do módulo ao longo do tempo, como na Figura 17 (vide seção 2.5.4), ou como uma inclinação associada a uma oscilação no valor do ângulo, como Figura 18.

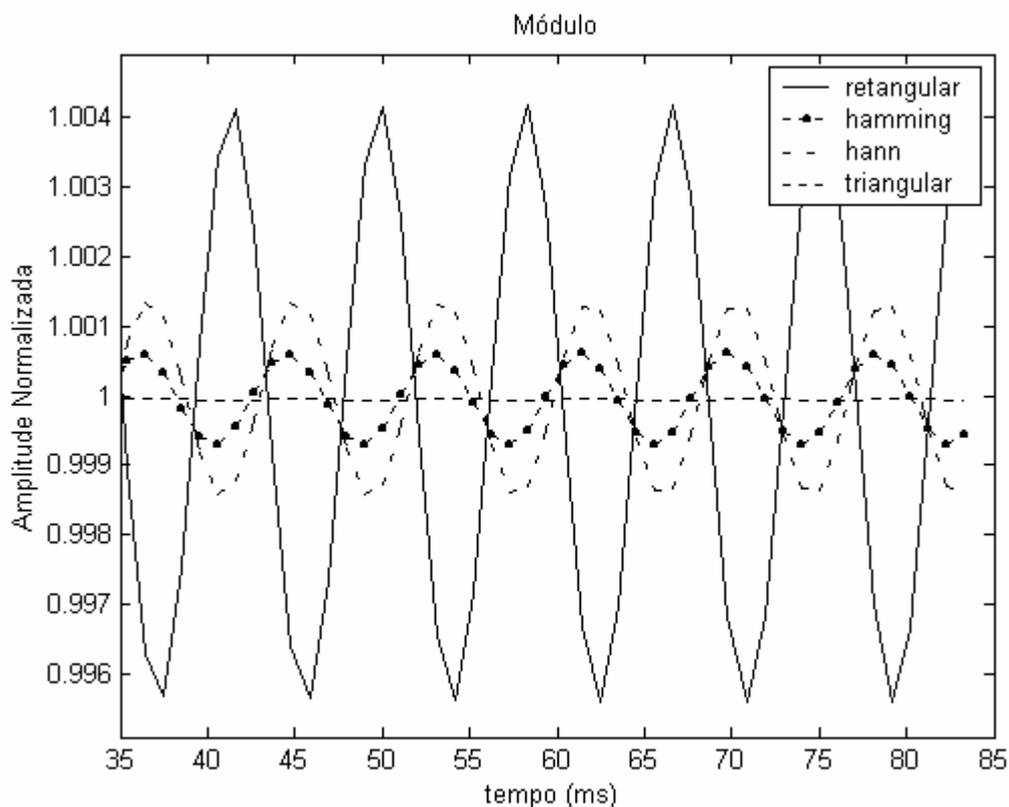


Figura 17 - Resultado do módulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 59,5 Hz

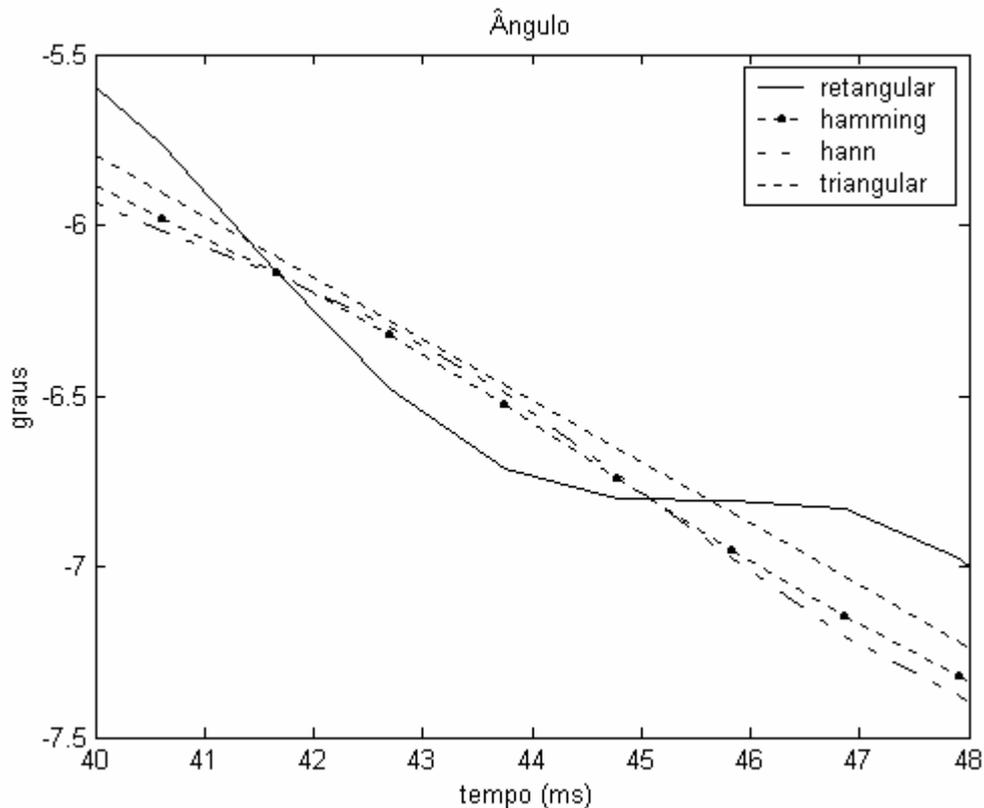


Figura 18 - Resultado do ângulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 59,5 Hz

Os gráficos seguintes mostram o resultado da filtragem de sinais de 59,5 Hz pelos filtros de Fourier utilizando as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular. A escolha do sinal de 59,5 Hz é porque ele representa a condição de frequência onde ocorrem os maiores erros. O item 7.1 do Apêndice mostra os resultados para os sinais de 59,7, 60,1 e 60,5 Hz. Os resultados do sinal de 60 Hz não são mostrados, uma vez que não possuem erros para essas janelas e os resultados para sinais de outras frequências são semelhantes àqueles ilustrados tanto no decorrer da seção, quanto no anexo.

A Figura 17, acima, mostra o resultado do módulo da filtragem de Fourier com as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um ciclo. A Figura 18 mostra o resultados do ângulo da filtragem com todas as janelas.

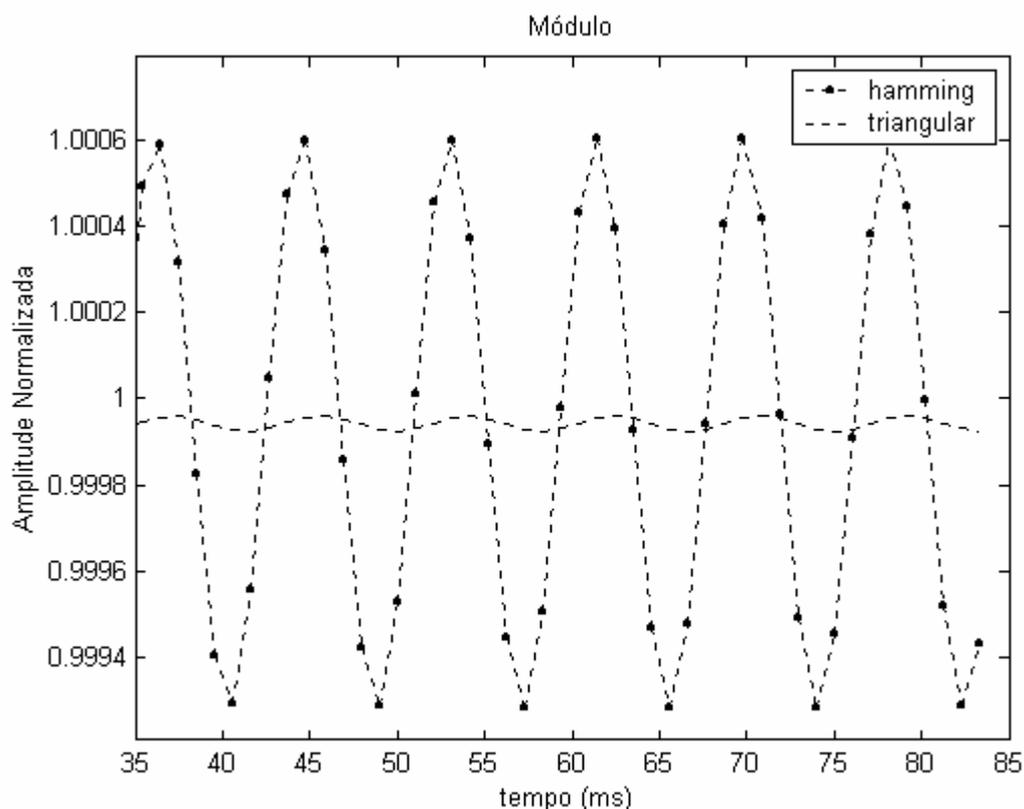


Figura 19 – Módulo da filtragem de Fourier usando janelas de Hamming e triangular (as duas melhores) de um ciclo para um sinal de 59,5 Hz

A Figura 19 exemplifica o resultado módulo das melhores janelas para um ciclo. A Figura 20 mostra o resultado do ângulo das janelas anteriores. A Figura 21 compara o módulo de cada uma das janelas analisadas anteriormente entre si para um e dois ciclos, enquanto a Figura 22 compara os ângulos. A Figura 23 compara o módulo de cada uma das janelas entre si para janelas de um a quatro ciclos e a Figura 24 faz a comparação respectiva dos ângulos.

Em todos os casos os filtros são aplicados em um sinal senoidal cuja frequência é igual a 59,5 Hz e amplitude é igual a um e o transitório do filtro é omitido, por conveniência. No eixo vertical de todas as figuras usa-se o valor da fundamental calculada pelo filtro de Fourier e o ângulo é calculado de forma a subtrair o atraso de grupo. Vale notar que para sinais de 60 Hz o ângulo é constante durante toda a duração do sinal.

Esses experimentos exemplificam os efeitos dos filtros no cálculo do módulo e ângulo dos sinais elétricos no regime de operação permanente.

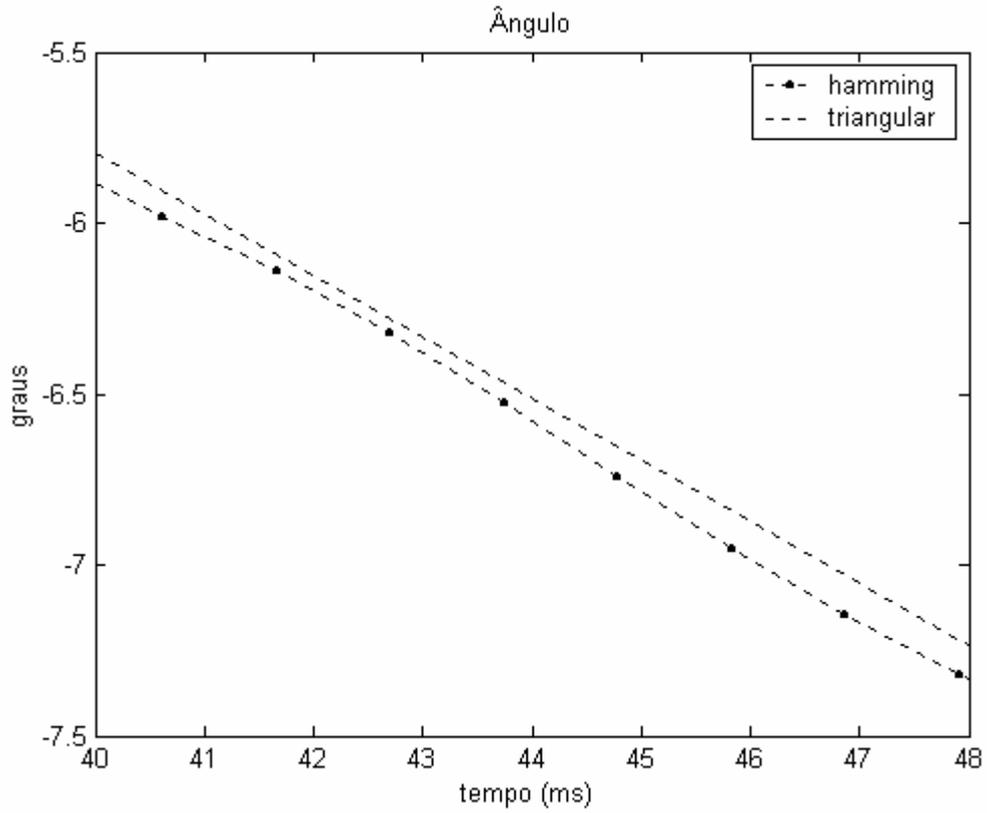


Figura 20 – Ângulo da filtragem de Fourier usando janelas de Hamming e triangular (as duas melhores) de um ciclo para um sinal de 59,5 Hz

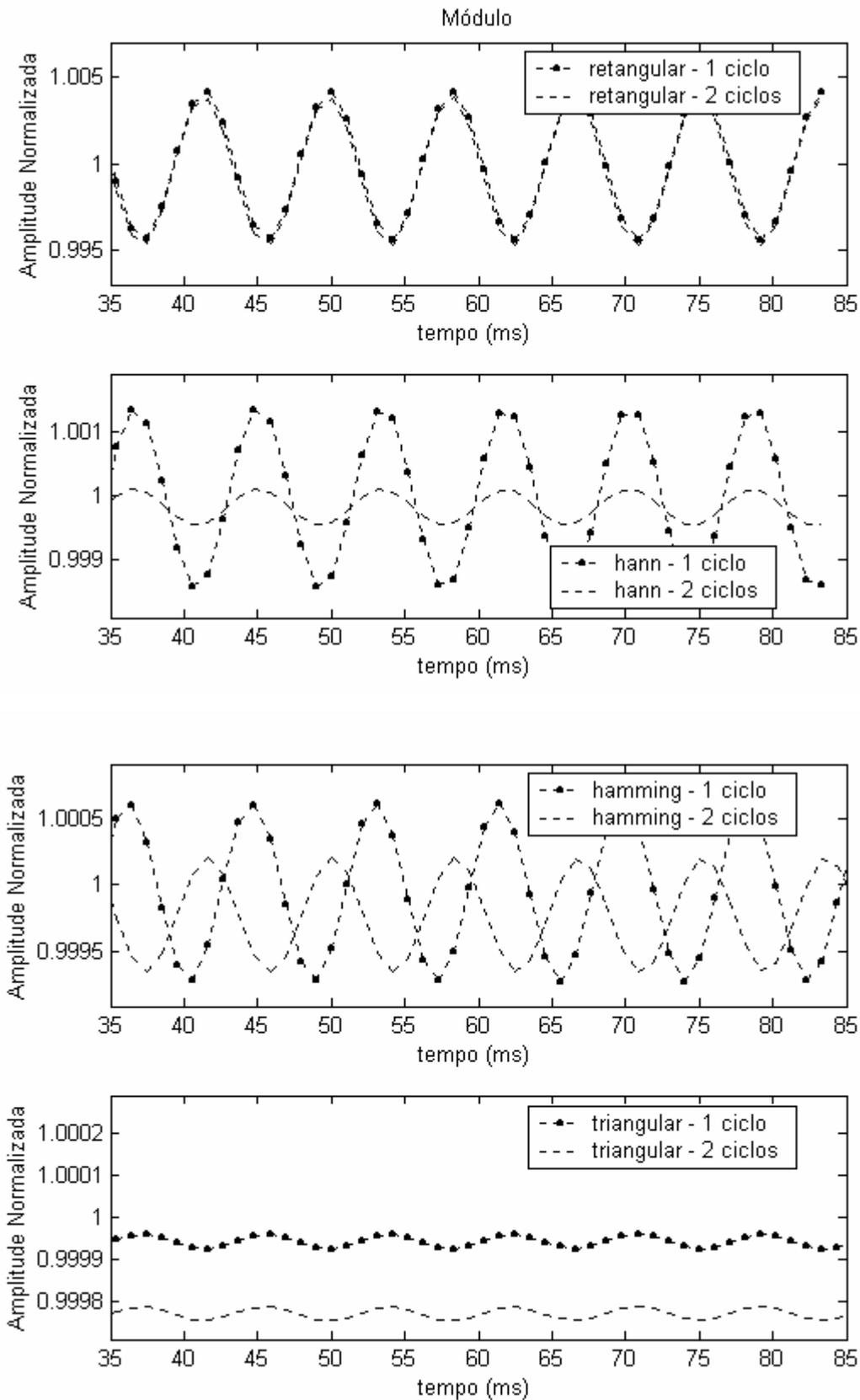


Figura 21 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos

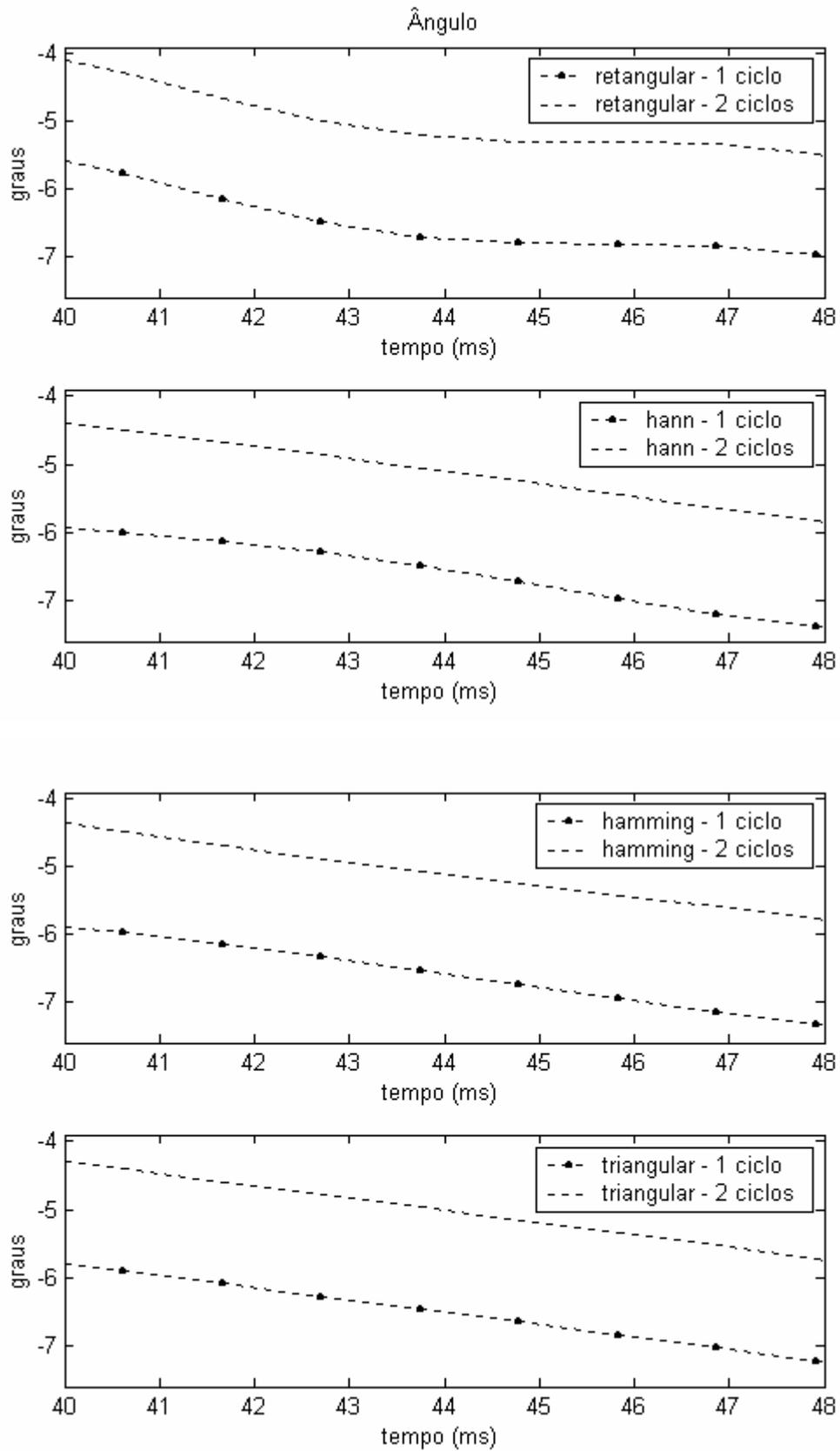


Figura 22 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos

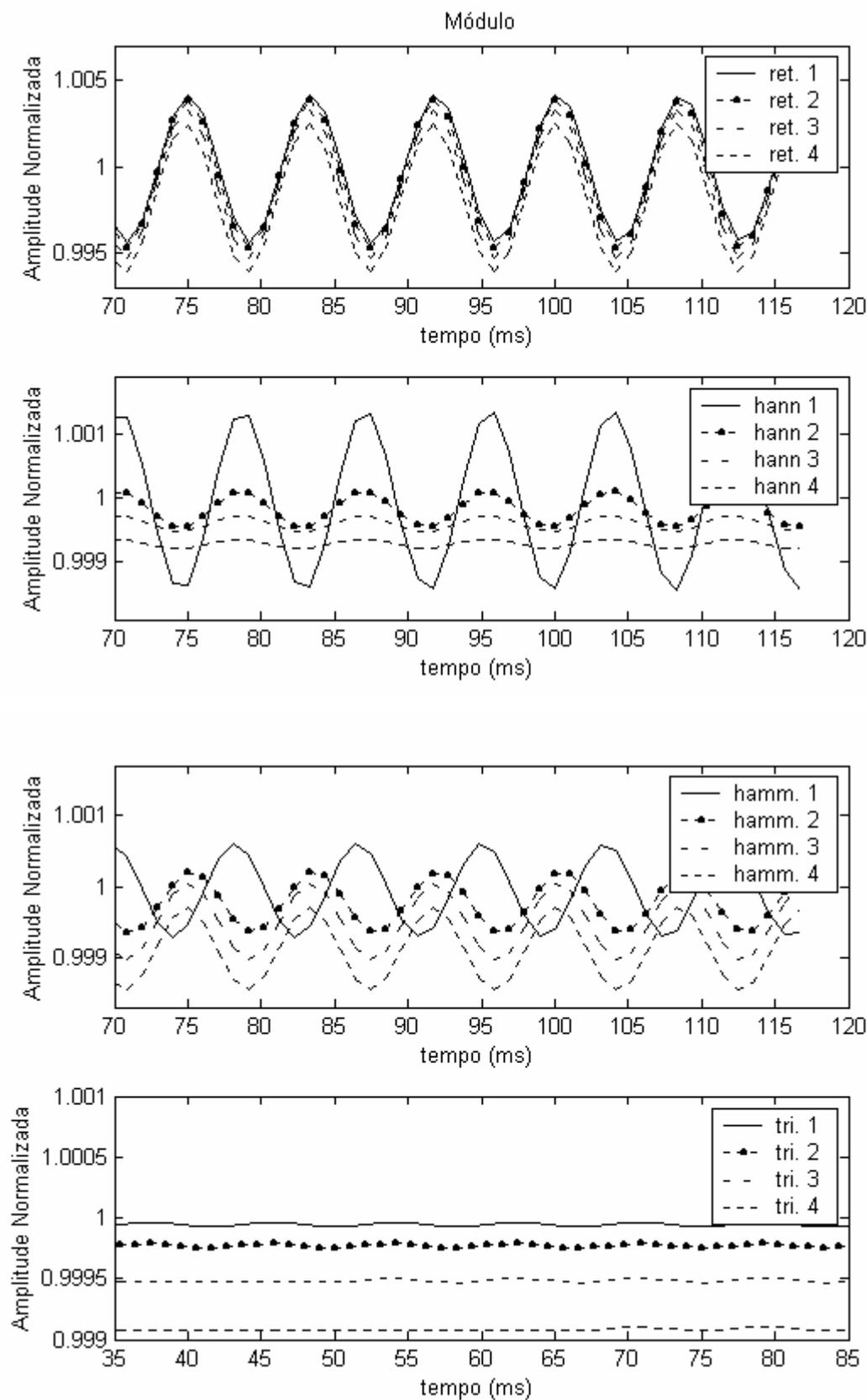


Figura 23 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos

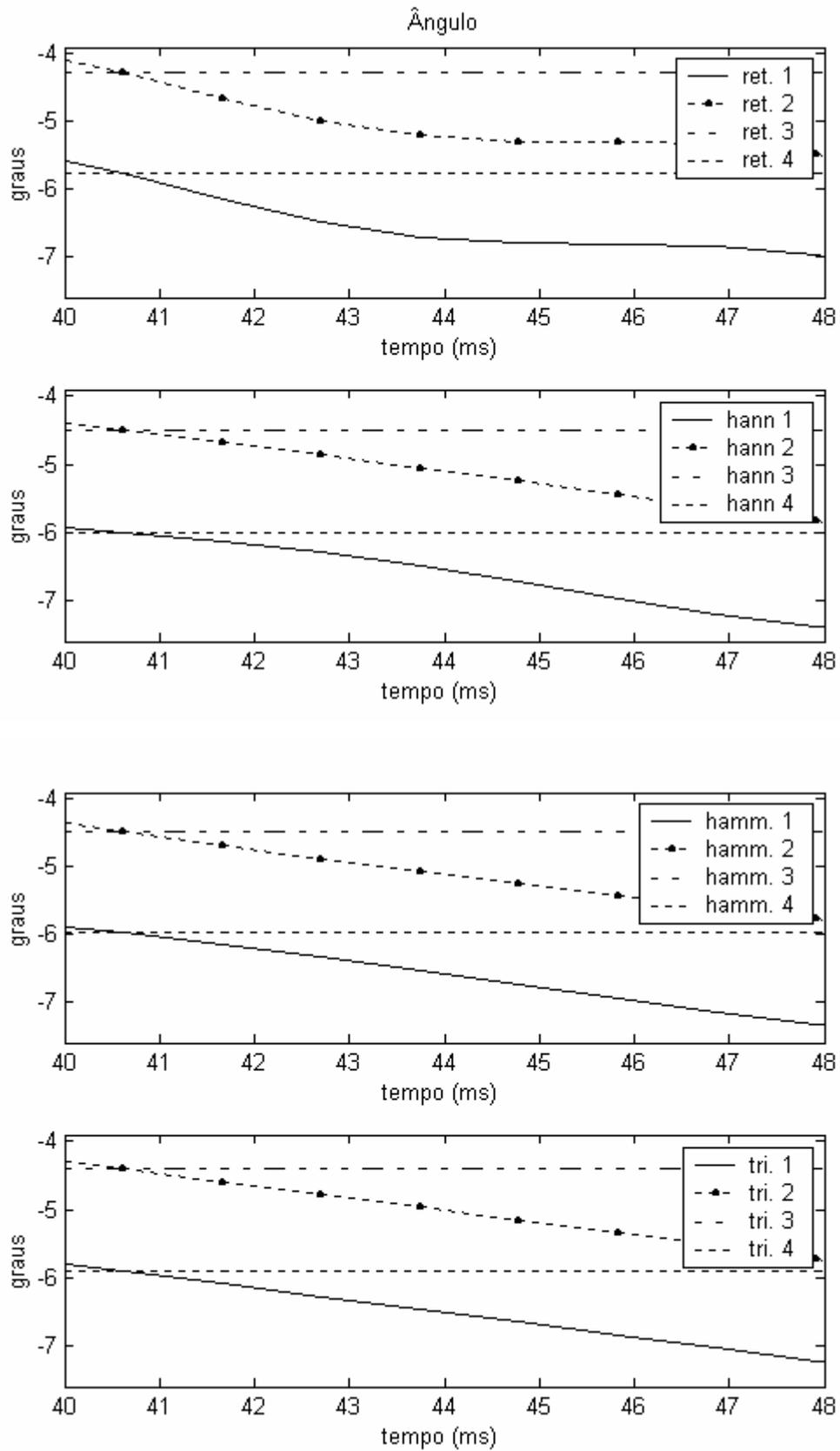


Figura 24 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos

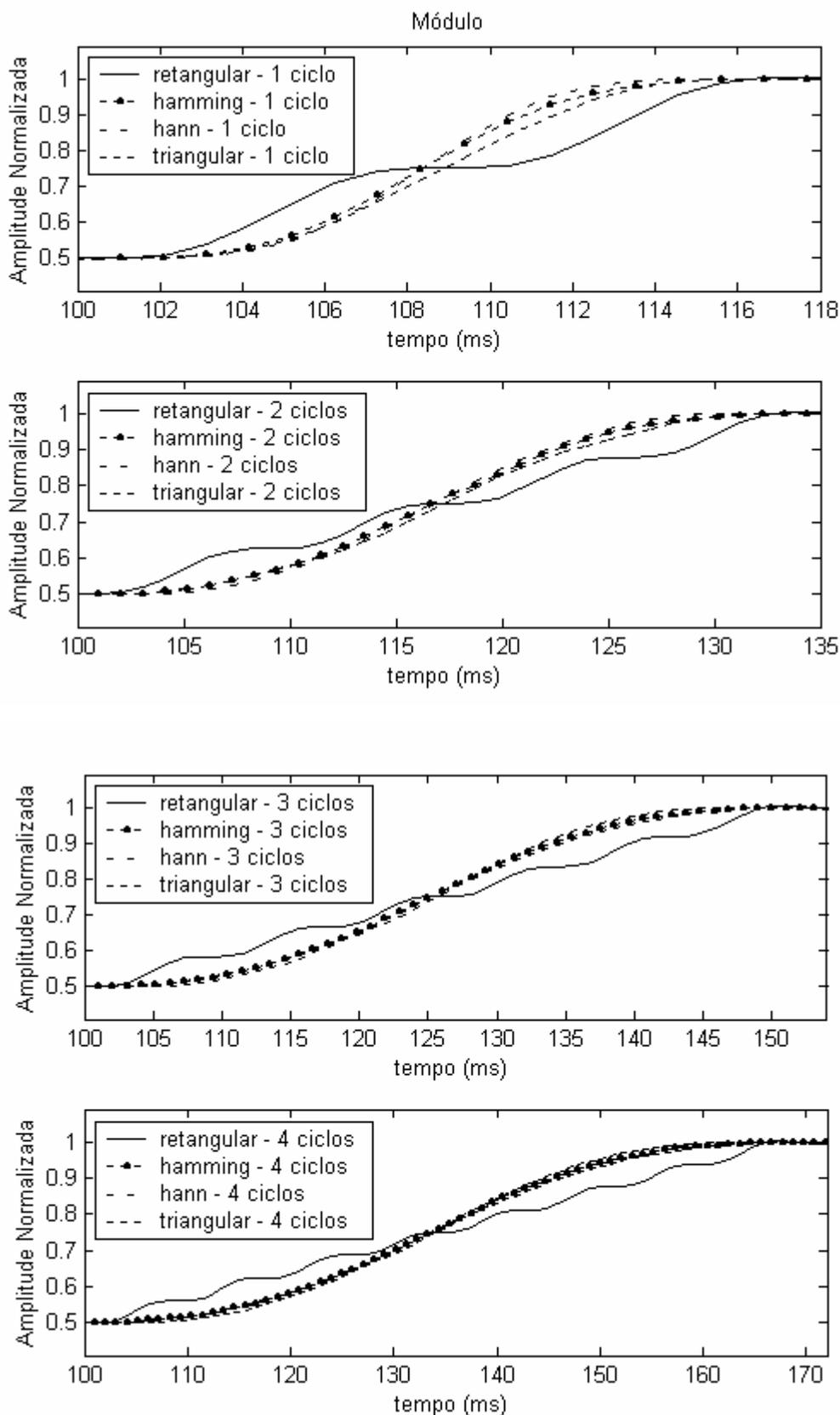


Figura 25 – Resultado do módulo na análise do transitório para janelas de um a quatro ciclos

A Figura 25 e a Figura 26 exemplificam o resultado da filtragem de Fourier para as janelas retangular, de Hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos, para um sinal com frequência de 59,5Hz, mas com uma variação brusca de amplitude de meio para um. É importante notar que este sinal está normalizado em relação ao nível mais elevado. No eixo vertical da Figura 25 usa-se o valor da fundamental calculada pelo filtro de Fourier.

Esses experimentos exemplificam os efeito dos filtros no cálculo do módulo e ângulo dos sinais elétricos em regime transitório, que é comumente encontrado quando existe uma situação de falta, desligamento ou religamento³ [19] de uma linha de transmissão.

³ Religamento é processo no qual uma linha de transmissão é novamente conectada ao sistema elétrico depois de ser desligada do mesmo, seja por uma manobra corretiva ou pelo sistema de proteção.

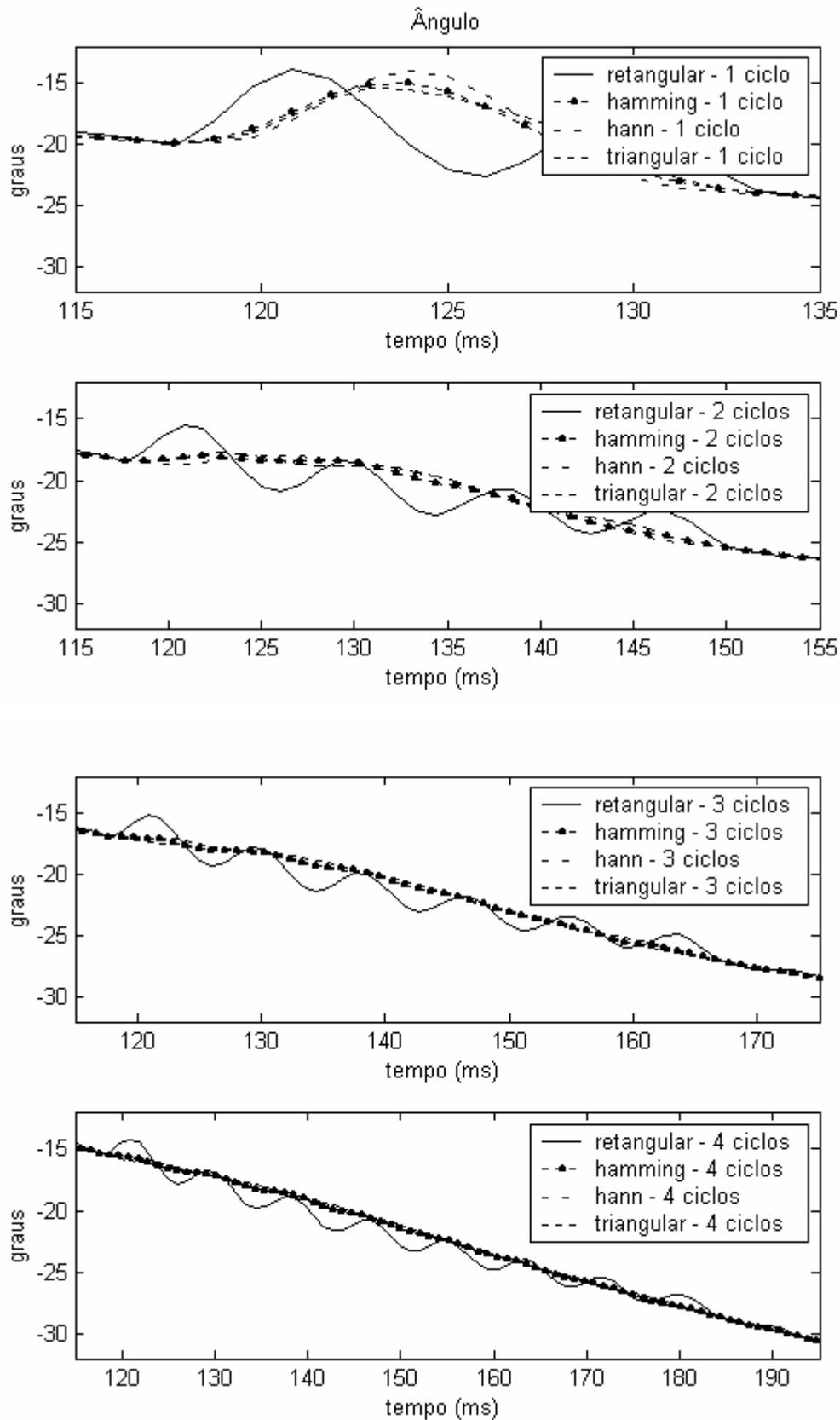


Figura 26 – Resultado do ângulo na análise do transitório para janelas de um a quatro ciclos

Os resultados acima indicam que, com exceção da janela retangular, o ângulo não apresenta variação notável, mesmo quando há variação de nível. Portanto, para efeito de análise das características dos filtros, daqui em diante, faremos a análise apenas do módulo dos fasores.

Os gráficos mostrados nas figuras acima indicam que os resultados da janela triangular são bem interessantes. Ela possui um erro muito baixo da oscilação do valor do módulo para pequenas variações de frequência da rede ($\pm 0,5$ Hz). Porém, o filtro de Fourier com janela triangular possui os seus zeros nas frequências equivalentes ao dobro das frequências dos zeros do filtro de Fourier com a janela triangular. Assim, um filtro de janela triangular de dois ciclos terá seus zeros nas frequências correspondentes ao um filtro de Fourier de um ciclo. Vale dizer que a janela triangular terá que possuir uma quantidade par de ciclos para que o filtro correspondente não tenha problema com a presença de nível *DC* no sinal a ser filtrado. Isso nos remete obrigatoriamente a janelas triangulares de dois ou mais ciclos, em detrimento das janelas de um ciclo.

Vale notar que ocorre um comportamento anômalo com a janela triangular à medida que o desvio de frequência aumenta. À medida que o tamanho da janela triangular aumenta, o erro do valor médio do módulo do fasor também aumenta, sem reduzir significativamente a oscilação. Isso se deve ao fato de que à medida que se aumenta o tamanho da janela triangular o espectro em frequência tem a planura na origem reduzida o que aumenta o erro do valor médio do módulo do fasor. Isso está exemplificado na Figura 27, onde mostra a resposta em frequência da janela triangular de um a quatro ciclos. Podemos perceber que há uma grande correlação entre a Figura 27 e a o último gráfico da Figura 23.

Portanto, para efeito de comparação de desempenho, daqui em diante, usaremos a janela triangular de dois ciclos.

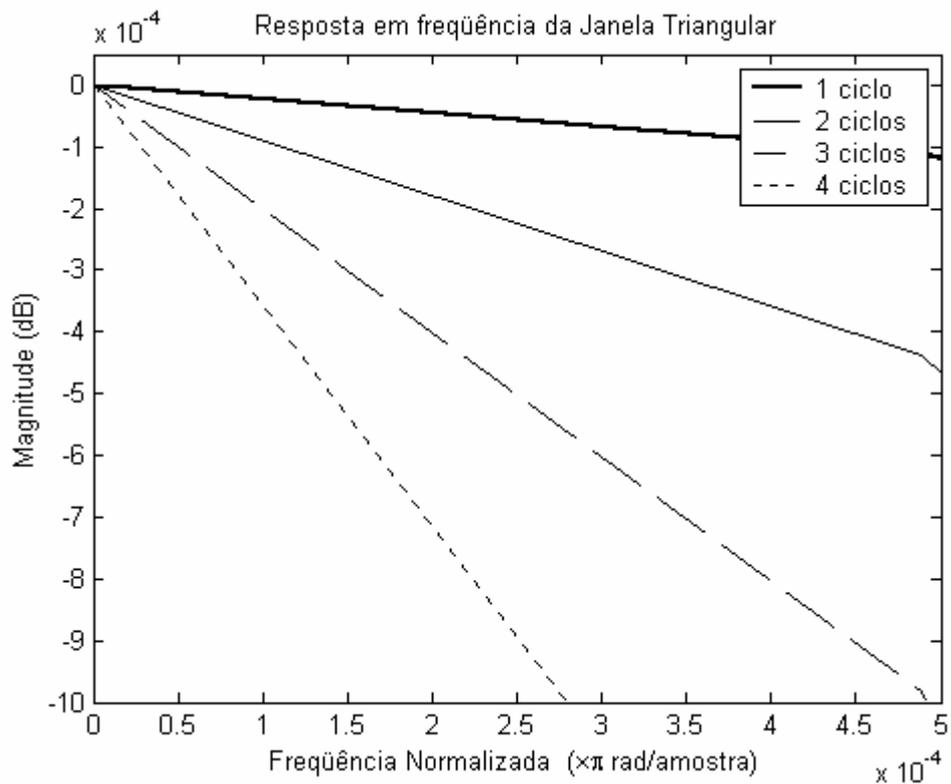


Figura 27 - Comparação da planura da resposta em frequência das janelas triangulares de um a quatro ciclos na origem.

O próximo capítulo irá propor uma nova janela, projetada segundo critérios específicos para sinais de potência. Este esquema possui grau de liberdade suficiente para variar alguns parâmetros, ao contrário da janela triangular. Vale dizer que a janela triangular é muito bem aplicada para sinais genéricos.

CAPÍTULO 3

3 UM FILTRO PARA O CÁLCULO DE FASORES

3.1 Introdução

Este capítulo propõe um filtro cujo projeto baseia-se na idéia de tornar mais plana a resposta do filtro na região da banda passante, reduzindo com isso a amplitude das oscilações verificadas no item 2.8 (ver, por exemplo, Figura 17), além de minimizar o erro na estimação da amplitude da fundamental quando a frequência varia. No final, os parâmetros do projeto são analisados.

3.2 Filtro proposto

O conforme foi visto anteriormente o filtro de Fourier não é eficiente para determinação dos fasores para sinais que possuem algum desvio da frequência fundamental. Portanto, devemos projetar filtros passa-faixa cuja resposta em frequência ideal está representada na Figura 28.

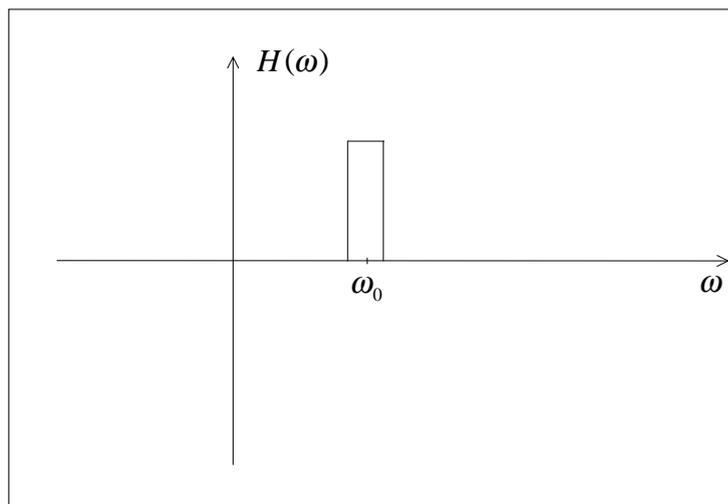


Figura 28 – Resposta em frequência do filtro ideal

Para efeito de projeto utilizamos a técnica de modulação em frequência [11], onde devemos determinar um filtro passa-baixa protótipo e fazer a modulação em frequência, conforme a equação (87).

$$h(n) = h_{LP}(n)e^{j\omega_0 n} \quad (87)$$

Onde $h_{LP}(n)$ é a resposta ao impulso do filtro protótipo passa-baixa e ω_0 é a frequência central correspondente à frequência da rede.

O sinal será processado pelo filtro modulado da equação (87), fazendo a convolução deste com o filtro. O resultado será um número complexo, onde o seu módulo e a sua fase são utilizados para extrair o módulo e o ângulo do fasor.

O filtro protótipo deve ter uma resposta em frequência conforme indicada na Figura 29. Ele deve ter uma resposta em amplitude maximamente plana na origem e limitada a uma variação δ_p . Além disso, deve possuir uma região de transição ($\omega_p - \omega_s$) suficientemente pequena e a resposta em amplitude da região de rejeição ($\omega > \omega_p$) deve ser a menor possível, respeitando alguns critérios. As regiões sombreadas da figura são proibidas para a resposta em frequência do filtro.

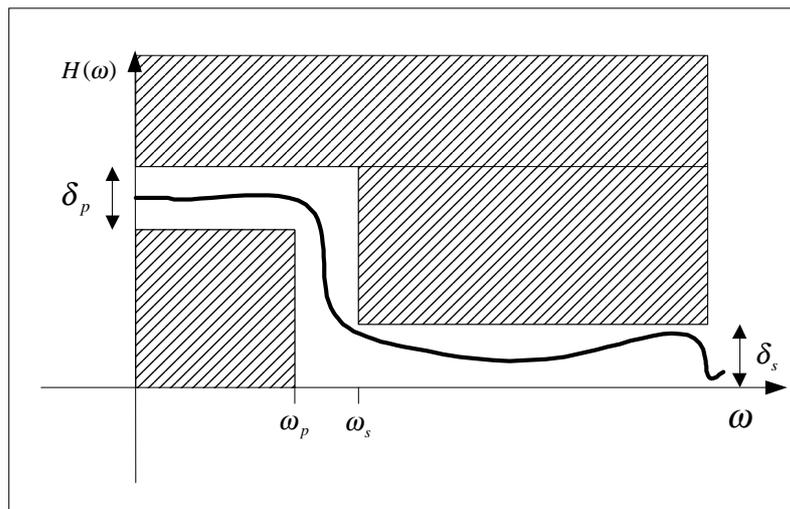


Figura 29 – Limites de amplitude e frequência do filtro protótipo

O filtro utilizado deve ser um filtro do tipo *FIR* (resposta ao impulso finita), com fase zero e os parâmetros δ_p , δ_s , ω_s e ω_p são otimizados sempre comparando o comprimento do filtro utilizado e o comprimento do filtro de Fourier, com ou sem janelas.

Além disso, o filtro deve satisfazer duas condições:

1. se a frequência fundamental varia, a resposta da amplitude do fasor não pode variar muito;
2. rejeitar frequências fora da faixa de interesse.

A solução que propomos, nesta tese, para satisfazer os dois requisitos acima é o seguinte:

1. para resolver o problema da variação em torno da frequência central, precisamos de um protótipo maximamente plano na origem, que vai ser modulado para a frequência central de 60 Hz. Para isso, utilizaremos uma estrutura cuja *Transformada Z* possuirá obrigatoriamente um número predeterminado de zeros em $z = 1$, igual a equação (88), abaixo.

$$P(z) = 1 - (1 - z^{-1})^K Q(z) \quad (88)$$

2. a outra condição será satisfeita minimizando o erro de aproximação do filtro protótipo na faixa de rejeição. Usaremos para isso o método dos *Mínimos Quadrados Ponderados* [11].

O protótipo de filtro utilizado está representado na equação (88), onde $Q(z)$ é a parcela do filtro que deve ser otimizada. O termo que multiplica $Q(z)$ serve para forçar as $K-1$ derivadas da equação (88) a serem iguais a zero para $z = 1$, possibilitando assim um filtro plano na origem. Para isso ser verdadeiro $P(z)$ deve ter fase zero, portanto, com uma implementação não causal [11].

Na equação acima, $P(1) = 1$ e

$$\left. \frac{\partial^n P(z)}{\partial z^n} \right|_{z=1} = 0, \quad n = 1, \dots, K-1 \quad (89)$$

Como indicado na equação (89), $P(z)$ possui $K-1$ derivadas zero na origem. Assim ele terá um grau de planura maior quanto maior for K . Notar que, para $P(z)$ ter fase linear, ele deve ter um número ímpar de coeficientes, pois o coeficiente central corresponderá ao índice zero da resposta ao impulso do filtro, numa versão de filtro não causal, e a sua resposta em frequência pode ser determinada subtraindo o coeficiente central de um, indicado na equação (88). Para os filtros com número par de coeficientes isso não pode ser realizado.

Observe que para que a equação (88) gere em um filtro maximamente plano na origem é necessário que $P(e^{j\omega})$ seja real.

A Figura 30 mostra um exemplo de um filtro de comprimento ímpar onde o seu coeficiente central corresponde ao índice zero da resposta ao impulso do filtro.

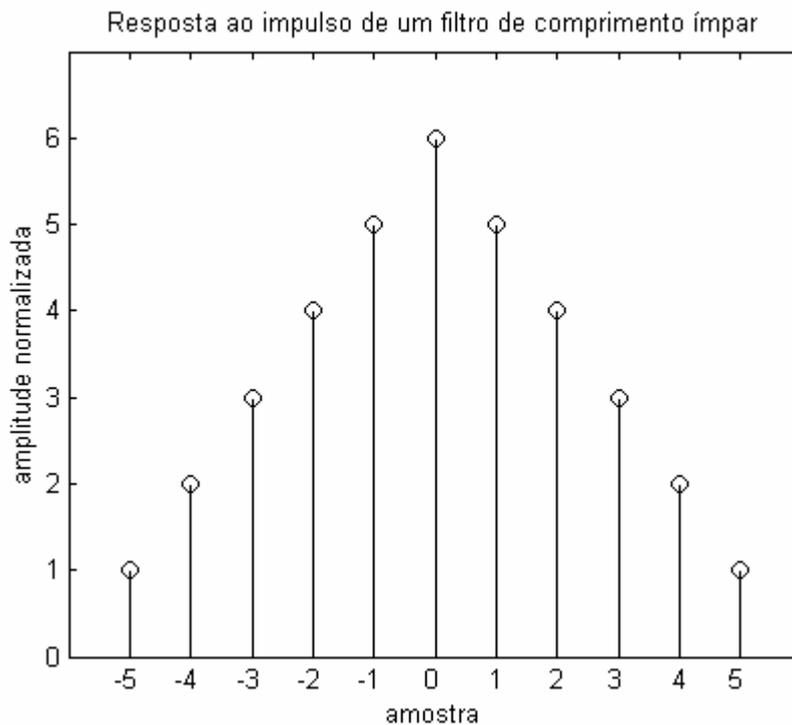


Figura 30 – Exemplo de um filtro com número ímpar de coeficientes

No entanto, para a sua utilização prática consideramos o filtro da equação (88) na sua versão causal, ou seja

$$P'(z) = z^{-M} P(z) \quad (90)$$

3.2.1 Relação entre K e $Q(z)$

O termo $(1-z^{-1})^K$ da equação (88) indica o quão plana será a resposta em frequência na origem. Porém, a ordem do filtro $p(n)$ é a soma da ordem de $Q(z)$ e K .

$$R(z) = (1 - z^{-1})^K Q(z) \quad (91)$$

Para que a relação da equação (88) seja satisfeita, $R(z)$, na equação (91), deve ter defasagem igual a zero, o que implica que $R(z)$ deva ter ordem par, ser simétrico e ter uma resposta em frequência como indicada na Figura 31. Portanto $R(z)$ deve ser um filtro *FIR* do tipo I.

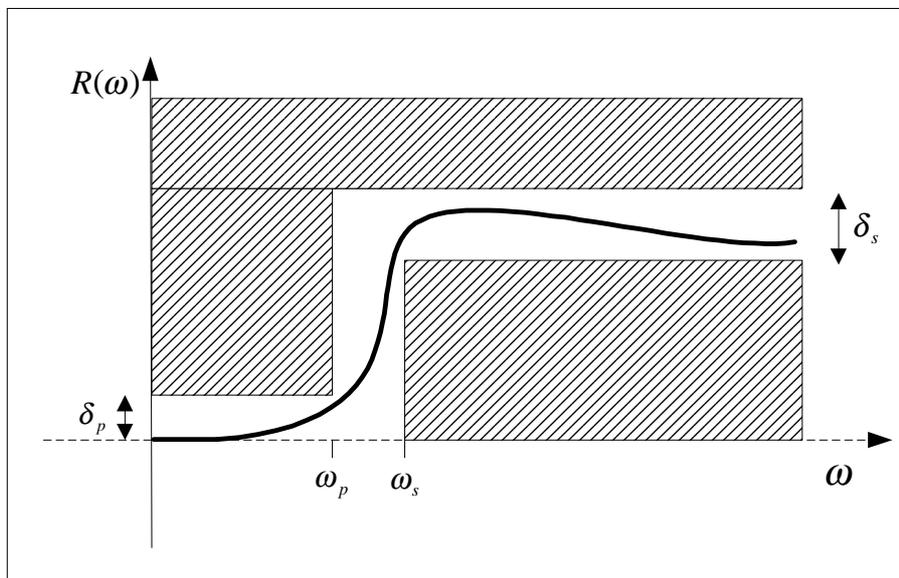


Figura 31 – Limites de amplitude e frequência do filtro $R(\omega)$

De acordo com [11], os filtros *FIR* de fase linear podem ser classificados em quatro tipos, de acordo com sua resposta ao impulso e a sua resposta em frequência⁴:

TIPO I:

O filtro tem resposta ao impulso simétrica, como na equação (92), e comprimento ímpar. Assim:

$$h(M - n) = h(n) \quad (92)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h(n)(z^{-n} + z^{-(M-n)}) + h\left(\frac{M}{2}\right)z^{-\frac{M}{2}} \quad (93)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{m=0}^{\frac{M}{2}} a(m) \cos(\omega m) \quad (94)$$

Onde M é par, $a(0) = h\left(\frac{M}{2}\right)$ e $a(m) = 2h\left(\frac{M}{2} - m\right)$ para $m = 1, \dots, \frac{M}{2}$.

TIPO II:

O filtro tem resposta ao impulso simétrica, como na equação (92), e comprimento par. Assim:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h(n)(z^{-n} + z^{-(M-n)}) \quad (95)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \sum_{m=1}^{\frac{M+1}{2}} b(m) \cos\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (96)$$

Onde M é ímpar e $b(m) = 2h\left(\frac{M+1}{2} - m\right)$ para $m = 1, \dots, \frac{M+1}{2}$.

⁴ Na definição dos tipos de filtros de fase linear será adotada a terminologia $h(n)$ para a resposta ao impulso do filtro e $H(e^{j\omega})$ para a sua resposta em frequência.

TIPO III:

O filtro tem resposta ao impulso anti-simétrica, como na equação (97), e comprimento ímpar. Assim:

$$h(M - n) = -h(n) \quad (97)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h(n)(z^{-n} - z^{-(M-n)}) \quad (98)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega \frac{M}{2} - \frac{\pi}{2})} \sum_{m=1}^{\frac{M}{2}} c(m) \text{sen}(\omega m) \quad (99)$$

$$\text{Onde } M \text{ é par e } c(m) = 2h\left(\frac{M}{2} - m\right) \text{ para } m = 1, \dots, \frac{M}{2}.$$

Vale notar que para este tipo de filtro a resposta em frequência é nula para $\omega=0$ e $\omega=\pi$.

TIPO IV:

O filtro tem resposta ao impulso anti-simétrica, como na equação (97), e comprimento par. Assim:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} h(n)(z^{-n} - z^{-(M-n)}) \quad (100)$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega \frac{M}{2} - \frac{\pi}{2})} \sum_{m=1}^{\frac{M+1}{2}} d(m) \text{sen}\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right] \quad (101)$$

$$\text{Onde } M \text{ é ímpar e } d(m) = 2h\left(\frac{M+1}{2} - m\right) \text{ para } m = 1, \dots, \frac{M+1}{2}.$$

Vale notar que para este tipo de filtro a resposta em frequência é nula para $\omega=0$.

Para satisfazer as restrições desses filtros, analisamos as condições para o K par e para K ímpar nas subseções seguintes.

3.2.2 Projeto do filtro no caso onde K é par

Para K par, $(1-z^{-1})^K$ tem número de coeficientes ímpar, além de ser um filtro do tipo II (simétrico), equação (95). Assim:

$$[1-z^{-1}]^K = \left[z^{-1/2} \left(z^{1/2} - z^{-1/2} \right) \right]^K \quad (102)$$

$$K = 2p, \quad p \in \mathbb{Z}_+^* \quad (103)$$

Substituindo (103) em (102).

$$\left[z^{-1/2} \left(z^{1/2} - z^{-1/2} \right) \right]^{2p} = \left[z^{-1} (z - 2 + z^{-1}) \right]^p = z^{-p} (z - 2 + z^{-1})^p \quad (104)$$

Onde a equação (104) é a versão do filtro da equação (102) com defasagem igual a zero.

Substituindo (104) em (88)

$$P(z) = 1 - z^{-p} (z - 2 + z^{-1})^p Q(z) = 1 - (z - 2 + z^{-1})^p \underbrace{z^{-p} Q'(z)}_{\text{Real para } z=e^{j\omega}} \quad (105)$$

Seja:

$$Q(z) = z^{-p} Q'(z) \quad (106)$$

Para que $P(z)$ tenha fase zero, $Q(z)$ deve necessariamente ter um número ímpar de coeficientes. $Q(z)$ deve ter um atraso inteiro e ser simétrico e real para $z=e^{j\omega}$, ou seja, $Q(z)$ deve ser um filtro do tipo I, equação (93), pois para um filtro $Q(z)$ do tipo III, equação (98), $R(e^{j\omega})$ terá um zero em $\omega=\pi$, não satisfazendo à condição de existência de $R(e^{j\omega})$.

Assim:

$$Q(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{M/2} A_k (z^k + z^{-k}) \quad (107)$$

Onde $M+1$ é o número de coeficientes de $Q(z)$.

A resposta em frequência é dada por $P(e^{j\omega})$. Pela equação (88) temos:

$$P(e^{j\omega}) = 1 - (e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}})^K Q(e^{j\omega}) \quad (108)$$

$$P(e^{j\omega}) = 1 - [2j \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)]^K Q(e^{j\omega}) \quad (109)$$

onde:

$$Q(e^{j\omega}) = A_0 + \sum_{n=1}^{M/2} 2A_n \cos(\omega n) \quad (110)$$

$$P(e^{j\omega}) = 1 - (-1)^{K/2} \cdot 2^K \cdot \operatorname{sen}^K\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \left(A_0 + \sum_{n=1}^{M/2} 2A_n \cos(\omega n) \right) \quad (111)$$

Por notação matricial, podemos expressar (111) da seguinte forma:

$$\vec{P} = \vec{1} - \vec{S} \cdot \vec{V} \quad (112)$$

onde:

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} P(e^{j\omega_1}) \\ P(e^{j\omega_2}) \\ \vdots \\ P(e^{j\omega_R}) \end{bmatrix}_{R \times 1} \quad (113)$$

$$\vec{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{R \times 1} \quad (114)$$

$$S = (-1)^{\frac{K}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 2^K \text{sen}^K\left(\frac{\omega_1}{2}\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^K \text{sen}^K\left(\frac{\omega_2}{2}\right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2^K \text{sen}^K\left(\frac{\omega_R}{2}\right) \end{bmatrix}_{R \times R} \quad (115)$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_R \end{bmatrix}_{R \times 1} \quad (116)$$

onde:

$$V_i = A_0 + \sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} 2A_n \cos(\omega n) \quad (117)$$

Onde $M+1$ é o número de coeficientes de $Q(e^{j\omega})$ e R é o número de bandas de frequências analisadas. Podemos também expressar:

$$\vec{V} = U \vec{p} \quad (118)$$

Onde:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cos(\omega_1) & 2 \cos(2\omega_1) & \cdots & 2 \cos\left(\frac{M}{2}\omega_1\right) \\ 1 & 2 \cos(\omega_2) & 2 \cos(2\omega_2) & \cdots & 2 \cos\left(\frac{M}{2}\omega_2\right) \\ 1 & 2 \cos(\omega_3) & 2 \cos(2\omega_3) & \cdots & 2 \cos\left(\frac{M}{2}\omega_3\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 \cos(\omega_R) & 2 \cos(2\omega_R) & \cdots & 2 \cos\left(\frac{M}{2}\omega_R\right) \end{bmatrix}_{R \times \frac{M}{2}} \quad (119)$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{\frac{M}{2}} \end{bmatrix}_{\frac{M}{2} \times 1} \quad (120)$$

Logo (112) pode ser expresso como (121).

$$\vec{P} = \vec{1} - S \cdot U \cdot \vec{p} \quad (121)$$

Assim, o valor de \vec{p} é determinado utilizando a técnica de mínimos quadrados ponderados (*Weighted Least Squares*) [11].

3.2.3 Determinação dos coeficientes do filtro usando a técnica de *Mínimos Quadrados Ponderados*

O uso da técnica de mínimos quadrados ponderados nos projetos dos filtros tem a vantagem de ser flexível o suficiente para que a resposta em frequência dos filtros projetados tenha maior atenuação na banda de rejeição e possuindo os zeros nas frequências múltiplas da frequência fundamental.

A técnica de mínimos quadrados ponderados consiste em minimizar a energia da função erro $E(\omega)$, indicada na equação (122), abaixo.

$$\min_p \left\{ \int_0^{\pi} |E(\omega)|^2 d\omega \right\} \quad (122)$$

A função erro é expressa na equação (123),

$$\vec{e} = W \cdot (\vec{D} - \vec{P}) = W \cdot \left(\underbrace{\vec{D} - \vec{1}}_{\vec{d}} + S \cdot U \cdot \vec{p} \right) \quad (123)$$

W é a matriz de pesos expressa em (124). Ela serve para dar importância diferente para diferentes frequências. Por exemplo, para forçarmos uma grande atenuação nas frequências harmônicas, basta atribuímos um valor de peso grande o suficiente nessas frequências.

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_R \end{bmatrix}_{R \times R} \quad (124)$$

onde $\delta_1, \dots, \delta_R$ correspondem ao peso de cada uma das R frequências na composição do erro.

O erro quadrático é dado por:

$$\vec{e}^T \vec{e} = (\vec{d} + S \cdot U \cdot \vec{p})^T W^T W (\vec{d} + S \cdot U \cdot \vec{p}) \quad (125)$$

$$\vec{e}^T \vec{e} = (\vec{p}^T \cdot U^T \cdot S^T + \vec{d}^T) W^T W (S \cdot U \cdot \vec{p} + \vec{d}) \quad (126)$$

$$\vec{e}^T \vec{e} = \vec{p}^T U^T S^T W^T W S U \vec{p} + \vec{p}^T U^T S^T W^T W \vec{d} + \vec{d}^T W^T W S U \vec{p} + \vec{d}^T W^T W \vec{d} \quad (127)$$

Para calcular o erro *WLS* temos que:

$$\frac{\partial e^T e}{\partial \vec{p}} = 2U^T W^T W S^T \vec{d} + 2U^T S^T W^T W S U \vec{p} = 0 \quad (128)$$

A solução da otimização é dada pela equação (129).

$$\vec{p} = -(U^T S^2 W^2 U)^{-1} U^T S W^2 \vec{d} \quad (129)$$

3.2.4 Projeto do filtro no caso onde K é ímpar

Para K ímpar, $(1-z^{-1})^K$ tem número de coeficientes par, além de ser um filtro do tipo IV (anti-simétrico), equação (100). Assim:

$$K = 2p + 1, \quad p \in \mathbb{Z}_+^* \quad (130)$$

Substituindo (130) em (102).

$$\left[z^{-1/2} \left(z^{1/2} - z^{-1/2} \right) \right]^{2p+1} = z^{-1/2} z^{-p} (z - 2 + z^{-1})^p \left(z^{1/2} - z^{-1/2} \right) \quad (131)$$

Onde a equação (131) é a versão do filtro com defasagem igual a zero.

Substituindo (131) em (88)

$$P(z) = 1 - z^{-1/2} z^{-p} (z - 2 + z^{-1})^p \left(z^{1/2} - z^{-1/2} \right) Q'(z) \quad (132)$$

$$P(z) = 1 - (z - 2 + z^{-1})^p \left(z^{1/2} - z^{-1/2} \right) \underbrace{z^{-1/2} z^{-p} Q'(z)}_{\text{Imaginário para } z=e^{j\omega}} \quad (133)$$

Seja:

$$Q(z) = z^{-1/2} z^{-p} Q'(z) \quad (134)$$

Para que $P(z)$ tenha fase zero, $Q(z)$ deve necessariamente ter número par de coeficientes. $Q(z)$ deve ter um atraso de meia amostra e ser anti-simétrico e imaginário para $z=e^{j\omega}$, ou seja, $Q(z)$ deve ser um filtro do tipo IV, equação (100), pois para um filtro $Q(z)$ do tipo II, equação (95), $R(e^{j\omega})$ terá um zero em $\omega=\pi$, não satisfazendo à condição de existência de $R(e^{j\omega})$.

Assim:

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} A_k \left(z^{(2k+1)/2} - z^{-(2k+1)/2} \right) \quad (135)$$

Onde $M+1$ é o número de coeficientes de $Q(z)$.

Dessa forma:

$$P(e^{j\omega}) = 1 - \left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}} \right)^K Q(e^{j\omega}) \quad (136)$$

$$P(e^{j\omega}) = 1 - \left[2j \operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^K \cdot jQ(e^{j\omega}) \quad (137)$$

onde:

$$Q(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} 2A_n \operatorname{sen}\left[\omega\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right] \quad (138)$$

$$P(e^{j\omega}) = 1 - (-1)^{(K+1)/2} \cdot 2^K \cdot \operatorname{sen}^K\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} 2A_n \operatorname{sen}\left[\omega\left(\frac{2n+1}{2}\right)\right] \right) \quad (139)$$

Por notação matricial, podemos expressar (139) da mesma forma como para K par, equação (121), onde:

$$S = (-1)^{\frac{K+1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 2^K \operatorname{sen}^K\left(\frac{\omega_1}{2}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^K \operatorname{sen}^K\left(\frac{\omega_2}{2}\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2^K \operatorname{sen}^K\left(\frac{\omega_R}{2}\right) \end{bmatrix}_{R \times R} \quad (140)$$

$$U = 2 \times \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_1\right) & \text{sen}\left(\frac{3}{2}\omega_1\right) & \text{sen}\left(\frac{5}{2}\omega_1\right) & \cdots & \text{sen}\left(\frac{M}{2}\omega_1\right) \\ \text{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_2\right) & \text{sen}\left(\frac{3}{2}\omega_2\right) & \text{sen}\left(\frac{5}{2}\omega_2\right) & \cdots & \text{sen}\left(\frac{M}{2}\omega_2\right) \\ \text{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_3\right) & \text{sen}\left(\frac{3}{2}\omega_3\right) & \text{sen}\left(\frac{5}{2}\omega_3\right) & \cdots & \text{sen}\left(\frac{M}{2}\omega_3\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_R\right) & \text{sen}\left(\frac{3}{2}\omega_R\right) & \text{sen}\left(\frac{5}{2}\omega_R\right) & \cdots & \text{sen}\left(\frac{M}{2}\omega_R\right) \end{bmatrix}_{R \times \frac{M-1}{2}} \quad (141)$$

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{\frac{M-1}{2}} \end{bmatrix}_{\frac{M-1}{2} \times 1} \quad (142)$$

Onde, como no caso anterior, R é o número de bandas de frequências analisadas. O conjunto de frequências discretas utilizadas para se determinar \vec{p} na equação (129) (ω_1 a ω_R) não podem conter as frequências 0 ou π , pois ocorrerá o problema de mal condicionamento na matriz U^{-1} , uma vez que a matriz U , equação (141), para as frequências 0 e π terá uma linha e uma coluna de zeros [20].

Como no caso anterior, usamos a técnica de mínimos quadrados ponderados para minimizar o quadrado da energia da função erro expressa na equação (123). O resultado será o mesmo da equação (129).

3.3 Parâmetros do filtro

A resposta em frequência do filtro proposto está indicada na equação (88) e é repetida, por conveniência, na equação (143), abaixo.

$$P(e^{j\omega}) = 1 - (1 - e^{-j\omega})^K Q(e^{j\omega}) \quad (143)$$

Na determinação do filtro ideal para a aplicação em sistemas de potência visando à determinação dos fasores, devem-se otimizar os seguintes parâmetros:

- Comprimento do Filtro (M); (seção 3.3.1)
- Fator de Planura (K); (seção 3.3.2)
- Peso das frequências harmônicas (w); (seção 3.3.3)
- Frequência de corte (f_C) e dos zeros; (seção 3.3.4)
- Frequência inicial de simulação (f_{Sim}). (seção 3.3.5)

3.3.1 Comprimento do filtro

O comprimento do filtro (M) é o seu número de coeficientes. Ele é determinado quando se multiplicam todos os termos da equação (143). É uma medida primária de comparação do filtro proposto com outros filtros e determina a sua resposta transitória. Portanto, o comprimento do filtro indica se ele pode ser usado para a proteção e controle (com a ordem pequena, para se ter respostas rápidas no tempo mesmo com o cálculo menos preciso) ou para oscilografia de curta ou longa duração (com a ordem maior, e os cálculos com maior exatidão). Conforme explicado na seção 3.2, o comprimento deve ser ímpar, ou seja:

$$M = 2k + 1, k \in Z_+^* \quad (144)$$

Para os primeiros estudos foram realizados projeto de filtros com 33 amostras de comprimento, ou seja, aproximadamente o dobro do comprimento da *DFT* (16 amostras por ciclo). Mais adiante, foram projetados outros filtros com comprimentos maiores (41, 49, 57 e 65) e menores (17 e 25).

3.3.2 Fator K

É o parâmetro que representa o número de derivadas iguais a zero na origem da resposta em frequência do filtro, na equação (143). O fator K indica o grau de planura na origem. Assim, para pequenas variações de frequência o valor do módulo após o filtro tenderá a ser mais próximo do valor real quanto maior for este fator. A planura do filtro, por si só, não é a responsável pelo seu melhor desempenho, mas será a interação entre os parâmetros que determinará a qualidade ou não do filtro projetado. Porém, ao se isolar todos os outros parâmetros considerando apenas a planura como variável, o resultado será tanto melhor quanto mais plana for a curva na origem. A Figura 32 mostra a comparação da resposta em frequência do filtro de Fourier de um e dois ciclos com um dos projetos de filtro propostos para valores de $K = 4$ e $K = 6$. O objetivo desta figura é mostrar a relação entre a planura e o fator K .

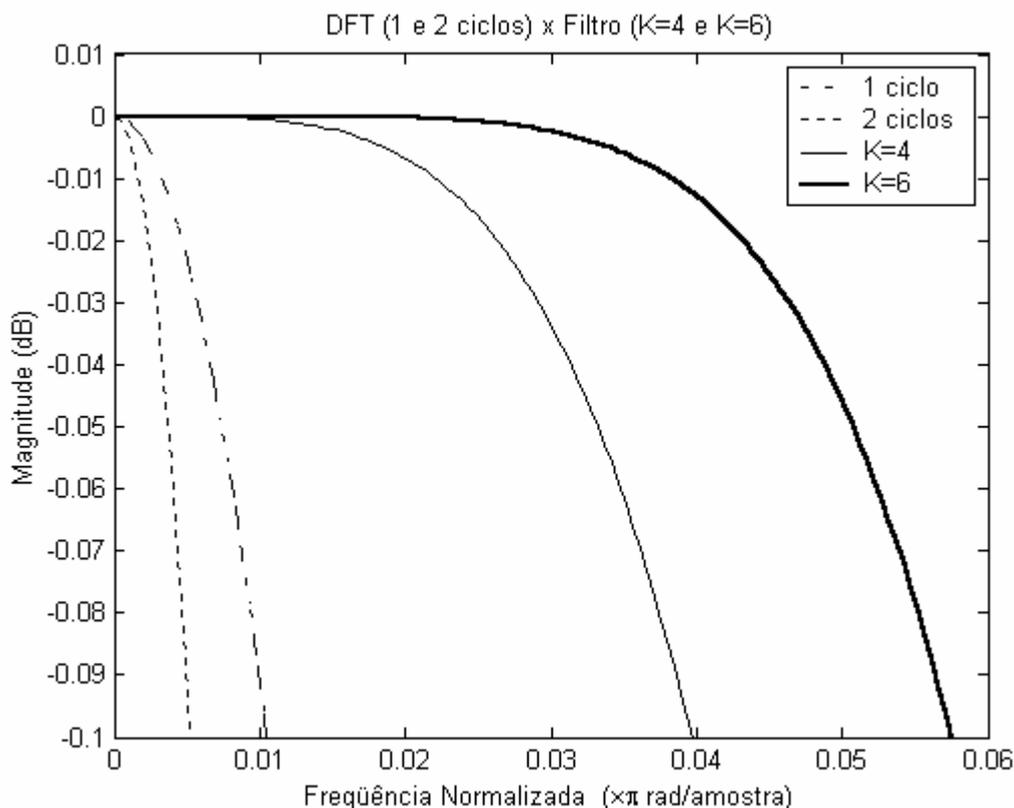


Figura 32 - Efeito do parâmetro K na planura do filtro

O comprimento da componente $Q(e^{j\omega})$ do filtro é M_q , tal que $M_q = M - K$, onde M (seção anterior) é o comprimento do filtro. Em outras palavras, o projeto possui M_q graus de liberdade diminuindo com o aumento de K . Assim, o fator K é um limitador do comprimento de $Q(e^{j\omega})$, o que significa que à medida que o filtro fica mais plano na origem a sua resposta em frequência na banda de rejeição piora.

A resposta de $Q(e^{j\omega})$ também causa influência na planura do filtro, mas o seu efeito é notado principalmente para $K = 2$, de forma que projetos com o comprimento dos filtros muito pequeno tende a ter um resultado pior na avaliação do faser do que o do filtro de Fourier, ou de suas versões janeladas.

Nos projetos de filtros realizados, o fator K foi variado até o ponto em que não se obteve mais os resultados esperados. Porém, dependendo do comprimento do filtro adotado, o valor máximo tolerável de K ficou entre quatro e seis. Nos projetos de filtros com comprimentos de 65 amostras não houve bom desempenho para um K maior do que seis.

3.3.3 A matriz de pesos

Para a implementação do filtro precisamos determinar \vec{p} na equação (129), repetida em (145) por conveniência.

$$\vec{p} = -(U^T S^2 W^2 U)^{-1} U^T S W^2 \vec{d} \quad (145)$$

Lembrando que

$$\vec{d} = \vec{D} - \vec{1} \quad (146)$$

onde

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (147)$$

Temos que \vec{D} pode ser expresso por

$$\vec{D}^T = \left[\underbrace{1 \quad \dots \quad 1}_{N_c} \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{R_p - N_c - 1} \right] \quad (148)$$

Onde, N_c é o número de faixas freqüências correspondentes à freqüência de corte do filtro. R_p é o número de faixas de freqüências discretas usadas para a determinação de \vec{p} , sendo utilizado nos projetos um valor de $R_p = 8 \cdot M$.

O conjunto de frequências discretas utilizado para determinar \vec{p} na equação (145), ω_l a ω_{Rp} , não pode conter as frequências 0 ou π , pois ocorrerá o problema de mal condicionamento na matriz U^l , conforme já exposto na seção 3.2.4. Além disso, as frequências não serão uniformemente distribuídas no intervalo de 0 a π , podendo ser concentradas em algumas frequências ou num intervalo de frequências, em particular, a ser analisado.

Nos projetos, inicialmente dividimos o intervalo de forma aproximadamente uniforme onde as frequências discretas próximas às frequências harmônicas são forçadas a serem as próprias frequências harmônicas. Assim,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{Rp} \quad (149)$$

Depois de determinar \vec{p} calculamos o valor de \vec{H} , que é a resposta em frequência do filtro, pela equação (150).

$$\vec{H} = \vec{1} - S \cdot U \cdot \vec{p} \quad (150)$$

Onde:

$$\vec{H} = \begin{bmatrix} H(e^{j\omega_0}) \\ H(e^{j\omega_1}) \\ \vdots \\ H(e^{j\omega_{Rp}}) \end{bmatrix} \quad (151)$$

$$\vec{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (152)$$

Onde (152) pode ser expresso por (153)

$$\vec{1}^T = \left[\underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{Rh+1} \right] \quad (153)$$

$$S = S_0 \cdot \begin{bmatrix} 2^K \operatorname{sen}^K \left(\frac{\omega_0}{2} \right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^K \operatorname{sen}^K \left(\frac{\omega_1}{2} \right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2^K \operatorname{sen}^K \left(\frac{\omega_{Rh}}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (154)$$

Onde, como na análise anterior, $S_0 = (-1)^{\frac{K}{2}}$ para K par e $S_0 = (-1)^{\frac{K+1}{2}}$ para K ímpar.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cos(\omega_0) & 2 \cos(2\omega_0) & \dots & 2 \cos\left(\frac{M}{2}\omega_0\right) \\ 1 & 2 \cos(\omega_1) & 2 \cos(2\omega_1) & \dots & 2 \cos\left(\frac{M}{2}\omega_1\right) \\ 1 & 2 \cos(\omega_2) & 2 \cos(2\omega_2) & \dots & 2 \cos\left(\frac{M}{2}\omega_2\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 \cos(\omega_{Rh}) & 2 \cos(2\omega_{Rh}) & \dots & 2 \cos\left(\frac{M}{2}\omega_{Rh}\right) \end{bmatrix} \quad (155)$$

para número par de K .

$$U = 2 \times \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_0\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\omega_0\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{M}{2}\omega_0\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_1\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\omega_1\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{M}{2}\omega_1\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\omega_{Rh}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\omega_{Rh}\right) & \dots & \operatorname{sen}\left(\frac{M}{2}\omega_{Rh}\right) \end{bmatrix} \quad (156)$$

para número ímpar de K .

O vetor \vec{p} está indicado nas equações (120) e (142) para K par e ímpar, respectivamente.

Rh é o número de faixas de frequências discretas usadas para a representação de \vec{H} para o cálculo do erro entre os zeros da filtro e os zeros da DFT .
 $Rh = 8 \cdot Rp = 64 \cdot M$.

O conjunto de frequências discretas utilizado para a representação de \vec{H} é uniformemente distribuído no intervalo de 0 a π . Então,

$$\omega_1 = \frac{\pi}{Rh} \quad (157)$$

O erro é então calculado pela equação (158).

$$\vec{e}^T \vec{e} = \vec{p}^T U^T S^T S U \vec{p} + \vec{p}^T U^T S^T \vec{d} + \vec{d}^T S U \vec{p} + \vec{d}^T \vec{d} \quad (158)$$

O vetor \vec{d} é indicado na equação (146), onde

$$\vec{D}^T = \left[\underbrace{1 \quad \dots \quad 1}_{Nc_1} \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{Rh - Nc_1 + 1} \right] \quad (159)$$

Onde, Nc_1 é o número de faixas de frequências discretas utilizadas para indicar a frequência de corte do filtro.

Nos projetos anteriores o vetor \vec{p} da equação (145) foi determinado para as frequências $\omega_1 \dots \omega_{Np}$, considerando todas as frequências com a mesma importância. Agora levaremos em consideração pesos relativos a cada uma das frequências analisadas, o que será expresso pela matriz W , na equação (124). Neste caso, W dará um peso específico para cada frequência podendo ser otimizado para uma ou mais frequências.

Levando o acima exposto em consideração, foram realizados dois tipos de projeto. Cada um possui considerações distintas:

- Todas as frequências harmônicas receberam um mesmo peso, maior do que o peso das outras frequências, ou seja:

$$\omega_i = \begin{cases} \text{Peso}, & i = h_1, h_2, \dots, h_N \\ 1, & \text{outro } i \end{cases} \quad (160)$$

Onde h_1, h_2, \dots, h_N são as frequências de cada harmônico do sinal.

- Apenas a frequência fundamental recebeu um peso maior, enquanto todas as outras frequências tiveram o mesmo peso, isto é:

$$\omega_i = \begin{cases} \text{Peso}, & i = h_1 \\ 1, & \text{outro } i \end{cases} \quad (161)$$

Onde h_1 é o segundo harmônico da frequência fundamental do sinal.

O primeiro caso tenderia a otimizar os coeficientes de $Q(z)$ para que a resposta em frequência dos filtros tivesse zeros mais próximos possíveis dos zeros do filtro de Fourier, de modo que o resultado da filtragem para a determinação do fasor fosse o melhor possível para a frequência da rede igual a 60 Hz. O segundo caso, garantiria apenas o primeiro zero dos filtros coincidindo com o primeiro zero do Fourier, porém a resposta em frequência na banda de rejeição seria melhor do que no primeiro caso.

Os resultados das simulações indicam que em todos os casos a aplicação de pesos idênticos em todos os harmônicos foi melhor do que o peso apenas na fundamental.

Nos projetos realizados o peso a ser adotado pela matriz W será designado no decorrer do trabalho como Peso.

3.3.4 Freqüência de corte e dos zeros

O componente $Q(e^{j\omega})$ do filtro é otimizado para que se tenha o ganho na banda de rejeição mínimo possível e o ganho na banda de passagem mais próximo possível de um. A componente K garante que a resposta será a mais plana possível na origem. Porém, tão ou mais importante do que ter uma banda de rejeição mínima é a posição dos zeros na freqüência. O filtro deve possuir os zeros nas mesmas posições dos zeros do filtro de Fourier, pois isso permite que as réplicas geradas pelo efeito da amostragem do sinal sejam canceladas nas freqüências harmônicas, reduzindo o efeito do vazamento espectral.

Associando a posição dos zeros com a planura da resposta em freqüência, o resultado dos fasores será mais preciso mesmo que haja uma variação pequena de freqüência.

A variação da freqüência de corte do filtro $P(e^{j\omega})$, f_c , juntamente com a freqüência inicial de simulação f_{sim} , descrito no item 3.3.5, tende a fazer com que os zeros do filtro coincidam com os zeros do filtro de Fourier. A Figura 33 mostra a resposta em freqüência desejada. O módulo da resposta em freqüência se mantém relativamente plano na origem até que começa a se atenuar. Vale dizer que posteriormente, a resposta em freqüência do filtro deverá ser deslocada (modulada) para que a banda passante fique centrada em 60 Hz.

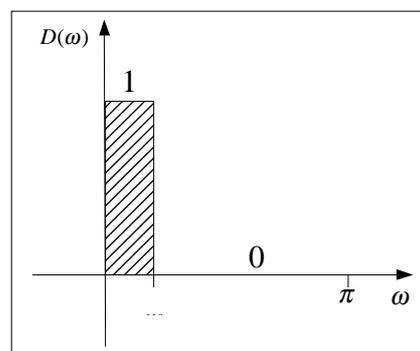


Figura 33 – Freqüência de corte desejada

A equação (159) representa o vetor \vec{D} para a simulação de \vec{p} . Para associarmos o valor de f_c que é um valor real com o valor de N_c num intervalo uniformemente distribuído de frequências usamos a seguinte relação:

$$N_c = \left\lfloor f_c \frac{R_p}{\pi} \right\rfloor \quad (162)$$

Onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x e $R_p = 8 \cdot M$, vide equação (148). Assim, a frequência de corte terá valor sempre maior do que zero, o que é sempre desejado.

Vale ressaltar que estes projetos *WLS* permitem outras distribuições de frequências a serem otimizadas. Na Figura 34 abaixo temos um exemplo de projeto que utiliza intervalos que não são uniformemente distribuídos. Neste exemplo, a frequência de corte f_c pode ser representada pela frequência ω_4 , sem muita perda de precisão.

Na mesma figura podemos perceber que a distribuição das frequências tem uma densidade maior no meio da faixa, logo após a banda de rejeição. Neste caso a simulação prioriza a banda de rejeição na otimização de \vec{p} .

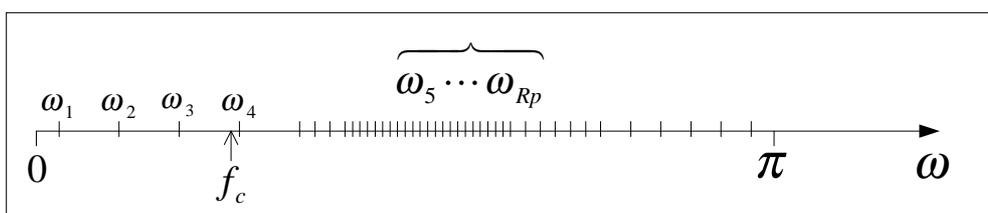


Figura 34 -Intervalo de frequência com distribuição não-uniforme

No entanto, cabe aqui ressaltar que nos projetos adotados neste trabalho o intervalo de frequências é distribuído de forma que f_c é exatamente uma das frequências de simulação e cada frequência harmônica possui uma frequência discreta correspondente para que possa ser aplicado um peso conveniente a ela.

3.3.5 Freqüência inicial de simulação (f_{Sim})

É a freqüência inicial de simulação de \bar{p} . Indica de forma indireta se daremos mais peso ao componente do filtro responsável pela planura na banda de passagem ou pela atenuação na banda de rejeição. Assim o conjunto de freqüências discretas utilizado para determinar \bar{p} na equação (145), ω_1 a ω_{Rp} , serão utilizadas a partir da freqüência f_{Sim} de forma uniformemente distribuída com uma densidade maior do que densidade de freqüências usadas de ω_1 a f_{Sim} .

Nos projetos de filtros realizados, a densidade de freqüências a partir de f_{Sim} é duas vezes maior do que antes desse intervalo. Isso está exemplificado na Figura 35.

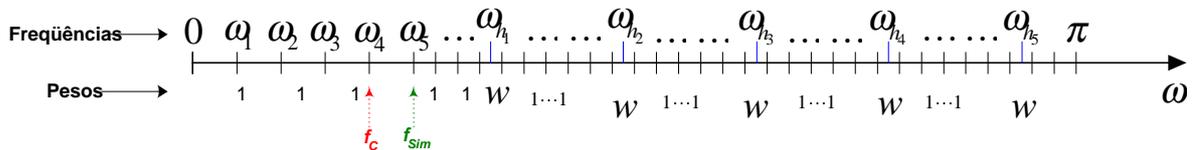


Figura 35 -Intervalo de freqüência usado na otimização WLS

A Figura 35 mostra a distribuição de freqüências utilizadas para a otimização WLS. Cabe aqui ressaltar que nos projetos adotados neste trabalho o intervalo de freqüências é distribuído de forma que f_c e f_{Sim} são exatamente freqüências de simulação e cada freqüência harmônica possui uma freqüência discreta correspondente para que possa ser aplicado um peso w a ela.

Este capítulo abordou os principais aspectos dos projetos de filtros WLS com a característica de máxima planura na origem e com os zeros mais próximos possíveis dos zeros da DFT. O próximo capítulo apresenta os melhores resultados de projetos realizados com esta técnica.

CAPÍTULO 4

4 RESULTADOS

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta os resultados da comparação entre os filtros propostos e o filtro de Fourier aplicado em conjunto com a janela triangular⁵. Vale lembrar que, conforme discutido no item 2.8, a janela triangular adotada para a simulação tem comprimento de dois ciclos de fundamental (32 amostras).

4.2 Conjunto de sinais de teste

A comprovação da qualidade do projeto de filtro adotado será avaliada, em última análise, pelo resultado da filtragem do sinal elétrico. Porém, para haver o preciso controle da variação de frequência no experimento, adotaremos sinais simulados. Tal procedimento não compromete os resultados, mesmo porque o sinal simulado possui variação de frequência maior que o sinal que normalmente é medido na rede elétrica.

São utilizados dois conjuntos de teste:

- a) Sinais senoidais de amplitude normalizada e com variação de frequência, cuja frequência fundamental varia de 59,5 a 60,5 Hz, com passo de 0,1 Hz e com tempo de duração correspondente de oito ciclos de fundamental;

⁵ A terminologia “janela triangular” será adotada neste capítulo para indicar que o sinal no tempo foi multiplicado pela janela triangular e então utilizou-se o filtro de Fourier para se obter os fasores.

- b) Sinais senoidais com a mesma variação de frequência indicada no item anterior, mas que possuem dois níveis e cuja variação da amplitude é brusca. O sinal terá a duração equivalente a 16 ciclos de fundamental, sendo que nos 8 primeiros ciclos sua amplitude é igual a metade do valor da amplitude dos 8 ciclos restantes. Neste caso, o sinal é normalizado em relação à amplitude do segundo trecho.

Então, cada um dos conjuntos acima citados terá 11 sinais distintos.

O conjunto do item (a) simula um sinal elétrico em regime permanente, enquanto o conjunto do item (b) simula um sinal elétrico em regime de falta, contendo um pronunciado transitório.

A Figura 36 mostra um exemplo dos dois tipos de sinais utilizados para a avaliação dos filtros. A figura, por questão de simplificação, só representa uma parte do sinal utilizado para teste.

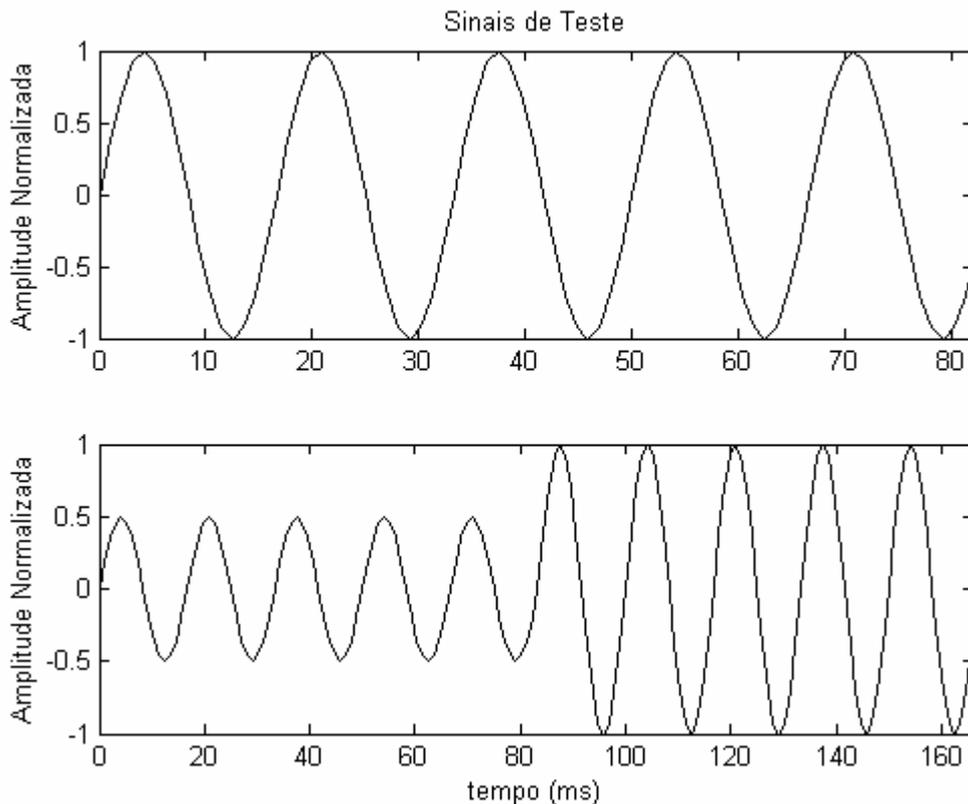


Figura 36 – Exemplo de sinal usado para teste dos filtros

Cada um dos sinais indicados acima é filtrado pelo filtro de Fourier com janela triangular, sendo que o resultado será o módulo e ângulo do fasor.

4.3 Figuras de mérito

Para a avaliação do cálculo dos fasores na simulação do regime permanente foram adotados dois valores de mérito: o erro médio quadrático do módulo (*MSEMod*) e o erro do valor médio do módulo (*MedMod*), que estão indicados, respectivamente, nas equações (163) e (164), abaixo.

$$MSEMod = \frac{\sum_{k=ORD}^L (\text{mod}(k) - V_M)^2}{L - ORD} \quad (163)$$

$$MedMod = \left\| \left(\frac{\sum_{k=ORD}^L \text{mod}(k)}{L - ORD} \right) - V_M \right\| \quad (164)$$

O parâmetro *MSEMod* é uma medida da oscilação no valor do módulo como visto na Figura 37, abaixo. O parâmetro *MedMod* mede o valor do erro médio entre o módulo calculado e o módulo exato do fasor.

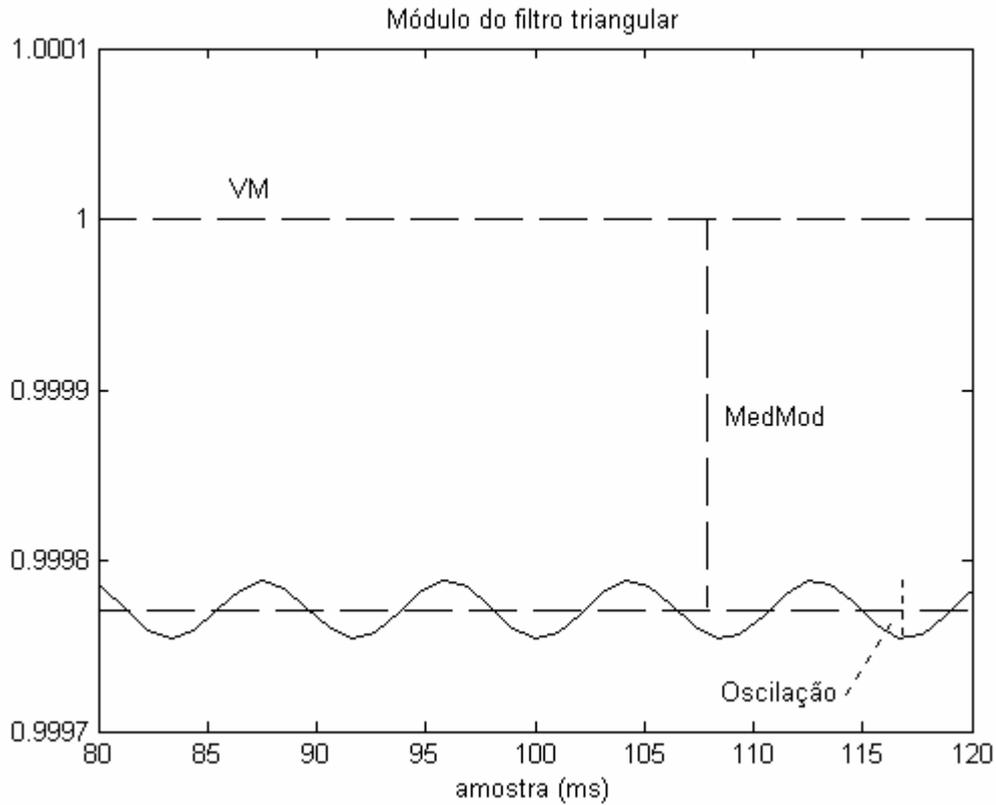


Figura 37 – Gráfico exemplificando a oscilação no módulo

Nas equações (163) e (164), $mod(k)$ é o valor instantâneo do módulo do fasor no instante k . V_M é o valor exato do módulo, que nas simulações é sempre normalizado (igual a um). ORD é a amostra a partir da qual é calculado o erro médio quadrático sem levar em conta o efeito do transitório do próprio filtro e L é a última amostra do sinal. Como os efeitos do transitório duram aproximadamente o comprimento do filtro, adotou-se $ORD = M - 1$, lembrando que a variável M representa o comprimento do filtro.

Para o regime transitório foi adotado o parâmetro de sobrepico [18], indicando o quanto os valores podem ocorrer acima do valor real. A equação (165) indica o fator de sobrepico, onde V_p é o valor máximo do módulo do fasor. Por convenção a medida é feita sempre na transição do nível mais baixo para o nível maior do sinal. Vale notar que FP calcula o valor de sobrepico para um sinal normalizado.

$$FP = \|V_p - 1\| \quad (165)$$

Este parâmetro é importante para evitar problema nas lógicas internas dos relés que podem interpretar essa oscilação do sinal como um valor realmente relevante. Portanto, esse problema é mais importante para processamento em tempo real e portanto para filtros com comprimentos de até dois ciclos de fundamental. A Figura 38 mostra o resultado do módulo calculado com um filtro que gera um sobrepico. A Figura 39 mostra um sinal sem sobrepico.

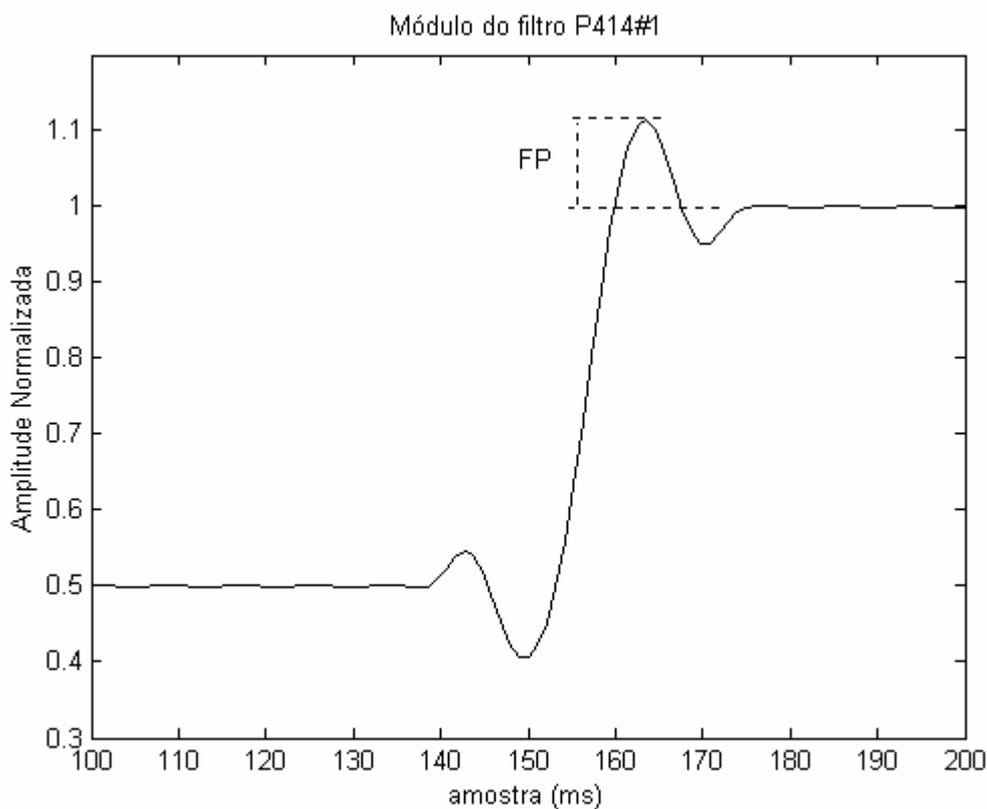


Figura 38 – Gráfico mostrando um sinal com sobrepico

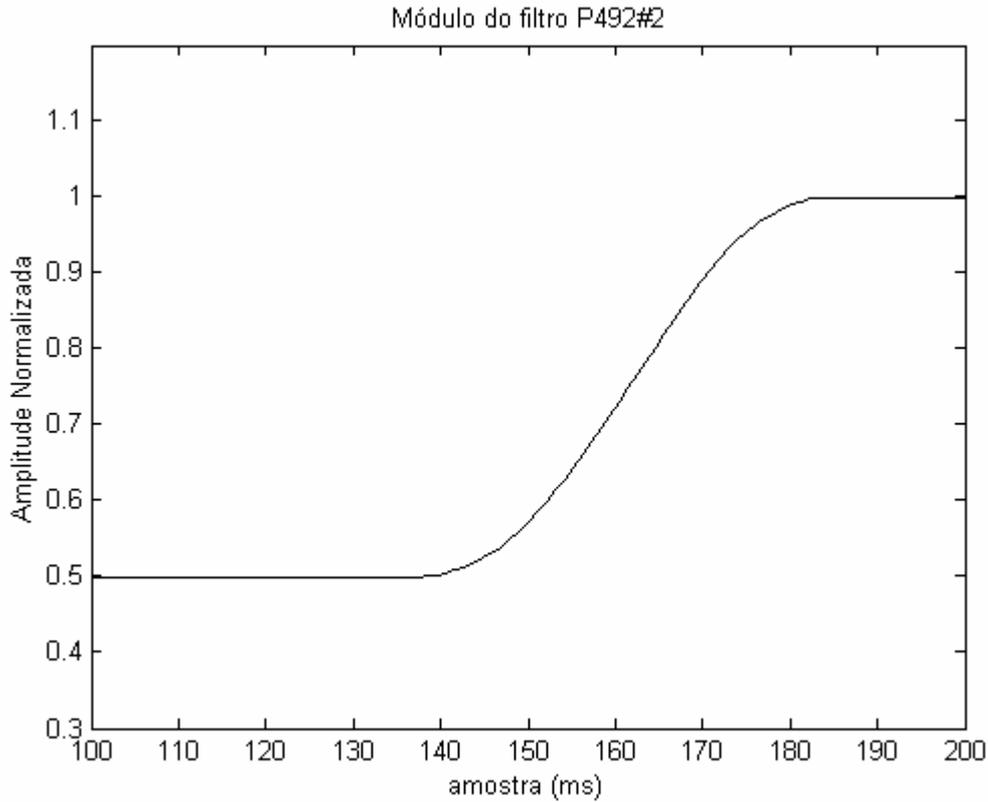


Figura 39 – Gráfico mostrando um sinal sem sobrepico

4.4 Projeto dos filtros

Inicialmente foram realizados os projetos dos filtros para um conjunto de parâmetros seguindo os seguintes passos:

- Foi escolhido um determinado comprimento de filtro no qual os outros parâmetros foram variados. Escolheram-se inicialmente filtros com comprimento de 17, 25, 33, 41, 49, 57 e 65 amostras, para que correspondessem aproximadamente a 0,5, 0,75, 1, 1,25, 1,5, 1,75 e 2 ciclos, respectivamente. Porém, filtros de 17 amostras não obtiveram melhores resultados do que os filtros com janela triangular.

- Para cada comprimento escolhido, o parâmetro K , ver equação (143), recebeu os valores 2, 4 e 6. Os filtros de tamanhos menores não obtiveram bons resultados para valores de K maiores do que dois. Isso acontece porque os filtros mais planos tendem a ter a banda de passagem da resposta em frequência maior, o que impede, para filtros de comprimento menor, que o primeiro zero do filtro coincida com o primeiro zero da DFT . Filtros com comprimentos maiores, por outro lado, podem utilizar um valor de K maior e além disso, a sua componente $Q(z)$ tem grau de liberdade suficiente para contribuir com a resposta em frequência, mesmo na banda de passagem do filtro.
- Os parâmetro f_{sim} (ver Figura 35, na seção 3.3.5) e f_c , ver equação (162), foram variados no intervalo de $0,01\pi$ rad a $0,20\pi$ rad cada. O peso das frequências harmônicas, variável $Peso$, ver equação (160), era inicialmente igual a 60. Este valor foi escolhido pois nos projetos no qual se incrementava o parâmetro $Peso$ e se mantinham fixos os outros parâmetros, os valores dos parâmetros de desempenho dos filtros obtinham uma melhora significativa em relação ao resultado da janela triangular. Porém, para valores superiores a 60, os resultados não apresentaram uma melhora significativa.
- Para os filtros gerados foram calculados os fatores de desempenho $MSEMod$ e $MedMod$, e foram escolhidos aqueles filtros cujos fatores de desempenho tivessem numa faixa compatível com os fatores de desempenho do filtro triangular. Para este trabalho, foram escolhidos inicialmente 92 filtros distintos.
- Para os 92 filtros selecionados previamente, f_{sim} e f_c foram mantidos constantes e $Peso$ foi incrementado de 0 a 150, visando obter-se a melhora dos seus parâmetros de desempenho. Desses filtros, alguns conseguiram melhorar significativamente os seus índices de desempenho, gerando uma família de 23 filtros maximamente planos.

- O comportamento dos filtros em relação ao *Peso* variava. Alguns filtros obtiveram uma melhora constante à medida em que o *Peso* aumentava. Mas outros obtiveram melhora até um determinado *Peso*, piorando depois disso. Ainda existiam outros filtros cujo *Peso* inicial (60) era muito alto, de forma que o seu desempenho em relação às figuras de mérito, da seção anterior, melhoravam quando *Peso* era reduzido.

Os filtros que foram selecionados para compor essa família têm índices melhores do que os índices da janela triangular.

4.4.1 Comprimento do Fourier

Cada projeto de filtro realizado compara a posição dos zeros da resposta em frequência do filtro proposto com a posição dos zeros da resposta em frequência do filtro de Fourier, inclusive no momento em que o filtro proposto é otimizado pelo *WLS*. As otimizações foram feitas comparando os zeros do filtro com a *DFT* de um ciclo (16 pontos), o que é equivalente ao filtro de Fourier com janela triangular de dois ciclos.

A Figura 40 abaixo compara a resposta em frequência do filtro P494#2 (vide Tabela 3) com a do filtro triangular.

A nomenclatura do filtro é da forma: *Pcck#n*, onde *cc* é o comprimento do filtro, *k* é o fator de planura *K* (seção 3.3.2) e *n* é o número do projeto.

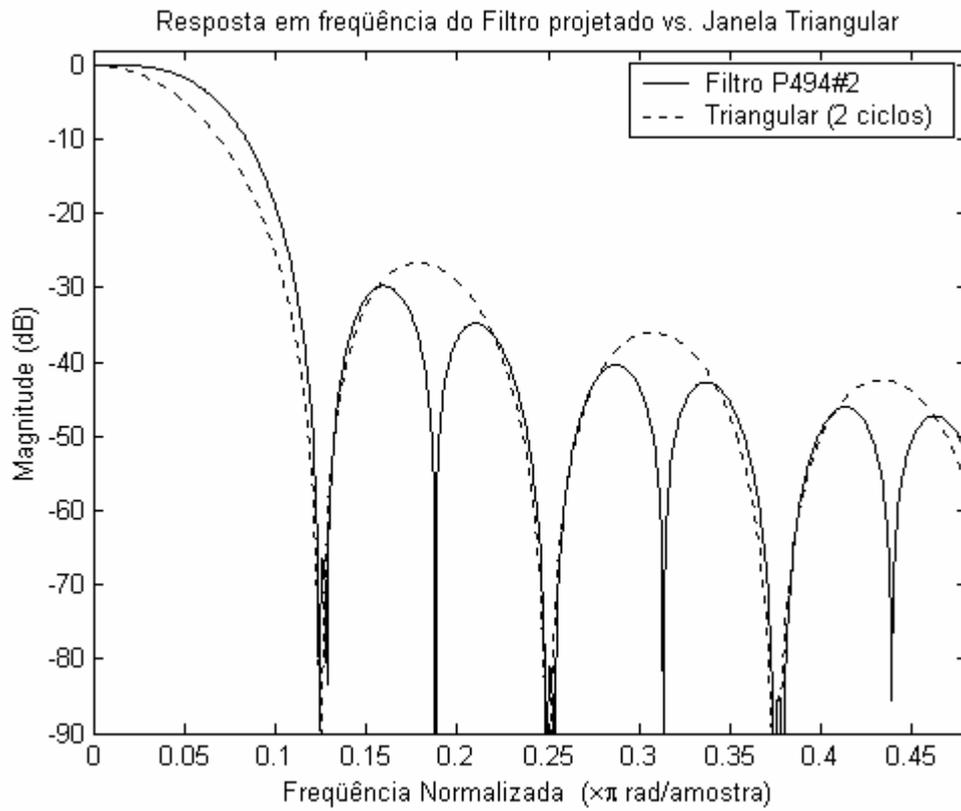


Figura 40 – Gráfico comparativo entre o filtro proposto a janela triangular

4.4.2 Família de filtros

Inicialmente foram geradas 92 variações de projeto dos filtros, sendo que, após a verificação dos parâmetros de desempenho ($MSEMod$ e $MedMod$), como descrito no início do item 4.4, esta quantidade caiu para 23. Serão esses os filtros adotados para a comparação do resultado com a janela triangular. A Tabela 3 mostra o conjunto de filtros maximamente planos que obtiveram menor oscilação em frequência e um valor médio do módulo do fasor mais próximo do valor real em comparação com o filtro de janela triangular, cujas figuras de mérito estão na expressas na Tabela 4.

A Tabela 3 relaciona os parâmetros K , f_c , f_{Sim} e $Peso$ com um código para identificar cada filtro particularmente. Conforme já explicado, a nomenclatura do filtro é da forma: $Pcck\#n$, onde cc é o comprimento do filtro, k é o fator de planura K (seção 3.3.2) e n é o número do projeto.

O item 7.2 do Apêndice contém a resposta ao impulso e o módulo da resposta em frequência de todos esses filtros. A Figura 41 mostra as figuras de mérito $MSEMod$ e $MedMod$ em função dos sinais aplicado a um filtro, $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$, porém, o item 7.3 do apêndice contém as mesmas figuras de mérito para todos os 23 sinais utilizados neste trabalho. Vale dizer que cada sinal é representado por sua frequência fundamental. Os valores de $MSEMod$, $MedMod$ e FP apresentados na Tabela 3 são obtidos pela média aritmética de $MSEMod(f)$, $MedMod(f)$ e $FP(f)$.

A Figura 42 faz a comparação entre os parâmetros de desempenho $MSEMod$, $MedMod$ e FP de cada filtro projetado com os parâmetros de desempenho obtidos para a janela triangular. Pode ser visto que os filtros projetados, em sua grande maioria, são melhores do que a janela triangular.

Tabela 3 – Características das famílias de filtros maximamente planos

Comprimento = 25							
Designação do Filtro	K	f_c/π (rad)	f_{Sim}/π (rad)	Peso	MSEMod	MedMod	FP
P252#1	2	0,08	0,13	63	1,68E-07	6,36E-04	9,88E-05

Comprimento = 33							
Designação do Filtro	K	f_c/π (rad)	f_{Sim}/π (rad)	Peso	MSEMod	MedMod	FP
P332#1	2	0,06	0,17	>150	1,37E-07	9,18E-04	7,44E-05

Comprimento = 41							
Designação do Filtro	K	f_c/π (rad)	f_{Sim}/π (rad)	Peso	MSEMod	MedMod	FP
P412#1	2	0,15	0,09	95	9,10E-08	6,88E-04	6,40E-02
P414#1	4	0,14	0,09	95	3,77E-08	5,94E-06	1,06E-01

Comprimento = 49							
Designação do Filtro	K	f_c/π (rad)	f_{Sim}/π (rad)	Peso	MSEMod	MedMod	FP
P492#1	2	0,035	0,11	60	7,96E-07	2,22E-03	1,91E-04
P492#2		0,09	0,09	>150	1,59E-07	9,88E-04	6,14E-02
P494#1	4	0,07	0,12		55	1,29E-08	3,73E-06
P494#2		0,08	0,08	55	2,30E-08	5,55E-06	2,70E-02
P496#1	6	0,11	0,18	130	8,42E-09	3,11E-06	5,43E-02
P496#2		0,12	0,16	85	3,56E-08	6,42E-06	5,63E-02

Comprimento = 57							
Designação do Filtro	K	f_c/π (rad)	f_{Sim}/π (rad)	Peso	MSEMod	MedMod	FP
P572#1	2	0,14	0,19	52	1,61E-07	8,07E-04	7,18E-02
P574#1	4	0,06	0,03	40	5,14E-08	9,53E-06	2,91E-02
P574#2			0,13	44	1,74E-08	5,48E-06	2,84E-02
P574#3			0,14	54	2,63E-08	6,65E-06	6,69E-02
P574#4		0,10	0,17	60	9,40E-09	3,83E-06	6,60E-02
P574#5			0,20	70	3,18E-09	1,92E-06	6,43E-02
P576#1	6	0,09	0,06	130	4,02E-09	2,46E-06	3,76E-02
P576#2			0,12	45	5,20E-08	9,62E-06	3,83E-02
P576#3			0,16	111	1,42E-08	4,81E-06	3,85E-02

Comprimento = 65							
Designação do Filtro	K	f_c/π (rad)	f_{Sim}/π (rad)	Peso	MSEMod	MedMod	FP
P654#1	4	0,05	0,19	80	9,71E-10	1,67E-06	2,73E-02
P654#2		0,15	0,20	45	7,37E-08	1,29E-05	6,93E-02
P656#1	6	0,08	0,09	68	1,89E-08	6,19E-06	3,59E-02
P656#2		0,15	0,10	70	5,78E-09	3,56E-06	5,97E-02

Tabela 4 – Parâmetros de desempenho do filtro triangular

MSEMod	MedMod	FP
1,66E-07	1,01E-03	8,51E-05

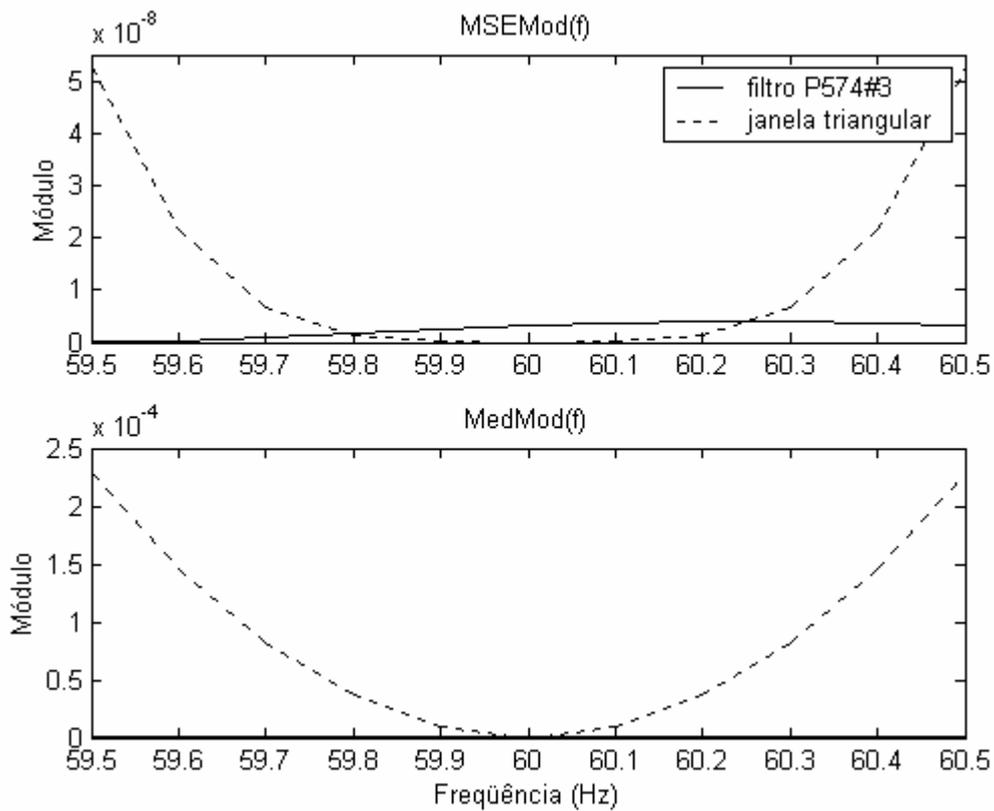


Figura 41 – Figuras de mérito $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$

A Figura 41, acima, ilustra o efeito da planura no resultado dos parâmetros de desempenho do filtro projetado. Por exemplo, o erro médio quadrático do módulo calculado pelo filtro se mantém relativamente constante em todas as frequências, enquanto o filtro triangular possui uma variação bem acentuada.

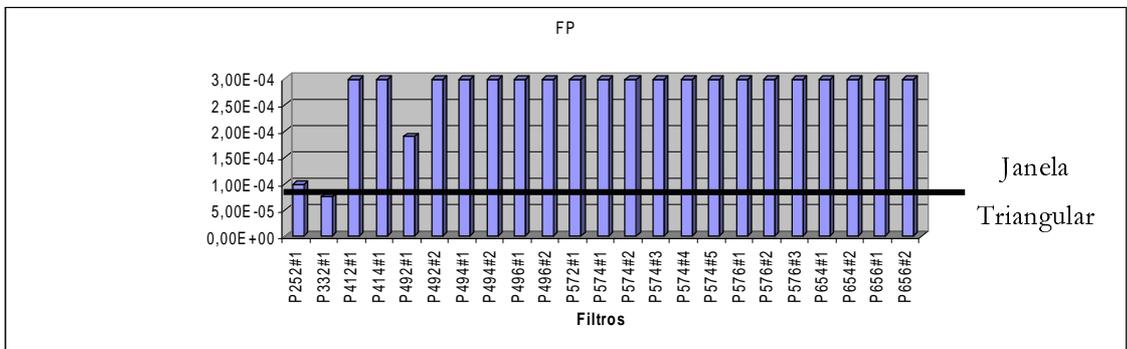
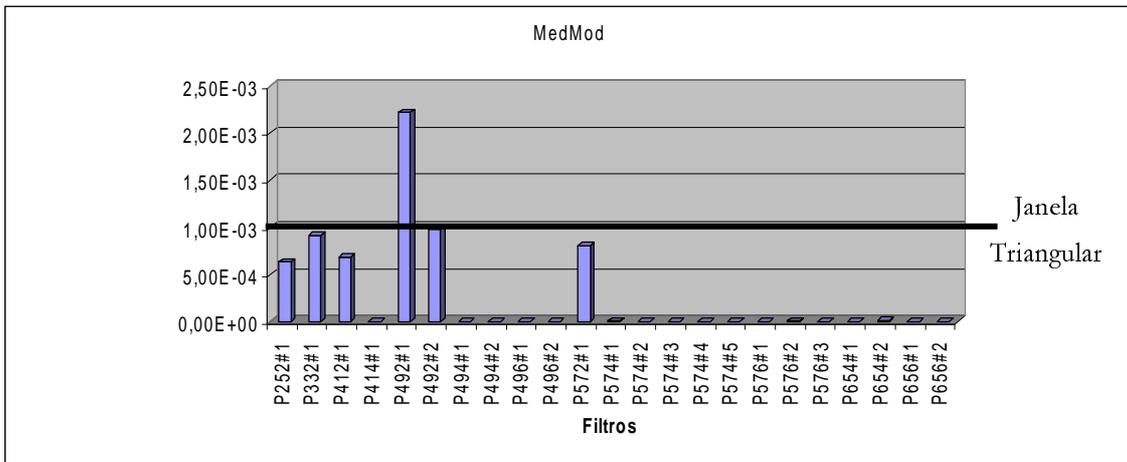
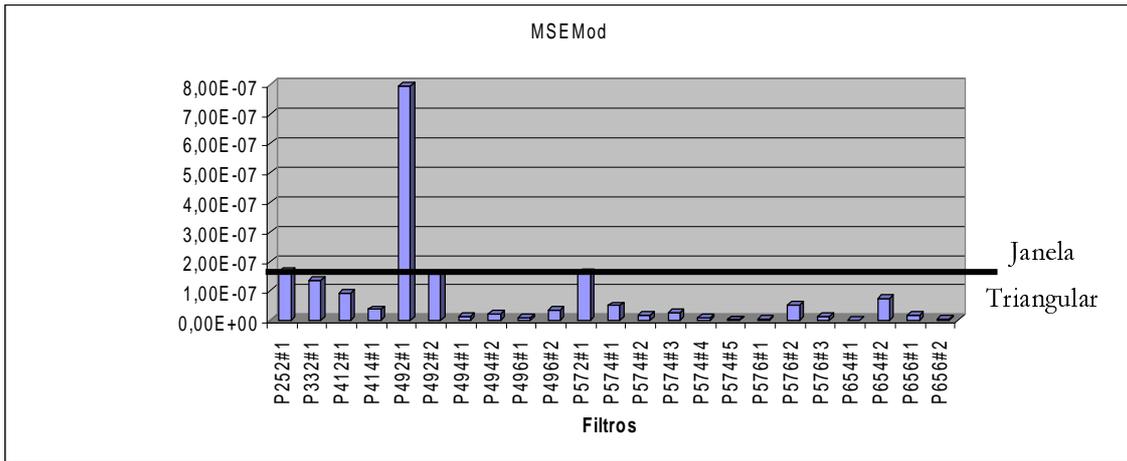


Figura 42 – Comparação das figuras de mérito de cada filtro projetado

A Figura 43 mostra, no gráfico superior, o módulo da resposta em frequência do filtro **P492#1** em comparação à janela triangular e, no gráfico inferior, a resposta do filtro no tempo a um sinal de 59,5 Hz. O sinal com esta frequência foi escolhido pois as frequências de 59,5 e 60,5 Hz causam erros bem maiores do que as frequências próximas de 60 Hz. Além disso, embora alguns filtros apresentem erros para frequências mais próximas de 60 Hz proporcionalmente maiores do que os erros

gerados pela janela triangular, o desempenho para frequências maiores é bem superior ao desempenho da janela triangular, de tal modo que a média dos parâmetros do filtro tem um resultado melhor do que a média dos parâmetros para a janela triangular. Como pode-se ver o filtro **P492#1**, exemplificado na Figura 43, tem um desempenho pior do que o filtro triangular, apesar da resposta em frequência na banda de rejeição do filtro projetado ser bem melhor do que a do filtro triangular.

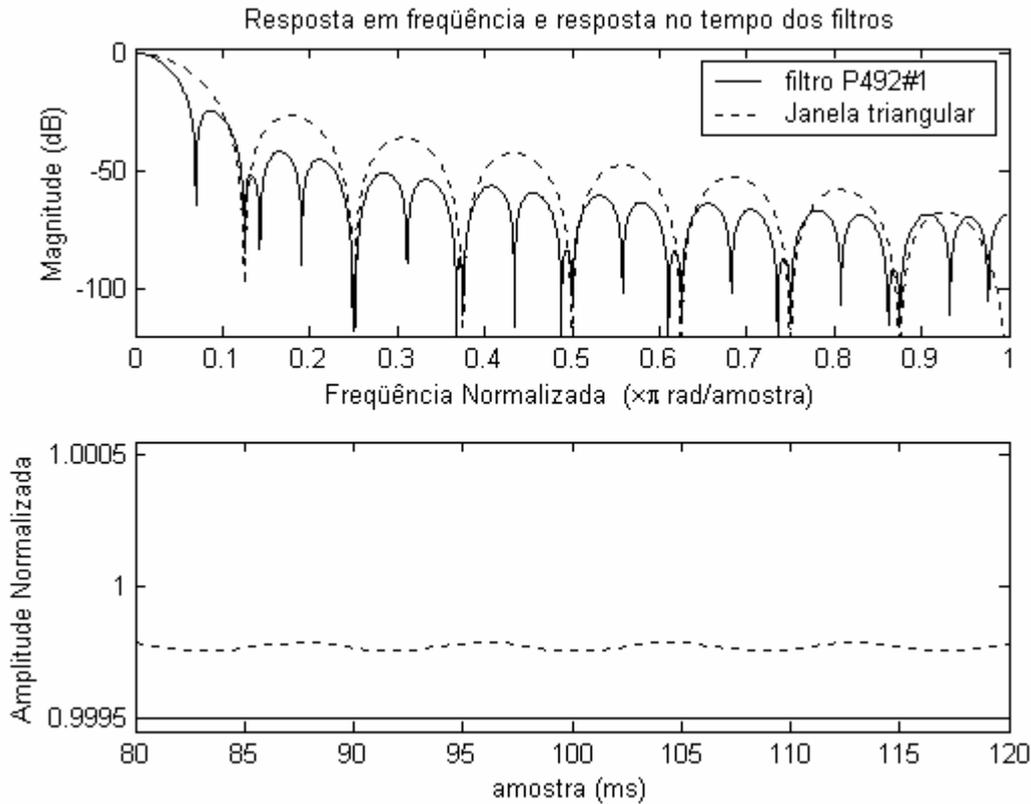


Figura 43 – Exemplo de um filtro cujos fatores de mérito são piores do que os fatores de mérito da janela triangular

Por outro lado, os filtros **P414#1** e **P412#1**, mostrados na Figura 44, apresentam características da banda de rejeição piores do que o outro filtro (**P492#1**). No entanto, a resposta em frequência desse filtro é mais plana na origem do que a resposta em frequência do filtro triangular e os seus zeros coincidem com os zeros do Fourier. Daí o melhor desempenho para efeito dessa análise do filtro no tempo.

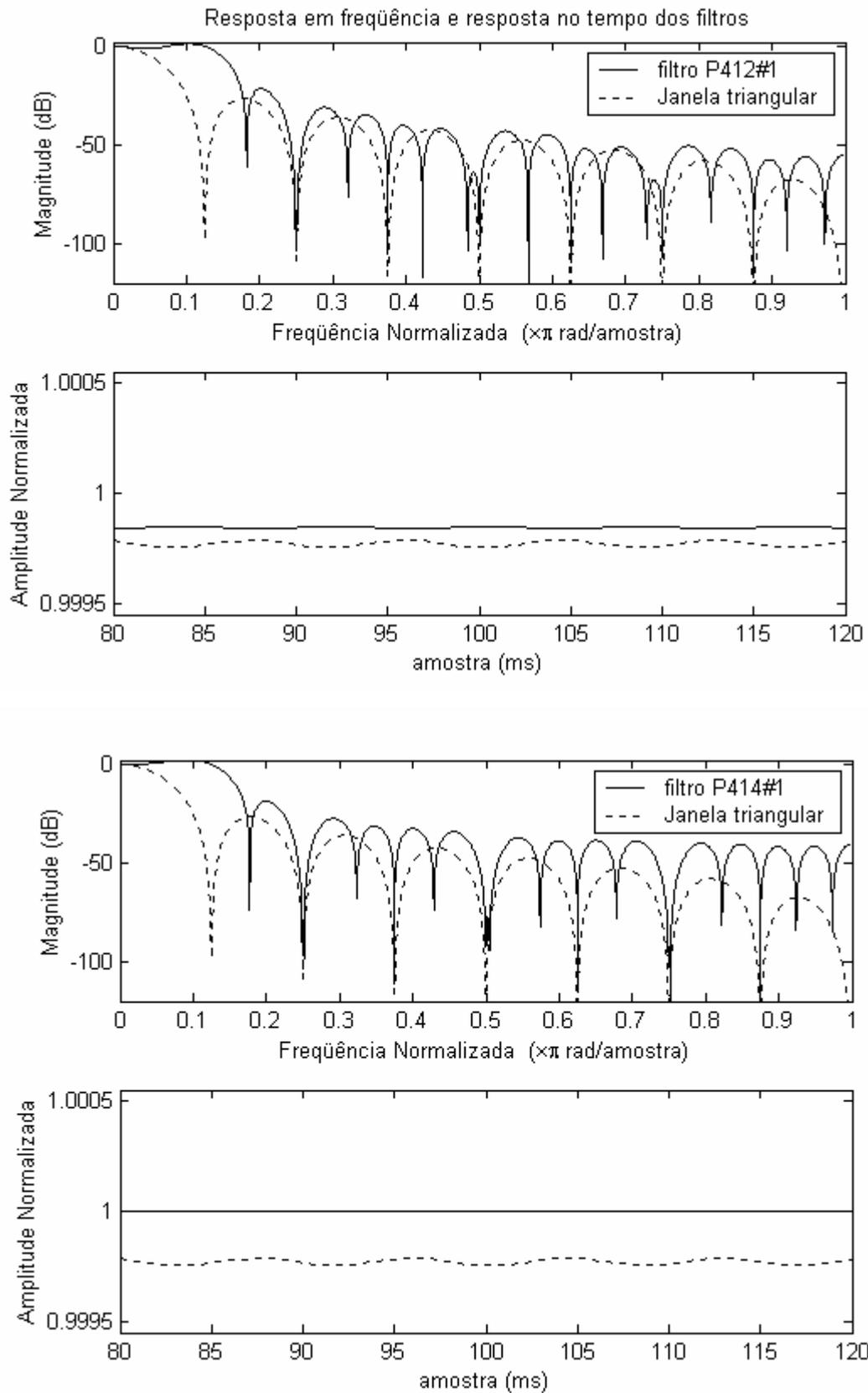


Figura 44 – Exemplo de dois filtros cujos fatores de mérito são melhores do que os fatores de mérito da janela triangular

Neste capítulo, conseguiu-se demonstrar que é possível projetar filtros, utilizando a técnica do *WLS*, com desempenho superior ao da janela triangular que, conforme mostrado no Capítulo 2, tem um melhor desempenho em termos de planura em comparação a outras janelas.

Conforme explicado no Capítulo 2, o comprimento da janela triangular deve ser equivalente a pelo menos dois períodos da fundamental para que tenha o resultado esperado no cálculo dos fasores. Porém, conseguimos filtros de vários tamanhos, inclusive com comprimento inferior ao da janela triangular e desempenho melhor do que o seu.

O próximo capítulo contém a conclusão geral do trabalho e propõe trabalhos futuros a serem seguidos nesta linha de pesquisa.

CAPÍTULO 5

5 CONCLUSÃO

Os mecanismos de proteção e controle do sistema elétrico necessitam que os algoritmos de processamento digital de sinais sejam mais eficientes mesmo em condições de operação não esperadas.

O presente trabalho abordou o problema do cálculo de fasores, analisando o filtro de Fourier e propondo uma família de filtros que reduzem os efeitos do vazamento espectral por serem maximamente planos na banda de passagem, que foram otimizados para que os seus zeros coincidisse com os zeros do filtro de Fourier. Os resultados apresentados foram encorajadores e a técnica utilizada mostrou-se bastante versátil, podendo ser aplicada a vários critérios de minimização.

O capítulo 1 fez uma introdução a oscilografia de curta e longa duração, explicando as suas principais diferenças. Também foi introduzido o problema das medidas fasórias aplicadas à análise de perturbações.

O capítulo 2 apresenta o filtro de Fourier e suas características principais e faz uma análise minuciosa do filtro de Fourier e da sua utilização para o cálculo de fasores, assim como de suas limitações no domínio da frequência, tratando do problema do vazamento espectral sob um ponto de vista distinto da abordagem tradicionalmente adotada. Também é abordada a técnica da aplicação de janelas no tempo para a redução de efeitos indesejáveis em frequência. Foram feitas simulações da aplicação da técnica a alguns sinais para avaliar o efeito das janelas e compará-los com a resposta do filtro de Fourier. Foi concluído que a janela triangular possui melhor desempenho do que as outras janelas em relação à amplitude dos erros de magnitude dos fasores com o deslocamento da janela, para o caso em que a frequência fundamental varia. Isso acontece pois a janela triangular possui os zeros nas mesmas posições dos zeros da janela retangular e é mais plana na origem.

O capítulo 3 desenvolve o projeto dos filtros cujos protótipos são maximamente planos na origem da resposta em frequência e que são modulados para a frequência fundamental. Isso reduz o efeito do vazamento espectral causado quando ocorre um descasamento entre a frequência da rede e a frequência de amostragem do sinal. É feita a análise teórica do filtro e são apresentados detalhes do projeto usando *WLS*. Os parâmetros dos filtros são explicados e relacionados de forma a obter um projeto eficiente.

O capítulo 4 apresenta o resultado dos projetos de filtros realizados e simulados utilizando sinais com variação de frequência e comparados com os resultados da janela triangular. É gerada uma família de filtros que são classificados pelo comprimento e pelo fator de planura. Foram adotados basicamente dois parâmetros para a avaliação do desempenho dos filtros: O erro médio quadrático do módulo e o erro do valor médio do módulo do fasor.

5.1 Trabalhos Futuros

O processamento digital de sinais aplicado ao sistema de potência elétrico é uma área do conhecimento ainda hoje pouco explorada, apesar da quantidade crescente de trabalhos que surgem a cada dia. Portanto a possibilidade de pesquisa nesta área é bem ampla:

- a) Utilização de outros critérios de minimização de erros para solucionar outros problemas, como, por exemplo, a presença da oscilação sub-síncrona;
- b) Estudo e aplicação de técnicas de processamento de sinais para qualidade de energia [33] [34];
- c) Análise da influência do cálculo de fasores nos algoritmos de localização de faltas [24] [36]-[38];

- d) Estudo de técnicas de determinação fasorial para oscilografia de longa duração [35];
- e) Estudo de novas heurísticas, incluindo neste estudo a relação entre algoritmos de inteligência artificial, com redes neurais, sistemas especialistas para a melhora nos cálculos fasoriais [1]-[3] [31] [32] [36].

Ainda convém analisar como a nova técnica se comporta em sinais elétricos que possuem distorção harmônica total considerável, o que sugere que o *WLS* tenderia a ter melhores resultados do que os obtidos pela janela triangular ou outra janela clássica.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] RODRIGUES, M. A. M., FIGUEIREDO, M. V. F., DINIZ, S. S., et al., “Aplicação de técnicas de inteligência artificial na análise automática de perturbações no sistema elétrico”. **I Seminário Nacional de Controle e Automação Industrial, Elétrica e de Telecomunicações**, Salvador, BA - novembro 1999.
- [2] RODRIGUES, M. A. P., RODRIGUES, M. A. M., MIRANDA, A. L. L., et al., “Sistema para análise automática de oscilogramas na Light”. **VII Seminário Técnico de Proteção e Controle (VII STPC)**, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 22-27 junho 2003.
- [3] RODRIGUES, M. A. M., MANTUANO FILHO, S., “Ferramentas computacionais tradicionais e inteligentes para análise de perturbações em sistemas elétricos de potência”. **XIV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica - SNPTEE** (1997 - Brasil), CIGRÉ.
- [4] ONS, **Procedimentos de Rede**, Módulo 11 - Proteção e Controle, Revisão 0, 07/07/2000.
- [5] MANTUANO FILHO, S., RODRIGUES, M. A. M., “Impacto da tecnologia digital na análise de perturbações em sistemas elétricos de potência”, In Anais **IV Seminário Técnico de Proteção e Controle** (1993 - Brasil), CIGRÉ, pp. 21-27.
- [6] MOTA JÚNIOR, J. B., **Uma Avaliação de Algoritmos Clássicos de Filtros de Fourier Utilizados em Relés de Distância**. Dissertação de M. Sc., Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, 2002.
- [7] PHADKE, A. G., THORP, J. S., **Computer Relaying for Power Systems**. Great Britain, John Wiley & Sons Inc., 1988.

- [8] SCHWEITZER III, E. O., HOU, D., “Filtering for protective relays”. **47th Annual Georgia Tech Protective Relaying Conference**, Atlanta, Georgia, USA, April 28-30 1993.
- [9] PEREIRA, C., E CRUZ, F. C., “Análise do comportamento estático e dinâmico dos filtros digitais de mínimos quadrados na proteção de linhas de transmissão”. **XV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (XV SNPTEE)**, Foz do Iguaçu, PR, Brasil, 17-22 outubro 1999.
- [10] SENGER, E. C., DE SANTANA, N. N., “Pré-filtragem da componente aperiódica exponencial para os algoritmos utilizados em relés de distância”. **VI Seminário Técnico de Proteção e Controle (VI STPC)**, Natal, RN, Brasil, 27 setembro a 2 outubro 1998.
- [11] DINIZ, P. S. R., da SILVA, E. A. B., NETTO, S. L., **Digital Signal Processing: System Analysis and Design**. Cambridge University Press, 2002.
- [12] YANG, J. Z., LIU, C. W., “A Precise Calculation of Power System Frequency and Phasor”, **IEEE Transaction on Power Delivery**, v. 15, n. 2, pp. 494-499, Apr. 2000.
- [13] KEZUNOVIĆ, M., SPASOJEVIĆ, P., PERUNIČIĆ, B., “New Digital Signal Processing Algorithms for Frequency Deviation Measurement”, **IEEE Transaction on Power Delivery**, v. 7, n. 2, pp. 1563-1573, Jul. 1992.
- [14] HIDALGO, R. M., FERNANDEZ, J. G., RIVERA, R. R., et al., “A Simple Adjustable Window Algorithm to Improve FFT Measurements”, **IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement**, v. 51, n. 1, pp. 31-36, Feb. 2002.
- [15] ROSOŁOWSKI, E., IZYKOWSKI, J., KASZTENNY, B., “A new half-cycle adaptive phasor estimator immune to the decaying DC component for digital protective relaying”. Disponível em: <http://zas.ie.pwr.wroc.pl/er_naps00.pdf>. Acesso em: 21 out. 2004.

- [16] MIRANDA, A. L. L., RODRIGUES, M. A. M., DA SILVA, E. A. B. et al., “Cálculo de fasores com taxas não múltiplas da frequência fundamental”. **VII Seminário Técnico de Proteção e Controle (VII STPC)**, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 22-27 junho 2003.
- [17] MARPLE JR., S. L., **Digital Spectral Analysis with Application**. Prentice-Hall, 1987.
- [18] BENMOUYAL, G., “Removal of DC-Offset in Current Waveforms Using Digital Mimic Filtering”, **IEEE Transaction on Power Delivery**, v. 10, n. 2, pp. 621-630, Apr. 1995.
- [19] MASON, C. R., **The Art & Science of Protective Relaying**. John Wiley & Sons Inc., 1956.
- [20] BRONSON, R., **Matrizes**. McGraw-Hill, 1993.
- [21] BRITO, H. G. F., **Técnicas de Filtragem Digital Aplicadas à Proteção de Sistemas Elétricos de Potência**. Dissertação de M.Sc., Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, 1996.
- [22] DAVID, P. A. M. S., **Medição Digital de Grandezas Fasoriais e Modais com Aplicação na Localização de Faltas em Linhas de Transmissão C.A.**. Dissertação de M.Sc., Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1995.
- [23] BENMOUYAL, G., SCHWEITZER, E. O., GUSMÁN, A., “Synchronized phasor measurement in protective relays for protection, control, and analysis of electric power systems”. **29th Annual Western Protective Relaying Conference**, Spokane, Washington, USA, October 22-24 2002.

- [24] ADAMIÁK, M. G., ALEXANDER, G. E., PREMERLANI, W., “Advancements in adaptive algorithms for secure high speed distance protection”. **XV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (XV SNPTEE)**, Foz do Iguaçu, PR, Brasil, 17-22 outubro 1999.
- [25] OPPENHEIM, A. V., SCHAFER, R. W., **Discrete-Time Signal Processing**. Prentice-Hall, 1987.
- [26] VAINIO, O., “Digital Filtering for Robust 50/60 Hz Zero-Crossing Detectors”, **IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement**, v. 45, n. 2, pp. 426-430, Feb. 2002.
- [27] AGREŽ, D., “Frequency estimation of the non-stationary signals using interpolated DFT”. **IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference**, Anchorage, AK, USA, 21-23 May 2002.
- [28] SCHOUKENS, J., ROLAIN, Y., SIMON, G. et al., “Fully Automated Spectral Analysis of Periodic Signals”. **IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference**, Anchorage, AK, USA, 21-23 May 2002.
- [29] ZIVANOVIC, M., CARLOSENA, A. “Nonparametric Spectrum Interpolation Methods: a Comparative Study”, **IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement**, v. 50, n. 5, pp. 1127-1132, Oct. 2001.
- [30] SCHOUKENS, J., “The Interpolated Fast Fourier Transform: A Comparative Study”, **IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement**, v. 41, n. 2, pp. 226-232, Apr. 1992.
- [31] SILVA, S. S. B., “Utilização de técnicas de inteligência artificial para análise de ocorrências no sistema elétrico”. **V Simpósio de Automação de Sistemas Elétricos (V SIMPASE)**, Recife, PE, Brasil, 2002.

- [32] OLESKOVICZ, M., COURY, D. V., DE CARVALHO, A. C. P. F., “Artificial neural network applied to power system protection”, **V Simpósio Brasileiro de Redes Neurais**, Belo Horizonte, MG, Brasil, 1998.
- [33] KEZUNOVIĆ, M., RIKALO, I., PERUNIČIĆ, B., C. et al., “Automated power quality assessment using DFR data”, **Precise Measurements in Power Systems and Fault Disturbance Analysis Conference**, Arlington, Texas, November 1996.
- [34] HEYDT, G. T., FJELD, P. S., LIU, C. C. et al., “Application of the Windowed FFT to Electric Power Quality Assessment”, **IEEE Transaction on Power Delivery**, v. 14, n. 4, pp. 1411-1416, Out. 1999.
- [35] GOMES, P., DOS SANTOS, M. G., ORDACGI F., J. M. et al., “Análise da necessidade de implantação de registradores de perturbações de longa duração no Brasil”. **XIV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (XIV SNPTEE)**, Junho 1998.
- [36] HUANG, Y. C., YANG, H. T., HUANG, C. L., “Developing a New Transformer Fault Diagnosis System through Evolutionary Fuzzy Logic”, **IEEE Transaction on Power Delivery**, v. 12, n. 2, pp. 761-767, Apr. 1997.
- [37] DA SILVEIRA, E. G., PEREIRA, C., “Localização de faltas em linhas de transmissão utilizando dados de tensão e corrente de um terminal”. **XVI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (XVI SNPTEE)**, Campinas, SP, Brasil, 21-26 outubro 1999.
- [38] SOLLERO, R. B., RODRIGUES, M. A. M., BIANCO, J. C. N. et al., “Localização de faltas em sistemas de transmissão a partir de sinais oscilografados em ambas as extremidades da linha”. **XVI Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (XVI SNPTEE)**, Campinas, SP, Brasil, 21-26 outubro 1999.

7 APÊNDICES

7.1 Filtragem de Fourier usando janelas

Este anexo mostra os gráficos dos resultados de módulo e ângulo da filtragem de Fourier com as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos, conforme o item 2.8 para sinais de frequências de frequência de 59,7, 60,1 e 60,5 Hz.

Nas figuras abaixo são mostrados os resultados para sinais com frequência de 59,7 Hz:

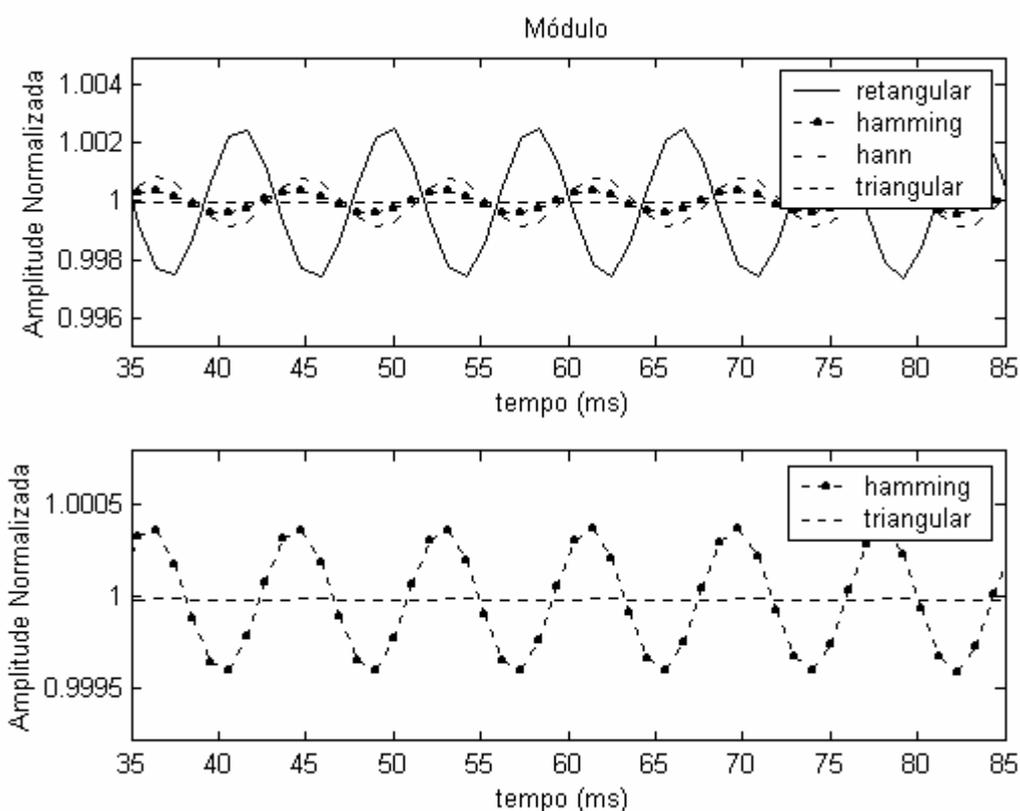


Figura 45 - Resultado do módulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 59,7 Hz

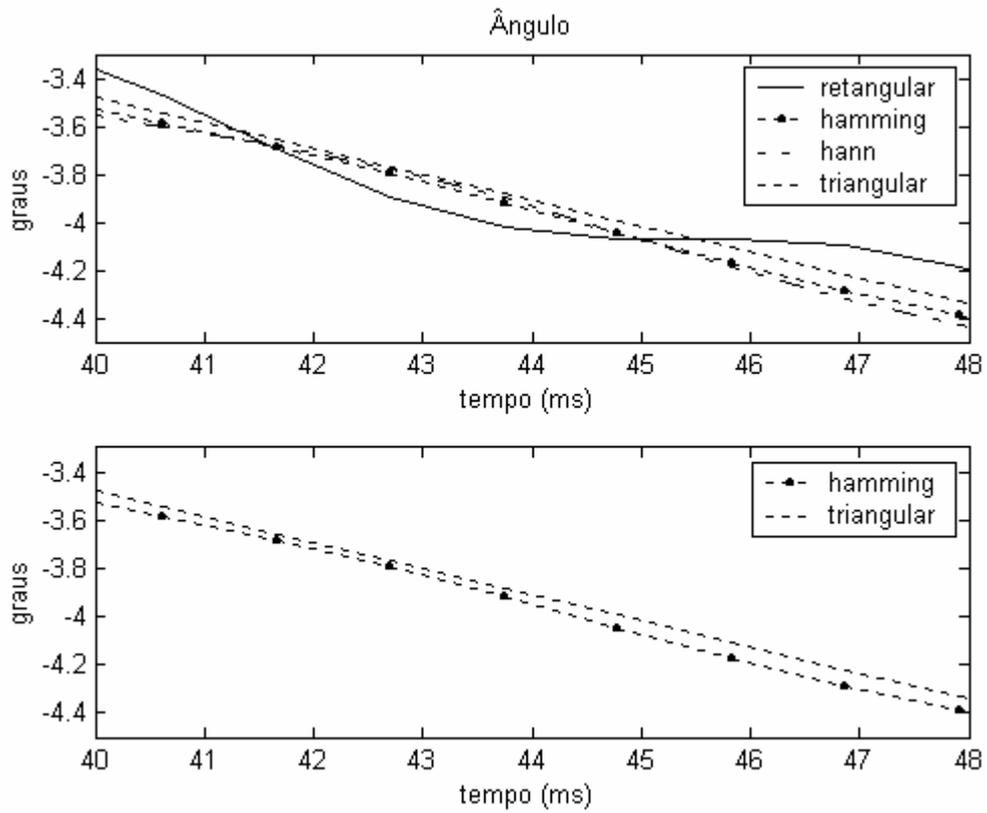


Figura 46 - Resultado do ângulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 59,7 Hz

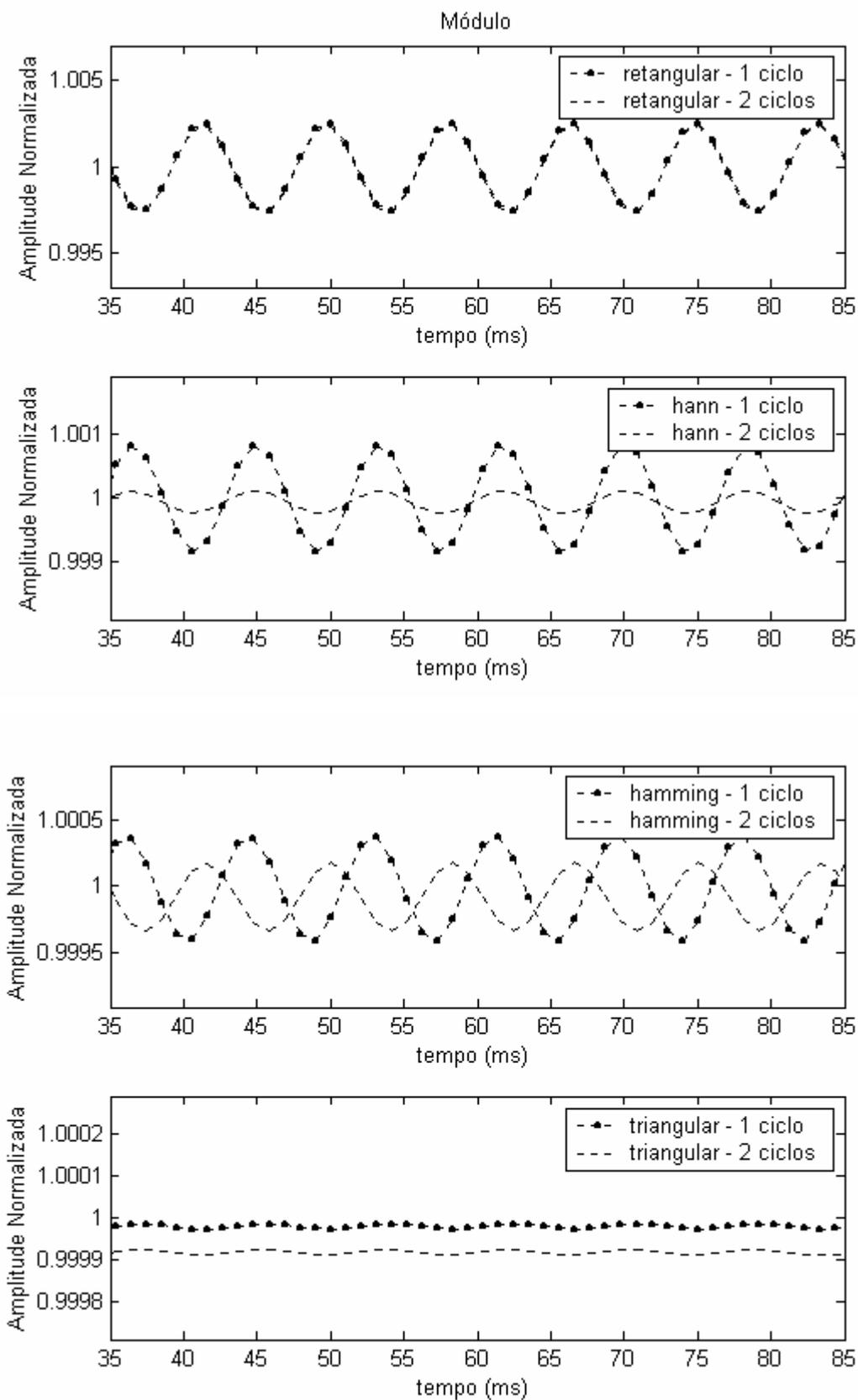


Figura 47 - Comparação do módulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 59,7 Hz

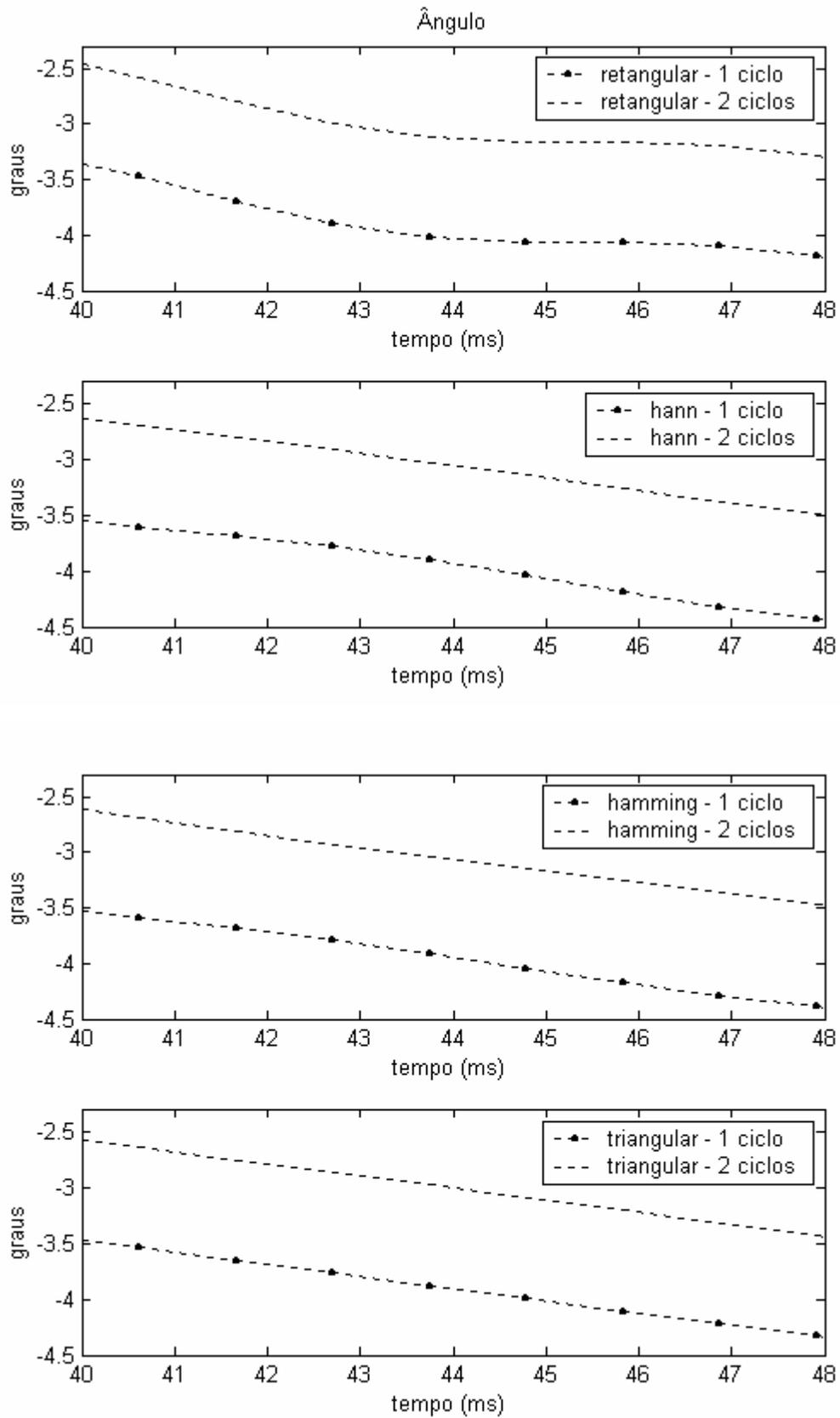


Figura 48 - Comparação do ângulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 59,7 Hz

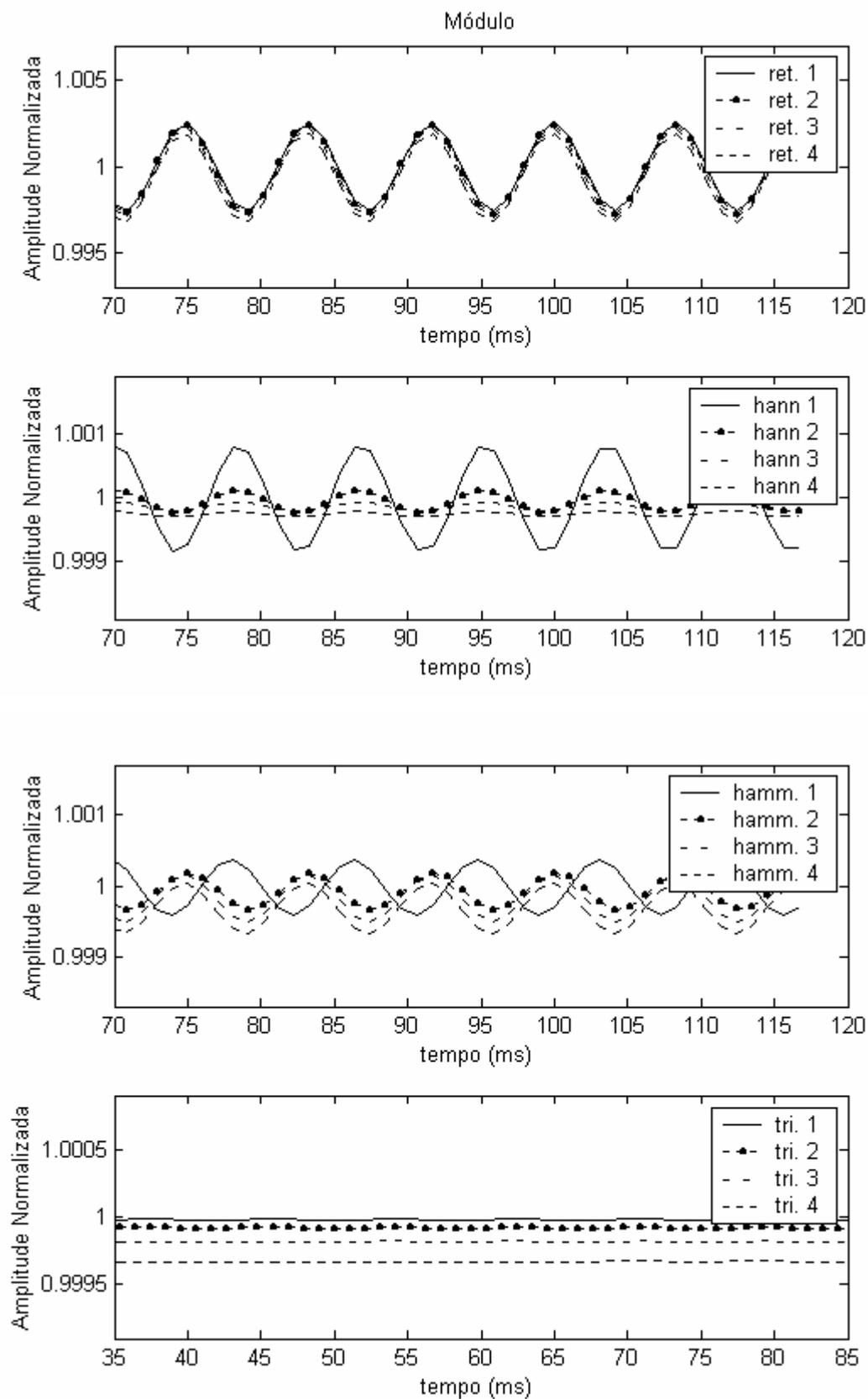


Figura 49 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 59,7 Hz

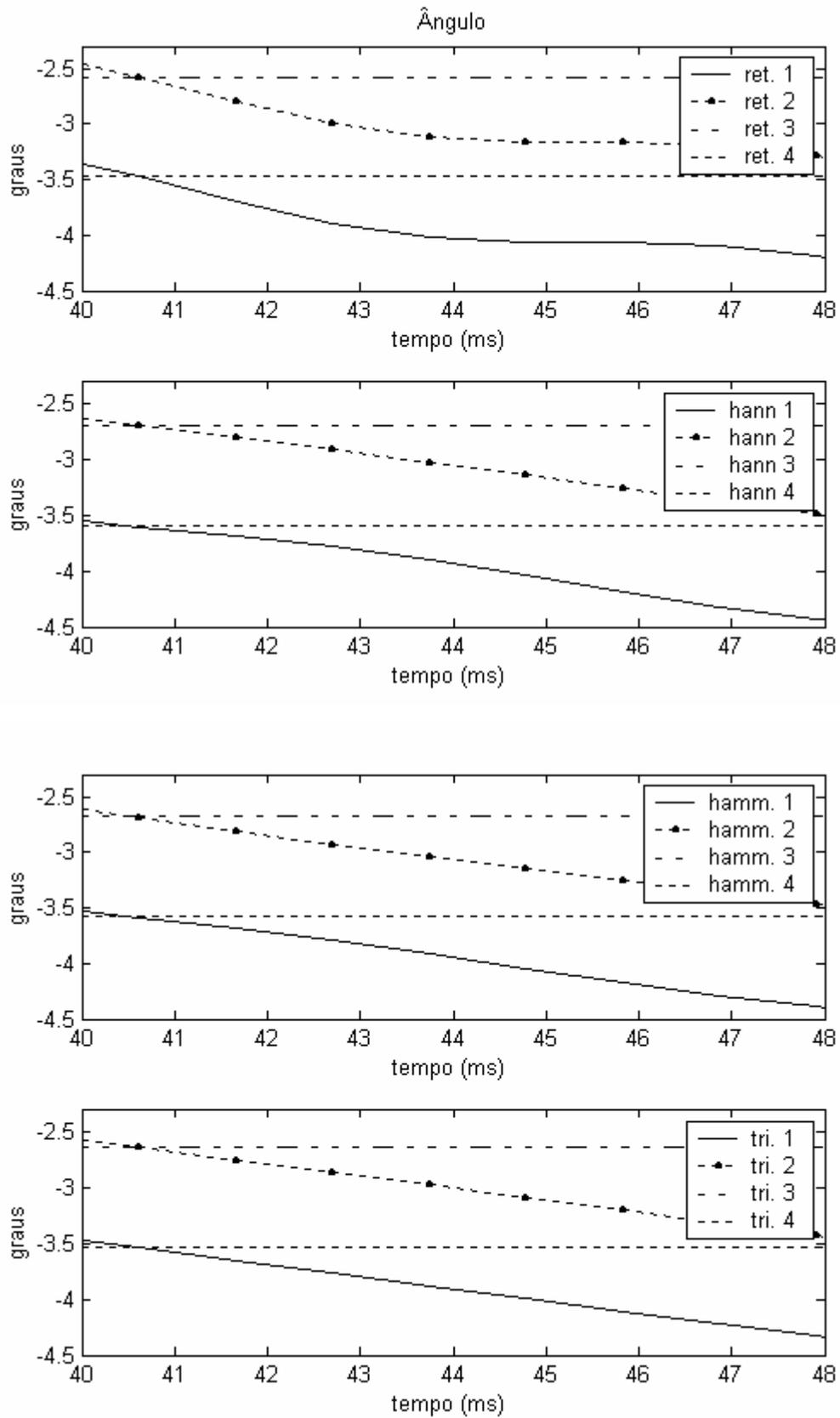


Figura 50 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 59,7 Hz

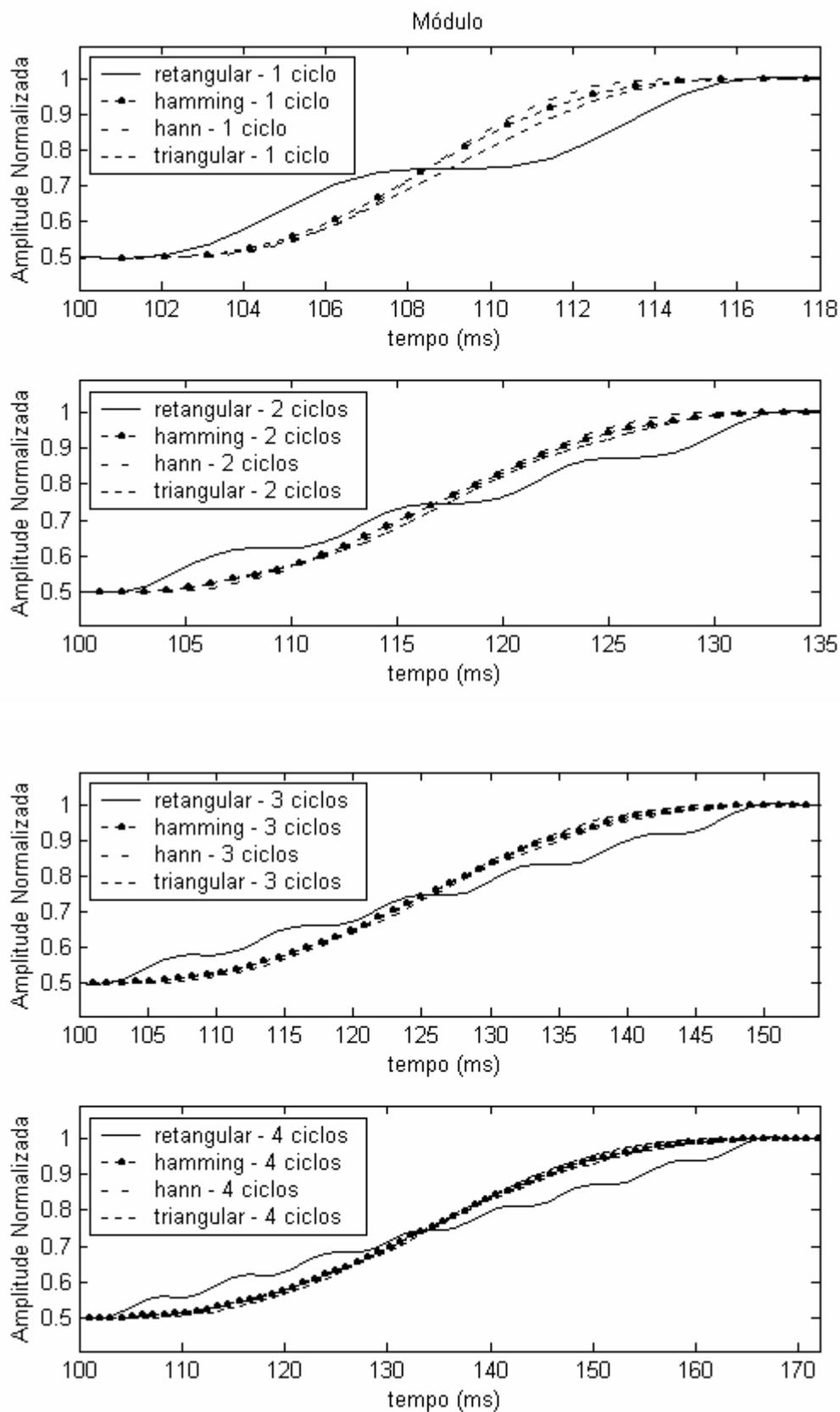


Figura 51 – Resultado do módulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 59,7 Hz

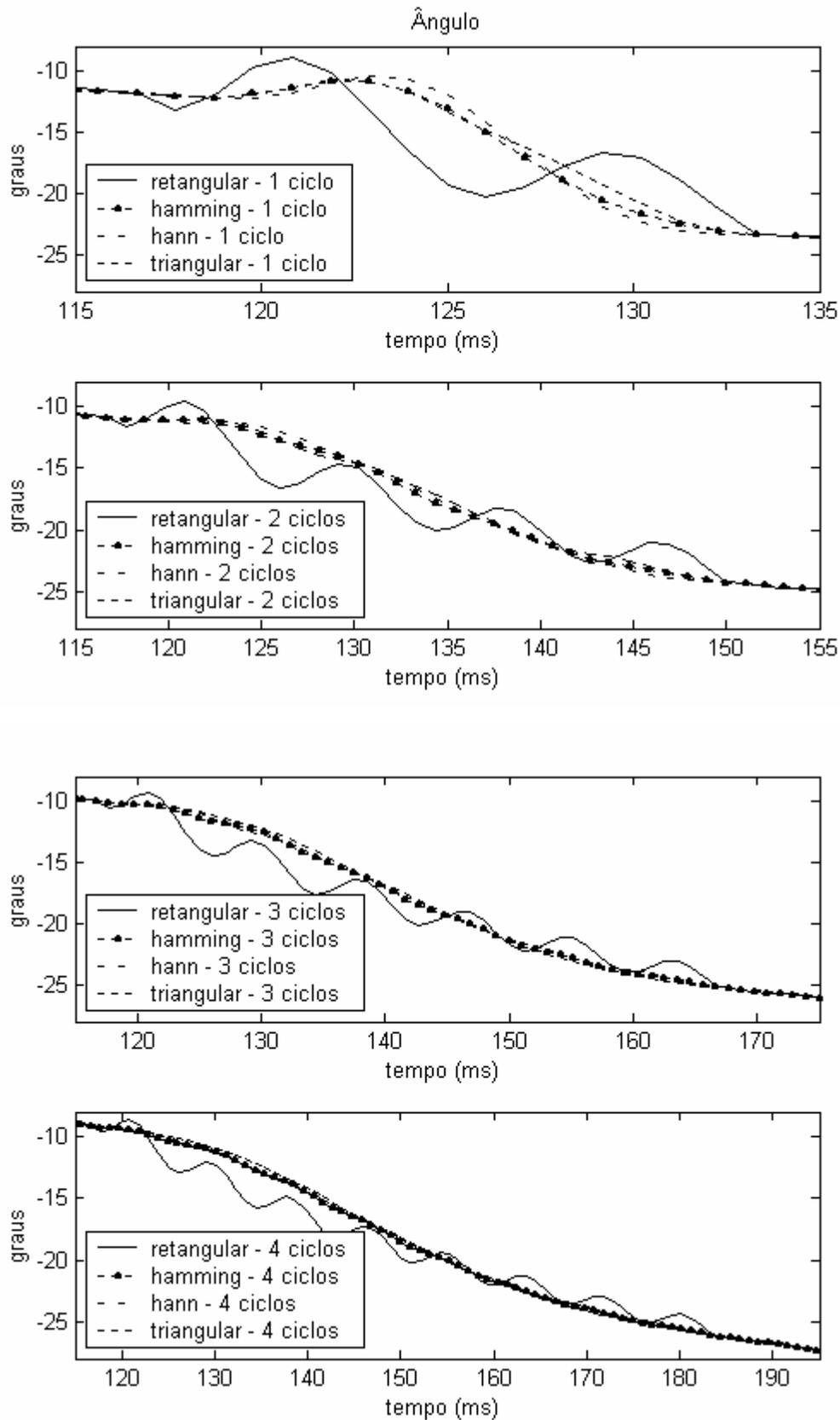


Figura 52 – Resultado do ângulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 59,7 Hz

Nas figuras abaixo são mostrados os resultados para sinais com frequência de 60,1 Hz:

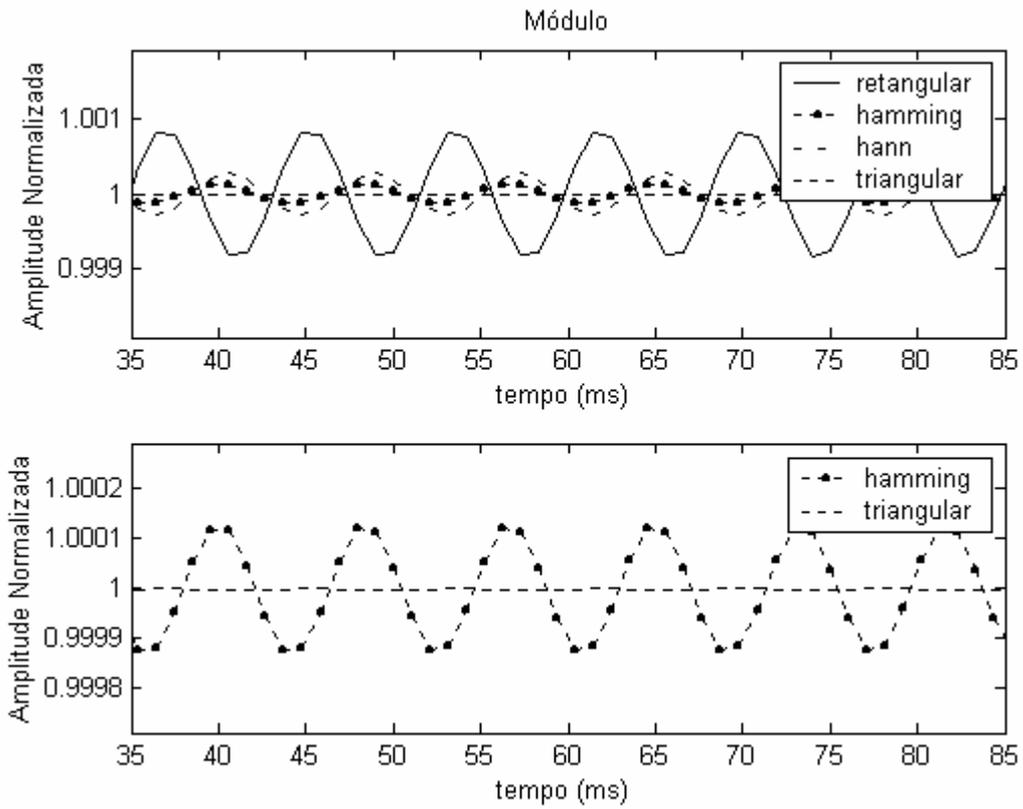


Figura 53 - Resultado do módulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 60,1 Hz

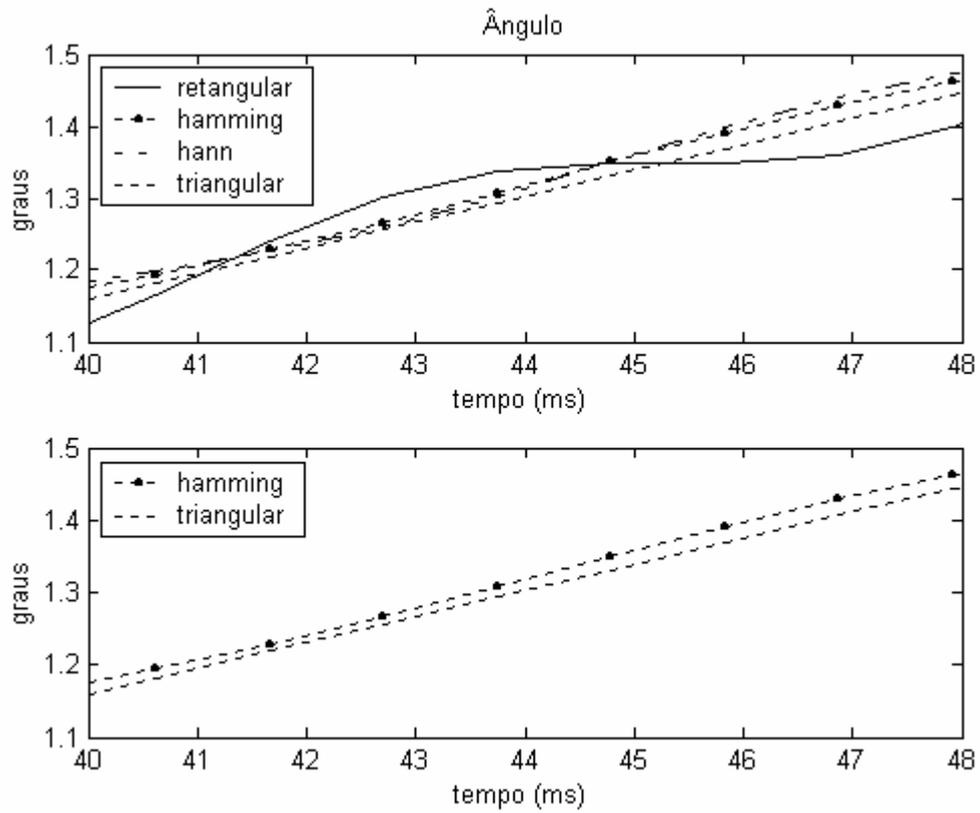


Figura 54 - Resultado do ângulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 60,1 Hz

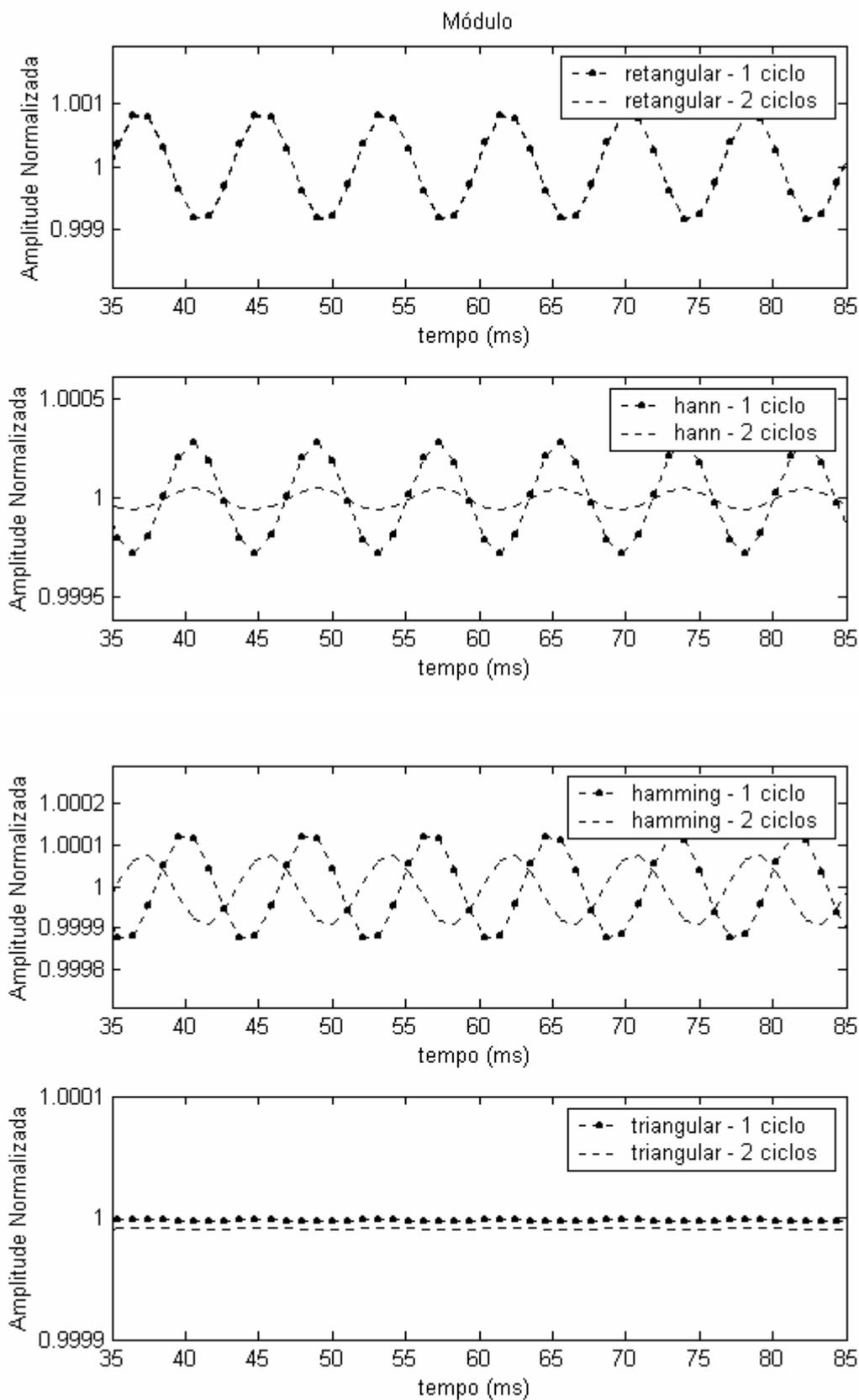


Figura 55 - Comparação do módulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 60,1 Hz

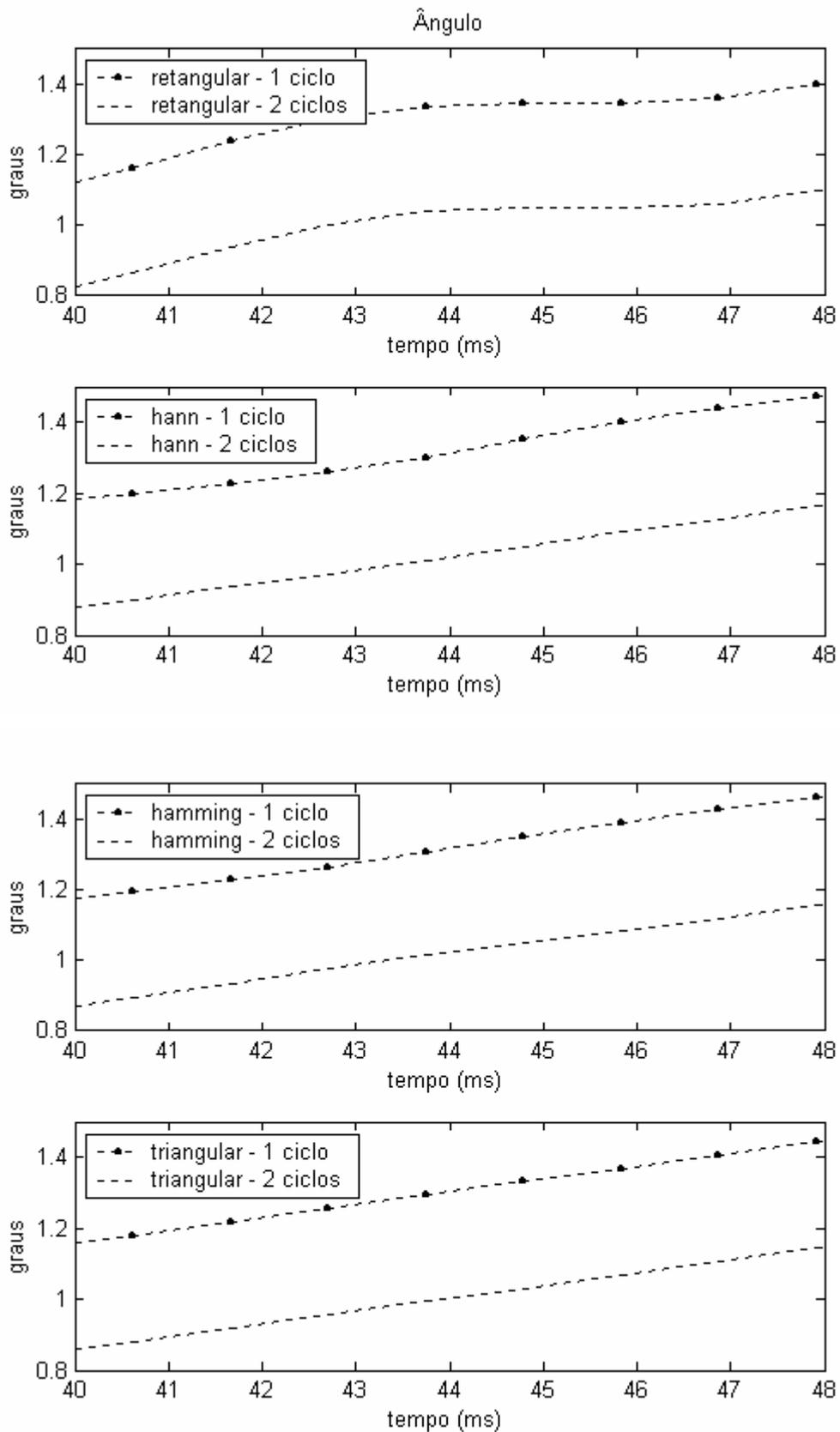


Figura 56 - Comparação do ângulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 60,1 Hz

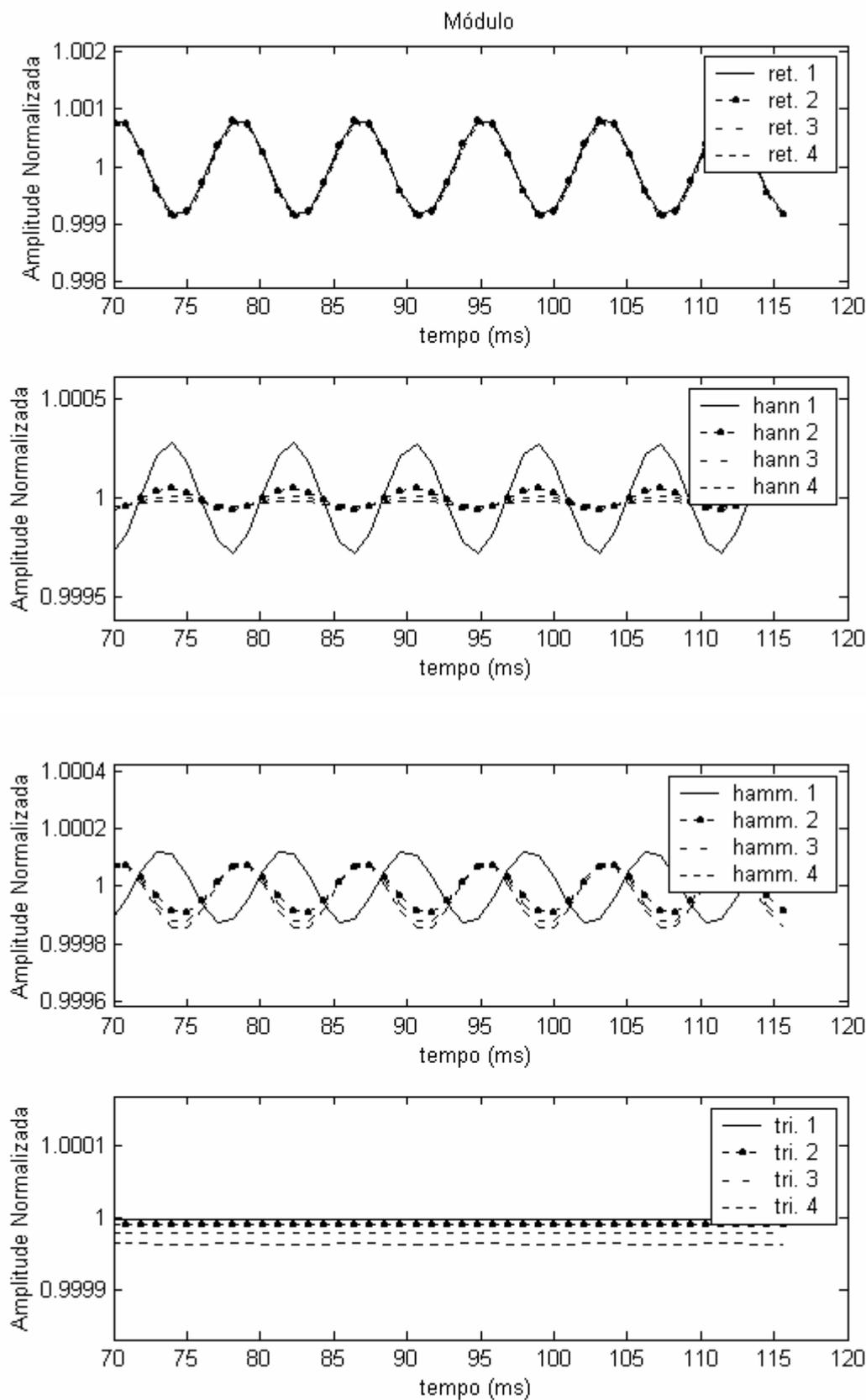


Figura 57 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,1 Hz

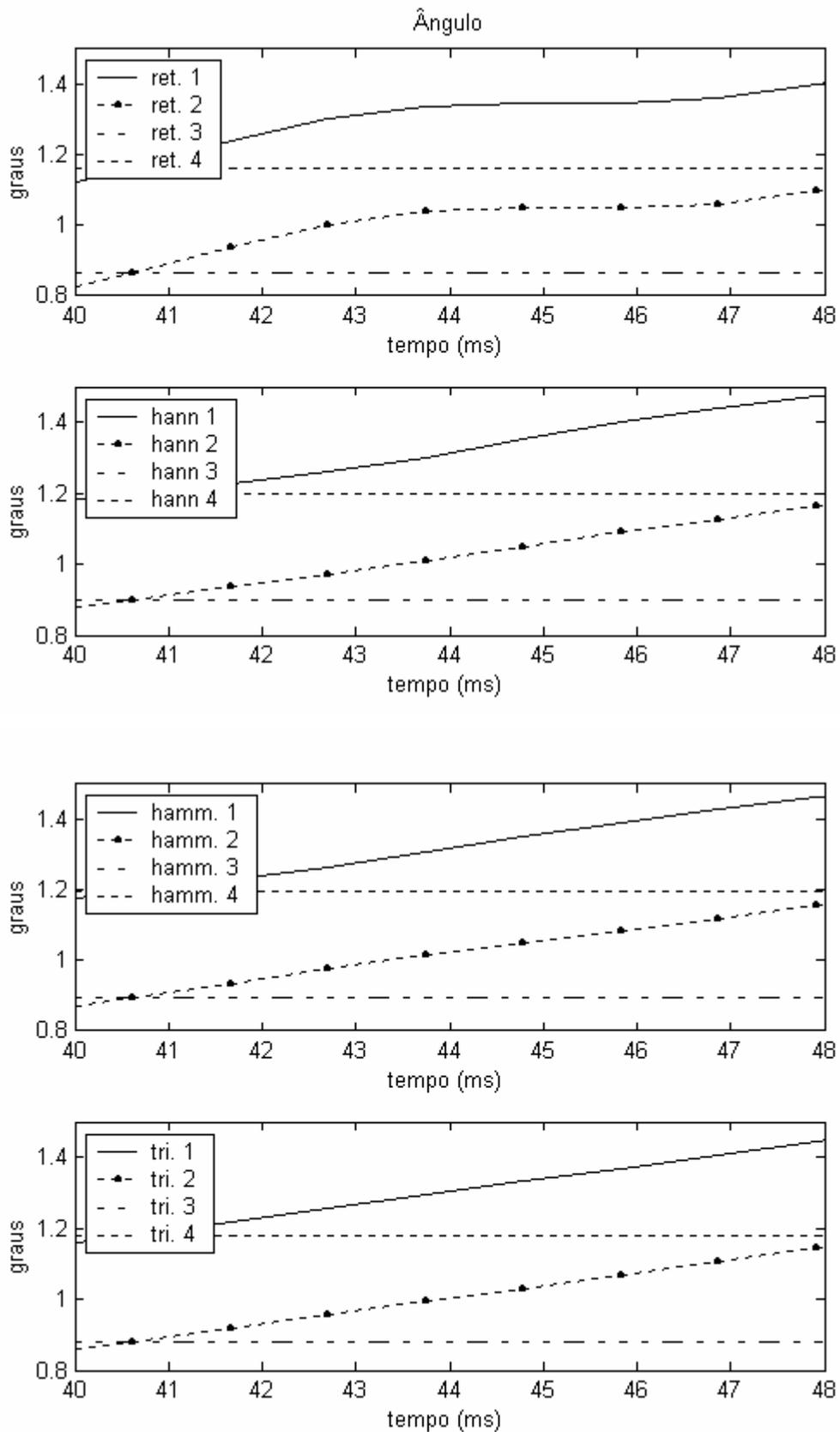


Figura 58 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,1 Hz

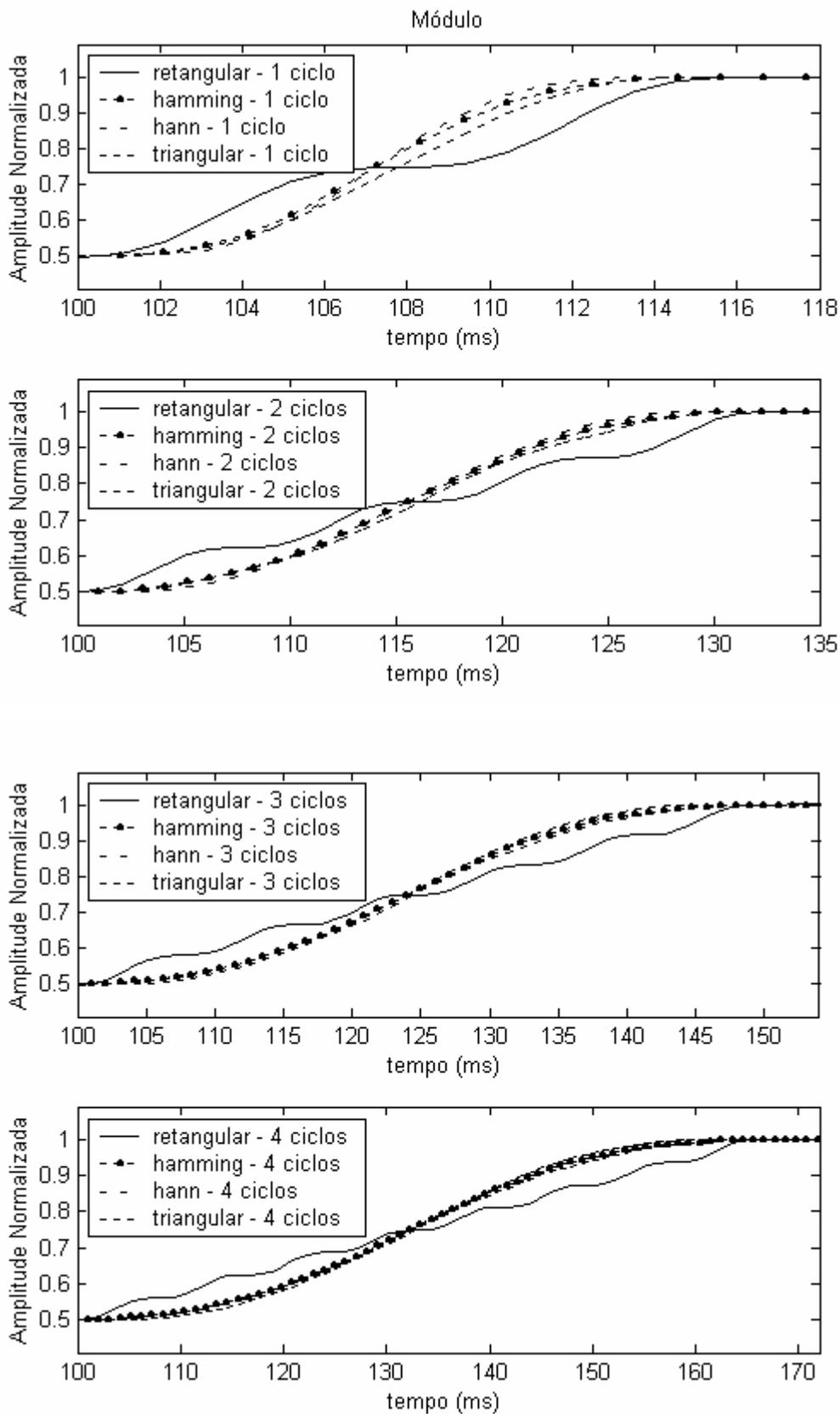


Figura 59 – Resultado do módulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,1 Hz

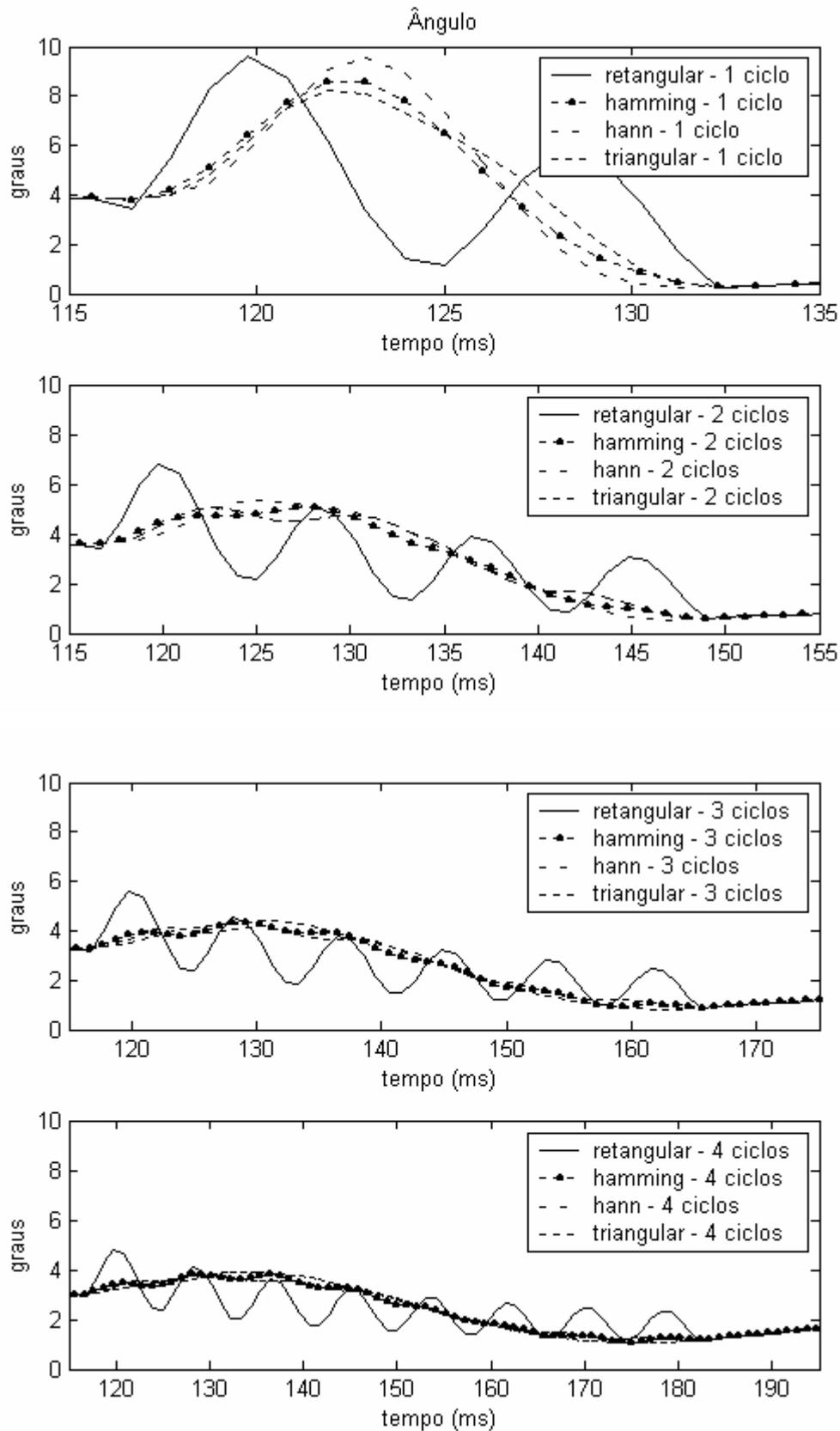


Figura 60 – Resultado do ângulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,1 Hz

Nas figuras abaixo são mostrados os resultados para sinais com frequência de 60,5 Hz:

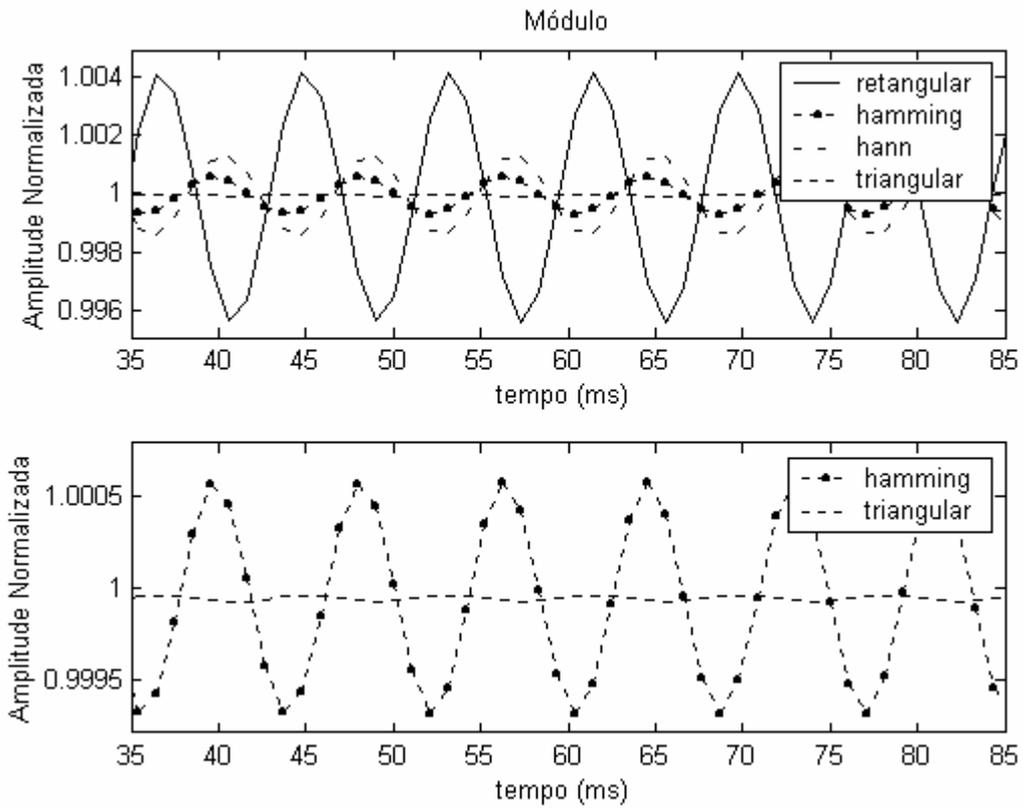


Figura 61 - Resultado do módulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 60,5 Hz

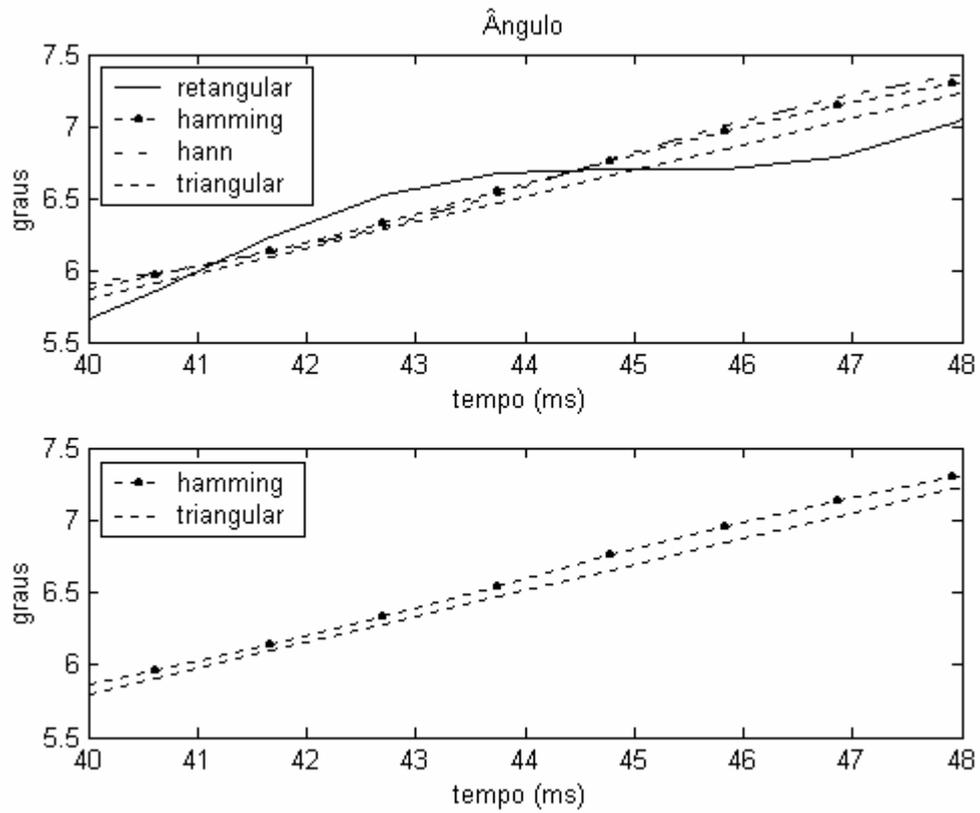


Figura 62 - Resultado do ângulo da filtragem de Fourier e as suas diversas janelas de um ciclo, usando-se um sinal de 60,5 Hz

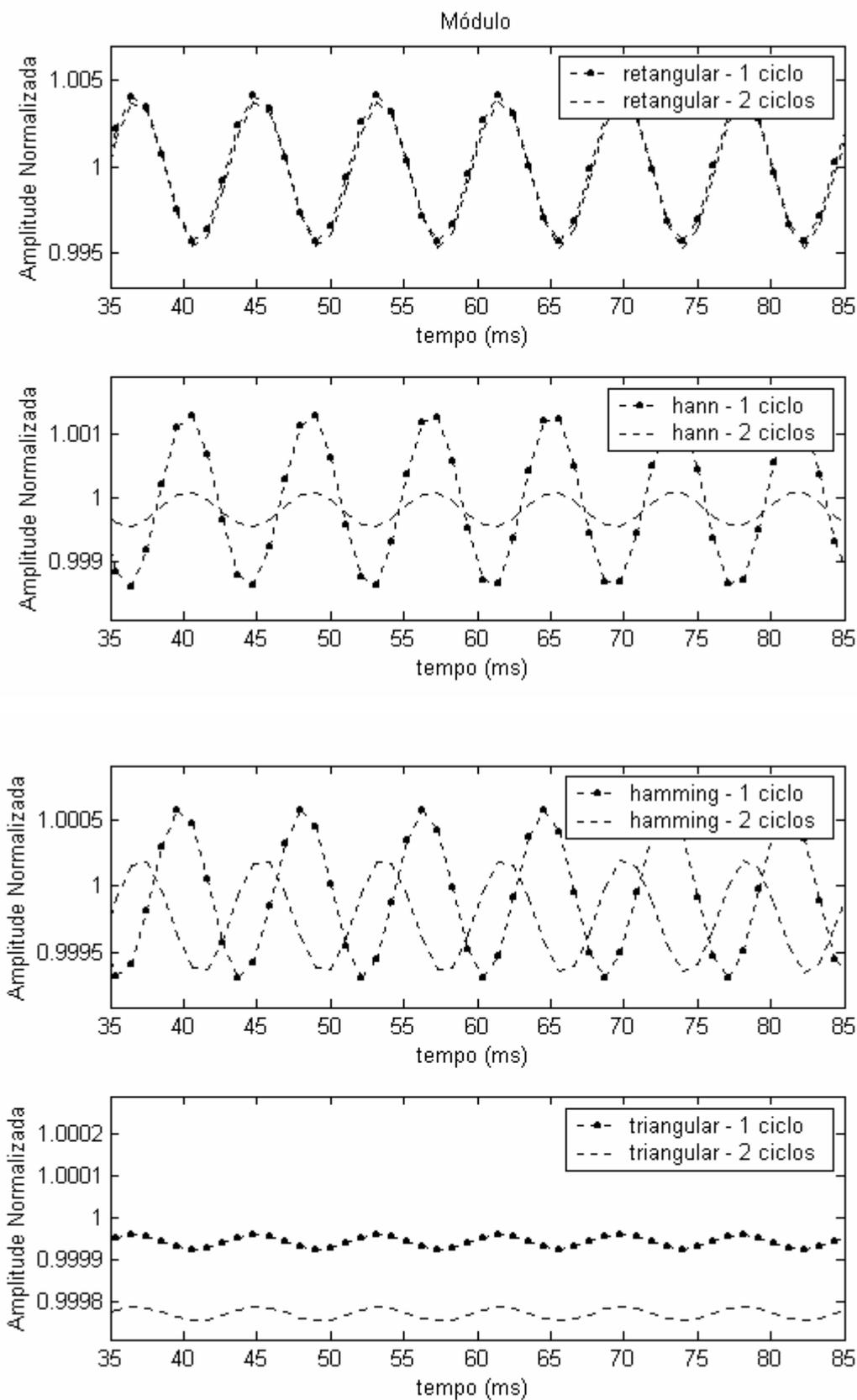


Figura 63 - Comparação do módulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 60,5 Hz

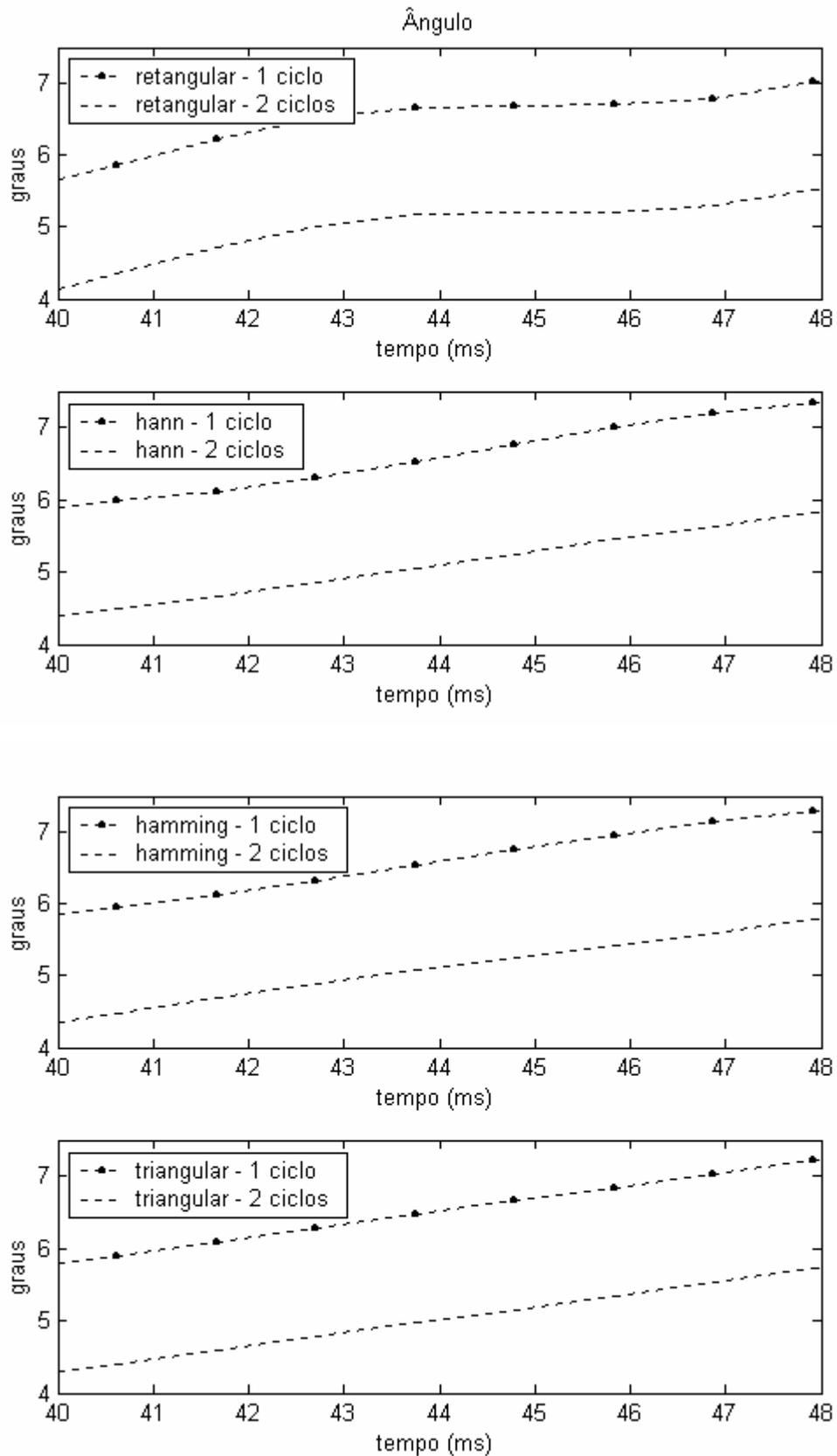


Figura 64 - Comparação do ângulo entre as janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um e dois ciclos para um sinal de 60,5 Hz

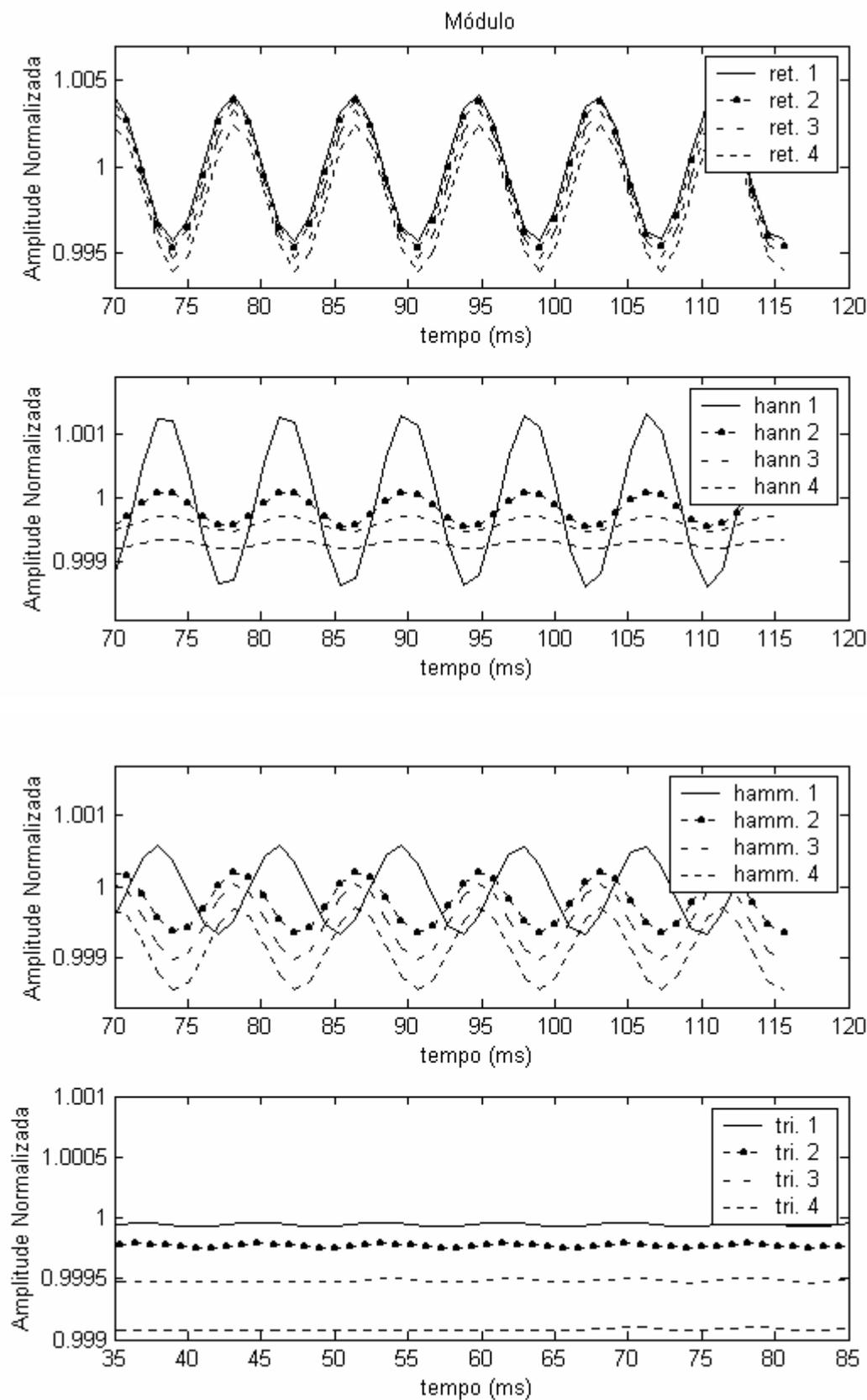


Figura 65 - Comparação do módulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,5 Hz

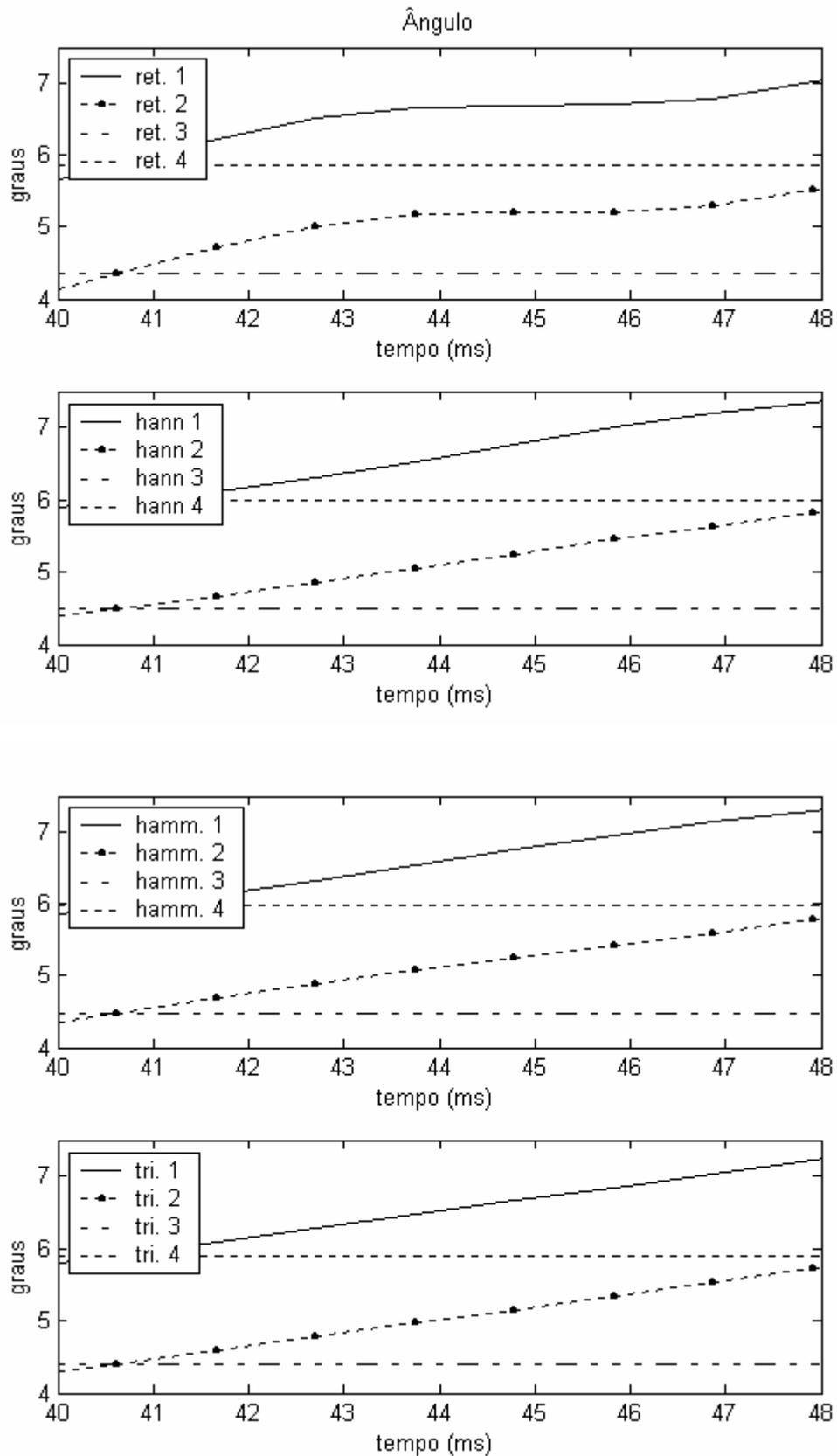


Figura 66 - Comparação do ângulo do resultado das janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,5 Hz

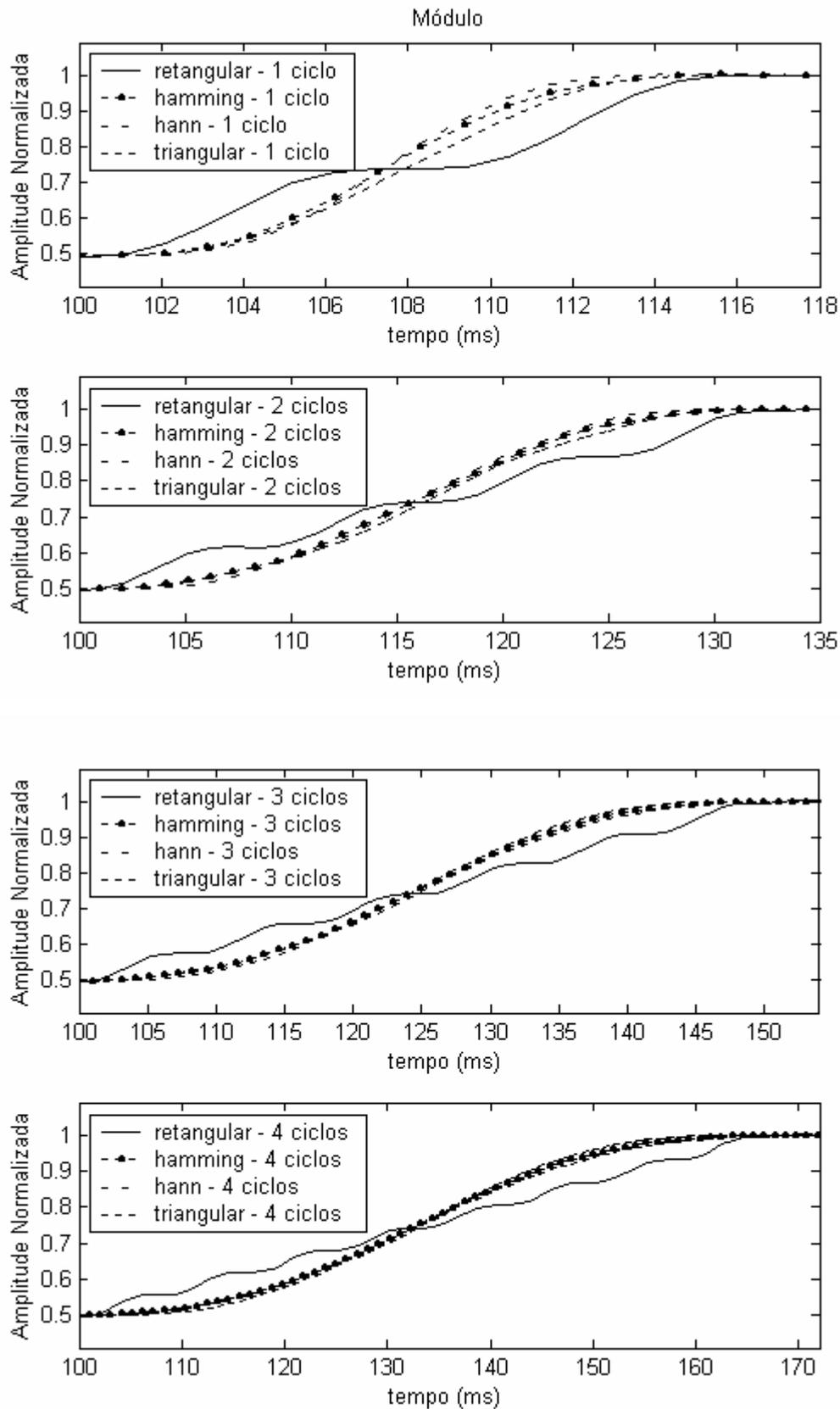


Figura 67 – Resultado do módulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,5 Hz

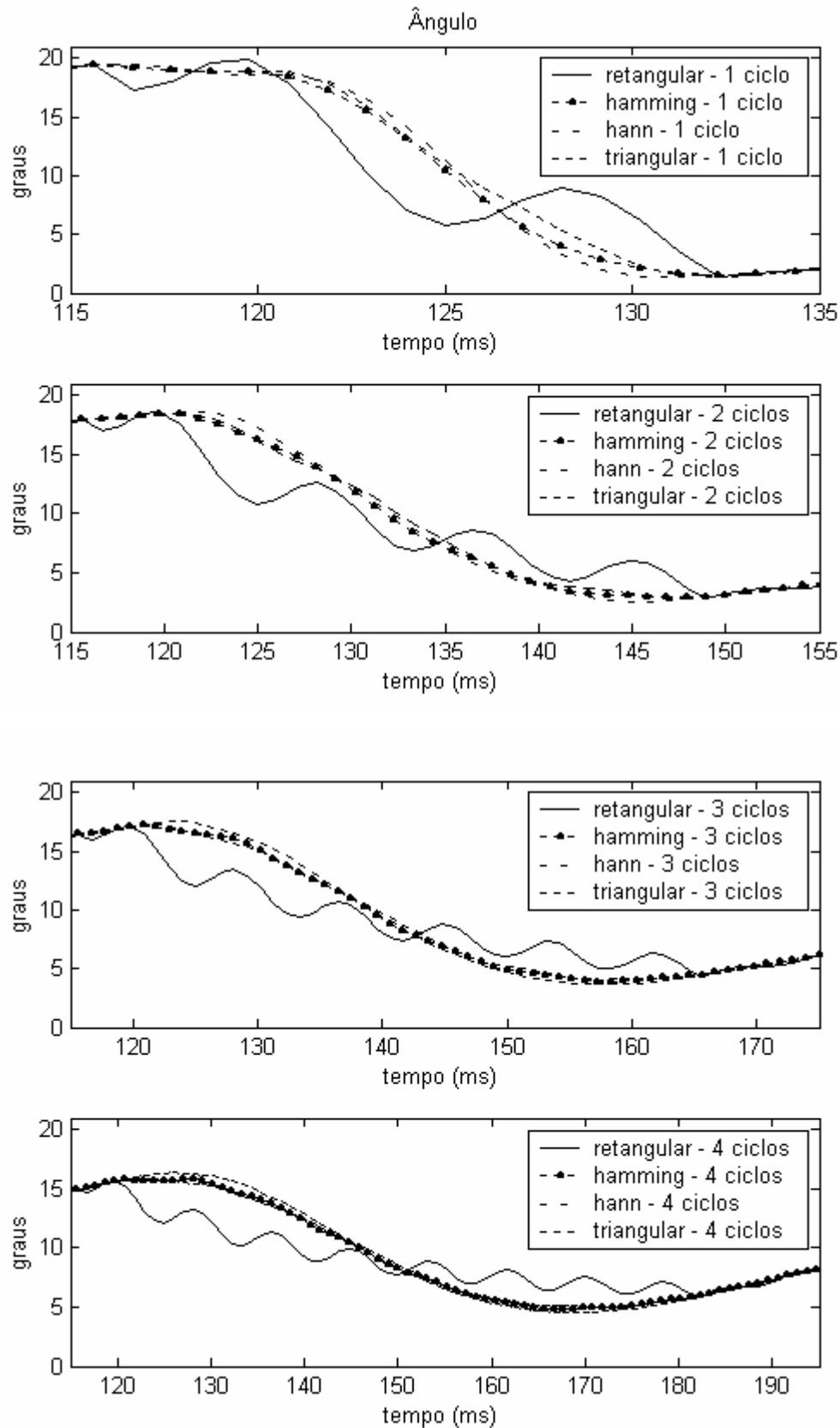


Figura 68 – Resultado do ângulo na análise do transitório para janelas retangular, de hamming, de hann e triangular de um a quatro ciclos para um sinal de 60,5 Hz

7.2 Coeficientes e resposta em frequência dos filtros projetados

A seção 4.4.2 apresenta a família de filtros maximamente planos. Este anexo contém os coeficientes e a resposta em frequência de cada filtro analisado. Cabe lembrar que apenas metade dos coeficientes é representada.

Tabela 5 – Coeficientes do filtro P252#1

Filtro P252#1			
p(0) a p(12)			
p(0) =	6,24016105E-02	p(5) = 5,48832047E-02	p(10) = 1,49151708E-02
p(1) =	6,27051897E-02	p(6) = 4,74020544E-02	p(11) = 7,74705383E-03
p(2) =	6,23790858E-02	p(7) = 3,95973780E-02	p(12) = 1,17839380E-03
p(3) =	6,26612447E-02	p(8) = 3,11573493E-02	
p(4) =	6,11448401E-02	p(9) = 2,30282295E-02	

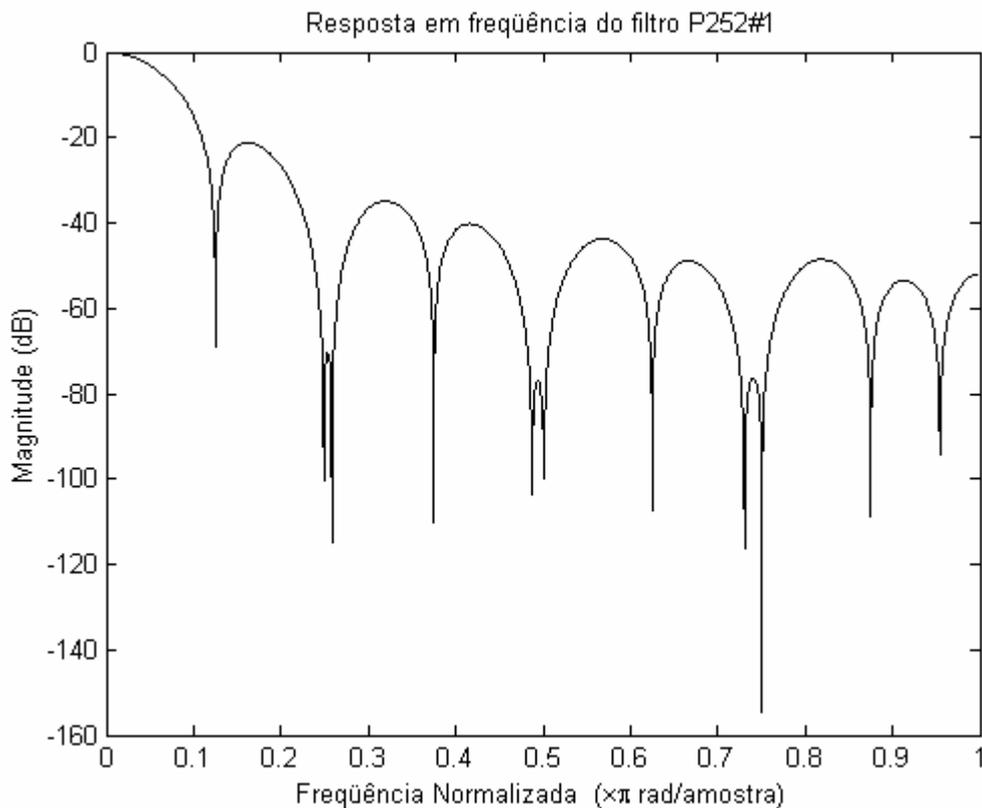


Figura 69 – Resposta em frequência do filtro P252#1

Tabela 6 – Coeficientes do filtro P332#1

Filtro P332#1		
p(0) a p(16)		
p(0) = 6,05009524E-02	p(6) = 4,13041535E-02	p(12) = 1,22749882E-02
p(1) = 5,93715967E-02	p(7) = 3,63667002E-02	p(13) = 8,59277003E-03
p(2) = 5,69775325E-02	p(8) = 3,12413742E-02	p(14) = 5,50206153E-03
p(3) = 5,39261088E-02	p(9) = 2,61541852E-02	p(15) = 3,14483401E-03
p(4) = 5,02064939E-02	p(10) = 2,11783014E-02	p(16) = 9,88148795E-04
p(5) = 4,59866919E-02	p(11) = 1,65335828E-02	

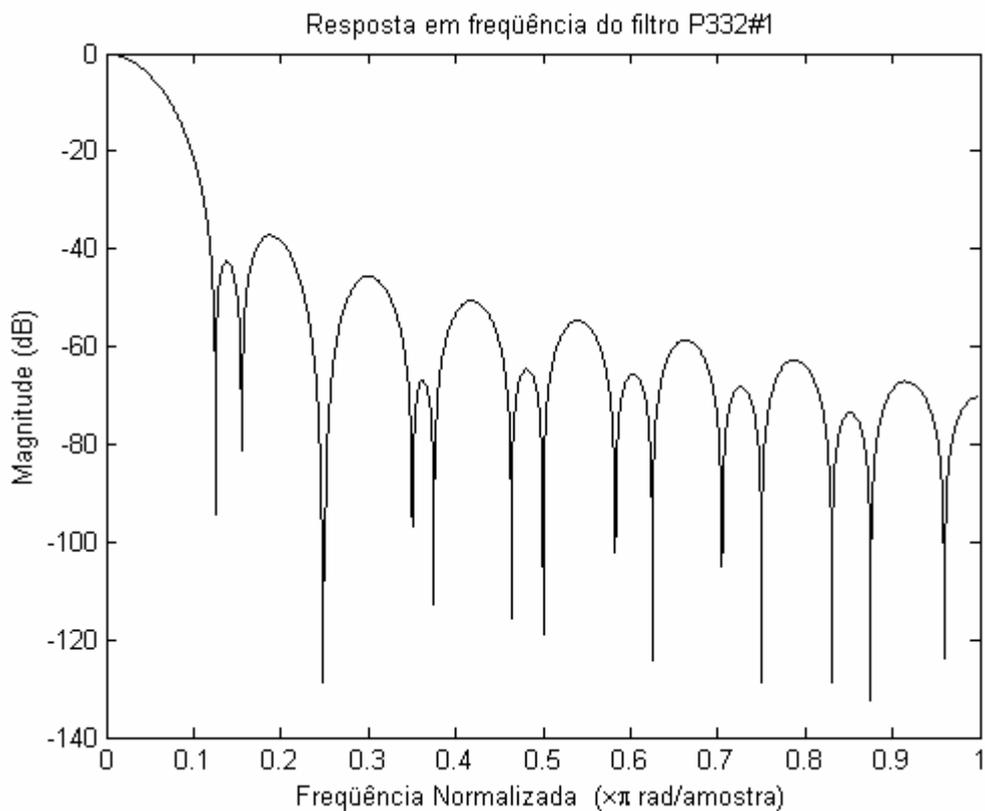


Figura 70 – Resposta em frequência do filtro P332#1

Tabela 7 – Coeficientes do filtro P412#1

Filtro P412#1		
p(0) a p(20)		
p(0) = 1,47678565E-01	p(7) = -1,47438393E-02	p(14) = 8,44540905E-03
p(1) = 1,42347103E-01	p(8) = -3,12957343E-02	p(15) = 1,62000274E-02
p(2) = 1,26742468E-01	p(9) = -3,81135906E-02	p(16) = 1,98534189E-02
p(3) = 1,03116724E-01	p(10) = -3,61322132E-02	p(17) = 1,95442829E-02
p(4) = 7,41150602E-02	p(11) = -2,66751772E-02	p(18) = 1,55831356E-02
p(5) = 4,14480351E-02	p(12) = -1,40012755E-02	p(19) = 9,43523987E-03
p(6) = 1,01420781E-02	p(13) = -2,11459524E-03	p(20) = 2,26415973E-03

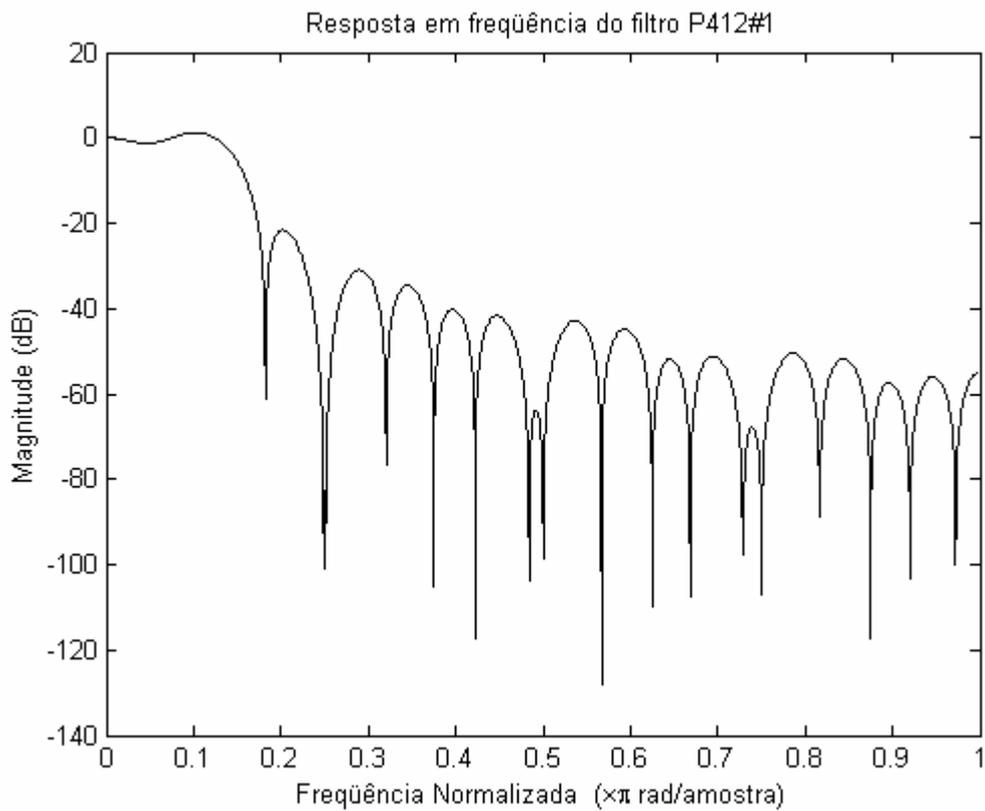


Figura 71 – Resposta em frequência do filtro P412#1

Tabela 8 – Coeficientes do filtro P414#1

Filtro P414#1		
p(0) a p(20)		
p(0) = 1,59682124E-01	p(7) = -1,03767086E-02	p(14) = -2,25809746E-03
p(1) = 1,54866993E-01	p(8) = -3,15140501E-02	p(15) = 7,72087664E-03
p(2) = 1,39448700E-01	p(9) = -4,19479665E-02	p(16) = 1,35866577E-02
p(3) = 1,16796938E-01	p(10) = -4,40557339E-02	p(17) = 1,59500056E-02
p(4) = 8,80041211E-02	p(11) = -3,68059713E-02	p(18) = 1,30611618E-02
p(5) = 5,20841162E-02	p(12) = -2,39603033E-02	p(19) = 7,14073366E-03
p(6) = 1,76137592E-02	p(13) = -1,30345223E-02	p(20) = -2,16177182E-03

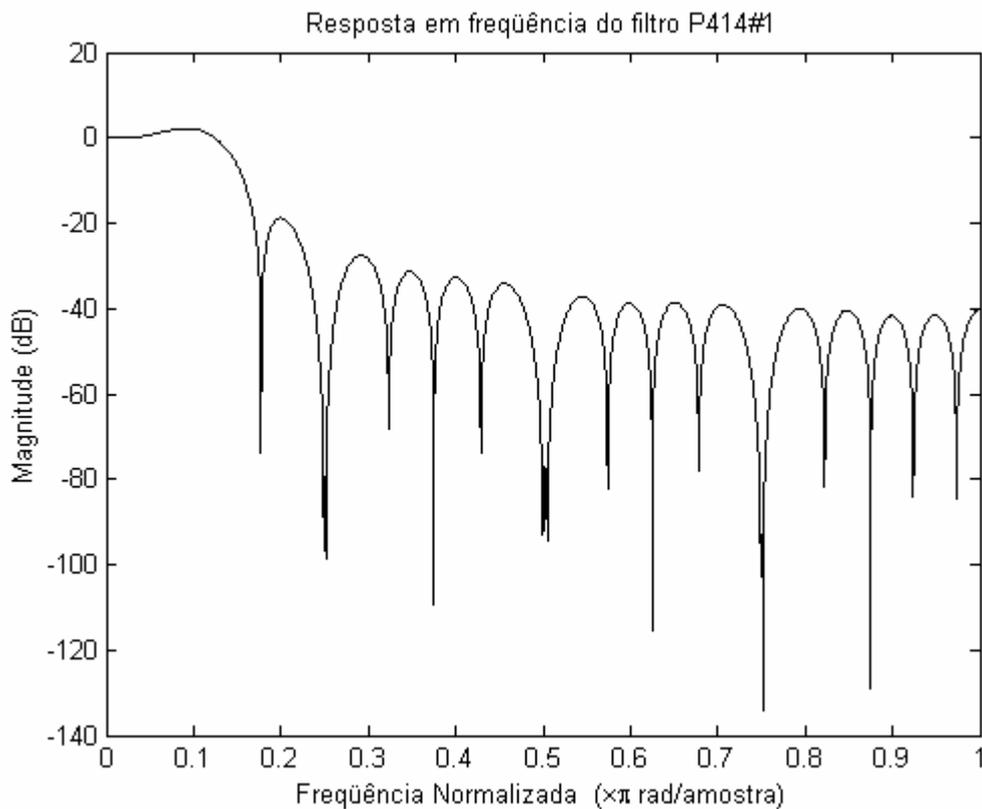


Figura 72 – Resposta em frequência do filtro P414#1

Tabela 9 – Coeficientes do filtro P492#1

Filtro P492#1		
p(0) a p(24)		
p(0) = 3,51990540E-02	p(9) = 2,91697507E-02	p(18) = 9,28171723E-03
p(1) = 3,51509070E-02	p(10) = 2,71482803E-02	p(19) = 7,30674899E-03
p(2) = 3,49432314E-02	p(11) = 2,50528288E-02	p(20) = 5,47208307E-03
p(3) = 3,46376701E-02	p(12) = 2,28362407E-02	p(21) = 3,86866420E-03
p(4) = 3,41698811E-02	p(13) = 2,05826808E-02	p(22) = 2,45551882E-03
p(5) = 3,36013193E-02	p(14) = 1,82563035E-02	p(23) = 1,30972351E-03
p(6) = 3,28687173E-02	p(15) = 1,59516820E-02	p(24) = 2,81599060E-04
p(7) = 3,20360849E-02	p(16) = 1,36415719E-02	
p(8) = 3,09508120E-02	p(17) = 1,14264563E-02	

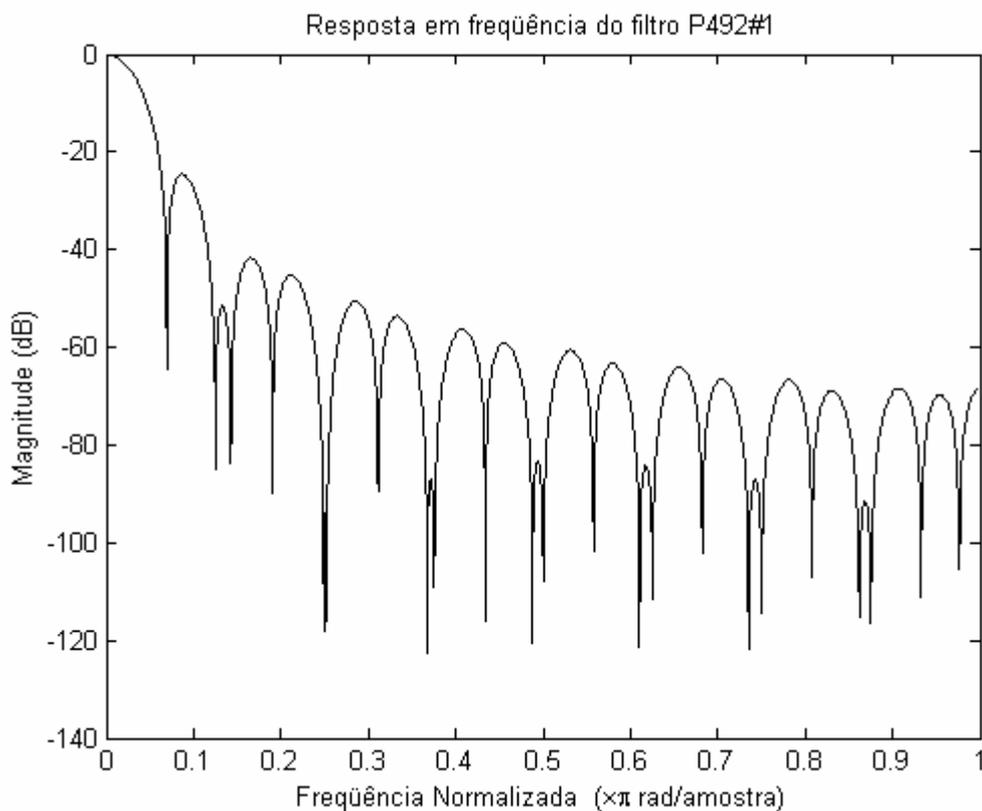


Figura 73 – Resposta em frequência do filtro P492#1

Tabela 10 – Coeficientes do filtro P492#2

Filtro P492#2		
p(0) a p(24)		
p(0) = 9,11097294E-02	p(9) = 2,25738033E-02	p(18) = -1,38495935E-02
p(1) = 8,98974469E-02	p(10) = 1,39932671E-02	p(19) = -1,23634729E-02
p(2) = 8,64418054E-02	p(11) = 6,19039250E-03	p(20) = -1,02525887E-02
p(3) = 8,07732119E-02	p(12) = -4,73554841E-04	p(21) = -7,88803144E-03
p(4) = 7,32732440E-02	p(13) = -5,95975652E-03	p(22) = -5,37734628E-03
p(5) = 6,41508166E-02	p(14) = -1,00476546E-02	p(23) = -3,05963708E-03
p(6) = 5,39348680E-02	p(15) = -1,28466869E-02	p(24) = -7,37383925E-04
p(7) = 4,29430086E-02	p(16) = -1,42830388E-02	
p(8) = 3,20145590E-02	p(17) = -1,46025423E-02	

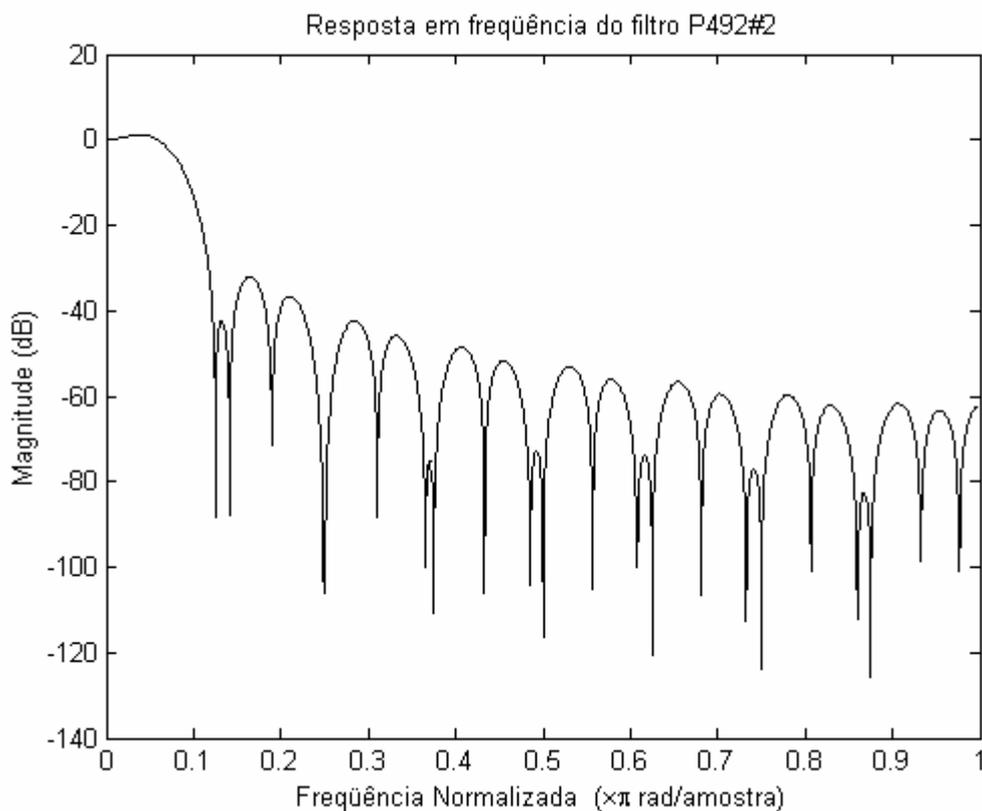


Figura 74 – Resposta em frequência do filtro P492#2

Tabela 11 – Coeficientes do filtro P494#1

Filtro P494#1		
p(0) a p(24)		
p(0) = 7,26804069E-02	p(9) = 2,50951166E-02	p(18) = -6,83792584E-03
p(1) = 7,18341561E-02	p(10) = 1,90048090E-02	p(19) = -6,77358782E-03
p(2) = 6,95283624E-02	p(11) = 1,32110235E-02	p(20) = -6,07607045E-03
p(3) = 6,56550348E-02	p(12) = 8,08085719E-03	p(21) = -5,05892956E-03
p(4) = 6,05701919E-02	p(13) = 3,54121273E-03	p(22) = -3,63762948E-03
p(5) = 5,42733713E-02	p(14) = -1,17284314E-04	p(23) = -2,11764891E-03
p(6) = 4,72093295E-02	p(15) = -3,05079118E-03	p(24) = -2,95117334E-04
p(7) = 3,94522412E-02	p(16) = -5,05435120E-03	
p(8) = 3,15847036E-02	p(17) = -6,36127714E-03	

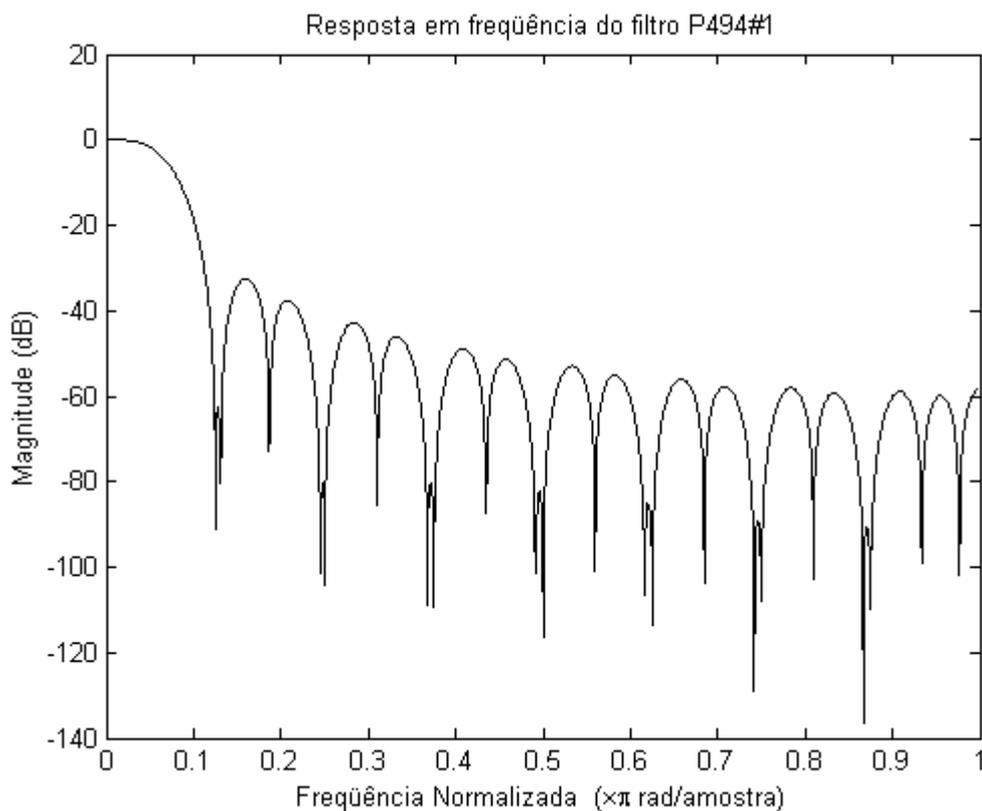


Figura 75 – Resposta em frequência do filtro P494#1

Tabela 12 – Coeficientes do filtro P494#2

Filtro P494#2		
p(0) a p(24)		
p(0) = 7,27860757E-02	p(9) = 2,50128165E-02	p(18) = -7,21411479E-03
p(1) = 7,18928649E-02	p(10) = 1,92143765E-02	p(19) = -7,27323582E-03
p(2) = 6,96240050E-02	p(11) = 1,35409093E-02	p(20) = -6,50916420E-03
p(3) = 6,56901589E-02	p(12) = 8,52687308E-03	p(21) = -5,39935329E-03
p(4) = 6,06179855E-02	p(13) = 3,92165792E-03	p(22) = -3,67226165E-03
p(5) = 5,42238689E-02	p(14) = 2,04584599E-04	p(23) = -1,82175859E-03
p(6) = 4,71248875E-02	p(15) = -2,93711926E-03	p(24) = 3,15094416E-04
p(7) = 3,92084767E-02	p(16) = -5,08956756E-03	
p(8) = 3,10370020E-02	p(17) = -6,63202445E-03	

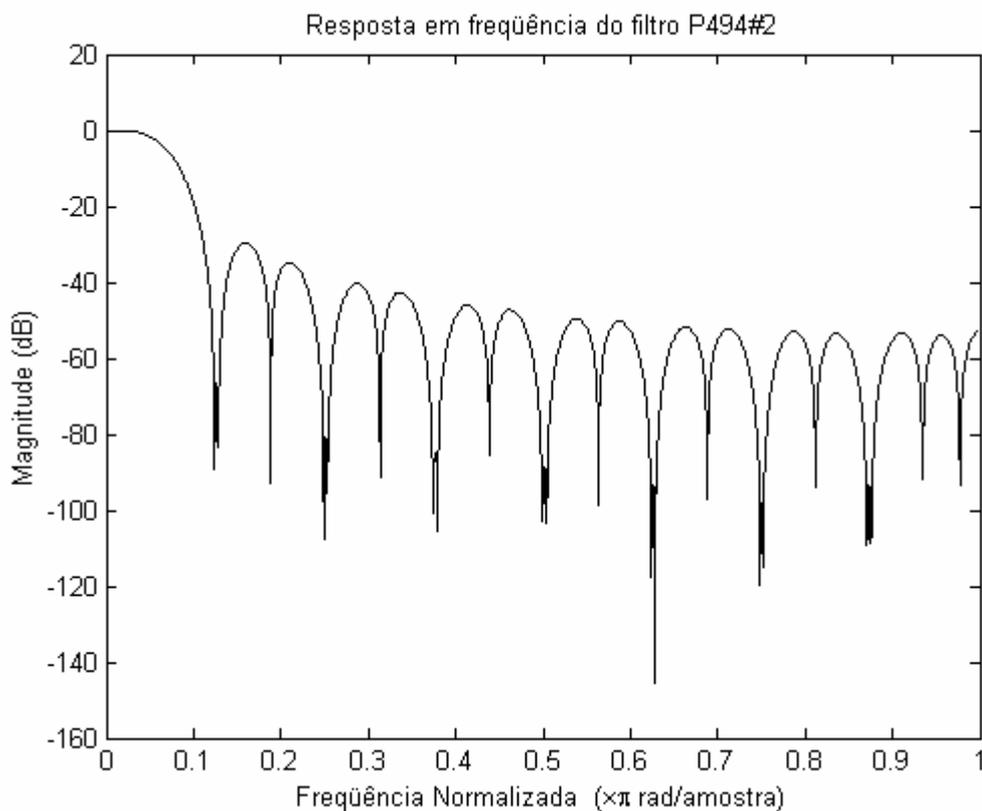


Figura 76 – Resposta em frequência do filtro P494#2

Tabela 13 – Coeficientes do filtro P496#1

Filtro P496#1		
p(0) a p(24)		
p(0) = 8,87754646E-02	p(9) = 1,70106233E-02	p(18) = -2,45639061E-03
p(1) = 8,81854161E-02	p(10) = 2,90197717E-03	p(19) = 2,49482928E-03
p(2) = 8,44505495E-02	p(11) = -7,64997250E-03	p(20) = 5,31877866E-03
p(3) = 7,99227005E-02	p(12) = -1,55761826E-02	p(21) = 6,79181582E-03
p(4) = 7,21361246E-02	p(13) = -1,92540802E-02	p(22) = 5,51730346E-03
p(5) = 6,38878309E-02	p(14) = -2,00974917E-02	p(23) = 2,73097777E-03
p(6) = 5,36506938E-02	p(15) = -1,74659992E-02	p(24) = -1,96957642E-03
p(7) = 4,30486488E-02	p(16) = -1,33890769E-02	
p(8) = 3,30739796E-02	p(17) = -7,65121145E-03	

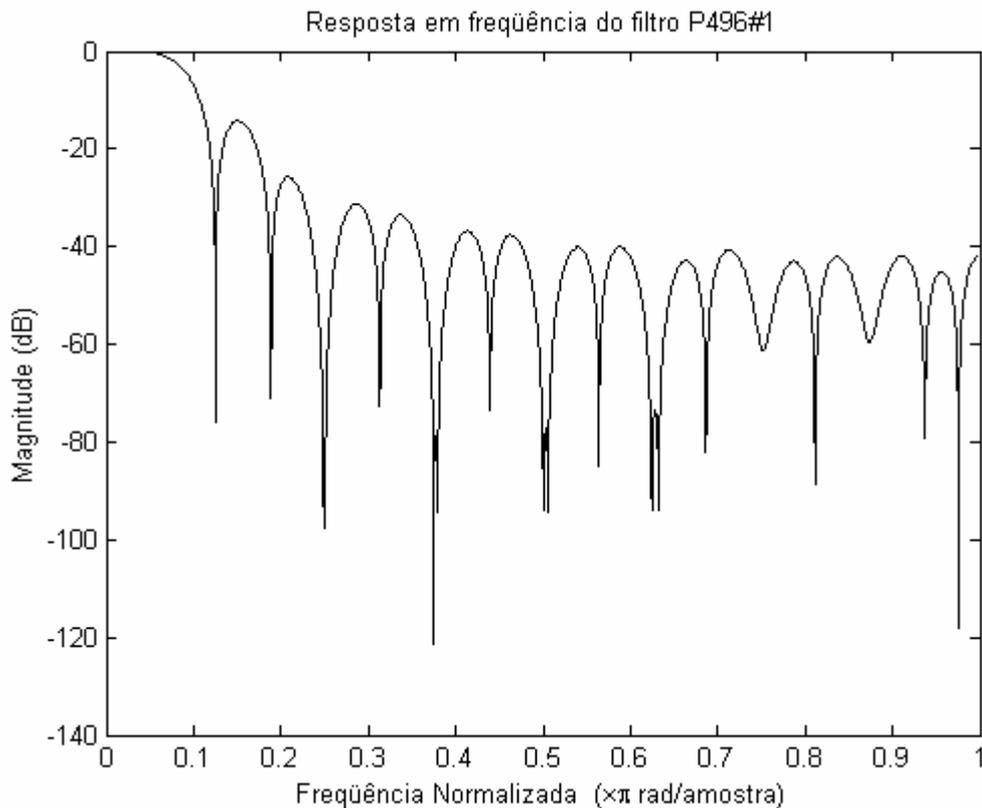


Figura 77 – Resposta em frequência do filtro P496#1

Tabela 14 – Coeficientes do filtro P496#2

Filtro P496#2		
p(0) a p(24)		
p(0) = 8,97465092E-02	p(9) = 1,73048636E-02	p(18) = -2,30914991E-03
p(1) = 8,91982797E-02	p(10) = 2,84700323E-03	p(19) = 3,22398771E-03
p(2) = 8,50031580E-02	p(11) = -7,93772833E-03	p(20) = 6,27896257E-03
p(3) = 7,97151512E-02	p(12) = -1,61399115E-02	p(21) = 7,93531077E-03
p(4) = 7,18152926E-02	p(13) = -1,97595513E-02	p(22) = 6,16196708E-03
p(5) = 6,29453198E-02	p(14) = -2,08432255E-02	p(23) = 2,55430545E-03
p(6) = 5,30088069E-02	p(15) = -1,80719584E-02	p(24) = -3,33422099E-03
p(7) = 4,30466406E-02	p(16) = -1,39621248E-02	
p(8) = 3,42498115E-02	p(17) = -7,80424460E-03	

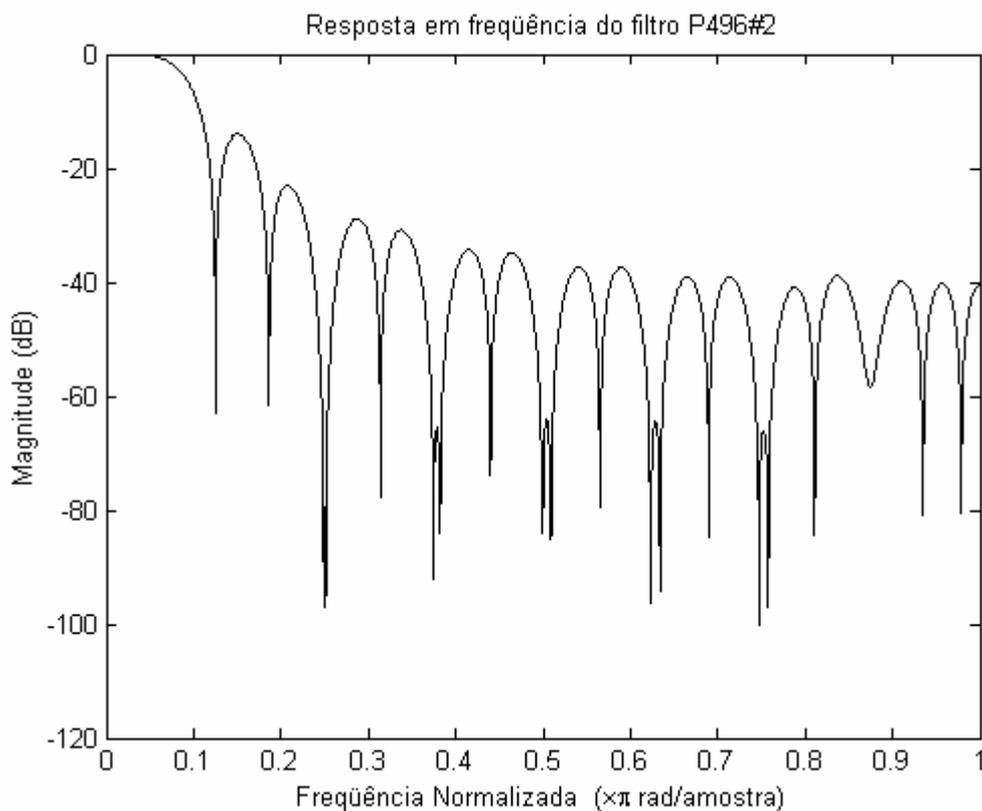


Figura 78 – Resposta em frequência do filtro P496#2

Tabela 15 – Coeficientes do filtro P572#1

Filtro P572#1		
p(0) a p(28)		
p(0) = 1,47356254E-01	p(10) = -3,16513689E-02	p(20) = 6,29661679E-03
p(1) = 1,42245422E-01	p(11) = -2,82262300E-02	p(21) = -8,04781238E-04
p(2) = 1,27595717E-01	p(12) = -1,99822989E-02	p(22) = -6,89262296E-03
p(3) = 1,05056602E-01	p(13) = -8,45018915E-03	p(23) = -1,10682153E-02
p(4) = 7,78852780E-02	p(14) = 3,70898006E-03	p(24) = -1,27922046E-02
p(5) = 4,94602177E-02	p(15) = 1,37054104E-02	p(25) = -1,21512554E-02
p(6) = 2,22421675E-02	p(16) = 2,00699446E-02	p(26) = -9,54456634E-03
p(7) = -1,09807353E-03	p(17) = 2,19747621E-02	p(27) = -5,77949738E-03
p(8) = -1,84387175E-02	p(18) = 1,95975967E-02	p(28) = -1,65175269E-03
p(9) = -2,86883584E-02	p(19) = 1,37032901E-02	

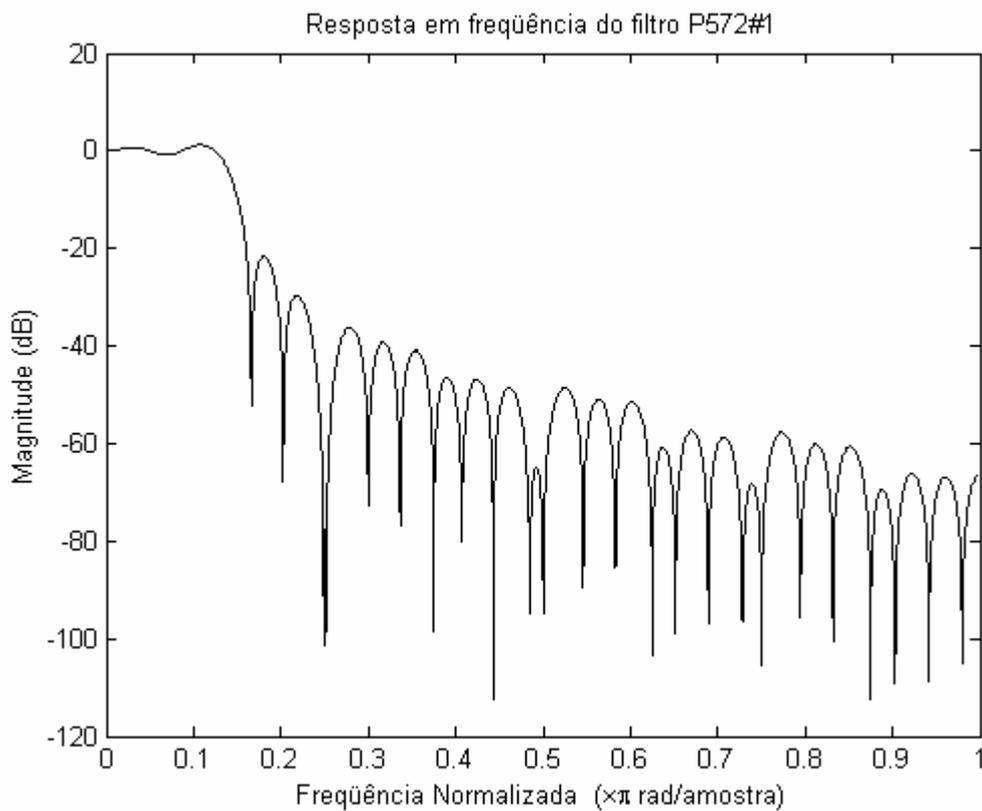


Figura 79 – Resposta em frequência do filtro P572#1

Tabela 16 – Coeficientes do filtro P574#1

Filtro P574#1		
p(0) a p(28)		
p(0) = 5,70883416E-02	p(10) = 2,81914005E-02	p(20) = -7,07079056E-03
p(1) = 5,66166866E-02	p(11) = 2,31712782E-02	p(21) = -7,59558271E-03
p(2) = 5,55586874E-02	p(12) = 1,82161772E-02	p(22) = -7,51839237E-03
p(3) = 5,35950466E-02	p(13) = 1,40726736E-02	p(23) = -7,12188243E-03
p(4) = 5,09278604E-02	p(14) = 1,00863656E-02	p(24) = -6,17857932E-03
p(5) = 4,83562475E-02	p(15) = 6,17918773E-03	p(25) = -4,98991416E-03
p(6) = 4,52963441E-02	p(16) = 2,76794797E-03	p(26) = -3,34440286E-03
p(7) = 4,15590338E-02	p(17) = -4,30138725E-04	p(27) = -1,55628824E-03
p(8) = 3,74869053E-02	p(18) = -3,01586229E-03	p(28) = 5,76532102E-04
p(9) = 3,29112778E-02	p(19) = -5,29198949E-03	

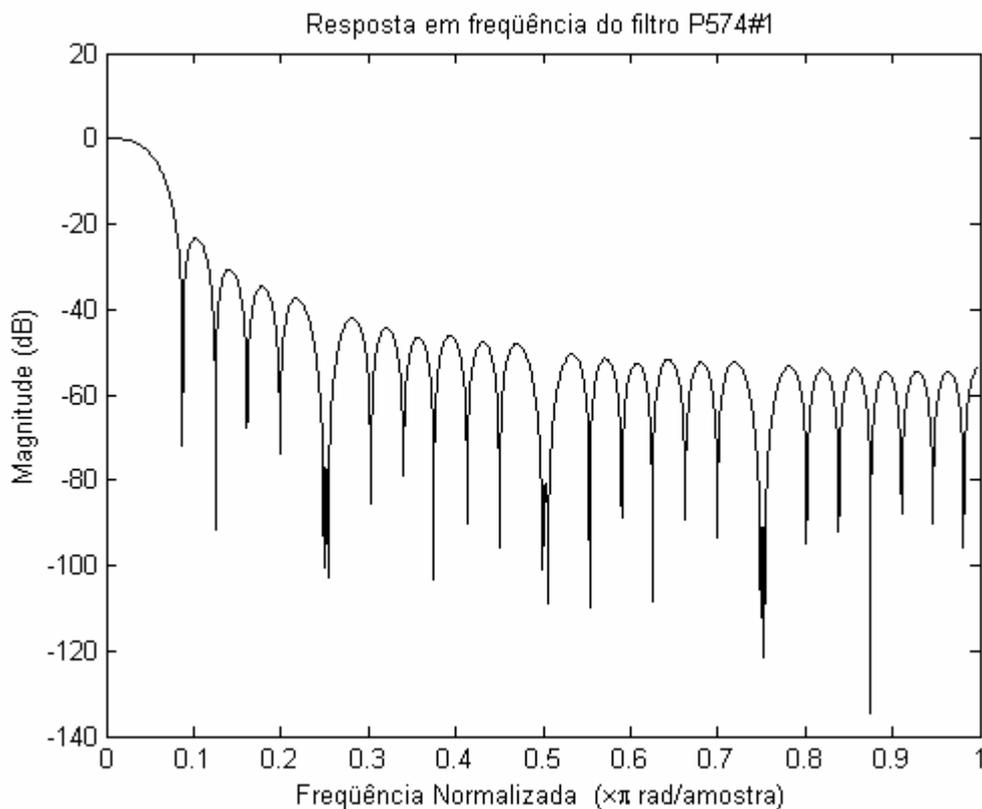


Figura 80 – Resposta em frequência do filtro P574#1

Tabela 17 – Coeficientes do filtro P574#2

Filtro P574#2		
p(0) a p(28)		
p(0) = 5,79625400E-02	p(10) = 2,75854060E-02	p(20) = -6,81269298E-03
p(1) = 5,74981863E-02	p(11) = 2,26149464E-02	p(21) = -7,28580831E-03
p(2) = 5,63250683E-02	p(12) = 1,77383069E-02	p(22) = -7,18101982E-03
p(3) = 5,42672295E-02	p(13) = 1,34734051E-02	p(23) = -6,70526885E-03
p(4) = 5,15520519E-02	p(14) = 9,47894490E-03	p(24) = -5,76661520E-03
p(5) = 4,86769580E-02	p(15) = 5,66147399E-03	p(25) = -4,59672560E-03
p(6) = 4,52988093E-02	p(16) = 2,30010188E-03	p(26) = -3,12027669E-03
p(7) = 4,13435057E-02	p(17) = -7,51271101E-04	p(27) = -1,57640356E-03
p(8) = 3,70571825E-02	p(18) = -3,23390595E-03	p(28) = 1,11947150E-04
p(9) = 3,23841457E-02	p(19) = -5,31895159E-03	

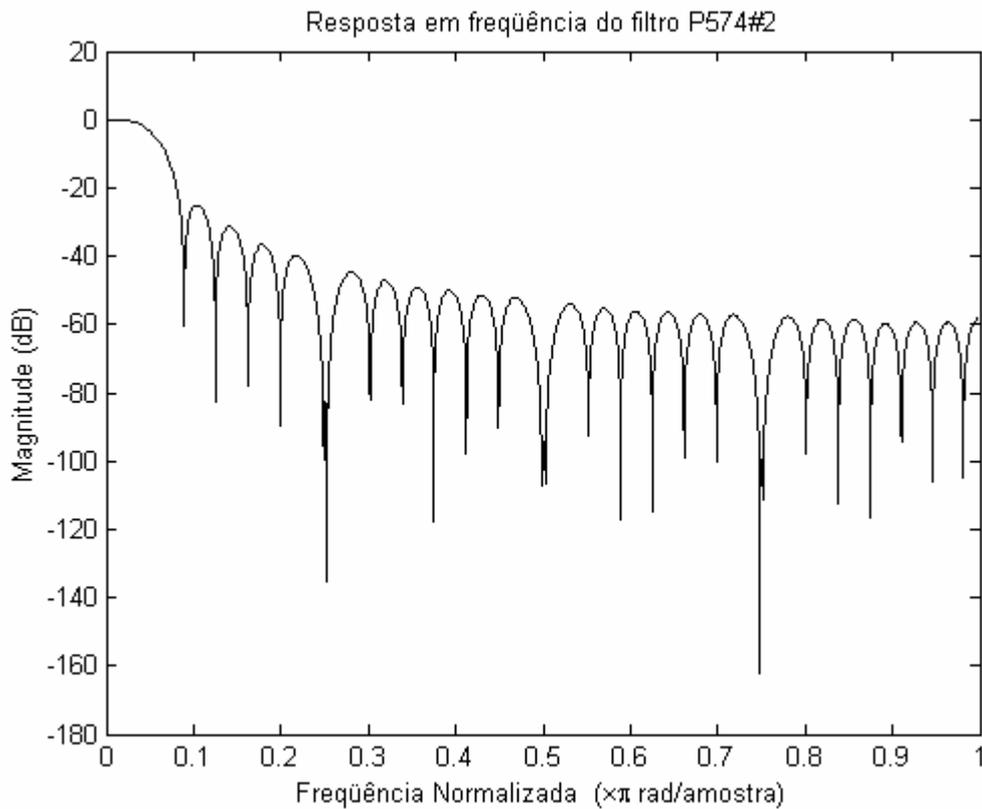


Figura 81 – Resposta em frequência do filtro P574#2

Tabela 18 – Coeficientes do filtro P574#3

Filtro P574#3		
p(0) a p(28)		
p(0) = 1,03974722E-01	p(10) = -1,17543550E-03	p(20) = -4,05205071E-04
p(1) = 1,02423669E-01	p(11) = -1,01655233E-02	p(21) = 3,42391522E-03
p(2) = 9,75259029E-02	p(12) = -1,67162443E-02	p(22) = 6,10620110E-03
p(3) = 8,98797498E-02	p(13) = -2,14579117E-02	p(23) = 7,70756885E-03
p(4) = 7,96144649E-02	p(14) = -2,36536289E-02	p(24) = 7,93643262E-03
p(5) = 6,65573176E-02	p(15) = -2,31999832E-02	p(25) = 7,13130171E-03
p(6) = 5,21910427E-02	p(16) = -2,07864534E-02	p(26) = 5,24223626E-03
p(7) = 3,75713934E-02	p(17) = -1,65755870E-02	p(27) = 2,79684538E-03
p(8) = 2,32461928E-02	p(18) = -1,14821004E-02	p(28) = -1,32627780E-04
p(9) = 1,02040582E-02	p(19) = -5,79495236E-03	

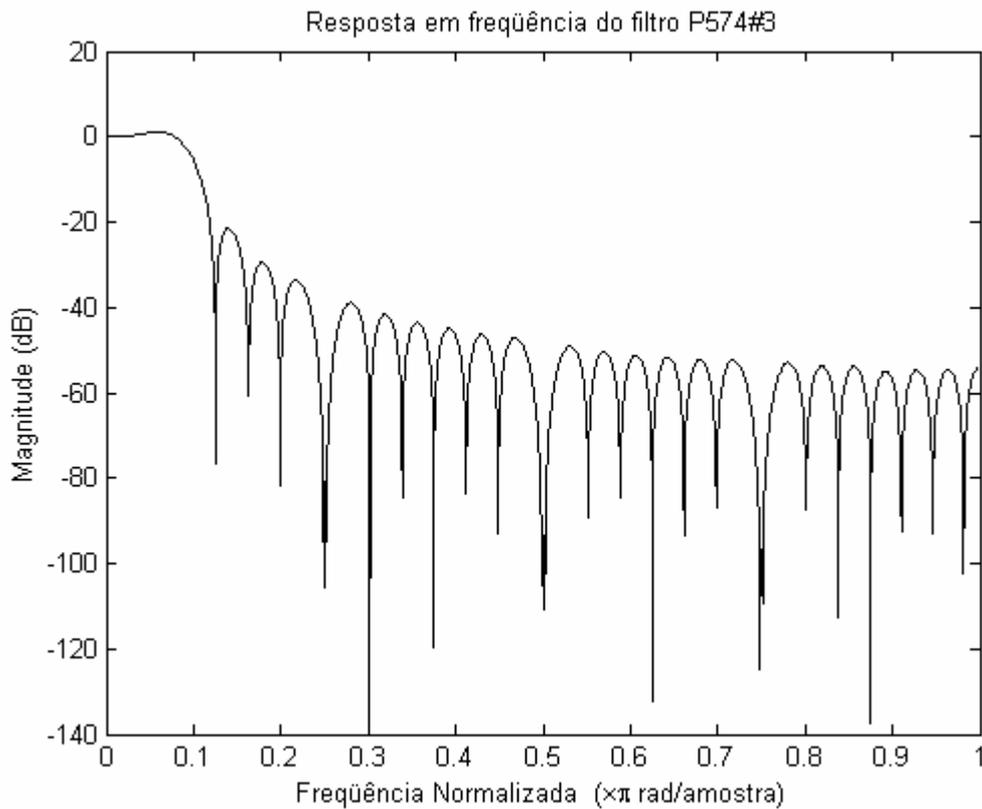


Figura 82 – Resposta em frequência do filtro P574#3

Tabela 19 – Coeficientes do filtro P574#4

Filtro P574#4		
p(0) a p(28)		
p(0) = 1,02820338E-01	p(10) = -7,38989783E-04	p(20) = -2,79666239E-04
p(1) = 1,01298295E-01	p(11) = -9,88712377E-03	p(21) = 3,37769677E-03
p(2) = 9,65825628E-02	p(12) = -1,65632712E-02	p(22) = 5,88347871E-03
p(3) = 8,91485257E-02	p(13) = -2,11917201E-02	p(23) = 7,28272960E-03
p(4) = 7,90888549E-02	p(14) = -2,32756130E-02	p(24) = 7,41091643E-03
p(5) = 6,64221838E-02	p(15) = -2,27333548E-02	p(25) = 6,58400921E-03
p(6) = 5,24122421E-02	p(16) = -2,01989056E-02	p(26) = 4,85168938E-03
p(7) = 3,80006273E-02	p(17) = -1,59673488E-02	p(27) = 2,67107216E-03
p(8) = 2,37942737E-02	p(18) = -1,08919863E-02	p(28) = 1,55180424E-04
p(9) = 1,07219986E-02	p(19) = -5,36852530E-03	

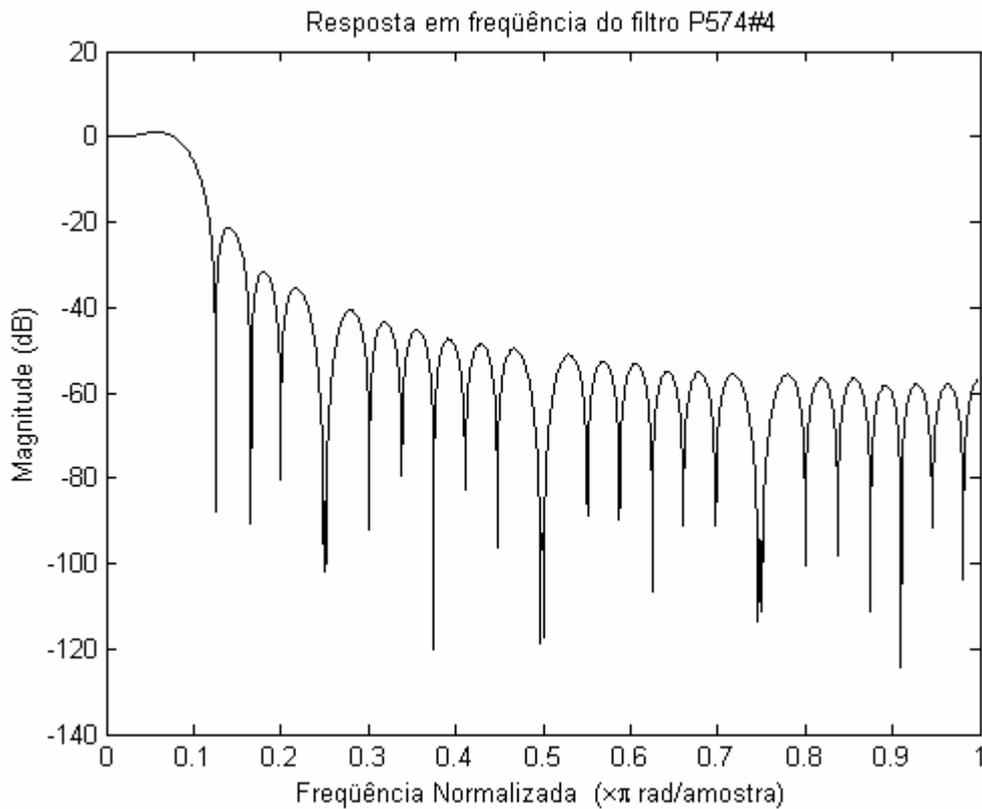


Figura 83 – Resposta em frequência do filtro P574#4

Tabela 20 – Coeficientes do filtro P574#5

Filtro P574#5		
p(0) a p(28)		
p(0) = 1,02942479E-01	p(10) = 1,23058065E-04	p(20) = -8,19833676E-04
p(1) = 1,01324533E-01	p(11) = -8,83958552E-03	p(21) = 2,99037936E-03
p(2) = 9,64096501E-02	p(12) = -1,55128486E-02	p(22) = 5,66462865E-03
p(3) = 8,86865367E-02	p(13) = -2,02256187E-02	p(23) = 7,16406309E-03
p(4) = 7,83281762E-02	p(14) = -2,25939082E-02	p(24) = 7,37370990E-03
p(5) = 6,56063809E-02	p(15) = -2,24431168E-02	p(25) = 6,57701982E-03
p(6) = 5,17401232E-02	p(16) = -2,02504420E-02	p(26) = 4,90912122E-03
p(7) = 3,76186778E-02	p(17) = -1,63144662E-02	p(27) = 2,80310527E-03
p(8) = 2,38464184E-02	p(18) = -1,13772747E-02	p(28) = 4,36918320E-04
p(9) = 1,12048332E-02	p(19) = -5,90147832E-03	

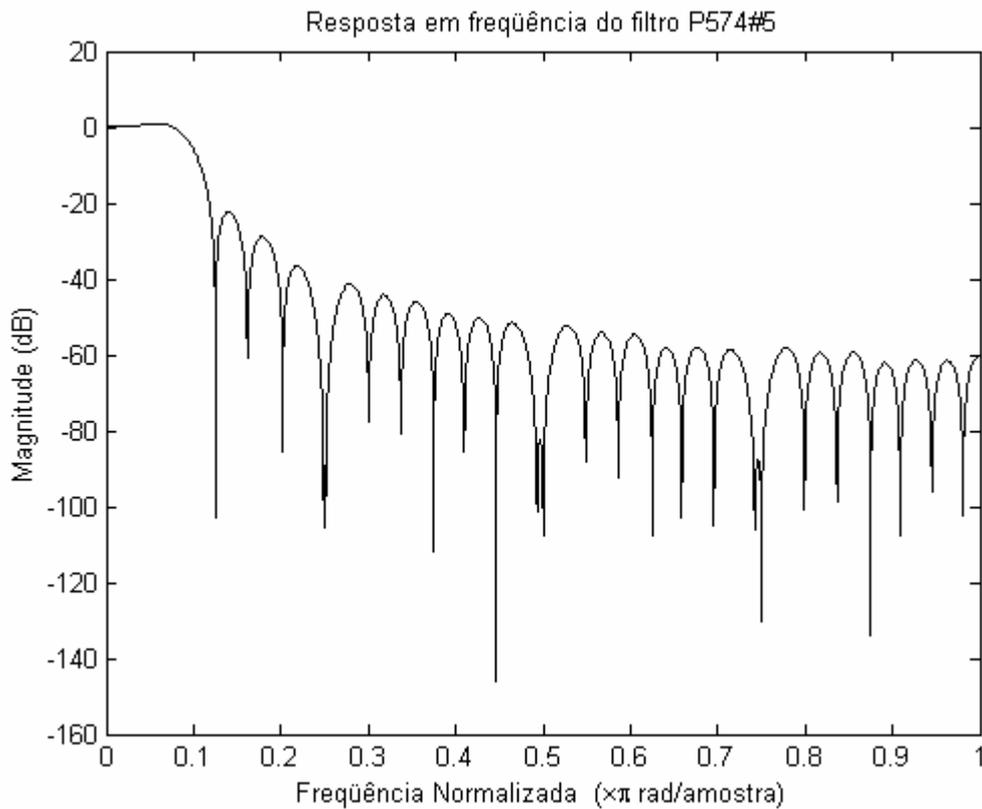


Figura 84 – Resposta em frequência do filtro P574#5

Tabela 21 – Coeficientes do filtro P576#1

Filtro P576#1		
p(0) a p(28)		
p(0) = 8,94050404E-02	p(10) = 8,72649704E-03	p(20) = -2,43126216E-03
p(1) = 8,57626857E-02	p(11) = 1,54565561E-03	p(21) = -3,60768674E-04
p(2) = 8,50358838E-02	p(12) = -3,33482927E-03	p(22) = 1,42856097E-03
p(3) = 7,61649224E-02	p(13) = -8,61157199E-03	p(23) = 3,23435408E-03
p(4) = 7,12869214E-02	p(14) = -1,17332788E-02	p(24) = 4,05437506E-03
p(5) = 5,99546446E-02	p(15) = -1,30009297E-02	p(25) = 4,36695884E-03
p(6) = 4,89887064E-02	p(16) = -1,29057031E-02	p(26) = 3,23130656E-03
p(7) = 3,79240079E-02	p(17) = -1,15643243E-02	p(27) = 1,24424199E-03
p(8) = 2,69681329E-02	p(18) = -9,28848178E-03	p(28) = -2,42500046E-03
p(9) = 1,73286545E-02	p(19) = -6,29287977E-03	

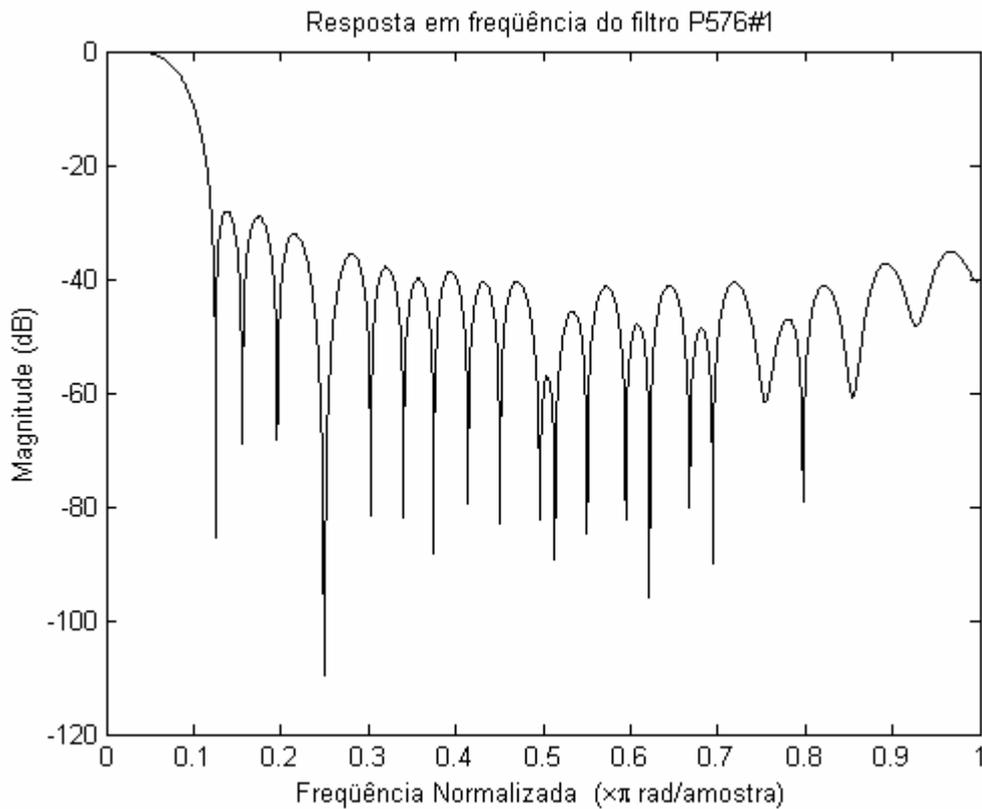


Figura 85 – Resposta em frequência do filtro P576#1

Tabela 22 – Coeficientes do filtro P576#2

Filtro P576#2		
p(0) a p(28)		
p(0) = 8,80523057E-02	p(10) = 8,41517184E-03	p(20) = -2,30978583E-03
p(1) = 8,69596086E-02	p(11) = 1,65121303E-03	p(21) = -8,28823549E-05
p(2) = 8,31413708E-02	p(12) = -4,20344459E-03	p(22) = 1,64775950E-03
p(3) = 7,75478479E-02	p(13) = -9,01366154E-03	p(23) = 3,10433475E-03
p(4) = 7,02413706E-02	p(14) = -1,19941448E-02	p(24) = 3,66309658E-03
p(5) = 6,01634154E-02	p(15) = -1,30904382E-02	p(25) = 3,67652107E-03
p(6) = 4,94256263E-02	p(16) = -1,28326927E-02	p(26) = 2,65192921E-03
p(7) = 3,83668073E-02	p(17) = -1,12138496E-02	p(27) = 1,05829713E-03
p(8) = 2,74203241E-02	p(18) = -8,87725565E-03	p(28) = -1,49591159E-03
p(9) = 1,77408513E-02	p(19) = -5,78763128E-03	

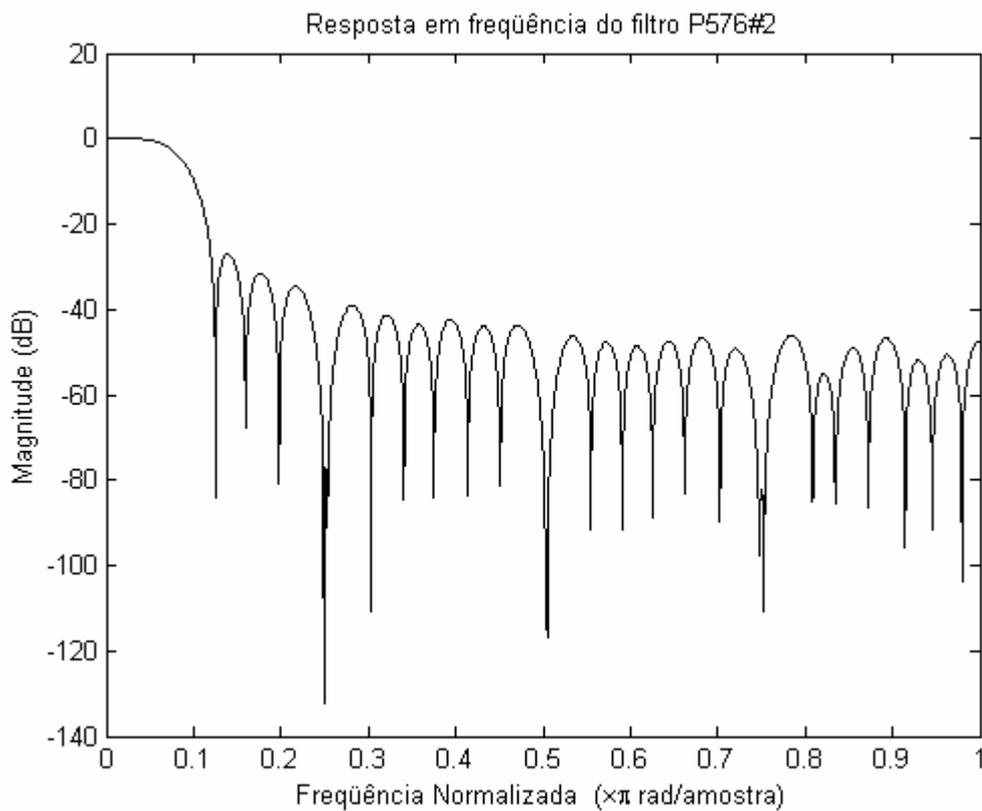


Figura 86 – Resposta em frequência do filtro P576#2

Tabela 23 – Coeficientes do filtro P576#3

Filtro P576#3		
p(0) a p(28)		
p(0) = 8,76164640E-02	p(10) = 9,25497015E-03	p(20) = -2,62413566E-03
p(1) = 8,57410432E-02	p(11) = 1,81689115E-03	p(21) = -5,33232424E-04
p(2) = 8,42959995E-02	p(12) = -4,04807355E-03	p(22) = 1,21141215E-03
p(3) = 7,46533131E-02	p(13) = -8,81759878E-03	p(23) = 2,61459223E-03
p(4) = 7,25774306E-02	p(14) = -1,14089908E-02	p(24) = 3,25277679E-03
p(5) = 5,78752911E-02	p(15) = -1,29486125E-02	p(25) = 3,35457379E-03
p(6) = 5,07153802E-02	p(16) = -1,23936744E-02	p(26) = 2,59752695E-03
p(7) = 3,82603484E-02	p(17) = -1,10840233E-02	p(27) = 1,29822634E-03
p(8) = 2,82063058E-02	p(18) = -8,61312305E-03	p(28) = -7,97448617E-04
p(9) = 1,76169151E-02	p(19) = -5,88231532E-03	

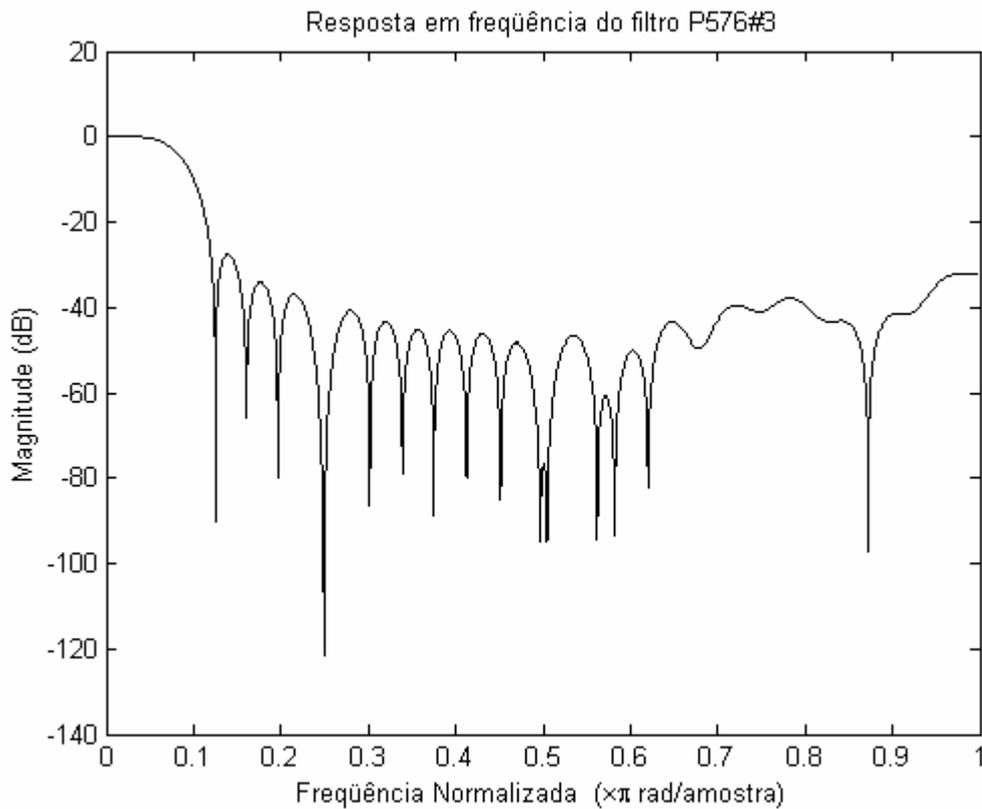


Figura 87 – Resposta em frequência do filtro P576#3

Tabela 24 – Coeficientes do filtro P654#1

Filtro P654#1		
p(0) a p(32)		
p(0) = 4,87609345E-02	p(11) = 2,63542550E-02	p(22) = -4,51734579E-03
p(1) = 4,88174251E-02	p(12) = 2,24135277E-02	p(23) = -5,37919561E-03
p(2) = 4,85165187E-02	p(13) = 1,84086279E-02	p(24) = -5,86464211E-03
p(3) = 4,77255799E-02	p(14) = 1,44846071E-02	p(25) = -6,02980801E-03
p(4) = 4,65083837E-02	p(15) = 1,06613584E-02	p(26) = -5,82138089E-03
p(5) = 4,48011531E-02	p(16) = 7,13024912E-03	p(27) = -5,33182125E-03
p(6) = 4,26720868E-02	p(17) = 4,40298293E-03	p(28) = -4,54830218E-03
p(7) = 4,00847643E-02	p(18) = 2,04287938E-03	p(29) = -3,60254024E-03
p(8) = 3,71276019E-02	p(19) = -6,37178958E-05	p(30) = -2,50876665E-03
p(9) = 3,37906354E-02	p(20) = -1,84452508E-03	p(31) = -1,40786802E-03
p(10) = 3,01926099E-02	p(21) = -3,35475112E-03	p(32) = -2,41048704E-04

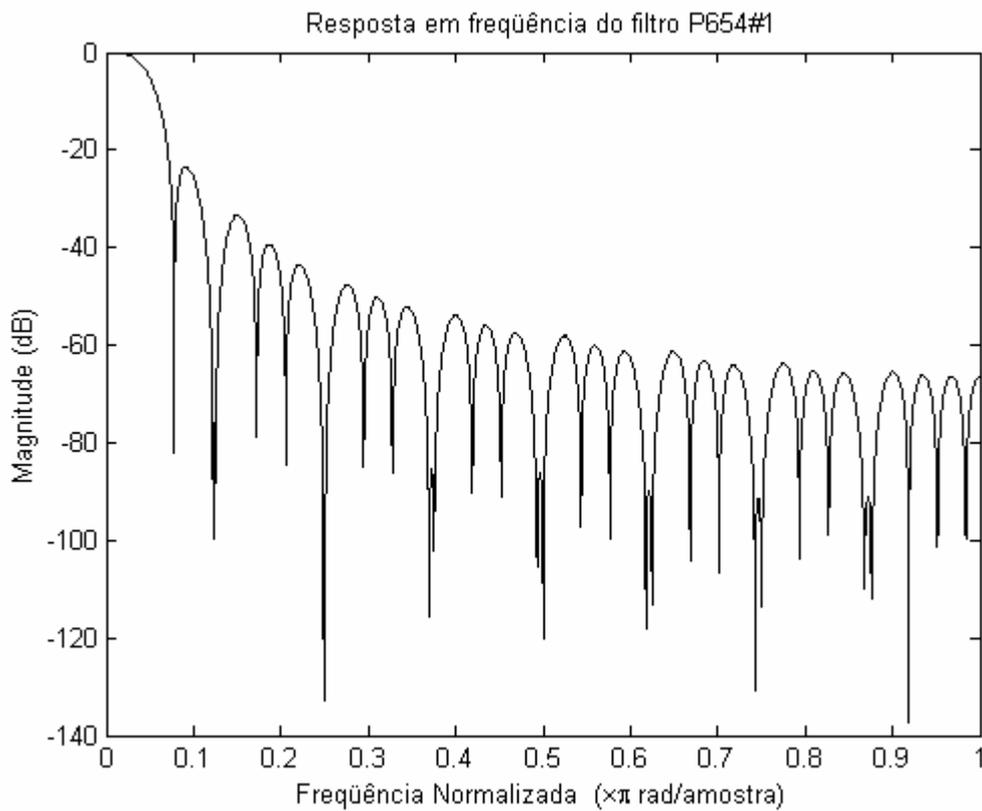


Figura 88 – Resposta em frequência do filtro P654#1

Tabela 25 – Coeficientes do filtro P654#2

Filtro P654#2		
p(0) a p(32)		
p(0) = 1,51086745E-01	p(11) = -2,35655789E-02	p(22) = -1,20254735E-02
p(1) = 1,45043329E-01	p(12) = -1,38544931E-02	p(23) = -1,20791406E-02
p(2) = 1,28732177E-01	p(13) = -2,73043578E-03	p(24) = -9,82654655E-03
p(3) = 1,04586035E-01	p(14) = 7,28729318E-03	p(25) = -5,96090364E-03
p(4) = 7,55443371E-02	p(15) = 1,44924043E-02	p(26) = -1,66865400E-03
p(5) = 4,52870557E-02	p(16) = 1,75430969E-02	p(27) = 2,17242496E-03
p(6) = 1,71794889E-02	p(17) = 1,53537417E-02	p(28) = 4,67870151E-03
p(7) = -5,70078448E-03	p(18) = 9,88355074E-03	p(29) = 5,63026481E-03
p(8) = -2,14873513E-02	p(19) = 2,94959648E-03	p(30) = 4,95649946E-03
p(9) = -2,92263741E-02	p(20) = -3,92112315E-03	p(31) = 3,19302403E-03
p(10) = -2,94750484E-02	p(21) = -9,17270587E-03	p(32) = 6,38220050E-04

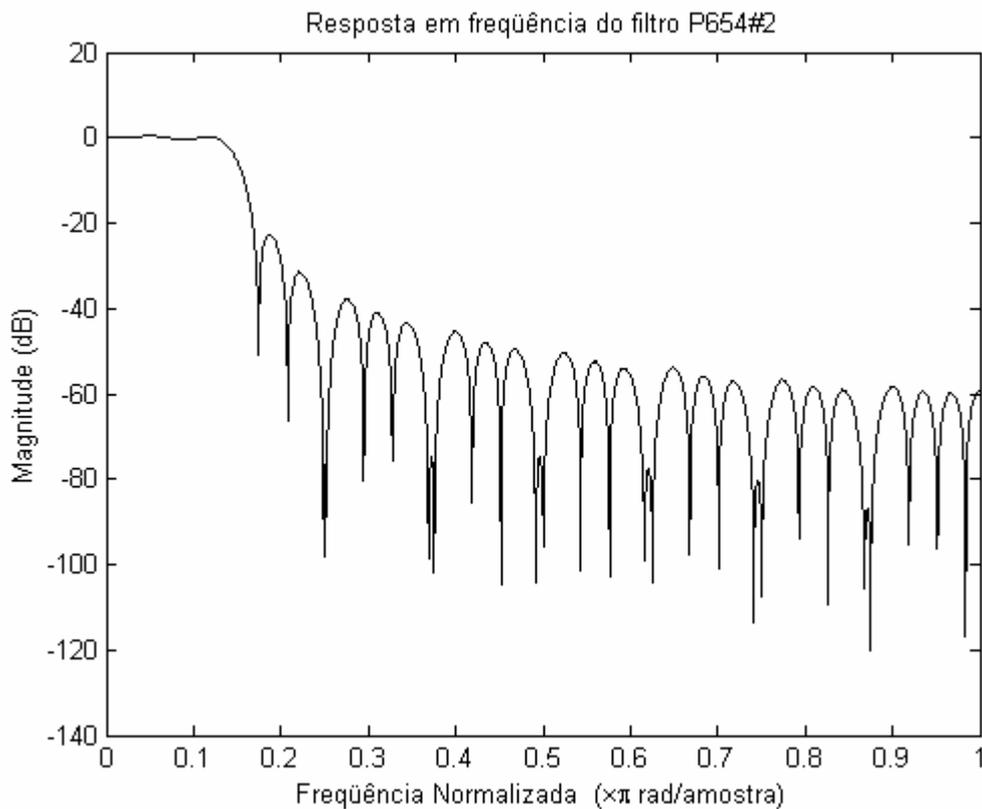


Figura 89 – Resposta em frequência do filtro P654#2

Tabela 26 – Coeficientes do filtro P656#1

Filtro P656#1		
p(0) a p(32)		
p(0) = 7,84084576E-02	p(11) = 1,07005454E-02	p(22) = -6,10796898E-03
p(1) = 7,68848655E-02	p(12) = 4,78284497E-03	p(23) = -3,87924312E-03
p(2) = 7,47200804E-02	p(13) = 2,96818768E-04	p(24) = -1,80689711E-03
p(3) = 6,77653112E-02	p(14) = -3,63291413E-03	p(25) = 2,95232590E-04
p(4) = 6,39984896E-02	p(15) = -6,27976837E-03	p(26) = 1,85364482E-03
p(5) = 5,71845688E-02	p(16) = -6,96504839E-03	p(27) = 3,14030250E-03
p(6) = 4,75227165E-02	p(17) = -9,33222146E-03	p(28) = 3,61341277E-03
p(7) = 4,24896647E-02	p(18) = -1,04421322E-02	p(29) = 3,59675850E-03
p(8) = 3,23514345E-02	p(19) = -1,00834448E-02	p(30) = 2,62398461E-03
p(9) = 2,51366864E-02	p(20) = -9,56258043E-03	p(31) = 1,08076324E-03
p(10) = 1,78487478E-02	p(21) = -7,84814996E-03	p(32) = -1,15073348E-03

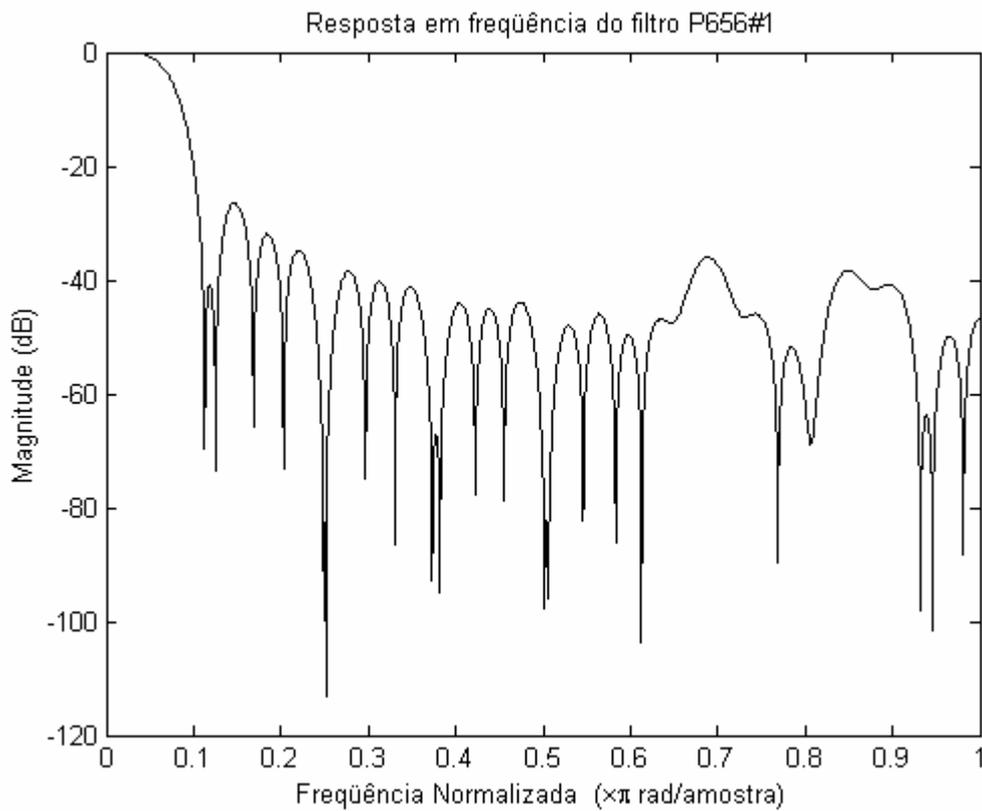


Figura 90 – Resposta em frequência do filtro P656#1

Tabela 27 – Coeficientes do filtro P656#2

Filtro P656#2		
p(0) a p(32)		
p(0) = 1,47894720E-01	p(11) = -2,39225495E-02	p(22) = -9,82796451E-03
p(1) = 1,40212005E-01	p(12) = -1,49701052E-02	p(23) = -1,14113259E-02
p(2) = 1,25451793E-01	p(13) = -2,38284521E-03	p(24) = -1,06367124E-02
p(3) = 1,00376016E-01	p(14) = 6,80905068E-03	p(25) = -7,71511541E-03
p(4) = 7,40566368E-02	p(15) = 1,66506410E-02	p(26) = -3,96943236E-03
p(5) = 4,36626549E-02	p(16) = 2,03366039E-02	p(27) = 8,07146653E-05
p(6) = 1,73223197E-02	p(17) = 1,97966357E-02	p(28) = 3,00647594E-03
p(7) = -5,65082473E-03	p(18) = 1,39753409E-02	p(29) = 4,63609260E-03
p(8) = -1,98386625E-02	p(19) = 7,87067321E-03	p(30) = 4,18375647E-03
p(9) = -2,97380970E-02	p(20) = 4,80071804E-04	p(31) = 2,22525481E-03
p(10) = -2,83059068E-02	p(21) = -5,66382422E-03	p(32) = -1,04673089E-03

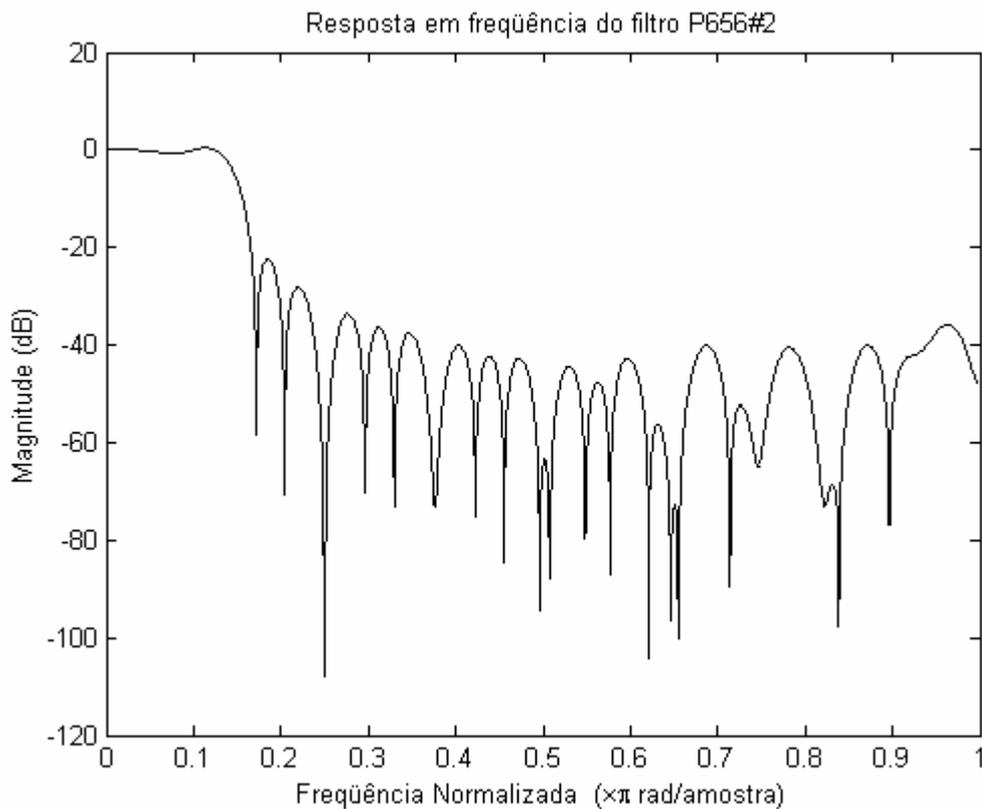


Figura 91 – Resposta em frequência do filtro P656#2

7.3 Parâmetros $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ dos filtros projetados

A seção 4.3 apresenta as figuras de mérito dos filtros maximamente planos. Este anexo contém os gráficos de $MSEMod$ e $MedMod$ em função da frequência de todos os filtros da Tabela 3. Em cada gráfico o $MSEMod(f)$ e o $MedMod(f)$ do filtro são comparados com os respectivos $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ da janela triangular. Os eixos verticais de cada figura são a diferença das amplitudes do módulo e estão escalados para representar o erro máximo da janela triangular (com exceção do filtro **P492#1**)

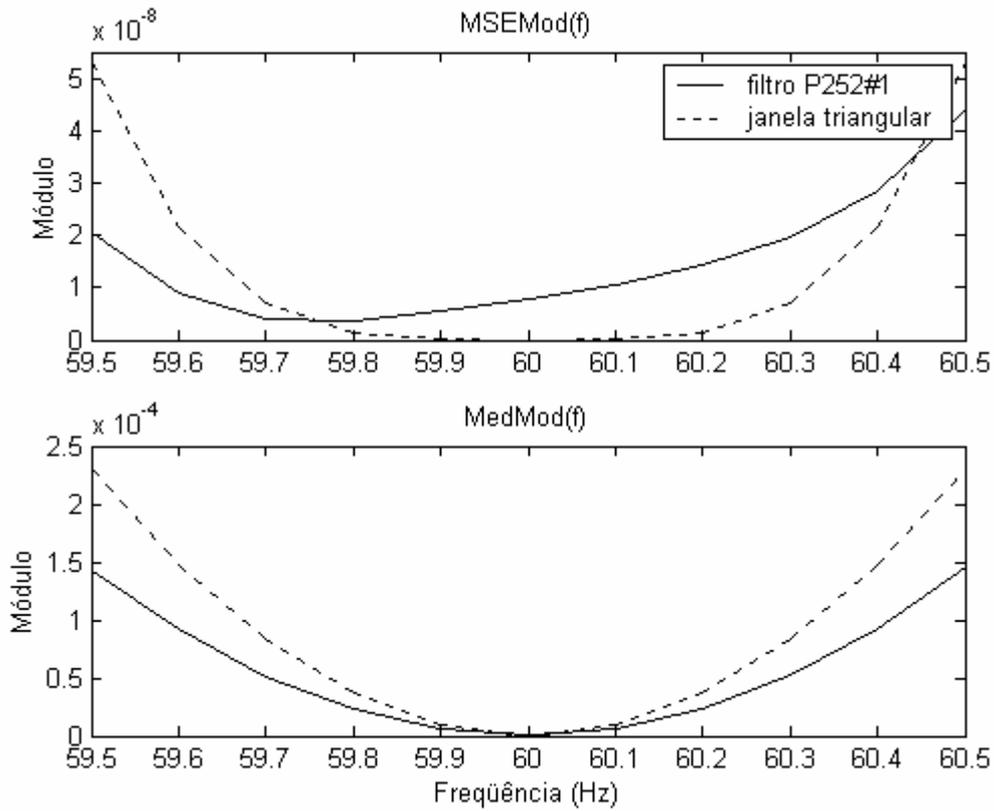


Figura 92 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P252#1

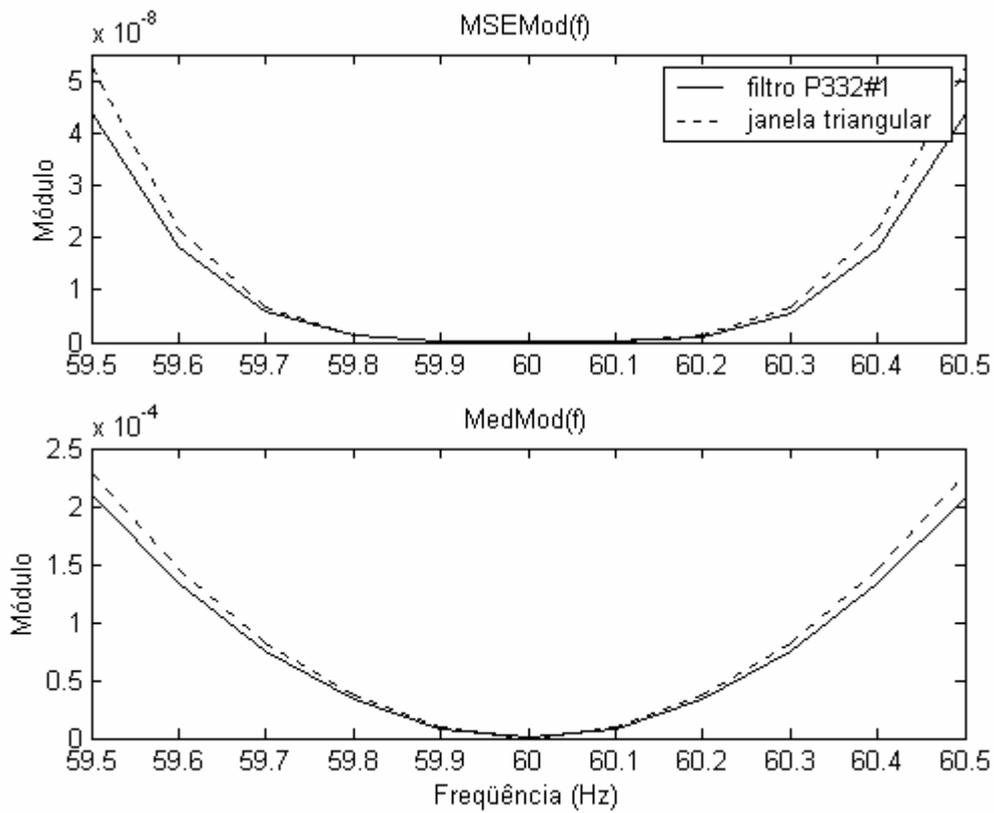


Figura 93 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P332#1

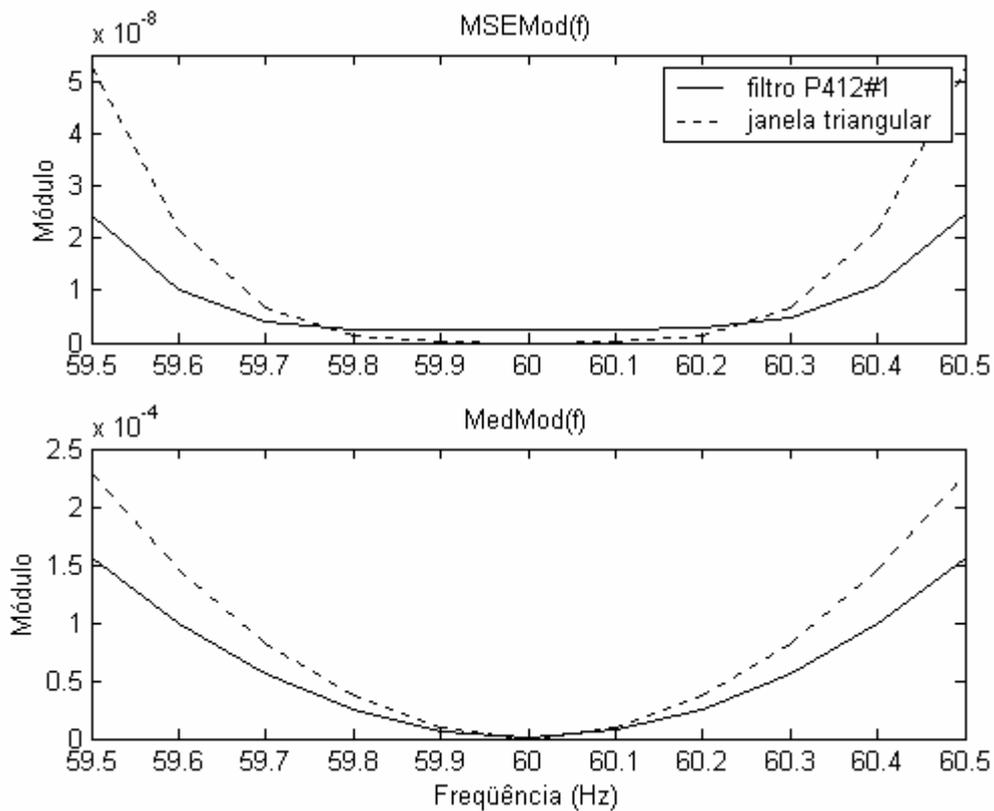


Figura 94 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P412#1

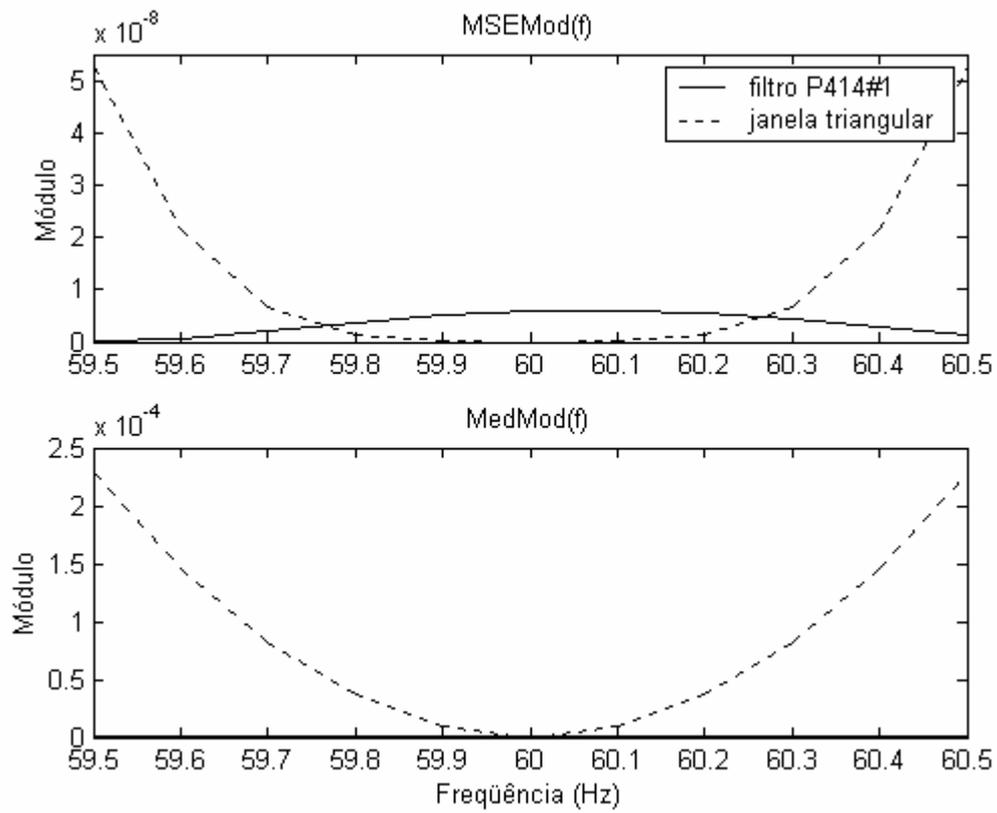


Figura 95 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P414#1

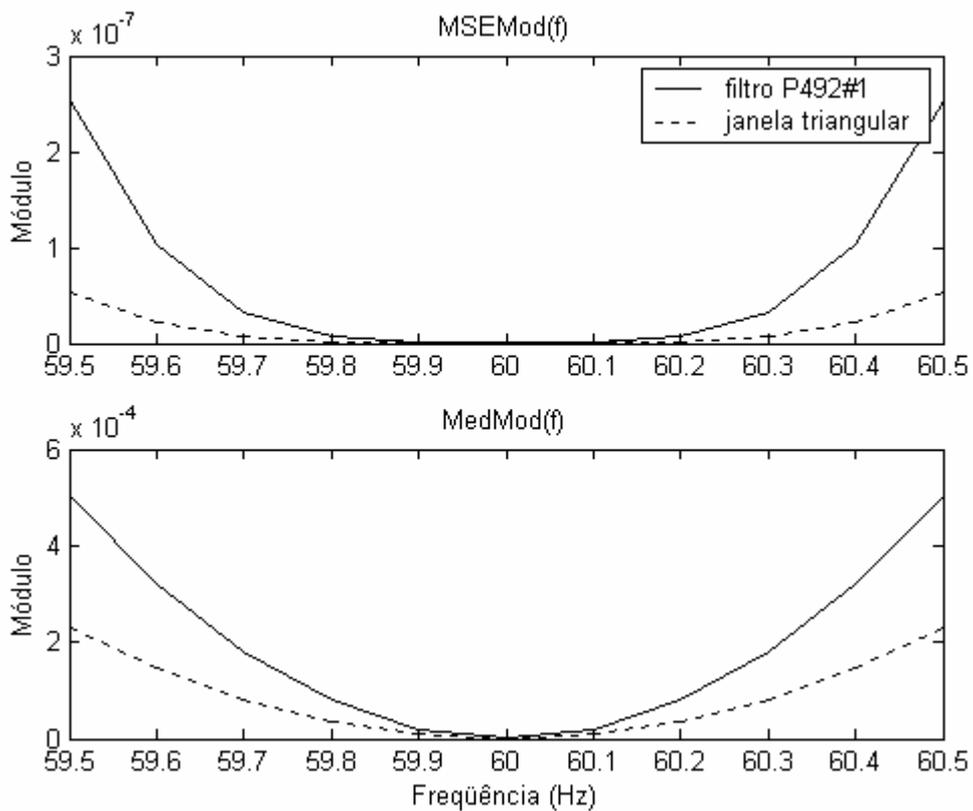


Figura 96 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P492#1

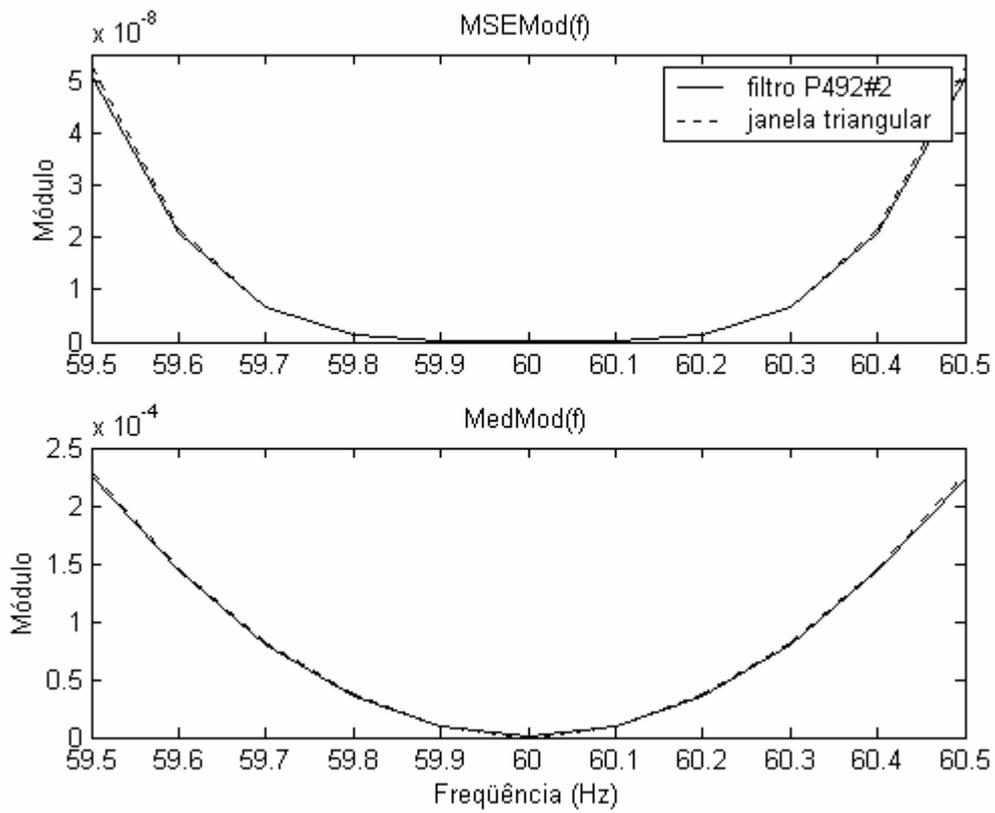


Figura 97 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P492#2

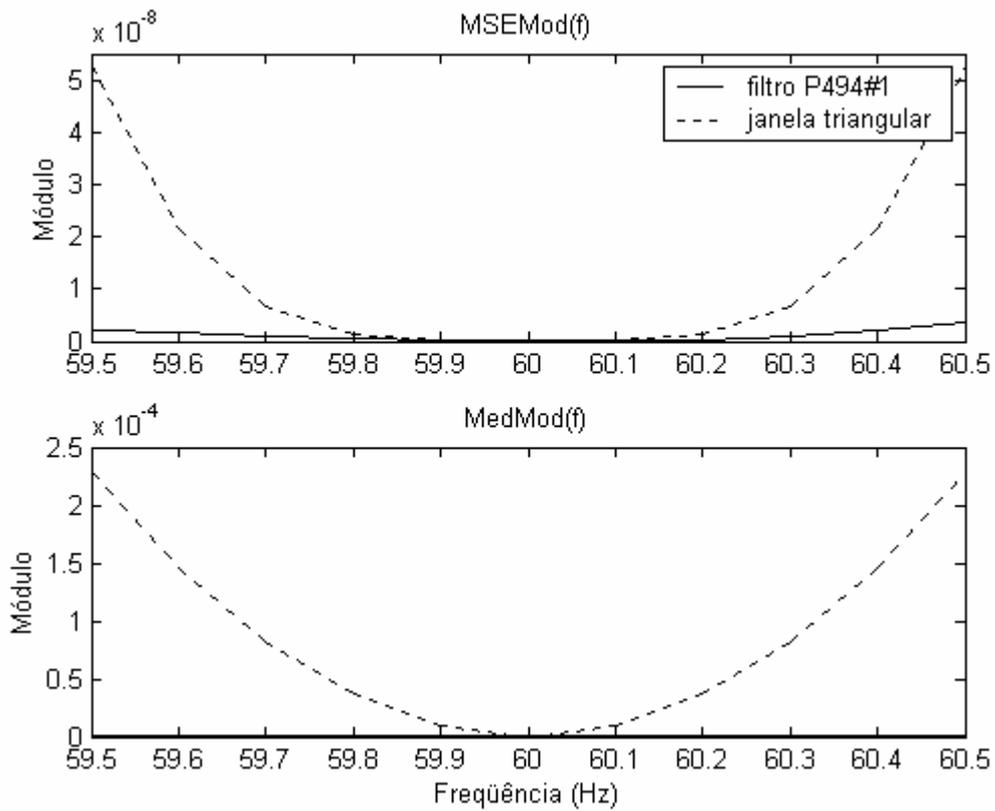


Figura 98 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P494#1

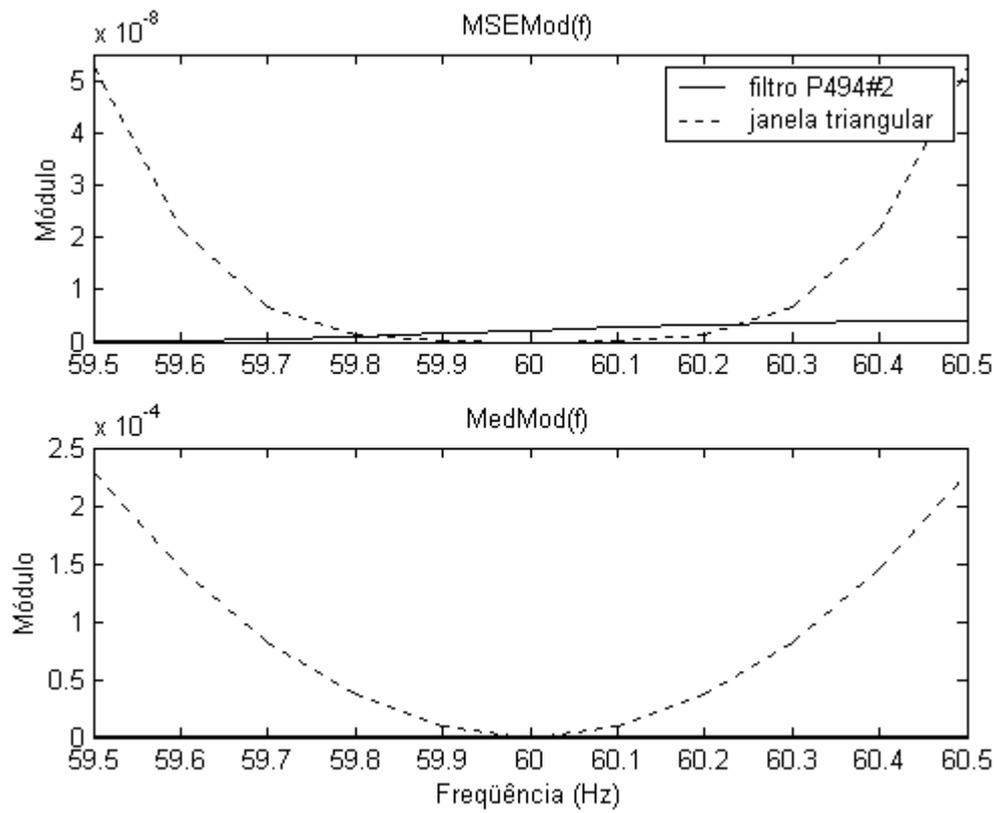


Figura 99 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P494#2

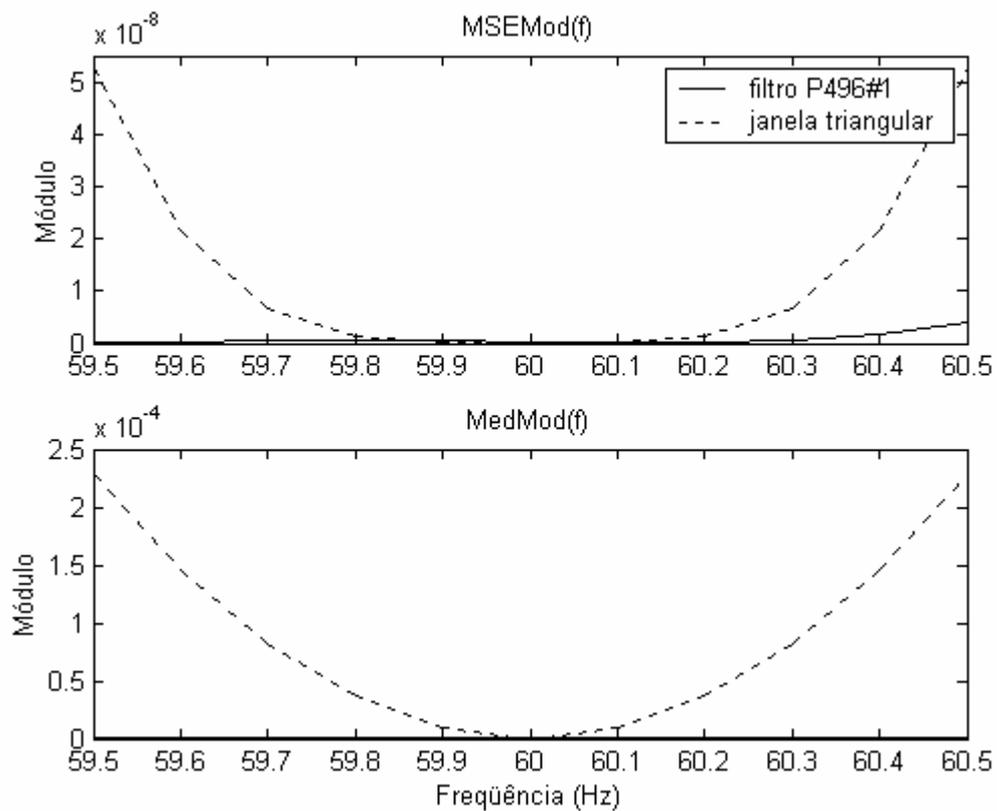


Figura 100 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P496#1

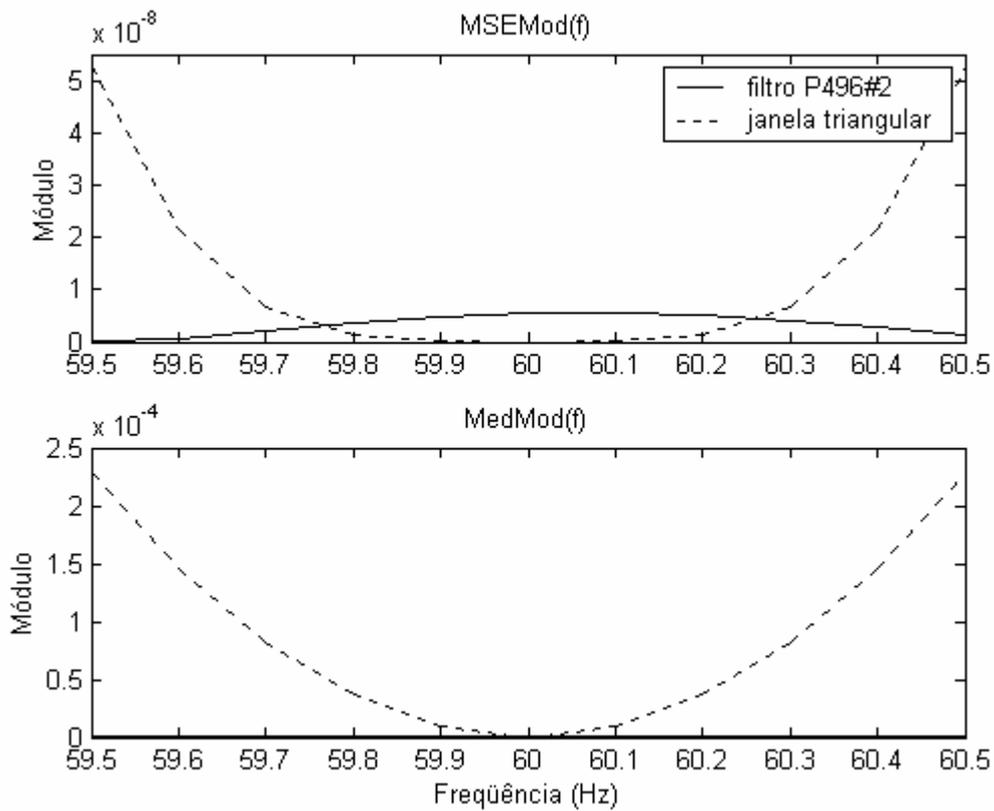


Figura 101 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P496#2

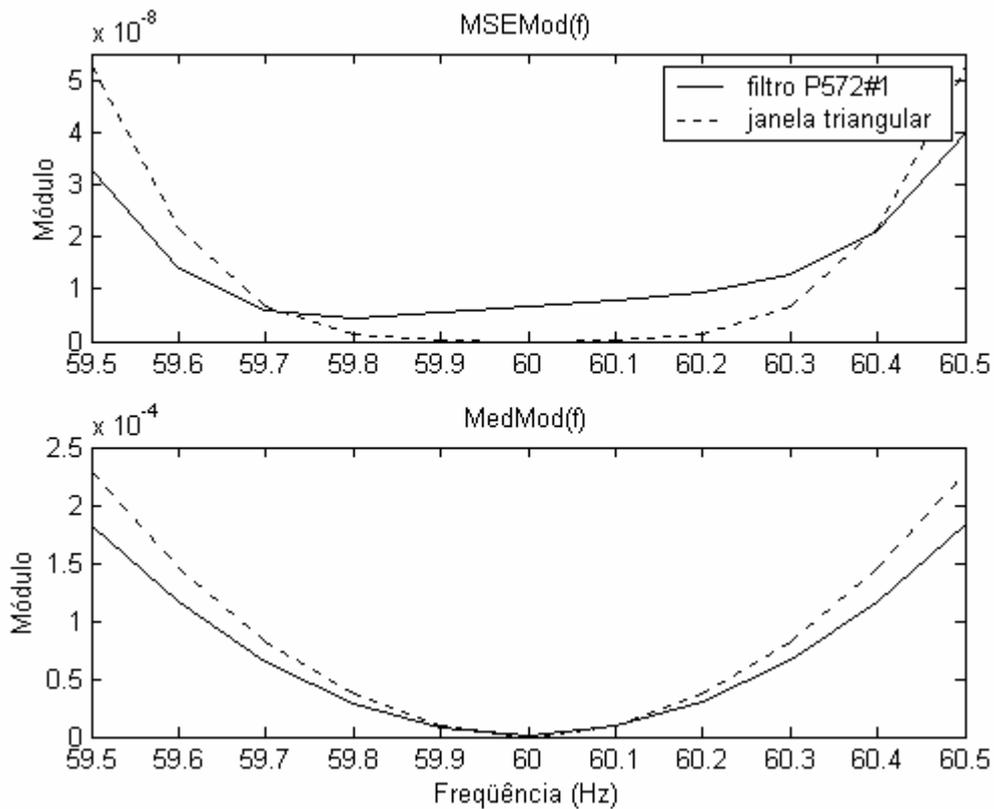


Figura 102 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P572#1

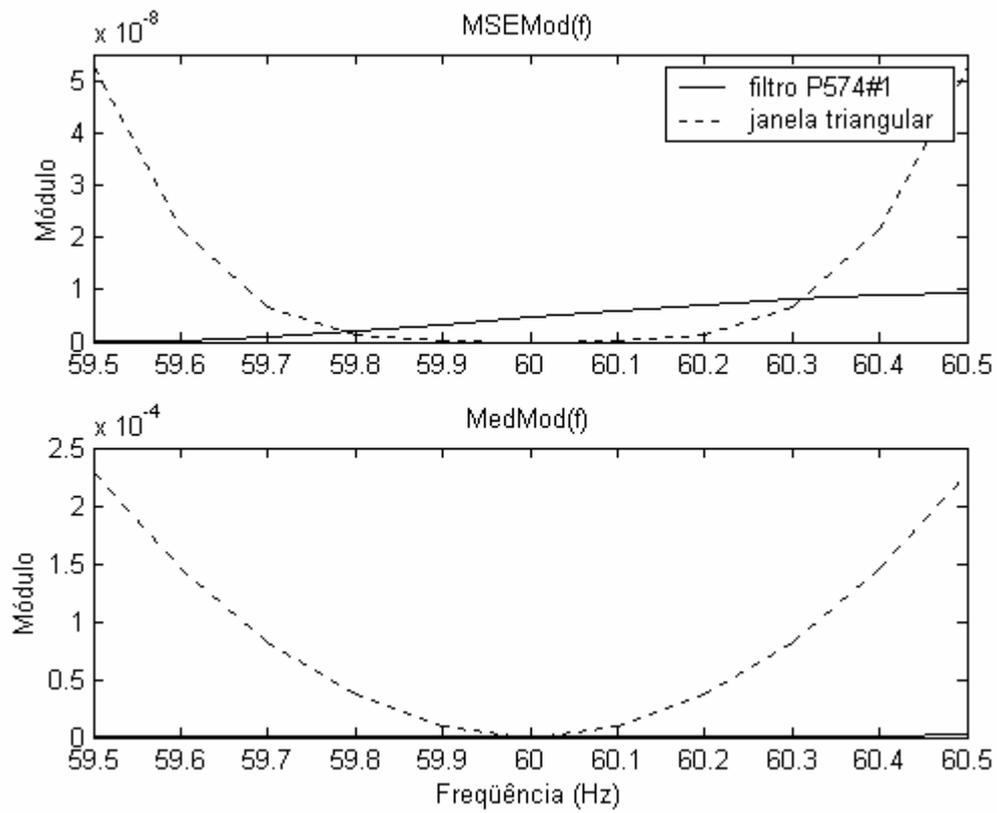


Figura 103 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#1

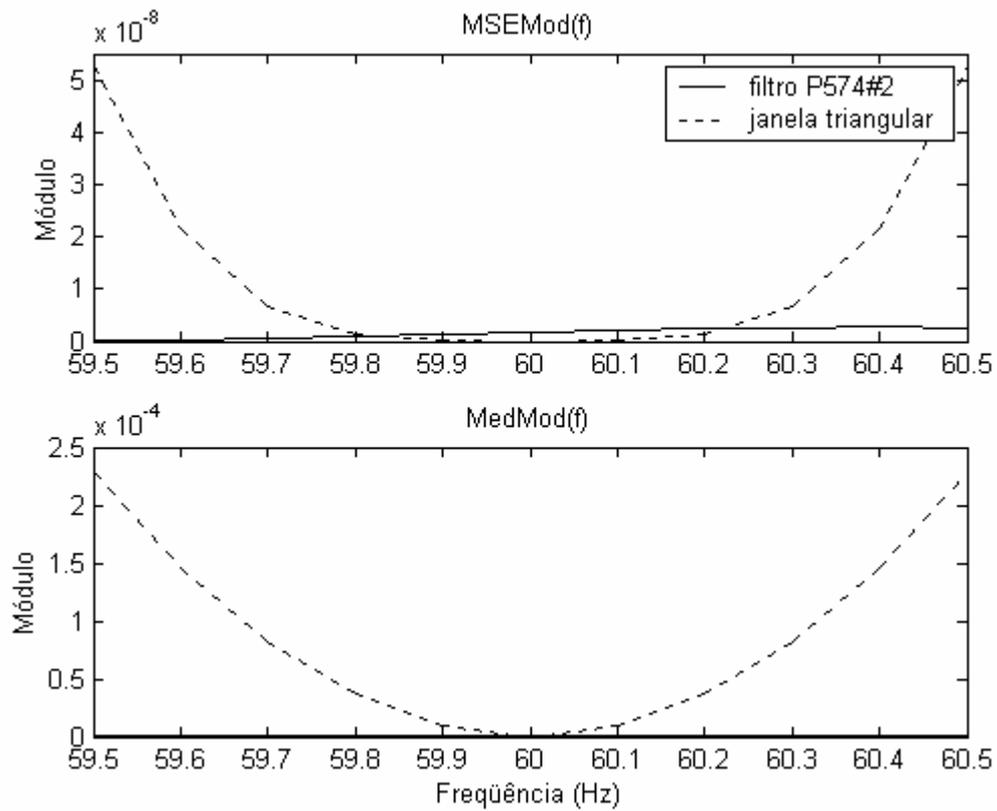


Figura 104 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#2

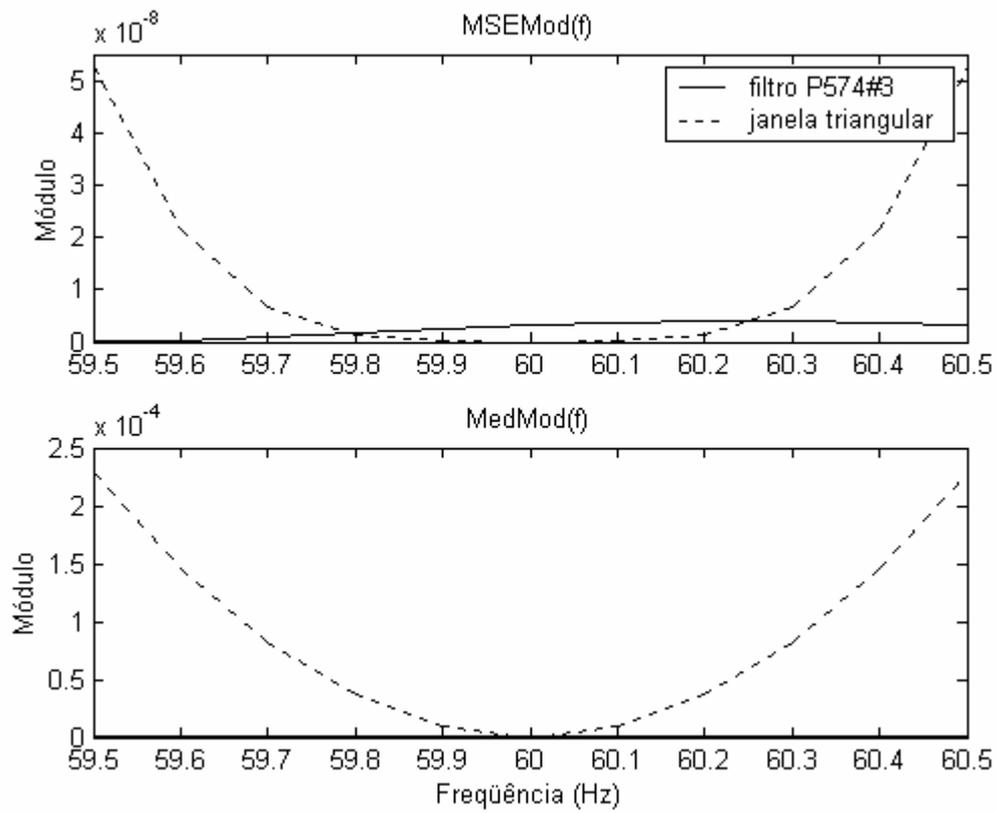


Figura 105 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#3

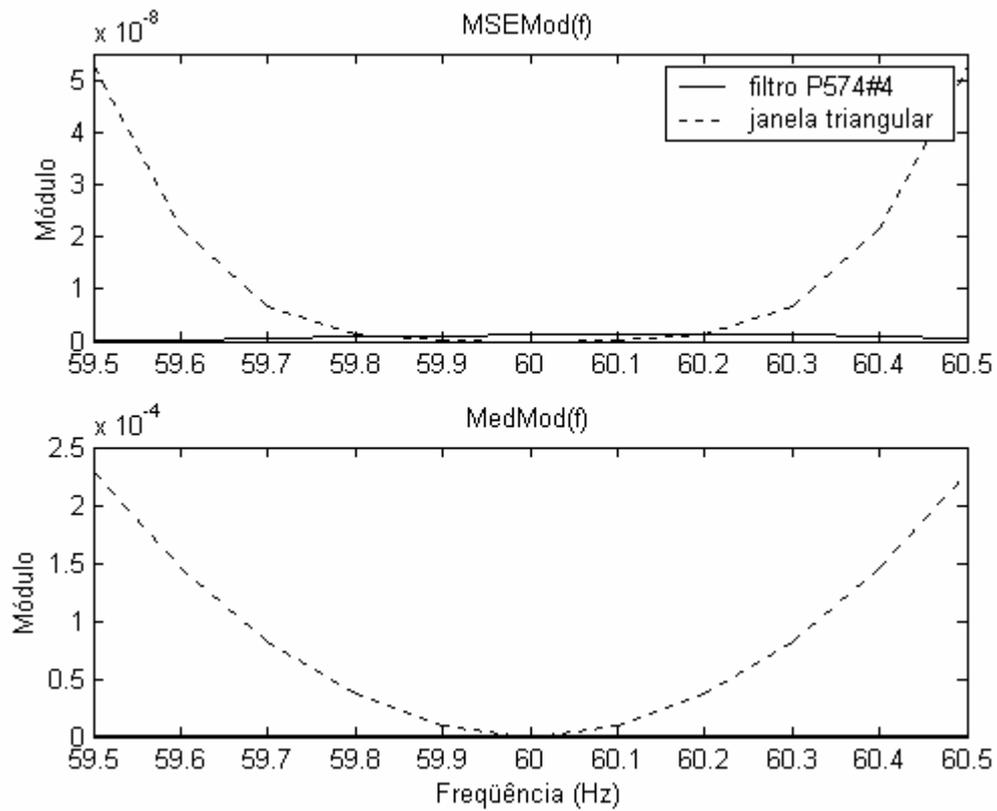


Figura 106 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#4

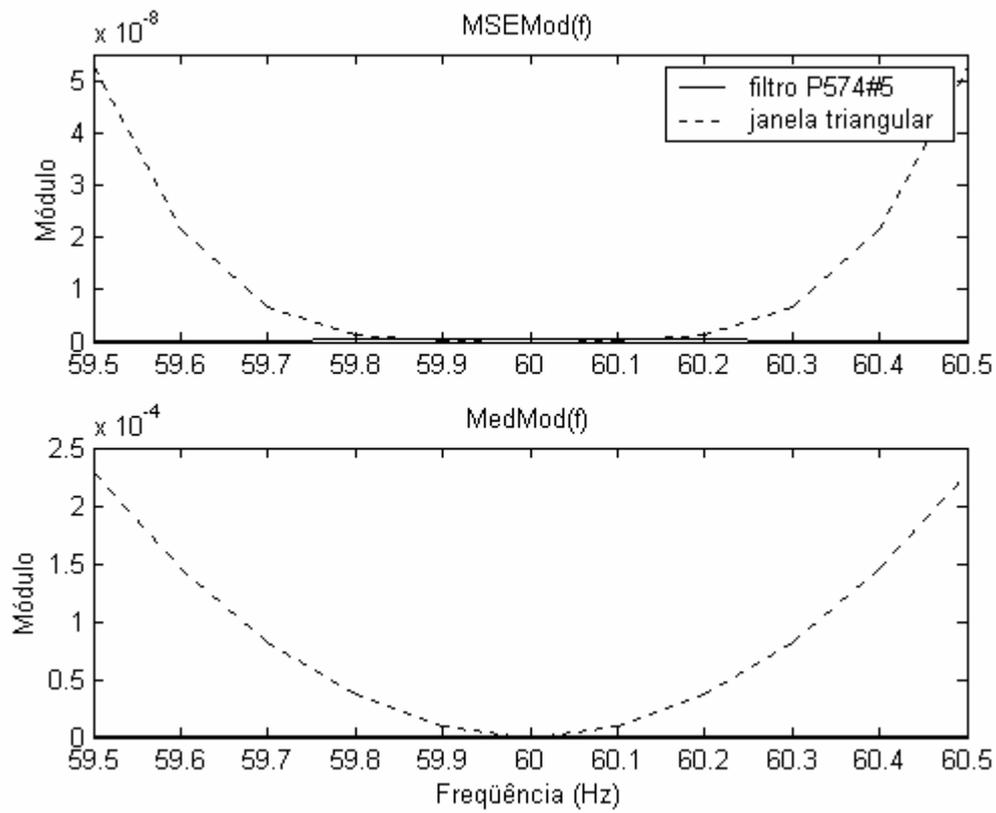


Figura 107 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P574#5

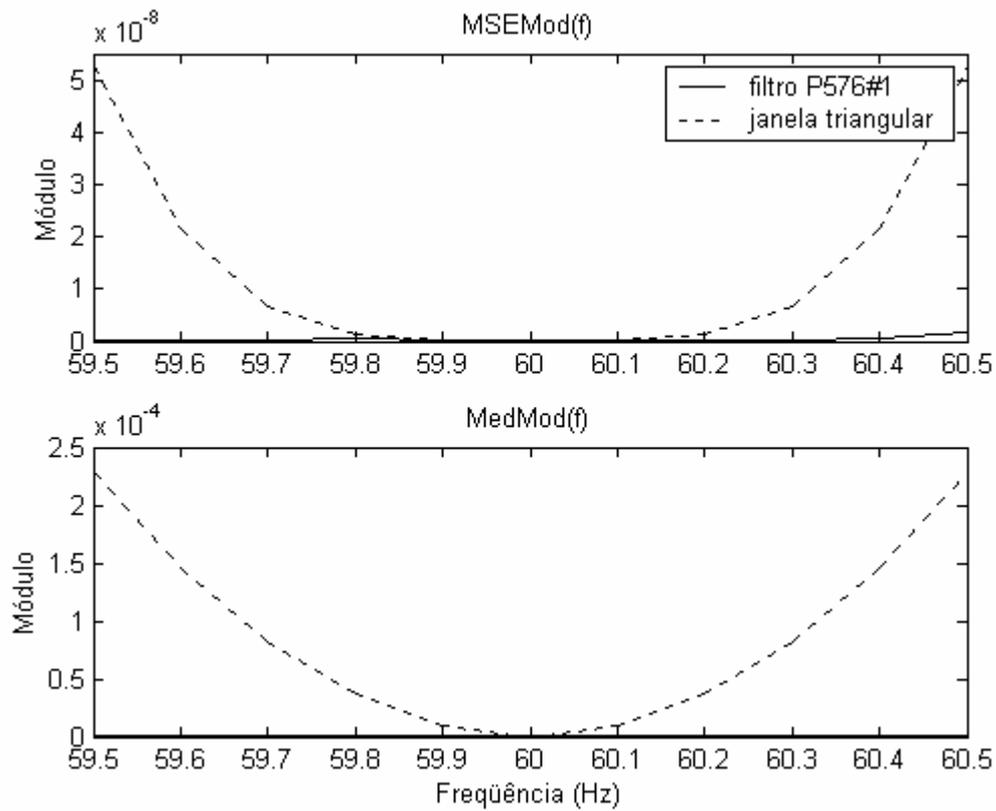


Figura 108 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P576#1

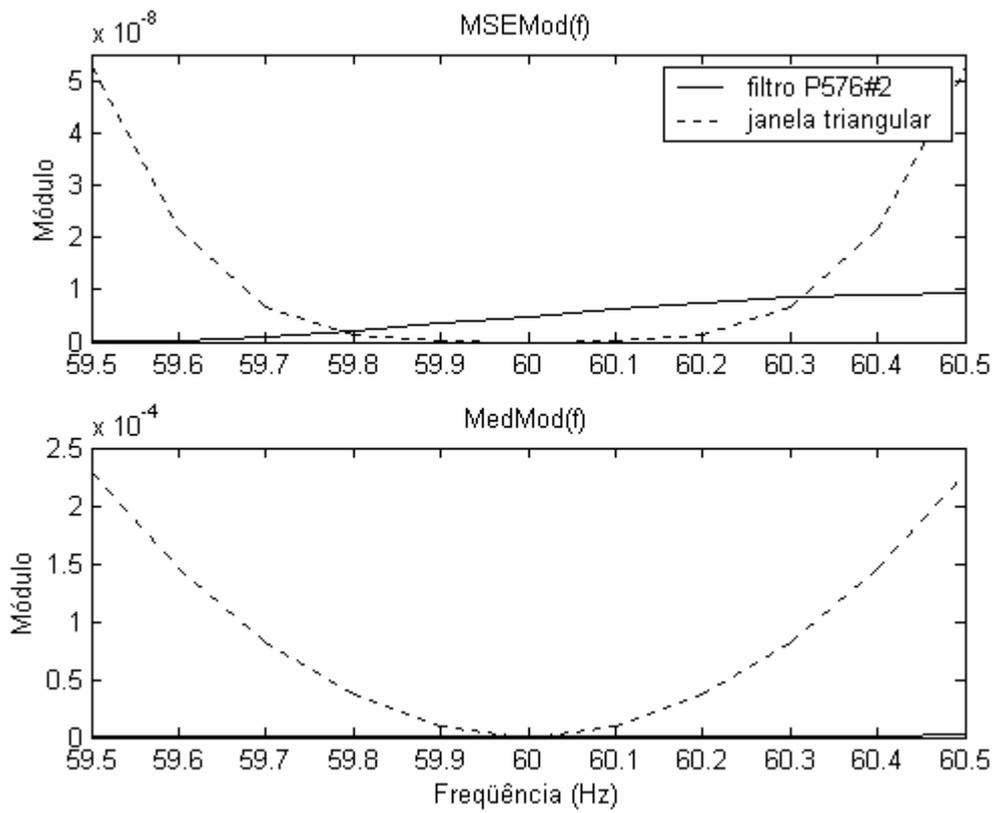


Figura 109 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P576#2

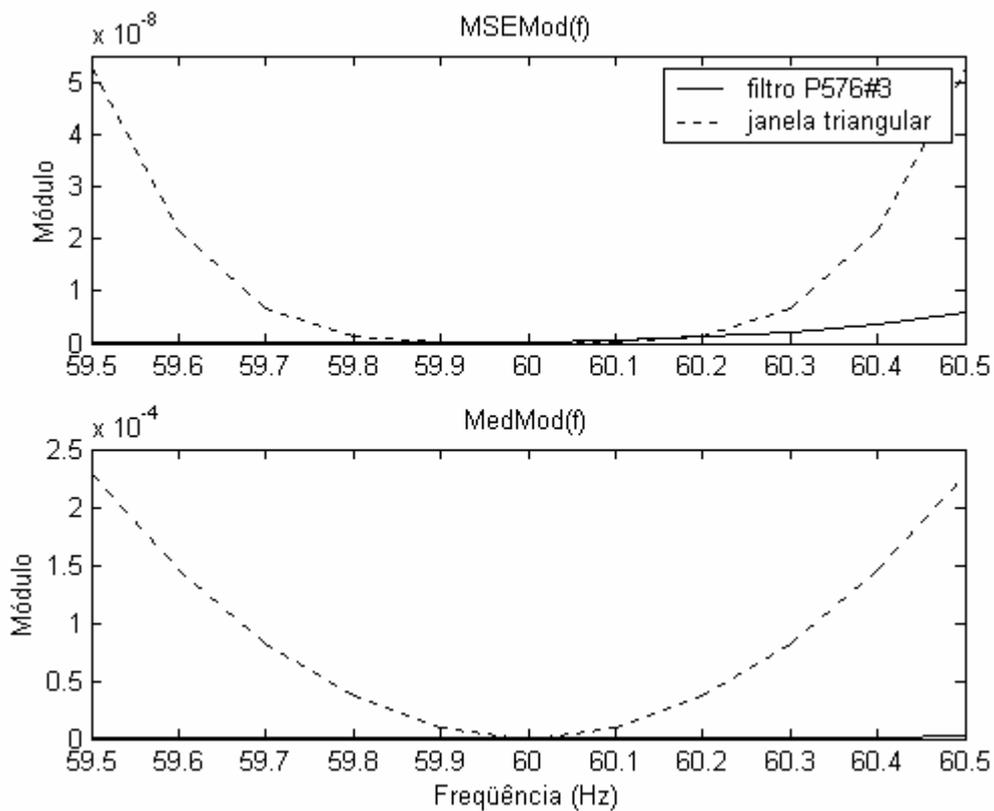


Figura 110 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P576#3

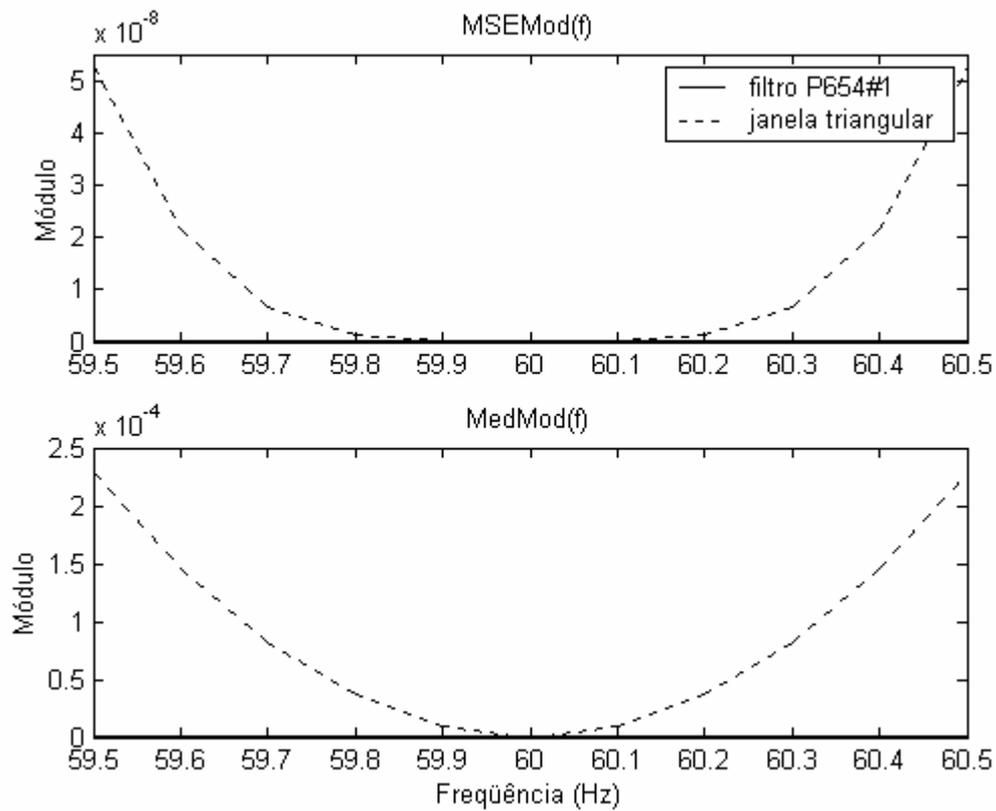


Figura 111 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P654#1

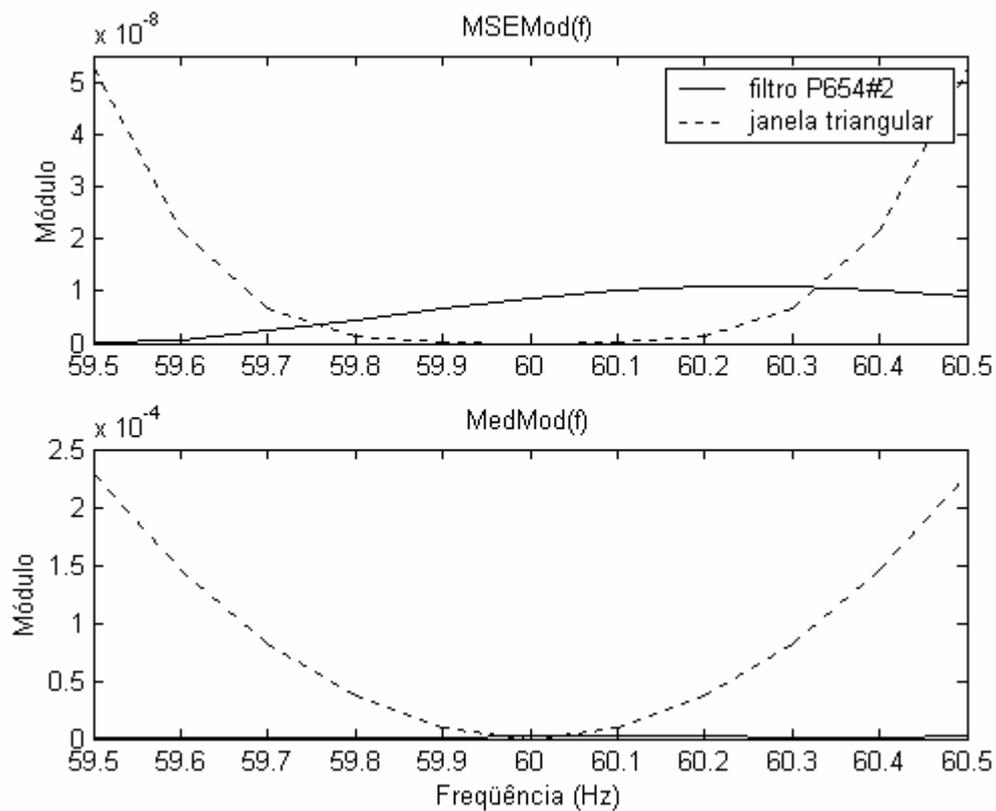


Figura 112 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P654#2

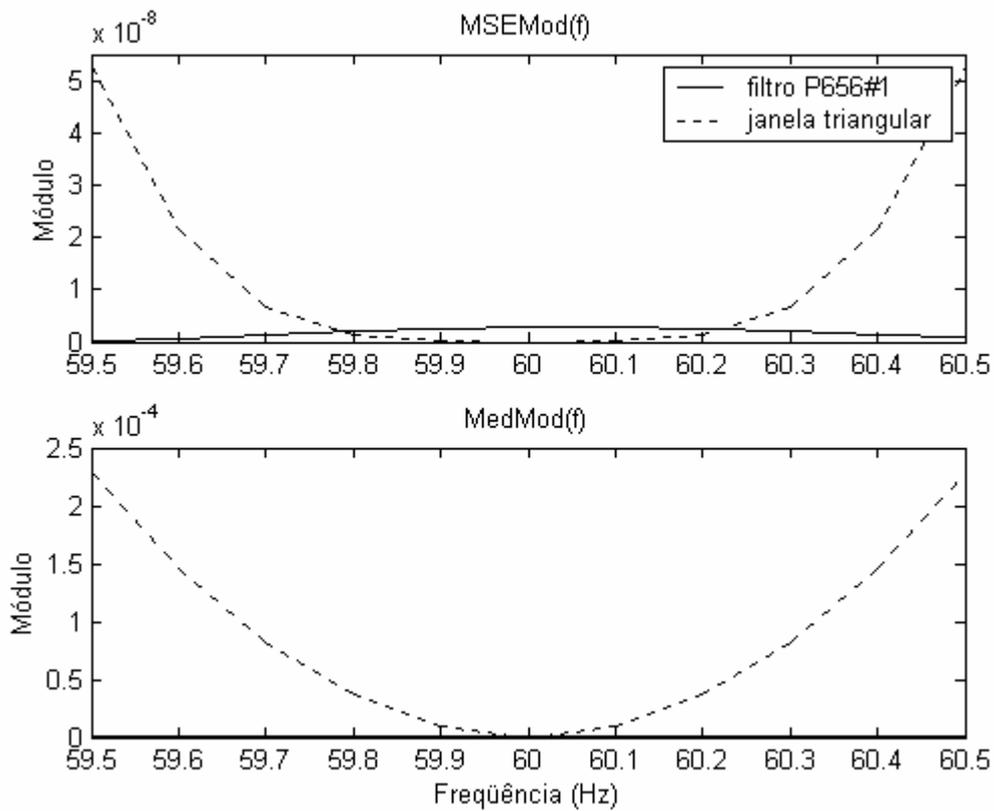


Figura 113 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P656#1

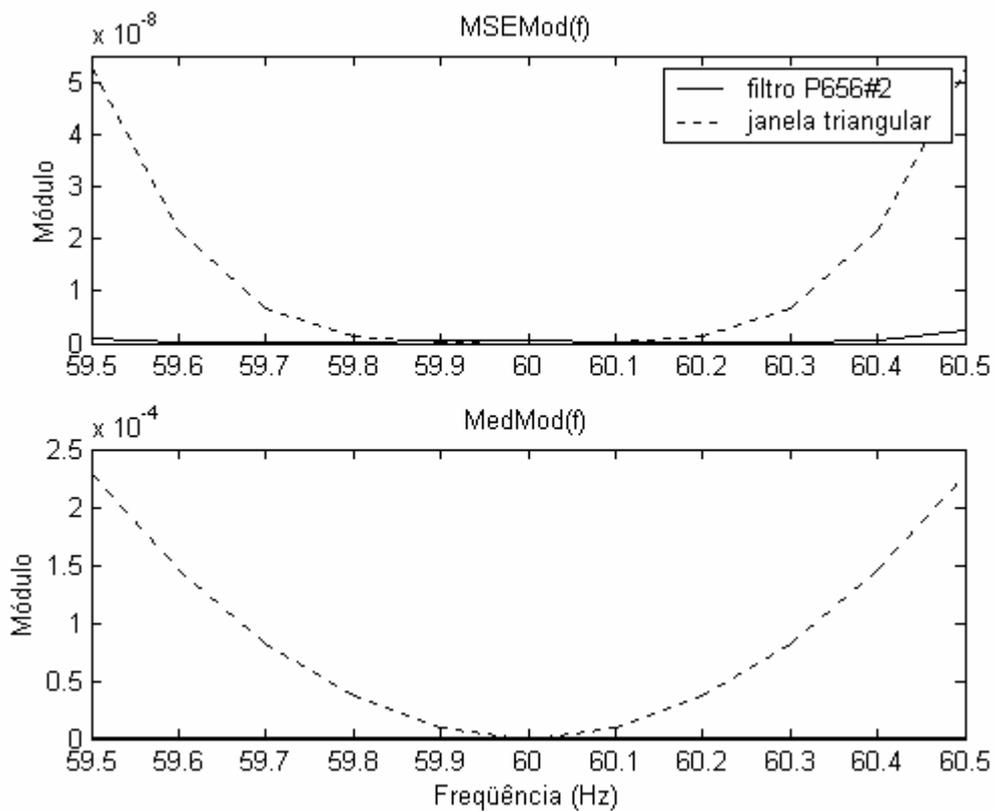


Figura 114 – $MSEMod(f)$ e $MedMod(f)$ do filtro P656#2