

PROJETO EQÛIRIPPLE DE EQUALIZADORES DE ATRASO DE GRUPO

Mauricio Ferreira Quélhas

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Antonio Petraglia, PhD.

---

Prof. Luiz Wagner Pereira Biscainho, DSc.

---

Prof. Fernando Antônio Pinto Barúqui, DSc.

---

Eng. Plutarcho Maravilha Lourenço, DSc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2004

QUÉLHAS, MAURICIO FERREIRA

Projeto Equiripple de Equalizadores  
de Atraso de Grupo [Rio de Janeiro] 2004

xii, 102 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,  
M.Sc., Engenharia Elétrica, 2004)

Tese – Universidade Federal do Rio  
de Janeiro, COPPE

1. Atraso de Grupo Equiripple
2. Filtros Passa-Tudo
3. Linearidade de Fase
4. Otimização
5. Redes Neurais

I. COPPE/UFRJ    II. Título (série)

A meus pais, meu irmão, meu avô, à Patricia e a todos amigos. Em especial, a meus avós, Valdemiro, Joaquina e Ilza que, infelizmente, não podem estar aqui neste momento tão importante.

## **Agradecimento**

A meu orientador Prof. Antonio Petraglia, pela paciência, dedicação, incentivo, confiança e oportunidades ao longo destes quatro anos e meio de trabalho, desde a iniciação científica.

Aos Profs. Fernando Antônio Pinto Barúqui e Luiz Wagner Pereira Biscainho por mais uma participação em avaliação de meus trabalhos, e pela contribuição dada.

Ao Sr. Plutarcho Maravilha Lourenço por participar da banca de avaliação desta tese.

Ao Prof. Joarez Bastos Monteiro por toda contribuição direta ou indireta, e apoio.

A todos os integrantes do Laboratório de Processamento Analógico e Digital de Sinais, pelo ambiente de trabalho e apoio.

A todos os professores do Programa de Engenharia Elétrica da COPPE, em especial à Prof<sup>a</sup>. Mariane Rembold Petraglia e ao Prof. Sergio Lima Netto.

A todo o corpo técnico do Programa de Engenharia Elétrica da COPPE.

Ao Prof. Tapio Saramäki, da Tampere University of Technology, Finlândia, pelas discussões sobre o trabalho e sugestões.

À CAPES e à FAPERJ, pelo fornecimento de bolsa nestes dois anos de curso.

A meus pais, José Mauro e Maria José, meu irmão, Marcelo, e meu avô, José André, por tudo, sempre.

À Patrícia, por todo apoio, paciência e incentivo.

A todos os meus parentes.

A todos os colegas de curso, que tanto me ajudaram durante e após as disciplinas, pelas trocas de conhecimento e experiência, incentivo e apoio.

A todos os meus amigos e às pessoas que comigo estiveram no decorrer do trabalho e que de certa forma contribuíram, tecnicamente ou não.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## PROJETO EQUÍRIPPLE DE EQUALIZADORES DE ATRASO DE GRUPO

Mauricio Ferreira Quélhas

Dezembro/2004

Orientador: Antonio Petraglia

Programa: Engenharia Elétrica

Este trabalho tem por objetivo corrigir a não-linearidade da resposta de fase de filtros IIR, desenvolvendo mecanismos de projeto de equalizadores da resposta de atraso de grupo. O método baseia-se na conexão em cascata do filtro IIR com o filtro equalizador, formado por filtros passa-tudo de segunda ordem. Se a resposta de atraso de grupo for suficientemente próxima de uma constante, pode-se afirmar que a resposta de fase é aproximadamente linear. O problema da não-linearidade de fase é revisado, bem como contratempos encontrados por rotinas de otimização *minimax* aplicadas ao projeto dos filtros equalizadores. São descritas duas diferentes estratégias de alocação dos pólos e zeros dos filtros passa-tudo que facilitam a obtenção da resposta ótima. Dois diferentes métodos de estimativa inicial são apresentados, buscando aumentar a robustez, evitando mínimos locais da função custo, e também acelerando a convergência. Um novo método de otimização é proposto, aplicável aos projetos considerados, buscando exclusivamente pela resposta de atraso equiripple. Simulações são apresentadas, mostrando a eficácia do método.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## EQUIRIPPLE DESIGN OF GROUP DELAY EQUALIZERS

Mauricio Ferreira Quélhas

December/2004

Advisor: Antonio Petraglia

Department: Engenharia Elétrica

The purpose of this work is to overcome the non-linearity of IIR filter phase response, developing mechanisms for the design of group delay equalizers. The procedure is based on cascading the IIR filter with the equalizer filter, which consists of second-order allpass filter sections. If the group delay response is close enough to a constant value, then the phase response is approximately linear. The problem of the phase non-linearity is reviewed, as well as drawbacks of minimax optimization procedures applied to the design of optimum group delay equalizers. Two different strategies for the equalizer poles and zeros allocation are described, improving the search for the optimum response. Two different methods for providing the initial solution are presented, resulting in improved robustness, avoiding local minima of the cost function, and also fastening the convergence. A new optimization procedure which searches exclusively for the equiripple group delay response is proposed, applicable to the mentioned design. Simulations are presented, proving the efficacy of the developed procedure.

# Índice

<b>1. Introdução</b>	
1.1. Considerações Iniciais	1
1.2. Trabalhos Anteriores	3
1.3. Tópicos do Trabalho	5
<b>2. Motivações</b>	
2.1. Linearidade da Resposta de Fase	6
2.2. Problemas Encontrados nas Rotinas de Otimização <i>Minimax</i>	12
<b>3. Estratégias de Alocação</b>	
3.1. Filtros Passa-Tudo como Equalizadores	17
3.2. <i>Estratégia A</i> de Alocação	20
3.3. <i>Estratégia B</i> de Alocação	21
3.4. Critério de Decisão	25
<b>4. Métodos de Estimativa Inicial</b>	
4.1. Trabalhos Anteriores	27
4.2. Estimativa Inicial com Redes Neurais	28
4.2.1. Avaliação Subjetiva da Influência das Entradas	31
4.2.2. Descrição das Entradas e Saídas	34
4.2.3. Pré-Processamento dos Dados	36
4.2.4. Treinamento das Redes Neurais	39
4.2.5. Resultados	40
4.3. Estimativa Gráfica dos Módulos	44
4.3.1. Método de Umino [3]	44
4.3.2. Método Gráfico de Alocação Inicial	45
4.3.3. Como Escolher $r_{p,i}$ a Partir de $h_{pico,i}$ ?	47
<b>5. Método de Otimização Eqüiripple</b>	
5.1. Origem da Idéia	57
5.2. Otimização Eqüiripple	60
5.2.1. Ajustes dos Parâmetros	60
5.2.2. Passo de Atualização dos Parâmetros	63
5.2.3. Triangulação de Valores	68
5.2.4. Seqüência de Ajustes	70

5.2.5. Mudança de Estratégia	71
5.2.6. Critério para Mudança de Estratégia	74
5.2.7. Critério de Parada	75
5.2.8. Resumo da Otimização Eqüiripple	76
5.3. Simulações	79
5.3.1. Avaliação das Etapas de Atualização dos Parâmetros	79
5.3.2. Otimização Eqüiripple com <i>Estratégia A</i> de Alocação	83
5.3.3. Estimativas Iniciais	88
5.3.4. Otimização Eqüiripple com <i>Estratégia B</i> de Alocação	89
5.3.5. Otimização Eqüiripple x Otimização <i>minimax</i>	92
<b>6. Conclusões</b>	
6.1. Considerações sobre o Método	98
6.2. Trabalhos Futuros	99
<b>Referências</b>	<b>101</b>

## Índice de Figuras

1.1	Esquemático da equalização da resposta de atraso de grupo: (a) conexão do filtro equalizador em cascata com o filtro IIR, e (b) estrutura interna do filtro equalizador, formado por conexões em cascata de $N/2$ seções passa-tudo de 2 <sup>a</sup> -ordem.	3
2.1	Exemplos de respostas de atraso de grupo para filtros com resposta de fase (a) linear e (b) não linear ( <i>linha sólida</i> ). Também em (b) as respostas de um possível equalizador ( <i>linha tracejada</i> ) e do filtro resultante ( <i>linha pontilhada e tracejada</i> ).	8
2.2	Imagens (a) original, (b) após filtragem IIR, (c) após filtragem IIR seguida de equalização e (d) após filtragem FIR. Para as imagens (b), (c) e (d) já foram descontados os atrasos de cada filtragem.	10
2.3	Resultados de filtrações IIR de um ruído com banda limitada (a) sem equalização e (b) com equalização.	11
2.4	Resultados de equalização de 8 <sup>a</sup> -ordem: (a) solução ótima, (b) solução equiripple em mínimo local, (c) solução equiripple em outro mínimo local, e (d) solução não-equiripple.	15
2.5	Resultados de equalização (a) com ajuste manual dos parâmetros, permitindo o aparecimento da cauda, e (b) com ajuste otimizado por rotina <i>minimax</i> .	16
3.1	Diagrama ilustrando simetria entre os pólos e zeros de uma seção passa-tudo.	18
3.2	Três exemplos de filtros passa-tudo de diferentes ordens: (a) diagramas de pólos e zeros e (b) respostas em frequências destes filtros.	18
3.3	Diagramas de pólos e zeros e respostas de atraso de grupo de (a) um filtro só com pólos ( <i>all-pole</i> ), (b) um filtro com zeros finitos e pólos na origem e (c) filtro passa-tudo, formado pela união dos filtros em (a) e (b).	20
3.4	Uso de filtros passa-tudo para equalização da resposta de atraso de grupo de filtros IIR: equalizações de (a) 2 <sup>a</sup> -ordem e (b) 4 <sup>a</sup> -ordem. Em linhas sólidas a resposta do filtro IIR, em linhas tracejadas as respostas dos filtros equalizadores, e em linhas pontilhadas e tracejadas as respostas equalizadas.	22
3.5	Exemplos de equalização usando as <i>Estratégias A</i> e <i>B</i> , mostrando os <i>Estágios 1</i> e <i>2</i> da segunda estratégia. Em (a) ocorre a <i>Imperfeição SEM</i> , e em (b) a <i>Imperfeição COM</i> .	23
3.6	Tomada dos valores para verificação do critério de decisão pelas duas possíveis estratégias.	26
3.7	Critérios de decisão por uma ou outra estratégia de alocação, com região de dúvida.	26
4.1	Estrutura geral das redes utilizadas neste trabalho.	29

4.2	Respostas de atraso de grupo de um filtro IIR qualquer ( <i>linha sólida</i> ), a resposta considerando apenas os pólos ( <i>linha tracejada</i> ) e a diferença entre as duas respostas ( <i>linha pontilhada</i> ). É mostrada apenas a faixa de passagem.	32
4.3	Alturas da resposta de atraso consideradas como entradas <i>a priori</i> , $h_1$ , $h_2$ e $h_{pico}$ , e alturas consideradas para o projeto das redes neurais, $h_{pico,1}$ e $h_{pico,2}$ . As alturas são tomadas nas frequências pré-determinadas $\omega_1$ e $\omega_2$ .	33
4.4	Ilustração dos pólos considerados como entradas das redes neurais, para um filtro elíptico de 11 <sup>a</sup> -ordem.	35
4.5	Áreas tomadas como entradas para a rede neural: $Area_1$ é a área embaixo da curva de resposta do atraso de grupo, $Area_2$ é a área acima da curva e abaixo do pico da resposta.	36
4.6	Curvas de atraso de grupo do filtro elíptico do Exemplo 4.2.1, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2 <sup>a</sup> a 8 <sup>a</sup> -ordens.	41
4.7	Curvas de atraso de grupo do filtro elíptico do Exemplo 4.2.2, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2 <sup>a</sup> a 10 <sup>a</sup> -ordens.	42
4.8	Curvas de atraso de grupo do filtro de Chebyshev do Exemplo 4.2.3, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2 <sup>a</sup> a 10 <sup>a</sup> -ordens.	43
4.9	Respostas de atraso de grupo de um filtro IIR: (a) resposta original, (b) resposta do filtro mais um equalizador ajustado pelo método de Umino [3].	45
4.10	Fase do par de pólos mais externo do filtro IIR: $\theta_{F,max}$ .	46
4.11	(a) Diferentes curvas de atraso de grupo para fase $\theta_T$ dos pólos fixada e módulo $r_{p,i}$ variado, (b) pontos altura vs. módulo obtida variando os módulos, e (c) pontos da figura em (b), marcados por x, e curva ajustada por <i>fitting</i> .	48
4.12	Diferentes curvas de atraso de grupo para módulo $r_{p,i}$ dos pólos fixado e fase $\theta_T$ variada.	49
4.13	Superfície tri-dimensional para obtenção do módulo $r_{p,i}$ do par de pólos a partir dos dados altura desejada $h_{pico,i}$ e frequência de posicionamento dos pólos $\omega_{p,i}$ .	50
4.14	Resposta de atraso de grupo de um filtro IIR (linha sólida), e a mesma resposta mais a resposta de um filtro equalizador com os pólos alocados em $\{\omega_1 \cdot \pi, f(h_{pico,1}, \omega_1)\}$ (linha tracejada).	51
4.15	Resposta de atraso de grupo de um filtro IIR (linha sólida), e a mesma resposta mais a resposta de um filtro equalizador com $r_{p,1}$ ajustado (linha pontilhada) e a resposta com ambos os módulos ajustados (linha tracejada).	52

4.16	Resposta de atraso de grupo de um filtro IIR (linha sólida), e a mesma resposta mais a resposta de um filtro equalizador com $r_{p,2}$ ajustado (linha pontilhada) e a resposta com ambos os módulos ajustados (linha tracejada).	53
4.17	Curvas de atraso de grupo do filtro elíptico do Exemplo 4.3.3, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2ª a 8ª-ordens.	54
4.18	Curvas de atraso de grupo do filtro elíptico do Exemplo 4.3.4, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2ª a 10ª-ordens.	55
4.19	Curvas de atraso de grupo do filtro de Chebyshev do Exemplo 4.3.5, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2ª a 12ª-ordens.	56
5.1	Resposta da estimativa inicial obtida pelo método descrito na Seção 4.3. (b) A mesma resposta (linha sólida) juntamente com a resposta após o ajuste da fase do par de pólos do equalizador (linha tracejada). No detalhe a diferença entre as alturas do último pico, antes e depois do ajuste.	58
5.2	Possibilidades de resposta em torno do pico gerado pelo $i$ -ésimo par de pólos: (a) resposta equiripple (desejada), (b) $h_v$ maior que zero, (c) $h_v$ menor que zero, (d) $h_p$ maior que zero, e (e) $h_p$ menor que zero.	63
5.3	Tomada dos parâmetros $V_p$ para ajustes de fases e módulos dos pólos do equalizador.	63
5.4	Dois pares de pólos alocados muito próximos (respostas em linha tracejada), resultam em apenas um único pico, quando somados (resposta em linha sólida).	64
5.5	Resposta equalizada não equiripple (linha sólida) e resposta com fase ajustada para a frequência de ocorrência do mínimo a direita (linha tracejada).	65
5.6	Funções consideradas para limitar passo de atualização: (a) função linear e (b) função <i>tangh</i> .	67
5.7	Exemplos de respostas antes (linha sólida) e depois (linha tracejada) do ajuste do módulo dos pólos: (a) o pico gerado pelo equalizador é menor que o pico da resposta original antes e depois do ajuste, (b) ocorre inversão no sinal da altura $h_p$ .	69
5.8	Parâmetros tomados quando aparece a “cauda” no final da banda de passagem.	72
5.9	Dada (a) resposta de atraso após a estimativa inicial obtém-se (b) a resposta após ajuste da fase, em linha sólida, seguida (c) de ajuste do módulo. A resposta final após os ajustes é mostrada em linha sólida em (d) juntamente com a resposta antes dos ajustes, em linha tracejada.	81
5.10	Exemplos de ajustes dos parâmetros com triangulação dos valores inicial e ajustado: (a) ajuste da fase e (b) ajuste do módulo.	83

5.11	Equalização da resposta de atraso de grupo para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.1, (a) com a resposta original e as respostas equalizadas de 2ª a 10ª-ordens de baixo para cima, e (b) as respostas para equalização de 10ª-ordem com <i>Estratégia A</i> (linha sólida) e <i>Estratégia B</i> (linha tracejada).	85
5.12	Equalização da resposta de atraso de grupo para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.2, com a resposta original e as respostas equalizadas de 2ª a 10ª-ordens de baixo para cima.	86
5.13	Equalização da resposta de atraso de grupo para o filtro de Chebyshev do Exemplo 5.3.3, com a resposta original e as respostas equalizadas de 2ª a 10ª-ordens de baixo para cima.	87
5.14	Equalização de 12ª a 18ª-ordens, de baixo para cima, da resposta de atraso de grupo para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.1.	90
5.15	Equalização do filtro elíptico de 4ª-ordem do Exemplo 4.3.3, com Otimização Eqüiripple (linhas sólidas) e <i>minimax</i> (linhas tracejadas). Em (a), equalizações com 1 a 4 seções passa-tudo, e em (b) para 5 e 6 seções.	93
5.16	Equalização do filtro elíptico de 5ª-ordem do Exemplo 4.3.4, com Otimização Eqüiripple (linhas sólidas) e <i>minimax</i> (linhas tracejadas). Em (a), equalizações com 1 a 5 seções passa-tudo, e em (b) para 6 a 8 seções.	94
5.17	Equalização do filtro de Chebyshev de 7ª-ordem do Exemplo 4.3.5, com Otimização Eqüiripple (linhas sólidas) e <i>minimax</i> (linhas tracejadas). Em (a), equalizações com 1 a 5 seções passa-tudo, e em (b) para 6 e 7 seções.	96
5.18	Equalização do filtro elíptico de 8ª-ordem do Exemplo 2.1.1 com 20 seções passa-tudo, utilizando a otimização eqüiripple (linha sólida) e otimização <i>minimax</i> (linha tracejada). A resposta de atraso de grupo do filtro IIR é apresentada em linha tracejada e pontilhada.	97

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1. Considerações Iniciais

Filtros digitais e analógicos amostrados (capacitores chaveados, por exemplo) podem ser projetados em duas diferentes classes de filtros, FIR e IIR. Os filtros do tipo FIR (Finite Impulse Response) apresentam resposta ao impulso finita e geralmente são implementados em estruturas não-recursivas com fluxo direto da entrada à saída. Os filtros do tipo IIR (Infinite Impulse Response) apresentam resposta ao impulso infinita e são sintetizados por estruturas recursivas. A diferença mais marcante entre os dois tipos é que filtros FIR apresentam pólos apenas na origem garantindo, portanto, a estabilidade. Filtros IIR, no entanto, podem ter pólos complexos no plano  $z$ , o que pode, por erros de implementação, provocar a instabilidade do filtro.

Além desta primeira desvantagem dos filtros IIR, cada tipo de filtro apresenta vantagens e desvantagens um em relação ao outro. Filtros FIR têm como vantagem, além da estabilidade assegurada já mencionada, análise simplificada (em geral), e possibilidade de projeto com resposta de fase perfeitamente linear – a importância desta característica será explicada posteriormente –, entre outras. Em contrapartida, filtros FIR apresentam complexidade muito superior aos filtros IIR, quanto à ordem do filtro. Por isso, filtros IIR são implementados com um número muito menor de componentes, especialmente atrasos e multiplicadores.

A utilização de uma ou outra categoria de filtros depende da aplicação considerada. Para sistemas de telecomunicação, por exemplo, uma boa aproximação de resposta de fase linear é suficiente. Isto quer dizer que, caso seja possível implementar um filtro digital do tipo IIR com fase aproximadamente linear, pode-se evitar a utilização de filtros FIR, reduzindo, portanto, a complexidade do sistema.

Apesar da possibilidade de utilização de filtros IIR, é necessária especial atenção no projeto da resposta de fase destes filtros. Isto porque sistemas de telecomunicação modernos cada vez mais requerem canais mais estreitos, para serem acomodados na

banda disponível. Então, caso a resposta de fase não seja suficientemente linear, podem-se obter distorções no sinal processado, tais como, interferência inter-simbólica (ISI) e distorções de amplitude.

O problema de não-linearidade de fase é conhecido há tempos, e uma aproximação para suplantá-lo com equalização do atraso de grupo, para o caso de filtros analógicos, foi introduzida em [1]. De fato, existem outros métodos para o projeto de equalizadores para filtros analógicos. Entretanto, estes métodos não podem simplesmente ser convertidos para o caso de filtros analógicos amostrados no tempo ou digitais através de mapeamento  $s$  para  $z$ , como a transformação bilinear, por causa do efeito de *warping* introduzido na resposta de fase dos filtros [2], [3].

Muitos métodos já foram apresentados na literatura na busca pela resposta de atraso de grupo ótima, para filtros digitais e amostrados, incluindo algoritmos genéticos [4], filtros adaptativos [5], filtros *quasi-allpass* [6] e equalizadores com filtros passa-tudo (*allpass*) [7]-[13]. Filtros passa-tudo são poderosos blocos de processamento de sinais aplicados a diversas funcionalidades [7], [13], e apresentam pólos e zeros com mesma fase e módulos iguais ao inverso do outro, ou seja, se  $re^{j\theta}$  é um pólo do filtro passa-tudo, então  $r^{-1}e^{-j\theta}$  é um zero do mesmo filtro. Esta característica faz com que esta família de filtros apresente o módulo da resposta em frequência constante em toda a banda e modelagem livre da resposta de fase de 0 a  $-N\times\pi$  radianos, onde  $N$  é a ordem do filtro passa-tudo.

Para o objetivo de linearização da resposta de fase de filtros IIR, geralmente conectam-se os filtros IIR em cascata com filtros passa-tudo. Em seguida, uma das possibilidades é voltar ao projeto do filtro IIR, movendo-se pólos e zeros da nova estrutura, mantendo-se a característica dos filtros passa-tudo, de forma a conciliar as especificações das respostas em módulo e fase [14]. Outra técnica bastante utilizada é a de equalização, fixando o filtro IIR e projetando o filtro passa-tudo para atuar como um filtro equalizador. Além da possibilidade de equalização da resposta de atraso de grupo,  $\tau_g(\omega)$ , pode-se ainda focar nas respostas de fase,  $\phi(\omega)$ , e de atraso de fase,  $\tau_p(\omega)$ .

Resposta de atraso de grupo é definida como a derivada da resposta de fase em função da frequência, multiplicado por  $-1$ , isto é,

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\partial\phi(\omega)}{\partial\omega}. \quad (1.1.1)$$

Resposta de atraso de fase é definida como a divisão da resposta de fase pela frequência, multiplicado por  $-1$ , ou seja,

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}. \quad (1.1.2)$$

Equalização do atraso de grupo é uma alternativa viável para contornar o problema da não-linearidade de fase, e pode ser implementada utilizando-se seções passa-tudo de segunda ordem em cascata. A estrutura de equalização é ilustrada nas Figs. 1.1(a) e (b). Na Fig. 1.1(a) é mostrada a conexão do filtro equalizador em cascata com o filtro IIR a ser equalizado. Na Fig. 1.1(b) é apresentada a estrutura interna do filtro equalizador utilizando  $N/2$  seções passa-tudo de segunda ordem. O filtro resultante da mencionada conexão gera uma resposta de fase aproximadamente linear na faixa de passagem de frequências de interesse, capaz de satisfazer requisitos de projetos em muitas aplicações. Desta forma, utilizar filtros IIR equalizados pode significar vantagens se em comparação com os respectivos filtros FIR de fase linear.

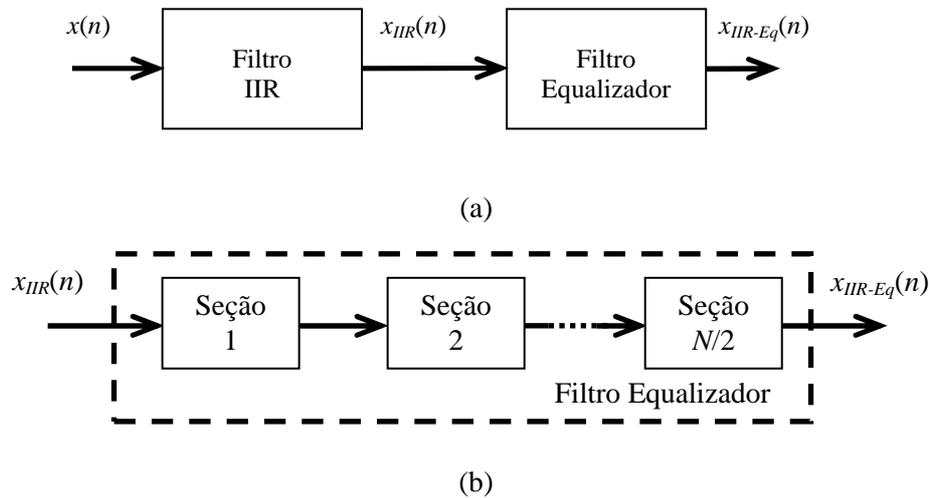


Figura 1.1: Esquemático da equalização da resposta de atraso de grupo: (a) conexão do filtro equalizador em cascata com o filtro IIR, e (b) estrutura interna do filtro equalizador, formado por conexões em cascata de  $N/2$  seções passa-tudo de 2ª ordem.

Neste trabalho utilizam-se seções de filtros passa-tudo de segunda ordem na equalização da resposta de atraso de grupo.

## 1.2. Trabalhos anteriores

Alguns dos resultados apresentados na literatura indicam que a obtenção da resposta ótima para equalizações com equalizadores de elevada ordem é uma tarefa complicada, uma vez que o número de parâmetros (coeficientes do equalizador) é elevado [3], [8], [11].

Na grande maioria dos casos, as escolhas iniciais dos parâmetros para as rotinas de otimização descritas não exploram apropriadamente o conhecimento sobre as distorções da resposta de atraso de grupo a ser equalizada [8], [11], e, em alguns casos, utilizam equalizadores com ordens superiores às que realmente seriam necessárias [3]. Em [15] e [16], buscou-se explorar o conhecimento da resposta ótima esperada para prover uma solução inicial mais próxima do resultado final. Entretanto, algumas etapas do método apresentado são empíricas e reduzem a confiabilidade do procedimento.

Outra observação a respeito das rotinas apresentadas na literatura é que todas utilizam métodos de otimização convencionais, como, por exemplo, método de busca da solução no sentido *minimax*. Entretanto, este tipo de procedimento pode encontrar diversas dificuldades, como a existência de mínimos locais na função-custo. Portanto, devido ao elevado número de parâmetros de otimização (2 parâmetros para cada seção passa-tudo de segunda ordem) e à irregularidade da superfície de convergência, para qualquer função-custo escolhida, é necessária uma boa estimativa inicial, de forma a aumentar a robustez do procedimento.

Sabe-se que para uma rotina de otimização *minimax*, o melhor resultado possível – ótimo – é o que torna a resposta de atraso de grupo equiripple. Porém, o resultado equiripple encontrado pela otimização pode não significar o ótimo para a aplicação em vista. Esta observação será ilustrada com exemplos no Capítulo 2. Neste trabalho tenta-se explorar o conhecimento da resposta equiripple ótima, introduzindo novas metodologias de estimativa inicial, incluindo redes neurais, e aperfeiçoando o método desenvolvido em [15] e [16]. De forma a evitar mínimos locais da função-custo e outros problemas encontrados quando são utilizadas rotinas de otimização *minimax*, é apresentado um método de otimização que busca exclusivamente a resposta equiripple ótima dentro da faixa de passagem do filtro IIR.

Trabalhos descritos na literatura que obtêm bons resultados para equalização de atraso de grupo não apresentam resultados satisfatórios com filtros equalizadores de ordens elevadas, conseguindo alcançar resultados com até 12<sup>a</sup>-ordem. Já o método proposto nesta pesquisa não encontra limitação na ordem, obtendo bons resultados para casos de até 40<sup>a</sup>-ordem, ou superiores. Esta é uma grande vantagem do método de otimização proposto, além da rapidez de convergência e robustez dos resultados.

### 1.3. Tópicos do trabalho

No Capítulo 2 serão apresentadas motivações para o desenvolvimento deste trabalho, como a não linearidade da resposta de fase de filtros IIR e os problemas que esta característica acarreta, através de exemplos práticos de filtragem IIR. Apresentam-se também dificuldades práticas de equalização da resposta de atraso de grupo utilizando rotinas de otimização *minimax*, com exemplos ilustrativos de resultados não-ótimos obtidos.

Em [15] e [16] foram introduzidas duas estratégias diferentes para a alocação ótima dos pólos e zeros do filtro equalizador. O conhecimento destas duas diferentes estratégias é importante para que o procedimento tente prever a melhor forma de alocar os pólos na estimativa inicial com o intuito de aumentar a robustez e a velocidade de convergência do processo. Estas diferentes estratégias são discutidas no Capítulo 3, com apresentação de um critério para utilização de uma ou outra.

No Capítulo 4 são apresentados novos métodos de estimativas iniciais aplicáveis a qualquer rotina de otimização. O primeiro método utiliza redes neurais *feedforward*, para as quais foram utilizadas respostas ótimas no treinamento, tentando transferir para as redes neurais conhecimentos da solução desejada não explorados pelos trabalhos mencionados. O segundo método apresentado aproveita idéias utilizadas em trabalhos anteriores ([3], [15] e [16]), substituindo etapas de baixa produtividade ou verificações empíricas por métodos mais consistentes.

Com a intenção de prover cada vez mais uma boa aproximação inicial às rotinas de otimização, tentou-se aperfeiçoar o segundo método que será apresentado no Capítulo 4, e desenvolveu-se no Capítulo 5 um método de otimização que busca exclusivamente a resposta equiripple, sendo por isso denominado *Otimização Equiripple*. Simulações comparando os resultados obtidos pelo novo procedimento de equalização com rotinas *minimax* são apresentadas.

No Capítulo 6 os resultados obtidos ao longo do trabalho são revisados e discutidos.

# Capítulo 2

## Motivações

### 1.4. Linearidade da Resposta de Fase

Filtros digitais e analógicos amostrados são caracterizados por uma função de transferência definida no domínio  $z$ . Para se obter a resposta em frequência destes filtros, pode-se substituir  $z$  pelo número complexo  $e^{j\omega}$  na função de transferência. Logo, a resposta em frequência é dada pela equação

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}, \quad (2.1.1)$$

onde  $\phi(\omega)$  é a resposta de fase do filtro. Sabe-se que quando a entrada,  $x(n)$ , é uma senóide, escrita como

$$x(n) = A_x \cdot \text{sen}(\omega_0 n + \theta_x), \quad (2.1.2)$$

então a saída do filtro,  $y(n)$ , em estado permanente é dada por

$$y(n) = |H(e^{j\omega_0})| \cdot A_x \cdot \text{sen}(\omega_0 n + \theta_x + \phi(\omega_0)). \quad (2.1.3)$$

Caso a resposta de fase seja linear, pelo menos dentro da faixa de passagem, e possamos escrevê-la como  $\phi(\omega) = -\omega t_F$ , onde  $t_F$  é uma constante, então pode-se reescrever a Eq. (2.1.3) na forma

$$y(n) = |H(e^{j\omega_0})| \cdot A_x \cdot \text{sen}(\omega_0 (n - t_F) + \theta_x). \quad (2.1.4)$$

Observa-se que a saída do filtro é uma cópia da entrada, ampliada ou reduzida por  $|H(e^{j\omega_0})|$  e atrasada de  $t_F$  amostras. Sendo assim, se a entrada  $x(n)$  for agora um sinal composto por  $m$  componentes frequenciais simples

$$x(n) = \sum_{r=1}^m A_r \cdot \text{sen}(\omega_r n + \theta_r), \quad (2.1.5)$$

a saída é dada por

$$y(n) = \sum_{r=1}^m |H(e^{j\omega_r})| \cdot A_r \cdot \text{sen}(\omega_r (n - t_F) + \theta_r), \quad (2.1.6)$$

onde se percebe que as diferentes componentes da saída são as mesmas  $m$  componentes da entrada, ampliadas ou reduzidas, e atrasadas por um mesmo número de amostras  $t_F$ . Desta forma não há distorção no sinal filtrado.

Entretanto, se a resposta de fase do filtro não for linear, as componentes do sinal filtrado apresentam diferentes atrasos, provocando distorção. Para ilustrar tal ocorrência, consideremos a resposta de fase dada, por exemplo, por  $\phi(\omega) = -\omega^2$ . Considerando o sinal composto da Eq. (2.1.5), tem-se na saída deste novo filtro a expressão

$$y(n) = \sum_{r=1}^m |H(e^{j\omega_r})| \cdot A_r \cdot \text{sen}(\omega_r(n - \omega_r) + \theta_r). \quad (2.1.7)$$

Notadamente os atrasos de cada componente são diferentes uma vez que  $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_m$ .

A função utilizada como exemplo para a resposta de fase é um exemplo incomum para filtros na prática. Entretanto, serve para ilustrar o comportamento da saída quando a resposta de fase não é linear.

A resposta de atraso de grupo de um filtro é definida segundo a Eq. (1.1.1) e, portanto, se a resposta de fase for linear,  $\phi(\omega) = -\omega t_F$ , então o atraso de grupo será uma constante igual a  $t_F$ . Já se a resposta for não-linear,  $\phi(\omega) = f_{NL}(\omega)$ , por exemplo, então o atraso de grupo será uma curva não-constante. Como exemplo dos dois casos, apresentamos nas Figs. 2.1(a) e (b), em linhas sólidas, dois possíveis exemplos de resposta de atraso de grupo, respectivamente para os casos de resposta linear e não-linear. Também na Fig. 2.1(b), em linha tracejada, é mostrada a resposta de atraso de grupo de um possível equalizador, para este caso, e em linha pontilhada e tracejada, a resposta final do filtro equalizado. Estes exemplos representam apenas a faixa de passagem de um dado filtro passa-baixas, limitada pela linha pontilhada vertical na frequência<sup>1</sup> 0,2.

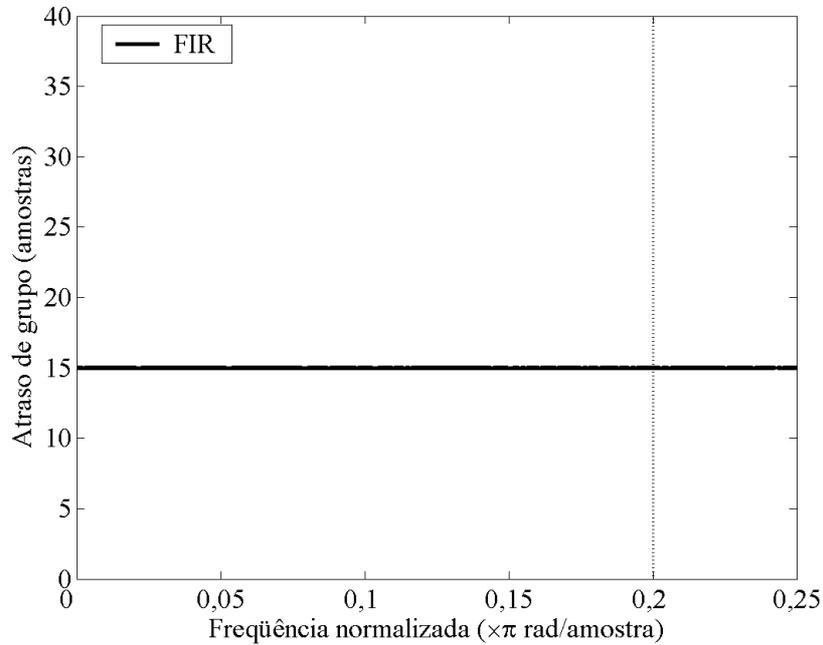
Se a resposta de atraso de grupo se aproximar de uma constante, como na Fig. 2.1(b), então a resposta de fase se aproxima de uma resposta linear. Neste caso a não-linearidade de fase de um filtro IIR teria sido contornada com a inclusão de um filtro equalizador conectado em cascata.

Para ilustrar os problemas encontrados quando sinais compostos são filtrados por filtros IIR de fase não-linear, são apresentados dois exemplos. No primeiro uma figura em preto-e-branco é usada como o sinal a ser filtrado. Como resultado da

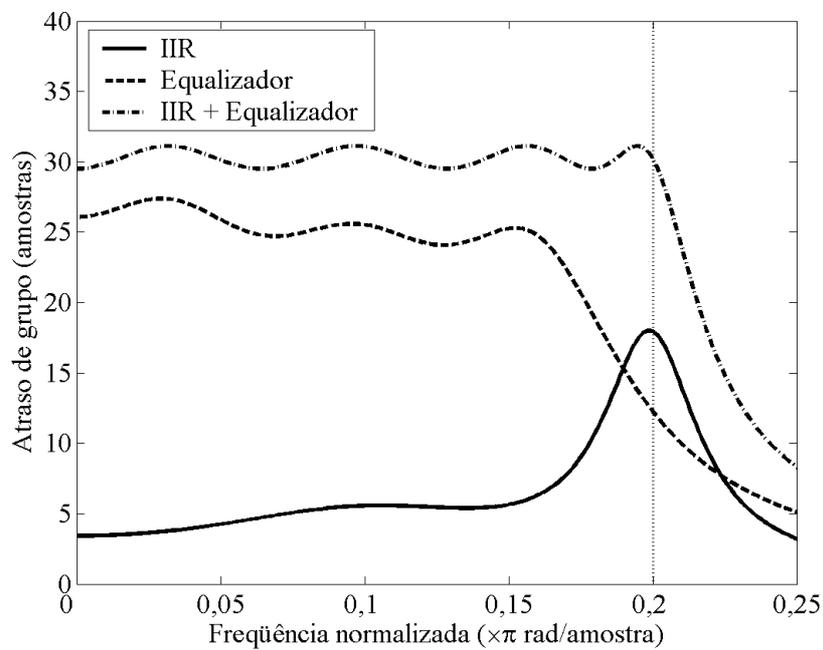
---

<sup>1</sup> Ao longo deste texto as frequências apresentadas estarão normalizadas pela metade da frequência de amostragem do filtro.

filtragem IIR, percebe-se o surgimento de “fantasmas” na figura resultante. O fato é explicado no exemplo. O segundo exemplo considera um ruído gaussiano limitado em frequência, submetido a uma filtragem IIR sem e com equalização. Distorções na amplitude do sinal são percebidas no sinal não equalizado.



(a)



(b)

Figura 2.1: Exemplos de respostas de atraso de grupo para filtros com resposta de fase (a) linear e (b) não linear (*linha sólida*). Também em (b) as respostas de um possível equalizador (*linha tracejada*) e do filtro resultante (*linha pontilhada e tracejada*).

**Exemplo 2.1.1** O objetivo deste exemplo é avaliar qualitativamente os efeitos de uma filtragem IIR equalizada, comparando-a com uma filtragem FIR. Na Fig. 2.2(a) é mostrada a imagem original utilizada no exemplo. A imagem, considerada como um sinal bidimensional, é transformada em um sinal de uma dimensão alinhando-se todas as linhas da imagem, para que seja possível submetê-la aos filtros considerados a seguir. Após as filtrações, o sinal filtrado unidimensional é mais uma vez transformado em bidimensional, simplesmente com a quebra do sinal em diversas linhas, de forma a mostrar a imagem resultante. Os filtros considerados neste exemplo, tanto o FIR quanto o IIR, são passa-baixas, e satisfazem às seguintes especificações

- frequência limite da faixa de passagem: 0,4;
- frequência limite da faixa de rejeição: 0,5;
- *ripple* na faixa de passagem: 1 dB;
- atenuação na faixa de rejeição: 80 dB.

Para preservar as componentes de altas frequências, o sinal é interpolado pelo fator 2, e após a filtragem é decimado para obtermos uma imagem próxima da original. Entretanto, o objetivo do exemplo não é comparar as imagens filtradas com a imagem original, e sim, verificar a equivalência entre a filtragem IIR equalizada e a filtragem FIR, e as perdas obtidas na filtragem IIR não equalizada, quanto a desvios de fase.

O filtro FIR utilizado é de ordem 51, enquanto que o filtro IIR é um filtro elíptico de 8ª-ordem. O filtro equalizador foi projetado com ordem 40. Desse modo, o filtro IIR equalizado total apresenta ordem 48. O filtro elíptico não equalizado apresenta uma variação total de atraso de grupo, dentro da faixa de passagem, de 52,2 amostras, enquanto que, após a equalização, o filtro total apresenta variação de 3,8 amostras.

O sinal unidimensional é submetido à filtragem IIR sem equalização, e a imagem resultante é apresentada na Fig. 2.2(b), onde é possível observar repetições das bordas. Isto indica que componentes de altas frequências do sinal estão sofrendo atrasos maiores que as componentes de baixa frequência. Se utilizarmos o filtro equalizador de 40ª-ordem mencionado, a imagem resultante é a apresentada na Fig. 2.2(c), onde se percebe que as repetições de bordas foram atenuadas. Por fim, utiliza-se uma filtragem FIR, e a imagem resultante é mostrada na Fig. 2.2(d). Das três imagens processadas retirou-se o atraso médio gerado pelas respectivas filtrações. Avaliando as imagens quanto à qualidade, percebe-se que a imagem resultante da filtragem IIR com equalização aproxima-se da resultante da filtragem FIR, o que confirma a validade da

equalização para contornar o problema da não-linearidade de fase, apesar da variação de 3,8 amostras na resposta de atraso de grupo do filtro equalizado.

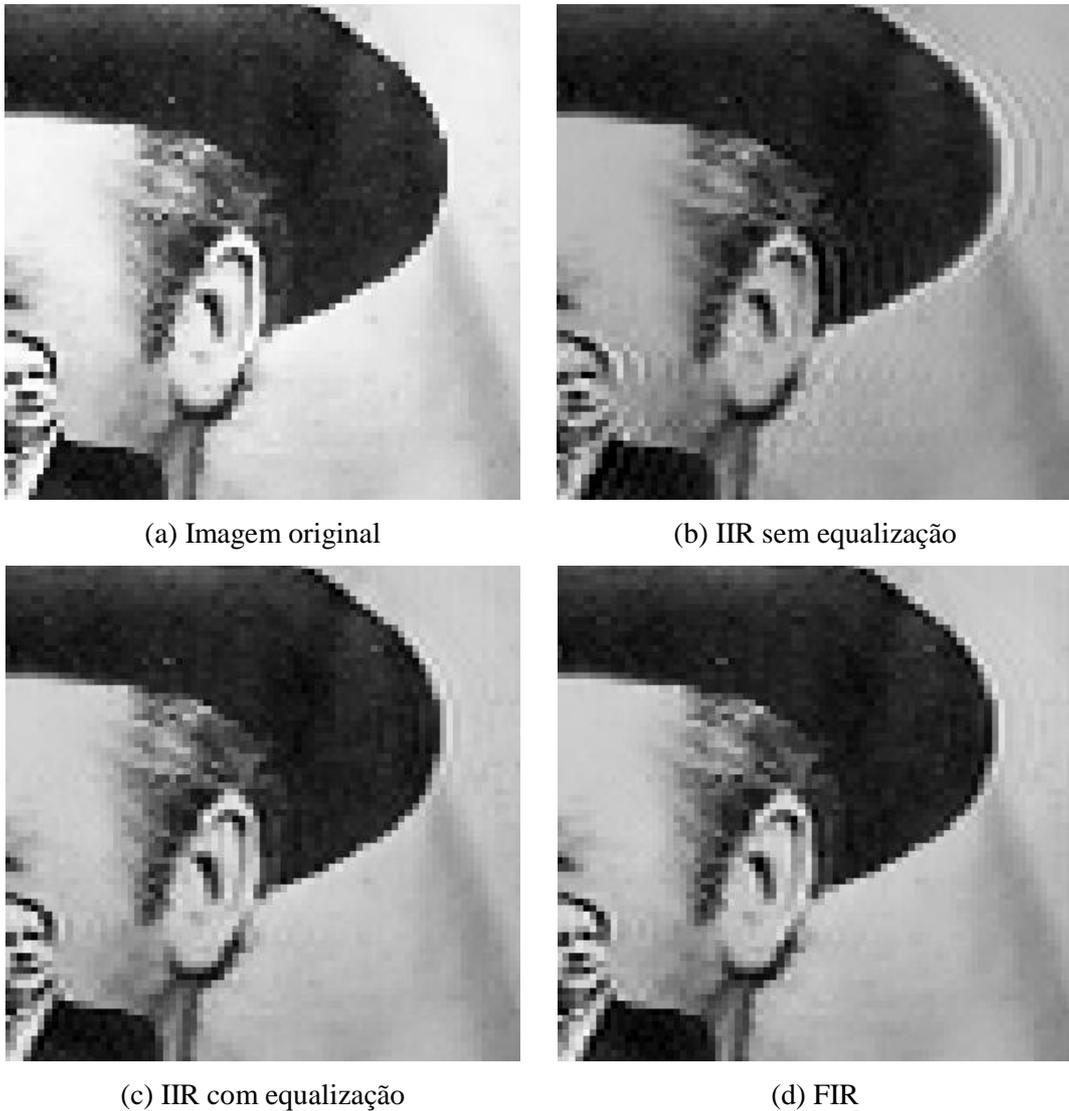


Figura 2.2: Imagens (a) original, (b) após filtragem IIR, (c) após filtragem IIR seguida de equalização e (d) após filtragem FIR. Para as imagens (b), (c) e (d) já foram descontados os atrasos de cada filtragem.

**Exemplo 2.1.2** Um ruído gaussiano de banda limitada,  $x(n)$ , é submetido a um filtro de 5ª-ordem, com frequência de corte em 0,2 normalizada pela metade da frequência de amostragem, com ripple de 1 dB na faixa de passagem e atenuação de 40 dB na faixa de rejeição. As componentes em frequência do ruído estão situadas na faixa de passagem do filtro, para possibilitar a comparação dos sinais filtrados com o próprio ruído aplicado.

Primeiramente, o ruído é submetido à filtragem IIR sem equalização e obtém-se  $x_{IIR}(n)$ . Este sinal é apresentado na Fig. 2.3(a), em linha tracejada, juntamente com  $x(n)$ , em linha sólida. Os sinais estão sobrepostos, descontando-se o atraso gerado pela filtragem. As setas na figura apontam para distorções percebidas no sinal filtrado. Em seguida, o sinal  $x_{IIR}(n)$  é filtrado por um equalizador, e o resultado obtido,  $x_{IIR-Eq}(n)$ , é mostrado na Fig. 2.3(b), em linha tracejada, juntamente com o ruído, em linha sólida. Mais uma vez o atraso é descontado. Nesta figura percebe-se que as distorções obtidas são bem menores que as encontradas no sinal sem equalização. Mais uma vez, o resultado obtido comprova a eficácia da equalização para evitar distorções nos sinais filtrados por filtros IIR de fase não linear.

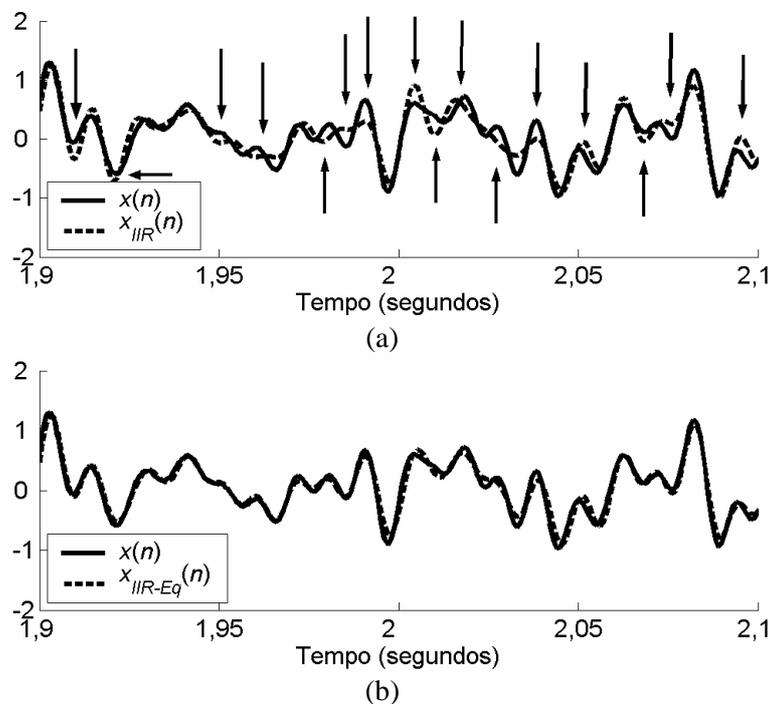


Figura 2.3: Resultados de filtragens IIR de um ruído com banda limitada (a) sem equalização e (b) com equalização.

Os dois exemplos anteriores comprovam a validade do uso de filtros passa-tudo como equalizadores de fase para filtros IIR. Contudo, os equalizadores utilizados apresentam elevada ordem, o que torna o projeto destes filtros extremamente complexo. Para obter o melhor filtro equalizador em determinada aplicação é necessário um projeto dedicado, dependente das especificações do filtro IIR a ser equalizado. Para se obter o equalizador apropriado é preciso lançar mão de ferramentas computacionais para o projeto automatizado que utilizem rotinas de otimização para obtenção do projeto ótimo.

Entretanto, estes procedimentos apresentam algumas desvantagens, como por exemplo, a existência de mínimos locais, o que dificulta o andamento do processo. Este e outros problemas são descritos na seção a seguir.

### 1.5. Problemas Encontrados nas Rotinas de Otimização *Minimax*

Para qualquer procedimento de otimização é preciso selecionar uma função custo apropriada. Esta escolha influencia tanto no resultado final encontrado – se é ou não o ótimo para a aplicação – quanto na velocidade de convergência e na robustez da rotina. O problema da robustez está diretamente ligada à existência de mínimos locais na função custo. Portanto, para uma melhor confiabilidade nos resultados da otimização a melhor escolha de função custo é aquela que não apresenta mínimos locais, se isso for possível. Quando não for viável esta escolha, procura-se aquela que apresentar menor número de mínimos locais.

Quanto maior o número de parâmetros de otimização envolvidos, maior a propensão à existência de mínimos locais, devido à maior complexidade da função custo. Este é o caso encontrado no projeto de filtros equalizadores utilizando seções passa-tudo, uma vez que cada seção introduz dois parâmetros de otimização. Por exemplo, para um equalizador de 10ª-ordem é necessário o ajuste de 10 parâmetros, o que torna o procedimento complexo e demorado.

Para ilustrar o problema de mínimos locais, apresenta-se um exemplo de equalização de 8ª-ordem de um filtro IIR elíptico com frequência de corte 0,15 (0,4712 rads/amostra não normalizada). Na Fig. 2.4(a) é mostrada a resposta de atraso de grupo considerada ótima para a equalização em questão, com os pólos alocados em

$$A_o = \{(\theta_1, r_1); (\theta_2, r_2); (\theta_3, r_3); (\theta_4, r_4)\} \\ = \{(0,0574, 0,9187); (0,1734, 0,9174); (0,2930, 0,9193); (0,3998, 0,9309)\}.$$

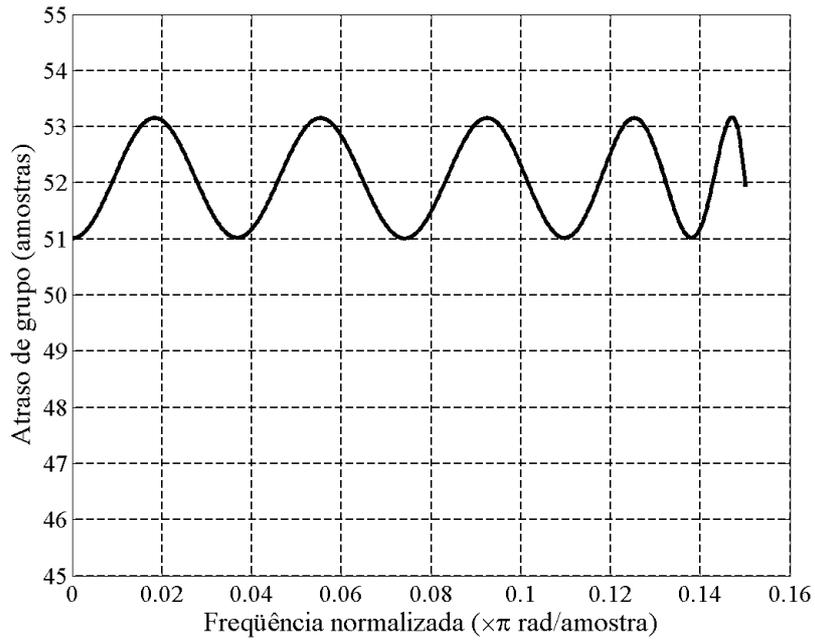
A Fig. 2.4(b) mostra a resposta quando a otimização pára em um mínimo local da função-custo. As duas figuras são mostradas na mesma escala, e é possível perceber que no mínimo local a solução encontrada apresenta uma variação muito maior que no caso da Fig. 2.4(a). O mínimo local apresentado é um caso específico onde os quatro pares de pólos do equalizador são alocados dois a dois no mesmo local do plano  $z$ .

Devido à existência de mínimos locais na função-custo, é de extrema importância o fornecimento de uma boa solução inicial para a rotina de otimização. Para realçar

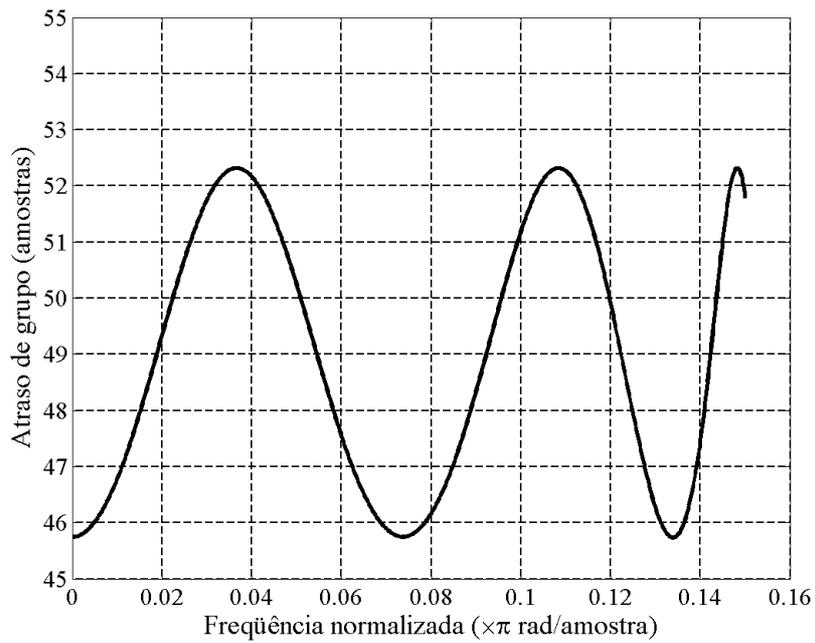
ainda mais a necessidade desta estimativa, para o mesmo exemplo de equalização mencionado acima, a solução inicial para a rotina é formada pelas fases  $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$  da solução ótima  $A_0$  acima. Todos os módulos dos pólos são iniciados com um mesmo valor,  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \nu$ , diferente dos valores ótimos encontrados. Num primeiro caso, os módulos foram igualados a  $\nu = 0,9$ , e a resposta obtida é exatamente igual a da Fig. 2.4(a). Igualando os módulos iniciais a  $\nu = 0,88$  a resposta obtida é bem diferente da resposta ótima encontrada, como mostrado na Fig. 2.4(c). A variação máxima encontrada é de 3,7 amostras, contra 2,0 da resposta ótima, na Fig. 2.4(a). Se diminuirmos um pouco mais o valor dos módulos iniciais para  $\nu = 0,85$ , a resposta obtida, mostrada na Fig. 2.4(d), tampouco apresenta forma equiripple, e a variação é de 4,8 amostras. Este exemplo mostra claramente a importância de uma boa estimativa inicial, uma vez que, mesmo utilizando uma alocação próxima à ótima como solução inicial, a resposta obtida pode não mais ser a ótima.

No exemplo seguinte considera-se outro problema da utilização de rotinas de otimização *minimax* para o projeto de filtros equalizadores de fase. Para uma determinada aplicação deseja-se utilizar um filtro elíptico de 3ª-ordem, com equalização de 4ª-ordem. Uma resposta equiripple é desejada dentro da faixa de passagem, e para obter tal resultado manipulam-se os parâmetros de otimização manualmente, obtendo a resposta mostrada na Fig. 2.5(a). É possível perceber que a resposta obtida não é equiripple em toda faixa de passagem, apresentando uma “cauda” no final da banda. Entretanto, a faixa não-equiripple é, como observado, uma parcela muito pequena da faixa de passagem e, apesar de apresentar uma variação maior no atraso, é tolerada.

Ou seja, pode-se considerar que este tipo de imperfeição é tolerável em alguns casos, em especial, na ilustração da Fig. 2.5(a). Entretanto, rotinas de otimização *minimax* não permitem soluções como esta. Aplicando o exemplo à rotina de otimização utilizada nos outros exemplos do texto, encontra-se a resposta mostrada na Fig. 2.5(b). Percebe-se que para eliminar a cauda, a rotina *minimax* posiciona o par de pólos mais externo do equalizador no final da banda de passagem. Porém, a resposta deixa de ser a equiripple ótima. Comparando as respostas, nota-se que o atraso de grupo da Fig. 2.5(a) apresenta variação total de 1,65 amostras, sendo que dentro da faixa equiripple a variação é de apenas 0,42 amostras. Já a resposta da Fig. 2.5(b) apresenta variação de 2,94 amostras, que é maior que a máxima variação da primeira resposta, mesmo se considerada a cauda.

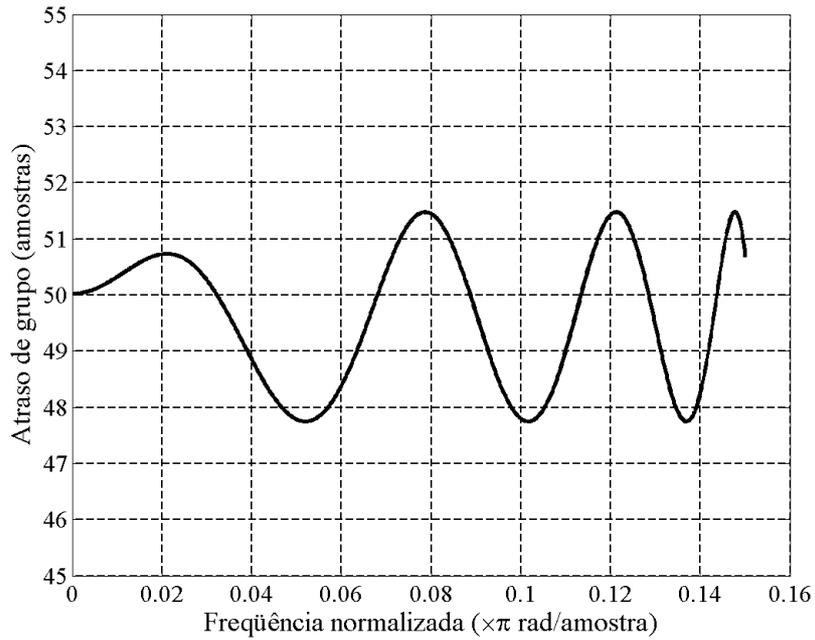


(a)

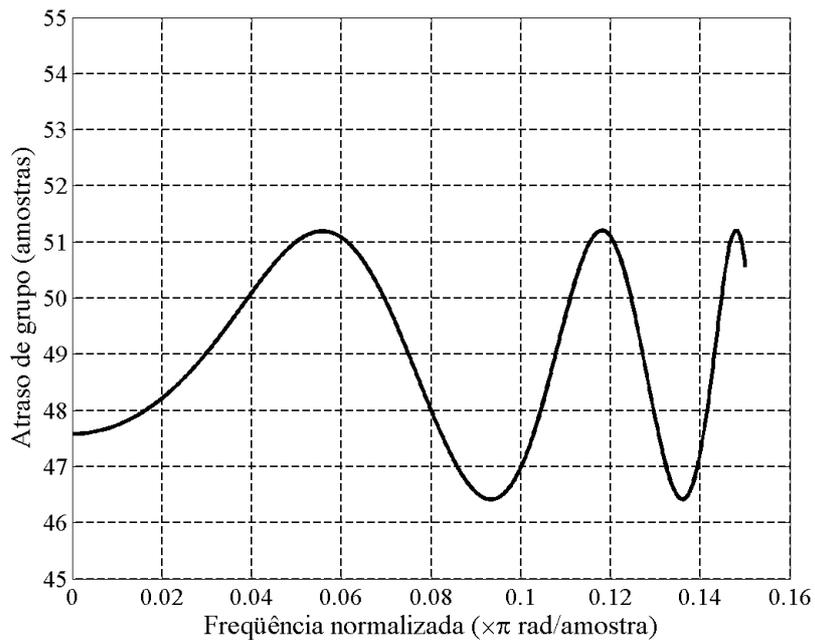


(b)

Figura 2.4: Resultados de equalização de 8<sup>a</sup>-ordem: (a) solução ótima, (b) solução eqüiripple em mínimo local.



(c)

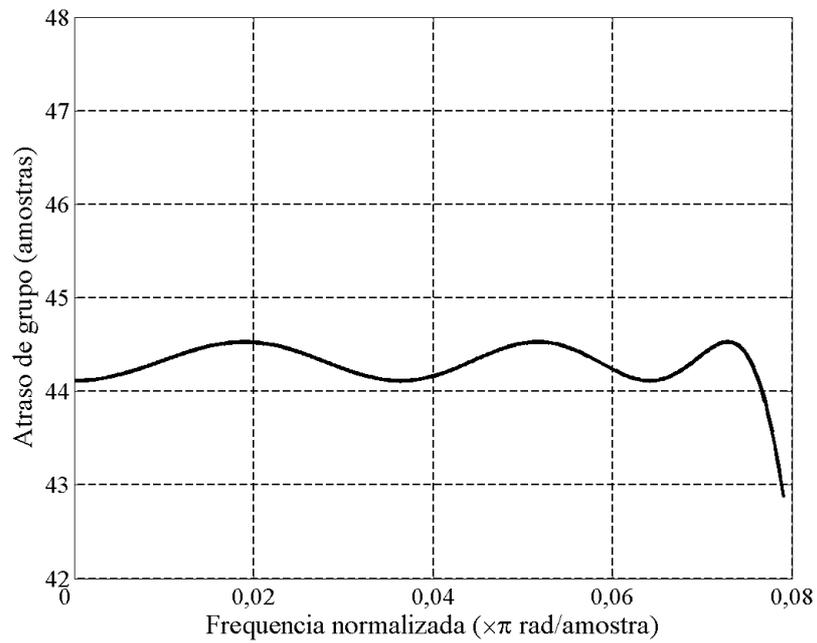


(d)

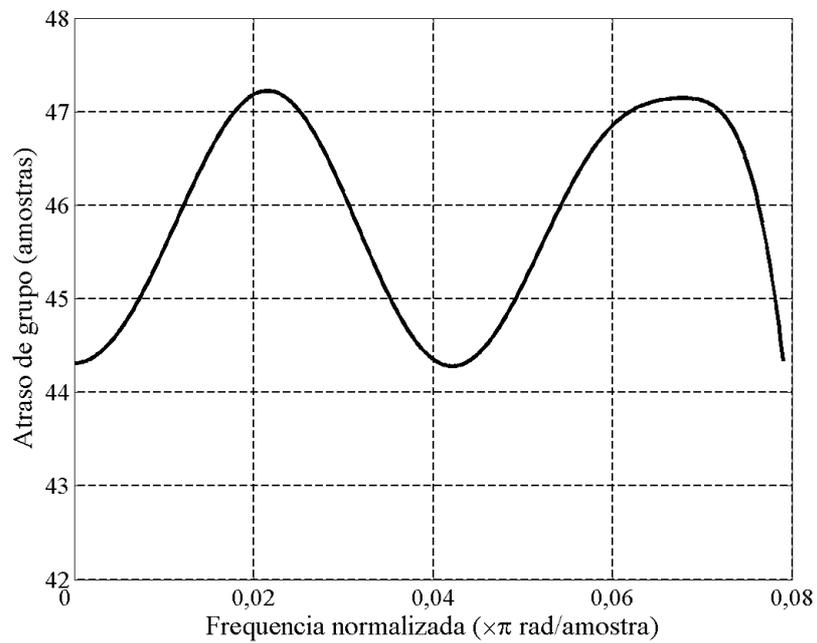
Figura 2.4: Resultados de equalização de 8ª-ordem: (c) solução equiripple em outro mínimo local, e (d) solução não-equiripple.

Foi observada por simulações que, aumentando a ordem do equalizador, a mencionada cauda torna-se cada vez mais acentuada. Logo, é necessário estabelecer um limite para o comprimento da cauda, o que dependerá da aplicação do filtro equalizado e da ordem do equalizador. Porém, se o tamanho da cauda superar o limite estabelecido, pode-se

alterar a estratégia de alocação dos pólos do equalizador, utilizando a técnica apresentada em [15], e representada no capítulo seguinte.



(a)



(b)

Figura 2.5: Resultados de equalização (a) com ajuste manual dos parâmetros, permitindo o aparecimento da cauda, e (b) com ajuste otimizado por rotina *minimax*.

# Capítulo 3

## Estratégias de Alocação

### 3.1. Filtros Passa-Tudo como Equalizadores

O projeto de equalizadores, neste trabalho, considera a conexão em cascata de filtros passa-tudo de 2ª-ordem, como foi mostrado no Capítulo 1, representados pela seguinte função de transferência:

$$A_2(z) = \frac{b + a \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 + a \cdot z^{-1} + b \cdot z^{-2}}, \quad (3.1.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são coeficientes reais, e, portanto, os pólos e zeros da estrutura são encontrados aos pares conjugados. Como resultado da simetria dos coeficientes do numerador e denominador na função de transferência, tem-se que os pólos e zeros deste filtro são alocados de tal forma que se  $z_0 = r \cdot e^{j\theta}$  é um pólo de  $A(z)$ , então  $z_0^{-1} = (1/r) \cdot e^{j(-\theta)}$  é um zero de  $A(z)$ , como ilustrado na Fig. 3.1.

A simetria dos pólos e zeros em relação ao círculo unitário faz com que o módulo da resposta em frequência do filtro passa-tudo seja constante em toda a banda do filtro. Se for calculada a resposta em frequência da Eq. (3.1.1) ter-se-á que o módulo em  $\omega = 0$  é igual a 1, e assim será em toda a banda. Ou seja, o filtro passa-tudo não introduz distorção de amplitude na resposta em frequência do filtro IIR ao qual está conectado. Por outro lado, a resposta de fase é modelada livremente, dependendo da alocação dos pólos e zeros. As duas únicas limitações da modelagem da resposta de fase é que esta começa em zero radianos, na frequência 0, e termina em  $-N \times \pi$  radianos, na frequência  $\pi$ , onde  $N$  é a ordem do filtro equalizador. Na Fig. 3.2(a) são apresentados os diagramas de pólos e zeros, e na Fig. 3.2(b) estão as respostas de fase para 3 diferentes filtros passa-tudo: dois filtros passa-tudo de 2ª-ordem, com diferentes alocações dos pólos e zeros, e um filtro passa-tudo de 6ª-ordem. Quanto maior a ordem do filtro equalizador maior a inclinação da resposta de fase, e conseqüentemente, maior o atraso de grupo médio.

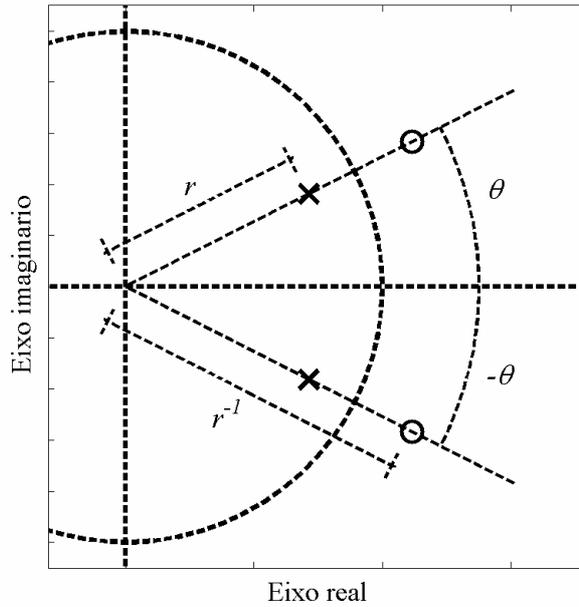


Figura 3.1: Diagrama ilustrando simetria entre os pólos e zeros de uma seção passa-tudo.

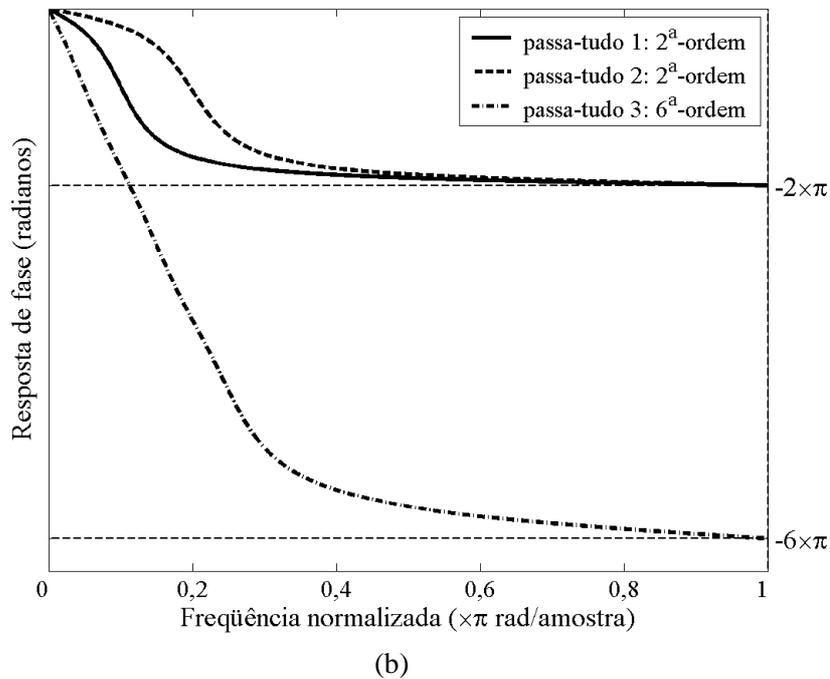
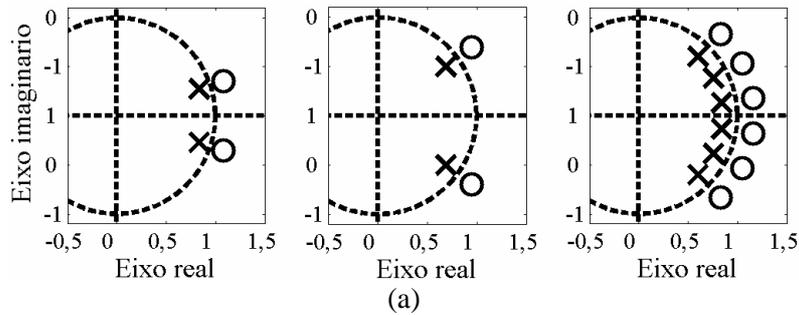


Figura 3.2: Três exemplos de filtros passa-tudo de diferentes ordens: (a) diagramas de pólos e zeros e (b) respostas em frequências destes filtros.

Cada pólo e zero do filtro equalizador introduz uma distorção de fase na resposta em frequência. Esta distorção é caracterizada por um pico na resposta de atraso de grupo. Como exemplo, considerando um filtro com um par de pólos complexos-conjugados, sem zeros, o diagrama de pólos e zeros, e a resposta de atraso de grupo são mostradas na Fig. 3.3(a), onde percebe-se a existência de um pico, gerado pelo par de pólos. A figura mostra apenas a resposta até a frequência  $\pi$ , pois como os pólos são complexo-conjugados a resposta é espelhada em torno desta frequência, até  $2\cdot\pi$ . Considerando outro filtro, este com os pólos na origem e zeros com mesmas fases e módulos invertidos em relação aos pólos do exemplo anterior (segundo as regras dos pólos e zeros de um filtro passa-tudo, mostradas na Fig. 3.1) o diagrama de pólos e zeros e o atraso de grupo são mostrados na Fig. 3.3(b), onde percebe-se que, mais uma vez, apenas um pico foi gerado entre as frequências 0 e  $\pi$ . Finalmente, se os pólos e zeros dos dois exemplos anteriores forem atribuídos a um só filtro, formar-se-á um filtro passa-tudo de 2ª-ordem, com diagrama de pólos e zeros e resposta de atraso de grupo mostrados na Fig. 3.3(c). Como os pólos e zeros apresentam as mesmas fases, percebe-se o surgimento de apenas um pico na resposta entre as frequências 0 e  $\pi$ .

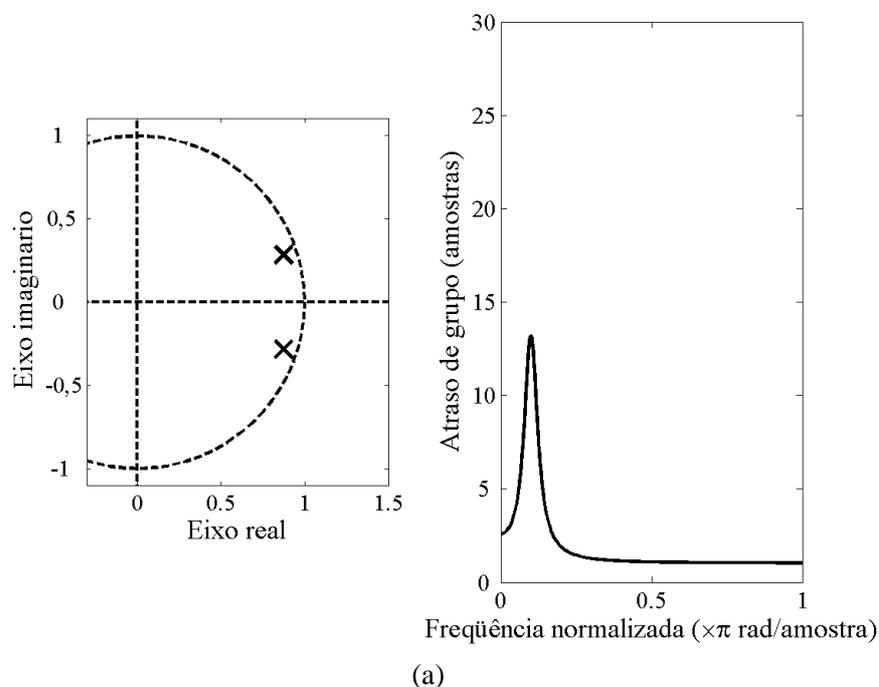
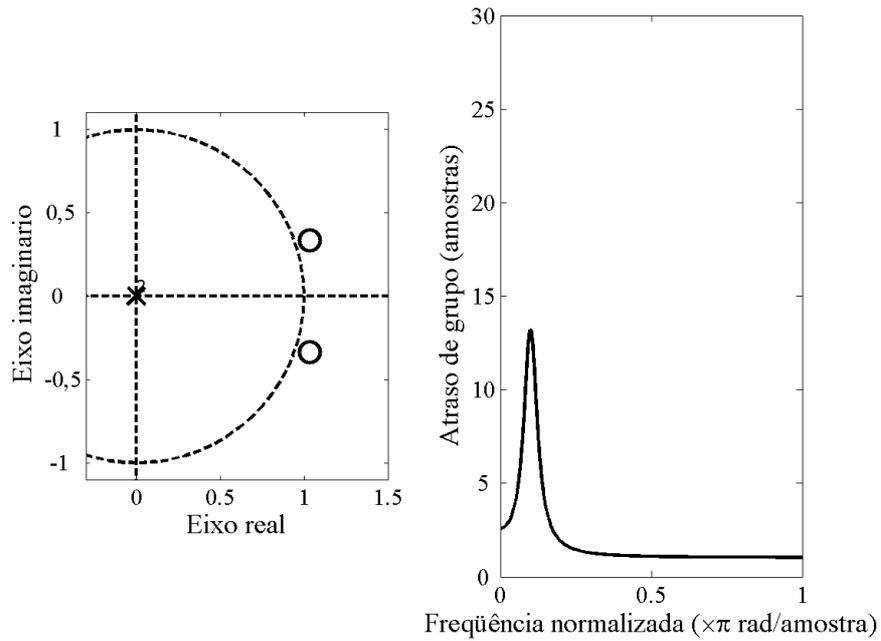
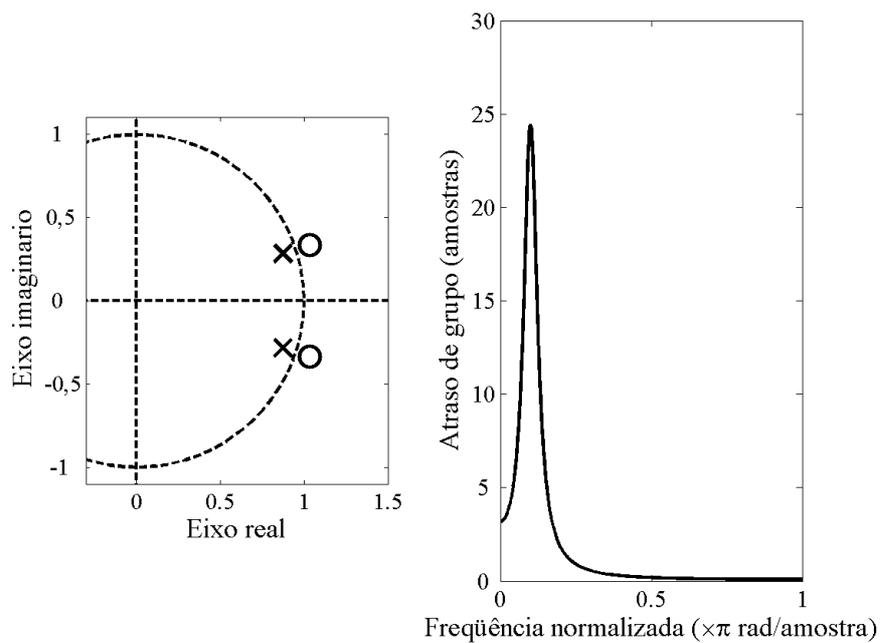


Figura 3.3: Diagrama de pólos e zeros e resposta de atraso de grupo de (a) um filtro só com pólos (*all-pole*).



(b)



(c)

Figura 3.3: Diagramas de pólos e zeros e respostas de atraso de grupo de (b) um filtro com zeros finitos e pólos na origem e (c) filtro passa-tudo, formado pela união dos filtros em (a) e (b).

### 3.2. Estratégia A de Alocação

Estes picos gerados pelos pares de pólos e zeros de seções passa-tudo são utilizados na equalização da resposta. Para visualizar o problema, na Fig. 3.4(a), em linha sólida, apresenta-se uma resposta não equalizada de um filtro IIR, na qual percebe-se a

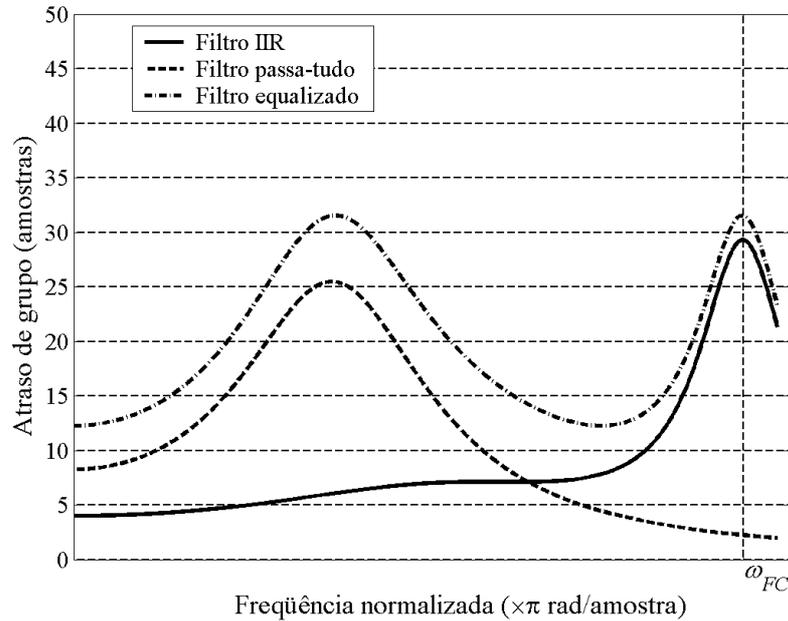
existência de um pico próximo à frequência de corte  $\omega_{FC}$  do filtro. Para contornar a não linearidade, introduz-se um filtro passa-tudo de 2ª-ordem, alocando o novo pico dentro da faixa de passagem do filtro IIR, de forma a reduzir a variação na resposta equalizada. O novo pico é observado na mesma figura, em linha tracejada, juntamente com a resposta final equalizada em linha pontilhada e tracejada. Na resposta equalizada é possível observar a existência de dois picos, sendo um deles da resposta original, gerado pelos pólos do filtro IIR e outro gerado pelo filtro equalizador. Se fosse desejada uma equalização de ordem superior, por exemplo, 4ª-ordem, obter-se-ia a resposta da Fig. 3.4(b), com três (1+2) picos. Para um equalizador de 6ª-ordem, resultaria em 4 (1+3) picos, e assim por diante. Ou seja, para uma equalização de ordem  $N$ , a princípio considera-se que a resposta final terá  $1+N/2$  picos dentro da faixa de passagem do filtro. Esta é doravante definida como *Estratégia A* de alocação dos pólos e zeros do equalizador.

### 3.3. *Estratégia B* de Alocação

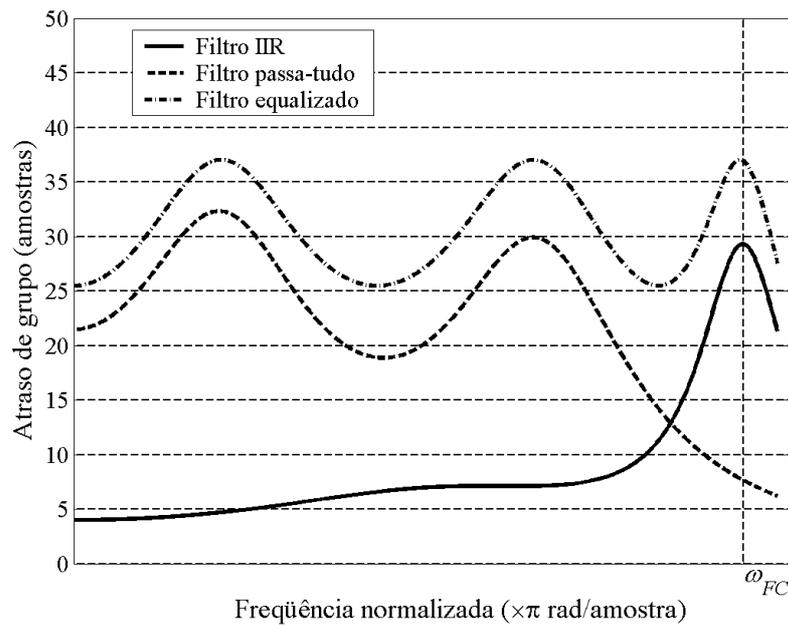
Na seção anterior foi mostrado como filtros passa-tudo podem ser utilizados como equalizadores da resposta de atraso de grupo de filtros IIR. Normalmente para uma equalização de ordem  $N$ , ou seja, quando são utilizadas  $N/2$  seções passa-tudo, são introduzidos  $N/2$  picos na resposta. Entretanto, à medida que a ordem do equalizador é elevada, ajustando-se a alocação dos pólos e zeros manualmente obtém-se uma resposta equiripple na qual uma “cauda” é observada no final da faixa de passagem, como foi mencionado no Capítulo 2 (ver Fig.2.5(a)). Para ordens elevadas a cauda torna-se mais acentuada, sendo necessária uma mudança de estratégia na alocação dos pólos e zeros do equalizador para evitar o crescimento da cauda.

No método descrito abaixo, denominado *Estratégia B*, retira-se um dos pares de pólos e zeros do equalizador, que posteriormente poderá ser utilizado para cancelar a cauda. Desta forma, efetua-se uma equalização de ordem  $K = N - 2$  com a *Estratégia A*, que consiste, assim, no *Estágio 1* da nova estratégia. O resultado desta etapa é uma resposta com  $N/2$  picos, sendo  $N/2 - 1$  destes gerados pelo filtro equalizador. Esta resposta pode conter ou não uma cauda na extremidade da banda passante, dependendo das características do filtro IIR e da ordem do equalizador. Na próxima etapa desta

estratégia, definida como *Estágio 2*, o  $(N/2)$ -ésimo par de pólos<sup>2</sup> é inserido para cancelar uma possível imperfeição resultante.



(a)



(b)

Figura 3.4: Uso de filtros passa-tudo para equalização da resposta de atraso de grupo de filtros IIR: equalizações de (a) 2ª-ordem e (b) 4ª-ordem. Em linhas sólidas a resposta do filtro IIR, em linhas tracejadas as respostas dos filtros equalizadores, e em linhas pontilhadas e tracejadas as respostas equalizadas.

<sup>2</sup> Em geral, ao longo deste texto nos referimos simplesmente ao par de pólos como geradores dos picos. Porém, deve-se lembrar que o respectivo par de zeros da seção passa-tudo também é responsável por este pico.

Quando a resposta resultante do *Estágio 1* não apresentar a cauda, é denominada como *Imperfeição SEM* cauda<sup>3</sup>, enquanto que havendo a cauda é denominada *Imperfeição COM* cauda. Os dois casos são ilustrados nas Figs. 3.5(a) e (b), respectivamente, ambos para equalizadores de ordem  $N = 6$ . O *Estágio 1* da *Estratégia B* é então efetuado com equalizador de ordem  $N - 2 = 4$ .

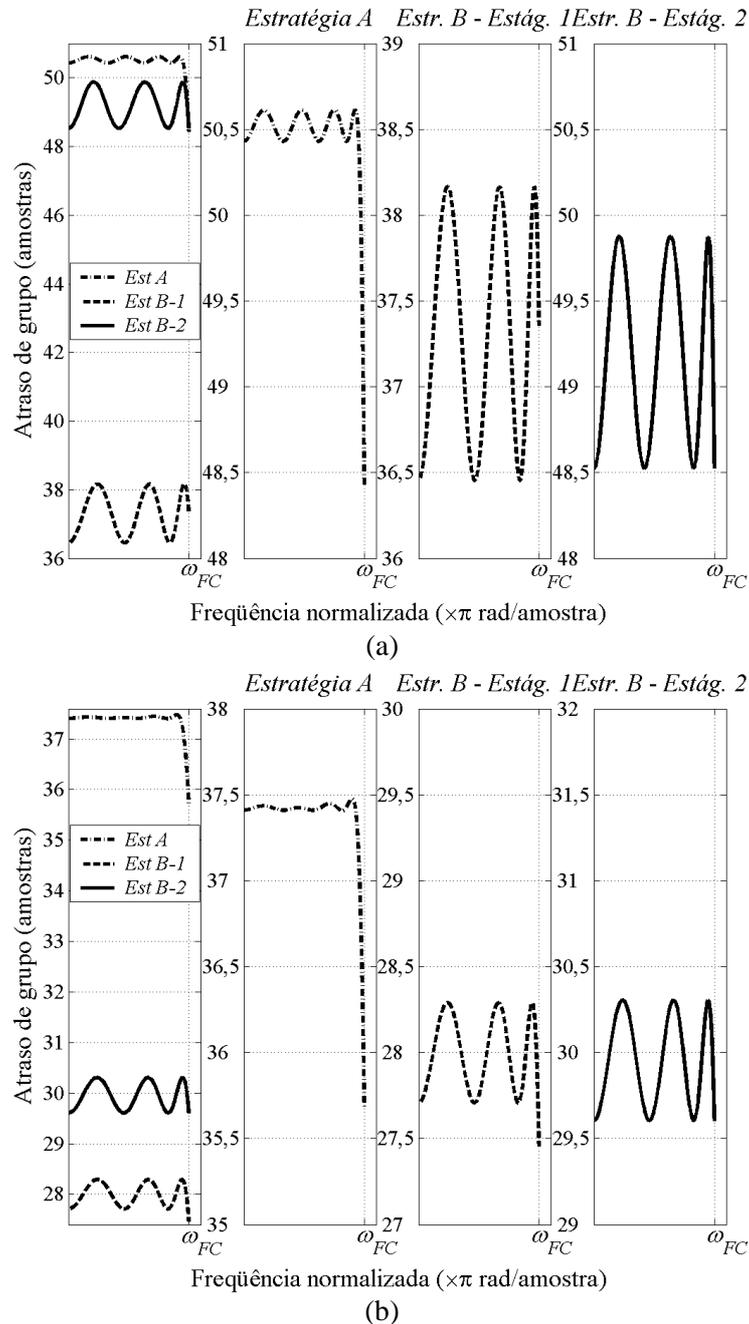


Figura 3.5: Exemplos de equalização usando as *Estratégias A* e *B*, mostrando os *Estágios 1* e *2* da segunda estratégia. Em (a) ocorre a *Imperfeição SEM*, e em (b) a *Imperfeição COM*.

<sup>3</sup> Pode surgir a dúvida de por que se utilizar a *Estratégia B* neste caso. Por isso, vale lembrar que até este ponto está se efetuando o *Estágio 1* desta estratégia, com  $(N-2)/2$  seções passa-tudo. A manutenção da *Estratégia A* com ordem  $N$  ocasiona o surgimento da cauda.

No primeiro exemplo o par de pólos é inserido na banda passante, ou seja,  $\theta_{p,N/2} < \omega_{FC} \pi$ , de forma que o pico gerado na resposta de atraso de grupo tenha mais influência sobre as frequências dentro do que no final da banda. Desta forma, podem-se equilibrar as alturas dos mínimos tanto dentro quanto no final da faixa de passagem. Já para o caso da *Imperfeição COM* deve-se gerar o pico de forma que este influa predominantemente na extremidade da banda de passagem. Ou seja, o pico deve ser gerado FORA da banda passante, isto é,  $\theta_{p,N/2} > \omega_{FC} \pi$ . A escolha dos módulos dos pólos dependerá da resposta obtida, e não é o objetivo neste momento definir a escolha ótima para os parâmetros, e sim introduzir os conceitos por trás de ambas as estratégias de alocação. Percebe-se que em ambos os casos a resposta ao final do *Estágio 2* possui  $N/2$  picos.

Portanto, como descrito nos parágrafos anteriores, existem duas diferentes estratégias de alocação dos pólos e zeros de um filtro equalizador de atraso de grupo, introduzidas em [15], as quais são caracterizadas como a seguir:

- *Estratégia A:  $1+N/2$  picos na resposta final, dentro da faixa de passagem;*
- *Estratégia B:  $N/2$  picos dentro e 1 pico introduzido dentro ou fora da faixa de passagem. Este pico controla a presença da “cauda”.*

Foi observado que rotinas de otimização procedem de uma forma semelhante ao que foi descrito até aqui, mesmo partindo de uma mesma estimativa inicial, independente da estratégia mais apropriada. Entretanto, foi observado também que, para alguns exemplos, a rotina é incapaz de alterar o procedimento, e não consegue obter a resposta ótima global. Sendo assim, é importante ter conhecimento prévio das possibilidades de alocação – *Estratégias A ou B* – para prover uma melhor estimativa inicial e aumentar a robustez do processo. Além disso, prevendo qual deve ser, provavelmente, a melhor estratégia a se utilizar pode-se acelerar o procedimento. Para isso é preciso um critério de decisão por uma ou outra estratégia.

Em [15], [16] foi introduzido um critério de decisão que tentava explorar o conhecimento da resposta original do filtro IIR e da ordem de equalização; entretanto, esta fórmula é empírica, podendo ser contestada. Além disso, em alguns casos a decisão mostrou-se ineficiente. Para aumentar a confiabilidade, a seguir é introduzido um novo critério de decisão que, apesar de também ser empírico, permite uma maior tolerância por uma das estratégias, deixando a decisão final para um outro critério por mudança da estratégia que será implementado durante a rotina de otimização.

### 3.4. Critério de Decisão

A escolha pela estratégia apropriada não é uma tarefa trivial, e em alguns casos, poder-se-ia tomar a decisão por tentativa e erro. Entretanto é possível fornecer um critério simplificado que auxilia o projetista do filtro a escolher a melhor estratégia a utilizar. Este critério não é rígido e, na maioria dos casos, seleciona a *Estratégia A*, uma vez que a *Estratégia B* é utilizada para atenuar a cauda, para ordens elevadas de equalização. Isto é, existe uma região de valores que poderia ser considerada região de dúvida. Entretanto, o critério adotado seleciona a *Estratégia A* nestes casos, por ser esta a mais comum nas soluções obtidas, e por ser mais provável o algoritmo de otimização partir desta estratégia e obter um resultado na *Estratégia B* do que o caminho inverso. Esta observação foi exaustivamente feita através de vários exemplos. Esta opção por um critério não tão rígido é facilmente contornada pela otimização que será descrita no Capítulo 5, quando a escolha for pela estratégia menos apropriada à solução. Isto porque, como será explicado, a rotina de otimização abrangerá uma verificação periódica da necessidade de troca de estratégias.

Para a tomada de decisão, numa primeira etapa seleciona-se a *Estratégia A* de alocação, por ser, como mencionado, a mais comum. Com esta escolha obtém-se a estimativa inicial por um método qualquer. É conveniente utilizar um método que leve a uma solução inicial próxima à ótima, para um desempenho melhor. Entre estas possíveis escolhas de estimativas iniciais estão a aproximação apresentada em [15] e as que serão apresentadas adiante, neste texto.

Com a resposta da estimativa inicial do equalizador,  $\tau_{E,0}(\omega)$ , é comparada à resposta original do filtro IIR,  $\tau_F(\omega)$ , verificando-se seus valores na frequência de corte do filtro,  $\omega_{FC}$ , como ilustrado na Fig. 3.6. Para a tomada de decisão é calculado o índice

$$R_{F,E} = \frac{\tau_{E,0}(\omega_{FC})}{\tau_F(\omega_{FC})}. \quad (3.1.1)$$

Através de simulações, foi construído o critério apresentado graficamente na Fig. 3.7, do qual é possível determinar se existe uma estratégia segura para a alocação, e, em caso afirmativo, qual seria esta estratégia. Pelo gráfico, conclui-se que se  $R_{F,E} < 1$ , então deve-se manter a *Estratégia A*, enquanto que se  $R_{F,E} > 1,3$ , deve-se passar para a *Estratégia B* e obter a nova solução inicial para o problema. Se o índice estiver entre os dois valores limites mencionados, então diz-se que existe uma incerteza sobre a escolha

da estratégia. Neste caso, opta-se por manter a *Estratégia A*, embora a solução final ótima possa ser obtida pelo método utilizado na segunda estratégia. Neste caso, um critério de mudança que será utilizado durante o procedimento de otimização será responsável pela decisão. Os critérios de escolha pelas estratégias são resumidos na Tabela 3.1.1.

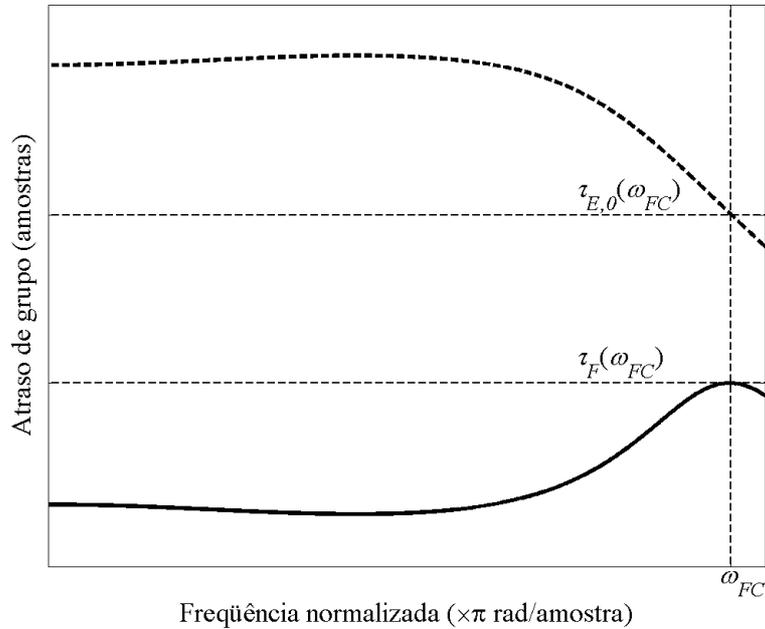


Figura 3.6: Tomada dos valores para verificação do critério de decisão pelas duas possíveis estratégias.

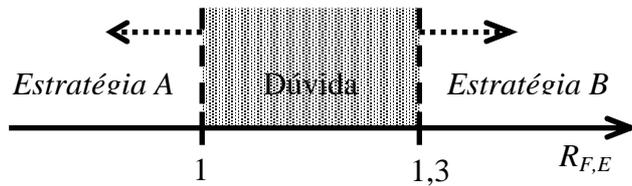


Figura 3.7: Critérios de decisão por uma ou outra estratégia de alocação, com região de dúvida.

Tabela 3.1.1: Critério de decisão definitivo, sem região de dúvida.

$R_{F,E}$	Estratégia
$\leq 1,3$	A
$> 1,3$	B

# Capítulo 4

## Métodos de Estimativa Inicial

### 4.1. Trabalhos Anteriores

O processo de otimização é uma etapa bastante sensível na busca pelo melhor resultado possível em aplicações onde a solução não pode ser obtida por métodos analíticos. Para uma rotina de otimização, deve-se escolher uma função custo apropriada, e como foi descrito em capítulos anteriores, em geral funções-custo apresentam inúmeros mínimos locais, dificultando ou até mesmo impedindo a obtenção do mínimo global. Por isto, uma boa solução inicial é necessária, iniciando a busca de um ponto o mais próximo possível da solução ótima, acelerando o processo e aumentando a robustez.

Especificamente para o projeto de filtros passa-tudo para a aplicação em equalização da resposta de atraso de grupo (ou atraso de fase), inúmeros parâmetros de projeto – 2 parâmetros para cada seção passa-tudo de 2ª-ordem – dificultam a busca pelo ótimo. Muitos autores buscaram solucionar o problema da falta de robustez de procedimentos aplicados a este projeto desenvolvendo novas rotinas de otimização com diferentes métodos de busca. Entretanto, poucos fornecem uma boa solução inicial. Em [8] e [11], as características da resposta de atraso de grupo do filtro IIR a ser equalizado não são exploradas devidamente para a escolha da estimativa inicial. Apesar dos bons resultados apresentados pelos autores, é impossível prever se suas escolhas para as soluções iniciais são suficientemente boas, e capazes de evitar mínimos locais em todos os casos de equalização. O método em [10] utiliza como solução inicial valores tabelados e, portanto, parte-se do mesmo ponto em projetos de equalizadores para diferentes filtros IIR. Isto contraria o que foi mostrado no Capítulo 2, demonstrando a fragilidade do método.

Em [3], os autores apresentam uma solução inicial interessante, onde os picos resultantes das seções passa-tudo são alocados em termos das frequências onde a resposta de atraso de grupo apresenta valor mínimo, dentro da faixa de passagem. O

valor do módulo dos pólos é escolhido de forma a elevar este valor mínimo até o máximo da resposta. Entretanto, observa-se por simulações que o método não leva a uma distribuição ótima para os pólos dentro da faixa de passagem, resultando em equalizadores com ordens superiores àquelas obtidas por outros métodos.

Em [15], [16], buscou-se explorar o conhecimento obtido com simulações de projetos de equalizadores pelo método de tentativa e erro tentando prever qual seria uma boa alocação inicial para os pólos e zeros do filtro passa-tudo. A escolha inicial das fases dos pólos foi obtida de forma analítica e mostrou-se uma boa escolha para estes parâmetros. Entretanto, a escolha dos módulos, uma etapa crítica, foi executada de forma empírica, reduzindo a robustez do método.

Com o objetivo de contornar as dificuldades encontradas nos trabalhos mencionados quanto ao fornecimento da solução inicial, neste trabalho são propostos dois novos métodos de alocação inicial dos pólos – e conseqüentemente dos zeros – do filtro passa-tudo equalizador. Uma vez que em [15] utilizou-se uma fórmula empírica para o fornecimento dos módulos dos pólos, explora-se a capacidade de redes neurais adaptarem-se a soluções não-analíticas, obtendo uma melhor aproximação inicial. O desenvolvimento das redes neurais, e o estudo dos dados necessários para a síntese das estruturas são descritos na próxima seção. Em seguida, mais uma vez explorando o conhecimento da escolha das fases de forma equidistante, porém evitando soluções empíricas, um método gráfico para as escolhas dos módulos, inspirado em [3], é apresentado. Neste, primeiro é feita a escolha das frequências onde os pólos serão alocados e então, a escolha dos módulos dedica-se a elevar a curva de atraso de grupo nas respectivas frequências, para obtenção de resposta equiripple.

#### **4.2. Estimativa Inicial com Redes Neurais**

Para evitar o uso de fórmulas empíricas para a alocação inicial dos parâmetros de otimização, propõe-se aqui verificar a utilidade de redes neurais para equalizações com ordens de 2 até 10. A limitação a estes valores deve-se à baixa incidência de soluções ótimas com ordens superiores. Haveria poucos pares para o treinamento das redes neurais, reduzindo a robustez do método. Além disso, o desenvolvimento desta técnica de alocação inicial serve apenas de investigação da validade da mesma, ficando o

desenvolvimento de redes para ordens superiores a cargo do leitor que se interessar pela ampliação dos resultados.

As redes neurais utilizadas são do tipo *feedforward*, utilizando o treinamento *error back-propagation*, pelo método da batelada (*batch*) [17]. As redes neurais apresentam um número  $N_{entradas}$  de entradas, dependente da aplicação. São utilizados neurônios com funções de ativação linear e tangente hiperbólica (*tgh*). Será mostrado mais adiante que se decidiu pela utilização das redes com  $N_{cam1}$  neurônios na camada intermediária, sendo um linear e  $N_{cam1} - 1$  do tipo *tgh*, e  $N_{saídas}$  neurônios lineares na camada de saída. Logo, as redes apresentam a estrutura geral apresentada na Fig. 4.1.

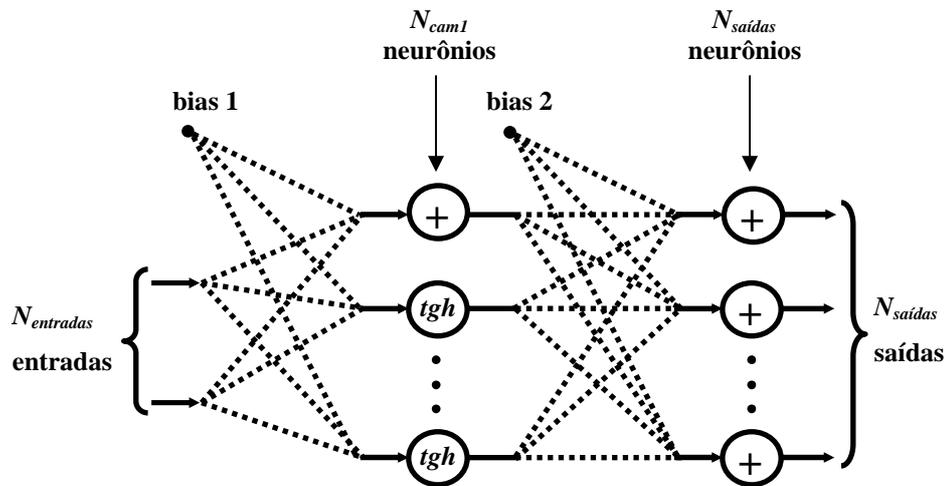


Figura 4.1: Estrutura geral das redes utilizadas neste trabalho.

Para o treinamento das redes utilizam-se resultados de equalizações efetuadas onde a resposta obtida é equiripple, como desejado. As saídas desejadas são os parâmetros de alocação dos pólos e zeros do filtro equalizador, ou seja, fases e módulos. É preciso identificar as entradas potencialmente influentes nos parâmetros ótimos do equalizador e, para isso, decidiu-se selecionar uma vasta gama de possíveis entradas para posterior avaliação da influência de cada uma. As entradas inicialmente selecionadas para as redes neurais a serem projetadas são definidas na Tabela 4.1 a seguir. As entradas consideradas serão explicadas e descritas adiante.

Tabela 4.1: Entradas consideradas *a priori*.

# Entrada	Descrição
<i>e-1.</i>	Ordem do equalizador;
<i>e-2.</i>	Fases ZEROS filtro IIR: 4 zeros mais próximos da frequência de corte;
<i>e-3.</i>	
<i>e-4.</i>	
<i>e-5.</i>	
<i>e-6.</i>	Módulos ZEROS filtro IIR: 4 zeros;
<i>e-7.</i>	
<i>e-8.</i>	
<i>e-9.</i>	
<i>e-10.</i>	Fases PÓLOS filtro IIR: 4 pólos mais próximos da frequência de corte;
<i>e-11.</i>	
<i>e-12.</i>	
<i>e-13.</i>	
<i>e-14.</i>	Módulos PÓLOS filtro IIR: 4 pólos;
<i>e-15.</i>	
<i>e-16.</i>	
<i>e-17.</i>	
<i>e-18.</i>	Fases pré-estabelecidas por partição;
<i>e-19.</i>	
<i>e-20.</i>	
<i>e-21.</i>	
<i>e-22.</i>	Valor do atraso de grupo do filtro IIR nas frequências pré-estabelecidas;
<i>e-23.</i>	
<i>e-24.</i>	
<i>e-25.</i>	
<i>e-26.</i>	
<i>e-27.</i>	Altura do pico máximo na resposta original IIR;
<i>e-28.</i>	
<i>e-29.</i>	
<i>e-30.</i>	Frequência do pico máximo da resposta original IIR;
<i>e-31.</i>	Área embaixo da resposta original IIR;
	Área em cima da resposta original IIR, limitada por um retângulo.

Estas são as 31 entradas pré-selecionadas para que sejam verificadas as influências das mesmas nas saídas das redes neurais. Com estas entradas escolhidas foram coletados 766 pares de entradas e saídas, para as diferentes ordens de equalizador consideradas – de 2ª a 10ª-ordens. Para melhores resultados, decidiu-se utilizar duas redes neurais para cada ordem, uma para fornecer as fases e outra para fornecer os módulos dos pólos do equalizador, resultando, portanto, neste trabalho, 10 redes neurais. Por exemplo, a rede neural de fases do equalizador de 4ª-ordem possuirá 2 saídas. Devido a esta escolha, pode-se eliminar a entrada *e-1*, uma vez que cada rede será dedicada a uma ordem específica. O número de entradas é então reduzido para 30. A seguir, avaliam-se as influências de algumas das entradas consideradas.

#### 4.2.1. Avaliação Subjetiva da Influência das Entradas

Para evitar o uso de entradas com pouca ou nenhuma influência nas saídas, analisemos o comportamento de algumas separadamente. Em primeiro lugar, investiga-se a influência dos zeros na resposta de atraso de grupo. Como neste trabalho tenta-se diminuir a distorção de não-linearidade de fase, através da equalização de atraso de grupo, os filtros considerados aqui são os que apresentam acentuada distorção de atraso de grupo, na grande maioria filtros elípticos, ou, em menor número, filtros de Chebyshev e Butterworth. Portanto, os filtros considerados ou possuem zeros sobre a circunferência unitária, ou possuem zeros na origem. Os zeros posicionados sobre a circunferência unitária não influenciam a distorção da resposta de atraso de grupo, apenas introduzem um nível DC na resposta. Para ilustrar esses efeitos, na Fig. 4.2 são apresentadas as respostas de atraso de grupo, completa (linha sólida) e apenas para os pólos (linha tracejada) de um filtro elíptico, assim como a diferença entre essas respostas (linha pontilhada). Esta última é constante na faixa de passagem, mostrando que os zeros não influenciam significativamente e são, portanto, descartados das entradas consideradas.

Restam 22 entradas. As fases obtidas por partição (*e-18* a *e-22*), como definido em [15], [16], são também entradas consideradas *a priori*. Estes valores são obtidos analiticamente através de divisões da fase do par de pólos mais externo do filtro IIR, que é também uma das entradas consideradas, *e-13*. Logo, existe elevada correlação entre as entradas *e-18* a *e-22*, e a entrada considerada *e-13*. Portanto, pode-se também

descartá-las, uma vez que elevada correlação entre entradas é um fator indesejado. Tem-se, neste momento, apenas 17 possibilidades de entradas.

Outra entrada considerada, a frequência de ocorrência do pico na resposta de atraso de grupo do filtro IIR,  $e-29$ , possui, notoriamente, elevada correlação com a fase do par de pólos mais externo do filtro, entrada  $e-13$ . Isto porque, é esta fase que determina a frequência de corte do filtro, aproximadamente onde ocorre o pico máximo da resposta. A entrada  $e-29$  é, portanto, também desconsiderada, restando apenas 16 entradas.

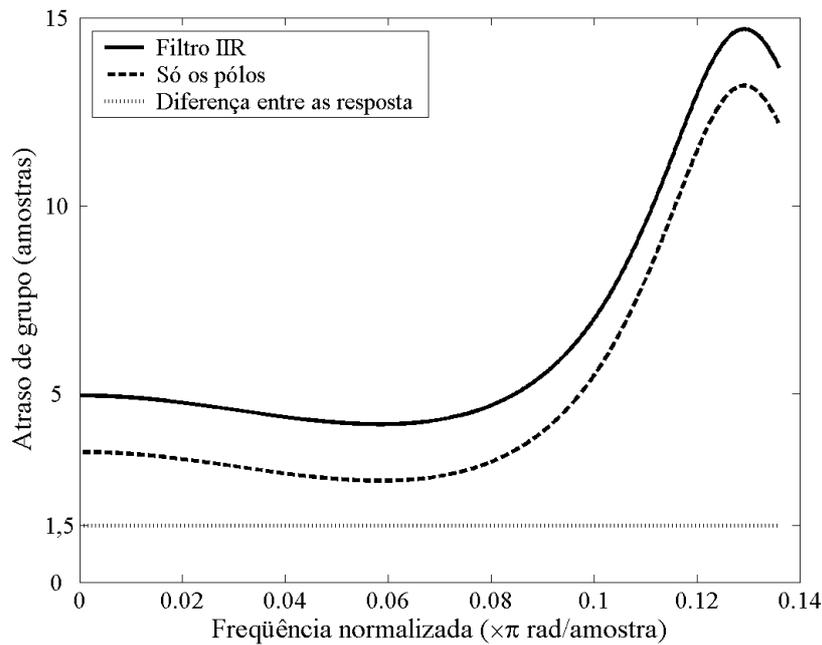


Figura 4.2: Respostas de atraso de grupo de um filtro IIR qualquer (*linha sólida*), a resposta considerando apenas os pólos (*linha tracejada*) e a diferença entre as duas respostas (*linha pontilhada*). É mostrada apenas a faixa de passagem.

Um aspecto observado durante o treinamento das redes é que as entradas  $e-23$  a  $e-27$ , referentes às alturas do atraso de grupo nas frequências pré-determinadas analiticamente, juntamente com a altura do pico máximo da resposta original, entrada  $e-28$ , não introduzem informação suficiente que incremente o treinamento das redes. Estas entradas são ilustradas na Fig. 4.3 para um exemplo de equalização de 4ª-ordem, com as entradas  $e-23$  e  $e-24$ , respectivamente  $h_1$  e  $h_2$ , e  $e-28$  igual a  $h_{pico}$ . As entradas  $e-25$  a  $e-27$  são zeradas – adiante mostrar-se-á que estas entradas não existirão para a rede de ordem 4. Observou-se com o treinamento de diferentes redes que uma forma de aumentar a influência das informações na saída é utilizar a altura que falta nas

frequências pré-determinadas para alcançar o topo do pico máximo. Isto é, as entradas  $e-23$  a  $e-27$  são substituídas pela diferença da entrada  $e-28$  a cada uma delas  $\{(e-28 - e-23); (e-28 - e-24); (e-28 - e-25); (e-28 - e-26); (e-28 - e-27)\}$ . No exemplo da Fig. 4.3 as novas entradas seriam  $h_{pico,1}$  e  $h_{pico,2}$ , reduzindo, portanto, de 3 para 2 entradas. Generalizando, desconsideram-se as 6 entradas  $e-23$  a  $e-27$  e  $e-28$ . Por fim, restam apenas 15 entradas, que serão consideradas no desenvolvimento das redes neurais.

O número de entradas de cada rede neural dependerá da ordem do equalizador a que se refere, porque, por exemplo, a rede neural para os módulos dos pólos do equalizador de 4ª ordem utiliza apenas 2 alturas da resposta – como ilustrado na Fig. 4.3 – sendo possível desconsiderar 3 das entradas. Com isto, as redes para o equalizador de 2ª-ordem possuirão 11 entradas, para as redes do equalizador de 4ª-ordem haverá 12 entradas, e assim por diante, até o equalizador de 10ª-ordem que terá 15 entradas. As 15 entradas são listadas na Tabela 4.2 abaixo e descrições mais detalhadas das mesmas são dadas em seguida, para clareza de identificação.

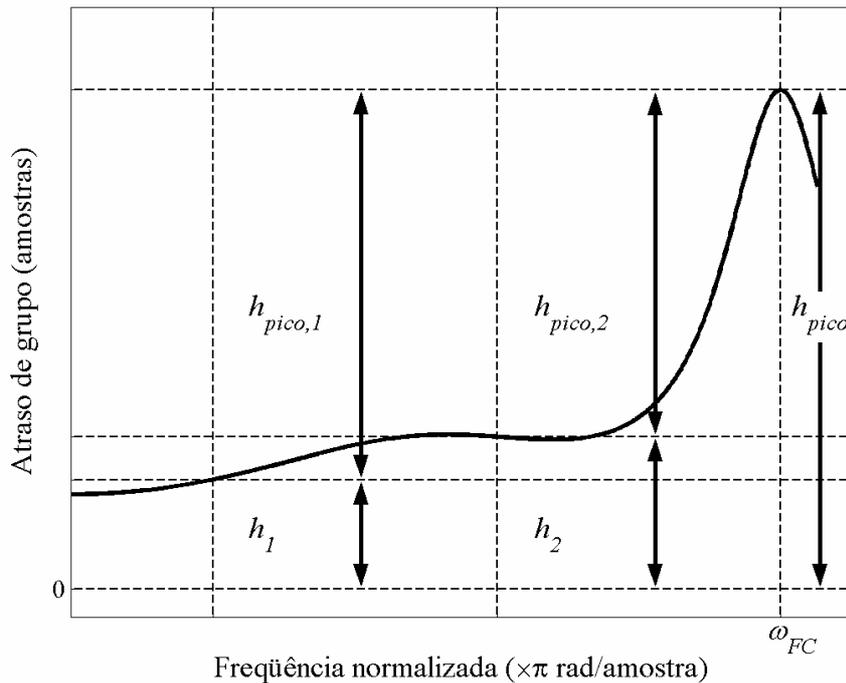


Figura 4.3: Alturas da resposta de atraso consideradas como entradas *a priori*,  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_{pico}$ , e alturas consideradas para o projeto das redes neurais,  $h_{pico,1}$  e  $h_{pico,2}$ . As alturas são tomadas nas frequências pré-determinadas  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

Tabela 4.2: Entradas consideradas no projeto.

# Entrada	Descrição
<i>e-1.</i>	Fases PÓLOS filtro IIR: 4 pólos mais próximos da frequência de corte;
<i>e-2.</i>	
<i>e-3.</i>	
<i>e-4.</i>	
<i>e-5.</i>	Módulos PÓLOS filtro IIR: 4 pólos;
<i>e-6.</i>	
<i>e-7.</i>	
<i>e-8.</i>	
<i>e-9.</i>	Diferença entre o valor do pico máximo e o valor do atraso de grupo nas frequências pré-estabelecidas analiticamente.
<i>e-10.</i>	
<i>e-11.</i>	
<i>e-12.</i>	
<i>e-13.</i>	
<i>e-14.</i>	Área embaixo da resposta original IIR;
<i>e-15.</i>	Área em cima da resposta original IIR, limitada por um retângulo.

#### 4.2.2. Descrição das Entradas e Saídas

As entradas de *e-1* a *e-8* são referentes aos 4 pares de pólos mais próximos da frequência de corte, que são os pares com maiores fases. Os pólos mencionados são ilustrados na Fig. 4.4, para um filtro elíptico de 11<sup>a</sup>-ordem que possui 5 pares de pólos complexos conjugados e um pólo real. Neste caso, apenas os 4 pares mais externos são considerados e o par complexo conjugado mais próximo ao eixo real e o pólo real são desconsiderados. Esta limitação a apenas 4 pares de pólos deve-se ao fato de que filtros elípticos de 8<sup>a</sup>-ordem (4 pares de pólos) já atendem especificações bem restritivas. Portanto, filtros elípticos de ordens superiores são pouco utilizados em aplicações práticas, o que levaria a um grande número de entradas iguais a zero caso fossem considerados mais pares de pólos como entradas das redes neurais. As 8 entradas consideradas para a rede correspondem às 4 fases (*e-1* a *e-4*) e 4 módulos (*e-5* a *e-8*) dos 4 pares de pólos. Estas entradas são listadas do par de menor fase (*e-1*, *e-5*) ao par de maior fase, mais próximo da frequência de corte (*e-4*, *e-8*).

As entradas  $e-9$  a  $e-13$  são as diferenças entre a altura do pico máximo da resposta original e as alturas nas frequências pré-determinadas por partição. A obtenção das entradas é ilustrada na Fig. 4.3, para o exemplo de 4ª-ordem. A entrada  $e-14$  representa a área embaixo da curva de atraso de grupo do filtro IIR, restrita à faixa de passagem do filtro, ilustrada por  $\text{Área}_1$  na Fig. 4.5. Finalmente, a entrada  $e-15$  representa a área limitada entre a curva de atraso de grupo do filtro e a reta sobre o valor do pico máximo da resposta, ilustrado por  $\text{Área}_2$  na Fig. 4.5.

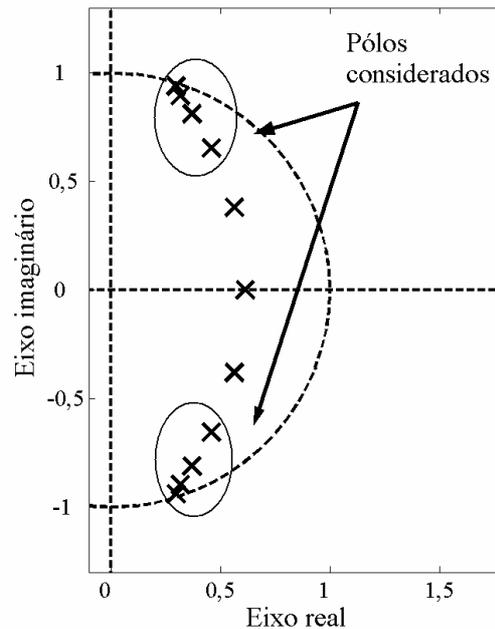


Figura 4.4: Ilustração dos polos considerados como entradas das redes neurais, para um filtro elíptico de 11ª-ordem.

Para cada ordem de equalização, como mencionado anteriormente, haverá duas redes neurais, cujas saídas são respectivamente as fases e os módulos dos pares de polos do equalizador. Desta forma, para o equalizador de ordem 2 existirão duas redes neurais com uma saída cada; as redes neurais para equalização de 4ª-ordem possuirão 2 saídas cada; as redes de 6ª-ordem, 3 saídas cada; para 8ª-ordem, 4 saídas cada; e, finalmente, as redes de 10ª-ordem possuirão 5 saídas cada.

Foram armazenados 766 pares entrada-saída, estando estes divididos entre as ordens de equalização, como mostra a Tabela 4.3. Para cada ordem do equalizador foram utilizados 90% dos pares para treino e 10% para teste.

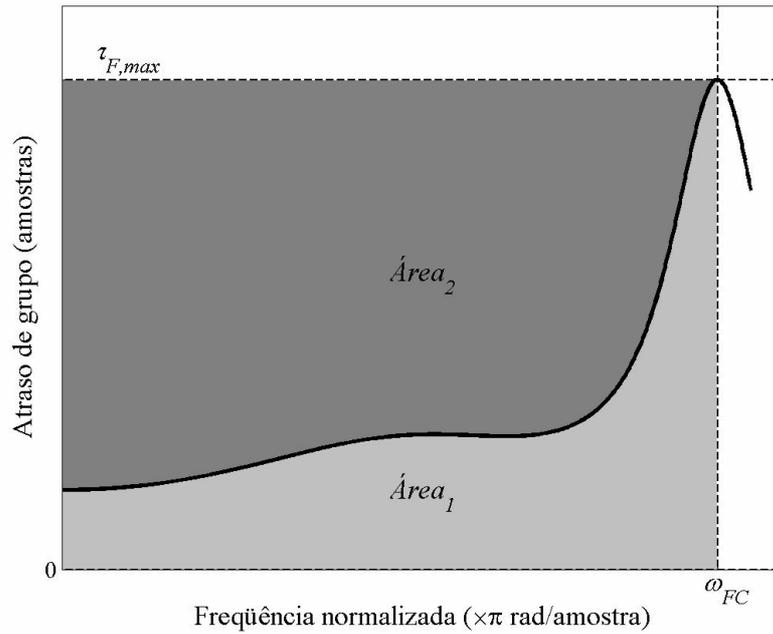


Figura 4.5: Áreas tomadas como entradas para a rede neural:  $\text{Área}_1$  é a área embaixo da curva de resposta do atraso de grupo,  $\text{Área}_2$  é a área acima da curva e abaixo do pico da resposta.

Tabela 4.3: Número de pares entrada-saída armazenados para treinamento e teste das redes neurais.

Ordem	2 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	10 <sup>a</sup>
# pares	186	177	159	137	107
# treino	167	159	143	123	96
# teste	19	18	16	14	11

### 4.2.3. Pré-Processamento dos Dados

A etapa seguinte do projeto consiste no pré-processamento dos dados de entrada e saída. O primeiro passo é a normalização dos dados. Para isso, é necessário o cálculo das médias  $\mu_i$  e variâncias  $\sigma_i^2$  dos dados de entrada e saídas – fases  $\theta_i$  e módulos  $r_i$  – como apresentado na Tabela 4.4. Percebe-se que algumas das entradas e saídas possuem baixa variância, o que dificulta o treinamento das redes neurais. Por isso, é efetuada uma normalização dos dados, através da fórmula:

$$DADO_{i,j} = \frac{DADO_{i,j} - \mu_i}{2 \cdot \sigma_i}, \quad (4.2.1)$$

onde  $DADO_{i,j}$  pode ser uma entrada ou uma saída,  $i = 1, \dots, N_{DADOS}$  é o número da entrada ou saída,  $j = 1, \dots, N_{PARES}$  é o número do par, e  $\sigma_i$  é o desvio padrão do  $i$ -ésimo dado. A normalização ocorre após a divisão dos pares entre as ordens de equalização. Após esta operação, os dados de entrada e saída apresentam média zero e variância 0,25. Desta forma, o treinamento das redes neurais ocorre com mais eficácia, como foi comprovado pelo desenvolvimento.

Tabela 4.4: Médias e variâncias dos dados armazenados para treinamento das redes.

		Ordem do equalizador									
		2 <sup>a</sup>		4 <sup>a</sup>		6 <sup>a</sup>		8 <sup>a</sup>		10 <sup>a</sup>	
Dados		$\mu_i$	$\sigma_i^2$	$\mu_i$	$\sigma_i^2$	$\mu_i$	$\sigma_i^2$	$\mu_i$	$\sigma_i^2$	$\mu_i$	$\sigma_i^2$
Entradas	<i>e-1.</i>	0,017	0,006	0,018	0,006	0,020	0,007	0,024	0,008	0,030	0,009
	<i>e-2.</i>	0,234	0,100	0,246	0,102	0,274	0,106	0,315	0,110	0,385	0,115
	<i>e-3.</i>	0,582	0,120	0,611	0,109	0,659	0,094	0,698	0,082	0,762	0,073
	<i>e-4.</i>	0,732	0,114	0,756	0,107	0,784	0,101	0,820	0,089	0,873	0,076
	<i>e-5.</i>	0,155	0,081	0,163	0,084	0,181	0,090	0,205	0,097	0,246	0,103
	<i>e-6.</i>	0,514	0,104	0,540	0,095	0,582	0,076	0,622	0,056	0,645	0,038
	<i>e-7.</i>	0,811	0,013	0,811	0,014	0,819	0,011	0,826	0,009	0,838	0,007
	<i>e-8.</i>	0,940	0,003	0,941	0,003	0,943	0,003	0,946	0,002	0,947	0,002
	<i>e-9.</i>	26,11	283,1	27,28	287,3	28,94	291,4	30,56	304,7	32,79	305,9
	<i>e-10.</i>			25,11	260,0	28,05	282,2	30,14	298,2	32,53	299,3
	<i>e-11.</i>					24,88	243,4	28,73	280,4	31,87	293,1
	<i>e-12.</i>							24,90	234,3	30,13	274,2
	<i>e-13.</i>									25,75	221,7
	<i>e-14.</i>	1,645	0,286	1,689	0,259	1,760	0,235	1,838	0,221	1,939	0,214
	<i>e-15.</i>	5,244	19,22	5,480	19,050	5,956	18,97	6,589	19,11	7,657	19,23
Saídas	$\theta_1$	0,2425	0,0109	0,156	0,004	0,117	0,002	0,096	0,001	0,083	0,001
	$\theta_2$			0,472	0,038	0,352	0,019	0,286	0,010	0,248	0,006
	$\theta_3$					0,589	0,054	0,478	0,029	0,414	0,017
	$\theta_4$							0,671	0,057	0,580	0,033
	$\theta_5$									0,748	0,054
	$r_1$	0,9040	0,0029	0,903	0,003	0,907	0,003	0,911	0,002	0,918	0,001
	$r_2$			0,905	0,003	0,907	0,003	0,911	0,002	0,918	0,001
	$r_3$					0,911	0,002	0,912	0,002	0,918	0,001
	$r_4$							0,916	0,001	0,919	0,001
	$r_5$									0,923	0,001

## Correlação Entre as Entradas

Um passo importante para simplificação da rede é verificar a existência de correlação entre diferentes entradas, para evitar a redundância de informação. O cálculo da correlação entre as diferentes entradas é efetuado através da seguinte expressão:

$$R_{i,j}(x_i, x_j) = \frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{PARES}}} x_i(k) \cdot x_j(k)}{\left[ \left( \sum_{k=1}^{N_{\text{PARES}}} (x_i(k))^2 \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{N_{\text{PARES}}} (x_j(k))^2 \right) \right]^{1/2}} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, 15, \\ j = 1, \dots, 15, j \neq i. \end{array} \quad (4.2.2)$$

Esta etapa já havia sido efetuada quando ainda se tinham todas as 31 entradas consideradas inicialmente. Entretanto, a avaliação da redundância entre as entradas havia sido efetuada de forma intuitiva. Com as 15 entradas restantes não foi possível eliminar nenhuma delas, pois as entradas já não apresentam correlação entre si.

## Correlação entre Entradas e Saídas

Para se obter os valores das correlações entre entradas e saídas, aplica-se novamente a Eq. (4.2.2), substituindo  $x_j$  pela saída com a qual se deseja fazer o cálculo, com  $j = 1, \dots, N$ . Estes cálculos são efetuados separadamente para cada um dos conjuntos de dados, isto é, para cada ordem de equalizador. Ainda, como se propôs a utilização de duas redes neurais para cada ordem de equalização, é possível que as redes responsáveis pelas fases possuam entradas diferentes das redes referentes aos módulos, e, portanto, deve-se verificar a correlação entre as entradas e as fases e entre as entradas e os módulos, separadamente.

Concluídos os cálculos, chegou-se à conclusão de que as entradas influentes nas escolhas das fases eram as mesmas para todas as ordens de equalizador, sendo elas as fases dos dois pares de pólos do filtro IIR mais próximos da frequência de corte (pólos mais externos) e a área sob a curva de atraso de grupo original, entradas  $e-3$ ,  $e-4$  e  $e-14$ . Para as redes dos módulos, as entradas influentes são diferentes, e as que apresentaram maior correlação com as saídas (módulos) para todas as ordens foram as entradas referentes aos módulos dos dois pares de pólos mais externos do filtro IIR,  $e-7$  e  $e-8$ , as diferenças de alturas da curva de atraso nas frequências pré-determinadas até o pico da resposta original,  $e-9$  a  $e-13$ , e novamente,  $e-14$ . É importante ressaltar que, as entradas de  $e-10$  a  $e-13$  são consideradas apenas para ordens maiores que  $N = 2$ . Isto é, a rede

para os módulos do equalizador de 2<sup>a</sup>-ordem terá apenas as entradas  $\{e-7, e-8, e-9, e-14\}$ , para 4<sup>a</sup>-ordem, apenas  $\{e-7, e-8, e-9, e-10, e-14\}$ , e assim por diante até a rede de 10<sup>a</sup>-ordem, que terá todas as entradas influentes mencionadas  $e-7$  a  $e-14$ . A Tabela 4.5 define as entradas das redes neurais para as fases,  $e_{fase,i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , e para os módulos,  $e_{módulo,j}$ ,  $j = 1, \dots, 3+N/2$ , com relação às entradas listadas na Tabela 4.2.

Tabela 4.5: Entradas das redes neurais das fases e módulos, por ordem do equalizador, com respeito as entradas listadas na Tabela 4.2.

	Ordem do equalizador				
	2 <sup>a</sup>	4 <sup>a</sup>	6 <sup>a</sup>	8 <sup>a</sup>	10 <sup>a</sup>
$e_{fase,1}$	$e-3$				
$e_{fase,2}$	$e-4$				
$e_{fase,3}$	$e-14$				
$e_{módulo,1}$	$e-7$				
$e_{módulo,2}$	$e-8$				
$e_{módulo,3}$	$e-14$				
$e_{módulo,4}$	$e-9$				
$e_{módulo,5}$		$e-10$			
$e_{módulo,6}$			$e-11$		
$e_{módulo,7}$				$e-12$	
$e_{módulo,8}$					$e-13$

Depois de escolhidas as entradas mais influentes para cada rede considerada pelas correlações entre entradas e saídas, efetuou-se o cálculo da relevância de cada entrada. Para esta tarefa, o treinamento das redes é realizado, e com as redes obtidas substitui-se uma das entradas pela respectiva média, verificando-se o erro obtido. Quando o erro é pequeno, conclui-se que a entrada substituída não é relevante para a saída, e portanto, pode ser eliminada. Isto foi repetido para todas as entradas de cada rede, e ao término desta etapa verificou-se que todas as entradas agora consideradas, e listadas na Tabela 4.5 são relevantes para as saídas, e por isso devem ser mantidas.

#### 4.2.4. Treinamento das Redes Neurais

Como foi mencionado no início da Seção 4.2, as redes neurais consideradas neste trabalho são do tipo *feedforward*, de duas camadas, utilizando treinamento *error backpropagation*, pelo método da batelada. A função erro a ser minimizada é o valor

médio do quadrado dos erros de cada saída da rede. O passo de treinamento utilizado é variável, considerando para tal a busca linear de Armijo [18], [19]. Desta forma, o procedimento torna-se mais complexo e mais demorado. Entretanto, é necessário um menor número de iterações para a convergência, e aumenta-se a robustez da busca pela melhor rede neural possível.

Decidiu-se pela utilização de redes com 5 neurônios na camada intermediária, sendo 4 neurônios do tipo *tgh* e 1 neurônio linear. O número de neurônios da camada de saída é definido pelo número de saídas de cada rede. Os procedimentos utilizados para os treinamentos das redes mostraram-se bastante eficientes, com erros da ordem de 10% das variâncias das saídas, indicando que a precisão obtida das redes é da ordem de 90% de certeza.

Até este ponto não foi mencionada a *Estratégia B* de alocação de pólos e zeros do equalizador. Entretanto, como foi definido que para esta estratégia efetua-se a princípio, no *Estágio 1*, a *Estratégia A*, então não é considerada a escolha dos parâmetros do par de pólos que é introduzida no *Estágio 2*. Para esta última etapa será definida uma estimativa no Capítulo 5, a seguir.

Portanto, as redes neurais desenvolvidas são responsáveis pela estimativa inicial da *Estratégia A*, com ordem  $N$ , ou para o *Estágio 1* da *Estratégia B*, com ordem  $N - 2$ .

#### 4.2.5. Resultados

Obtidas as redes neurais que proverão as estimativas iniciais para a alocação dos pólos e zeros de um filtro equalizador, a partir de um filtro IIR qualquer, será verificada a eficiência dos resultados obtidos. Para isso, o método foi aplicado às equalizações de diferentes filtros IIR, entre eles dois filtros elípticos e um filtro de Chebyshev do tipo I, com as frequências normalizadas pela metade da frequência de amostragem. Os resultados das estimativas iniciais são apresentados abaixo.

**Exemplo 4.2.1** Filtro elíptico de 4<sup>a</sup>-ordem, com as seguintes especificações:

- Frequência de corte: 0,2 rad/s;
- Frequência da faixa de rejeição: 0,28 rad/s;
- *Ripple* na faixa de passagem: 1 dB;
- Atenuação na faixa de rejeição: 35 dB.

Para este filtro são apresentados os resultados de 2ª a 8ª-ordens do equalizador, na Fig. 4.6. O resultado para o equalizador de 10ª-ordem não é mostrado, porque para este caso verificou-se que seria preferível utilizar a *Estratégia B* de alocação dos pólos e zeros. Os resultados indicam que as estimativas fornecidas pelas redes não são as respostas ótimas por não serem perfeitamente equiripple, entretanto apresentam um comportamento satisfatório, fato comprovado quando estes resultados são aplicados como soluções iniciais para rotinas de otimização.

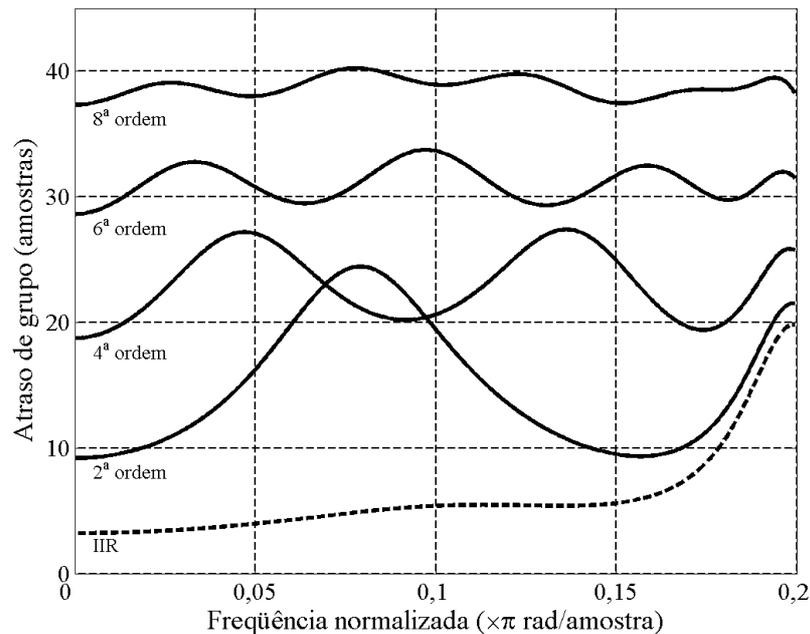


Figura 4.6: Curvas de atraso de grupo do filtro elíptico do Exemplo 4.2.1, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2ª a 8ª-ordens.

**Exemplo 4.2.2** Filtro elíptico de 5ª-ordem, com as seguintes especificações:

- Freqüência de corte: 0,12 rad/s;
- Freqüência da faixa de rejeição: 0,17 rad/s;
- *Ripple* na faixa de passagem: 0,5 dB;
- Atenuação na faixa de rejeição: 40 dB.

Para este filtro foi possível obter os resultados apresentados na Fig. 4.7, gerados pelas redes neurais para os casos de equalização de 2ª a 10ª-ordens, ou seja, todos os casos considerados nesta Seção.

Os resultados são excelentes e estão bastante próximos da resposta ótima obtida por rotinas de otimização. Isto é comprovado quando se aplicam estas alocações como

soluções iniciais de rotinas de otimização, que em poucas iterações atingem o resultado ótimo.

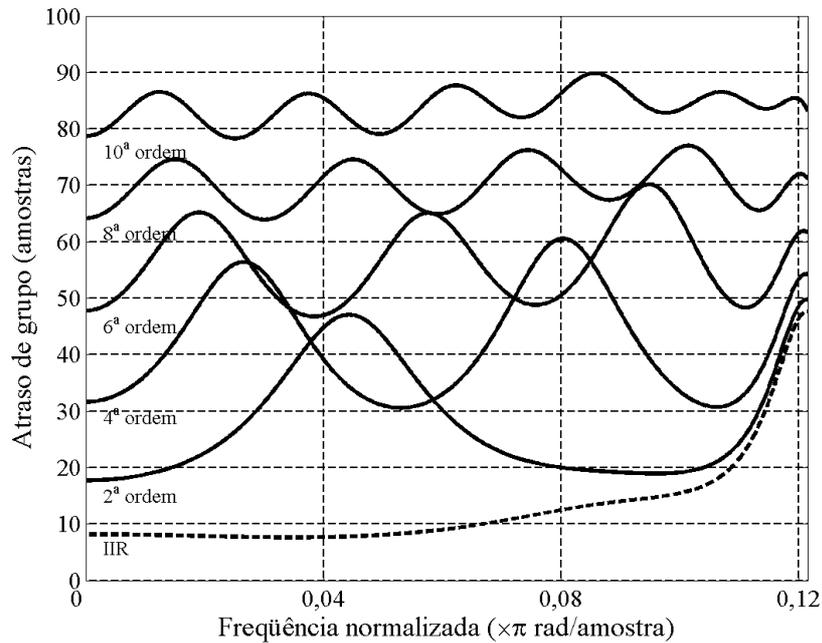


Figura 4.7: Curvas de atraso de grupo do filtro elíptico do Exemplo 4.2.2, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2ª a 10ª-ordens.

**Exemplo 4.2.3** Filtro de Chebyshev do tipo I de 7ª-ordem, com as seguintes especificações:

- Freqüência de corte: 0,3 rad/s;
- Freqüência da faixa de rejeição: 0,4 rad/s;
- *Ripple* na faixa de passagem: 0,1 dB;
- Atenuação na faixa de rejeição: 30 dB.

Neste exemplo utilizou-se um filtro com banda de passagem mais ampla, e ainda assim os resultados obtidos, mostrados na Fig. 4.8, foram satisfatórios, comprovando a validade do método. Foi possível utilizar as redes neurais como estimativa inicial até o equalizador de 10ª-ordem. Mais uma vez, aplicando estes resultados à rotina de otimização foi possível obter a resposta ótima em poucas iterações, evitando mínimos locais da função custo. Resultados obtidos com as rotinas de otimização serão mostrados e discutidos no próximo capítulo.

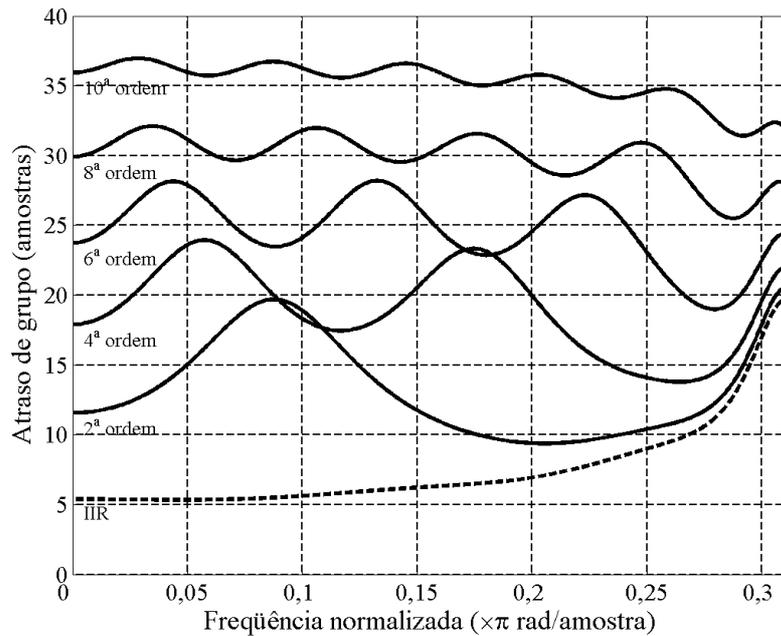


Figura 4.8: Curvas de atraso de grupo do filtro de Chebyshev do Exemplo 4.2.3, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2ª a 10ª-ordens.

Apesar do excelente desempenho verificado nesta Seção, deve-se ressaltar que o método apresenta algumas restrições. Entre elas, deve-se lembrar que para se obterem resultados para qualquer exemplo de equalização tão bons quanto os aqui obtidos, dever-se-ia considerar todos os possíveis casos *a priori*, na tomada dos dados para treinamento das redes. É possível contornar este problema armazenando pares entrada-saída para uma vasta gama de situações. Portanto, para aplicações específicas em que seja exigida maior confiabilidade é necessário sintetizar a rede adequada, uma vez que neste trabalho preocupou-se apenas com a elaboração do método.

Deve-se, ainda, considerar que os resultados fornecidos pelas redes serão sempre confiáveis, não sendo tolerados *outlayers*. Além de possíveis problemas quanto ao rendimento da rede, há ainda a questão do armazenamento dos valores das sinapses das redes neurais. Isto porque, como se decidiu pela síntese de 2 redes para cada ordem do equalizador, há um grande número de redes geradas, e o número de dados armazenados é muito grande. Adicionalmente, se for desejado permitir a equalização com ordens superiores, outras redes terão que ser sintetizadas.

Por estes motivos é importante prover, também, uma solução alternativa caso o método das redes neurais não seja considerado confiável. Um método analítico para a estimativa inicial é descrito na Seção que se segue.

### 4.3. Estimativa Gráfica dos Módulos

Para o desenvolvimento de uma solução analítica a opção é retornar ao método descrito em [15], e buscar uma solução não-empírica para a escolha dos módulos dos pólos e zeros do filtro equalizador. Uma possível maneira de solucionar este problema é, com base no método descrito em [3], escolher o módulo dos pólos de acordo com a necessidade de elevação da curva de atraso de grupo, para obtenção de resposta equiripple. Entretanto, este procedimento busca os pontos de mínimo da curva e eleva-os com a inclusão de pólos nas frequências destes pontos. Para melhores resultados, este método é aliado à escolha das fases determinadas por partição em [15], buscando com isso elevar a resposta nas frequências relativas às fases dos pólos.

Para um melhor entendimento, abaixo é apresentado o método de Umino em [3] e em seguida é descrito o novo método proposto nesta pesquisa.

#### 4.3.1. Método de Umino [3]

Um determinado filtro IIR apresenta resposta de atraso de grupo  $\tau_F(\omega)$ , não constante, como por exemplo, a resposta observada na Fig. 4.9(a). Num primeiro passo para a busca da solução inicial, procura-se a frequência  $\omega_{min}$  tal que

$$\tau_F(\omega_{min}) = \min[\tau_F(\omega) \mid \omega \leq \omega_{FC}],$$

onde  $\omega_{FC}$  é a frequência de corte do filtro. Mede-se a altura  $h_{pico,min} = \tau_{F,max}(\omega) - \tau_F(\omega_{min})$ , tal que

$$\tau_{F,max}(\omega) = \max[\tau_F(\omega) \mid \omega \leq \omega_{FC}].$$

Com estes dois valores é possível escolher o par de parâmetros do primeiro par de pólos, ou seja, a fase e módulo  $\{\theta_{p,1}; r_{p,1}\}$  do mesmo. A fase é igualada a  $\theta_{p,1} = \omega_{min} \cdot \pi$ , e o módulo é escolhido tal que  $\tau_{F+E}(\omega_{min}) = \tau_F(\omega_{min}) + h_{pico,min}$ , como ilustrado na Fig. 4.9(a). Efetuada esta etapa, o atraso de grupo do filtro incluindo o equalizador é igual ao apresentado na Fig. 4.9(b). Após o primeiro passo, o processo é repetido para as seções passa-tudo subsequentes, terminando quando o número máximo de seções fixado for alcançado. Este método não é eficiente, pois utiliza um número de seções maior do que o necessário para obter uma resposta equiripple equivalente. Além disso, não explora o conhecimento da resposta ótima equiripple comumente encontrada por

rotinas de otimização, que levaria à utilização de fases dos pólos aproximadamente equidistantes entre si, como em [15].

Neste trabalho propõe-se aliar a escolha das fases equidistantes de [15] e o processo de obtenção dos módulos de Umino [3]. O novo método é apresentado a seguir.

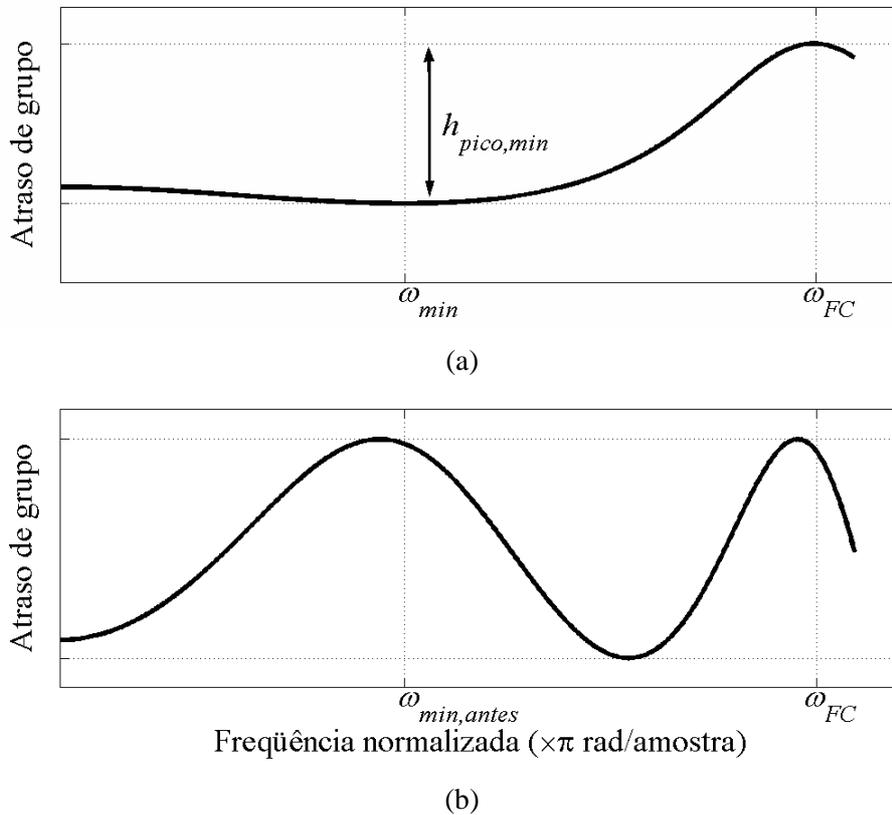


Figura 4.9: Respostas de atraso de grupo de um filtro IIR: (a) resposta original, (b) resposta do filtro mais um equalizador ajustado pelo método de Umino [3].

#### 4.3.2. Método Gráfico de Alocação Inicial

No procedimento desenvolvido em [15], utiliza-se um método de partição da fase  $\theta_{F,MAX}$ , como indicado na Fig. 4.10, do par de pólos mais externos do filtro IIR a ser equalizado, para a escolha das fases dos pólos do equalizador. Como mencionado no Capítulo 3, a *Estratégia B* utiliza a mesma partição da *Estratégia A*, porém com um par de pólos a menos. Desta forma, basta definir uma única partição, diferentemente do que foi proposto em [15], ou seja, basta utilizarmos a partição definida para a primeira estratégia. Após observações em inúmeros resultados obtidos decidiu-se pela alteração na partição para aproximar a estimativa inicial da solução ótima.

Foi observado que os melhores resultados são obtidos quando, ao invés de usar a partição do ângulo  $2 \cdot \theta_{F,MAX}$  em  $N+1$  divisões, entre os dois pólos mais externos do filtro, utiliza-se a partição

$$\theta_p = \frac{\theta_{F,MAX}}{K}, \quad (4.3.1)$$

onde  $K$  é determinado da forma descrita na Tabela 4.6.

Tabela 4.6: Valores de  $K$  de acordo com a estratégia.

<b>Estratégia</b>	<b><math>K</math></b>	<b>Descrição</b>
<i>A</i>	$N$	Equalização
<i>B</i>	$N-2$	Equalização parcial

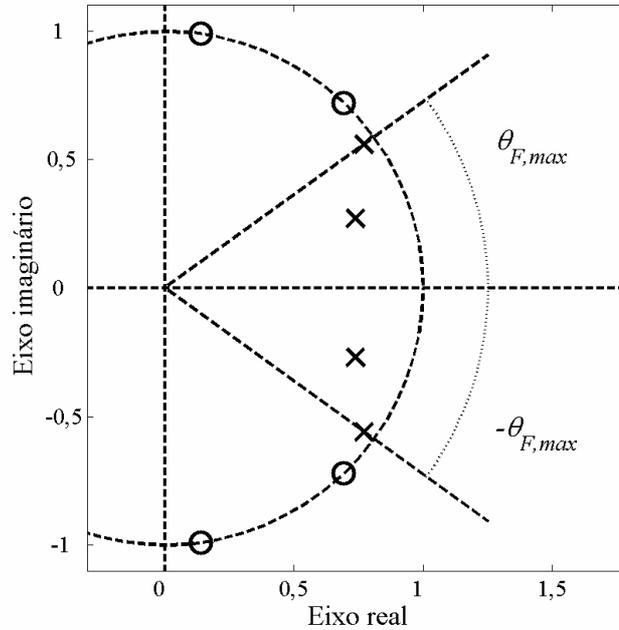


Figura 4.10: Fase  $\theta_{F,max}$  do par de pólos mais externo do filtro IIR.

Então, cada um dos  $K/2$  pares de pólos do equalizador será alocado com as seguintes fases

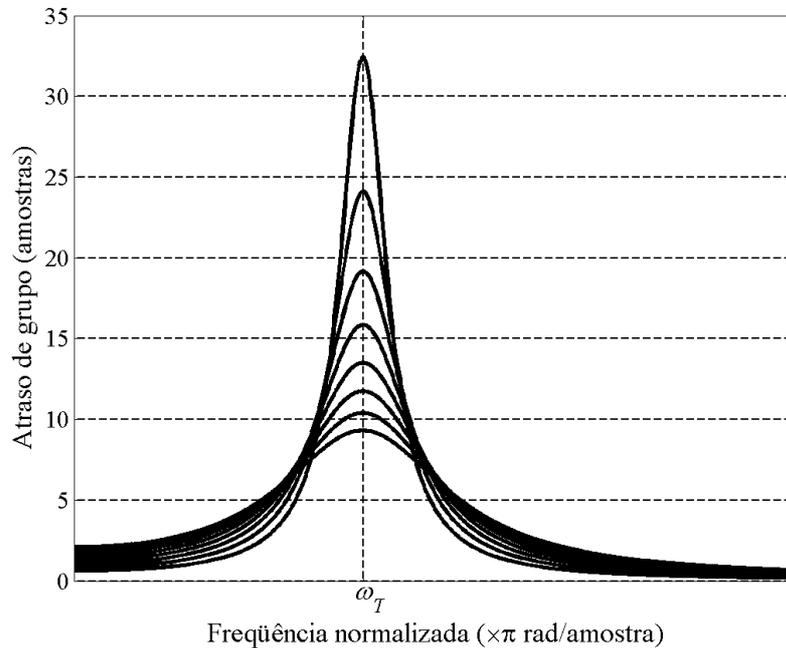
$$\theta_{p,i} = \pm (2 \cdot i - 1) \cdot \theta_p, \quad i = 1, \dots, K/2. \quad (4.3.2)$$

Definidas as fases dos pólos, a altura  $h_{pico,i}$  a ser considerada deve ser medida entre o pico da resposta de atraso de grupo e a resposta na frequência dos pólos, isto é,  $\omega_{p,i} = \theta_{p,i}/\pi$ . Isto porque, como demonstrado em capítulos anteriores, o pico da resposta

de atraso de grupo de uma seção passa-tudo de 2ª-ordem ocorre na frequência correspondente à fase do par de pólos. Logo, é intuitivo pensar que a melhor escolha para o módulo do par de pólos  $r_{p,i}$ , é aquele que gera uma resposta isolada com altura do pico em  $\omega_{p,i}$  igual a  $h_{pico,i}$ .

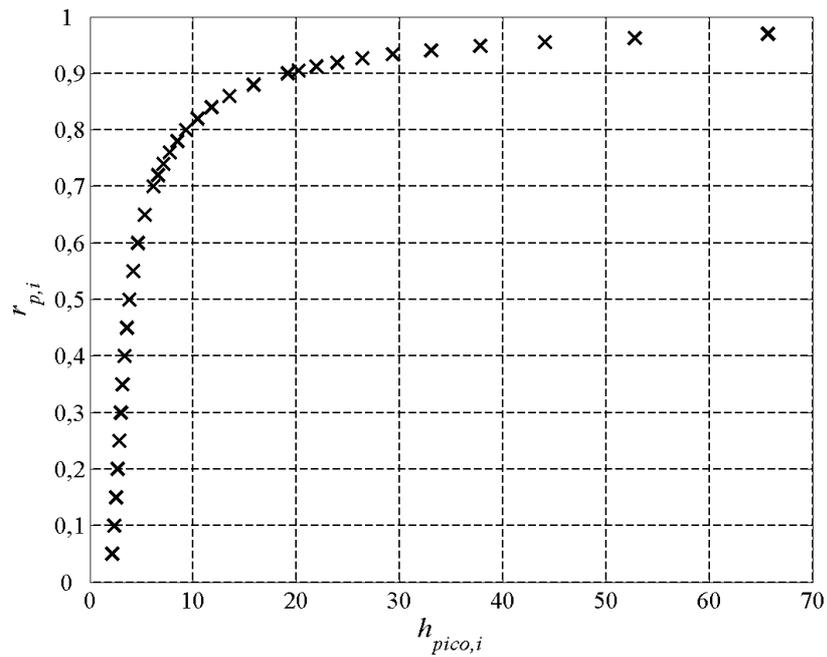
#### 4.3.3. Como Escolher $r_{p,i}$ a Partir de $h_{pico,i}$ ?

Dada uma seção passa-tudo onde a fase dos pólos é fixada em  $\theta_T$ , caso o módulo  $r_{p,i}$  seja gradualmente aumentado, então o pico da resposta de atraso de grupo em  $\omega_T = \theta_T/\pi$  também aumenta progressivamente, como ilustrado na Fig. 4.11(a). Pode-se, então, mapear esta transformação, armazenando inúmeros pontos de  $r_{p,i} \times h_{pico,i}$ , e construir um gráfico com estes pontos, como na Fig. 4.11(b). É possível realizar um mapeamento completo dos pontos, utilizando a ferramenta de *fitting* de curvas do MatLab. A melhor função obtida para este ajuste é uma razão de polinômios de 5ª-ordem, e a curva gerada é mostrada na Fig. 4.11(c).

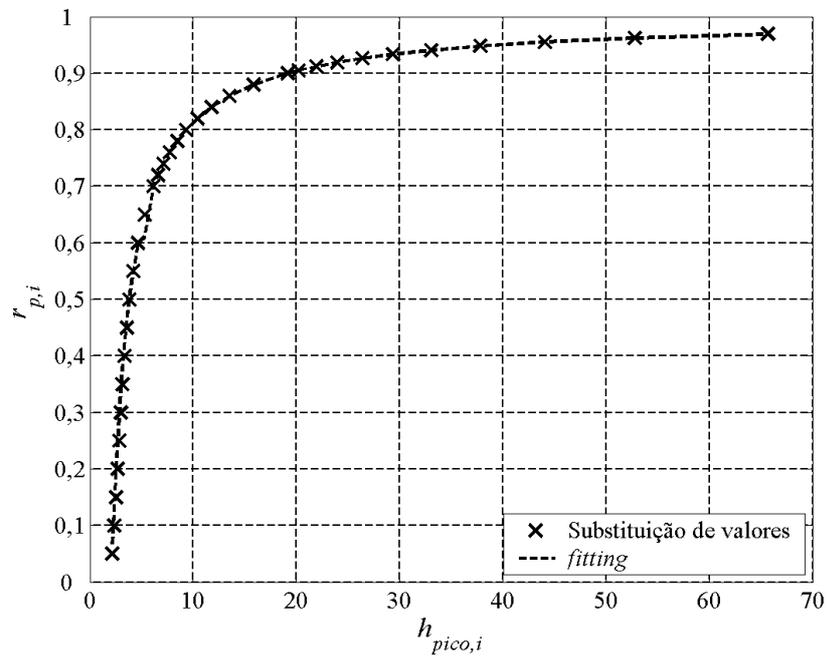


(a)

Figura 4.11: (a) Diferentes curvas de atraso de grupo para fase  $\theta_T$  dos pólos fixada e módulo  $r_{p,i}$  variado.



(b)



(c)

Figura 4.11: (b) pontos altura vs. módulo obtida variando os módulos, e (c) pontos da figura em (b), marcados por  $\times$ , e curva ajustada por *fitting*.

Entretanto, se o módulo dos pólos for agora fixado em  $r_T$ , e a fase  $\theta_{p,i}$  for gradualmente reduzida, verifica-se que a altura do pico da resposta é aumentado na medida em que a fase se aproxima de zero. Este fato é observado na Fig. 4.12, indicando que no mapeamento utilizado para obtenção do módulo apropriado para a seção passa-tudo deve, também, levar em consideração a frequência sobre a qual os pólos serão alocados. Um mapeamento mais completo é então obtido com uma superfície tridimensional que tem como abscissas frequência e altura e como ordenada o módulo, ou seja, frequência x altura x módulo. A superfície obtida é mostrada na Fig. 4.13, da qual a curva da Fig. 4.11(c) é um corte na frequência 0,2.

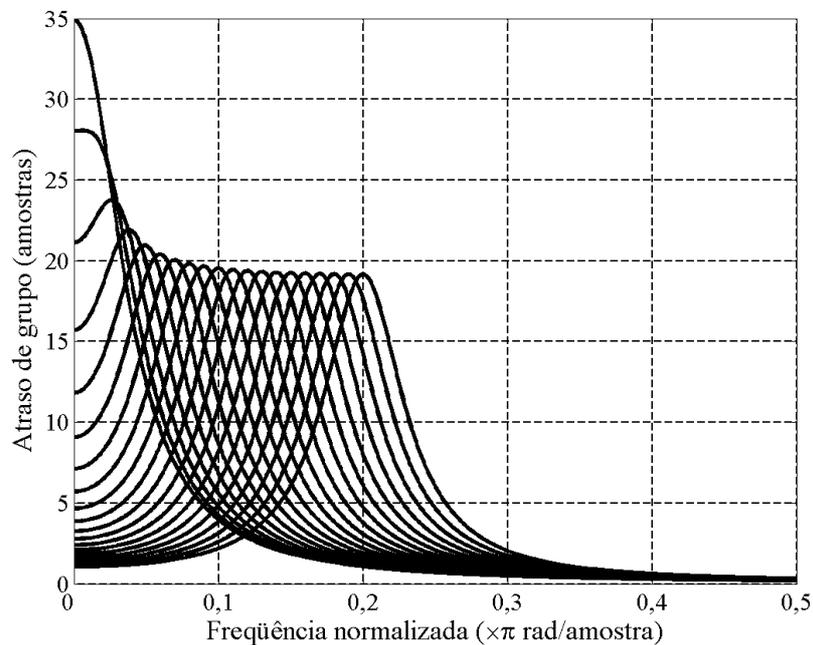


Figura 4.12: Diferentes curvas de atraso de grupo para módulo  $r_{p,i}$  dos pólos fixado e fase  $\theta_T$  variada.

Para o esboço da superfície na Fig. 4.13, foi utilizado um número finito de pontos. Para abranger todos os pontos possíveis é feita uma interpolação dos pontos de teste utilizados. Este mapeamento frequência x altura x módulo é, então, efetuado pela função  $f(h_{DES}, \omega_{DES})$ , onde  $h_{DES}$  e  $\omega_{DES}$  são, respectivamente, a altura necessária e a frequência onde se deseja que ocorra o pico.

Para a ordem de escolha dos módulos dos pólos, têm-se duas possibilidades: (i) iniciar no par mais próximo do eixo real e terminar no par mais externo, ou (ii) no sentido oposto. Por outro lado, o pico introduzido com a seção passa-tudo de 2ª-ordem

contribui com um aumento do atraso de grupo (em amostras) em todas as outras frequências. Isto é um fato, e é descrito a seguir.

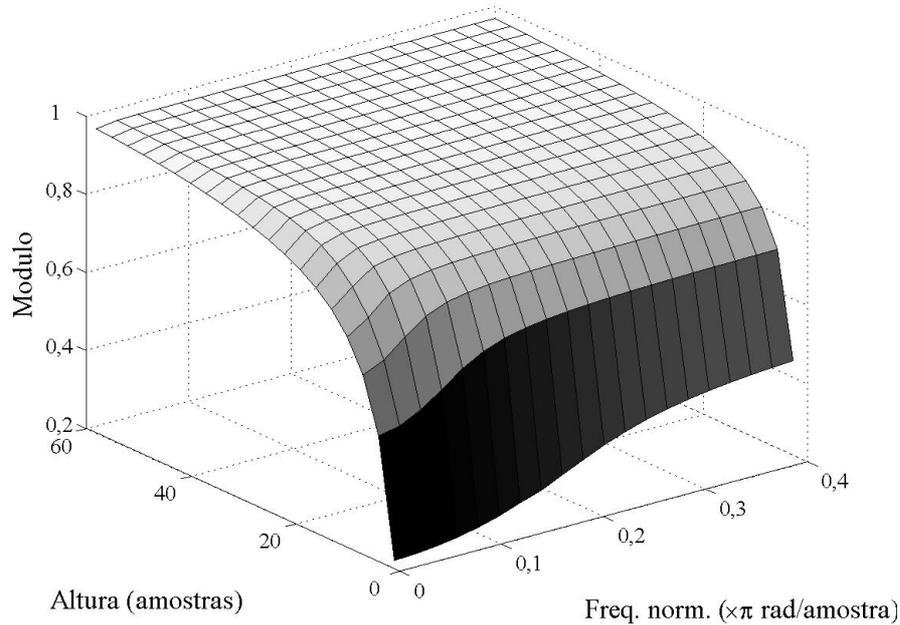


Figura 4.13: Superfície tri-dimensional para obtenção do módulo  $r_{p,i}$  do par de pólos a partir dos dados altura desejada  $h_{pico,i}$  e frequência de posicionamento dos pólos  $\omega_{p,i}$ .

**Fato 4.1:** Ao introduzir-se uma seção passa-tudo em cascata com um filtro para elevar-se a resposta de atraso de grupo em  $h_{pico,i}$  amostras na frequência  $\omega_i$ , escolhendo para isto os parâmetros do par de pólos desta seção iguais a  $\{\omega_i \cdot \pi, f(h_{pico,i}, \omega_i)\}$ , estar-se-á também elevando o atraso de grupo de  $\Delta\tau_\omega > 0$  em todas as frequências. Além disso,  $\Delta\tau_\omega$  é maior para frequências mais próximas de  $\omega_i$ . Como consequência, a resposta resultante desta inclusão NUNCA será equiripple. Este fato é observado na Fig. 4.14, na qual a resposta de atraso de grupo original é mostrada em linha sólida, juntamente com a resposta do filtro mais a resposta de uma seção passa-tudo com parâmetros ajustados para  $\{\omega_i \cdot \pi, f(h_{pico,i}, \omega_i)\}$ , em linha tracejada.

Devido ao fato 4.1, ao serem conectadas duas seções passa-tudo de 2ª-ordem em cascata com o filtro IIR, a seção que mais influencia na altura do pico existente na resposta original do filtro,  $\tau_F(\omega)$ , é aquela que tiver o par de pólos alocado mais próximo da frequência de corte do filtro. Portanto, para efetuar a escolha dos módulos dos pólos do equalizador deve-se partir do par mais próximo à frequência de corte. As duas opções são realizadas nos dois exemplos que se seguem, para equalização de 4ª-

ordem, com o objetivo de evidenciar a vantagem de se utilizar o sentido de alocação selecionado.

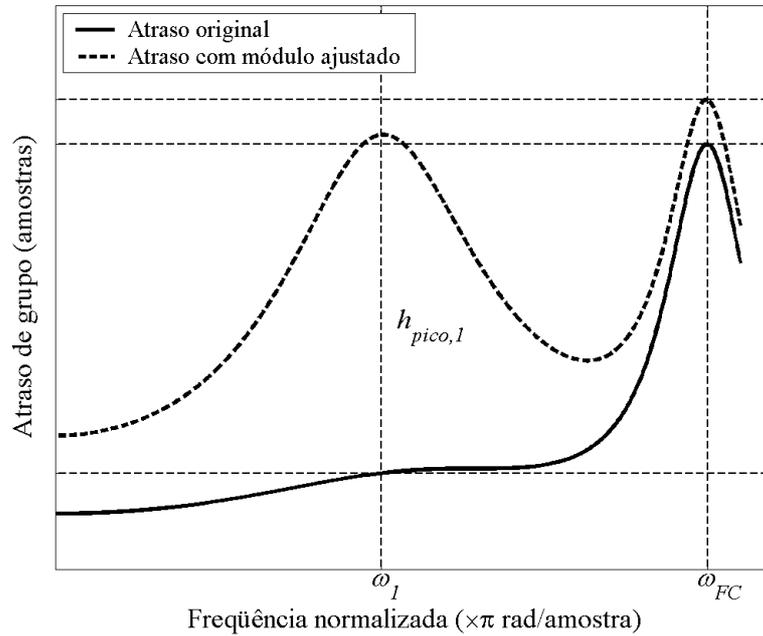


Figura 4.14: Resposta de atraso de grupo de um filtro IIR (linha sólida), e a mesma resposta mais a resposta de um filtro equalizador com os pólos alocados em  $\{\omega_1 \cdot \pi, f(h_{pico,1}, \omega_1)\}$  (linha tracejada).

**Exemplo 4.3.1** Escolha dos módulos no sentido  $i = 1 \rightarrow i = N/2$ .

Dada a resposta de atraso de grupo de um filtro IIR como na Fig. 4.15, em linha sólida, primeiro aloca-se o par mais próximo ao eixo real, ou seja, mais próximo da frequência zero, e depois aloca-se o par mais próximo da frequência de corte. A resposta obtida após a primeira alocação é mostrada, também na Fig. 4.15, em linha pontilhada, bem como a resposta final, após as duas alocações, em linha tracejada. Percebe-se por esta última resposta que o pico próximo da frequência de corte  $\omega_{FC}$  tem sua altura bastante elevada, e a altura entre este pico e o pico próximo da frequência  $\omega_{p,1}$  é ainda muito grande, em torno de 20 amostras.

**Exemplo 4.3.2** Escolha dos módulos no sentido  $i = N/2 \rightarrow i = 1$ .

Reconsiderando o filtro do exemplo anterior, com resposta de atraso de grupo em linha sólida da Fig. 4.16, primeiro aloca-se o par mais próximo da frequência de corte, e em seguida aloca-se o par mais próximo da frequência zero. O resultado obtido após a alocação do primeiro par de pólos é também mostrado na Fig. 4.16, em linha pontilhada,

bem como a resposta após as alocações dos dois pares, em linha tracejada. Para esta resposta percebe-se que a altura entre os picos é menor que 10 amostras, portanto mais próxima da solução equiripple do que no caso considerado no Exemplo 4.3.1.

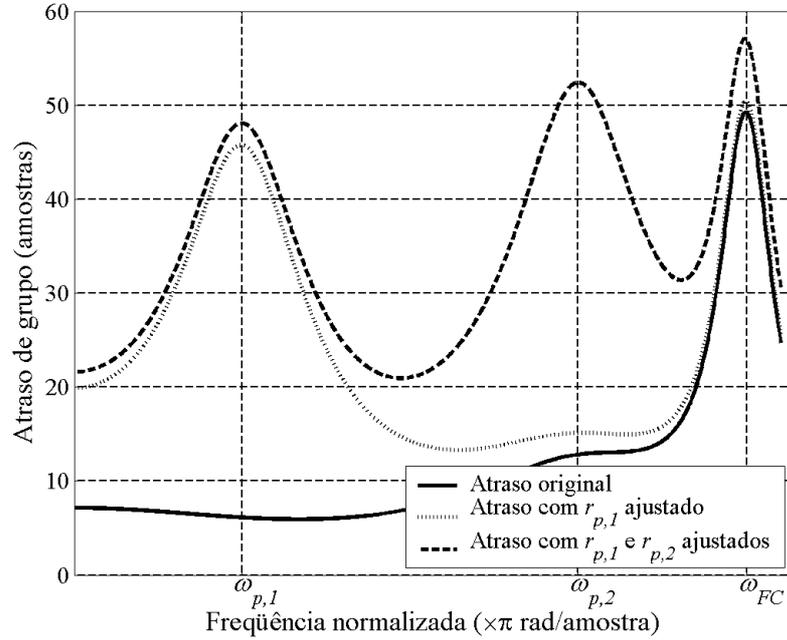


Figura 4.15: Resposta de atraso de grupo de um filtro IIR (linha sólida), e a mesma resposta mais a resposta de um filtro equalizador com  $r_{p,1}$  ajustado (linha pontilhada) e a resposta com ambos os módulos ajustados (linha tracejada).

A escolha dos módulos deve então partir do par de pólos mais externo do equalizador, indo em direção ao par mais próximo ao eixo real, isto é, de  $i = K/2, \dots, 1$ . O módulo do  $i$ -ésimo par é, finalmente, escolhido como

$$r_{p,i} = f(h_{pico,i}, \omega_{p,i}), \quad i = K/2, \dots, 1, \quad (4.3.3)$$

onde  $h_{pico,i}$  é medida somente após a alocação dos  $j$  primeiros pólos, com  $j = K/2, \dots, i+1$ . O procedimento completo para o fornecimento da estimativa para a alocação dos pólos e zeros do equalizador é descrito no roteiro a seguir.

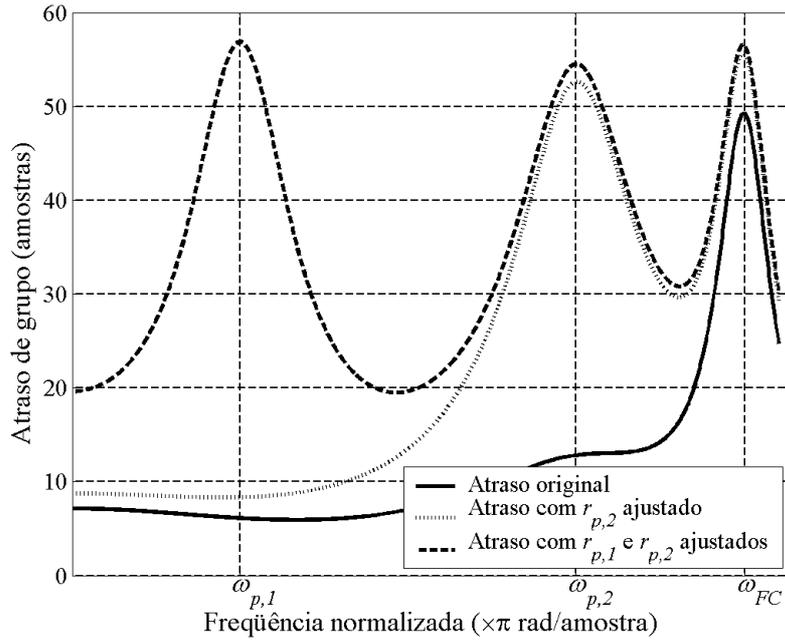


Figura 4.16: Resposta de atraso de grupo de um filtro IIR (linha sólida), e a mesma resposta mais a resposta de um filtro equalizador com  $r_{p,2}$  ajustado (linha pontilhada) e a resposta com ambos os módulos ajustados (linha tracejada).

**Procedimento 1:** Alocação inicial dos pólos e zeros do equalizador de atraso de grupo para um filtro IIR:

Dados:

- $\theta_{F,MAX}$ : fase do par de pólos mais externo do filtro IIR;
- $N$ : ordem do equalizador;
- $STR$ : Estratégia de alocação a ser usada.

Procedimento:

- P1.1. Se  $STR = A$ ,  $K = N$ . Se  $STR = B$ ,  $K = N-2$ ;
- P1.2. Obter fases dos pares de pólos do equalizador: Eq. (4.3.2);
- P1.3. Fazer  $\tau_E(\omega) = 0$ ;
- P1.4. Fazer  $\tau_{F+E}(\omega) = \tau_F(\omega) + \tau_E(\omega)$ ;
- P1.5. Para  $i = K/2$  até 1, fazer:
  - (i) Medir  $h_{pico,i}$  em  $\omega_{p,i}$ ;
  - (ii) Obter  $r_{p,i}$  pela Eq. (4.3.3);
  - (iii) Calcular  $\tau_{E,i}(\omega)$ , e fazer  $\tau_{F+E}(\omega) = \tau_{F+E}(\omega) + \tau_{E,i}(\omega)$ ;
  - (iv) Armazenar parâmetros do pólo:  $\{\theta_{p,i}, r_{p,i}\}$

Nos exemplos a seguir, o método descrito é aplicado a filtros IIR com diferentes especificações, para diferentes ordens de equalização, com subsequente aplicação a um método de otimização *minimax*. Comparações com os métodos descritos em [15] e na Seção 4.2 deste capítulo são efetuadas, comprovando a eficácia do método.

**Exemplo 4.3.3** Filtro elíptico de 4<sup>a</sup>-ordem, considerado no Exemplo 4.2.1.

Como no Exemplo 4.2.1, foram geradas estimativas iniciais de 2<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup>-ordens, utilizando a *Estratégia A*. As respostas são mostradas na Fig. 4.17. É observado um bom comportamento das respostas, assim como havia sido obtido para o método de redes neurais. Se aplicadas como soluções iniciais, é possível obter em poucas iterações as respectivas alocações ótimas utilizando rotinas de otimização, comprovando a eficácia do método.

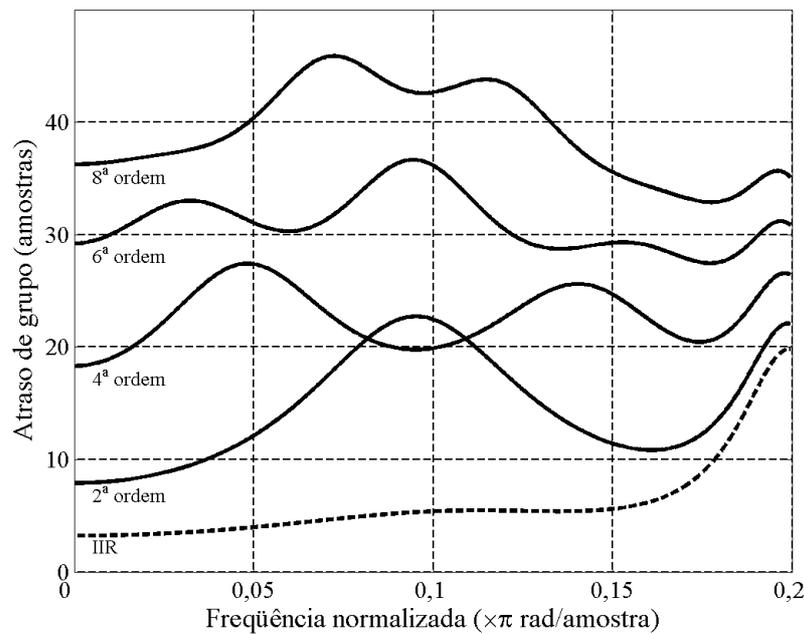


Figura 4.17: Curvas de atraso de grupo do filtro elíptico do Exemplo 4.3.3, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2<sup>a</sup> a 8<sup>a</sup>-ordens.

**Exemplo 4.3.4** Filtro elíptico de 5<sup>a</sup>-ordem, considerado no Exemplo 4.2.2.

Os resultados obtidos são mostrados na Fig. 4.18, e mais uma vez são satisfatórios para todas as ordens de equalização consideradas, de 2<sup>a</sup> a 10<sup>a</sup>-ordens.

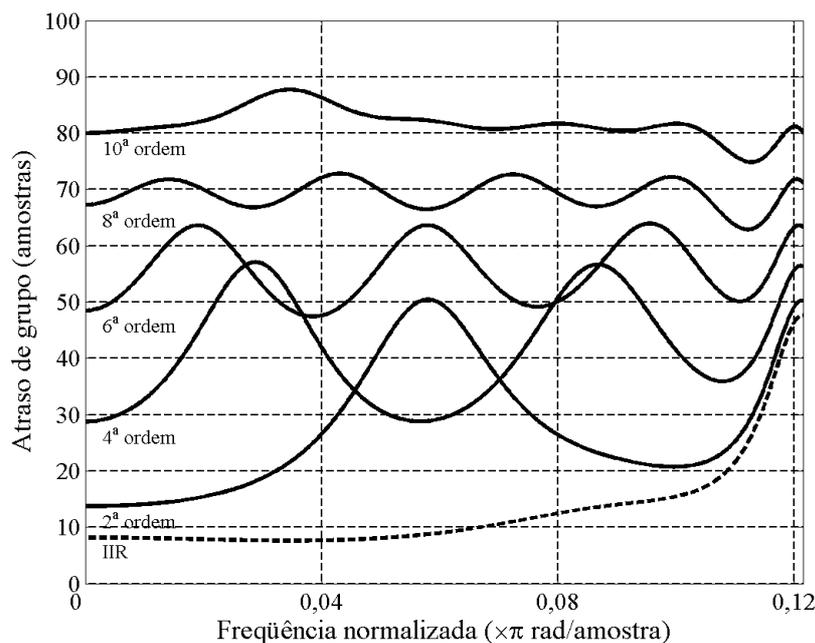


Figura 4.18: Curvas de atraso de grupo do filtro elíptico do Exemplo 4.3.4, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2ª a 10ª-ordens.

**Exemplo 4.3.5** Filtro de Chebyshev do Tipo I de 7ª-ordem, considerado no Exemplo 4.2.3.

Neste exemplo são mostradas respostas para equalizadores de 2ª a 12ª-ordens, na Fig. 4.19, com resultados satisfatórios para todos os casos. Novamente, se forem aplicados às rotinas de otimização obtêm-se as soluções ótimas em poucas iterações.

Com base nos resultados apresentados acima, e num grande número de outras simulações não incluídas aqui, pode-se afirmar que o método é adequado como solução inicial para rotinas de otimização, de forma que o filtro equalizador ótimo possa ser obtido após um pequeno número de ajustes dos parâmetros.

Apesar dos bons resultados obtidos com este método de estimativa inicial, pode-se observar que, comparadas com os resultados obtidos para o método com redes neurais, as respostas apresentam comportamentos ligeiramente deteriorados. Entretanto, os resultados apresentados para o Exemplo 4.3.5 mostram uma grande vantagem do método apresentado na presente Seção: possibilidade de prover a equalização para ordens quaisquer.

Além disto, é possível obter melhorias na estimativa inicial aqui apresentada, levando a um resultado ainda mais próximo à resposta ótima. Para isso basta introduzir

um ajuste nas fases dos pólos buscando aproximar a curva de atraso de grupo da resposta equiripple, ainda na etapa de desenvolvimento da solução inicial. Este procedimento foi efetivado e é o princípio do método de otimização que será descrito no capítulo a seguir.

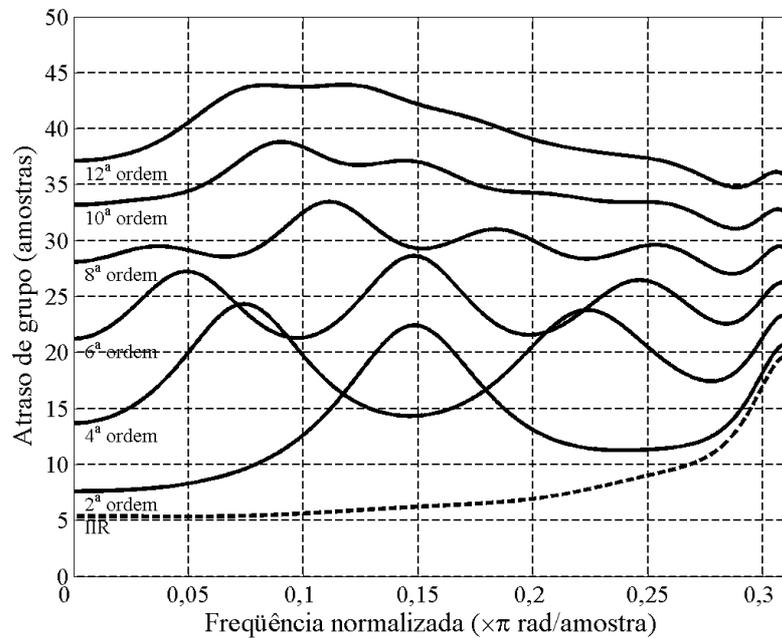


Figura 4.19: Curvas de atraso de grupo do filtro de Chebyshev do Exemplo 4.3.5, de baixo para cima, a resposta original do filtro, e as respostas equalizadas, respectivamente, de 2ª a 12ª-ordens.

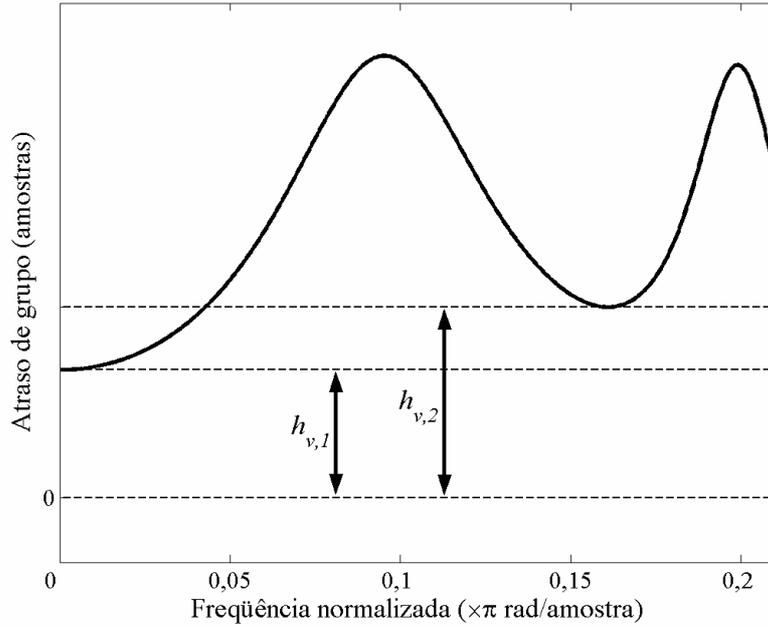
# Capítulo 5

## Métodos de Otimização Eqüiripple

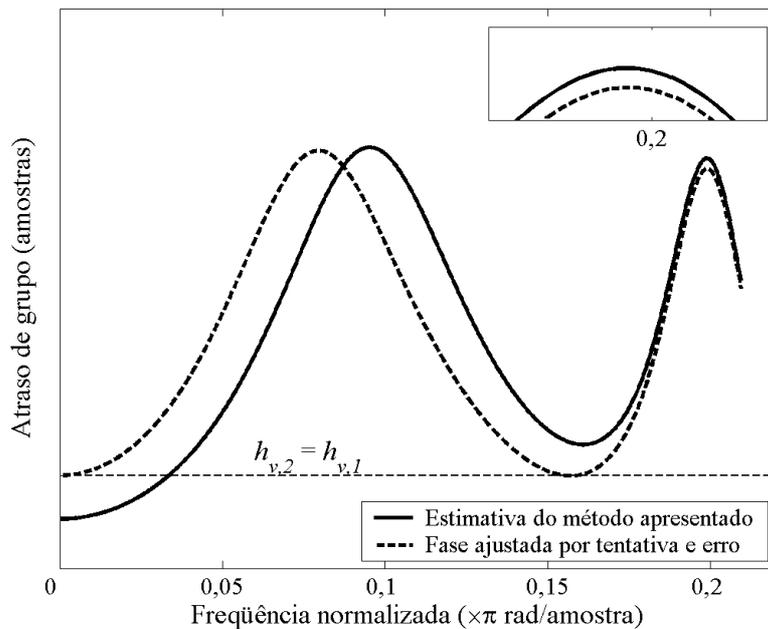
### 5.1. Origem da Idéia

Como mencionado ao final do capítulo anterior, foi elaborada uma forma de aperfeiçoar a estimativa inicial desenvolvida na Seção 4.3. Neste método parte-se das fases dos pólos do equalizador pré-definidas por partição da fase do par de pólos mais externo do filtro IIR, e mantêm-se estes valores até o início da otimização. Entretanto, observe o resultado da estimativa inicial obtida pelo método mencionado na Fig. 5.1(a), para um equalizador de 2<sup>a</sup>-ordem. As alturas dos dois picos – 1 pico gerado pela seção passado e 1 pico da resposta original IIR – são aproximadamente iguais, porém é observado que a resposta ainda não é eqüiripple, pois as alturas dos vales  $h_{v,1}$  e  $h_{v,2}$  da resposta são diferentes. Nota-se que o vale  $h_{v,1}$  à esquerda do pico do equalizador é mais baixo que o vale  $h_{v,2}$  à direita desse pico.

Numa equalização por tentativa e erro, o projetista talvez tentasse deslocar o pico do equalizador em direção ao vale da esquerda, de forma a elevá-lo e reduzir o vale mais alto, ou seja, a fase do par de pólos seria reduzida até que os vales tivessem as mesmas alturas. Entretanto, ao afastar-se o pico do equalizador, o pico da resposta original estará sendo reduzido, como consequência direta do Fato 4.1. Esta mudança é observada no detalhe da Fig. 5.1(b), onde é apresentada a resposta obtida após o ajuste na fase, juntamente com a resposta da estimativa inicial. O projetista, também por tentativa e erro, teria que elevar o módulo do par de pólos de forma a equalizar as alturas dos picos, e simultaneamente obteria a mesma altura dos vales alcançando, por fim, uma resposta eqüiripple.



(a)



(b)

Figura 5.1: (a) Resposta da estimativa inicial obtida pelo método descrito na Seção 4.3. (b) A mesma resposta (linha sólida) juntamente com a resposta após o ajuste da fase do par de pólos do equalizador (linha tracejada). No detalhe a diferença entre as alturas do último pico, antes e depois do ajuste.

Vale mencionar que o ajuste dos módulos na seqüência descrita anteriormente poderia tornar os vales novamente desiguais. Portanto, novo ajuste teria que ser feito na fase dos pólos de forma a reequilibrar as alturas dos vales. A seguir, dever-se-ia verificar as

alturas dos picos, e assim por diante, até que o ajuste de um dos parâmetros não alterasse a boa escolha dos parâmetros anteriores. Esta seria a seqüência de ajustes efetuados pelo projetista num procedimento de tentativa e erro. O método pode ser aplicado para diferentes ordens do equalizador, ajustando primeiramente as fases, uma de cada vez, e posteriormente os módulos. Os passos do processo são ordenados abaixo.

1. Estimativa inicial dos parâmetros dos pólos: fases e módulos;
2. Ajuste das fases dos pólos;
3. Ajuste dos módulos dos pólos;
4. Resposta equiripple?
  - Sim: vá ao passo 5;
  - Não: retorne ao passo 2;
5. Otimização.

Este método de tentativa e erro pode ser automatizado, evitando a intervenção do projetista durante o processo de obtenção da alocação ótima. Para isso basta definir como fazer os ajustes de fases e módulos automaticamente. Estas etapas serão descritas nas seções a seguir.

Em princípio, o método descrito acima foi aplicado apenas como mais uma etapa da estimativa inicial e, por isso, foi pré-definido um número máximo de ajustes dos parâmetros, após os quais passava-se à rotina de otimização. Este número máximo poderia ser definido pelo projetista, desde que permitisse, simultaneamente uma melhor alocação inicial e pouco tempo de processamento. Uma faixa de valores considerada razoável foi de 5 a 10 ajustes de fases e módulos. Com estes números obtém-se uma boa aproximação inicial que acelera consideravelmente a rotina de otimização, sem levar muito tempo para fornecer a estimativa inicial.

Os resultados obtidos com este método foram muito satisfatórios, a ponto de perceber-se que a rotina de otimização, em muitos dos exemplos testados, não introduzia ganho no resultado, indicando que a escolha dos parâmetros da estimativa inicial, incluindo a etapa de ajustes mencionada nesta seção, havia sido a escolha ótima possível, mesmo utilizando um pequeno número de ajustes iniciais. Decidiu-se, portanto, pela utilização do método desenvolvido como uma rotina de otimização, a qual chamaremos de Otimização Equiripple. Esta denominação se deve ao fato de que o resultado buscado é uma curva equiripple, e não o resultado no sentido *minimax*.

## 5.2. Otimização Eqüiripple

Uma vantagem observada no método que será introduzido é que se possui o total controle dos passos que serão efetuados. Desta forma, podem-se evitar todos os problemas inerentes a rotinas de otimização *minimax* mencionados no Capítulo 2. Outro ponto favorável a este método é que a decisão no início do processo por uma das estratégias mencionadas no Capítulo 3 passa a ter uma importância marginal, pois pode-se introduzir uma verificação periódica, durante a otimização, da necessidade de troca de estratégia. Desta forma aumentam-se a robustez do método e a confiança no resultado. Em princípio, considera-se apenas o caso para a *Estratégia A* de alocação, na qual aparecem  $1 + N/2$  picos na resposta de atraso de grupo.

### 5.2.1. Ajustes dos Parâmetros

Sabe-se que, para uma resposta completa eqüiripple, o atraso de grupo deve, também, ser eqüiripple em torno de cada um dos  $N/2$  picos gerados pelo equalizador na resposta, como visto na Fig. 5.2(a), onde são mostrados o pico referente ao  $i$ -ésimo par de pólos e o pico gerado pelos pólos do filtro IIR. É definida a altura  $h_p$  como a diferença, em amostras, entre o pico da resposta original – ou seja, o último pico da resposta completa – e o pico referente à  $i$ -ésima seção passa-tudo. É também definida a altura  $h_v$  como a diferença, em amostras, entre o vale à esquerda e o vale à direita do pico da seção passa-tudo em questão. No caso da Fig. 5.2(a), têm-se  $h_p = 0$  e  $h_v = 0$ . Este é o caso ótimo buscado pelo método, para todos os  $N/2$  picos gerados pelo equalizador.

Antes de se completar a otimização, um ou mais picos da resposta não terão comportamento eqüiripple à sua volta, podendo apresentar uma das situações consideradas nas Figs. 5.2(b), (c), (d) ou (e), ou combinações das mesmas. As Figs. 5.2(b) e (c) apresentam casos onde  $h_v$  é diferente de zero, respectivamente  $h_v > 0$  e  $h_v < 0$ . Nestes casos deve-se modificar o valor da fase do par de pólos. As Figs. 5.2(d) e (e) ilustram casos nos quais  $h_p$  é diferente de zero, respectivamente  $h_p > 0$  e  $h_p < 0$ . Nestes casos deve-se modificar o valor do módulo do par de pólos.

Um dos resultados originais desta pesquisa foi a identificação de um número limitado de respostas não-ótimas. Para a solução do problema, foi definido um conjunto de 6 parâmetros que caracterizam a resposta em torno do pico em questão:

$$V_p = \{ \tau_{min,E}; \omega_{min,E}; \tau_{min,D}; \omega_{min,D}; \tau_{max,p}; \tau_{max,F} \}. \quad (5.2.1)$$

Este conjunto contém toda a informação necessária para identificar a situação em que se encontra a resposta – se os parâmetros precisam ou não de ajuste –, e como devem ser efetuados os ajustes. Os parâmetros, ilustrados na Fig. 5.3, são denominados da seguinte maneira:

- $\tau_{min,E}$ : altura do vale à esquerda;
- $\omega_{min,E}$ : frequência de ocorrência do vale à esquerda;
- $\tau_{min,D}$ : altura do vale à direita;
- $\omega_{min,D}$ : frequência de ocorrência do vale à direita;
- $\tau_{max,p}$ : altura do pico da seção em questão;
- $\tau_{max,F}$ : altura do último pico da resposta.

As alturas  $h_p$  e  $h_v$  podem então ser definidas matematicamente como:

$$h_p = \tau_{max,F} - \tau_{max,p}, \quad (5.2.2)$$

$$h_v = \tau_{min,E} - \tau_{min,D}. \quad (5.2.3)$$

Observando as Figs. 5.2 e 5.3, pode-se concluir que para se obter uma resposta equiripple devem-se satisfazer as duas condições

- (i)  $\tau_{min,E} = \tau_{min,D}$ , i.e.,  $h_v = 0$ ,
- (ii)  $\tau_{max,F} = \tau_{max,p}$ , i.e.,  $h_p = 0$ ,

utilizando os 6 parâmetros  $V_p$ , através do ajuste dos pólos do equalizador. As Tabela 5.1 e Tabela 5.2 resumem as regras de ajustes da fase e do módulo dos pólos, respectivamente. Estas regras definem sentidos de atualização dos parâmetros, sendo ainda necessário definir passos de ajuste. Nas tabelas, o par  $\{\theta_{p,i,0}; r_{p,i,0}\}$  representa a alocação do par de pólos da  $i$ -ésima seção no início da iteração. O par  $\{\theta_{p,i,a}; r_{p,i,a}\}$  representa a alocação dos pólos após o ajuste.

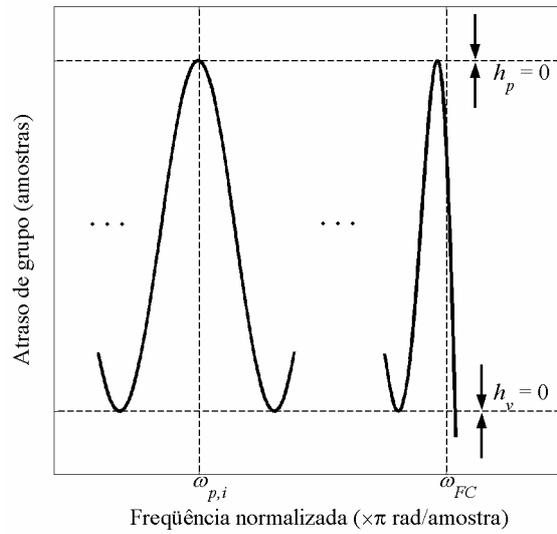
Tabela 5.1: Regras de ajuste para a fase dos pólos do equalizador.

		Regras de ajuste da fase
$\tau_{min,E} > \tau_{min,D}$	$h_v > 0$	$\theta_{p,i,a} > \theta_{p,i,0}$
$\tau_{min,E} < \tau_{min,D}$	$h_v < 0$	$\theta_{p,i,a} < \theta_{p,i,0}$

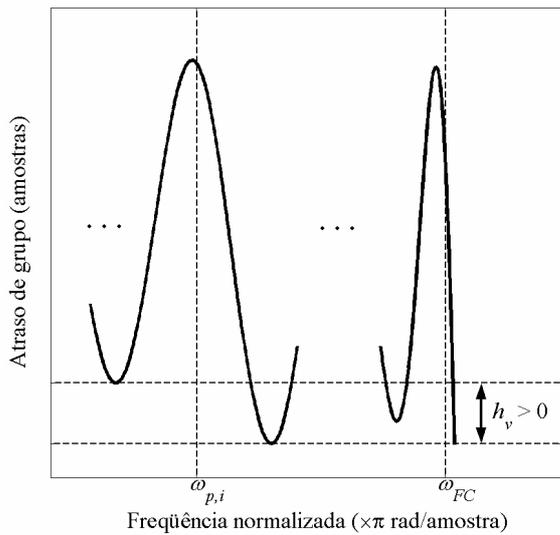
Tabela 5.2: Regras de ajuste para o módulo dos pólos do equalizador.

		Regras de ajuste da módulo
$\tau_{max,F} > \tau_{max,p}$	$h_p > 0$	$r_{p,i,a} > r_{p,i,0}$
$\tau_{max,F} < \tau_{max,p}$	$h_p < 0$	$r_{p,i,a} < r_{p,i,0}$

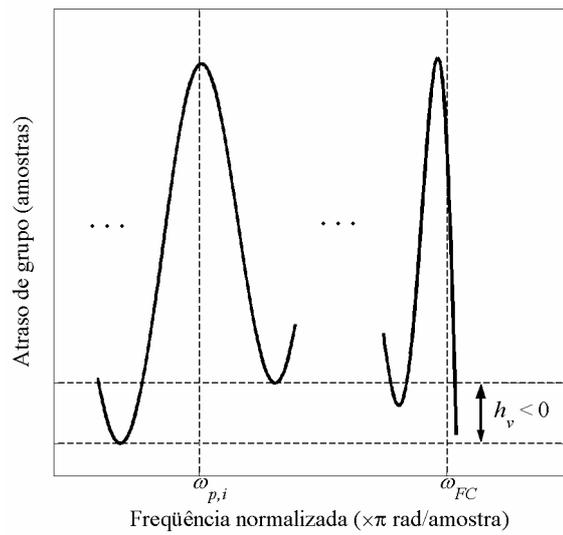
Em qualquer rotina de otimização é necessário que o procedimento não divirja, sendo necessário, portanto, definir um passo de atualização suficientemente bom, que não instabilize o processo, nem o torne lento demais. Este passo é definido em seguida.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.2: Possibilidades de resposta em torno do pico gerado pelo  $i$ -ésimo par de pólos: (a) resposta equiripple (desejada), (b)  $h_v$  maior que zero, (c)  $h_v$  menor que zero.

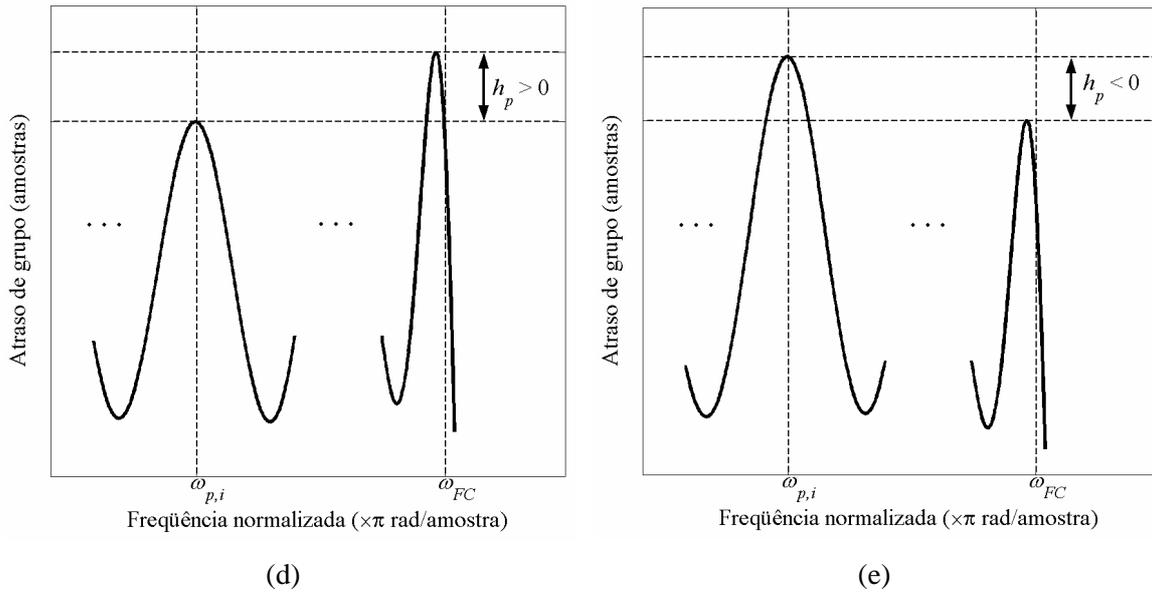


Figura 5.2: Possibilidades de resposta em torno do pico gerado pelo  $i$ -ésimo par de pólos: (d)  $h_p$  maior que zero, e (e)  $h_p$  menor que zero.

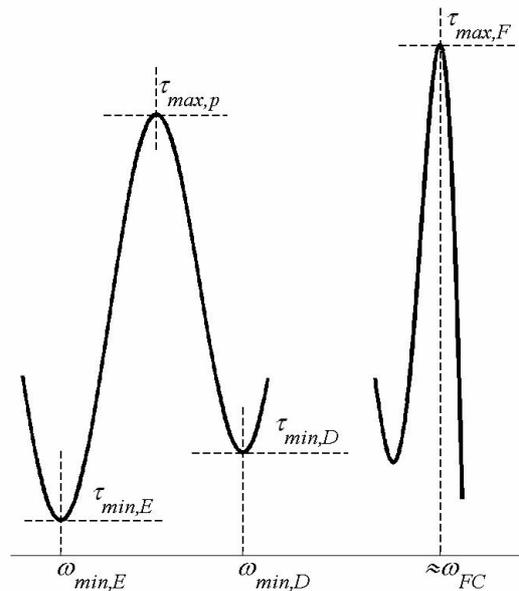


Figura 5.3: Tomada dos parâmetros  $V_p$  para ajustes de fases e módulos dos pólos do equalizador.

### 5.2.2. Passo de Atualização dos Parâmetros

Quando se trata de atualização das fases dos pólos deve-se considerar que a inversão da posição de picos consecutivos não introduz ganho na resposta. Portanto, não se deve

fazer  $\theta_{p,i} < \theta_{p,i-1}$ <sup>4</sup>. Esta observação introduz desde já uma limitação na variação das fases dos pólos. Deve-se considerar ainda que a alocação de dois pares de pólos muito próximos um do outro resulta em um único novo pico, como ilustrado na Fig. 5.4, em linha sólida. Nesta figura, as curvas tracejadas são as respostas geradas por cada um dos pares, mostrando que a característica de  $1 + N/2$  picos na resposta ótima não é alcançada. Deve-se, então, reduzir o limite da variação.

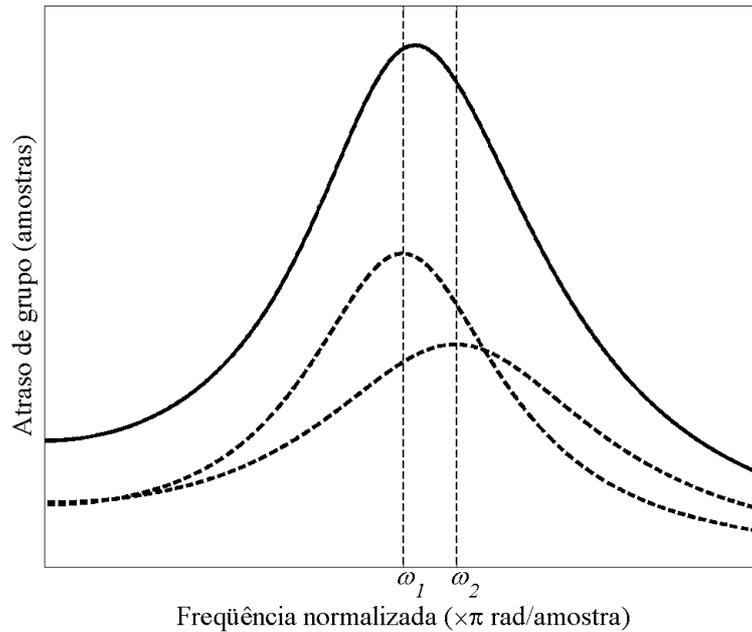


Figura 5.4: Dois pares de pólos alocados muito próximos (respostas em linha tracejada), resultam em apenas um único pico, quando somados (resposta em linha sólida).

Outra observação pode ser feita através da Fig. 5.5. Considere que se devesse ajustar a fase do par de pólos referente ao pico em  $\omega_{p,i,0}$ . Percebe-se claramente que a resposta não é equiripple, devendo-se, portanto, atualizar a fase do par de pólos. Na resposta em questão o vale à direita apresenta valor menor que o vale à esquerda, ou seja,  $h_v > 0$ ; portanto, deve-se aumentar a fase do par – como descreve a Tabela 5.1 –, movendo-se o pólo em direção ao menor vale. Por exemplo, pode-se ajustar a fase do par de pólos para a frequência referente ao vale à direita  $\theta_{p,i,a} = \omega_{min,D} \cdot \pi$ , como na Fig. 5.5, em linha tracejada. Neste caso, percebe-se que o antes menor vale teve sua altura muito elevada, enquanto que o vale oposto foi bruscamente reduzido, invertendo a condição da resposta. Logo, independentemente dos valores dos parâmetros de  $V_p$ , o ajuste da fase do par de

<sup>4</sup> Deve-se lembrar que o par de pólos com fase  $\theta_{p,1}$  é o de menor fase, isto é, o mais próximo ao eixo real, e o par mais externo é o par com fase  $\theta_{p,N/2}$ , como definido no Capítulo 4.

pólos  $\theta_{p,i}$  jamais deve alcançar a frequência  $\omega_{min,(E,D)}$  do vale de menor altura, esteja este à direita ( $\omega_{min,D}$ ) ou à esquerda ( $\omega_{min,E}$ ).

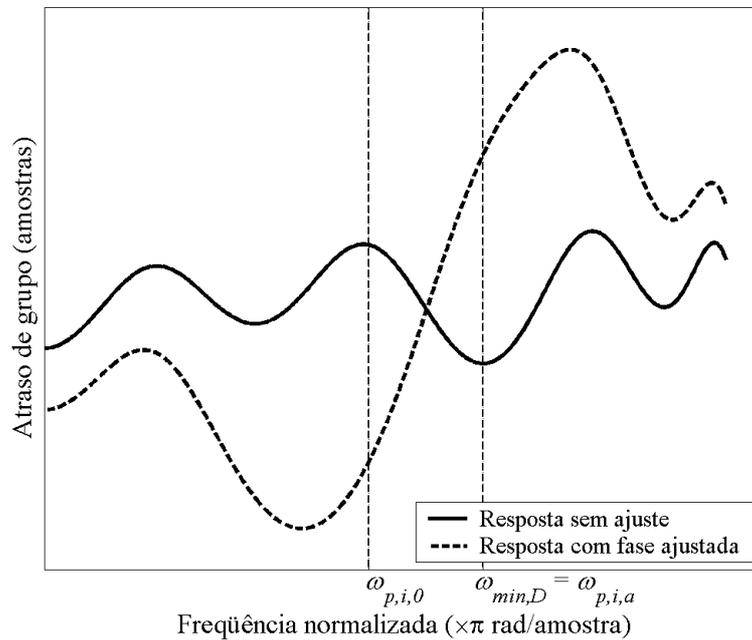


Figura 5.5: Resposta equalizada não equiripple (linha sólida) e resposta com fase ajustada para a frequência de ocorrência do mínimo à direita (linha tracejada).

Conclui-se, portanto, que após o ajuste ter-se-á  $\omega_{min,E} < \omega_{p,i,a} < \omega_{min,D}$ . Como mostrado na Fig. 5.5, a atualização da fase do par de pólos para a frequência referente ao menor vale não seria uma boa escolha por distorcer ainda mais a resposta de atraso de grupo. Entretanto, uma boa escolha é definida como uma pequena porcentagem da diferença entre a frequência de ocorrência do pico antes do ajuste  $\omega_{p,i,0}$  e a frequência do vale de menor altura  $\omega_{min,(E,D)}$ , e será descrita adiante.

Diferentemente da atualização das fases, o ajuste dos módulos dos pólos não apresenta uma limitação lógica. A única restrição ao ajuste dos módulos é que estes permaneçam menores que 1 para manter a estabilidade do filtro passa-tudo. O valor do passo de atualização foi determinado heurísticamente, através de simulações, como será visto mais adiante.

Uma forma de limitar a variação dos parâmetros a um intervalo de valores definidos seria a utilização de uma função limitada e ímpar, com o objetivo de prover a mesma variação para ambos os sentidos. A primeira possibilidade seria uma função linear com saturação, como mostrado na Fig. 5.6(a). Entretanto, esta função não possui um comportamento suave, e como consequência, para qualquer valor do parâmetro de

entrada maior que  $x_{lim}$  o ajuste será o mesmo. Para permitir diferentes passos de ajuste para quaisquer possibilidades de erros, decidiu-se pela utilização da função tangente hiperbólica  $tgh(\cdot)$  da Fig. 5.6(b), por ser uma função ímpar e tangenciar um valor máximo  $|v_{max}|$  definido para cada aplicação. Esta curva define a variação do parâmetro – fase e/ou módulo – em torno de seu valor inicial, onde o argumento da função depende dos parâmetros de  $V_p$ . As atualizações das fases e módulos são dadas, respectivamente, por:

$$\theta_{p,i,a} = \theta_{p,i,0} + v_{max,\theta} \cdot tgh(f_{\theta}(V_p)), \quad (5.2.4)$$

$$r_{p,i,a} = r_{p,i,0} + v_{max,r} \cdot tgh(f_r(V_p)). \quad (5.2.5)$$

O termo  $v_{max,\theta}$  define a variação máxima para o ajuste das fases, dada por:

$$v_{max,\theta} = 0,05 \cdot |\omega_{p,i,0} - \omega_{min}| \cdot \pi, \quad (5.2.6)$$

onde o fator  $\pi$  é incluído para a denormalização da frequência. A frequência  $\omega_{min}$  é definida como:

$$\omega_{min} = \begin{cases} \omega_{min,D}, & \text{se } h_v > 0, \\ \omega_{min,E}, & \text{se } h_v < 0. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

Pelas Eqs. (5.2.6) e (5.2.7) percebe-se que, como mencionado anteriormente, o par de pólos jamais será deslocado para a frequência de ocorrência do vale mínimo. Mais precisamente, o deslocamento máximo do pico será 5% da sua distância até a frequência do vale. Este valor foi escolhido por simulação e concilia robustez e velocidade de convergência.

O argumento da função  $tgh(\cdot)$  para o ajuste das fases é dado por:

$$f_{\theta}(V_p) = 5 \cdot \frac{h_v}{\tau_{max,p} - \min\{\tau_{min,E}; \tau_{min,D}\}}, \quad (5.2.8)$$

onde o fator 5 foi também escolhido para equilibrar velocidade e robustez. Nota-se que o ajuste da fase dos pólos depende da razão entre a altura do pico em questão até o mais baixo dos vales e a diferença de altura entre os dois vales.

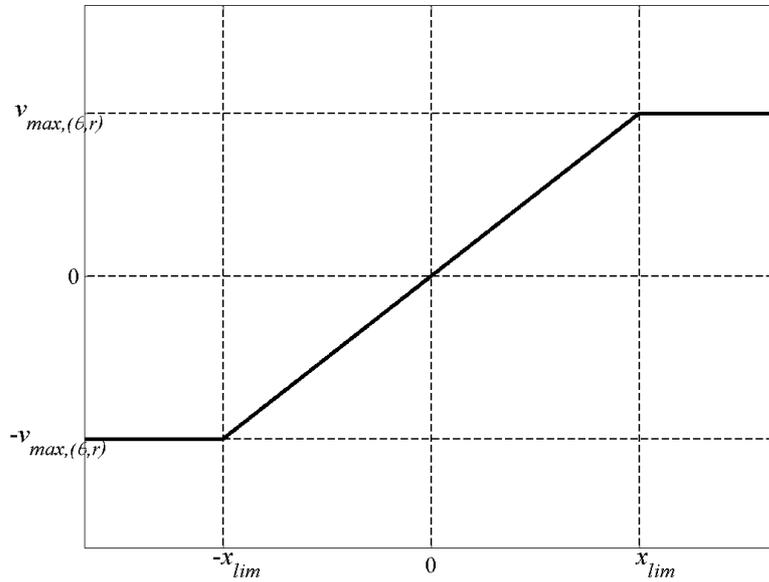
O termo  $v_{max,r}$  define a máxima variação para o ajuste dos módulos dos pólos, fixada em 1% do valor do módulo no início da iteração, isto é,

$$v_{max,r} = 0,01 \cdot r_{p,i,0}. \quad (5.2.9)$$

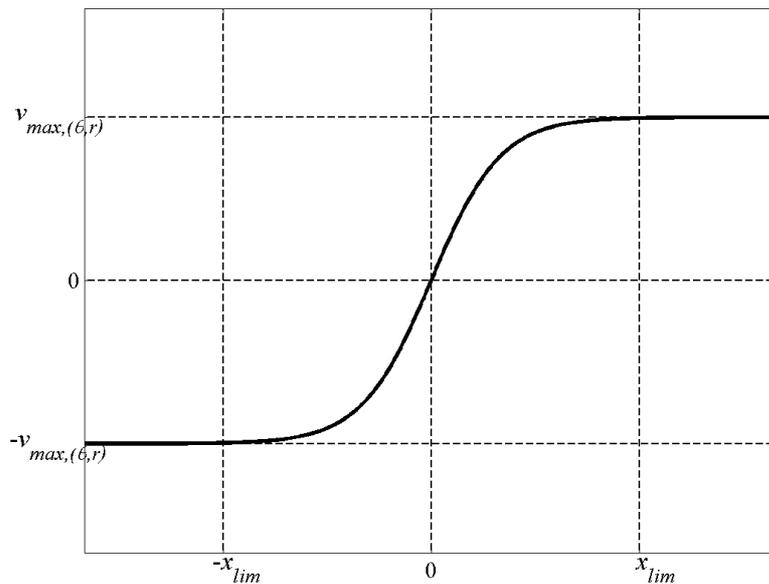
A variação é controlada pelo argumento

$$f_r(V_p) = 2 \cdot \frac{h_p}{\tau_{max,p} - \min\{\tau_{min,E}; \tau_{min,D}\}}, \quad (5.2.10)$$

onde, o fator 2 foi escolhido para otimizar a eficiência da atualização. Adicionalmente, com o argumento definido na Eq. (5.2.10), tem-se uma variação controlada pela razão entre a altura do pico até o menor dos vales e a diferença de altura entre os dois vales.



(a)



(b)

Figura 5.6: Funções consideradas para limitar passo de atualização: (a) função linear e (b) função *tgh*.

Percebe-se que para ambos os ajustes os sentidos de atualização serão definidos, respectivamente, pelos sinais das alturas  $h_v$  e  $h_p$ , confirmando o que fora definido pelas Tabelas 5.1 e 5.2. À medida que a resposta aproxima-se de uma curva equiripple, o valor da altura que controla o processo, seja  $h_v$  ou  $h_p$ , tenderá a zero, cancelando,

portanto, a atualização dos parâmetros. Quando as atualizações de todos os parâmetros não tiverem mais efeito, a resposta completa será equiripple.

Em ambos os casos tentam-se prover bons passos de atualização, tornando os parâmetros ajustados os mais próximos possíveis daqueles que forneceriam a resposta equiripple, em torno do  $i$ -ésimo pico. Porém, estes valores são apenas estimativas, da mesma forma como ocorreria num processo de tentativa e erro. Neste tipo de procedimento, ao analisar as respostas no início da iteração, com os parâmetros do  $i$ -ésimo pólo em  $\{\theta_{p,i,0}; r_{p,i,0}\}$ , e após o ajuste, com o novo conjunto de parâmetros  $\{\theta_{p,i,a}; r_{p,i,a}\}$ , o projetista decidiria a próxima etapa: aumentar o passo de atualização a partir da resposta inicial, ou escolher um novo valor entre os valores inicial e ajustado. Esta etapa funciona como uma triangulação de valores, descrita em seguida.

### 5.2.3. Triangulação de Valores

Considere uma situação na qual o módulo do par de pólos igual a  $r_{p,i,0} = 0,9$  no início da iteração é ajustado para  $r_{p,i,a} = 0,92$ , com as respostas mostradas na Fig. 5.7(a), respectivamente, em linhas sólida e tracejada, respectivamente. Na figura têm-se  $h_{p,0}$ , medido no início da iteração, maior que zero, e  $h_{p,a}$ , medido após o ajuste, também maior que zero. Pode-se afirmar que a melhor escolha para o módulo é um valor maior que 0,92. Entretanto, no método proposto, quando ocorrerem situações como esta não há modificação no valor ajustado, e o valor ao fim da iteração é fixado em  $r_{p,i,f} = 0,92$ . Entende-se esta situação como o caso em que não há inversão no sinal do gradiente.

Considere agora o caso da Fig. 5.7(b), onde novamente  $r_{p,i,0} = 0,9$  no início da iteração, ajustado para  $r_{p,i,a} = 0,92$ . As respectivas respostas são mostradas na Fig. 5.7(b). Têm-se  $h_{p,0}$  maior que zero e  $h_{p,a}$  menor que zero, ou seja, houve inversão no sinal do gradiente. Neste caso, percebe-se que o valor ótimo para o módulo está entre  $r_{p,i,0}$  e  $r_{p,i,a}$ , pode ser obtido por uma triangulação dos valores inicial e ajustado, efetuando-se uma média ponderada.

Os pesos de cada valor serão definidos pelos valores absolutos das diferenças entre as alturas dos picos antes  $|h_{p,0}|$  e depois  $|h_{p,a}|$  do ajuste. Para o ajuste de cada um dos parâmetros, duas diferentes situações são identificadas:

- (i)  $\text{sign}(h_{p,a}) = \text{sign}(h_{p,0})$ , ou  $\text{sign}(h_{v,a}) = \text{sign}(h_{v,0})$ ;
- (ii)  $\text{sign}(h_{p,a}) \neq \text{sign}(h_{p,0})$ , ou  $\text{sign}(h_{v,a}) \neq \text{sign}(h_{v,0})$ .

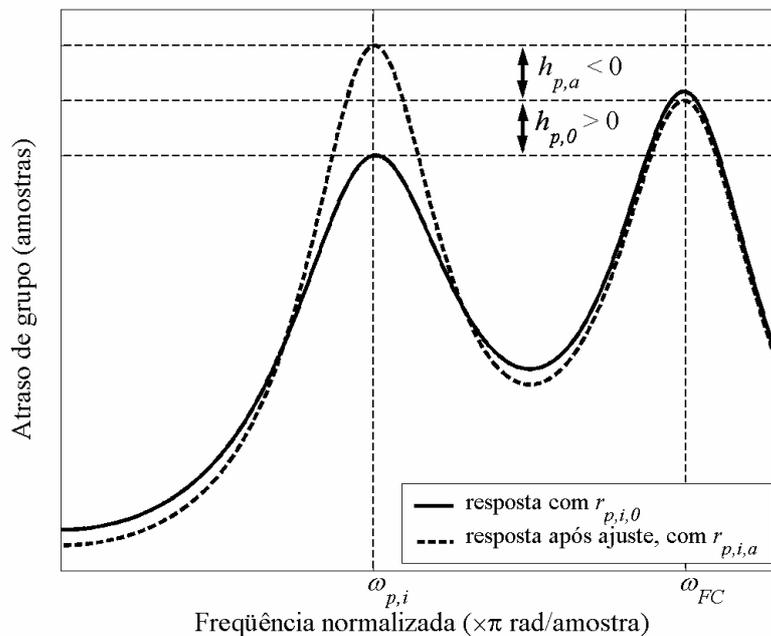
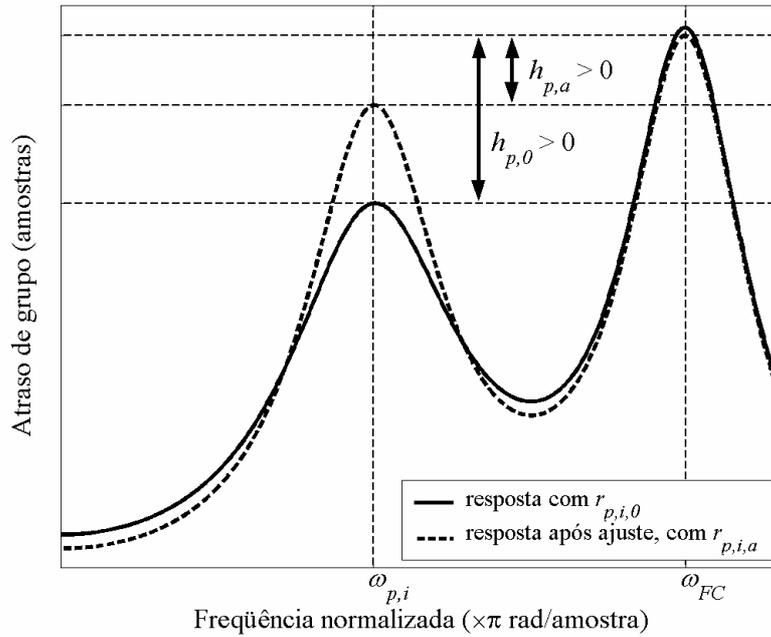


Figura 5.7: Exemplos de respostas antes (linha sólida) e depois (linha tracejada) do ajuste do módulo dos pólos: (a) o pico gerado pelo equalizador é menor que o pico da resposta original antes e depois do ajuste, (b) ocorre inversão no sinal da altura  $h_p$ .

Como explicado anteriormente, para o caso (i) não se deve promover nova atualização dos parâmetros, pois sabe-se que, lentamente, o processo aproxima-se do ótimo, e faz-se  $r_{p,i,f} = r_{p,i,a}$  (ou,  $\theta_{p,i,f} = \theta_{p,i,a}$ , no caso do ajuste das fases). Ocorrendo o caso (ii), sabe-se que a situação foi revertida e deve-se reduzir o passo de atualização. Desta forma, estar-

se-á efetivando as triangulações de valores, definidas, respectivamente, para os casos das fases e módulos, como

$$\theta_{p,i,f} = \frac{|h_{v,a}| \cdot \theta_{p,i,0} + |h_{v,0}| \cdot \theta_{p,i,a}}{|h_{v,a}| + |h_{v,0}|}, \quad (5.2.11)$$

$$r_{p,i,f} = \frac{|h_{p,a}| \cdot r_{p,i,0} + |h_{p,0}| \cdot r_{p,i,a}}{|h_{p,a}| + |h_{p,0}|}. \quad (5.2.12)$$

Para entender o porquê do produto dos parâmetros pelas alturas ( $h_v$ ,  $h_p$ ) opostas, considere o exemplo a seguir, para ajuste dos módulos de um par de pólos.

**Exemplo 5.2.1** Para a equalização de um dado filtro IIR, em uma determinada iteração, tem-se  $r_{p,i,0} = 0,92$ . A resposta apresenta uma altura  $h_{p,0} = -2$ , e então o módulo é ajustado para  $r_{p,i,0} = 0,93$ , produzindo a nova altura  $h_{p,a} = 1$ . Pode-se afirmar que a resposta obtida após o ajuste está mais próxima de um resultado ótimo ( $h_{p,f} = 0$ ). Por isso, aplica-se um peso maior – o valor absoluto da altura no início da iteração – para o valor ajustado do módulo, enquanto que o módulo inicial, por estar mais afastado do ótimo, tem um peso menor – o valor absoluto da altura após o ajuste. Estas escolhas para os pesos dos parâmetros apresentaram excelentes resultados, tanto para o ajuste dos módulos quanto para o ajuste das fases. Exemplos dos ajustes por triangulação serão mostrados na Seção 5.3.

#### 5.2.4. Seqüência de Ajustes

Os procedimentos para ajustes das fases e pólos do filtro equalizador foram apresentados acima, porém não foi definida uma seqüência apropriada de ajustes. Uma possível organização seria proceder com os ajustes de fase e módulo para cada par de pólos por vez. Existem duas possibilidades,

- (a) ajustar  $\{\theta_{p,i}; r_{p,i}\}$  a partir de  $i = 1 \rightarrow i = N/2$ ;
- (b) no sentido oposto, partindo de  $i = N/2 \rightarrow i = 1$ .

Entretanto, como apresentado nos Exemplos 4.3.1 e 4.3.2, a melhor escolha para ordem de ajuste dos módulos é iniciar do par de pólos mais externo – mais próximo da freqüência de corte – e terminar no par mais próximo da freqüência zero. O mesmo é observado para o ajuste das fases, e por isso deve-se utilizar a opção (b) acima.

Podem-se efetuar os ajustes de duas maneiras diferentes. Na primeira, ajustam-se a fase  $\theta_{p,i}$  e o módulo  $r_{p,i}$  de cada par por vez. Na segunda opção, ajusta-se inicialmente  $\theta_{p,i}$  (ou  $r_{p,i}$ ) para  $i = N/2, \dots, 1$ , e posteriormente ajusta-se  $r_{p,i}$  (ou  $\theta_{p,i}$ ) para  $i = N/2, \dots, 1$ . Implementando-se ambas as opções verificou-se que a eficiência é praticamente a mesma, ficando a critério do projetista escolher a seqüência. Neste trabalho decidiu-se então pela segunda opção, ajustando, em cada iteração, primeiro a fase de cada um dos pares de pólos e depois o módulo.

Pode-se resumir o procedimento de ajustes em cada iteração da seguinte forma:

1. Para  $i = N/2 \rightarrow i = 1$ , ajustar fase de cada par de pólos;
2. Para  $i = N/2 \rightarrow i = 1$ , ajustar módulo de cada par de pólos.

### 5.2.5. Mudança de Estratégia

Os passos de otimização descritos até este ponto são suficientes para a equalização da maioria dos filtros IIR, considerando apenas a *Estratégia A* de alocação descrita no Capítulo 3. Com isso, algumas dificuldades são encontradas durante as simulações, à medida que a ordem do equalizador é aumentada. Como se propôs o desenvolvimento de uma ferramenta robusta capaz de equalizar qualquer filtro IIR, com bandas de passagem estreitas ou largas, diferentes atenuações nas faixas de passagem e rejeição, decidiu-se considerar também a *Estratégia B* de alocação dos pólos do equalizador. Deve-se, portanto, definir quando utilizar uma ou outra estratégia. Como descrito no Capítulo 3, o procedimento privilegia a utilização da *Estratégia A*, muito embora, em algumas situações a *Estratégia B* é considerada para reduzir a “cauda” que surge no final da faixa de passagem da resposta.

Quando ocorre a cauda diz-se que a resposta é equiripple apenas para uma porcentagem da faixa de passagem do filtro IIR. Uma pequena parcela da faixa de passagem não mantém a característica equiripple ótima, como ilustrado no exemplo da Fig. 5.8, e por isso é denominada Banda Não-Equiripple (NE), representada por  $\Delta\omega_{NE}$ . Definem-se os parâmetros

$$h_{NE} = \tau_{min,Eq} - \tau_{min,BP}, \quad (5.2.13)$$

$$h_{Eq} = \tau_{max,BP} - \tau_{min,Eq}, \quad (5.2.14)$$

onde  $\tau_{max,BP}$  é definido como o máximo valor da resposta de atraso de grupo dentro da banda passante (BP),  $\tau_{min,Eq}$  é o valor mínimo dentro da banda equiripple e  $\tau_{min,BP}$  é o valor da resposta na frequência de corte  $\omega_{FC}$ .

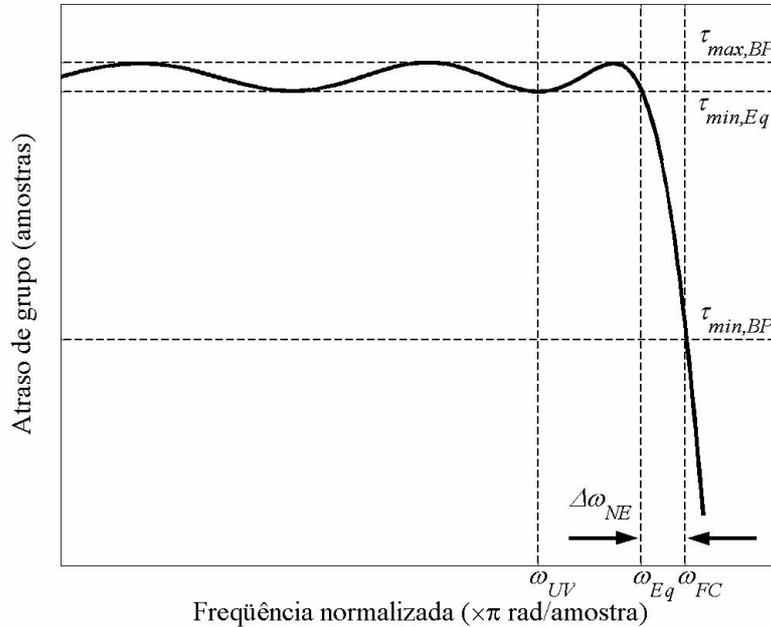


Figura 5.8: Parâmetros tomados quando aparece a “cauda” no final da banda de passagem.

Como descrito no Capítulo 3, existe uma tolerância para a ocorrência da cauda. Entretanto, quando a altura da cauda  $h_{NE}$  se tornar muito grande tal que  $h_{NE} \gg h_{Eq}$  deve-se passar para a *Estratégia B* de alocação dos pólos. Um critério para a troca de estratégia foi descrito no Capítulo 3 e pode ser definido imediatamente após a estimativa inicial. Como este critério fornece uma margem de folga para a escolha da primeira estratégia a ser utilizada, é importante definir outro critério para verificar a necessidade pela troca de estratégias durante o procedimento de otimização, o que será feito em seguida.

É preciso, ainda, definir como introduzir o  $(N/2)$ -ésimo par de pólos do equalizador no início do *Estágio 2* da *Estratégia B*. Esta alocação é dependente do comportamento da resposta ao término do *Estágio 1*. Deve-se verificar a ocorrência da *Imperfeição SEM* ou da *Imperfeição COM*, para as quais têm-se, respectivamente,  $h_{NE} < 0$  e  $h_{NE} > 0$ . O par de pólos não utilizado será introduzido buscando-se fazer  $h_{NE} = 0$ . Para definir a região apropriada para a introdução deste novo par, remete-se ao Fato 4.1. Quando ocorrer a *Imperfeição SEM* deve-se fazer com que o último vale da

resposta, em  $\omega_{UV}$ , tenha maior elevação que o último ponto da banda de passagem, alocando-se o par de pólos dentro da faixa de passagem do filtro. Quando ocorrer a *Imperfeição COM* deve-se fazer com que a banda NE tenha maior elevação que a banda equiripple, alocando-se o par de pólos fora da faixa de passagem do filtro. O exato posicionamento, dependendo da situação, é fornecido na Tabela 5.3. A escolha do valor do módulo deste novo par foi definida por simulação para cada situação, como mostrado na mesma tabela.

Tabela 5.3: Inicialização dos parâmetros do  $(N/2)$ -ésimo par de pólos para *Estratégia B*.

	<i>Imperfeição SEM</i>	<i>Imperfeição COM</i>
Fase $\theta_{p,N/2}$	$\omega_{UV} \cdot \pi$	$(\omega_{FC} + \omega_{UV}) \cdot \pi$
Módulo $r_{p,N/2}$	0,5	0,9

No *Estágio 2* desta estratégia, o ajuste de cada um dos parâmetros do novo par de pólos é igual aos ajustes considerados nas Eqs. (5.2.4) e (5.2.5), porém com novos valores de  $v_{max,(\theta,r)}$  e  $f_{(\theta,r)}(V_p)$ . A máxima variação de cada parâmetro  $v_{max,(\theta,r)}$  é dada por uma porcentagem de seu valor no início da iteração, definida na Tabela 5.4. Os argumentos da função tangente hiperbólica são definidos por apenas uma única expressão, dada por

$$f_{\theta,N/2}(V_p) = f_{r,N/2}(V_p) = \sigma_{(\theta,r)} \cdot \frac{|h_{NE}|}{\tau_{max,PB} - \min\{\tau_{min,Eq}; \tau_{min,PB}\}}, \quad (5.2.15)$$

onde os fatores de ajuste  $\sigma_{(\theta,r)}$  dependem do posicionamento atual do par de pólos, e seus valores são apresentados na Tabela 5.5. Os valores mostrados para os parâmetros de ajustes das fases e módulos nas Tabelas 5.4 e 5.5 foram obtidos por simulação para conciliar velocidade e robustez na otimização.

Finalmente, como mencionado anteriormente, um critério para troca de estratégias deve ser verificado durante o procedimento de otimização. Isto resulta numa grande vantagem do novo método de otimização introduzido neste trabalho. Com ele é possível avaliar a necessidade de troca de acordo com a evolução dos ajustes dos parâmetros, ao término de cada iteração, não sendo fundamental a pré-escolha definida no Capítulo 3. Este novo critério é descrito a seguir.

Tabela 5.4: Máxima variação dos parâmetros a partir de seus valores no início da iteração.

	% do valor inicial	Variação máxima
$v_{max,\theta}$	1	$0,01 \cdot \theta_{p,N/2,0}$
$v_{max,r}$	10	$0,1 \cdot \theta_{p,N/2,0}$

Tabela 5.5: Fator de ajuste dos parâmetros em função do posicionamento dos pólos no início da iteração.

	$\sigma_\theta$	$\sigma_r$
$\omega_{p,N/2,0} > \omega_{FC}$	-5	+2
$\omega_{p,N/2,0} < \omega_{UV}$		-2
$\omega_{UV} < \omega_{p,N/2,0} < \omega_{FC}$	+5	

### 5.2.6. Critério para Mudança de Estratégia

O critério que será descrito a seguir é utilizado quando estiver sendo utilizada a *Estratégia A* de alocação, durante a otimização, para investigar o surgimento da cauda na extremidade da banda passante, e suas extensão e altura. A escolha óbvia para a mudança de estratégias inclui a porcentagem da banda NE dentro da banda passante, e comparações entre as alturas  $h_{NE}$  e  $h_{Eq}$ . Foram, então, estabelecidos três critérios, definidos na Tabela 5.6, sendo que um deles (i) impede que a banda NE se torne muito acentuada, o segundo (ii) evita que  $h_{NE} \gg h_{Eq}$ , e o terceiro (iii) concilia situações intermediárias dos critérios (i) e (ii), simultaneamente. Quando um dos critérios é satisfeito, o método troca da *Estratégia A* para a *Estratégia B*. Define-se  $\Delta\omega_{NE}$ , ilustrado na Fig. 5.8, como

$$\Delta\omega_{NE} = \omega_{FC} - \omega_{Eq}$$

Enfatizamos neste ponto que a mudança de estratégias ocorre apenas quando a estratégia em vigência é a *Estratégia A*, e que não há mudança quando a ordem de equalização for  $N = 2$ . Além disso, quando a rotina estiver próxima da solução ótima desejada, ou seja, quando o processo estiver aproximando-se do Critério de Parada – que será definido a seguir – não se deve alterar a estratégia.

O método de decisão, implementado ao final de cada iteração, apresenta excelentes resultados nas simulações, impedindo o surgimento de grandes caudas na resposta de atraso de grupo. Os critérios aqui estabelecidos complementam-se com a

verificação prévia pela seleção da estratégia definida no Capítulo 3, uma vez que este último permite uma folga pela escolha da *Estratégia A*. Se a verificação prévia falhar, o método descrito nesta seção impedirá o surgimento de caudas acentuadas e alterará a estratégia.

Tabela 5.6: Critério para mudança de estratégia de alocação.

Critério:	Variação do atraso	Banda
(i)	$h_{NE} > 20 \cdot h_{Eq}$	
(ii)		$\Delta\omega_{NE} > 0,1 \cdot \omega_{FC}$
(iii)	$h_{NE} > 10 \cdot h_{Eq}$	$\Delta\omega_{NE} > 0,04 \cdot \omega_{FC}$

### 5.2.7. Critério de Interrupção

Na Seção 5.2.1 foi mostrado que para cada par de pólos a resposta é equiripple em torno do pico gerado por este par, quando  $h_v = h_p = 0$ . Quando para todos os pares de pólos do equalizador estas condições forem satisfeitas, ter-se-á obtido a resposta ótima. Como critério de interrupção do procedimento de ajuste dos pólos do equalizador define-se um limiar de variação dos coeficientes de forma que, quando a máxima variação entre todos os coeficientes for menor que este limite, a resposta esteja suficientemente próxima do resultado ótimo.

Após cada iteração, computa-se a variação máxima entre todos os coeficientes,

$$\Delta p_{max} = \max\{|\theta_{p,i,f} - \theta_{p,i,0}|; |r_{p,i,f} - r_{p,i,0}|\}, \quad i = 1, 2, \dots, N/2, \quad (5.2.16)$$

definindo-se os critérios de parada (CP) como

$$CP_1: \Delta p_{max} \leq 2 \cdot 10^{-5}, \quad (5.2.17)$$

$$CP_2: \Delta p_{max} \leq 5 \cdot 10^{-4}. \quad (5.2.18)$$

O critério  $CP_2$  permite que a rotina seja interrompida para respostas mais afastadas do ótimo. Como ao término do *Estágio 1* da *Estratégia B* de alocação haverá ainda outra etapa de otimização, não é necessário que a resposta deste estágio seja extremamente próxima do ótimo. Portanto, utiliza-se  $CP_2$  para o *Estágio 1* da *Estratégia B* de alocação.

Além destes dois critérios, deve-se utilizar um número máximo de iterações para a rotina, que pode ser definido de acordo com a estratégia utilizada, como na Tabela 5.7. O *Estágio 2* da *Estratégia B* mostrou-se o ponto crítico do método desenvolvido, sendo necessário permitir um grande número de iterações para que seja possível obter o resultado ótimo para uma vasta gama de filtros IIR. Grande parte das equalizações

efetuadas com o método resultou no ótimo num pequeno número de iterações. Entretanto, devem-se permitir estes números elevados de iterações para que não se limite o número de simulações bem sucedidas.

Tabela 5.7: Número máximo de iterações para cada estratégia.

		# <sub>max</sub> iterações
<i>Estratégia A</i>		100
<i>Estratégia B</i>	<i>Estágio 1</i>	100
	<i>Estágio 2</i>	200

### 5.2.8. Resumo da Otimização Equiripple

Dadas a resposta de atraso de grupo  $\tau_F(\omega)$  e a frequência de corte  $\omega_{FC}$  do filtro IIR, escolhem-se a ordem do equalizador  $N$  e a estratégia ( $A$  ou  $B$ ) de alocação. O primeiro passo para qualquer rotina de otimização é o fornecimento de uma estimativa inicial  $\{\theta_0; r_0\}_K$ , contendo todas as fases e módulos dos  $K/2$  pares de pólos, onde  $K = N$  se *Estratégia A* e  $K = N - 2$  se *Estratégia B*. As outras etapas do procedimento são descritas no Algoritmo 5.1. Os ajustes de fase (P2) e módulo (P3) neste algoritmo, são detalhados nos Algoritmos 5.2 e 5.3, respectivamente.

O método desenvolvido neste trabalho funciona corretamente, com excelentes resultados, até variações de 0,1 amostra dentro da faixa de passagem da resposta equalizada. Isto é, se para a ordem do equalizador a resposta ótima equiripple possível possuir variação menor que esta, é impossível afirmar se o procedimento resultará na resposta esperada. Em alguns casos resultados equiripple com variação de até 0,03 amostras foram obtidos.

Esta restrição, no entanto, não limita a utilização do método na prática, uma vez que para variações tão pequenas quanto 0,1 amostra é possível afirmar que a resposta de atraso de grupo é aproximadamente constante.

Como mencionado no início deste capítulo, o método foi previamente vislumbrado para ser a estimativa inicial de uma rotina de otimização qualquer. No entanto, devido aos bons resultados obtidos decidiu-se pela utilização da rotina como o procedimento de otimização propriamente dito. Resultados comparativos entre este

método e a rotina de otimização *minimax* utilizada em [15], [16] são mostrados adiante, inclusive utilizando-se o resultado deste método como estimativa inicial. Resultados mostram que a resposta *minimax* pode ser pior que a resposta da otimização equiripple proposta. Isto porque nenhuma otimização *minimax* prevê a ocorrência da banda NE para impedir o surgimento da “cauda”. Na próxima seção são mostrados resultados da aplicação do método proposto a diferentes especificações de filtros IIR.

<b>Algoritmo 5.1: Otimização Equiripple.</b>	
<b>Dados:</b>	
$\omega_{FC}, N, \text{Estratégia};$	
<b>Se</b> <i>Estratégia</i> = <b>A</b> ,	
<b>obter</b> $\{\theta_0; r_0\}_N,$	
$K = N,$	
<b>testar</b> $R_{F,E} > 1,3,$	
<b>Se</b> VERDADEIRO,	
<i>Estratégia</i> := <b>B</b> ,	
<b>Senão</b>	
$tol = CP_1,$	
<b>Se</b> <i>Estratégia</i> = <b>B</b> ,	
<b>obter</b> $\{\theta_0; r_0\}_{N-2},$	
$K = N - 2,$	
$tol = CP_2,$	
$maxIter := 100,$	
<b>P1: Para</b> contador = 1 até $maxIter$	
<b>calcular</b> $\theta_{p,i,f},$ com $\{\theta_0; r_0\}_K, i = K/2 \rightarrow 1,$	<b>(P2)</b>
<b>calcular</b> $r_{p,i,f},$ com $\{\theta_{p,i,f}; r_0\}_K, i = K/2 \rightarrow 1,$	<b>(P3)</b>
<b>calcular</b> $\Delta p_{max},$	
<b>Se</b> $\Delta p_{max} < tol,$	
<b>PARAR,</b>	
<b>Senão,</b>	
$\{\theta_0; r_0\}_K := \{\theta_{p,i,f}; r_{p,i,f}\}_K, i = 1 \rightarrow K/2,$	
<b>verificar</b> critérios para mudança de estratégia,	
<b>Se</b> VERDADEIRO,	
<i>Estratégia</i> := <b>B</b>	
<b>obter</b> $\{\theta_0; r_0\}_{N-2},$	
$K = N - 2,$	
$tol = SC_2,$	
<b>Recomeçar</b> P1,	

**Se  $K \neq N$**   
 $maxIter := 200,$   
 $tol = SC_1,$   
 $obter \{ \theta_{p,N/2,1}; r_{p,N/2,1} \},$   
 $agrupar \{ \theta_0; r_0 \}_N := \{ \{ \theta_j; r_j \}_{N-2}; \{ \theta_{p,N/2,1}; r_{p,N/2,1} \} \}_N,$   
 $K = N - 2,$   
**Recomeçar P1,**  
**fim.**

**Algoritmo 5.2: Ajuste das fases (P2).**

**Obter  $V_{p,0}$ , com  $\{ \theta_{p,i,0}; r_{p,i,0} \}$**   
**Calcular  $h_{v,0}$**   
**Se  $h_{v,0} > 0,$**   
 $\theta_{p,i,a} > \theta_{p,i,0}$   
**Senão,**  
 $\theta_{p,i,a} < \theta_{p,i,0}$   
**Obter  $V_{p,a}$ , com  $\{ \theta_{p,i,a}; r_{p,i,0} \}$**   
**Calcular  $h_{v,a}$**   
**Se  $sinal(h_{v,a}) = sinal(h_{v,0}),$**   
 $\theta_{p,i,f} = \theta_{p,i,a}$   
**Senão,**  
 $\theta_{p,i,f} = \text{Triangulação entre } \theta_{p,i,a} \text{ e } \theta_{p,i,0}, \text{ com } h_{v,a} \text{ e } h_{v,0}$   
**Retorna  $\theta_{p,i,f}$**

**Algoritmo 5.3: Ajuste das fases (P2).**

**Obter  $V_{p,0}$ , com  $\{ \theta_{p,i,0}; r_{p,i,0} \}$**   
**Calcular  $h_{p,0}$**   
**Se  $h_{p,0} > 0,$**   
 $r_{p,i,a} > r_{p,i,0}$   
**Senão,**  
 $r_{p,i,a} < r_{p,i,0}$   
**Obter  $V_{p,a}$ , com  $\{ \theta_{p,i,a}; r_{p,i,a} \}$**   
**Calcular  $h_{p,a}$**   
**Se  $sinal(h_{p,a}) = sinal(h_{p,0}),$**   
 $r_{p,i,f} = r_{p,i,a}$   
**Senão,**  
 $r_{p,i,f} = \text{Triangulação entre } r_{p,i,a} \text{ e } r_{p,i,0}, \text{ com } h_{p,a} \text{ e } h_{p,0}$   
**Retorna  $r_{p,i,f}$**

### 5.3. Simulações

Nesta Seção serão apresentados diversos exemplos de aplicação do método proposto, verificando-se, em alguns casos, a eficácia das etapas isoladamente, como o ajuste dos parâmetros, passos de atualização e a triangulação de valores. A eficiência da otimização equiripple é também testada, aplicando-a a diferentes filtros IIR a partir das duas estimativas iniciais propostas no Capítulo 4.

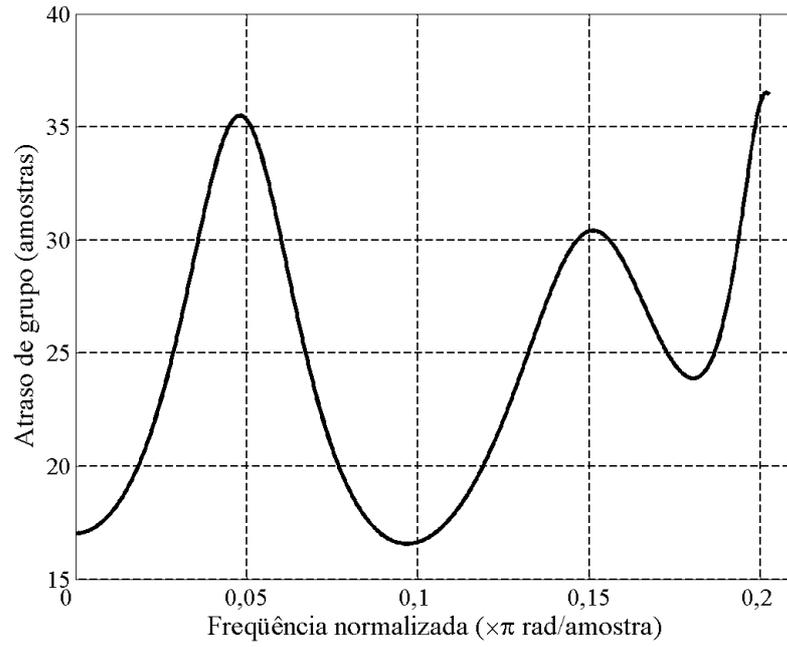
Nas seções a seguir estar-se-á utilizando a estimativa inicial descrita na Seção 4.3 deste trabalho, até que se diga o contrário. A princípio será avaliada a eficiência dos ajustes escolhidos, como sentido de ajuste, passo de atualização e triangulação de valores, para então verificar o rendimento do procedimento de otimização por completo quanto ao número de iterações para convergência.

#### 5.3.1. Avaliação das Etapas de Atualização dos Parâmetros

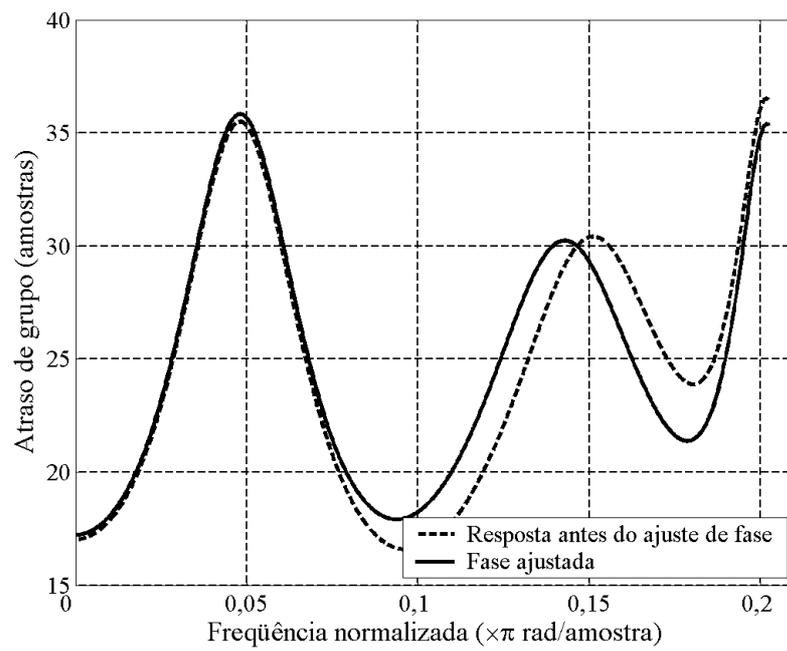
Para a equalização de 4<sup>a</sup>-ordem de um filtro qualquer a resposta de atraso após a estimativa inicial é dada na Fig. 5.9(a). Aplica-se, então, um ajuste na fase do par de pólos mais externo do filtro, e o resultado obtido é apresentado em linha sólida na Fig. 5.9(b), juntamente com a resposta antes do ajuste em linha tracejada. Nota-se que  $h_v < 0$  antes e depois do ajuste, ou seja, o sinal do gradiente permanece o mesmo e, portanto, não se deve aplicar triangulação de valores.

Em seguida, ajusta-se o módulo do mesmo par de pólos e a resposta obtida é apresentada em linha sólida na Fig. 5.9(c), juntamente com a resposta antes deste ajuste, em linha tracejada. Mais uma vez a atualização do valor não levou à inversão no sinal do gradiente, mantendo  $h_p > 0$ , ou seja, o procedimento aproxima-se da resposta ótima, e não há triangulação de valores.

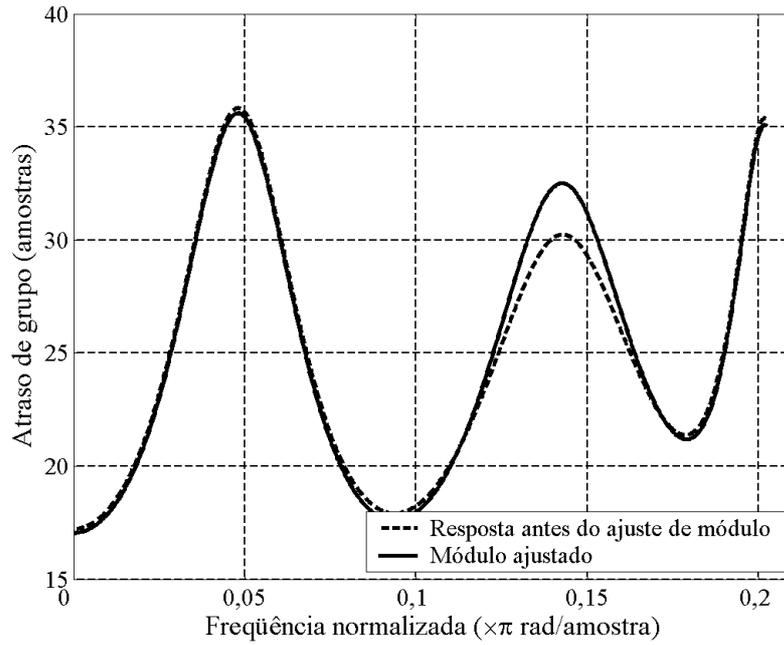
Na Fig. 5.9(d) estão mostradas, respectivamente em linhas tracejada e sólida, as respostas antes e depois dos ajustes efetuados. Nota-se que após os ajustes de fase e módulo a resposta está mais próxima do resultado equiripple esperado. Conclui-se então que os sentidos de atualização, como esperado, estão na direção da resposta ótima. Apesar de não ter sido obtida a resposta ótima, pode-se afirmar que a rotina aproxima-se da alocação desejada, e que os passos de atualização foram boas estimativas.



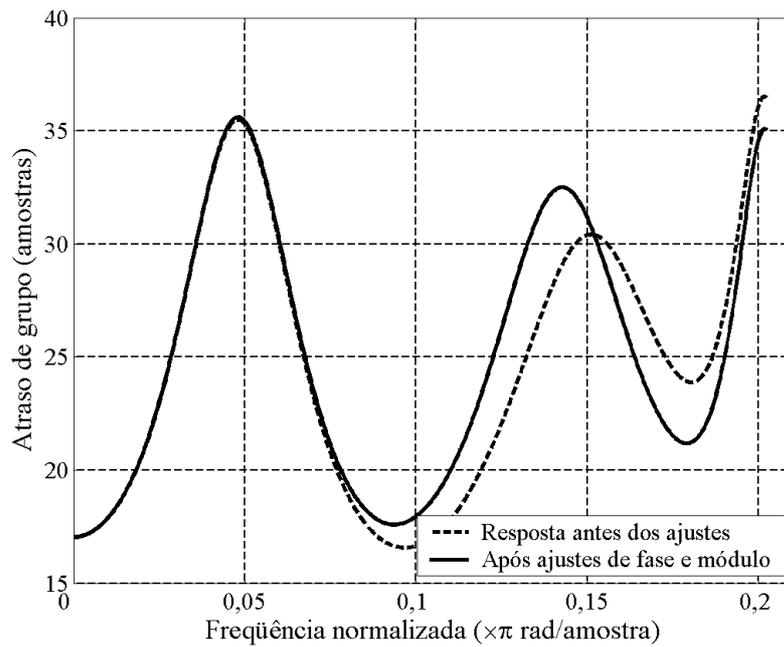
(a)



(b)



(c)

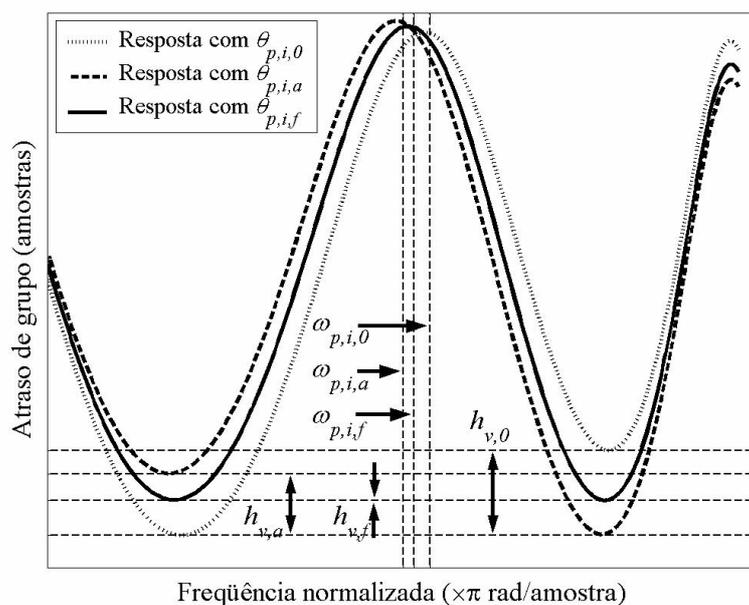


(d)

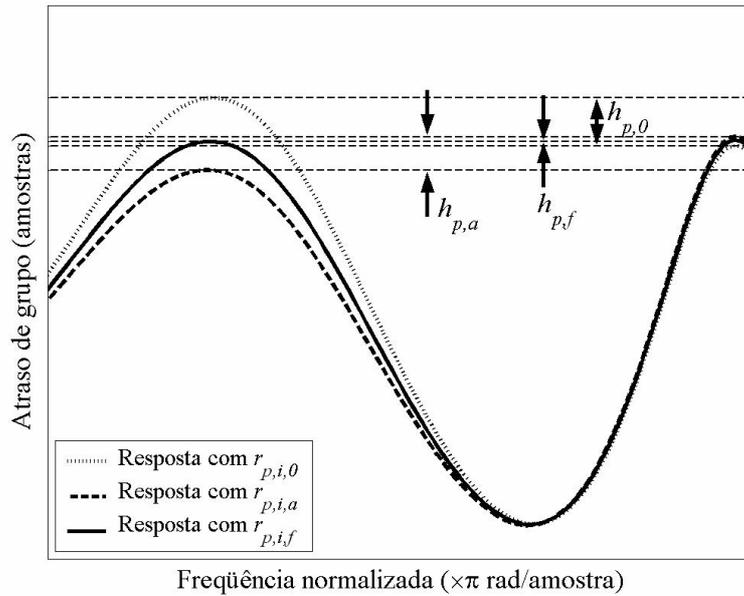
Figura 5.9: Dada (a) resposta de atraso após a estimativa inicial obtém-se (b) a resposta após ajuste da fase, em linha sólida, seguida (c) de ajuste do módulo. A resposta final após os ajustes é mostrada em linha sólida em (d) juntamente com a resposta antes dos ajustes, em linha tracejada.

A Fig. 5.10 ilustra a situação na qual há inversão do sinal de gradiente, e por isso deve-se aplicar o método de triangulação de valores, utilizando como pesos o valor absoluto das alturas  $|h_v|$  e  $|h_p|$ . Na Fig. 5.10(a) a resposta no início da iteração com fase  $\theta_{p,i,0} = 0,5066$  é apresentada em linha pontilhada, de onde se obtém  $h_{v,0} = -1,9$  amostra. A curva tracejada representa a resposta após o ajuste da fase para  $\theta_{p,i,a} = 0,4950$ , com diferença de altura dos vales  $h_{v,a} = 1,3$  amostra. Nota-se que  $|h_{v,a}| < |h_{v,0}|$  e, portanto, a resposta ajustada está mais próxima da resposta ótima. Então, efetuando-se a triangulação de valores a fase é ajustada para  $\theta_{p,i,f} = 0,4998$  mais próxima da fase  $\theta_{p,i,a}$ , como observado na figura, resultando na altura  $h_{v,f} = 0,01$  amostra. O método forneceu uma resposta muito próxima da resposta ótima possível. A resposta final do ajuste é mostrada em linha sólida.

Na Fig. 5.10(b) são mostrados em linha pontilhada os dois últimos picos da resposta no início de uma iteração com o módulo  $r_{p,N/2,0} = 0,9635$ , com altura entre os dois picos  $h_{p,0} = -5,93$  amostras. Após ajuste no valor do módulo para  $r_{p,N/2,a} = 0,9573$  obtém-se a resposta em linha tracejada, com altura  $h_{p,a} = 2,8$  amostras. Ou seja, ocorreu inversão no sinal da diferença de alturas, indicando que se deve efetuar a triangulação de valores modificando o módulo para um valor entre os dois anteriores, porém mais próximo de  $r_{p,N/2,a}$  uma vez que  $|h_{p,a}| < |h_{p,0}|$ . A resposta obtida após esta etapa é mostrada em linha sólida na mesma figura, para o valor do módulo  $r_{p,N/2,f} = 0,9593$ , com diferença de alturas final  $h_{p,f} = 0,3$  amostra, novamente comprovando a eficácia do método de triangulação de valores.



(a)



(b)

Figura 5.10: Exemplos de ajustes dos parâmetros com triangulação dos valores inicial e ajustado: (a) ajuste da fase e (b) ajuste do módulo.

Neste exemplo foi verificado o sentido de ajuste dos parâmetros a partir dos parâmetros  $V_p$  da resposta de atraso em torno do pico gerado pelo par de pólos a ser ajustado. Nos quatro casos de ajustes considerados, os parâmetros foram atualizados reduzindo-se a diferença de alturas, seja entre os vales para o ajuste das fases, seja entre os picos para o ajuste dos módulos. Foi também verificada a eficácia do passo de atualização estimado utilizando a função  $tgh$ , a qual apresentou uma certa imprecisão em alguns casos, por provocar a inversão no sinal do gradiente (diferença de alturas). Entretanto isto já era esperado, e a etapa de triangulação, introduzida para evitar que o procedimento divergisse, mostrou-se extremamente eficaz, evitando a divergência da atualização e aproximando o resultado da resposta ótima.

### 5.3.2. Otimização Eqüiripple com *Estratégia A de Alocação*

Variados exemplos foram efetuados para verificar o funcionamento do método de Otimização Eqüiripple. Os três filtros considerados no Capítulo 4 serão novamente utilizados para demonstração do procedimento.

**Exemplo 5.3.1** Filtro Elíptico de 4ª-ordem, considerado no Exemplo 4.3.3.

São utilizadas as estimativas apresentadas na Fig. 4.17 como soluções iniciais do processo. Os resultados obtidos com a Otimização Eqüiripple para equalizadores de 2ª a 10ª-ordens são mostrados na Fig. 5.11(a), juntamente com a resposta original do filtro. O rendimento da rotina em cada equalização é mostrado na Tabela 5.8, que apresenta o número de iterações e a variação  $\Delta\tau_{FE,BP}(\omega)$  da resposta de atraso de grupo em amostras, dentro da banda de passagem, onde

$$\tau_{FE}(\omega) = \tau_F(\omega) + \tau_E(\omega), \quad (5.3.1)$$

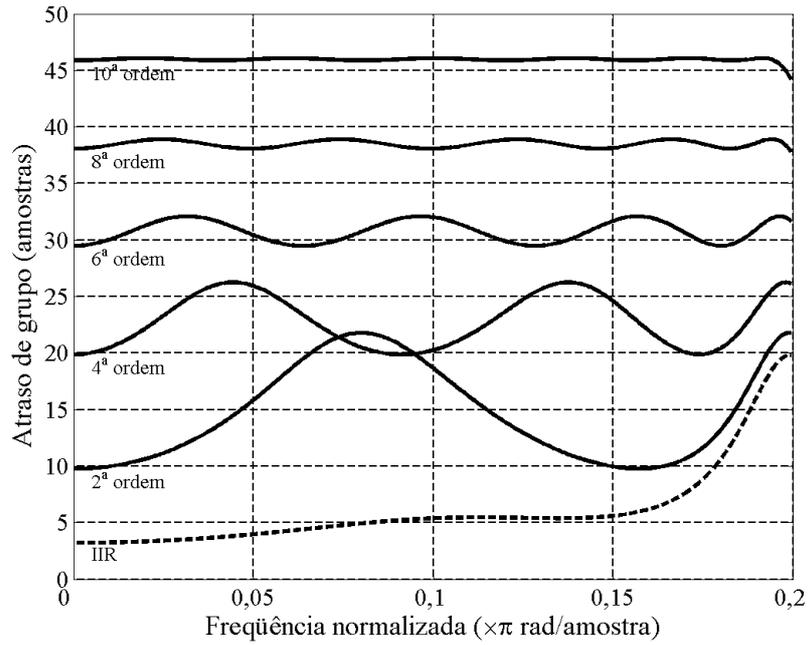
e  $\tau_{FE,BP}(\omega)$  é definido como a resposta equalizada dentro da faixa de passagem do filtro IIR. Como esperado, à medida que se aumenta a ordem do equalizador, a variação  $\Delta\tau_{FE,BP}(\omega)$  da resposta se aproxima de zero, significando que a resposta se aproxima de um valor constante.

A eficiência do método de otimização foi comprovada neste exemplo. Ao contrário do que ocorreu nos Exemplos 4.2.1 e 4.3.3, a rotina de otimização eqüiripple efetuou a equalização de 10ª-ordem sem necessidade de troca para *Estratégia B* de alocação. Isto porque nenhum dos critérios para troca de estratégia foi satisfeito. Caso fosse forçada a utilização da *Estratégia B* para esta ordem de equalização, obter-se-ia a resposta em linha tracejada da Fig. 5.11(b), após 28 iterações com variação  $\Delta\tau_{FE,BP}(\omega) = 0,96$  amostra. A resposta obtida utilizando a *Estratégia A* em linha sólida apresenta variação de 0,2 amostra para a banda eqüiripple, apresentando banda não-eqüiripple de 2,3% da faixa de passagem, com variação  $\Delta\tau_{NE}(\omega) = 1,6$  amostra. O método considera esta faixa pequena e por isso negligencia esta perda, em troca de redução da ordem de 5 vezes na variação dentro da faixa eqüiripple.

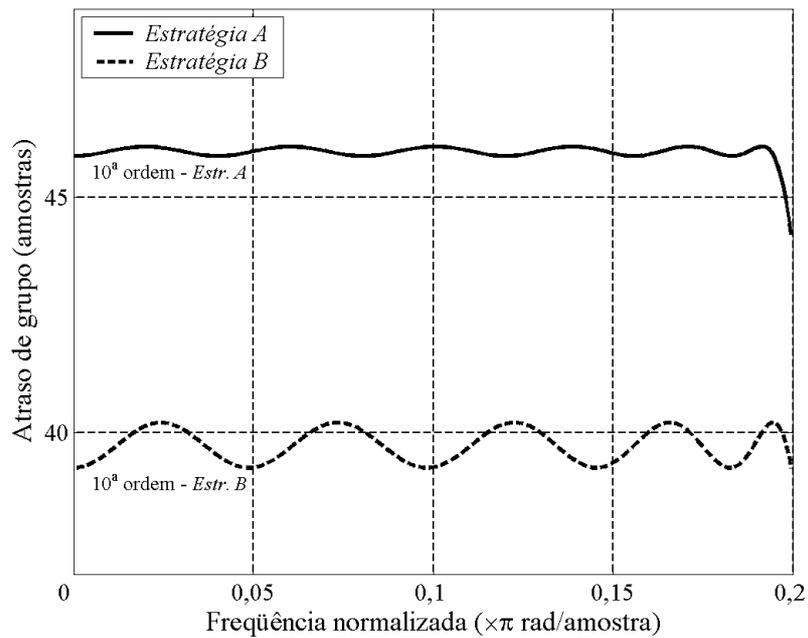
Todos os resultados obtidos neste exemplo apresentam curvas eqüiripple, com exceção da parcela da banda não-eqüiripple.

Tabela 5.8: Resultados de equalizações para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.1, com 1 a 5 seções passa-tudo.

Ordem do Equalizador	# iterações	Variação $\Delta\tau_{FE}(\omega)$
2	10	12,01
4	8	6,38
6	8	2,62
8	19	1,08
10	54	0,20



(a)



(b)

Figura 5.11: Equalização da resposta de atraso de grupo para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.1, (a) com a resposta original e as respostas equalizadas de 2ª a 10ª-ordens de baixo para cima, e (b) as respostas para equalização de 10ª-ordem com *Estratègia A* (linha sólida) e *Estratègia B* (linha tracejada).

**Exemplo 5.3.2** Filtro Elíptico de 5ª-ordem, considerado no Exemplo 4.3.4.

A partir das estimativas apresentadas no Exemplo 4.3.4, efetuou-se a equalização com 1 a 5 seções passa-tudo, com os resultados, todos com comportamento equiripple, mostrados na Fig. 5.12, juntamente com a resposta original do filtro elíptico. Foi possível ainda efetuar a equalização de 12ª-ordem utilizando a *Estratégia A*, na qual há o aparecimento da cauda. Este resultado não é apresentado por não ter sido considerado no exemplo do Capítulo 4. O rendimento da rotina em cada equalização é apresentado na Tabela 5.9, novamente comprovando a eficácia do procedimento.

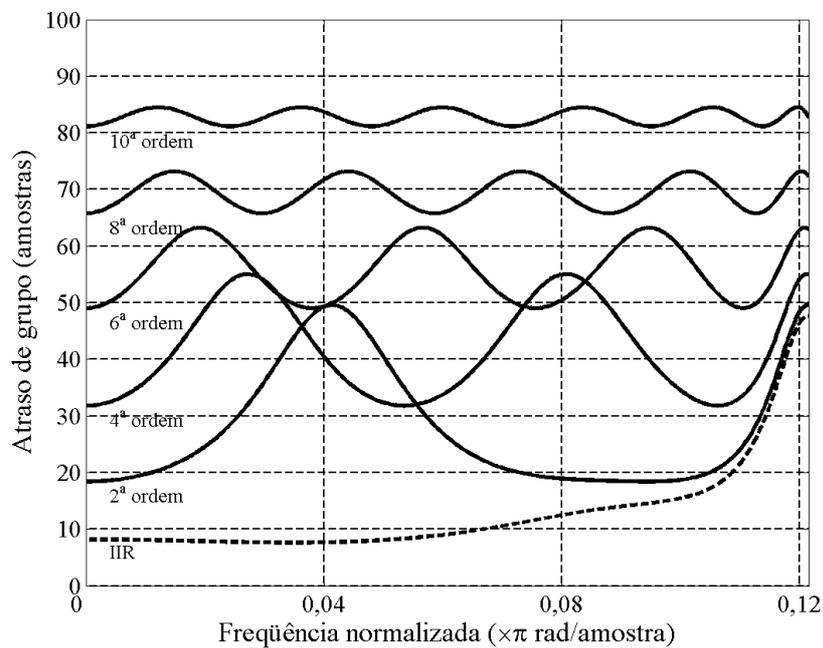


Figura 5.12: Equalização da resposta de atraso de grupo para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.2, com a resposta original e as respostas equalizadas de 2ª a 10ª-ordens de baixo para cima.

Tabela 5.9: Resultados de equalizações para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.2, com 1 a 5 seções passa-tudo.

Ordem do Equalizador	# iterações	Varição $\Delta\tau_{FE}(\omega)$
2	11	31,15
4	5	23,24
6	5	14,20
8	8	7,42
10	15	3,37

**Exemplo 5.3.3** Filtro Chebyshev do Tipo I de 7<sup>a</sup>-ordem, considerado no Exemplo 4.3.5.

Utilizando as estimativas do Exemplo 4.3.5 como soluções iniciais para a Otimização Equiripple, são obtidos os resultados para equalizações de 2<sup>a</sup> a 10<sup>a</sup>-ordens mostrados na Fig. 5.13. O rendimento do procedimento para cada caso de equalização é mostrado na Tabela 5.10. Novamente os resultados são todos equiripple, obtidos em poucas iterações.

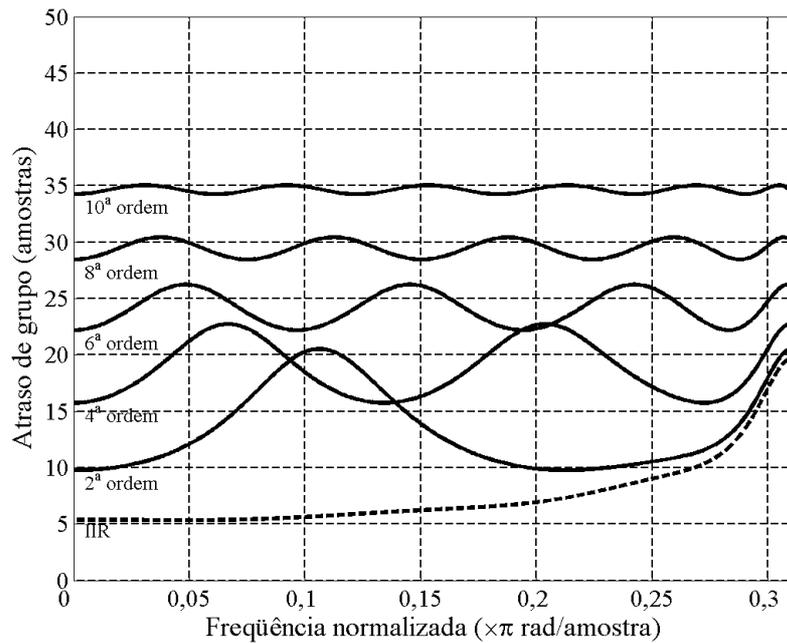


Figura 5.13: Equalização da resposta de atraso de grupo para o filtro de Chebyshev do Exemplo 5.3.3, com a resposta original e as respostas equalizadas de 2<sup>a</sup> a 10<sup>a</sup>-ordens de baixo para cima.

Tabela 5.10: Resultados de equalizações para o filtro de Chebyshev do Exemplo 5.3.3, com 1 a 5 seções passa-tudo.

Ordem do Equalizador	# iterações	Varição $\Delta\tau_{FE}(\omega)$
2	16	10,75
4	13	6,99
6	8	4,04
8	11	1,97
10	18	0,79

Pode-se notar que para todos os exemplos considerados nesta Seção as respostas de atraso de grupo equalizadas apresentam  $1 + N/2$  picos na faixa de passagem, comprovando a observação feita no Capítulo 3.

### 5.3.3. Estimativas Iniciais

Nesta seção são comparados os rendimentos da otimização equiripple a partir dos dois métodos de estimativa inicial apresentados no Capítulo 4, para os três filtros considerados nos exemplos 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.3. As Tabelas 5.11, 5.12 e 5.13 apresentam os respectivos números de iterações necessários para atingir a resposta equiripple.

Tabela 5.11: Número de iterações a partir da solução inicial até a solução ótima para o filtro de elíptico de 4ª-ordem do Exemplo 5.3.1.

Ordem do Equalizador	Método de Estimativa Inicial	
	Redes Neurais	Estimativa Gráfica dos Módulos
2	14	10
4	6	8
6	7	8
8	14	19
10	34	54

Tabela 5.12: Número de iterações a partir da solução inicial até a solução ótima para o filtro de elíptico de 5ª-ordem do Exemplo 5.3.2.

Ordem do Equalizador	Método de Estimativa Inicial	
	Redes Neurais	Estimativa Gráfica dos Módulos
2	8	11
4	4	5
6	5	5
8	8	8
10	14	15

Tabela 5.13: Número de iterações a partir da solução inicial até a solução ótima para o filtro de Chebyshev de 7<sup>a</sup>-ordem do Exemplo 5.3.3.

Ordem do Equalizador	Método de Estimativa Inicial	
	Redes Neurais	Estimativa Gráfica dos Módulos
2	16	16
4	12	13
6	9	8
8	11	11
10	18	18

Os resultados mostram que, em geral, as estimativas iniciais são equivalentes, de forma que a rotina de otimização equiripple utiliza aproximadamente o mesmo número de iterações para atingir a solução ótima. Conclui-se então que ambos os métodos de estimativa inicial apresentam rendimentos semelhantes.

#### 5.3.4. Otimização Equiripple com *Estratégia B* de Alocação

Para todos os exemplos mostrados nas Seções anteriores foram considerados apenas resultados utilizando a *Estratégia A* de alocação dos pólos. Na presente Seção serão considerados os mesmos exemplos, porém para ordens superiores de equalizadores. Nota-se que as respostas ótimas que serão apresentadas exibem  $N/2$  picos na faixa de passagem. São utilizadas as estimativas iniciais do método por estimativa gráfica dos módulos.

**Exemplo 5.3.4** Filtro elíptico de 4<sup>a</sup>-ordem considerado no Exemplo 5.3.1.

No Exemplo 5.3.1 foi constatado que para a equalização de 10<sup>a</sup>-ordem poderia ter sido utilizada a *Estratégia B*, a critério do projetista. Entretanto, optou-se pela manutenção da *Estratégia A*, tolerando-se a existência da cauda. Porém, para ordens superiores do equalizador não seriam obtidos resultados aceitáveis, sendo necessária a troca de estratégia. Para a equalização de 12<sup>a</sup>-ordem, por exemplo, ter-se-ia como resultado do *Estágio 1* da *Estratégia B* a resposta mostrada na Fig. 5.11(b), uma vez que este estágio efetua uma equalização parcial de ordem  $N - 2 = 10$ . Como esta resposta apresenta uma cauda, ou seja, é constatada a *Imperfeição COM*, deve-se posicionar o pólo incluído no *Estágio 2* fora da banda passante. Efetuando a equalização completa, obtém-se a

resposta mostrada na Fig. 5.14 juntamente com as respostas de equalizações com 7, 8, 9 e 10 seções passa-tudo de 2ª-ordem. Todas as respostas são equiripple com  $N/2$  picos. A Tabela 5.14 resume os resultados obtidos com a equalização do filtro elíptico com de 1 a 10 seções passa-tudo, e indica também a estratégia utilizada.

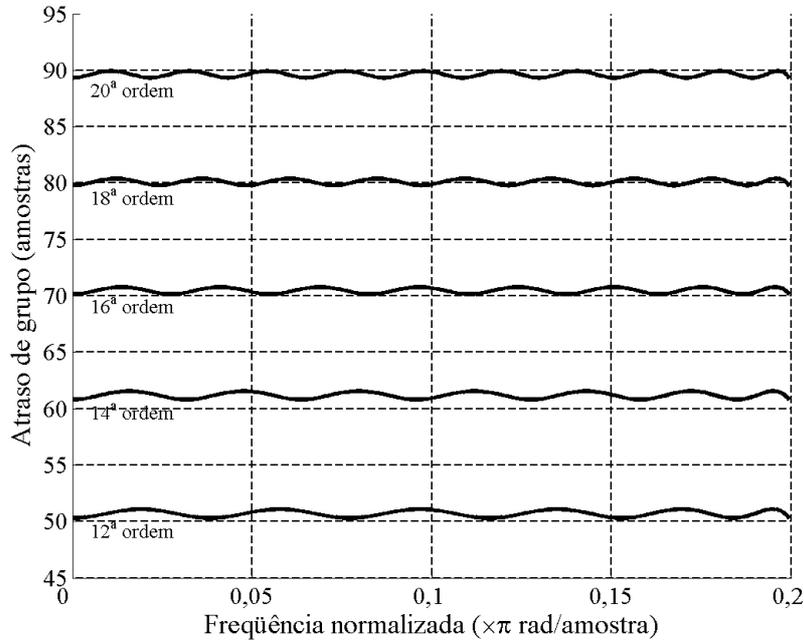


Figura 5.14: Equalização de 12ª a 18ª-ordens, de baixo para cima, da resposta de atraso de grupo para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.1.

Tabela 5.14: Resultados de equalizações para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.4, com de 1 a 10 seções passa-tudo de 2ª-ordem, com as diferentes estratégias de alocação.

Ordem do Equalizador	# iterações	Varição $\Delta\tau_{FE}(\omega)$	Estratégia
2	10	12,01	A
4	8	6,38	A
6	8	2,62	A
8	19	1,08	A
10	54	0,20	A
	28	0,96	B
12	40	0,79	B
14	48	0,75	B
16	82	0,70	B
18	101	0,61	B
20	213	0,53	B

O procedimento foi aplicado para os outros filtros considerados nos Exemplos 5.3.2 e 5.3.3, e os resultados obtidos são mostrados nas Tabelas 5.15 e 5.16 para equalizadores com de 1 a 10 seções passa-tudo de 2ª-ordem. Os valores entre parênteses fornecem a variação total dentro da faixa de passagem, considerando também a altura da cauda, enquanto os valores fora dos parênteses são as variações na faixa eqüiripple. Os exemplos comprovam a eficiência da rotina de otimização desenvolvida.

Tabela 5.15: Resultados de equalizações para o filtro elíptico do Exemplo 5.3.2, com de 1 a 10 seções passa-tudo de 2ª-ordem, com as diferentes estratégias de alocação.

Ordem do Equalizador	# iterações	Varição $\Delta\tau_{FE}(\omega)$	Estratégia
2	11	31,15	A
4	5	23,24	A
6	5	14,20	A
8	8	7,42	A
10	15	3,37	A
12	29	1,35 (3,02)	A
14	68	0,45 (4,38)	A
16	82	2,01	B
18	55	1,52	B
20	62	1,67	B

Tabela 5.16: Resultados de equalizações para o filtro de Chebyshev do Exemplo 5.3.3, com de 1 a 10 seções passa-tudo de 2ª-ordem, com as diferentes estratégias de alocação.

Ordem do Equalizador	# iterações	Varição $\Delta\tau_{FE}(\omega)$	Estratégia
2	16	10,75	A
4	13	6,99	A
6	8	4,04	A
8	11	1,97	A
10	18	0,79	A
12	45	0,31 (1,45)	A
14	76	0,73	B
16	95	0,65	B
18	228	0,66	B
20	193	0,29	B

### 5.3.5. Otimização Eqüiripple x Otimização *minimax*

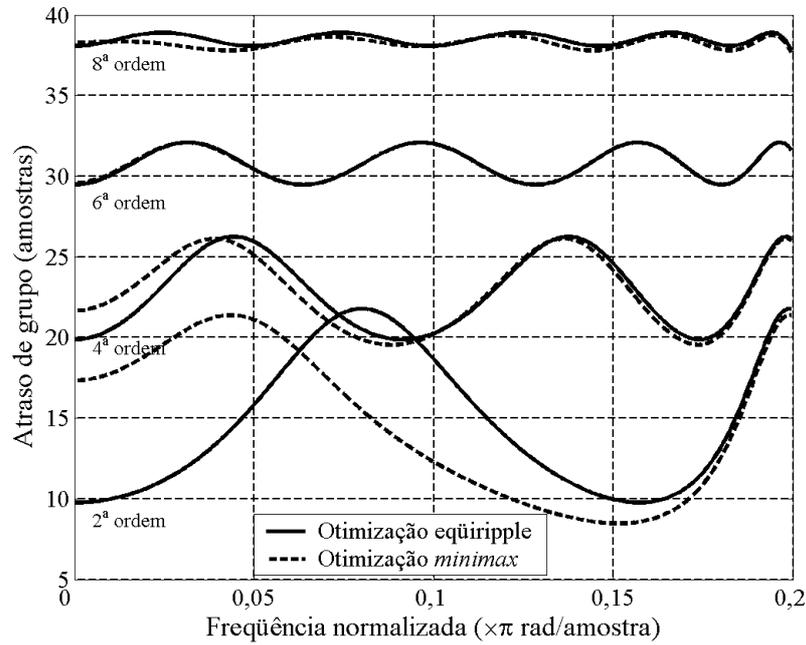
Nas seções anteriores foi provada a eficácia do método para projeto de equalizadores de atraso de grupo apresentado, com diversos exemplos. Neste ponto, tem-se por objetivo comparar o rendimento da otimização eqüiripple com uma rotina de otimização *minimax* comumente aplicada em algoritmos apresentados na literatura. Os três filtros considerados nos exemplos são novamente utilizados.

Aplicando-se as estimativas iniciais obtidas na Seção 4.3 aos filtros, a princípio é considerado o filtro elíptico de 4ª-ordem do Exemplo 4.3.3. As respostas equalizadas com a otimização eqüiripple, em linhas sólidas, e as respostas equalizadas com a otimização *minimax*, em linhas tracejadas, com de 1 até 4 seções passa-tudo de 2ª-ordem são mostradas na Fig. 5.15(a), todas com a *Estratégia A* de alocação. Nota-se que, apesar de a resposta *minimax* para equalizador de 2ª-ordem apresentar uma distorção maior, os resultados são aproximadamente iguais para os outros casos apresentados.

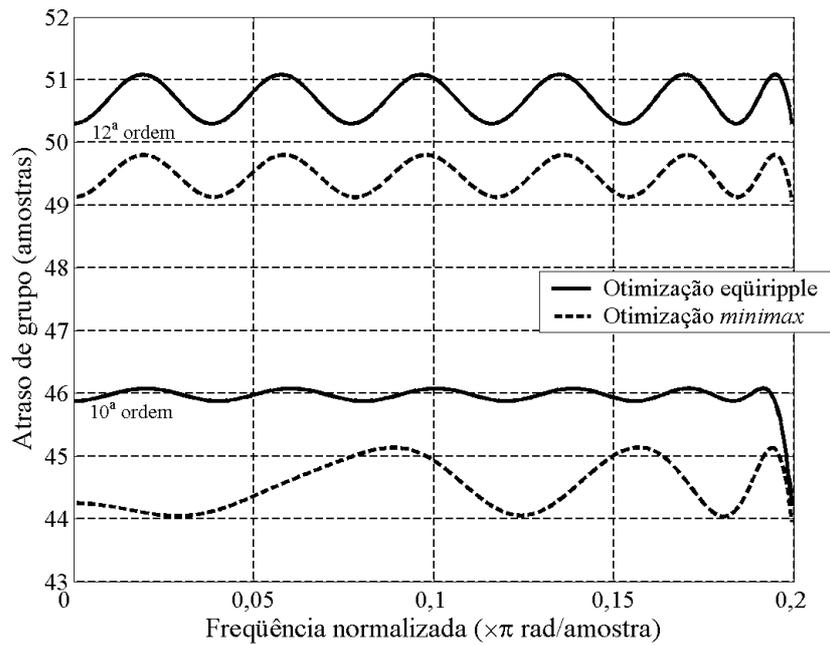
Os métodos foram aplicados a equalizações de ordens superiores, por exemplo, 10ª e 12ª-ordens, com os resultados mostrados na Fig. 5.15(b), em linhas sólidas para a otimização eqüiripple e linhas tracejadas para as respostas *minimax*. Nota-se que em ambos os casos a rotina *minimax* foi interrompida em mínimos locais, mesmo que tenham sido permitidas 500 chamadas da função custo. A otimização eqüiripple obteve respostas eqüiripple com 60 e 63 iterações utilizando as *Estratégias A* e *B*, respectivamente. Deve-se observar a presença da cauda na resposta para a equalização de 10ª-ordem. Resultados para ordens superiores do equalizador também mostram a dificuldade da rotina *minimax* em obter a alocação ótima para os parâmetros do equalizador, resultando em respostas não eqüiripple que, na maioria dos casos, apresentam maior variação de *ripple*. Estes resultados levam a crer que com a inclusão de uma nova seção passa-tudo a otimização eqüiripple seria capaz de obter melhores resultados, enquanto que esta inclusão significaria maior dificuldade para a rotina *minimax*.

Aplicando os métodos ao filtro elíptico de 5ª-ordem do Exemplo 4.3.4, a partir das estimativas iniciais apresentadas no exemplo, obtêm-se os resultados da otimização eqüiripple em linhas sólidas e da otimização *minimax* em linhas tracejadas na Fig. 5.16. Na Fig. 5.16(a) são mostradas as respostas equalizadas com de 1 a 5 seções passa-tudo de 2ª-ordem, mais uma vez mostrando que as rotinas possuem aproximadamente o

mesmo rendimento para estes casos, muito embora os resultados da otimização eqüiripple sejam mais próximos de respostas eqüiripple.



(a)

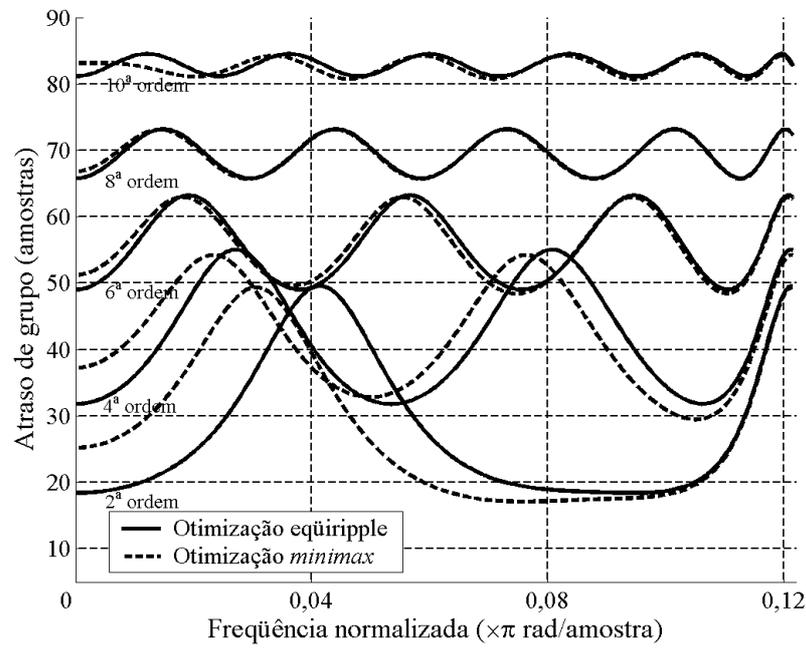


(b)

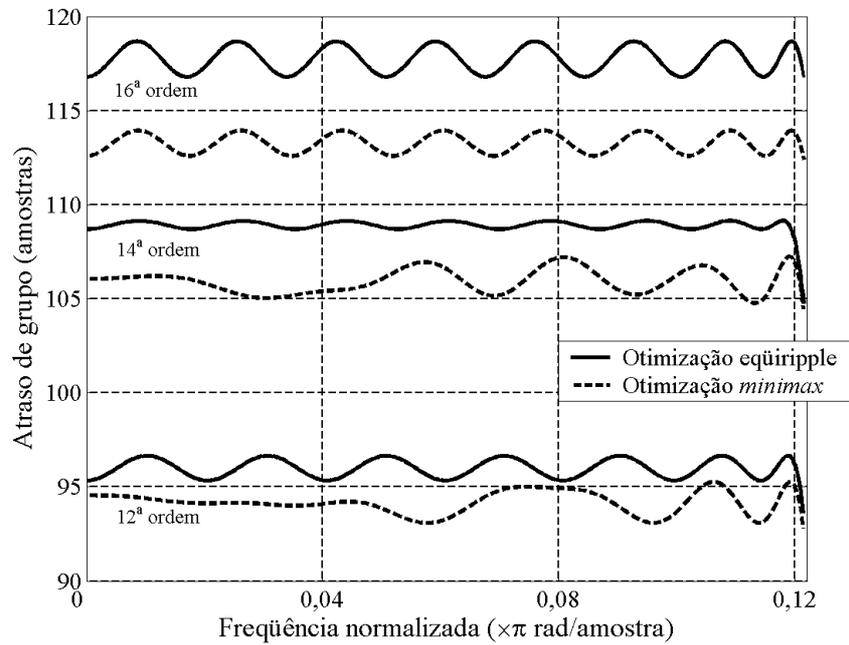
Figura 5.15: Equalização do filtro elíptico de 4ª-ordem do Exemplo 4.3.3, com otimização eqüiripple (linhas sólidas) e *minimax* (linhas tracejadas). Em (a), equalizações com de 1 a 4 seções passa-tudo de 2ª-ordem, e em (b) para 5 e 6 seções.

Na Fig.5.16(b) são apresentadas as respostas das equalizações de 12ª, 14ª e 16ª-ordens de ambas as rotinas. Como se pode notar, a rotina *minimax* foi incapaz de atingir a

solução ótima nos dois primeiros casos, mostrando a superioridade do novo procedimento. Para a equalização de 16ª-ordem, têm-se resultados semelhantes.



(a)



(b)

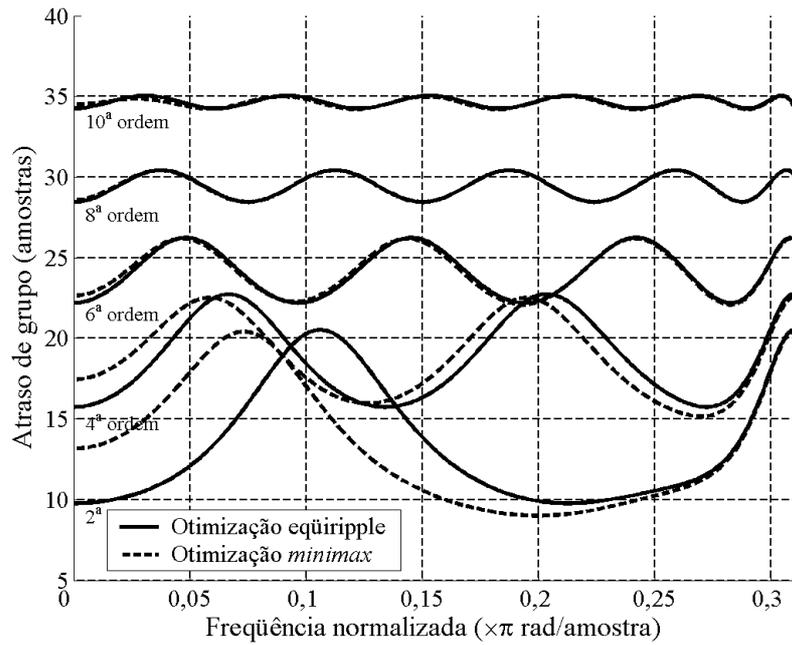
Figura 5.16: Equalização do filtro elíptico de 5ª-ordem do Exemplo 4.3.4, com otimização eqüiripple (linhas sólidas) e *minimax* (linhas tracejadas). Em (a), equalizações com de 1 a 5 seções passa-tudo de 2ª-ordem, e em (b) para 6 a 8 seções.

Apresentam-se, ainda, resultados para equalizações do filtro de Chebyshev de 7<sup>a</sup>-ordem com as estimativas iniciais geradas no Exemplo 4.3.5. Na Fig. 5.17(a), as respostas de ambos os procedimentos para de 1 a 5 seções passa-tudo de 2<sup>a</sup>-ordem mais uma vez indicam rendimentos parecidos. Entretanto, as respostas para equalizações com 6 e 7 seções passa-tudo na Fig. 5.17(b) indicam que a rotina *minimax* não obteve respostas equiripple.

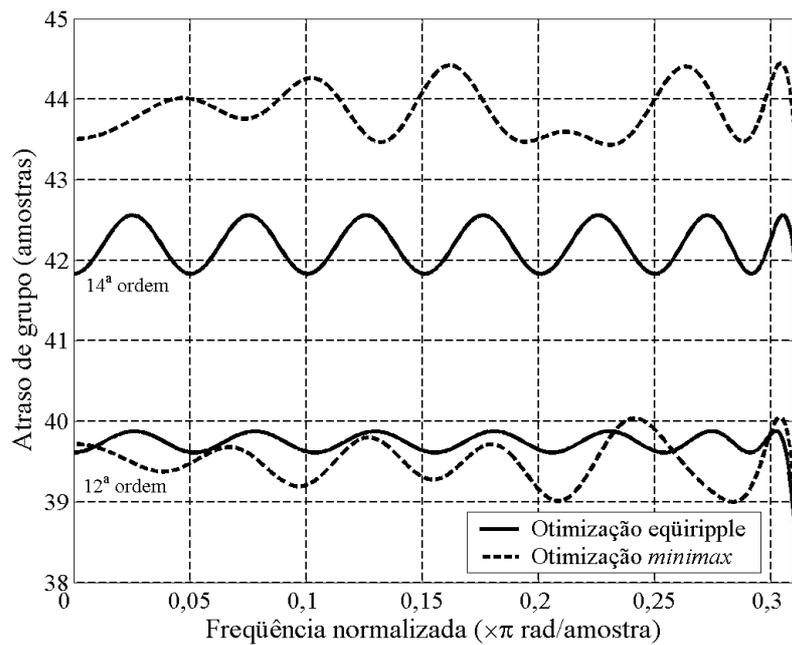
O filtro elíptico de 8<sup>a</sup>-ordem utilizado no Exemplo 2.1.1 apresentava especificações muito restritivas. Com isso, a resposta de atraso de grupo deste filtro apresenta elevada distorção, como apresentado em linha tracejada e pontilhada na Fig. 5.18, onde também são observadas as respostas equalizadas para 20 seções passa-tudo com a otimização equiripple em linha sólida e otimização *minimax* em linha tracejada. A resposta obtida com otimização equiripple apresenta variação final de 3,8 amostras enquanto a resposta da rotina *minimax* varia em 13,1 amostras, mostrando a superioridade do procedimento introduzido.

Os exemplos permitem concluir que o método proposto de equalização denominado otimização equiripple apresenta elevada eficiência, resultando em respostas de atraso de grupo equiripple na faixa de passagem, ou tolerando que uma pequena parcela desta banda seja não-equiripple, com a existência da cauda. As etapas de ajuste foram testadas e forneceram excelentes resultados. Verificou-se também o comportamento do procedimento utilizando as duas estratégias de alocação, obtendo resultados satisfatórios com ambas.

Deve-se mencionar, ainda, que em todos os exemplos considerados a rotina introduzida foi interrompida em respostas aparentemente próximas das ótimas, comprovando também a escolha acertada do critério de interrupção. Ao comparar o método ao procedimento que busca a solução no sentido *minimax*, verificou-se que enquanto este último não é capaz de obter soluções equiripple, a rotina de otimização equiripple apresentou excelentes resultados, inclusive para ordens superiores (40<sup>a</sup>-ordem) de equalização. Em alguns casos, resultados superiores aos obtidos pelas rotinas de otimização *minimax*, amplamente utilizadas para os projetos de equalizadores de atraso de grupo, foram obtidos.



(a)



(b)

Figura 5.17: Equalização do filtro de Chebyshev de 7ª-ordem do Exemplo 4.3.5, com otimização eqüiripple (linhas sólidas) e *minimax* (linhas tracejadas). Em (a), equalizações com de 1 a 5 seções passa-tudo de 2ª-ordem, e em (b) para 6 e 7 seções.

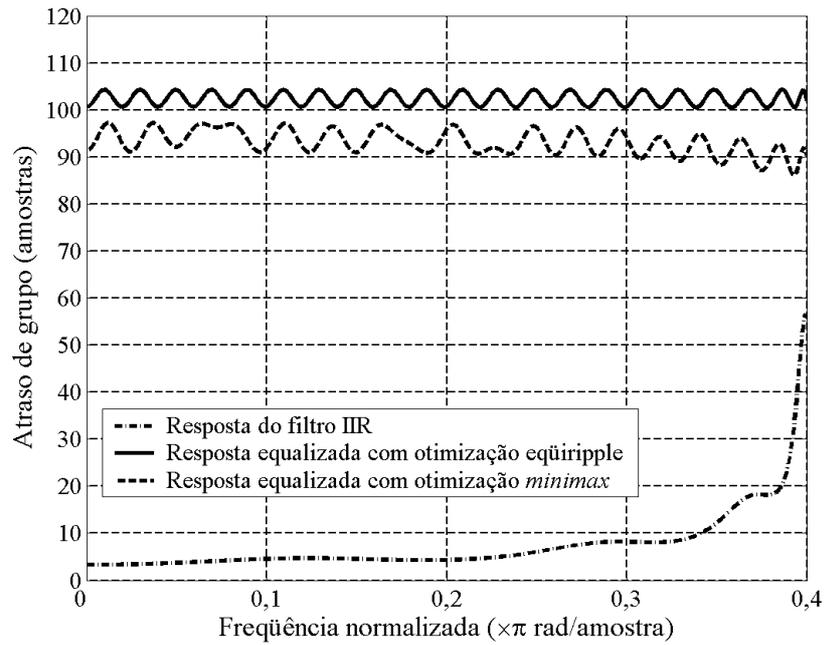


Figura 5.18: Equalização do filtro elíptico de 8ª-ordem do Exemplo 2.1.1 com 20 seções passa-tudo de 2ª-ordem, utilizando a otimização eqüiripple (linha sólida) e otimização *minimax* (linha tracejada). A resposta de atraso de grupo do filtro IIR é apresentada em linha tracejada e pontilhada.

# Capítulo 6

## Conclusões

### 6.1. Considerações sobre o Método

O problema da não-linearidade de fase foi amplamente abordado, apresentando as distorções introduzidas por esta característica de filtros IIR. Mostrou-se que resposta de fase não-linear causa diferentes atrasos a diferentes componentes de um sinal composto filtrado. Para imagens podem surgir efeitos de borda em regiões de alta frequência. Para sinais em geral formados por diversas componentes senoidais, como em sinais de telecomunicações, pode haver distorções do tipo interferência inter-simbólica (ISI), reduzindo a confiabilidade de sistemas com banda estreita.

Equalizadores de atraso de grupo formados por seções passa-tudo conectadas em cascata com o filtro IIR são uma alternativa viável para a redução dos efeitos gerados por filtros IIR com resposta de fase não linear. Porém, o projeto destes filtros não é uma tarefa trivial, exigindo a aplicação de métodos matemáticos, como por exemplo, rotinas de otimização que buscam geralmente pela solução no sentido *minimax*. Problemas inerentes a estes métodos de projeto foram apresentados.

Mínimos locais da função custo são um obstáculo frequentemente encontrado por rotinas de otimização. Uma forma de evitar soluções não ótimas é prover uma solução inicial cada vez mais próxima da provável solução ótima. Foram desenvolvidos mecanismos visando a facilitar o projeto dos equalizadores, como selecionar a estratégia de alocação ótima para o problema em questão. Com este intuito, foram apresentadas duas diferentes estratégias de alocação observadas nas soluções ótimas encontradas em sucessivos exemplos. A *Estratégia A* de alocação é utilizada para a maioria dos casos, enquanto que a *Estratégia B*, dividida nos *Estágios 1 e 2*, é utilizada, em geral, para ordens superiores de equalização, evitando o surgimento da cauda no final da banda passante.

A cauda é uma imperfeição que ocorre geralmente para filtros de banda estreita e à medida que se aumenta a ordem do equalizador. Quando ocorre, a cauda faz com que

a resposta não seja mais equiripple em toda faixa de passagem do filtro, submetendo uma parte das componentes do sinal, na extremidade da banda, a atrasos inferiores à maioria das componentes. Foi introduzida uma tolerância para a ocorrência desta imperfeição e um método para contorná-la no *Estágio 2 da Estratégia B*.

A estimativa inicial é também um importante passo para rotinas de otimização no sentido de evitar que o procedimento seja interrompido num mínimo local. Foram apresentados dois diferentes métodos de estimativa inicial, um utilizando redes neurais *feedforward* e outro gráfico, baseado em trabalhos anteriores. Este segundo método utiliza a escolha satisfatória para as fases dos pólos do equalizador apresentada em [15] com o procedimento de obtenção gráfica dos módulos dos pólos do equalizador, descrito em [3]. Ambos os métodos introduzidos apresentam excelentes resultados, que aplicados às rotinas de otimização facilitam a obtenção da resposta ótima, aumentando, portanto, a robustez e a velocidade do projeto de equalizadores.

Na tentativa de aperfeiçoar este último método de solução inicial, chegou-se a um novo procedimento de otimização da alocação dos pólos e zeros do filtro equalizador. A princípio vislumbrado para funcionar como estimativa inicial, este procedimento pode substituir rotinas de otimização *minimax* convencionais, fornecendo resultados tão bons quanto, e em alguns casos até superiores. Este método foi denominado de otimização equiripple por buscar exclusivamente a resposta equiripple do atraso de grupo. Resultados comprovando a eficácia das etapas de ajustes do método foram apresentados. A otimização introduzida foi aplicada a diferentes filtros IIR, obtendo-se resultados satisfatórios para diferentes ordens de equalização, inclusive para equalizadores de 40<sup>a</sup>-ordem, ou seja, para o ajuste de quarenta parâmetros de otimização.

## 6.2. Trabalhos Futuros

O método de equalização da resposta de atraso de grupo utilizando filtros passa-tudo conectados em cascata com o filtro IIR apresenta resultados satisfatórios, evitando as dificuldades mencionadas na Seção 2.1. Para evitar os problemas resultantes da não-linearidade de fase pode-se ainda lançar mão da equalização da resposta de fase, aproximando-a de uma reta. Entretanto, para isto dever-se-ia estimar uma inclinação conveniente para a resposta final, ou então incluí-la como mais um parâmetro de

otimização, o que aumentaria a complexidade do projeto. Esta, portanto, não é uma escolha conveniente.

A resposta de atraso de fase, como foi definida na Eq.(1.1.2), também pode ser utilizada para a aproximação. Isto porque, quando a resposta de fase é linear, o atraso de fase será uma constante, assim como a resposta de atraso de grupo. Sabe-se também que, quando a resposta de atraso de grupo aproxima-se de um valor constante, o atraso de fase também se aproxima de uma constante, e vice-versa.

Então, propõe-se uma comparação de procedimentos para a equalização de ambas as respostas mencionadas acima, verificando o caso em que a resposta de fase resultante mais se aproxima de uma reta. Dever-se-ia verificar também se os métodos desenvolvidos para uma equalização são igualmente aplicáveis à outra, e vice-versa. Além disso, propõe-se ainda a avaliação do rendimento dos processos, e qual deles reduz mais significativamente as distorções introduzidas no sinal pelo filtro IIR.

Explorando o trabalho desenvolvido nesta pesquisa para a equalização da resposta de atraso de grupo, poder-se-ia investigar a existência de outros dados com relevância suficiente para serem utilizados na síntese de redes neurais para a estimativa inicial dos parâmetros de otimização. Desta forma, estar-se-ia buscando prover a solução ótima de forma mais rápida e evitando ainda mais a incidência de mínimos locais nos resultados das rotinas de otimização. A utilização de outras estruturas de redes neurais que não as consideradas neste trabalho pode ser testada. Podem-se ainda gerar dados suficientes para o treinamento de redes neurais para ordens superiores de equalização, diminuindo, com isso, uma das desvantagens deste método de estimativa.

Outros métodos de inteligência artificial como algoritmos genéticos, que já foram testados sem sucesso até então, poderiam ser explorados, tentando passar às estruturas utilizadas conhecimentos obtidos através de sucessivas simulações.

# Referências

- [1] G. Szentirmai, “The problem of phase equalization”, *IRE Trans. On Circ. Theory*, vol. 6, issue 3, pp. 272-277, Setembro 1959.
- [2] R. W. Daniels, “Approximation methods for electronic Filter Design”, McGraw-Hill, 1974.
- [3] K. Umino, J. Andersen e R.G. Hove, “A novel IIR filter delay equalizer design approach using a personal computer”, *IEEE Int. Symp. On Circ. Syst.*, vol. 1, pp. 137-140, Maio 1990.
- [4] V. Hegde, S. Pai, W.K. Jenkins e T.B. Wilborn, “Genetic algorithms for adaptive phase equalization of minimum phase SAW filters,” *Thirty-Fourth Asilomar Conf. on Sig., Syst. and Comp.*, vol. 2, pp. 1649-1652, Outubro 2000.
- [5] B. Farhang-Boroujeny e S. Nooshfar, “Adaptive phase equalization using allpass filters,” *IEEE Int. Conf. on Comm.*, vol.3, pp. 1403-1407, Junho 1991.
- [6] H. Baher e M. O’Malley, “FIR transfer functions with arbitrary amplitude and phase, with application to the design of quasi-allpass delay equalizers,” *IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst.*, vol.3, pp. 2489-2491, Junho 1988.
- [7] P.A. Regalia, S.K. Mitra e P.P. Vaidyanathan, “The digital allpass filter: A Versatile Signal Processing Building Block,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 76, no. 1, Janeiro 1988.
- [8] A.G. Deczky, “Equiripple and minimax (Chebyshev) approximations for recursive digital filters,” *IEEE Trans. Acoust., Speech Sig. Proc.*, vol. ASSP-22, pp. 98-111, 1974.
- [9] T. Inukai, “A unified approach to optimal recursive digital filter design,” *IEEE Trans. on Circ. and Syst.*, vol. CAS-27, no. 7, pp. 646-649, Julho 1980.
- [10] Antoniou, *Digital Filters: Analysis, Design and Applications*, McGraw-Hill, 1993.
- [11] M. Lang e T.I. Laakso, “Simple and robust method for the design of allpass filters using least-squares phase error criterion,” *IEEE Trans. on Circ. and Syst.-II: Analog and Dig. Sig. Proc.*, vol. 41, no. 1, pp. 40-48, Janeiro 1994.
- [12] H.W. Schuessler e P. Steffen, “On the design of allpasses with prescribed group delay,” *Int. Conf. on Acoust., Speech Sig. Proc.*, pp. 1313-1316, 1990.

- [13] P. Bernhardt, "Simplified design of high-order recursive group-delay filters," *IEEE trans. Acoust., Speech Sig. Proc.*, vol. ASSP-28, no. 25, pp. 498-503, Outubro 1980.
- [14] K. Summa-Aho e T. Saramäki, "A systematic technique for designing approximately linear phase recursive digital filters", *IEEE trans. on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 46, issue 7, pp. 956-963, Jul. 1999.
- [15] M.F. Quélhas, *Equalização do Atraso de Grupo e Estimativa de Consumo de Filtros Discretos no Tempo*, Dept. de Engenharia Eletrônica e Computação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Projeto Final, Março 2003.
- [16] M. F. Quélhas, A. Petraglia e M. R. Petraglia, "Efficient group delay equalization of discrete-time IIR filters", *European Signal Processing Conference*, 2004.
- [17] S. Haykin, *Redes Neurais: Princípios e Práticas*, Bookman, 2001.
- [18] L. Armijo, "Minimization of functions having continuous Partial Derivatives", *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 16, no. 3, pp. 1-3, 1966.
- [19] E. Polak, *Computational Methods in Optimization: A Unified Approach*, Academic Press, New York, NY, 1971.