

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
COPPE - COORDENAÇÃO DE PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA

*REJEIÇÃO DE DISTÚRBIOS EM
SISTEMAS LINEARES POR
REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA*



Rio de Janeiro, RJ - Brasil

março de 2004

REJEIÇÃO DE DISTÚRBIOS EM SISTEMAS LINEARES POR
REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA

Simone Ribeiro Matos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, D.Sc.

Prof. Gilberto Oliveira Correa, Ph.D.

Prof. João Carlos dos Santos Basilio, D. Phil.

Prof. Roosevelt José Dias, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2004

RIBEIRO MATOS, SIMONE

Rejeição de Distúrbios em Sistemas
Lineares Por Realimentação Estática de
Saída [Rio de Janeiro] 2004

X, 87p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Elétrica, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Rejeição de Distúrbios

2. Sistemas Lineares

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À minha família
Elvino, Maria
Ricardo, Monica e Inês,
com amor...

Agradecimentos

"O que vale na vida não é o ponto de partida e sim a caminhada.

Caminhando e semeando, no fim terás o que colher."

Cora Coralina

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus por ter me dado forças para vencer as dificuldades, contratempos e situações inesperadas que surgiram no início e ao longo desta caminhada.

A minha família por todo apoio, carinho e confiança durante a realização deste trabalho que, sem seu estímulo, seria muito difícil concluí-lo.

Ao professor Afonso Celso não só pelas suas valiosas contribuições na elaboração deste trabalho, mas também pela sua amizade e principalmente pelas palavras de incentivo e confiança nas horas mais difíceis.

Aos professores Gilberto, João Carlos Basilio e Roosevelt quero agradecer a atenção dispensada, onde as contribuições e críticas apresentadas foram fundamentais para o enriquecimento deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

REJEIÇÃO DE DISTÚBIOS EM SISTEMAS LINEARES POR REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA

Simone Ribeiro Matos

Março/2004

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Programa: Engenharia Elétrica

O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) vem sendo exaustivamente investigado durante as últimas quatro décadas. A solução teórica deste problema é um excelente exemplo ilustrativo da aplicação de alguns conceitos fundamentais do chamado enfoque geométrico para sistemas de controle lineares, tais como os subespaços (A,B)-invariantes. As condições de existência de soluções para este problema foram primeiramente estabelecidas em termos da existência de um subespaço invariante e, mais tarde, foram dadas em função de matrizes de transferência.

O problema consiste em encontrar um compensador estático tal que a função de transferência do sistema em malha fechada que relaciona a entrada de distúrbio com a saída controlada seja nula para todas as frequências. Em muitas situações práticas, a realimentação completa de estados não é possível, o que induz à formulação do Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação de Saída (DDPM) ou ao Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM).

Em particular, pouca atenção foi dada até o momento para o DDPKM. Suas condições de solubilidade já foram estabelecidas no enfoque geométrico em termos da existência de um subespaço que possui algumas propriedades especiais. Entretanto, a existência deste subespaço, no caso geral, é muito difícil de ser verificada e, na literatura, não existe nenhum método numérico para calcular este subespaço.

O objetivo deste trabalho é investigar as condições necessárias e suficientes de soluções para o DDPKM baseadas em matrizes de transferência.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DISTURBANCE REJECTION IN LINEAR SYSTEMS BY STATIC MEASUREMENT FEEDBACK

Simone Ribeiro Matos

March/2004

Advisor: Afonso Celso Del Nero Gomes

Department: Electrical Engeneering

The Disturbance Decoupling Problem (DDP) has been extensively investigated during the last four decades. The theoretical solution of this problem is an excellent illustrative example of application of some fundamental concepts of the so-called geometric approach for linear control systems, such as (A,B) -invariant subspaces. Its solvability conditions were firstly established in terms of the existence of an invariant subspace and, after that, given in terms of transfer matrices.

The problem is to find either a static or dynamic compensator such that the resulting closed-loop transfer matrix function from the disturbance to the controlled output is equal to zero for all frequencies. In many practical situations, full state information is not available, which induces the formulation of the Disturbance Decoupling Problem by Measurement Feedback (DDPM) or the Disturbance Decoupling Problem by Static Measurement Feedback (DDPKM).

In particular, little attention has been given to the DDPKM. Its solvability conditions were already established in terms of the existence of a subspace with some special properties. However, in the general case, it is very difficult to determine whether such a subspace exist or not. A numerical method to calculate this subspace is not known in the literature.

The goal of this work is to investigate the necessary and sufficient solvability conditions for the DDPKM based on transfer matrices.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Problemas de Rejeição de Distúrbios	1
1.2	Uma Equação Importante	3
1.3	Rejeição de Distúrbios e Desacoplamento	6
1.4	Rejeição de Distúrbios Usando a Saída	7
1.5	Estrutura da Tese	10
2	Rejeição de Distúrbios em Sistemas Lineares	11
2.1	Introdução	11
2.2	Enfoque Geométrico	12
2.2.1	Condições de existência de soluções para o DDP	13
2.2.2	Condições de existência de soluções para o DDPS	21
2.3	Aspectos Estruturais do DDP	22
2.4	Enfoque Freqüencial	27
2.4.1	Soluções para o DDP	27
2.4.2	Soluções para o DDPS	30
2.5	A Equação $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$	31
2.6	Conclusão	35
3	DDPKM - Enfoque Geométrico	36
3.1	Introdução	36
3.2	Enfoque Geométrico	38
3.2.1	Conceitos preliminares	38
3.2.2	Condições de existência de soluções para o DDPKM	39
3.2.3	Condições para duas classes específicas de sistemas	40

3.3	Conclusão	49
4	DDPKM - Aspectos Estruturais e Freqüenciais	50
4.1	Introdução	50
4.2	Aspectos Estruturais do DDPKM	50
4.3	Enfoque Freqüencial	55
4.3.1	Outras condições de existência de soluções para o DDPKM	66
4.4	Conclusão	72
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	73
	Bibliografia	80

Lista de Símbolos

Símbolos Matemáticos

$\forall$	para todo
$\in$	pertence a
$\triangleq$	por definição
$\subset$	contido em
$\subseteq$	contido em ou igual a
$\supset$	contendo
$\dim$	dimensão
$f(\cdot)$	uma função do tempo
$f^i(\cdot)$	a derivada i -ésima da função $f(\cdot)$
$f(t)$	o valor da função $f(\cdot)$ no instante t
F_{ij}	elemento da linha i e coluna j da matriz F
$A^\dagger$	pseudo-inversa da matriz A (A não é quadrada ou é singular)
$\mathcal{B}$	a imagem de B
$\mathcal{C}$	espaço nulo à direita da matriz C
$\mathcal{E}$	imagem de E
$\mathcal{K}$	espaço nulo à direita da matriz D
$\mathcal{R}$	conjunto dos números reais
$\mathcal{R}^*$	subespaço maximal único de controlabilidade contido em $\mathcal{K}$
$\mathcal{R}^n$	espaço vetorial de n dimensões no campo dos reais
$\mathcal{S}_*$	subespaço ínfimo único (A, B) -invariante contendo $\mathcal{E}$
$\mathcal{V}$	subespaço (A, B) -invariante contido em $\mathcal{K}$
$\mathcal{V}^*$	subespaço maximal único (A, B) -invariante contido em $\mathcal{K}$
$\mathcal{V}_g^*$	subespaço maximal único (A, B) -invariante contido em $\mathcal{K}$ estabilizante

Controle

F	matriz de realimentação de estados
$G_z(s)$	matriz de transferência no domínio de Laplace que relaciona a entrada de controle e a saída controlada
$H_z(s)$	matriz de transferência no domínio de Laplace que relaciona a entrada de distúrbios e a saída controlada
$G_y(s)$	matriz de transferência no domínio de Laplace que relaciona a entrada de controle e a saída medida
$H_y(s)$	matriz de transferência no domínio de Laplace que relaciona a entrada de distúrbio e a saída medida

K	matriz de realimentação estática de saída
$q(t)$	vetor de distúrbios
$\hat{q}(s)$	transformada de Laplace de $q(t)$
$u(t)$	vetor de entradas
$\hat{u}(s)$	transformada de Laplace de $u(t)$
$x(t)$	vetor de estados
$\hat{x}(s)$	transformada de Laplace de $x(t)$
$X(s)$	matriz de transferência no domínio de Laplace solução da equação matricial $G(s)X(s) = H(s)$
$y(t)$	vetor de saídas medidas
$\hat{y}(s)$	transformada de Laplace de $y(t)$
$z(t)$	vetor de saídas controladas
$\hat{z}(s)$	transformada de Laplace de $z(t)$

Siglas

DDP	Problema de Rejeição de Distúrbios (Disturbance Decoupling Problem)
DDPKM	Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (Disturbance Decoupling Problem by Static Measurement Feedback)
DDPKMS	Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída com Estabilidade (Disturbance Decoupling Problem by Static Measurement Feedback with Stability)
DDPM	Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação de Saída (Disturbance Decoupling Problem by Measurement Feedback)
DDPMS	Problema de Rejeição de Distúrbios com Realimentação da Saída com Estabilidade Interna (Disturbance Decoupling Problem by Measurement Feedback with Stability)
DDPPP	Problema de Rejeição de Distúrbios com Alocação de Pólos (Disturbance Decoupling Problem with Pole Placement)
DDPS	Problema de Rejeição de Distúrbios com Estabilidade (Disturbance Decoupling Problem with Stability)

Capítulo 1

Introdução

1.1 Problemas de Rejeição de Distúrbios

O Problema de Rejeição de Distúrbios vem sendo exaustivamente estudado nas últimas três décadas, sendo pesquisado para diversos tipos de sistemas, como os lineares, não-lineares e discretos. A solução teórica deste problema constitui um excelente exemplo ilustrativo da aplicação dos conceitos fundamentais da abordagem geométrica para o controle de sistemas lineares, como dos subespaços (A, B) -invariantes. Por isso, muitos o consideram como o ponto de partida para o desenvolvimento da análise geométrica para a teoria de sistemas.

Aplicando os conceitos de invariância, a solução teórica do Problema de Rejeição de Distúrbios por realimentação completa de estados (DDP, do inglês *Disturbance Decoupling Problem*) foi resolvido por BASILE E MARRO (1968) [3] e WONHAM E MORSE (1970) [58]. O problema consiste em se obter uma lei de controle $u(t) = Fx(t)$ tal que a matriz de transferência em malha fechada que relaciona o distúrbio à saída controlada seja zero para todas as frequências ou, em outras palavras, a saída controlada não sofrerá qualquer efeito do distúrbio aplicado. Para um sistema representado por

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $q \in \mathbb{R}^d$ é o vetor de entradas de distúrbios e $z \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas a serem controladas. A solução do DDP, sob o enfoque geométrico, é geralmente baseada no cálculo de $\mathcal{V}^*$, o subespaço maximal único (A, B) -invariante contido no espaço nulo à direita de D .

Já o Problema de Rejeição de Distúrbio com Realimentação Estática e Estabilidade (DDPS, do inglês *Disturbance Decoupling Problem with Stability*) foi solucionado por WONHAM E MORSE (1970) [58]. O objetivo do DDPS é encontrar uma lei de controle $u(t) = Fx(t)$ que elimina o efeito de todos os possíveis distúrbios $q(t)$ na saída $z(t)$ e também estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada. A solução do DDPS é dependente do cálculo de $\mathcal{V}_g^*$, o subespaço maximal único (A, B) -invariante contido no espaço nulo à direita de D e que estabiliza o sistema realimentado.

Se, além da estabilidade, uma alocação arbitrária de pólos é desejada, o Problema de Rejeição de Distúrbios com Alocação de Pólos (DDPPP, do inglês *Disturbance Decoupling Problem with Pole Placement*) pode ser definido.

De maneira resumida, pode-se colocar esses três problemas da seguinte forma. Para o sistema representado em (1.1), seja $\mathcal{K} = \ker(D)$ e $\mathcal{E} = \text{Im}(E)$ o subespaço nulo à direita de D e a imagem de E , respectivamente. As condições necessárias e suficientes para solução do DDP, DDPS e DDPPP são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{DDP:} \quad & \mathcal{E} \in \mathcal{V}^* \\ \text{DDPS:} \quad & \mathcal{E} \in \mathcal{V}_g^* \text{ e } (A, B) \text{ é estabilizável} \\ \text{DDPPP:} \quad & \mathcal{E} \in \mathcal{R}^* \text{ e } (A, B) \text{ é controlável} \end{aligned}$$

onde $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{V}_g^*$ e $\mathcal{R}^*$ são o subespaço maximal único (A, B) -invariante, o subespaço maximal único (A, B) -invariante estabilizante e o subespaço maximal único de controlabilidade, respectivamente, contidos em $\mathcal{K}$, o espaço nulo à direita de D .

LINNERMAN (1987) [35] apresentou um método eficiente e seguro para calcular $\mathcal{R}^*$, o subespaço maximal único controlável contido no subespaço nulo à direita de D , assim como uma expressão para o conjunto de todos os controladores relacionados. Se esta condição não for satisfeita, o cálculo de $\mathcal{V}_g^*$ e o conjunto relacionado de matrizes de realimentação é obrigatório.

A solução do DDP, quando existente, não é única. Um problema interessante é o de parametrizar o conjunto de todos os controladores que solucionam o DDP. Alguns trabalhos encontrados na literatura conseguiram, no entanto, resolvê-lo para alguns tipos de sistema. Como exemplo, pode-se citar DÓREA E MILANI (1997) [21], onde foram obtidas a solução completa e a parametrização de todos os controladores que resolvem o DDP para uma classe particular de sistemas, onde se incluem os sistemas inversíveis à esquerda. Em PARASKEVOPOULOS, KOUMBOLIS E TZIERAKIS (1992) [44] foi apresentado um método para rejeição de distúrbios em sistemas inversíveis à esquerda via realimentação estática proporcional, onde condições necessárias e suficientes são estabelecidas na forma de um critério algébrico simples e as expressões analíticas gerais de todas as soluções para as matrizes de controle são derivadas, sendo as soluções parametrizadas por uma única matriz arbitrária.

1.2 Uma Equação Importante

As condições de solução de muitos problemas em sistemas lineares multivariáveis está associada com a existência de soluções para a equação matricial $G(s)X(s) = H(s)$, onde $G(s)$ e $H(s)$ são matrizes racionais próprias conhecidas, enquanto $X(s)$, racional própria, é a incognita.

Como exemplo, o DDP pode ser estudado a partir das matrizes de transferência que relacionam a entrada de controle e a entrada de distúrbios com a saída do

sistema, $G_z(s)$ ($p \times m$) e $H_z(s)$ ($p \times q$), respectivamente, dadas por

$$G_z(s) = D(sI - A)^{-1}B \quad (1.2)$$

$$H_z(s) = D(sI - A)^{-1}E. \quad (1.3)$$

Como se verá adiante, a solução do DDP não mais está relacionado com a existência de um subespaço invariante e sim com a existência de uma matriz racional estritamente própria $X(s)$ ($m \times q$) tal que a expressão

$$G_z(s)X(s) = H_z(s) \quad (1.4)$$

seja verdadeira.

A equação $G(s)X(s) = H(s)$ já foi largamente estudada. MORSE (1974) [42] estudou esta equação e a sua relação com o Problema de Adaptação de Modelos, sendo este problema formulado pela primeira vez por Wolovich no início da década de 70. WANG E DAVISON (1973) [53] consideraram o problema de encontrar uma solução $X(s)$ própria e de ordem mínima e indicaram como um determinado procedimento poderia ser usado para encontrar inversas de ordem mínima para um dado sistema. FORNEY (1975) [24] e DEL NERO GOMES E NORONHA (1990) [18] asseguraram, respectivamente, a existência de soluções próprias e estritamente próprias para a equação (1.4) através das bases mínimas. WOLOVICH (1974) [55] mostrou a conexão da equação (1.4) com o Problema de Adaptação Exata de Modelos e como encontrar uma solução para esta equação, quando ela existe, para o caso particular em que $p \geq m$ (o problema não tem solução ou tem uma única solução que pode ser facilmente encontrada). Além disso, WOLOVICH E FALB (1976) [56] apresentam uma condição necessária e suficiente para a existência de solução própria no caso em que $p \leq m$ e $p \geq q$, utilizando o *interactor*¹ de uma matriz racional própria $G(s)$. HAUTUS (1980) [27] mostrou que a solução do Problema de Rejeição de Distúr-

¹O *interactor* será detalhado no capítulo 2.

bios também está relacionada com a solução da equação (1.4). VARDULAKIS (1984) [49] expressou esta equação como uma equação diofantina $G_1X_1 + G_2X_2 = H$ e comparou sua solução com a de WOLOVICH (1974) [55]. Em BHATTACHARYYA, DEL NERO GOMES E HOWZE (1983) [5], a equação aparece novamente e, após uma parametrização de suas soluções, alguns aspectos importantes sobre a robustez do DDP puderam ser atacados. Em MITA (1976) [41] foram mostradas condições necessárias e suficientes para o DDP para sistemas com entradas, saídas e distúrbios escalares baseadas no enfoque freqüencial, sendo este resultado estendido por BHATTACHARYYA (1980) [6] para o caso em que apenas a saída é escalar.

O problema da estabilidade das soluções $X(s)$ para a equação (1.4) já foi tratado na literatura por VARDULAKIS E KARCANIAS (1985) [51] que investigaram o problema de soluções próprias e estáveis através de uma fatoração. Outro a tratar do assunto foi PERNEBO (1981) [45] que, além de mostrar as condições para a existência de soluções próprias e estáveis, forneceu uma forma de encontrar tais soluções e uma parametrização delas. Em Pernebo e em Vardulakis e Karcianas, as soluções foram encontradas através da utilização das chamadas *Structure Matrices*. O resultado de Pernebo possui um inconveniente mapeamento entre determinadas regiões do plano complexo. Os resultados de Vardulakis e Karcianas necessitam da forma de Smith-McMillan no infinito que, para ser calculada, é bastante trabalhosa. Já em BANDEIRA (1992) [1] foi proposto um método simples para verificação da natureza das soluções $X(s)$ para $p \leq m$, ou seja, se para um determinado sistema é possível encontrar uma solução $X(s)$ para a equação (1.4) própria, imprópria ou estritamente própria, assim como soluções estáveis ou não. Além disso, também em [1], outro objetivo foi a obtenção de uma lei de controle $u(t) = Fx(t)$ que soluciona o DDP a partir da solução $X(s)$.

1.3 Rejeição de Distúrbios e Desacoplamento

Quando existente, a solução do DDP consome somente parte da “capacidade de controle” da matriz de realimentação de estados, permitindo o uso da capacidade remanescente para alcançar objetivos de controle complementares. E é isto que normalmente acontece em muitas situações práticas. A rejeição de distúrbios não é o único objetivo de controle. Frequentemente, se adicionam outros objetivos ao sistema de controle, tais como desacoplamento ou alocação de pólos.

Neste contexto, o Problema de Rejeição de Distúrbios e o Problema de Desacoplamento têm um grande interesse na teoria de controle e ainda continuam sendo bastante pesquisados. Para cada problema em separado foi mostrado (veja WONHAM E MORSE (1970) [58], GRIZZLE E ISIDORI (1989) [25], KOUSSIOURIS (1980) [32] e ICART, LAFAY E MALABRE (1990) [28] para o Problema de Desacoplamento e MALABRE, MARTÍNEZ-GARCÍA E DEL-MURO-CUELAR (1997) [39] para o DDP) que existem pólos fixos que aparecem em um sistema em malha fechada após aplicação de uma realimentação de estados completa para solução do problema. Este problema é denominado de Problema de Modos Fixos e foi completamente caracterizado em termos geométricos por MALABRE E MARTÍNEZ-GARCÍA (1995) [38], enquanto uma caracterização polinomial foi obtida por KOUSSIOURIS E TZIERAKIS (1995) [34]. Uma vez que os pólos não-fixos em malha fechada podem ser explorados de forma a se obter desempenhos complementares do sistema realimentado, o Problema de Pólos Fixos dentro do Problema de Rejeição de Distúrbios caracteriza os graus de liberdade disponíveis quando a alocação dos pólos é considerada. Em LOPEZLENA ESTRADA E MARTÍNEZ-GARCÍA (1999) [36] é dada uma caracterização algébrica da família de realimentação estática de estados que rejeita o distúrbio em sistemas lineares invariantes no tempo e que causam o conjunto mínimo de pólos fixos em malha fechada (supondo que o sistema é controlável), enquanto assegura

também o máximo de graus livres em termo de alocação de pólos.

Alguns trabalhos consideram o Problema de Rejeição de Distúrbios juntamente com o Problema de Desacoplamento por Realimentação Completa de Estados. CHANG E RHODES (1975) [10] apresentaram as condições necessárias e suficientes de solução deste problema, mostrando ser equivalente à solução de cada problema separadamente. A caracterização algébrica e estrutural para a solução de pólos fixos para este problema simultâneo foi dada por KOUSSIOURIS E TZIERAKIS (1986) [33] utilizando uma aproximação no domínio da frequência no caso onde as saídas são escalares-particionadas (*scalar-partitioned*). Em CAMART, MALABRE E MARTÍNEZ-GARCÍA (2001) [9] há uma caracterização alternativa para este problema, baseada no enfoque geométrico, assim como um outro procedimento para o posicionamento dos pólos livres remanescentes.

1.4 Rejeição de Distúrbios Usando a Saída

Quando o vetor de estados não está disponível para medição, deve-se estudar o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação de Saída (DDPM, do inglês *Disturbance Decoupling Problem by Measurement Feedback*). Este problema consiste em se calcular um controlador por realimentação dinâmica da saída medida tal que a função de transferência dos distúrbios para a saída controlada seja igual a zero. O DDPM foi solucionado por WILLEMS E COMMAULT (1981) [54] e SCHUMACHER (1980) [46]. Também em DÓREA E MILANI (1997) [21] a solução do DDPM é discutida e, baseado nos resultados obtidos para o DDP, um método para o projeto de um compensador de ordem-reduzida é proposto. Já o Problema de Rejeição de Distúrbio com Realimentação da Saída e com Estabilidade (DDPMS, do inglês *Disturbance Decoupling Problem by Measurement Feedback with Stability*) foi resolvido por IMAI E AKASHI (1981) [29] e WILLEMS E COMMAULT (1981) [54].

Finalmente, pouca atenção foi dada até o momento a um problema de formulação mais simples: o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM, do inglês *Disturbance Decoupling Problem by Static Measurement Feedback*). Para o DDPKM há alguns poucos resultados na literatura.

A formulação do DDPKM é bastante simples. Seja o sistema linear multivariável invariante no tempo descrito por:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad , \quad t \geq 0 \quad (1.5)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $q \in \mathbb{R}^d$ é o vetor de entradas de distúrbios, $y \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de saídas medidas e $z \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas a serem controladas. O objetivo de DDPKM é encontrar, se possível, uma lei de controle por realimentação estática de saída,

$$u(t) = Ky(t), \quad (1.6)$$

tal que a matriz de transferência de distúrbio $q(t)$ para a saída controlada $z(t)$ seja nula.

Inicialmente, as condições de existência de soluções para o DDPKM foram estabelecidas por HAMANO E FURUTA (1975) [26] e SCHUMACHER (1980) [46]. Hamano e Furuta formularam o problema a partir da obtenção de subespaço geométrico que goza de determinadas propriedades. Entretanto, no caso geral, é bastante difícil verificar a existência deste subespaço.

Recentemente CHEN (1997) [11] propôs uma solução para o DDPKM para uma determinada classe de sistemas multivariáveis lineares e invariantes no tempo. Este método caracterizou todas as possíveis soluções do DDPKM para uma classe de sistemas que têm função de transferência, que relaciona a entrada controlada

com a saída controlada, inversível à esquerda. Porém este método, além de restrito a uma pequena classe de sistemas, só pode ser aplicado se inicialmente o sistema for representado em uma base de coordenadas especial na qual o DDPKM terá solução se e somente se uma submatriz específica é nula. Um resultado similar também foi proposto por KOUMBOULIS E TZIERAKIS (1998) [31]. Em CHEN, MAREELS, ZHENG E ZHANG (2000) [12] foi feita uma caracterização de todas as soluções para o DDPKM para uma classe de sistemas lineares por um conjunto de equações lineares. Isto resolve a dificuldade em solucionar as equações não-lineares associadas ao DDPKM.

Já em DÓREA E MILANI (2003) [23] os resultados propostos por CHEN (1997) [11] relativos ao DDPKM são estendidos considerando-se um conjunto mais abrangente de sistemas. Condições necessárias e suficientes para a existência de soluções em duas importantes famílias de sistemas são estabelecidas. O problema tem solução se e somente se um determinado subespaço goza de uma propriedade de invariância. O conjunto de matrizes de realimentação de saída que resolvem o problema é, então, parametrizado através de uma mudança adequada da base de representação dos espaços de estado, controle e saída.

Há ainda várias outras derivações do Problema de Rejeição de Distúrbios para diversos tipos de sistemas e aplicações, onde se encontra diverso material na literatura. Por estes sistemas fugirem do escopo deste trabalho, não serão abordados aqui.

Com base no enfoque freqüencial ainda não se encontra na literatura especializada as condições necessárias e suficientes para a solução do DDPKM.

1.5 Estrutura da Tese

O objetivo principal deste trabalho é mostrar as condições necessárias e suficientes de solução para o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM) baseadas no enfoque freqüencial para sistemas lineares multi-variáveis invariantes no tempo.

Para isto, a tese está estruturada da seguinte forma.

No capítulo 2 será feita uma breve revisão do Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) com realimentação completa de estados, abordando tanto a sua caracterização no enfoque geométrico como no enfoque freqüencial.

Já o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM), objeto principal de estudo deste trabalho, será abordado nos capítulos 3 e 4. No capítulo 3 será considerada a solução baseada no enfoque geométrico para o DDPKM, solução esta que se encontra na literatura especializada. No capítulo 4 será desenvolvida uma nova formulação para o DDPKM baseada no enfoque freqüencial, assim como será mostrada a visão estrutural deste problema.

Para finalizar, no capítulo 5 encontram-se as conclusões alcançadas e possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Rejeição de Distúrbios em Sistemas Lineares

2.1 Introdução

O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) é um importante tópico da Teoria de Sistemas de Controle Linear Multivariável, sendo intensamente estudado há mais de três décadas.

A formulação deste problema é bastante simples. Seja um sistema $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

cujo comportamento é afetado não apenas por uma entrada de controle $u(t)$, mas também por uma entrada de distúrbios $q(t)$. O objetivo é controlar o sistema por meio de uma realimentação de estados

$$u(t) = Fx(t)$$

de tal forma que, no sistema em malha fechada, os distúrbios, quaisquer que sejam eles, não afetem a saída $z(t)$. A figura 2.1 fornece uma visão simples do problema aqui tratado.

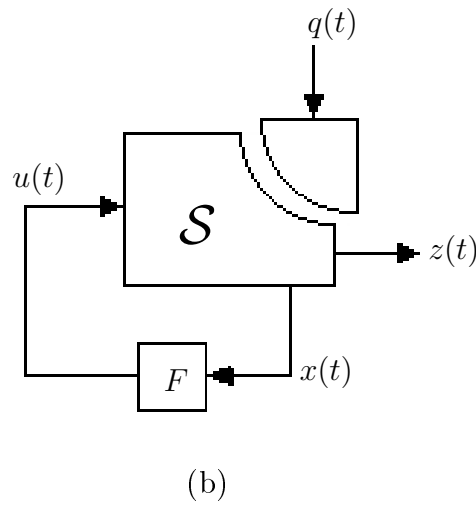
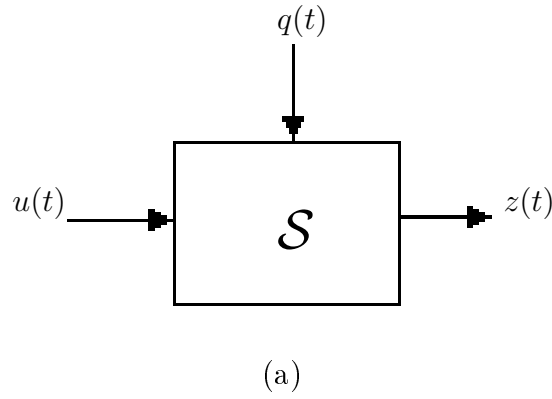


Figura 2.1: (a) Sistema em malha aberta, (b) sistema realimentado para rejeição de distúrbios.

Matematicamente, o Problema de Rejeição de Distúrbios pode ser tratado sob dois enfoques já mostrados na literatura: o enfoque geométrico, onde este problema é formulado a partir de espaços vetoriais e o enfoque freqüencial, onde este problema é tratado por meio de funções de transferência. Estes dois enfoque serão brevemente revistos nas seções seguintes.

2.2 Enfoque Geométrico

A formulação inicial do Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) e a sua solução foram desenvolvidas com o apoio da Teoria da Invariância por WONHAM E MORSE

(1970) [58] e BASILE E MARRO (1968) [3] para sistemas lineares sob uma lei de controle do tipo $u(t) = Fx(t)$.

A Teoria da Invariância é peça fundamental para a abordagem geométrica de diversos problemas de controle. De acordo com WONHAM (1979) [57], a base do enfoque geométrico consiste em associar determinadas propriedades dos sistemas com subespaços vetoriais. Neste contexto, a existência de soluções para o DDP depende das propriedades geométricas de certos subespaços bem definidos. Como o DDP, vários outros problemas de rejeição de distúrbios, como o DDPS (Problema de Rejeição de Distúrbios com Estabilidade) que será revisitado aqui, também podem ser estudados por meio de subespaços.

2.2.1 Condições de existência de soluções para o DDP

Seja o sistema linear multivariável invariante no tempo descrito por:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $q(t) \in \mathbb{R}^d$ é o vetor de entradas de distúrbios e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas a serem controladas. Supõe-se também que as matrizes B e E possuem posto de coluna completo e que a matriz D possui posto de linha completo.

Como já foi dito, o objetivo do DDP é encontrar, se possível, uma lei de controle por realimentação estática de estados,

$$u(t) = Fx(t), \quad (2.2)$$

tal que a matriz de transferência de distúrbio $q(t)$ para a saída controlada $z(t)$ seja nula.

Empregando a lei de controle $u(t) = Fx(t)$ no sistema dado em (2.1), tem-se

o seguinte sistema realimentado:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Supondo que $x(0) = 0$, as equações (2.3) podem ser resolvidas por:

$$z(t) = \int_0^t De^{(A+BF)(t-s)} Eq(s) ds. \quad (2.4)$$

A exigência para a solução do DDP é que a equação (2.4) seja zero para qualquer $q(t)$. Ou, equivalentemente, em qualquer derivação $z^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, o termo que contém $q(t)$ deve ser nulo. Assim, para a primeira derivada de (2.3), obtém-se

$$z^1(t) = D(A + BF)x(t) + DEq(t), \quad (2.5)$$

onde deve-se ter $DE = 0$. Para $i \geq 2$:

$$z^{(i)}(t) = D(A + BF)^i x(t) + D(A + BF)^{i-1} Eq(t), \quad (2.6)$$

resultando em

$$\begin{cases} DE = 0 \\ D(A + BF)E = 0 \\ D(A + BF)^2 E = 0 \\ \vdots \\ D(A + BF)^{i-1} E = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

De acordo com o teorema de Cayley-Hamilton, são necessárias apenas as n primeiras identidades. Assim, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \\ (A + BF)\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \\ (A + BF)^2 \mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \\ \vdots \\ (A + BF)^{n-1} \mathcal{E} \subseteq \mathcal{K} \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $\mathcal{E} = \text{Im } E$ e $\mathcal{K}$ é o espaço nulo a direita de D . Este conjunto de equações é equivalente a

$$\mathcal{E} + (A + BF)\mathcal{E} + \dots + (A + BF)^{n-1} \mathcal{E} \subseteq \mathcal{K}, \quad (2.9)$$

onde o sinal de adição representa a soma usual de subespaços. Sendo $M : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$ uma transformação linear e $W \subset \mathfrak{R}^n$ um subespaço, o subespaço $W + MW + \dots + M^{n-1}W$ é usualmente denotado por $\langle M|W \rangle$. Aplicando à situação em questão tem-se:

$$\langle A + BF|\mathcal{E} \rangle \subseteq \mathcal{K}. \quad (2.10)$$

Deste modo, é possível enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) tem solução se e somente se for possível encontrar uma matriz de realimentação de estados F ($m \times n$) tal que*

$$D(sI - A - BF)^{-1}E = 0, \quad \forall s$$

ou equivalentemente

$$\langle A + BF|\mathcal{E} \rangle = \mathcal{E} + (A + BF)\mathcal{E} + \dots + (A + BF)^{n-1}\mathcal{E} \subseteq \mathcal{K}.$$

Antes de prosseguir, será feita uma breve recordação sobre subespaços invariantes, uma vez que o subespaço (A, B) -invariante é um conceito de fundamental importância no estudo deste problema.

Definição 2.1 *Considere o par (A, B) relativo ao sistema (2.1). Um subespaço $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{R}^n$ é (A, B) -invariante se $A\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V} + \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ é a imagem de B .*

Equivalentemente, pode-se mostrar que $\mathcal{V}$ é um subespaço (A, B) -invariante se e somente se existe uma matriz $F \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tal que $(A + BF)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$. O subespaço (A, B) -invariante de dimensão máxima entre todos aqueles contidos no espaço nulo à direita de D , aqui denotado por $\mathcal{K}$, é:

$\mathcal{V}^*$ = o subespaço maximal único (A, B) -invariante contido em $\mathcal{K}$.

O subespaço $\mathcal{V} := \langle A + BF | \mathcal{E} \rangle$ é (A, B) -invariante, ou seja,

$$(A + BF)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}. \quad (2.11)$$

De acordo com a equação (2.10) tem-se que $\langle A + BF | \mathcal{E} \rangle$ deve estar contido em $\mathcal{K}$ e além disso é um subespaço $(A + BF)$ -invariante. O maior subespaço possuidor destas duas características, como visto acima, é conhecido por $\mathcal{V}^*$.

O teorema 2.2 a seguir mostra que as condições de existência de soluções para o Problema de Rejeição de Distúrbios pode ser formulada em termos de $\mathcal{V}^*$.

Teorema 2.2 [57] *O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) tem solução, ou seja, existe uma matriz de realimentação de estados F ($m \times n$) tal que $\langle A + BF | \mathcal{E} \rangle \subseteq \mathcal{K}$ se e somente se $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}^*$.*

Esquemáticamente, é possível representar as condições de existência de soluções para o DDP através de conjuntos de subespaços, como na figura 2.2 a seguir.

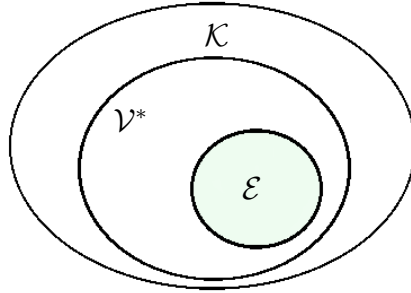


Figura 2.2: Representação esquemática dos subespaços envolvidos na solução DDP.

Desta maneira, a solução do DDP a partir do enfoque geométrico envolve, inicialmente, a obtenção do subespaço $\mathcal{V}^*$. Podem-se encontrar, na literatura especializada, vários algoritmos para o cálculo deste subespaço. A seguir está um algoritmo bem simples desenvolvido em [57].

Algoritmo 2.1 : *Algoritmo para cálculo de $\mathcal{V}^*$:*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_0 &= \mathcal{K} \\
 \mathcal{V}_1 &= \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_0) \\
 &\vdots \\
 \mathcal{V}_{i+1} &= \mathcal{V}_i \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_i) \\
 &\vdots \\
 \mathcal{V}_\nu &= \mathcal{V}^*, \text{ onde } \nu = \dim \mathcal{K}.
 \end{aligned}$$

Para tornar mais claro o método de cálculo de $\mathcal{V}^*$, a seguir está um exemplo.

Exemplo 2.1 *Seja o sistema descrito por:*

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q(t) \\
 z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)
 \end{aligned}$$

Usando o algoritmo 2.1 para calcular $\mathcal{V}^*$, obtem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_0 &= \mathcal{K} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
 \mathcal{V}_1 &= \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_0) = \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}\mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
 \mathcal{V}_2 &= \mathcal{V}_1 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_1) = \mathcal{V}_1 \cap A^{-1}\mathcal{V}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\
 \mathcal{V}_3 &= \mathcal{V}_2 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_2) = \mathcal{V}_2 \cap A^{-1}\mathcal{V}_2 = \{0\} = \mathcal{V}^*.
 \end{aligned}$$

Obviamente o DDP não terá solução. Porém, se a matriz B passar a ser

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{K}$$

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_0) = \mathcal{V}_0.$$

Como $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0$ tem-se

$$\mathcal{V}^* = \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^*$, o DDP tem solução. Para encontrarmos uma F faz-se $F = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4]$ e impõe-se a condição $(A + BF)\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{V}^*$ encontrando, após algum trabalho, $f_2 = -1$, $f_3 = f_4 = 0$. Logo $F = [f_1 \ -1 \ 0 \ 0]$, onde f_1 é arbitrário.

Exemplo 2.2 Considere o pêndulo duplo invertido dado na figura a seguir.

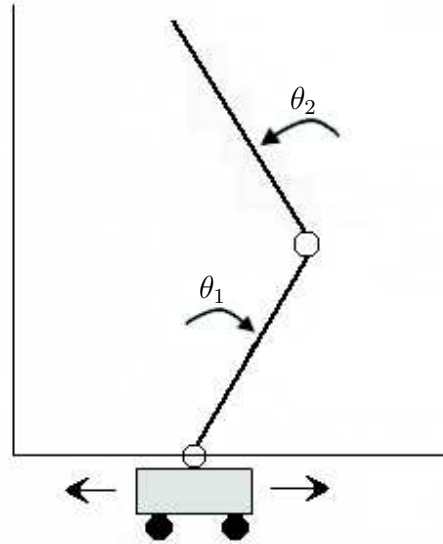


Figura 2.3: Pêndulo duplo invertido.

As entradas u_1 e u_2 são torques sobre seus respectivos pivôs. Os estados são os ângulos θ_1 e θ_2 e as suas derivadas. As saídas medidas são θ_1 e θ_2 . O objetivo de controle é manter o pêndulo duplo invertido na posição vertical através de uma lei de controle apropriada.

O pêndulo invertido pode ser descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 9,8 & 0,0 & -9,8 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ -9,8 & 0,0 & 29,4 & 0,0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

Usando o algoritmo 2.1 para calcular $\mathcal{V}^*$, obtem-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_0 &= \mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{V}_1 &= \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}_0) = \mathcal{V}_0 \cap A^{-1}\mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0\} = \mathcal{V}^*.\end{aligned}$$

Neste caso o DDP não terá solução.

Nota-se, a partir dos exemplos anteriores, que a obtenção da matriz de realimentação de estados F pode ser muito trabalhosa. Um método sistemático para o cálculo de uma matriz F ou uma família de F utilizando o subespaço $\mathcal{V}^*$ que soluciona o DDP é dado a seguir.

Teorema 2.3 *Dadas uma base V para $\mathcal{V}^*$ ($n \times v$) e uma matriz W ($n \times n - v$) de tal forma que $[V \ W]$ é não singular, defina a transformação de similaridade*

$$Q = [V \ W]$$

tal que

$$Q^{-1}(A + BF)Q = \begin{bmatrix} A_1(F) & A_2(F) \\ A_3(F) & A_4(F) \end{bmatrix}.$$

Então o conjunto de soluções para o DDP, ou seja, a família de matrizes F que solucionam o problema é dada por:

$$\{F(m \times n) | A_3(F) = 0\}.$$

Com este método, é possível obter uma solução para o DDP exclusivamente em termos dos parâmetros A , B , C e D da malha aberta.

Para ilustrar, segue um exemplo.

Exemplo 2.3 *Seja o sistema descrito por:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} q(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Utilizando o algoritmo 2.1 para calcular $\mathcal{V}^*$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{V}_1 &= \mathcal{V}_0 = \mathcal{V}^*. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{V}^*$, o DDP tem solução e portanto uma matriz Q como definida anteriormente pode ser igual a:

$$Q = [V \quad W] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Supondo

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} \end{bmatrix}$$

a matriz $A_3(F)$ será igual a:

$$A_3(F) = \begin{bmatrix} 1 + F_{13} & F_{14} & F_{15} \\ F_{23} & F_{24} & F_{25} \end{bmatrix}$$

o que fornecerá a seguinte família de F que soluciona o DDP:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & -1 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Condições de existência de soluções para o DDPS

Também o Problema de Rejeição de Distúrbios com Estabilidade (DDPS) foi solucionado empregando-se a teoria da invariância. A formulação deste problema é semelhante à do DDP, porém neste caso há mais uma exigência: que os pólos do sistema em malha fechada, aplicando a lei de controle $u(t) = Fx(t)$, estejam todos no semi-plano da esquerda, ou seja, o sistema tem de rejeitar os distúrbios com estabilidade. Sem entrar em grandes detalhes, será enunciado o seguinte teorema:

Teorema 2.4 [57] *O Problema de Rejeição de Distúrbios com Estabilidade (DDPS) tem solução se e somente se $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}_g^*$ onde $\mathcal{V}_g^* \in \mathcal{K}$.*

Analogamente ao $\mathcal{V}^*$ calculado para o DDP, pode-se mostrar que $\mathcal{V}_g$ é um subespaço (A, B) -invariante se e somente se existe uma matriz $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $(A + BF)\mathcal{V}_g \subseteq \mathcal{V}_g$ e também $A + BF$ é estável. O subespaço (A, B) -invariante de dimensão máxima entre todos aqueles contidos no espaço nulo à direita de D , aqui denotado por $\mathcal{K}$, tal que $A + BF$ é estável é:

$\mathcal{V}_g^* =$ o subespaço maximal único (A, B) -invariante contido em $\mathcal{K}$ tal que $A + BF$ é estável.

Em geral, o subespaço $\mathcal{V}_g^*$ é obtido através de algoritmos bem mais complicados que aqueles empregados no cálculo de $\mathcal{V}^*$.

Assim, o tratamento geométrico do DDP e DDPS envolve, num primeiro passo, a obtenção dos subespaços $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{V}_g^*$. Porém para alguns sistemas a solução do DDP empregando o enfoque geométrico pode ser trabalhosa devido à dificuldade do cálculo destes subespaços. Este talvez tenha sido um forte estímulo para a formulação e busca de outras soluções para o DDP.

Exemplo 2.4 *Seja o seguinte sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Usando o teorema 2.3, a matriz $A_3(F)$ neste caso é igual a

$$A_3(F) = \begin{bmatrix} 1 + F_{12} & F_{13} \end{bmatrix}$$

e fornece a seguinte família de F

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & -1 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{bmatrix}.$$

Com esta F , os pólos do sistema em malha fechada são

$$\lambda = \{-F_{11}, -1 - F_{12}, -2\},$$

então não haverá nenhum pólo no semi-plano direito se e somente se $F_{11} > 0$ e $F_{12} > -1$. Portanto, o DDPS tem solução.

2.3 Aspectos Estruturais do DDP

Em DEL NERO GOMES E BHATTACHARYYA (1981) [17] foi dada uma contribuição para o Problema de Rejeição de Distúrbios: a visão estrutural deste problema. Através de diagramas de blocos, os subespaços relacionados com a solução do DDP,

calculados quando se emprega o enfoque geométrico, são explicados de maneira bastante simples. Desta forma, esta visualização estrutural sugere um novo modo de solução do DDP, onde chega-se a conclusões sobre o DDP sem a necessidade do cálculo desses subespaços.

A visão estrutural do DDP foi desenvolvida baseada no sistema descrito pela equação (2.1), e aqui repetido por conveniência,

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} x(t_0) = x_0 \\ t \geq 0. \end{matrix} \quad (2.12)$$

Em [17] foi mostrado que o Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) terá solução se e somente se for possível representar seu diagrama de blocos na forma mostrada na figura 2.4, onde a saída $z_1(t)$ do subsistema $\mathcal{S}_1$ tem o mesmo tamanho da entrada $u(t)$.

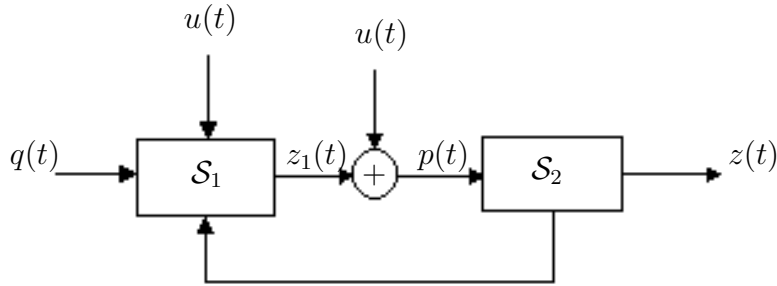


Figura 2.4: Diagrama de blocos esquemático para para solução do DDP.

A partir disto, desenvolveu-se as equações dinâmicas para o diagrama de blocos representado na figura 2.4. Sendo $x_i(t)$ o estado do subsistema $\mathcal{S}_i$, pode-se escrever as seguintes equações para o diagrama de blocos da figura 2.4:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) + E_1q(t) \quad (2.13)$$

$$z_1(t) = D_1x_1(t) \quad (2.14)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_{22}x_2(t) + B_2[z_1(t) + u(t)] \quad (2.15)$$

$$z(t) = z_2(t) = D_2x_2(t). \quad (2.16)$$

Escrevendo na forma matricial obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_2D_1 & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} q(t) \\ \hat{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & D_2 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Uma matriz de realimentação de estados F que soluciona o DDP, utilizando a lei de controle $u(t) = Fx(t)$, será

$$F = \begin{bmatrix} -D_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Esta forma canônica, assim como o diagrama de blocos mostrado na figura 2.4, indicam claramente a existência de solução para o DDP. Conseqüentemente, uma condição para o Problema de Rejeição de Distúrbio ter solução para o sistema dado em (2.1) é que exista uma mudança de bases $x = Q\hat{x}$ que coloque as matrizes do sistema na forma (2.17).

Com estes resultados pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.5 [17] *O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) tem solução para um sistema descrito pelas matrizes $\langle A, B, D, E \rangle$ se e somente se existir um número real ν , $q \leq \nu \leq n - r$ e uma base do espaço de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{D}, \hat{E} \rangle$ do sistema satisfazem*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hline \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array} \right] \hat{x}(t) + \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{array} \right] u(t) + \left[\begin{array}{c} \hat{E}_1 \\ 0 \end{array} \right] q(t) \\ \hat{z}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde $\hat{A}_{11}$ é $\nu \times \nu$, $\hat{A}_{12}$ é $\nu \times n - \nu$ etc, e

$$\hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{D}_1. \quad (2.20)$$

A importante contribuição deste teorema vem do fato de este sugerir um novo método para a resolução do DDP. Para tanto é necessário encontrar uma base do espaço de estados na qual as matrizes que caracterizam o sistema exibam a estrutura da equação (2.19), onde só então $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}^*$. Desta maneira deve-se verificar a existência de uma matriz não-singular Q tal que a mudança de base ocasionada pela transformação de similaridade $x = Q\hat{x}$ coloque as matrizes do sistema na forma dada em (2.19).

Para encerrar esta seção, seguem alguns exemplos.

Exemplo 2.5 Considere o exemplo 2.1 aqui repetido:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Neste caso o DDP não tem solução pois não é possível colocar o sistema na forma da equação (2.19).

Porém, se a matriz B passar a ser

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ter-se-ia uma matriz Q

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

resultando em,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

Exemplo 2.6 Considere o pêndulo duplo invertido dado no exemplo 2.2 cujo sistema está repertido a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 9,8 & 0,0 & -9,8 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ -9,8 & 0,0 & 29,4 & 0,0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & -2,0 \\ 0,0 & 0,0 \\ -2,0 & 5,0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} q(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

Aplicando a transformação de similaridade da matriz Q

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

resultando em,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 \\ 9,8 & -9,8 & 0,0 & 0,0 \\ -9,8 & 29,4 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \\ 1,0 & -2,0 \\ -2,0 & 5,0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 \\ 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} q(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

o que mostra que o DDP não terá solução para este problema pois não existe uma transformação de similaridade que consiga colocar o sistema na forma mostrada na equação (2.19).

A visão estrutural dada pelo teorema 2.5 foi o ponto de partida para formular o Problema de Rejeição de Distúrbios utilizando matrizes de transferência, como será visto na seção seguinte.

2.4 Enfoque Freqüencial

Como visto na seção 2.2, as soluções para o Problema de Rejeição de Distúrbios foram dadas originalmente apenas em termos geométricos e a existência de soluções era verificada por meio de condições envolvendo subespaços da teoria da invariância.

Porém, em BHATTACHARYYA (1980) [6], HAUTUS (1980) [27], DEL NERO GOMES E BHATTACHARYYA (1981) [17] e BHATTACHARYYA, DEL NERO GOMES E HOWZE (1983) [5], houve um grande avanço e foram apresentados alguns resultados para o DDP que mostraram ser possível solucioná-lo utilizando representações freqüenciais baseadas nas matrizes de transferência de controle e de distúrbio.

2.4.1 Soluções para o DDP

Para abordarmos os aspectos freqüenciais do DDP, considere o sistema dado em (2.1) representado novamente abaixo:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Usando o princípio da superposição pode-se escrever:

$$z(\hat{s}) = G_z(s)u(\hat{s}) + H_z(s)q(\hat{s}) \quad (2.22)$$

onde $z(\hat{s})$, $u(\hat{s})$ e $q(\hat{s})$ são as transformadas de Laplace dos vetores que representam, respectivamente, a saída $z(t)$, a entrada $u(t)$ e o distúrbio $q(t)$. É imediato verificarmos que a matriz de transferência de controle $G_z(s)$ e a matriz de transferência de distúrbio $H_z(s)$ para o sistema $\mathcal{S}$, de dimensões respectivamente iguais a $p \times m$

e $p \times q$, são dadas por:

$$G_z(s) = D(sI - A)^{-1}B \quad \text{e} \quad H_z(s) = D(sI - A)^{-1}E. \quad (2.23)$$

Antes de prosseguir, é necessário fazer uma breve abordagem sobre matrizes quadradas diagonais próprias. Considere, portanto, a seguinte definição:

Definição 2.2 *A matriz racional $M(s)$, quadrada, será chamada diagonal própria quando*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M(s)$$

for uma matriz diagonal inversível.

Uma matriz diagonal própria nada mais é do que uma matriz quadrada cujos elementos $m_{ij}(s)$ são estritamente próprios quando $i \neq j$ e são próprios quando na diagonal principal, para $i = j$.

Há também algumas propriedades bastante simples, tais como:

Propriedade 2.1 *Se $N(s)$ é uma matriz quadrada estritamente própria então $N(s) + I$ será diagonal própria.*

Propriedade 2.2 *A inversa de uma matriz diagonal própria também é diagonal própria.*

Sem entrar em detalhes sobre os raciocínios que levaram a ele, a seguir será apresentado um importante resultado que mostrou que o DDP é um problema freqüentemente caracterizável.

Teorema 2.6 [17] *O Problema da Rejeição de Distúrbios (DDP) terá solução para um sistema descrito por $\langle A, B, D, E \rangle$ se e somente se as matrizes de transferência*

de controle $G_z(s)$ e de distúrbio $H_z(s)$ puderem ser fatoradas como

$$G_z(s) = T(s)V(s) \quad e \quad H_z(s) = T(s)W(s).$$

onde $T(s)$ ($p \times m$) e $W(s)$ ($m \times q$) são matrizes racionais estritamente próprias e $V(s)$ ($m \times m$) é uma matriz racional diagonal própria.

O teorema 2.6 garante que problemas como o DDP podem ter um tratamento freqüencial. Resta ainda o problema de, dadas as matrizes de transferência de controle e de distúrbio, $G_z(s)$ e $H_z(s)$, saber como fatorá-las na forma vista acima. De posse da solução para este problema, ter-se-ia um método puramente freqüencial de estudar o DDP. O próximo resultado representa um passo importante nessa direção.

Teorema 2.7 [27] *O Problema da Rejeição de Distúrbios (DDP) tem solução se e somente se existir $X_z(s)$ estritamente própria tal que*

$$G_z(s)X_z(s) = H_z(s). \quad (2.24)$$

Exemplo 2.7 *Considere o exemplo 2.3 onde as matrizes de transferência de controle $G_z(s)$ e de distúrbio $H_z(s)$ são:*

$$G_z(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s+1)^2(s-1)^2} \end{bmatrix} \quad e \quad H_z(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{(s+1)^2(s-1)} \end{bmatrix}.$$

Neste caso a solução para a equação matricial $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$ é única e igual a

$$X_z(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como esta solução é estritamente própria pode-se garantir que o DDP tem solução, conclusão esta a que já havia sido chegada no exemplo 2.3 com o enfoque geométrico.

2.4.2 Soluções para o DDPS

Também foi verificada a solução para o Problema de Rejeição de Distúrbios com Estabilidade (DDPS) associada à equação matricial (2.24).

A condição de existência de soluções para o DDPS é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2.8 [27] *O Problema da Rejeição de Distúrbios com Estabilidade (DDPS) tem solução se e somente se existir $X_z(s)$ estritamente própria e estável tal que*

$$G_z(s)X_z(s) = H_z(s), \quad (2.25)$$

onde por estável entende-se uma matriz de transferência com todos os seus pólos no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo.

Assim, a solução do DDP e DDPS no enfoque freqüencial está relacionada com a existência de $X_z(s)$, a solução para a equação $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$.

Para ilustrar segue um exemplo.

Exemplo 2.8 *Considere o exemplo 2.7 onde as matrizes de transferência de controle $G_z(s)$ e de distúrbio $H_z(s)$ são:*

$$G_z(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s-1} \\ \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s+1)^2(s-1)^2} \end{bmatrix}$$

$$H_z(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{(s+1)^2(s-1)} \end{bmatrix}.$$

Neste caso a solução para a equação matricial $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$ é única e igual

a

$$X_z(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como esta solução é estritamente própria e estável pode-se garantir que o DDPS tem solução.

Os estudos que se seguem buscam um método simples de se obter a natureza de $X_z(s)$, ou seja, deseja saber se a partir das funções de transferência de controle e de distúrbio, o DDP terá ou não solução para um determinado sistema.

2.5 A Equação $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$

Existem, na literatura especializada, diversas maneiras de encontrar a natureza das soluções $X_z(s)$ para a equação $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$. Uma maneira simples e direta quando $p \leq m$ [1] pois, conforme mostrado em [55], no caso particular $p \geq m$, o problema não tem solução ou tem uma única solução que pode ser facilmente encontrada.

Para tanto, considere que $G_z(s)(p \times m)$ e $H_z(s)(p \times q)$ sejam matrizes racionais próprias e que representem as matrizes de transferência de controle e de distúrbio do seguinte sistema linear multivariável e invariante no tempo

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} , x(t_0) = x_0 \\ , t \geq 0 \end{matrix} \quad (2.26)$$

onde A , B , D e E têm dimensões $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ e $n \times q$, respectivamente, e $G_z(s)$ e $H_z(s)$ são dadas por

$$G_z(s) = D(sI - A)^{-1}B \quad \text{e} \quad H_z(s) = D(sI - A)^{-1}E. \quad (2.27)$$

Como visto na seção anterior, a solução do DDP está relacionada com a solução $X_z(s)$ da seguinte equação matricial

$$G_z(s)X_z(s) = H_z(s). \quad (2.28)$$

Antes de prosseguir, é necessário conhecer uma importante fatoração de uma matriz racional própria.

Lema 2.1 [56] *Seja $G_z(s)(p \times m)$ uma matriz racional própria e com posto igual a p ($p \leq m$). Então existe uma fatoração de $G_z(s)$ da forma*

$$G_z(s) = \phi_z^{-1}(s)G_p(s), \quad (2.29)$$

onde $\phi_z(p \times p)$ é uma matriz polinomial triangular inferior e $G_p(s)(p \times m)$ é tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_p(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_z(s)G_z(s) = \bar{G} \quad (2.30)$$

com posto $\bar{G} = p$.

Em WOLOVICH E FALB [56], devido à sua grande importância para o Problema de Adaptação Exata de Modelos, a matriz $\phi_z(s)$ é denominada *interactor* e os autores mostram que qualquer matriz de transferência racional própria $G_z(s)$ com posto $p \leq m$ está associada a uma tal matriz. O *interactor* é uma matriz polinomial triangular inferior única com os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os demais abaixo da diagonal principal são divisíveis por s (ou são nulos). Existem, na literatura, alguns algoritmos para o cálculo de $\phi_z(s)$. Pode-se citar o algoritmo apresentado em [48], baseado no espaço de estados.

A matriz $\phi_z(s)$ será fundamental para assegurar a existência de soluções estritamente própria, própria ou imprópria para a equação matricial $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$, como será visto um pouco mais adiante. Por enquanto, será abordado um outro assunto de grande importância neste estudo: a inversa à direita de uma matriz racional própria.

Sabendo que posto $G_z(s) = p$, $p \leq m$, tem-se que $G_z(s)$ admite inversa à direita, aqui denotada por $G_z^\dagger(s)$ e, portanto, tem-se:

$$G_z(s)G_z^\dagger(s) = I_r \quad (2.31)$$

onde $G_z^\dagger(s)$ tem dimensão $m \times p$. De posse da equação (2.29) pode-se escrever que:

$$G_z^\dagger(s) = G_p^\dagger(s)\phi_z(s). \quad (2.32)$$

A partir desses fatos, torna-se possível enunciar o seguinte lema:

Lema 2.2 [1] *Sejam $G_z(s)(p \times m)$ e $H_z(s)(p \times q)$ matrizes racionais próprias e posto $G_z(s) = p \leq m$. Então existe uma solução para a equação $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$ dada por*

$$X_z(s) = G_z^\dagger(s)H_z(s) \quad (2.33)$$

ou ainda

$$X_z(s) = G_p^\dagger(s)\phi_z(s)H_z(s) \quad (2.34)$$

onde $G_p^\dagger(s)$ é uma inversa à direita, própria, para $G_p(s)$.

A partir deste lema é imediato obter do seguinte teorema:

Teorema 2.9 [1] *Sejam $G_z(s)(p \times m)$ e $H_z(s)(p \times q)$ matrizes racionais próprias com posto $G_z(s) = p \leq m$ e $G_z(s) = \phi_z^{-1}(s)G_p(s)$. Então existirá uma solução $X_z(s)(m \times q)$ estritamente própria para a equação $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$ se e somente se o produto*

$$\phi_z(s)H_z(s) \quad (2.35)$$

for estritamente próprio.

De forma análoga pode-se mostrar que a solução $X_z(s)$ será também própria ou imprópria se e somente se o produto $\phi_z(s)H_z(s)$ também o for, respectivamente. Por sua importância, serão enunciados os seus teoremas e, por sua simplicidade, suas demonstrações serão omitidas.

Teorema 2.10 [1] *Sejam $G_z(s)(p \times m)$ e $H_z(s)(p \times q)$ matrizes racionais próprias com posto $G_z(s) = p \leq m$ e $G_z(s) = \phi_z^{-1}(s)G_p(s)$. Então existirá uma solução $X_z(s)(m \times q)$ própria para a equação $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$ se e somente se o produto*

$$\phi_z(s)H_z(s)$$

for próprio.

Exemplo 2.9 *Considere o seguinte sistema onde as matrizes de transferência de controle $G_z(s)$ e de distúrbio $H_z(s)$ são:*

$$G_z(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad e \quad H_z(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}.$$

Achando ϕ_z e o produto $\phi_z H_z$, tem-se:

$$\phi_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \phi_z H_z = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

então é fácil verificar que não existe solução estritamente própria $X_z(s)$. Entretanto a mesma equação possui solução própria já que $\phi_z H_z$ é própria.

Teorema 2.11 [1] *Sejam $G_z(s)(p \times m)$ e $H_z(s)(p \times q)$ matrizes racionais próprias com posto $G_z(s) = p \leq m$ e $G_z(s) = \phi_z^{-1}(s)G_p(s)$. Então existirá uma solução $X_z(s)(m \times q)$ imprópria para a equação (2.28) se e somente se o produto*

$$\phi_z(s)H_z(s)$$

for impróprio.

Estes resultados mostrados nos teoremas 2.9, 2.10 e 2.11 foram um importante avanço nos estudos do DDP. Eles nos fornecem condições necessárias e suficientes que asseguram a existência de solução para o DDP.

2.6 Conclusão

Neste capítulo foi feita uma revisão dos principais métodos para solucionar e caracterizar o Problema de Rejeição de Distúrbios. Inicialmente, foi abordado o enfoque geométrico, onde este problema foi inicialmente formulado e resolvido. A seguir, foi revisitada a visão estrutural do DDP e ao seu desenvolvimento dentro do enfoque freqüencial, onde nota-se que a solução para problemas de rejeição de distúrbios é mais facilmente verificada quando emprega-se o enfoque freqüencial do que quando se usa a Teoria da Invariância.

A importância dos resultados aqui revistos para o DDP no enfoque freqüencial reside no fato de que estes serão muito utilizados nos capítulos seguintes deste trabalho, onde se buscará caracterizar através de matrizes de transferência um outro problema: o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática da Saída (DDPKM).

Capítulo 3

Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída em Sistemas Lineares

3.1 Introdução

Diferentemente do Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) que foi exaustivamente estudado nos últimos tempos, ao Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM) até o momento foi dada pouca atenção. Este problema tem sido investigado apenas no enfoque geométrico e as condições para existência de soluções foram estabelecidas em função de um subespaço cuja existência é geralmente bastante complicada de se verificar.

A formulação do DDPKM é bastante simples. Seja o sistema linear multivariável invariante no tempo descrito por:

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad , \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $q(t) \in \mathbb{R}^d$ é o vetor de entradas de distúrbios, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de saídas medidas e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas a serem controladas. Supõem-se que as matrizes B e E possuem posto de coluna completo e que as matrizes C e D

possuem posto de linha completo. Esquematicamente, o sistema linear multivariável $\mathcal{S}$ pode ser representado pela figura 3.1.

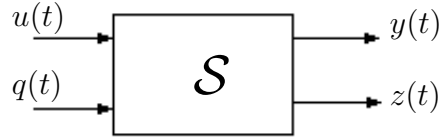


Figura 3.1: Sistema estudado.

O objetivo de DDPKM é encontrar, se possível, uma lei de controle por realimentação estática de saída,

$$u(t) = Ky(t), \quad (3.2)$$

tal que a matriz de transferência de distúrbio $q(t)$ para a saída controlada $z(t)$ seja nula. O sistema em malha fechada pode ser representado como na figura 3.2.

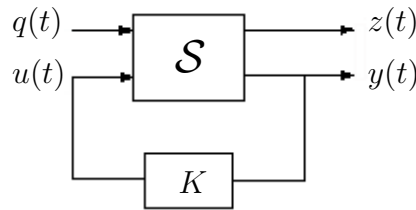


Figura 3.2: Sistema em malha fechada.

A solução do Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática da Saída é apresentada na literatura apenas com base no enfoque geométrico. Na próxima seção será feita uma revisão desses resultados. Mais adiante, no próximo capítulo, será mostrada uma nova visão deste problema obtida a partir dos aspectos freqüenciais e estruturais do sistema.

3.2 Enfoque Geométrico

As condições geométricas para a existência de soluções para o DDPKM se baseiam na existência de um subespaço que goza de determinadas propriedades [26], [46]. Recentemente, condições necessárias e suficientes para a solução do DDPKM para sistemas inversíveis à esquerda (isto é, sistemas em que a função de transferência que relaciona a entrada $u(t)$ com a saída controlada $z(t)$ é inversível à esquerda) foi proposta em [11]. Neste método, o sistema é inicialmente representado em uma base de coordenadas especial na qual o DDPKM tem solução se e somente se uma submatriz específica é nula. Já em [23] os resultados de [11] são estendidos a duas classes importantes de sistemas, sendo dada uma caracterização completa das soluções, bem como a parametrização de todas as matrizes de realimentação de saída.

3.2.1 Conceitos preliminares

Para o DDPKM dois conceitos são de fundamental importância: além dos conceitos de subespaços (A, B) -invariantes, já definidos no capítulo 2, e aqui repetidos, também é necessário dominar o conceito de subespaços (C, A) -invariantes. Para tanto, considere as definições 3.2 e 3.1 a seguir.

Definição 3.1 [57], [2] *Considere o par (A, B) relativo ao sistema 3.1. Um subespaço $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ é (A, B) -invariante se $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}$.*

Pode-se mostrar que $\mathcal{V}$ é um subespaço (A, B) -invariante se e somente se existe uma matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times l}$ tal que $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Pode-se também mostrar a existência de um subespaço (A, B) -invariante de dimensão máxima entre todos aqueles contidos no subespaço $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{V}^* = \text{o subespaço maximal único } (A, B)\text{-invariante contido em } \mathcal{K}.$$

Definição 3.2 [57], [2] *Considere o par (C, A) relativo ao sistema 2.1. Um subespaço $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ é (C, A) -invariante se $A(\mathcal{S} \cap \mathcal{C}) \subset \mathcal{S}$.*

Equivalentemente, $\mathcal{S}$ é um subespaço (C, A) -invariante se e somente se existe uma matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times l}$ tal que $(A + GC)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$. O conjunto de todos os subespaços (C, A) -invariantes que contém o subespaço $\mathcal{E}$, o espaço imagem da matriz E , possui um elemento de dimensão mínima:

$$\mathcal{S}_* = \text{o subespaço ínfimo único } (C, A)\text{-invariante contendo } \mathcal{E}.$$

3.2.2 Condições de existência de soluções para o DDPKM

As condições de existência de soluções para o DDPKM, baseadas nos aspectos geométricos, são dadas pelo seguinte teorema:

Teorema 3.1 [26], [46] *O Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM) tem solução se e somente se existe um subespaço $\mathcal{V}$ que seja (A, B) - e (C, A) - invariante e tal que $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$.*

Equivalentemente, o DDPKM tem solução se e somente se existe um subespaço $\mathcal{V}$ e uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times l}$ tais que $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$ e $(A + BKC)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.

O teorema anterior estabelece condições necessárias e suficientes para a existência de uma realimentação estática de saída que resolve o DDPKM em termos da existência de um subespaço que goza de determinadas propriedades. Porém um método construtivo deste subespaço não é apresentado, pois trata-se de algo muito difícil no caso geral. Em casos particulares, pode-se facilmente concluir a existência de solução para o DDPKM e obter-se a caracterização das soluções bem como a parametrização de todas as matrizes de realimentação de saída correspondentes.

Esquemáticamente, pode-se representar as condições de existência de solução para o DDPKM através de conjuntos de subespaços, como na figura 3.3 a seguir.

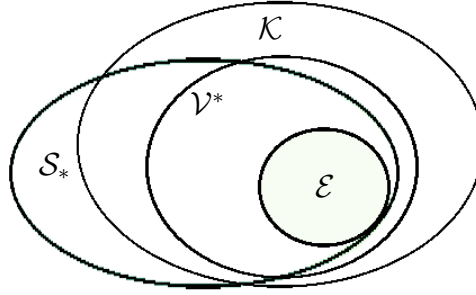


Figura 3.3: Representação esquemática dos subespaços envolvidos na solução DDPKM.

Comparando a figura 3.3 com a figura 2.2, reproduzida a seguir por comodidade, nota-se que as soluções para o DDPKM são um subconjunto das soluções do DDP.

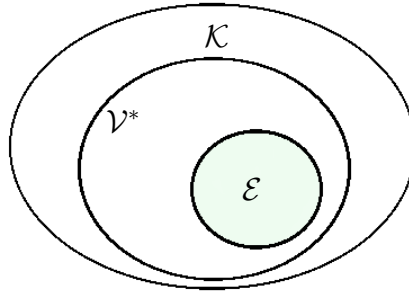


Figura 3.4: Representação esquemática dos subespaços envolvidos na solução DDP.

3.2.3 Condições para duas classes específicas de sistemas

Em DÓREA E MILANI (2003) [23] foram estabelecidas condições suficientes e necessárias para a solução do DDPKM em duas classes específicas de sistemas: sistemas satisfazendo $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{S}_*$ e sistemas satisfazendo $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$. A seguir tais condições serão detalhadas.

★ Solução para sistemas satisfazendo $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{S}_*$

Seja o sistema em estudo

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} , \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

Supor-se-á na seqüência desta seção que este sistema satisfaz a condição:

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*,$$

onde $\mathcal{B} = \text{Im}(B)$.

Uma categoria importante de sistemas que verificam esta condição é aquela dos sistemas cujas matrizes de transferência são inversíveis à esquerda. Esta propriedade implica na possibilidade de reconstruir a entrada $u(t)$ através da saída $z(t)$.

Sistemas inversíveis à esquerda são caracterizados geometricamente pela condição $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* = 0$ [2]. Em CHEN (1997) [11] o DDPKM é estudado unicamente para esse tipo de sistema.

Considere agora a seguinte classe de subespaços:

$$\mathcal{J}(A, B; \mathcal{K}, \mathcal{S}_*) \triangleq \{\mathcal{V} : \mathcal{V} \in \mathcal{I}(A, B; \mathcal{K}) \text{ e } \mathcal{V} \supset \mathcal{S}_*\},$$

em que $\mathcal{I}(A, B; \mathcal{K})$ representa o conjunto de subespaços (A, B) -invariantes contidos em $\mathcal{K}$.

Nota-se, a partir do teorema 3.1, que uma condição necessária para existência de soluções ao DDPKM é que o conjunto $\mathcal{J}(A, B; \mathcal{K}, \mathcal{S}_*)$ não seja vazio.

Lema 3.1 [23] *Se $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$, então $\mathcal{J}(A, B; \mathcal{K}, \mathcal{S}_*)$ possui um elemento de dimensão mínima:*

$$\mathcal{V}_* = \min \mathcal{V} \in \mathcal{J}(A, B; \mathcal{K}, \mathcal{S}_*).$$

Os resultados anteriores permitem estabelecer condições de existência de soluções ao DDPKM para a família de sistemas em questão.

Teorema 3.2 [23] *Para sistemas em que $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$, o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM) tem solução se e somente se $\mathcal{V}_*$ é um subespaço (C, A) -invariante.*

Ressalta-se que as condições geométricas estabelecidas por este teorema independem da base escolhida para representar os espaços de estado, entrada e saída do sistema.

Na próxima seção, condições semelhantes são obtidas para outra família importante de sistemas.

★ Solução para sistemas satisfazendo $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$

Mais uma vez, seja o sistema

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} . \quad (3.4)$$

Supor-se-á na sequência desta seção que este sistema satisfaz a condição:

$$\mathcal{V}^* \subset \mathcal{C} + \mathcal{S}_*,$$

onde $\mathcal{C} = \ker C$, ou seja, o espaço nulo à direita de C .

Uma categoria importante de sistemas que verificam esta condição é aquela dos sistemas cujas matrizes de transferência são inversíveis à direita, que são caracterizados geometricamente pela condição [2] $\mathcal{C} + \mathcal{S}_* = \mathcal{R}^n$.

Considere agora a seguinte classe de subespaços:

$$\mathcal{J}(C, A; \mathcal{E}, \mathcal{V}^*) \triangleq \{\mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{I}(C, A; \mathcal{E}) \text{ e } \mathcal{S} \supset \mathcal{V}^*\},$$

em que $\mathcal{I}(C, A; \mathcal{E})$ representa o conjunto de subespaços (C, A) -invariantes que contêm $\mathcal{E}$.

Nota-se a partir do teorema 3.1 que uma condição necessária para a existência de soluções ao DDPKM é que o conjunto $\mathcal{J}(C, A; \mathcal{E}, \mathcal{V}^*)$ não seja vazio.

Lema 3.2 *Se $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$, então possui $\mathcal{J}(C, A; \mathcal{E}, \mathcal{V}^*)$ um elemento de dimensão máxima:*

$$\mathcal{S}^* = \max \mathcal{S} \in \mathcal{J}(C, A; \mathcal{E}, \mathcal{V}^*).$$

As condições necessárias e suficientes para existência de soluções ao DDPKM para a família de sistemas em estudo são dadas pelo seguinte teorema.

Teorema 3.3 [23] *Para sistemas para os quais $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$, o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM) tem solução se e somente se $\mathcal{S}^*$ é um subespaço (A, B) -invariante.*

★ Parametrização das soluções

Em particular, se uma das condições $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$ ou $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$ é verificada, então sempre é possível determinar mudanças de base ortogonais tais que o sistema possa ser representado pelas seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & D_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

em que B_{21} possui posto de coluna completo, C_{11} possui posto de linha completo e

$$\mathcal{V}_* = \text{Im} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{se } \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_* \subset \mathcal{S}_*) \tag{3.6}$$

ou

$$\mathcal{S}^* = \text{Im} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{se } \mathcal{V}^* \subset \mathcal{C} + \mathcal{S}_*) \quad (3.7)$$

em que 0 e I representam respectivamente a matriz nula e a matriz identidade de dimensões apropriadas.

Nota-se que as estruturas das matrizes D e E acima são obtidas supondo-se que a condição necessária para a rejeição de distúrbios, $DE = 0$ seja satisfeita.

A partir de agora, será considerado o primeiro caso ($\mathcal{B} \cap \mathcal{V}_* \subset \mathcal{S}_*$). Para o segundo caso ($\mathcal{V}^* \subset \mathcal{C} + \mathcal{S}_*$), resultados semelhantes aos apresentados na sequência podem ser obtidos por dualidade.

Isto posto, a representação acima reflete as seguintes decomposições dos espaços de estado, entrada e saída medida:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$$

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2$$

em que $\mathcal{X}_1 = \mathcal{V}_*$; $\mathcal{B}\mathcal{U}_2 = \mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* = \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_*$, $\mathcal{B}\mathcal{U} = \mathcal{B}$; $\mathcal{C}\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, $\mathcal{C}_2\mathcal{X} = \mathcal{Y}_2$, $\ker \mathcal{C}_2 = \mathcal{C} + \mathcal{V}_*$.

Proposição 3.1 [23] *Para sistemas em que $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subset \mathcal{S}_*$, o DDPKM tem solução se e somente se existe uma matriz K_{11} tal que:*

$$A_{21} + B_{21}K_{11}C_{11} = 0 \quad (3.8)$$

Neste caso, o conjunto de todas as matrizes de realimentação estática de saída que resolvem o DDPKM é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

em que K_{11} é dado pela solução única dos sistemas de equações lineares dada em (3.8) e K_{12} , K_{21} e K_{22} são livres para assumir qualquer valor.

A parametrização acima explicita os graus de liberdade da matriz de realimentação de saída K , possibilitando assim a utilização destes na satisfação de outros objetivos de controle além da rejeição de distúrbios.

Um desses objetivos é o de estabilidade do sistema em malha fechada. É fácil verificar que, com a parametrização acima, este problema reduz-se ao problema de estabilização por realimentação estática de saída dos trios $(A_{11} + B_{11}K_{11}C_{11}, B_{12}, C_{11})$ e $(A_{22} + B_{21}K_{11}C_{12}, B_{21}, C_{22})$. Trata-se ainda de um problema em aberto, para cuja solução entretanto diversas técnicas numéricas baseadas em condições suficientes são disponíveis.

Exemplo 3.1 [23] *Considere a representação no espaço de estados para o sistema:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A solução do Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) por realimentação completa de estados para este sistema já foi verificada em [21]. Pode-se verificar que o sistema representado por estas matrizes satisfaz a condição $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{S}_*$.

Suponha, agora, que não se disponha do acesso completo a suas variáveis de estado, mas apenas a um conjunto de saídas medidas $y(t)$ onde a matriz C é:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se ao sistema as seguintes mudanças de variáveis:

$$\bar{x} = Q^T x,$$

$$\bar{u} = Z_B^T u$$

$$\bar{y} = Z_C^T y,$$

com as matrizes ortogonais Q , Z_B e Z_C dadas por:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,2700 & -0,3062 & 0,9065 & 0,1080 & 0 \\ 0,2400 & 0,4838 & -0,1700 & -0,6553 & 0,5 \\ -0,5100 & -0,1776 & -0,1700 & -0,6553 & -0,5 \\ -0,7800 & 0,1286 & -0,2455 & 0,2544 & 0,5 \\ 0,0300 & -0,7900 & 0,2455 & -0,2544 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$Z_B = \begin{bmatrix} -0,8944 & -0,4472 \\ -0,4472 & 0,8944 \end{bmatrix},$$

$$Z_C = \begin{bmatrix} -0,4352 & 0,1030 & 0,8944 \\ 0,8704 & -0,2061 & 0,4472 \\ 0,2304 & 0,9731 & 0 \end{bmatrix},$$

as matrizes que o representam tomam a forma da equação 3.6.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0,8214 & 5,9177 & 8,1642 & 2,6890 & 4,6204 \\ 0,6105 & -1,0297 & 3,3197 & 2,7724 & -2,5933 \\ \hline -0,1983 & 0,7245 & -0,4453 & 0,2105 & 1,3315 \\ -0,0439 & 0,1605 & 2,0476 & 0,9037 & 1,5303 \\ -0,1500 & 0,5481 & -0,2927 & -0,5281 & 0,7500 \end{array} \right] \\ \bar{B} &= \left[\begin{array}{c|c} 3,6897 & 0,6708 \\ 0,2111 & 0,5916 \\ \hline -1,4780 & 0 \\ -0,3275 & 0 \\ -1,1180 & 0 \end{array} \right] & \bar{E} = \left[\begin{array}{cc} -6,8702 & 3 \\ -2,7929 & 2,6458 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ \bar{C} &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1,1720 & 0,3159 & -0,1301 & -0,9933 & 0,4480 \\ 0 & -0,3895 & -1,1725 & -1,9356 & 0,9216 \\ \hline 0 & 0 & -0,1183 & -0,9930 & -0,4472 \end{array} \right] \\ \bar{D} &= \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Nesta representação,

$$\bar{\mathcal{V}}^* = \ker \bar{D} = \text{Im} \begin{bmatrix} I_4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathcal{B}} \cap \bar{\mathcal{V}}^* = \text{Im} \begin{bmatrix} 0,6708 \\ 0,5916 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \subset \text{Im} \bar{E} \subset \bar{\mathcal{V}}^*,$$

$$\bar{\mathcal{V}}_* = \ker \bar{D} = \text{Im} \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

em que I_q representa a matriz identidade de ordem q .

Pode-se verificar por inspeção que $\bar{\mathcal{V}}_*$ é (C, A) -invariante. Portanto, de acordo com o teorema 3.2, o DDPKM tem solução. A partir da proposição 3.1, o conjunto de todas as matrizes de realimentação de saída que resolvem o DDPKM é parametrizado por:

$$K = \left[\begin{array}{cc|c} -0,1145 & -1,3516 & \mathcal{X} \\ \hline \mathcal{X} & \mathcal{X} & \mathcal{X} \end{array} \right]$$

em que os elementos “ $\mathcal{X}$ ” são livres para assumir qualquer valor.

Exemplo 3.2 [23] Seja o sistema massa-mola-amortecedor da figura 3.5, em que x_1, x_2 são deslocamentos relativos ao ponto de equilíbrio e $q(t), u(t)$ são forças.

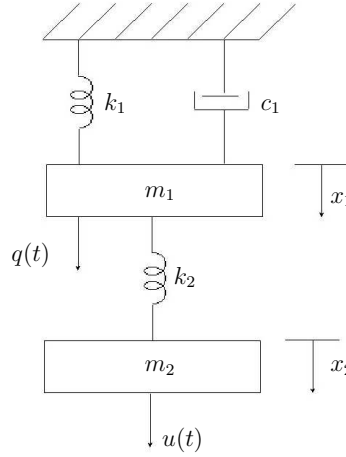


Figura 3.5: Sistema massa-mola-amortecedor.

Tomando como vetor de estados

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$

e supondo que $u(t), q(t)$ e $z(t) = x_2$ sejam os vetores de variáveis de controle, distúrbio e saída a ser controlada, respectivamente, obtém-se a seguinte representação

para o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ z(t) &= Dx(t)\end{aligned}\tag{3.10}$$

em que

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{-c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & 0 \end{bmatrix} & B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{bmatrix} & E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Adotando como variável de saída medida

$$y(t) = Cx(t), \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

deseja-se calcular um controlador por realimentação de saída $u(t) = Ky(t)$ de modo que o efeito de $q(t)$ não seja sentido na saída controlada $z(t)$.

Pode ser verificado que $\mathcal{V}^* = \mathcal{S}_* = \text{Im} \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Deste modo, facilmente constata-se que $\mathcal{B} \cap \mathcal{V}^* = 0$ e $\mathcal{S}_* + \mathcal{C} = \mathcal{R}^4$, ou seja, o trio (A, B, D) é inversível à esquerda e o trio (A, E, C) é inversível à direita. Além disso, $\mathcal{V}_* = \mathcal{V}^*$, que, por sua vez (C, A) -invariante. De fato, estes subespaços podem ser feitos $(A + BKC)$ -invariantes através da lei de controle $u(t) = -k_2 y(t)$.

Em malha fechada:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{-c_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} \end{bmatrix} x(t).$$

portanto, o controlador rejeita o efeito do distúrbio na saída e torna o sistema em malha fechada assintoticamente estável.

3.3 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as condições de existência de soluções para o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM) em sistemas lineares multivariáveis estabelecidas empregando o enfoque geométrico.

Analogamente ao Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP), visto no capítulo anterior, também para o DDPKM, a verificação da existência de sua solução a partir do cálculo de subespaços pode ser muito complicada na prática. É importante ressaltar que, até o momento, ainda não foi desenvolvido um algoritmo para o cálculo do subespaço $\mathcal{V}$ que seja (A, B) - e (C, A) - invariante.

Isto estimula a busca de condições de existência para a solução do DDPKM através de matrizes de transferência. No capítulo a seguir serão desenvolvidas tais condições no enfoque freqüencial.

Capítulo 4

Aspectos Estruturais e Freqüenciais do DDPKM

4.1 Introdução

Até o momento, os poucos resultados que se encontram na literatura para o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM) são baseados na Teoria da Invariância, conforme visto no capítulo anterior.

Uma nova abordagem sobre o DDPKM será apresentada neste capítulo. Inicialmente serão desenvolvidos os aspectos estruturais deste problema e, a seguir, as condições de existência de solução para este problema serão formuladas no enfoque freqüencial.

4.2 Aspectos Estruturais do DDPKM

Para o desenvolvimento dos estudos que levarão aos aspectos estruturais do DDPKM, considere o sistema $\mathcal{S}$ estudado, mostrado primeiramente em (3.1) e aqui repetido por conveniência,

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

para $t \geq 0$ e $x(t_0) = x_0$. Vale lembrar que o objetivo aqui é encontrar condições alternativas sob as quais é possível obter uma matriz K tal que a lei de controle

$$u(t) = Ky(t) \quad (4.2)$$

rejeite os distúrbios na saída controlada $z(t)$.

Como visto no capítulo 2, o Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) terá solução para um dado sistema se e somente se for possível representar seu diagrama de blocos na forma mostrada na figura 4.1, onde a saída $z_1(t)$ do subsistema $\mathcal{S}_1$ tem a mesma dimensão da entrada $u(t)$.

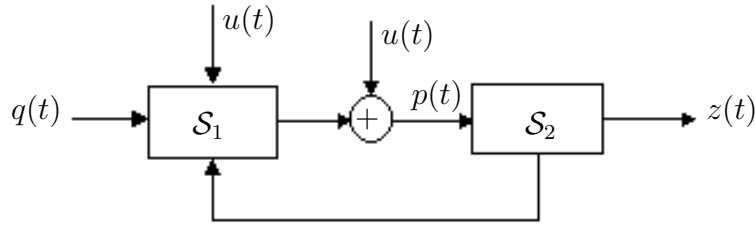


Figura 4.1: Diagrama de blocos esquemático para para solução do DDP.

De forma análoga, mostrar-se-á que o DDPKM terá solução se e somente se for possível representar o seu diagrama de blocos como mostrado na figura 4.2, onde M é um ganho estático.

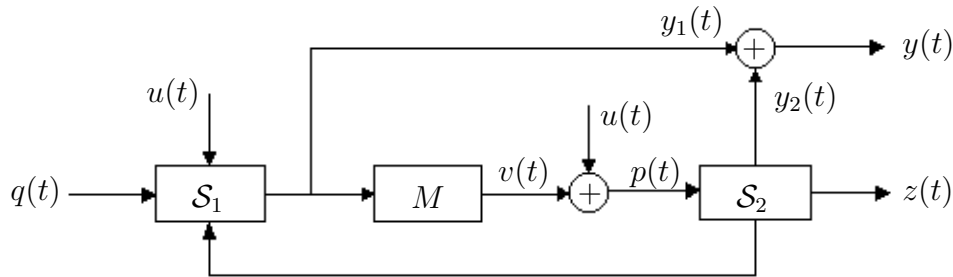


Figura 4.2: Diagrama de blocos esquemático para solução do DDPKM.

O primeiro passo é deduzir as equações dinâmicas associadas a um diagrama como o da figura 4.2. Para tanto, seja $x_i(t)$ o estado do subsistema $\mathcal{S}_i$. Pode-se

escrever as seguintes equações para os subsistemas:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t) + E_1q(t) \quad (4.3)$$

$$y_1(t) = C_1x_1(t) \quad (4.4)$$

$$v(t) = My_1(t) = MC_1x_1(t) = D_1x_1(t) \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= A_{22}x_2(t) + B_2[v(t) + u(t)] \\ &= B_2MC_1x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$y_2(t) = C_2x_2(t) \quad (4.7)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) \quad (4.8)$$

$$z(t) = z_2(t) = 0x_1(t) + D_2x_2(t) \quad (4.9)$$

Escrevendo na forma matricial obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_2MC_1 & A_{22} \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} q(t) \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & D_2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Esta forma canônica, assim como o diagrama de blocos mostrado na figura 4.2 estão associados às condições de solução do DDPKM, como se demonstrará em seguida. Equações no formato (4.10) se caracterizam por blocos nulos nas matrizes E e D , e também pela porção inferior esquerda da matriz A ser múltipla, ao mesmo tempo, das submatrizes B_2 e C_1 .

Uma matriz de realimentação estática de saída K que soluciona o DDPKM utilizando a lei de controle $u(t) = Ky(t)$ será

$$K = \begin{bmatrix} -M & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir destes resultados podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.1 *O Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM) tem solução para um sistema descrito pelas matrizes $\langle A, B, C, D, E \rangle$ se e somente se existirem um número real ν , $q \leq \nu \leq n - r$, uma matriz real $\hat{M}$ ($m \times r$) e uma base do espaço de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, \hat{E} \rangle$ do sistema satisfazem*

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hline \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array} \right] \hat{x}(t) + \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hline \hat{B}_2 \end{array} \right] u(t) + \left[\begin{array}{c} \hat{E}_1 \\ \hline 0 \end{array} \right] q(t) \quad (4.11)$$

$$\hat{y}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) \quad (4.12)$$

$$\hat{z}(t) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) \quad (4.13)$$

onde $\hat{A}_{11}$ é $\nu \times \nu$, $\hat{A}_{12}$ é $\nu \times n - \nu$ etc, e

$$\hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{M} \hat{C}_1. \quad (4.14)$$

Demonstração:

($\Rightarrow$) A condição é suficiente:

Fazendo, na nova base, $u(t) = \hat{K}y(t)$ onde $\hat{K} = -\hat{M}$ temos $u(t) = -\hat{M} \left[\begin{array}{c|c} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t)$,
donde:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} - \hat{B}_2 \hat{M} \hat{C}_1 & \hat{A}_{12} - \hat{B}_1 \hat{M} \hat{C}_2 \\ \hline 0 & \hat{A}_{22} - \hat{B}_2 \hat{M} \hat{C}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) + \left[\begin{array}{c} \hat{E}_1 \\ \hline 0 \end{array} \right] q(t) \quad (4.15)$$

$$\hat{y}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) \quad (4.16)$$

$$\hat{z}(t) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \hat{D}_2 \end{array} \right] \hat{x}(t) \quad (4.17)$$

onde nota-se claramente que o distúrbio $q(t)$ não afeta a saída controlada $z(t)$ pois a matriz de transferência que relaciona $q(t)$ e $z(t)$ é identicamente nula.

($\Leftarrow$) A condição é necessária:

Seja $\hat{K}$ uma solução para o DDPKM à qual se associa $\mathcal{V}$, um subespaço (A, B) e (C, A) -invariante tal que $\mathcal{E} \in \mathcal{V} \in \mathcal{K}$. Sendo $\dim \mathcal{V} = \nu$ ter-se-á $q \leq \nu \leq n - r$.

Seja V uma matriz $n \times \nu$ cujas colunas formem uma base para o subespaço $\mathcal{V}$ e seja W uma matriz $n \times n - \nu$ tal que $[V \mid W] = Q$ seja não singular. Fazendo a transformação de similaridade $x(t) = Q\hat{x}(t)$ tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} q(t) \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) &= \begin{bmatrix} \hat{D}_1 & \hat{D}_2 \end{bmatrix} \hat{x}(t)\end{aligned}$$

Como,

$$DQ = [\hat{D}_1 \quad \hat{D}_2] = D[V \mid W] \quad \text{e} \quad \mathcal{V} \in \mathcal{K}$$

tem-se que $\hat{D}_1 = DV = 0$, ou seja, a equação (4.13) é verdadeira. E também como

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = Q^{-1}E, \quad \text{ou melhor,} \quad E = Q \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = [V \mid W] \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = V\hat{E}_1 + W\hat{E}_2$$

e $\mathcal{E} \in \mathcal{V}$ tem-se que $\hat{E}_2 = 0$. Lembrando ainda que $\hat{K}$ é uma solução, pode-se verificar que $\hat{A}_{21} + \hat{B}_2\hat{K}\hat{C}_1 = 0$, logo, para $\hat{M} = -\hat{K}$ teremos $\hat{A}_{21} = \hat{B}_2\hat{M}\hat{C}_1$ ou seja (4.11) é verdadeira. $\square$

Uma contribuição deste teorema é uma visão estrutural inédita para o DDPKM, até o momento resolvido apenas com base na Teoria da Invariância. Também esta nova visão estrutural estimula a busca de um novo método para a resolução do DDPKM com base no enfoque frequencial.

Exemplo 4.1 *Considere o exemplo 3.1 repetido a seguir:*

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Após a transformação de similaridade $\hat{x} = Qx$ onde

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \left[\begin{array}{cc|ccc} 5,67 & -5,33 & 1,33 & 2,67 & -0,67 \\ 5,67 & -6,33 & 0,33 & 1,17 & -3,67 \\ \hline 0,33 & -0,67 & -3,33 & -5,67 & -4,33 \\ 0,67 & -1,33 & 1,33 & 2,67 & 0,33 \\ -0,33 & 0,67 & 1,33 & 2,67 & 2,33 \end{array} \right] \hat{B} = \left[\begin{array}{cc|c} 0,67 & 0,33 & \\ \hline 0,17 & 0,33 & \\ -0,67 & -0,33 & \\ -1,33 & -0,67 & \\ 0,67 & 0,33 & \end{array} \right] \hat{E} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{array} \right] \\ \hat{C} &= \left[\begin{array}{cc|ccc} 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \\ \hat{D} &= \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Duas das possíveis matrizes K que solucionam o DDPKM obtida a partir da equação

$$\hat{A}_{21} + \hat{B}_2 \hat{K} \hat{C}_1 = 0$$

são, por exemplo,

$$\hat{K}_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \hat{K}_2 = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4.3 Enfoque Freqüencial

Considere novamente o sistema em malha aberta, descrito na figura 3.1, aqui repetido.



Figura 4.3: Sistema estudado.

Pelo princípio da superposição pode-se escrever que:

$$\hat{y}(s) = G_y(s)\hat{u}(s) + H_y(s)\hat{q}(s) \quad (4.18)$$

$$\hat{z}(s) = G_z(s)\hat{u}(s) + H_z(s)\hat{q}(s) \quad (4.19)$$

onde $\hat{y}(s)$, $\hat{z}(s)$, $\hat{u}(s)$ e $\hat{q}(s)$ são as transformadas de Laplace dos vetores que representam, respectivamente, a saída medida $y(t)$, a saída controlada $z(t)$, a entrada $u(t)$ e a entrada de distúrbio $q(t)$. É imediato observar que as matrizes de transferência de comando $G_y(s)$ e $G_z(s)$ e as matrizes de transferência de distúrbio $H_y(s)$ e $H_z(s)$ para o sistema descrito em (4.1) são dadas por

$$G_y(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.20)$$

$$G_z(s) = D(sI - A)^{-1}B \quad (4.21)$$

$$H_y(s) = C(sI - A)^{-1}E \quad (4.22)$$

$$H_z(s) = D(sI - A)^{-1}E \quad (4.23)$$

cujas dimensões são $l \times m$, $p \times m$, $l \times d$ e $p \times d$, respectivamente.

Suponha agora que o DDPKM tem solução, ou seja, a estrutura mostrada na figura 4.2, repetida a seguir, é válida.

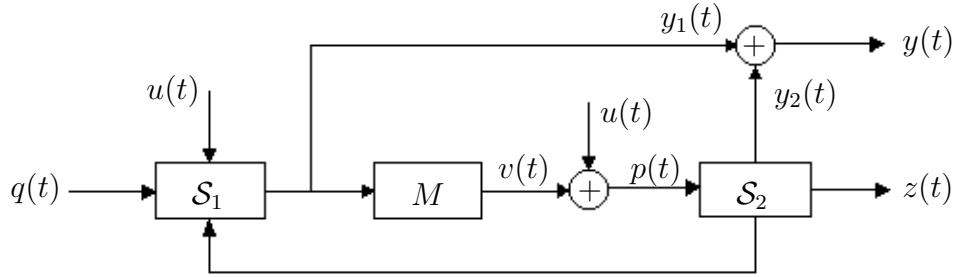


Figura 4.4: Diagrama de blocos esquemático para solução do DDPKM.

A transformada de Laplace dos sinais $y_1(t)$ e $v(t)$ são dados por

$$\hat{y}_1(s) = C(s)\hat{u}(s) + D(s)\hat{q}(s) + L(s)\hat{x}_2(s) \quad (4.24)$$

$$\hat{v}(s) = M\hat{y}_1(s) = MC(s)\hat{u}(s) + MD(s)\hat{q}(s) + ML(s)\hat{x}_2(s) \quad (4.25)$$

onde, usando os blocos da forma da equação (4.10) resulta:

$$C(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 \quad (4.26)$$

$$D(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1}E_1 \quad (4.27)$$

$$L(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1}A_{12}. \quad (4.28)$$

Os sinais $\hat{x}_2(s)$, $\hat{z}(s)$ e $\hat{p}(s)$ são dados por:

$$\hat{x}_2(s) = K(s)\hat{p}(s) \quad (4.29)$$

$$\hat{z}(s) = H(s)\hat{p}(s) \quad (4.30)$$

$$\hat{p}(s) = \hat{v}(s) + \hat{u}(s) \quad (4.31)$$

onde

$$K(s) = (sI - A_{22})^{-1}B_2 \quad (4.32)$$

$$H(s) = D_2(sI - A_{22})^{-1}B_2. \quad (4.33)$$

Substituindo (4.29) e (4.31) em (4.25) tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{v}(s) &= MC(s)\hat{u}(s) + MD(s)\hat{q}(s) + ML(s)K(s)[\hat{v}(s) + \hat{u}(s)] \\ [I - ML(s)K(s)]\hat{v}(s) &= M[C(s) + L(s)K(s)]\hat{u}(s) + MD(s)\hat{q}(s) \end{aligned}$$

donde

$$\hat{v}(s) = [I - ML(s)K(s)]^{-1} \{ M[C(s) + L(s)K(s)]\hat{u}(s) + MD(s)\hat{q}(s) \}. \quad (4.34)$$

Usando as equações (4.30) e (4.31) obtém-se

$$\hat{z}(s) = H(s)\hat{p}(s) = H(s)[\hat{v}(s) + \hat{u}(s)] \quad (4.35)$$

e empregando a equação (4.34) chega-se a:

$$\begin{aligned}
\hat{z}(s) &= H(s)[I - ML(s)K(s)]^{-1} \left\{ M[C(s) + L(s)K(s)]\hat{u}(s) + MD(s)\hat{q}(s) \right\} \\
&+ H(s)\hat{u}(s) \\
\hat{z}(s) &= H(s)[I - ML(s)K(s)]^{-1} \left\{ M[C(s) + L(s)K(s)]\hat{u}(s) + MD(s)\hat{q}(s) \right. \\
&+ \left. [I - ML(s)K(s)]\hat{u}(s) \right\} \\
\hat{z}(s) &= H(s)[I - ML(s)K(s)]^{-1} \left\{ [I_m + MC(s)]\hat{u}(s) + MD(s)\hat{q}(s) \right\}. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Recorrendo à equação (4.19) pode-se escrever que

$$G_z(s) = H(s)[I - ML(s)K(s)]^{-1}[MC(s) + I] \quad (4.37)$$

$$H_z(s) = H(s)[I - ML(s)K(s)]^{-1}MD(s). \quad (4.38)$$

No capítulo 2 foi feita uma breve abordagem sobre matrizes quadradas diagonais próprias. Por conveniência, a sua definição e duas de suas propriedades estão repetidas a seguir.

Definição 4.1 *A matriz racional $M(s)$, quadrada, será chamada diagonal própria quando*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M(s)$$

for uma matriz diagonal inversível.

Uma matriz diagonal própria nada mais é do que uma matriz quadrada cujos elementos $m_{ij}(s)$ são estritamente próprios quando $i \neq j$ e são próprios quando na diagonal principal, para $i = j$.

Há também algumas propriedades bastante simples, tais como:

Propriedade 4.1 *Se $N(s)$ é uma matriz quadrada estritamente própria então $N(s) + I$ será diagonal própria.*

Propriedade 4.2 *A inversa de uma matriz diagonal própria também é diagonal própria.*

As equações (4.37) e (4.38) podem ser rescritas como:

$$G_z(s) = T(s)V(s) \quad (4.39)$$

$$H_z(s) = T(s)W(s) \quad (4.40)$$

onde

$$T(s) = H(s)[I - ML(s)K(s)]^{-1} \quad (p \times m) \text{ é estritamente própria,} \quad (4.41)$$

$$V(s) = I_m + MC(s) \quad (m \times m) \text{ é diagonal própria e} \quad (4.42)$$

$$W(s) = MD(s) \quad (m \times d) \text{ é estritamente própria.} \quad (4.43)$$

Estas afirmações são facilmente justificáveis pelas definições de $H(s)$, $L(s)$, $K(s)$, $C(s)$ e $D(s)$, vistos anteriormente e pela propriedade 4.1.

Sendo $V(s)$ diagonal própria, sua inversa também o será e pode-se escrever, a partir de (4.39),

$$T(s) = G_z(s)V(s)^{-1} \quad (4.44)$$

que levado à equação (4.40) traz

$$H_z(s) = G_z(s)V(s)^{-1}D(s). \quad (4.45)$$

Até este ponto o desenvolvimento é semelhante ao do caso de realimentação total de estados: a existência de uma solução $X_z(s)$ estritamente própria para a equação $G_z(s)X_z(s) = H_z(s)$ é uma condição necessária para a existência de soluções para o DDPKM. Em outras palavras, se o DDPKM tem solução, o DDP também tem.

Considere a figura 4.2 mostrada novamente na figura 4.5.

Entrando com (4.34) para eliminar $v(s)$:

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= [C(s) + J(s) + L(s)K(s)]\hat{u}(s) + D(s)\hat{q}(s) \\ &+ [J(s) + L(s)K(s)][I - ML(s)K(s)]^{-1} \\ &\quad \left\{ [MC(s) + ML(s)K(s)]\hat{u}(s) + MD(s)\hat{q}(s) \right\}.\end{aligned}$$

Agrupando os coeficientes de $\hat{u}(s)$ e $\hat{q}(s)$:

$$\begin{aligned}\hat{y}(s) &= \left\{ C(s) + J(s) + L(s)K(s) + [J(s) + L(s)K(s)][I - ML(s)K(s)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. [MC(s) + ML(s)K(s)] \right\} \hat{u}(s) \\ &+ \left\{ D(s) + [J(s) + L(s)K(s)][I - ML(s)K(s)]^{-1} MD(s) \right\} \hat{q}(s). \\ \hat{y}(s) &= \left\{ C(s) + [J(s) + L(s)K(s)] \right. \\ &\quad \left. \left\{ I + [I - ML(s)K(s)]^{-1} [MC(s) + ML(s)K(s)] \right\} \right\} \hat{u}(s) \\ &+ \left\{ I + [J(s) + L(s)K(s)][I - ML(s)K(s)]^{-1} M \right\} D(s) \hat{q}(s). \\ \hat{y}(s) &= \left\{ C(s) + [J(s) + L(s)K(s)][I - ML(s)K(s)]^{-1} \right. \\ &\quad \left. \left\{ I - ML(s)K(s) \right\} + MC(s) + ML(s)K(s) \right\} \hat{u}(s) \\ &+ \left\{ I + [J(s) + L(s)K(s)][I - ML(s)K(s)]^{-1} M \right\} D(s) \hat{q}(s). \\ \hat{y}(s) &= \left\{ C(s) + [J(s) + L(s)K(s)][I - ML(s)K(s)]^{-1} [I + MC(s)] \right\} \hat{u}(s) \\ &+ \left\{ I + [J(s) + L(s)K(s)][I - ML(s)K(s)]^{-1} M \right\} D(s) \hat{q}(s). \quad (4.51)\end{aligned}$$

Esta expressão pode ser rescrita de forma mais condensada:

$$\hat{y}(s) = [C(s) + R(s)V(s)]\hat{u}(s) + [D(s) + R(s)W(s)]\hat{q}(s) \quad (4.52)$$

onde

$$R(s) = [J(s) + L(s)K(s)][I - ML(s)K(s)]^{-1} \quad (4.53)$$

tem dimensão $l \times m$ e é estritamente própria, $V(s)$ e $W(s)$ são dadas por (4.42) e (4.43).

Podemos finalmente escrever:

$$G_y(s) = C(s) + R(s)V(s) \quad (4.54)$$

$$H_y(s) = D(s) + R(s)W(s). \quad (4.55)$$

Juntando estes últimos desenvolvimentos podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.2 *Dado um sistema descrito freqüencialmente pelas matrizes de transferência $G_z(s)$, $H_z(s)$, $G_y(s)$ e $H_y(s)$ com dimensões $p \times m$, $p \times d$, $l \times m$ e $l \times d$, respectivamente, uma condição necessária e suficiente para que o DDPKM tenha solução é que existam matrizes $T(s)$, $R(s)$, $C(s)$ e $D(s)$ estritamente próprias e com dimensões $p \times m$, $l \times m$, $l \times m$ e $l \times d$, respectivamente, e uma matriz constante M $m \times l$ tais que*

$$G_z(s) = T(s)[I_m + MC(s)] \quad (4.56)$$

$$H_z(s) = T(s)MD(s) \quad (4.57)$$

$$G_y(s) = C(s) + R(s)[I_m + MC(s)] \quad (4.58)$$

$$H_y(s) = D(s) + R(s)MD(s) \quad (4.59)$$

Demonstração:

($\Leftarrow$) A condição é necessária:

A demonstração da necessidade está praticamente feita, basta aplicar a definição de $V(s)$ e $W(s)$ dadas em (4.42) e (4.43) às equações (4.39), (4.40), (4.54) e (4.55).

É de se notar que as equações (4.56) e (4.57) são as condições conhecidas para o DDP tradicional, vistas no teorema 4.2. As duas outras condições, dadas em (4.58) e (4.59), não tão simples, são novas.

($\Rightarrow$) A condição é suficiente:

Para demonstrar a suficiência supor-se-á que existem $T(s)$, $R(s)$, $C(s)$, $D(s)$ e M com as dimensões acima tais que as equações (4.56), (4.57), (4.58) e (4.59) são satisfeitas.

Partindo das relações básicas

$$\hat{z}(s) = G_z(s)\hat{u}(s) + H_z(s)\hat{q}(s) \quad (4.60)$$

$$\hat{y}(s) = G_y(s)\hat{u}(s) + H_y(s)\hat{q}(s) \quad (4.61)$$

obtem-se, após desenvolvimentos triviais:

$$\hat{z}(s) = T(s)\hat{u}(s) + T(s)M[C(s)\hat{u}(s) + D(s)\hat{q}(s)] \quad (4.62)$$

$$\hat{y}(s) = R(s)\hat{u}(s) + R(s)M[C(s)\hat{u}(s) + D(s)\hat{q}(s)] + [C(s)\hat{u}(s) + D(s)\hat{q}(s)] \quad (4.63)$$

Estas equações podem ser visualizadas por meio do diagrama abaixo, que é um caso particular do diagrama básico do DDPKM, visto pela última vez na figura 4.5, e isto indica a existência de solução para o problema.

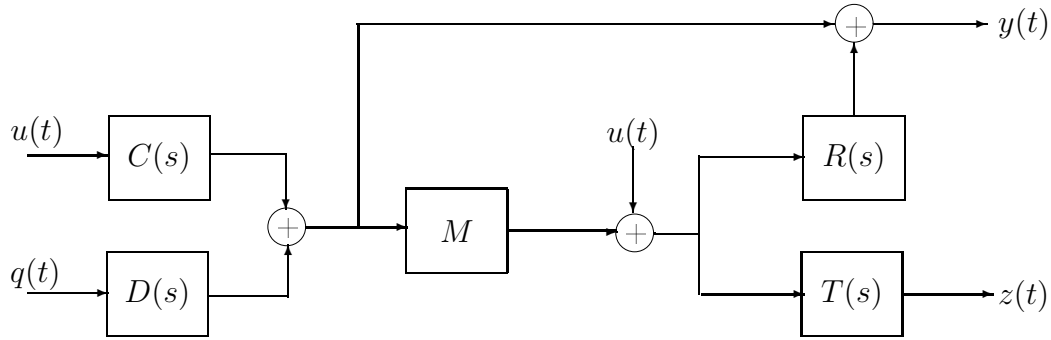


Figura 4.6: Diagrama de blocos esquemático para solução do DDPKM.

□

Este teorema é um importante resultado pois fornece condições de existência para a solução do DDPKM puramente frequenciais, baseadas apenas em matrizes de transferência.

Para ilustrar este resultado, alguns exemplos.

Exemplo 4.2 *Seja o seguinte sistema descrito por:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que pode ser descrito freqüencialmente pelas seguintes matrizes de transferência:

$$\begin{aligned} G_z(s) &= \frac{2s-1}{s(s-1)} & H_z(s) &= \frac{1}{s(s-1)} \\ G_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{s-1}{4s-1}} \\ \frac{1}{s(s-1)} \end{bmatrix} & H_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{s-1}{2s+1}} \\ \frac{1}{s(s-1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para este sistema, as possíveis matrizes $T(s)$, $R(s)$, $C(s)$ e $D(s)$ estritamente próprias que satisfazem as expressões (4.56), (4.57), (4.58) e (4.59) dadas no teorema 4.2 são:

$$T(s) = \frac{2}{s}, \quad R(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{s} \end{bmatrix}, \quad C(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{s-1}{2}} \\ \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{s-1}{2}} \\ \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

e uma matriz constante M

$$M = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, o DDPKM tem solução.

Exemplo 4.3 *Seja o seguinte sistema descrito por:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que pode ser descrito freqüencialmente pelas seguintes matrizes de transferência:

$$\begin{aligned} G_z(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s-1)} \end{bmatrix} & H_z(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1)} & 0 \end{bmatrix} \\ G_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \\ \frac{2}{s} & \frac{s-1}{s(s-1)} \end{bmatrix} & H_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1)} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{s-1}{s(s-1)} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para este sistema, as possíveis matrizes $T(s)$, $R(s)$, $C(s)$ e $D(s)$ estritamente próprias que satisfazem as expressões (4.56), (4.57), (4.58) e (4.59) dadas no teorema 4.2 são:

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}, \quad R(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2}{s} & 0 \end{bmatrix}, \quad C(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix}$$

e uma matriz constante M

$$M = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto o DDPKM tem solução.

Exemplo 4.4 Seja o seguinte sistema descrito por:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que pode ser descrito freqüencialmente pelas seguintes matrizes de transferência:

$$\begin{aligned} G_z(s) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} & H_z(s) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \\ G_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} & H_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para este sistema, as possíveis matrizes $T(s)$, $R(s)$, $C(s)$ e $D(s)$ estritamente próprias que satisfazem as expressões (4.56), (4.57), (4.58) e (4.59) dadas no teorema 4.2 são:

$$T(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}, \quad R(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}, \quad C(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

e uma matriz constante M

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e portanto o DDPKM tem solução.

4.3.1 Outras condições de existência de soluções para o DDPKM

Embora importantes, as condições do teorema 4.2 são de verificação prática complicada pois é preciso garantir a existência de cinco matrizes e verificar a validade de quatro relações. No caso do DDP tradicional, as condições frequenciais podiam ser simplificadas e a solução dependia do estudo de uma única equação envolvendo apenas as matrizes que definem o sistema. Aconteceria algo semelhante neste caso?

Usando as relações (4.42) e (4.43), as relações (4.56), (4.57), (4.58) e (4.59) podem ser rescritas como:

$$G_z(s) = T(s)V(s) \tag{4.64}$$

$$H_z(s) = T(s)W(s) \tag{4.65}$$

$$G_y(s) = C(s) + R(s)V(s) \tag{4.66}$$

$$H_y(s) = D(s) + R(s)W(s) \tag{4.67}$$

onde $V(s)$ é $m \times m$ e diagonal própria e $W(s)$ é $m \times d$ e estritamente própria. Como

$V(s)^{-1}$ existe e é também diagonal própria, tem-se

$$T(s) = G_z(s)V(s)^{-1} \quad (4.68)$$

$$R(s) = [G_y(s) - C(s)]V(s)^{-1}. \quad (4.69)$$

Substituindo estas duas equações nas expressões para $G_y(s)$ e $H_y(s)$ dadas nas equações (4.66) e (4.67) tem-se

$$H_z(s) = G_z(s)V(s)^{-1}W(s) \quad (4.70)$$

$$H_y(s) - D(s) = [G_y(s) - C(s)]V(s)^{-1}W(s). \quad (4.71)$$

Já é possível enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.3 *Dado um sistema descrito freqüencialmente pelas matrizes de transferência $G_z(s)$, $H_z(s)$, $G_y(s)$ e $H_y(s)$ com dimensões $p \times m$, $p \times d$, $l \times m$ e $l \times d$, respectivamente, uma condição necessária e suficiente para que o DDPKM tenha solução é que existam matrizes estritamente próprias $X(s)$ ($m \times d$), $C(s)$ ($l \times m$) e $D(s)$ ($l \times d$) e uma matriz real M ($m \times l$) tais que*

$$H_z(s) = G_z(s)X(s) \quad (4.72)$$

$$H_y(s) - D(s) = [G_y(s) - C(s)]X(s) \quad (4.73)$$

$$X(s) = M[D(s) - C(s)X(s)]. \quad (4.74)$$

Demonstração:

($\Leftarrow$) A condição é necessária:

Para a necessidade basta continuar o desenvolvimento anterior, verificando que $V(s)^{-1}W(s) = X(s)$ é estritamente própria e $m \times d$. Com isto as equações (4.70) e (4.71) se transformam em (4.72) e (4.73).

Com esta mesma definição de $X(s)$ é possível

$$V(s)X(s) = W(s). \quad (4.75)$$

Entrando com (4.42) e (4.43) chega-se a

$$[I_m + MC(s)]X(s) = MD(s) \quad (4.76)$$

que leva, trivialmente, à expressão (4.74).

($\Rightarrow$) A condição é suficiente:

Para a suficiência, considere que $MC(s) = \bar{C}(s)$ é estritamente própria e $m \times m$. A matriz

$$\Delta(s) = I_m + MC(s) \quad (4.77)$$

será diagonal própria e, conseqüentemente, inversível. A equação (4.72) pode ser rescrita como:

$$H_z(s) = G_z(s)\Delta(s)^{-1}\Delta(s)X(s) \quad (4.78)$$

É fácil ver que $G_z(s)\Delta(s)^{-1}$ é estritamente própria e $p \times m$. Chamando $G_z(s)\Delta(s)^{-1} = T(s)$ temos

$$G_z(s) = T(s)\Delta(s) = T(s)[I_m + MC(s)] \quad (4.79)$$

que é a condição (4.56) do teorema 4.2.

A equação (4.78) fica, com o uso do $T(s)$:

$$\begin{aligned} H_z(s) &= T(s)\Delta(s)X(s) \\ &= T(s)[I + MC(s)]X(s). \end{aligned} \quad (4.80)$$

Usando (4.74), isto se transforma em

$$H_z(s) = T(s)MD(s) \quad (4.81)$$

que é a condição (4.57) do teorema 4.2.

A equação (4.73) pode ser rescrita como

$$H_y(s) - D(s) = [G_y(s) - C(s)]\Delta(s)^{-1}\Delta(s)X(s) \quad (4.82)$$

É fácil ver que $[G_y(s) - C(s)]\Delta(s)^{-1} = R(s)$ é estritamente própria e $l \times m$, o que leva a

$$G_y(s) - C(s) = R(s)\Delta(s) = R(s)[I + MC(s)] \quad (4.83)$$

que é a condição (4.58) do teorema 4.2.

Com o uso de $R(s)$, a equação (4.82) fica

$$H_y(s) - D(s) = R(s)\Delta(s)X(s) = R(s)[I + MC(s)]X(s) \quad (4.84)$$

Usando (4.74) esta última expressão recai na condição (4.59) do teorema 4.2.

□

As condições deste teorema envolvem quatro matrizes que devem satisfazer três restrições. Comparado ao teorema 4.2, que envolve cinco matrizes que devem satisfazer quatro restrições, pode-se dizer que houve um progresso.

Além deste aspecto quantitativo, estas novas condições são mais cômodas que as anteriores. A primeira delas, a equação (4.72), é a equação tradicional do DDP. A segunda, a equação (4.73), é uma equação do mesmo tipo, relacionando as matrizes $\bar{H}(s) = H_y(s) - D(s)$ e $\bar{G}(s) = G_y(s) - C(s)$. A terceira condição, a equação (4.74), é novidade e envolve matrizes racionais estritamente próprias e uma matriz numérica.

Exemplo 4.5 *Considere o sistema do exemplo 4.2 aqui repetido:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} G_z(s) &= \frac{2s-1}{s(s-1)} & H_z(s) &= \frac{1}{s(s-1)} \\ G_y(s) &= \left[\frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{4s-1}{s(s-1)}} \right] & H_y(s) &= \left[\frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{2s+1}{s(s-1)}} \right] \end{aligned}$$

Para este sistema, as possíveis matrizes $C(s)$, $D(s)$ que satisfazem as expressões (4.72), (4.73) e (4.74) do teorema 4.3 são

$$C(s) = \left[\frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{2}{s-1}} \right] \quad D(s) = \left[\frac{\frac{1}{s-1}}{\frac{2}{s-1}} \right]$$

onde uma solução $X(s)$ é

$$X(s) = \frac{1}{2s-1}.$$

Exemplo 4.6 Seja o exemplo 4.3 aqui repetido:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} G_z(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s-1)} \end{bmatrix} & H_z(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1)} & 0 \end{bmatrix} \\ G_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \\ \frac{2}{s} & \frac{s+2}{s(s-1)} \end{bmatrix} & H_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s-1)} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{s+2}{s(s-1)} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para este sistema, as possíveis matrizes $C(s)$, $D(s)$ que satisfazem as expressões (4.72), (4.73) e (4.74) do teorema 4.3 são

$$C(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \quad D(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{s-1} & 0 \end{bmatrix}$$

e uma solução $X(s)$ é

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 4.7 *Seja o exemplo 4.4 aqui repetido:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} G_z(s) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} & H_z(s) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \\ G_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} & H_y(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para este sistema, as possíveis matrizes $C(s)$, $D(s)$ que satisfazem as expressões (4.72), (4.73) e (4.74) do teorema 4.3 são

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix} \quad D(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

e uma solução $X(s)$ é

$$X(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

Pode-se pensar em simplificar ainda mais as condições do teorema 4.3, reduzindo seu número:

Corolário 4.1 *Dado um sistema descrito freqüencialmente pelas matrizes de transferência $G_z(s)$, $H_z(s)$, $G_y(s)$ e $H_y(s)$ com dimensões $p \times m$, $p \times d$, $l \times m$ e $l \times d$, respectivamente, uma condição necessária para que o DDPKM tenha solução é que*

existam matrizes estritamente próprias $X(s)$ ($m \times d$), $C(s)$ ($l \times m$) e $D(s)$ ($l \times d$) tais que

$$H_z(s) = G_z(s)X(s) \quad (4.85)$$

$$H_y(s) - D(s) = [G_y(s) - C(s)]X(s). \quad (4.86)$$

A demonstração é óbvia, uma ocorrência imediata do teorema 4.3. Tem-se agora apenas três matrizes e duas relações a serem solucionadas, o que simplifica bastante as condições de existência de soluções para o DDPKM. Além disso, as relações (4.85) e (4.86) são ambas do tipo $G(s)X(s) = H(s)$, cujo estudo é muito conhecido.

Porém o preço a se pagar por estas simplificações é o fato de que estas condições são apenas necessárias. Seriam elas também suficientes? Este ponto do trabalho requer uma pesquisa maior e, talvez, estas condições sejam também suficientes para determinadas classes de sistemas.

4.4 Conclusão

Foram apresentados, neste capítulo, novos conceitos para o DDPKM. Primeiramente, mostrou-se a visão estrutural deste problema e sob que aspectos este tem solução. A seguir, caracterizou-se as condições de existência de soluções deste problema a partir do enfoque freqüencial, sendo apresentadas algumas condições necessárias e suficientes. Nota-se que, comparativamente ao DDP, o DDPKM apresenta mais condições a satisfazer para que este tenha solução, o que já era de se esperar uma vez que está sendo feita uma realimentação estática de saída.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

O Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) ainda é, nos dias de hoje, objeto de grande investigação devido ao fato da solução teórica deste problema constituir um excelente exemplo da aplicação de alguns dos conceitos fundamentais da chamada abordagem geométrica para o controle de sistemas lineares. É por este motivo que, há mais de três décadas, este problema vem sendo exaustivamente estudado sob a ótica da Teoria da Invariância.

Entretanto, o cálculo de subespaços invariantes, para muitos sistemas, pode ser bastante trabalhoso. Este talvez tenha sido um forte estímulo para a busca de soluções para o DDP baseadas no enfoque freqüencial. Em outras palavras, ao invés de se calcular subespaços invariantes, buscaram-se resultados que possibilitem dizer se o DDP terá solução ou não, manipulando-se apenas as matrizes de transferência de controle e distúrbio do sistema. Desta maneira, alguns importantes resultados tanto para o Problema de Rejeição de Distúrbios (DDP) como para o Problema de Rejeição de Distúrbios com Estabilidade (DDPS) já foram obtidos empregando-se relações entre as matrizes de transferência.

Estes resultados foram revistos no capítulo 2 deste trabalho. Lá pode ser visto

que sob o enfoque geométrico a solução do DDP para um sistema

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ z(t) = Dx(t) & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

está condicionada a algumas propriedades de um subespaço denominado $\mathcal{V}^*$. Este é o maior subespaço (A, B) -invariante contido no espaço nulo a direita de D , denotado por $\mathcal{K}$. Para o DDP ter solução, é necessário que $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^*$. Analogamente ao DDP, o DDPS tem a sua solução relacionado a $\mathcal{V}_g^*$, o maior subespaço (A, B) -invariante contido em $\mathcal{K}$ tal que o sistema realimentado é estável, e como para o DDP, o DDPS terá solução se $\mathcal{E}$, a imagem da matriz E , estiver contido em $\mathcal{V}_g^*$.

Já sob o enfoque freqüencial, a solução do DDP está associada à existência de soluções para a equação

$$G_z(s)X_z(s) = H_z(s), \quad (5.2)$$

onde $G_z(s)$ e $H_z(s)$ são matrizes racionais próprias, com dimensões $p \times m$ e $p \times q$ respectivamente, e dadas por

$$G_z(s) = D(sI - A)^{-1}B \quad (5.3)$$

$$H_z(s) = D(sI - A)^{-1}E \quad (5.4)$$

enquanto $X_z(s)$ é a solução da equação matricial com dimensão $m \times q$. Como visto, a solução do DDP não mais está relacionada à existência de um subespaço invariante e sim à existência de uma matriz racional estritamente própria $X_z(s)$ tal que a expressão (5.2) seja verdadeira. Analogamente ao DDP, o DDPS tem solução se existir uma $X_z(s)$ estritamente própria e estável. Além de abordar o DDP sob o enfoque geométrico e freqüencial, no capítulo 2 também foi mostrada a visão estrutural deste problema. O DDP tem solução se for possível representar o diagrama de blocos do sistema na forma da figura 5.1 onde, escrevendo na forma matricial obtém-se:

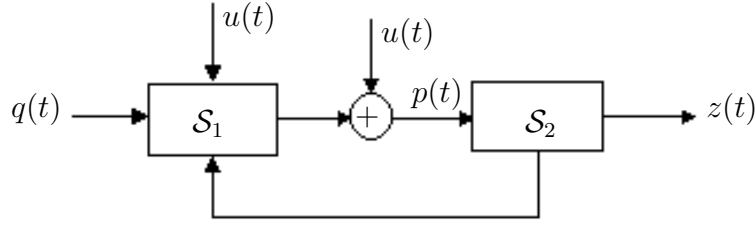


Figura 5.1: Diagrama de blocos esquemático para para solução do DDP.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_2 D_1 & A_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} q(t) \\ \hat{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & D_2 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Já no capítulo 3 foi apresentado o Problema de Rejeição de Distúrbios por Realimentação Estática de Saída (DDPKM), principal objeto de estudo deste trabalho, e a sua solução baseada no enfoque geométrico. A formulação deste problema também é bastante simples. Seja o sistema

$$\mathcal{S} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Eq(t) & , \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \\ z(t) = Dx(t) \end{cases} \quad , \quad t \geq 0 \tag{5.6}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, $q(t) \in \mathbb{R}^d$ é o vetor de entradas de distúrbios, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de saídas medidas e $z(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas a serem controladas. O objetivo é encontrar, se possível, uma lei de controle por realimentação estática de saída,

$$u(t) = Ky(t), \tag{5.7}$$

tal que a matriz de transferência que relaciona a entrada de distúrbio $q(t)$ e a saída controlada $z(t)$ seja nula.

Apesar de sua formulação também ser bastante simples, a solução do DDPKM, baseada na Teoria da Invariância, é um pouco mais trabalhosa quando comparada ao DDP. Isto se deve ao fato da solução está relacionada com a existência de um subespaço $\mathcal{V}$ que seja (A, B) - e (C, A) - invariante e tal que $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$, onde $\mathcal{E}$ denota a

imagem da matriz E e $\mathcal{K}$ o espaço nulo a direita de D . Equivalentemente, o DDPKM tem solução se e somente se existe um subespaço $\mathcal{V}$ e uma matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times l}$ tais que $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$ e $(A + BKC)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. Nota-se que, comparado ao DDP, sob o enfoque geométrico, há mais algumas restrições para as condições de solução do DDPKM. Além disso, outro fator que dificulta a verificação destas condições é que não existe nenhum algoritmo na literatura para o cálculo deste subespaço $\mathcal{V}$.

Estimulados por este fato, no capítulo 4 buscou-se caracterizar as condições de existência de soluções para o DDPKM sob o enfoque freqüencial. Inicialmente, foi mostrada uma nova visão estrutural do problema, a partir da qual podem-se desenvolver condições necessárias e suficientes para a solução do problema. De forma análoga ao DDP, o DDPKM tem solução se for possível representar o diagrama de blocos do sistema na forma mostrada na figura 5.2, onde M é um ganho estático.

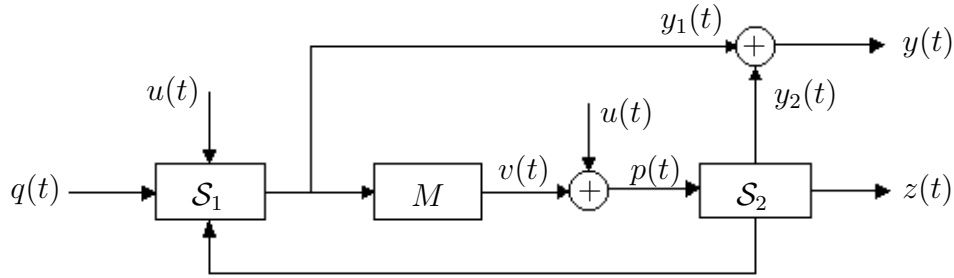


Figura 5.2: Diagrama de blocos esquemático para solução do DDPKM.

Escrevendo na forma matricial, este diagrama de blocos torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_2 M C_1 & A_{22} \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix} q(t) \\ \hat{y}(t) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & D_2 \end{bmatrix} \hat{x}(t).\end{aligned}\tag{5.8}$$

Esta forma canônica, assim como o diagrama de blocos mostrado na figura 5.2 estão associados às condições de solução do DDPKM.

Ou seja, a visão estrutural para o DDPKM é um grande avanço nos estudos deste problema: ao invés de se ter de calcular um determinado subespaço, cuja verificação de existência é muito complicada na prática, é necessário obter apenas uma transformação de similaridade que coloque o sistema na forma dada em (5.8), com a qual é possível afirmar se o DDPKM para o sistema considerado terá ou não solução.

Neste mesmo capítulo 4, também foram desenvolvidas algumas condições necessárias e suficientes para a solução do DDPKM sob o enfoque freqüencial. Um importante resultado obtido foi que para um sistema descrito por $G_z(s)$, $H_z(s)$, $G_y(s)$ e $H_y(s)$ com dimensões $p \times m$, $p \times d$, $l \times m$ e $l \times d$, respectivamente, uma condição necessária e suficiente para que o DDPKM tenha solução é que existam matrizes $T(s)$, $R(s)$, $C(s)$ e $D(s)$ estritamente próprias e com dimensões $p \times m$, $l \times m$, $l \times m$ e $l \times d$, respectivamente, e uma matriz constante M ($m \times l$) tais que

$$G_z(s) = T(s)[I_m + MC(s)] \quad (5.9)$$

$$H_z(s) = T(s)MD(s) \quad (5.10)$$

$$G_y(s) = C(s) + R(s)[I_m + MC(s)] \quad (5.11)$$

$$H_y(s) = D(s) + R(s)MD(s). \quad (5.12)$$

A partir deste resultado, desenvolveu-se uma outra condição necessária e suficiente: para um sistema descrito freqüencialmente pelas matrizes de transferência $G_z(s)$, $H_z(s)$, $G_y(s)$ e $H_y(s)$ com dimensões $p \times m$, $p \times d$, $l \times m$ e $l \times d$, respectivamente, uma condição necessária e suficiente para que o DDPKM tenha solução é que existam matrizes estritamente próprias $X(s)$ ($m \times p$), $C(s)$ ($l \times m$) e $D(s)$ ($l \times d$) e uma matriz real M ($m \times l$) tais que

$$H_z(s) = G_z(s)X(s) \quad (5.13)$$

$$H_y(s) - D(s) = [G_y(s) - C(s)]X(s) \quad (5.14)$$

$$X(s) = M[D(s) - C(s)X(s)]. \quad (5.15)$$

A consequência deste teorema é que, para um sistema descrito freqüencialmente pelas matrizes de transferência $G_z(s)$, $H_z(s)$, $G_y(s)$ e $H_y(s)$ com dimensões $p \times m$, $p \times d$, $l \times m$ e $l \times d$, respectivamente, uma condição necessária para que o DDPKM tenha solução é que existam matrizes estritamente próprias $X(s)$ ($m \times p$), $C(s)$ ($l \times m$) e $D(s)$ ($l \times d$) tais que

$$H_z(s) = G_z(s)X(s) \quad (5.16)$$

$$H_y(s) - D(s) = [G_y(s) - C(s)]X(s). \quad (5.17)$$

Com isto, este trabalho apresentou novas contribuições ao estudo do DDPKM. É claro que, apesar dos resultados aqui encontrados, muitos trabalhos podem ainda ser desenvolvidos para os problemas de rejeição de distúrbios em geral. Entre os trabalhos que podem ser desenvolvidos, destacam-se:

1. A solução do DDP, quando ela existe, não é única, exceto para o caso particular em que $p \geq m$, onde o problema não tem solução ou tem uma única solução que pode ser facilmente encontrada [55]. Um problema interessante seria a parametrização destas soluções, o que, no caso geral, é de difícil solução. Uma alternativa, como já feito por alguns autores, é resolvê-lo para algumas classes de sistemas.
2. Para o DDPKM, pode-se ainda pensar em aperfeiçoar as condições necessárias e suficientes para a solução deste problema aqui obtidas no enfoque freqüencial, buscando condições mais simples que aquelas obtidas neste trabalho. Uma opção que pode ser adotada seria buscar tais condições para algumas classes

de sistemas. Outra pesquisa que pode ser realizada é encontrar as condições de existência de soluções para o DDPKM com estabilidade, problema este que até o momento não foi abordado na literatura.

3. Finalmente, pode-se estudar os demais problemas de rejeição de distúrbios, desenvolvendo-se a sua visão estrutural e as suas condições de existência de soluções sob o enfoque freqüencial.

Referências Bibliográficas

- [1] BANDEIRA, J. C., *Estudos Adicionais Sobre a Equação $G(s)X(s) = H(s)$* . Tese de M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1992.
- [2] BASILE, G., MARRO, G., *Controlled and conditioned invariants in linear system theory*, New Jersey, Prentice Hall, 1992.
- [3] BASILE, G., MARRO, G., *Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory*, Journal of Optimization Theory and Applications, v.3, pp. 306-315, 1968.
- [4] BASILE, G., MARRO, G., *Self-bounded controlled invariant subspaces: a straightforward approach to constrained controllability* *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*, Journal of Optimization Theory and Applications, v.38, pp. 71-81, 1982.
- [5] BHATTACHARYYA, S. P., DEL NERO GOMES, A. C., HOWZE, J., *The Structure of Robust Disturbance Rejection Control*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.28, n.9, pp. 874-881, setembro 1983.
- [6] BHATTACHARYYA, S. P., *Frequency Domain Conditions for Disturbance Rejection*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.25, n.6, pp. 1211-1213, dezembro 1980.

- [7] BONILLA ESTRADA, M., MALABRE, M., *Structural conditions for disturbance decoupling with stability using proportional and derivative control laws*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.46, n.1, pp. 160-165, janeiro 2001.
- [8] BONILLA ESTRADA, M., MALABRE, M., ACOSTA, P. S., "*Disturbance Decoupling with Stability using PID Control Laws*". In: Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control Lake Buena Vista, dezembro 1994.
- [9] CAMART, J. F., MALABRE, M., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., *Fixed poles of simultaneous disturbance rejection and decoupling: a geometric approach*, Automatica, v.37, n.2, pp. 297-302, fevereiro 2001.
- [10] CHANG, M., RHODES, I. B., *Disturbance localization in linear systems with simultaneous decoupling, pole assignment, or stabilization*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.20, n.4, pp. 518-523, agosto 1975.
- [11] CHEN, B. M., *Solvability conditions for disturbance decoupling problems with static measurement feedback*, International Journal of Control, v.68, n.1, pp. 51-60, 1997.
- [12] CHEN, B. M., MAREELS, I. M. Y., ZHENG, Y. *et al.*, *Solutions to disturbance decoupling problem with constant measurement feedback for linear systems*, Automatica, v.36, pp. 1717-1724, novembro 2000.
- [13] CHEN, C. T., *Linear System Theory and Design*, New York, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- [14] CHU, D., MALABRE, M., *Numerically reliable design for proporcional and derivative state-feedback decoupling controller*, Automatica, v.38, n.12, pp. 2121-2125, dezembro 2002.

- [15] COMMAULT, C., DION, J. -M., PEREZ, A., *Disturbance rejection for structured systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.36, n.7, pp. 884-887, julho 1991.
- [16] DEL NERO GOMES, A. C., *Caracterização Estrutural de Sistemas de Controle Invariantes*. Tese de D.Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1980.
- [17] DEL NERO GOMES, A. C., BHATTACHARYYA, S. P., "*Frequency domain structure for disturbance rejection*". In: Proceedings of the 8th IFAC World Congress, Kyoto, Japan, agosto 1981.
- [18] DEL NERO GOMES, A. C., NORONHA, T. M., "*Estudos adicionais sobre a equação $G(s)X(s) = H(s)$* ". In: 8^o CBA-UFPA, Belém, PA, 1990.
- [19] DEL-MURO-CUELLAR, B., MALABRE, M., *Fixed poles of disturbance rejection by dynamic measurement feedback: a geometric approach*, Automatica, v.37, n.2, pp. 231-238, fevereiro 2001.
- [20] DEL-MURO-CUELLAR, B., MALABRE, M., "*On the fixed poles for the disturbance rejection by dynamic output feedback*". In: Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control San Diego, California, USA, dezembro 1997.
- [21] DÓREA, C. E. T., MILANI, B. E. A., *Disturbance decoupling in a class of linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.42, n.10, pp. 1427-1431, outubro 1997.
- [22] DÓREA, C. E. T., MILANI, B. E. A., *A computational method for optimal L-Q regulation with simultaneous disturbance decoupling*, Automatica, v.31, n.1, pp. 155-160, janeiro 1995.

- [23] DÓREA, C. E. T., MILANI, B. E. A, *Rejeição de perturbação por realimentação estática de saída em sistemas lineares*, Controle & Automação, v.14, n.1, pp. 1-8, março 2003.
- [24] FORNEY JR., G. D., *Minimal basis of rational vector spaces with applications to multivariable systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, v.13, n.3, pp. 493-520, 1975.
- [25] GRIZZLE, J. W., ISIDORI, A., *Block non interacting control with stability via static feedback*, Mathematics of Control, Signals and Systems, v.2, pp. 315-341, 1989.
- [26] HAMANO, F., FURUTA, K., *Localization of disturbances and output decomposition in decentralized linear multivariable systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.22, n.4, pp. 551-562, 1975.
- [27] HAUTUS, M. L., *(A,B) -invariant and stabilizability subspaces, a frequency domain description*, Automatica, v.16, n.6, pp. 703-707, novembro 1980.
- [28] ICART, S., LAFAY, J. F., MALABRE, M., *A unified study of the fixed modes of systems decoupled via regular static state feedback*, Joint Conference on New Trends in System Theory, Gênes-Talie, pp. 425-432, Boston, Birkhauser, 1990.
- [29] IMAI, H., AKASHI, H., *Disturbance localization and pole shifting by dynamic compensator*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.26, n.1, pp. 226-235, fevereiro 1981.
- [30] KAILATH, T., *Linear Systems*, New Jersey, Prentice Hall, 1980.
- [31] KOUMBOULIS, F. N., TZIERAKIS, K. G., *Meeting transfer function requirement via static measurement output feedback*, Journal of the Franklin Institute - Engineering and Applied Mathematics, v.335B, pp. 661-677, 1998.

- [32] KOUSSIOURIS, T. G., *A frequency domain approach to the block decoupling problem ii: Pole assignment while block decoupling a minimal system by state feedback and a constant non singular input transformation and the observability of the block decoupled system*, International Journal of Control, v.32, pp. 443-464, 1980.
- [33] KOUSSIOURIS, T. G., TZIERAKIS, K. G., *Frequency-domain conditions for disturbance rejection and decoupling with stability or pole placement*, Automatica, v.32, n.2, pp. 229-234, fevereiro 1986.
- [34] KOUSSIOURIS, T., TZIERAKIS, K., *Rejection of measurable disturbances with decoupling or pole placement*. In: Proceedings of the third European control conference (ECC'95), pp. 2257-2262, Rome, Italy, 1995.
- [35] LINNEMAN, A. , *"A condensed form for disturbance decoupling with simultaneous pole placement using state feedback"*. In: Proceedings 10th IFAC World Congress, pp. 92-97, Munich, 1987.
- [36] LOPEZLENA ESTRADA, R., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., *Fixed poles and Disturbance Rejecting feedback Synthesis*, Automatica, v.35, n.10, pp. 1737-1740, outubro 1999.
- [37] MALABRE, M., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., *Simultaneous Disturbance Rejection and Decoupling with Stability: A Structural Approach*. In: Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control Lake Buena Vista, dezembro 1994.
- [38] MALABRE, M., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., *Fixed poles for disturbance rejection*, IFAC Conference on systems, structure and control. Nantes. 1995.

- [39] MALABRE, M., MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., DEL-MURO-CUELLAR, B., *On the Fixed Poles for Disturbance Rejection*, Automatica, v.33, n.6, pp. 1209-1211, junho 1997.
- [40] MARTÍNEZ-GARCÍA, J. C., MALABRE, M., *Simultaneous disturbance rejection and regular row by row decoupling with stability: A geometric approach*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.40, n.2, pp. 362-369, fevereiro 1995.
- [41] MITA, T., *On necessary and sufficient conditions for disturbance localization in single input-single output systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.21, n.4, pp. 606-607, agosto 1976.
- [42] MORSE, A. S., *Minimal solutions to transfer matrix equations*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.21, pp. 131-133, 1974.
- [43] OHMS, D. Y., HOWZE, J. W., BHATTACHARYYA, S. P., *Structural synthesis of multivariable controllers*, Automatica, v.21, n.1, pp. 35-55, janeiro 1985.
- [44] PARASKEVOPOULOS, P. N., KOUMBOULIS, F. N., TZIERAKIS, K. G., *Disturbance rejection on left-invertible systems*, Automatica, v.28, n.2, pp. 427-430, março 1992.
- [45] PERNEBO, L., *An algebraic theory for the design of controllers for linear multi-variable systems. Part I and Part II*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.26, n.1, pp. 171-194, fevereiro 1981.
- [46] SCHUMACHER, J. M. , *Compensator synthesis using (C,A,B) -pairs*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.25, n.6, pp. 1133-1138, dezembro 1980.
- [47] SILVA, P. S. P., LEITE, V. M. P., *Static reachability and static decoupling of linear time-invariant systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.36, n.7, pp. 880-884, julho 1991.

- [48] SILVERMAN, L. M., *Inversion of multivariable linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.24, n.3, pp. 270-276, junho 1969.
- [49] VARDULAKIS, A. I. G., *Proper rational matrix diophantine equations and the exact model matching problem*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.29, n.5, pp. 475-477, maio 1984.
- [50] VARDULAKIS, A. I. G., LIMEBEER D. N. J., KARCANIAS, N., *Structure and Smith-MacMillan form of a rational matrix at infinity*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.35, n.4, pp. 701-725, agosto 1982.
- [51] VARDULAKIS, A. I. G., KARCANIAS, N., *On the stable exact model matching problem*, Systems & Control Letters, v.5, n.4, pp. 237-242, fevereiro 1985.
- [52] VARDULAKIS, A. I. G., KARCANIAS, N., *Structure, Smith-MacMillan form and coprime MFDs of a rational matrix inside a region $\mathcal{P} = \Omega \cup \{\infty\}$* , International Journal of Control, v.38, n.5, pp. 927-957, 1983.
- [53] WANG, S. H., DAVISON, E. J., *A minimization algorithm for the design of linear multivariable systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, v.18, n.3, pp. 220-225, junho 1973.
- [54] WILLEMS, J. C., COMMAULT, C., *Disturbance decoupling by measurement feedback with stability or pole-placement*, SIAM Journal on Control and Optimization, v.19, pp. 490-504, 1981.
- [55] WOLOVICH, W. A. , *Linear Multivariable Systems*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [56] WOLOVICH, W. A., FALB, P. L., *Invariants and canonical forms under dynamics compensation*, SIAM Journal on Control and Optimization, v.14, n.6, pp. 996-1008, novembro 1976.

- [57] WONHAM, W. M., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, New York, Springer-Verlag, 1979.
- [58] WONHAM, W. M., MORSE, A. S., *Decoupling and pole assignment in linear multivariable system: A geometric approach*, SIAM Journal on Control and Optimization, v.8, n.1, pp. 1-18, 1970.