

CONTROLE DE SISTEMAS PASSIVOS UTILIZANDO O PARADIGMA
SATISFATÓRIO

Josiel Alves Gouvêa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. Gilberto de Oliveira Corrêa, Ph.D.

Prof. Eugenius Kaszkurewicz, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2004

GOUVÊA, JOSIEL ALVES

Controle de Sistemas Passivos utilizando
o Paradigma Satisfatório [Rio de Janeiro]
2004

X, 93 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Elétrica, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Teoria de decisão satisfatória
2. Função de Lyapunov
3. Controle Satisfatório
4. Controle Preditivo

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus queridos pais e à Ingrid, minha preciosa esposa, dedico esta importante conquista.

Agradecimentos

“A sabedoria é a coisa principal; adquiere, pois, a sabedoria; sim, com tudo o que possues adquiere o conhecimento. Exalta-a, e ela te exaltará; e, abraçando-a tu, ela te honrará.”

Provérbios de Salomão 4: 7 e 8

Muitos foram os que contribuíram direta e indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho. A todos, meu muito obrigado. Mas quero nesse espaço, reconhecer a participação decisiva de algumas pessoas. Agradeço à todos os amigos do laboratório de controle, em especial ao grande professor Fernando Lizarralde, pela atenção e imprescindível, precisa e segura orientação. Agradeço aos meus queridos pais, que por tudo que fizeram e fazem por mim, possuem, entre todas as pessoas, a maior parcela das conquistas por mim obtidas. Agradeço à minha valiosíssima esposa, pela compreensão em não me ter ao seu lado em muitos momentos, devido à exigência deste trabalho. Finalmente, agradeço à Deus, que pela Sua Misericórdia e Amor infinito e insondável, me capacita à superar os obstáculos. Sem Ele, nada sou.

“Não é dos fortes a vitória, nem dos que correm melhor, mas dos sinceros e fiéis, pois os que esperam no Senhor renovam as suas forças, sobem com asas como águias; correm e não se cansam; caminham e não se fatigam.”

Isaías 40:31

Rio de Janeiro, 16 de abril de 2004

Josiel Alves Gouvêa

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE DE SISTEMAS PASSIVOS UTILIZANDO O PARADIGMA SATISFATÓRIO

Josiel Alves Gouvêa

Março/2004

Orientador: Prof. Fernando Cesar Lizarralde

Programa: Engenharia Elétrica

Este trabalho aborda a estabilização de sistemas não lineares utilizando a estratégia de controle satisfatória recentemente proposta na literatura. Esta estratégia é baseada na teoria de decisão satisfatória e define um conjunto de leis de controle assintoticamente estabilizantes. Estas leis são parametrizadas para atender em forma instantânea uma desigualdade entre uma função que quantifica o benefício e outra quantificando o custo. Este controlador se constitui em uma ferramenta para o projeto de leis de controle para sistemas não lineares a partir de funções de Lyapunov de controle. A robustez do controlador satisfatório é analisada, caracterizando um conjunto satisfatório robusto. Para proporcionar um maior entendimento, o controle satisfatório é aplicado e analisado em sistemas lineares. Utilizando a versão não linear da propriedade de Kalman-Yacubovitch-Popov, o controle satisfatório é aplicado em sistemas passivos. Para ilustrar a abordagem proposta, são considerados o controle da atitude de um corpo rígido e o controle do fluxo de dados em uma rede de comunicação com tráfego elástico.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CONTROL OF PASSIVE SYSTEMS USING THE SATISFICING PARADIGM

Josiel Alves Gouvêa

Março/2004

Advisor: Prof. Fernando Cesar Lizarralde

Department: Electrical Engineering

This work deals with stabilization of nonlinear systems using the satisficing control strategy recently proposed in the literature. This strategy is based on the satisficing decision theory and defines a set of asymptotically stabilizing control laws which are parameterized to attend a instantaneous cost-benefit inequality. The satisficing control becomes an important tool for control desing of nonlinear systems using control Lyapunov functions. The robustness of the proposed controller is analyzed, characterizing a robust satisficing set. The satisficing control is applied to linear systems in order to provide a better understanding. Using the nonlinear version of Kalman-Yacubovitch-Popov property, the satisficing control is applied to passive systems. To illustrate this new approach to satisficing control, it is considered the rigid body's attitude control and the data flow control in communication network with elastic traffic.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Objetivo principal da tese	5
1.2 Casos de Estudo	7
1.2.1 Controle de fluxo de dados numa rede de computadores	7
1.2.2 Controle de atitude de um corpo rígido	8
1.3 Organização da tese	9
2 Controle Satisfatório	11
2.1 Controlador satisfatório	12
2.2 Sintonia do controlador satisfatório	16
2.3 Controle Satisfatório Robusto	19
2.4 Controle satisfatório aplicado em sistemas lineares	24
2.4.1 Caso de estudo I: Controle de um integrador	25
2.4.2 Caso de estudo II: Controle de um duplo integrador	26
2.4.3 Controle satisfatório robusto aplicado em plantas lineares	35
3 Controle satisfatório em sistemas passivos	38
3.1 Sistemas passivos: Definição e propriedades	40
3.2 Controle satisfatório passivo	42
3.2.1 Controle satisfatório passivo: Desenvolvimento	43
3.3 Controle Satisfatório Passivo Robusto	47
4 Controle do fluxo de dados em redes de computadores	49
4.1 Caso de estudo I: Modelo de rede linear	55
4.2 Modelo Não Linear	59
4.2.1 Resultado da Simulação	63
5 Controle de atitude de um corpo rígido	68
5.1 Controle de Atitude	69
5.1.1 Controle de Atitude: Resultados das Simulações	73
5.1.1.1 Problema de regulação	74
5.1.1.2 Problema de rastreamento	74
6 Discussão e Conclusões Gerais	77
6.1 Propostas para trabalhos futuros	78

Apêndices	79
A Provas dos teoremas do Controle Satisfatório	79
Referências Bibliográficas	88

Lista de Figuras

2.1	Controle satisfatório do sistema $\dot{x} = x^2 e^{-x} + u$: Resposta do sistema . . .	19
2.2	Controle satisfatório do sistema $\dot{x} = x^2 e^{-x} + u$: Sinal de controle	20
2.3	As funções seletividade e rejeitabilidade como função de u , para um x particular e o conjunto satisfatório resultante	26
2.4	Controle satisfatório de um duplo integrador: Diagrama de blocos . . .	29
2.5	Controle satisfatório de um duplo integrador: Resposta do sistema . . .	29
2.6	Controle satisfatório de um duplo integrador: Sinal de controle	30
2.7	Controle satisfatório de um duplo integrador: Erro de saída	30
2.8	Função custo $J(\eta, \nu, x)$ para $x^T = [1 \quad 1]$	31
2.9	Curvas de nível e gradiente para $x^T = [1 \quad 1]$	31
2.10	Comportamento não linear do controle satisfatório	32
2.11	Controle ótimo de um duplo integrador: Diagrama de blocos	33
2.12	Controle ótimo de um duplo integrador: Resposta do sistema	34
2.13	Controle ótimo de um duplo integrador: Sinal de controle	34
4.1	Célula de dados da rede ATM/ABR	52
4.2	Rede de comunicação controlada por taxa: Diagrama de blocos.	56
4.3	Modelo linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem atraso.	57
4.4	Modelo linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do sistema com atraso e preditor de Smith	57
4.5	Modelo linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do sistema com atraso fora da malha de realimentação	58
4.6	Controle satisfatório por taxa do fluxo de dados de uma rede de comunicação: Resposta do sistema	58
4.7	Modelo não linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos da interconexão entre fontes e enlaces.	59
4.8	Modelo não linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do controle de fluxo de dados.	60
4.9	Modelo não linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos da representação equivalente do controle de fluxo de dados.	61
4.10	Exemplo de rede de comunicação	63
4.11	Modelo não linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do sistema com o controle satisfatório passivo.	64

4.12	Controle satisfatório passivo descentralizado do fluxo de dados de uma rede de comunicação: Resposta do sistema e sinal de controle	66
4.13	Controle proporcional descentralizado do fluxo de dados de uma rede de comunicação: Resposta do sistema e sinal de controle	67
5.1	Corpo rígido: Sistema com realimentação proporcional	71
5.2	Corpo rígido: Sistema simulado	73
5.3	Controle de atitude - Problema de Regulação: Quaternion do erro - Parte vetorial	75
5.4	Controle de atitude - Problema de Regulação: Sinal de Controle	75
5.5	Controle de atitude - Rastreamento de trajetória: Quaternion do erro - Parte Vetorial	76
5.6	Controle de atitude - Rastreamento de trajetória: Sinal de Controle	76

Capítulo 1

Introdução

Problemas de controle caracterizam-se por dois objetivos principais: alcançar a finalidade principal do controlador, e.g. rastreamento e/ou regulação e; satisfazer os critérios de desempenho, como menor esforço de controle e/ou tempo mínimo.

Usualmente, essas duas metas são combinadas em um único índice de desempenho a ser minimizado aplicando técnicas baseadas no princípio de otimalidade de Bellman (Bellman 1962) ou o princípio do mínimo de Pontryagin (Pontryagin, Boltyanski, Gamkrelidze & Mischenko 1962), com o objetivo de se obter a melhor solução com respeito a um dado índice de desempenho.

Quando for possível, viável e prático, o controle ótimo deve ser preferencialmente escolhido. Contudo, no caso de sistemas não lineares, uma solução ótima nem sempre é fácil e/ou possível de ser obtida. Nesses casos, geralmente utiliza-se um modelo simplificado do sistema (e.g. uma versão linearizada), tal que a solução ótima do modelo simplificado seja satisfatória para o sistema original. Uma outra opção é a utilização de uma solução *ad hoc* baseada na noção vaga e imprecisa de desejabilidade¹ (Cornell 1990). Essas abordagens são problemáticas e se falharem, deve-se procurar paradigmas alternativos.

Os princípios de otimização e o projeto *ad hoc* não são os únicos paradigmas disponíveis. A área econômica tem gerado alguns paradigmas alternativos. Em 1955,

¹Para cada resposta y_i do sistema associa-se uma função desejabilidade $d_i(y_i)$, onde $0 \leq d_i \leq 1$, com $d_i(y_i) = 0$ representando um valor de y_i completamente indesejável e $d_i(y_i) = 1$ representando um valor de y_i ideal ou completamente desejável. Estas desejabilidades individuais são então combinadas em uma média geométrica, que dá como resposta a desejabilidade geral.

H.A. Simon desafiou a teoria econômica clássica, cujo comportamento era essencialmente racional (Stirling 2003), e onde as decisões eram tomadas com base em todas as informações disponíveis, visando assegurar um resultado possivelmente ótimo para cada decisão adotada. Diferentemente disto, H.A. Simon defendeu que, devido à complexidade do mundo econômico, não há como se obter informações suficientes que garantam um resultado ótimo, logo as decisões tomadas devem gerar um resultado aceitável, que embora não sendo obrigatoriamente ótimo, supera pelo menos um padrão mínimo. Simon chamou esta ambição menor na tomada de decisão de “racionalidade limitada” ou “comportamento racional intencionado” e denominou os resultados gerados de “satisfatórios”. Em (Simon 1955) coloca-se o seguinte argumento: “De forma geral, a tarefa é trocar ... racionalidade global ... por um tipo de comportamento racional que é compatível com as informações disponíveis e a capacidade computacional que se possui atualmente ...” e também é defendida a aplicação de um padrão ou nível de aspiração mínimo: “Se, ao invés de se requerer que o pagamento seja maximizado, nós requerermos somente que o pagamento exceda uma dada quantidade, então ... não é necessário determinar se existe um plano alternativo com um pagamento ainda mais alto”. Soluções que encontram um padrão mínimo, possivelmente obtidas com parte das informações ou restrições computacionais, obedecem o princípio satisfatório, sendo portanto chamadas de soluções satisfatórias. O conceito de satisfatório é mais geral que o conceito de otimização. Uma solução ótima é claramente satisfatória, mas a noção de um padrão mínimo pode persistir mesmo que uma solução melhor não exista ou não seja alcançável. Além disso, uma solução satisfatória é diferente de uma solução sub-ótima, pois esta última pressupõe a existência de uma solução ótima e usualmente representa uma simplificação desta. Sabe-se que uma solução satisfatória deve encontrar um padrão mínimo de desempenho. Desta forma, a questão que fica, é como determinar esse padrão mínimo.

A procura por uma solução satisfatória no problema de controle é análoga ao problema epistemológico de procura da verdade através do conceito de *error avoidance* e à metodologia introduzida para alcançar este objetivo chamada de *Teoria da Utilidade Epistêmica* (Levi 1980).

A *Teoria da Utilidade Epistêmica* considera o amplo problema de aquisição de conhecimento. Esta teoria é suficientemente ampla para abordar temas reais fornecendo

detalhes e precisão matemática suficientes para serem úteis em problemas de estimação e controle (Stirling & Morrell 1991). Ela difere de enfoques tradicionais no sentido que baseia-se na definição de duas funções de utilidade.

Em (Stirling, Goodrich & Frost 1996, Goodrich, Stirling & Frost 1998) introduziu-se formalmente a teoria de utilidade epistêmica para resolver problemas de controle. Nestes trabalhos associou-se a veracidade com a precisão obtida com um certo controle (no sentido de conformidade com um certo padrão) e a rejeição com o custo deste controle. Desta forma, um controle que tenha um alto grau de precisão e um grau baixo de rejeitabilidade é considerado um controle satisfatório. As funções de utilidade foram dadas em termo de densidade probabilística sendo combinadas em forma convexa (Levi 1980).

Desta forma uma decisão satisfatória, pode ser vista como uma aplicação formal da análise custo-benefício para o problema de tomada de decisão, consistindo na definição de duas funções utilidades que quantificam os benefícios e os custos de uma ação.

Considerando um sistema não linear descrito pela equação diferencial $\dot{x} = f(x, u)$ sendo $f(\cdot)$ um campo vetorial suave; para um estado x , o benefício de se escolher um controle u é dado pela função seletividade $p_s(u, x)$. Similarmente, o custo associado com a escolha de u é dado pela função rejeitabilidade $p_r(u, x)$. Define-se então como conjunto satisfatório os valores de u tais que a função seletividade excede a rejeitabilidade, isto é:

$$S_b(x) = \{u(t) : p_s(u, x) \geq bp_r(u, x), \forall t \geq 0\}$$

onde b é um parâmetro, possivelmente dependente do estado, que pode ser utilizado para definir o tamanho do conjunto satisfatório. Logo, todo sinal de controle u pertencente a S_b é considerado satisfatório. Deseja-se então desenvolver um controle realimentado, de forma que o sinal de controle pertença a $S_b(x)$ para qualquer estado x , satisfazendo portanto o padrão mínimo de custo definido pela função rejeitabilidade.

Em (Stirling et al. 1996, Goodrich et al. 1998) foi utilizando o conceito de controle satisfatório dentro de um contexto de Controle por Modelo de Predição (MPC: Model Predictive Control) baseado na estratégia de *Receding Horizon*. A função seletividade foi escolhida como a norma do estado previsto no próximo instante de tempo; por outro lado, a função rejeitabilidade foi escolhida como $p_r(u, x) = ru^2$. Desta forma,

a cada instante, é calculado um controle satisfatório predito utilizando a metodologia de *Campos Potenciais Generalizados* (Nam, Lee & Ko 1996, Guldner & Utkin 1993). Porém esta estratégia conta com duas limitações principais:

1. A estabilidade em malha fechada não é garantida analiticamente.
2. Para cada estado, é necessário implementar uma procura para achar o conjunto satisfatório.

Em (Beard, Young & Stirling 2001) foram contornadas estas limitações para o sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ utilizando o conceito de Função de Lyapunov de Controle (CLF). Desta forma, a função seletividade $p_s(u, x)$ foi definida em termos de uma CLF, e a função de rejeitabilidade $p_r(u, x)$ como o custo instantâneo de um dado sinal de controle. Os principais resultados apresentados por (Beard et al. 2001) foram:

- Para cada estado x , o conjunto satisfatório é convexo e existe um $\bar{b}(x)$ tal que se $0 < b(x) \leq \bar{b}(x)$, o conjunto satisfatório não será vazio.
- O conjunto satisfatório $S_b(x, \eta(x), \nu(x))$ pode ser parametrizado pelas funções contínuas $\eta(x)$ e $\nu(x)$, onde $0 < \eta < 1$ e $\|\nu\| < 1$.
- Todo controle satisfatório gera um sistema realimentado assintoticamente estável e define uma fórmula universal (Lin & Sontag 1995).
- O controlador satisfatório pode ser sintonizado dinamicamente, minimizando-se uma função custo em função das duas funções contínuas que parametrizam o conjunto satisfatório.

Observa-se então que o controlador satisfatório desenvolvido em (Beard et al. 2001) consiste na aplicação da teoria de decisão satisfatória no desenvolvimento de controladores baseados em Funções de Lyapunov de Controle (CLF).

Funções de Lyapunov de Controle (Sontag 1989, Artstein 1983, Sontag 1983) podem ser utilizadas no desenvolvimento de leis de controle assintoticamente estabilizantes para sistemas não lineares. O desempenho do controlador depende da CLF utilizada e a existência de uma CLF implica em estabilidade assintótica do sistema. Uma forma de se projetar controladores utilizando CLF's é através das fórmulas universais, que definem

métodos construtivos para gerar leis de controle estabilizantes de CLF's. Estas fórmulas universais foram primeiramente introduzidas em (Lin & Sontag 1995), onde também são derivadas fórmulas universais para sistemas com restrições de entrada. Entre as fórmulas universais mais conhecidas, podemos citar a fórmula de Sontag (Sontag 1998) e a solução de norma mínima de Freeman e Kokotovic (Freeman & Kokotovic 1998). Um dos resultados centrais obtidos pelo controle satisfatório desenvolvido em (Beard et al. 2001) é fornecer uma área de trabalho para a construção de novas fórmulas universais, onde qualquer fórmula universal que possui propriedades de suavidade adequadas são incluídas pela abordagem satisfatória.

A utilização de CLF's junto com outras metodologias aparece em outros trabalhos. Em (Primbs & Doyle 2000) a noção de otimalidade de Euler-Lagrange sobre um horizonte de tempo finito é combinada com a idéia de CLF, produzindo uma lei de controle *Receding Horizon* que garante a estabilidade do sistema em malha fechada, recaindo num controlador de norma mínima quando o horizonte de otimização vai para zero e tornando o controlador ótimo quando o horizonte tende para infinito. Em (Jadbabaie & Hauser 2000) mostrou-se que pode-se garantir a estabilidade para o controle *Receding horizon* se ao invés de resolvermos um problema de controle ótimo finito em cada instante de tempo, resolvermos um problema que garanta que a função custo é decrescente em cada instante de tempo. A idéia básica é utilizar uma CLF ao invés de um custo terminal limitante (Grimm, Messina, Teel & Tuna 2003).

Uma limitação decisiva dessas metodologias assim como do controle satisfatório apresentado em (Beard et al. 2001) é que a lei de controle obtida é uma realimentação de estados associada a uma função de Lyapunov. Sabe-se que, em geral, encontrar uma CLF é um problema aberto e nem sempre de fácil solução.

1.1 Objetivo principal da tese

O principal objetivo deste trabalho é a aplicação do controle satisfatório desenvolvido em (Beard et al. 2001) em sistemas passivos (Gouvea, Lizarralde & Beard 2004).

A propriedade de passividade tem tido um rol vital no projeto de controladores que estabilizam assintoticamente sistemas não lineares. Num nível teórico, existe uma razoavelmente completa teoria para sistema não lineares realimentados gerais (Desoer &

Vidyasagar 1975, Hill & Moylan 1976). Varias ferramentas são disponíveis para determinar quando um sistema dinâmico não linear de dimensão finita é passivo, incluindo uma versão não linear do Lema de Kalman-Yacubovitch-Popov (Hill & Moylan 1976).

A noção de passividade de um sistema foi motivada pela dissipação de energia através de resistores em um circuito elétrico e tem sido amplamente usada na análise de estabilidade de classes gerais de sistemas não lineares interconectados (vide (Desoer & Vidyasagar 1975, Vidyasagar 1977, Vidyasagar 1979) (Willems 1971, Sandberg 1964, Sandberg 1978)). No início da década de 70, iniciou-se o estudo da passividade na representação em espaço de estados de sistemas não lineares, permitindo uma interpretação mais geométrica das noções de energia disponível, dissipada e armazenada em termos das funções de Lyapunov (Willems 1972*a*, Willems 1972*b*). Este ponto de vista tem, desde então, sido desenvolvido em uma série de trabalhos (ver como exemplo (Hill & Moylan 1976, Hill & Moylan 1980*b*)), levando a um resultado, na teoria de Lyapunov, equivalente a alguns resultados de estabilidade desenvolvidos dentro do ponto de vista da abordagem de entrada e saída.

Nesta tese, é utilizada a versão não linear do lema Kalman-Yacubovitch-Popov em conjunto com a abordagem satisfatória de (Beard et al. 2001), para desenvolver o controle satisfatório de sistemas passivos. Sabe-se que todo sistema passivo é estável, mas o controlador satisfatório atua no sentido de aumentar a margem de estabilidade do sistema, tornando-o mais robusto. Como resultado, obtém-se um controlador baseado numa realimentação de saída que não precisa de nenhuma CLF do sistema a ser controlado.

Além disto, uma outra característica do controle satisfatório é que pelo fato de poder ser parametrizado por duas funções de seleção, este pode ser sintonizado dinamicamente minimizando-se uma função custo dependente do estado do sistema e do sinal de controle. Neste trabalho, essa função custo foi minimizada fazendo-se uma predição do estado do sistema e utilizando-se o estado previsto para e minimizar a função custo através do algoritmo do gradiente descendente. O controlador sintonizado poderá ou não ser ótimo, visto que o algoritmo pode cair em um mínimo local, mas mesmo que não o seja, já representará uma melhora com relação ao controlador inicial.

Por outro lado, embora possamos ter sistemas não passivos sabe-se que se estes

sistemas tiverem grau relativo um e forem fracamente de fase mínima (Byrnes, Isidori & Willems 1991), podem ser transformados para atender as propriedades de passividade. Nesse caso, o projeto do controlador poderia ser dividido em duas partes. A primeira sendo a implementação de uma realimentação para tornar o sistema passivo. Posteriormente, a utilização do controle satisfatório passivo para aumentar a robustez do sistema.

1.2 Casos de Estudo

Neste trabalho, o controle satisfatório passivo foi aplicado em dois sistemas de controle: 1) Controle de fluxo de dados em redes de computadores com tráfego elástico, 2) Controle de atitude de um corpo rígido.

1.2.1 Controle de fluxo de dados numa rede de computadores

Controle de fluxo de dados de uma rede de comunicação com tráfego elástico, como Internet e ATM/ABR, consiste em ajustar as taxas de transmissão das fontes para a utilização completa dos recursos da rede, sem exceder a capacidade dos seus canais. Os objetivos principais são estabilidade, eficiência e alocação justa dos recursos da rede entre todas as fontes. Esses objetivos são difíceis de serem alcançados, pois cada fonte deve definir sua taxa de transmissão de uma forma descentralizada utilizando poucas informações sobre os recursos da rede. Recentemente, a comunidade de controle tem estudado uma abordagem teórica mais matemática para implementar o controle de fluxo da rede, com o objetivo de alcançar uma análise de estabilidade e comportamento e sugerir direções para melhorar os atuais protocolos (vide (Athuraliya, Low, Li & Yin 2001, Kelly, Maullo & Tan 1998, Kelly 1999, Low 2000, Low & Lapsley 1999, Paganini 2002, Wen & Arcak 2004)).

Seguindo com o estudo da aplicação das ferramentas de controle em redes de computadores com tráfego elástico, nesta tese utilizou-se o controlador satisfatório passivo no controle descentralizado do fluxo de dados de uma rede. Foram utilizados dois modelos, com estratégias de controle diferentes:

1. Modelo linear: Utiliza controle de fluxo baseado em taxa, onde as fontes recebem

explicitamente dos canais as suas taxas de transmissão. Utilizou-se um modelo de rede sem atraso e outro modelo de rede com atraso. No modelo com atraso, um preditor de Smith foi utilizado para manter a estabilidade do sistema.

2. Modelo não linear: Utiliza-se uma estratégia de controle baseada em informações de preço. Nesta estratégia, as fontes atualizam suas taxas indiretamente com base em informações de preço enviadas pelos canais.

A estratégia de controle baseada em taxa consiste em calcular o controle nos nós da rede, com base no nível de ocupação da fila do comutador. O sinal de controle (taxa de transmissão das fontes) é então realimentado para as fontes.

Na estratégia de preço, em geral procura-se primeiramente resolver um problema de otimização convexa. A ideia é, para todas as fontes, maximizar uma função utilidade agregada, sujeita à limitação da capacidade do canal. O controle descentralizado do fluxo é alcançado através de informações de preço enviados dos canais para as fontes. Estes sinais são utilizados pelas fontes para atualizar suas taxas de transmissão. Pode-se então decompor o controle em um problema de otimização estática e um problema de estabilização dinâmica (Kelly et al. 1998, Low & Lapsley 1999, Wen & Arcak 2004). A otimização estática engloba justiça, limitação da capacidade e utilização eficiente da rede e sua solução fornece o ponto de operação desejado da rede no estado estacionário (equilíbrio do sistema em malha fechada). A taxa da fonte e as leis de atualização dos preços dos canais são então projetadas para garantir a estabilidade e robustez do equilíbrio. Neste trabalho, o controlador satisfatório foi utilizado para garantir essa robustez, aproveitando o resultado de (Wen & Arcak 2004) que mostra que o modelo da rede utilizado é passivo.

1.2.2 Controle de atitude de um corpo rígido

Controle ótimo de corpos rígidos tem uma longa história, devido principalmente ao interesse no controle de aeronaves e naves espaciais (e.g. satélites) (Debs & Athans 1969, Screivener & Thompson 1994). Controle ótimo para o problema completo de atitude, i.e., incluindo as equações de orientação, é um problema difícil de ser resolvido devido à dificuldade em resolver a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, especialmente quando a função custo inclui penalidade no sinal de controle. Sabe-se que dado um

sistema não linear do tipo

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

uma lei de controle ótima que minimiza o índice de desempenho

$$J(x) = \int_0^{\infty} (l(x) + u^T R u) dx$$

com $l(x)$ sendo uma função positiva radialmente crescente e R uma matriz definida positiva, é dada por

$$u^*(x) = -\frac{1}{2} R^{-1} g^T(x) \frac{\partial V^*(x)}{\partial x}$$

onde $V^*(x)$ é uma função definida positiva que satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\frac{\partial V^{*T}(x)}{\partial x} f(x) + l(x) - \frac{1}{4} \frac{\partial V^{*T}(x)}{\partial x} g(x) R^{-1} g^T(x) \frac{\partial V^*(x)}{\partial x} = 0$$

Em (Rotea, Tsiotras & Corless 1998) foram apresentadas soluções ótimas em forma fechada para alguns casos especiais de custos quadráticos. Um esforço mais avançado para projetar um controle realimentado ótimo foi realizado em (Kang 1995, Dalsmo & Egeland 1997) utilizando um enfoque \mathcal{H}_{∞} não linear. No entanto, a desigualdade de Hamilton-Jacobi-Bellman tem que ser resolvida e, em geral, somente garante um limite superior do custo para o caso ideal sem perturbações. Em (Krstic & Tsiotras 1999) foi utilizado o enfoque de controle ótimo inverso evitando resolver a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Por outro lado em (Lizarralde & Wen 1995) foi apresentado um esquema de controle por realimentação de saída baseada nas propriedades de passividade dos sistema quando são utilizados quaternions para a representação da orientação. Este resultado pode ser estendido para outras representações (parâmetros de Rodrigues e parâmetros de Rodrigues modificado) (Tsiotras 1998).

Desta forma, neste trabalho, foi aplicado o controle satisfatório passivo no controle da orientação de um corpo rígido para o seguimento de uma trajetória.

1.3 Organização da tese

Este trabalho é dividido em cinco capítulos e dois apêndices:

Capítulo 2: Neste capítulo é apresentado o controle satisfatório de sistemas não lineares. É apresentada também uma análise para sistemas lineares. Mostra-se que no caso linear, o controlador satisfatório será ótimo se pertencer à um subconjunto do conjunto satisfatório denominado conjunto satisfatório robusto.

Capítulo 3: Neste capítulo é apresentada uma revisão de sistemas passivos e suas propriedades. Algumas destas propriedades são utilizadas para desenvolver o controle satisfatório de sistemas passivos.

Capítulo 4: O controlador satisfatório passivo é aplicado em um modelo linear e não linear de rede de computadores. São apresentados os resultados das simulações mostrando o funcionamento da rede com o controlador.

Capítulo 5: O controlador satisfatório passivo é aplicado no controle de orientação de um corpo rígido. No caso do corpo rígido, mostra-se que com uma realimentação proporcional do quaternion do erro, tornando o sistema passivo, e uma realimentação da velocidade angular através do controle satisfatório passivo, o erro de regulação e rastreamento irão para zero.

Capítulo 6: São apresentados alguns comentários finais e propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Controle Satisfatório

O controle satisfatório consiste na aplicação da abordagem satisfatória (Simon 1955, Goodrich et al. 1998) no projeto de controladores realimentados. Neste capítulo é apresentado o controlador satisfatório desenvolvido por (Curtis & Beard 2001), que utiliza a teoria de decisão satisfatória junto com Funções de Lyapunov de Controle (CLF's), chegando em um método construtivo de se gerar leis de controle assintoticamente estabilizantes a partir de CLF's.

Definição 1 *Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas de primeira e segunda ordem contínuas (C^2) é uma Função de Lyapunov de Controle (CLF) para o sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ se $V(x)$ for definida positiva, radialmente ilimitada e se $\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists u$*

$$\inf_u V_x^T(f + gu) < 0,$$

onde $V_x = \nabla V(x)$. ■

A estratégia de controle desenvolvida consiste em uma ferramenta importante no projeto de controladores para sistemas não lineares.

Sabendo-se que o controle satisfatório é parametrizado por duas funções, é apresentado um algoritmo de sintonia do controlador satisfatório, baseado em um modelo de predição dos seus parâmetros de seleção. Além disso, mostrou-se que há um conjunto de controladores satisfatórios, denominado por (Curtis & Beard 2001) de conjunto satisfatório robusto, onde as leis de controle são inversamente ótimas.

Posteriormente, é analisado o caso dos sistemas lineares, com o objetivo de proporcionar um melhor entendimento do controle satisfatório e fazer uma comparação com o controle ótimo. A versão linear do controlador satisfatório é aplicada em alguns sistemas lineares. Foram feitas simulações, que mostraram um desempenho semelhante entre o controle satisfatório e o controle ótimo. Esse comportamento do controlador satisfatório junto com o algoritmo de sintonia é extremamente útil no projeto de controladores para plantas não lineares, pois nessas plantas, em alguns casos, o projeto do controlador ótimo é inviável. Isso porque o cálculo do controle ótimo para plantas não lineares requer a resolução da equação diferencial de Hamilton-Jacobi-Bellman. Em geral, a solução dessa equação é difícil, pois trata-se de uma equação diferencial parcial.

2.1 Controlador satisfatório

Considere um sistema não linear descrito pela equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^m$. O conjunto \mathcal{U} de entradas admissíveis consiste de todas as funções contínuas definidas em \mathbb{R}^m . O campo vetorial $f(x)$ e as m colunas de $g(x)$ são suaves (C^∞) e $h(x)$ é um mapeamento suave. Considere que o campo vetorial $f(\cdot)$ tem pelo menos um equilíbrio; então, sem perda de generalidade, possivelmente depois de uma transformação de coordenadas, pode-se assumir que $f(0) = 0$ e $h(0) = 0$.

O paradigma satisfatório define duas funções utilidades: A função seletividade $p_s(u, x)$ e a função rejeitabilidade $p_r(u, x)$. A seletividade deve ter um valor alto para sinais de controle desejáveis. Já a rejeitabilidade deve possuir um valor alto para sinais de controle que são inviáveis de implementar. Para o desenvolvimento do controle satisfatório, (Curtis & Beard 2001) associa a noção de seletividade com estabilidade e a noção de rejeitabilidade com custo instantâneo. Define-se então a função seletividade como:

$$p_s(u, x) = -V_x^T (f + gu)\tag{2.2}$$

onde $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa para todo x ($V(x) \geq 0$) com $V(0) = 0$. Conclui-se então que somente controles estabilizantes fazem $p_s(u, x)$ positivo. Já a função rejeitabilidade é definida como:

$$p_r(u, x) = l(x) + u^T R u \quad (2.3)$$

onde $R = R^T > 0$ e $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua não negativa para todo x ($l(x) \geq 0$), logo também tem-se $p_r \geq 0$. Observe que $l(x)$ penaliza o estado e R penaliza o sinal de controle.

O que se deseja é desenvolver um controlador, denominado controlador satisfatório, que garanta que a função seletividade seja maior que a rejeitabilidade, ou seja, que o “benefício” desse controlador supere um padrão mínimo de aspiração definido pela função rejeitabilidade. Como passo inicial para o desenvolvimento desse controlador, é apresentado à seguir o conjunto satisfatório:

Definição 2 *O conjunto satisfatório $S(x, b)$ é definido como o conjunto de valores de controle tais que a seletividade é maior que a rejeitabilidade multiplicada pelo índice de seletividade, isto é:*

$$S(x, b) = \{u \in \mathbb{R}^m : p_s(u, x) \geq b p_r(u, x)\}$$

onde $b > 0$ é o índice de seletividade.

Para as funções p_s e p_r definidas pelas equações (2.2) e (2.3), o conjunto satisfatório será:

$$S(x, b) = \{u \in \mathbb{R}^m : -V_x^T (f + gu) \geq b(l(x) + u^T R u)\} \quad (2.4)$$

O teorema a seguir caracteriza completamente o conjunto satisfatório da equação (2.4):

Teorema 2.1 *Dados $p_s = -V_x^T (f + gu)$ e $p_r(u, x) = l(x) + u^T R u$, então o conjunto satisfatório não será vazio se e somente se*

$$\frac{1}{4} V_x^T g (bR)^{-1} g^T V_x - bl - V_x^T f \geq 0. \quad (2.5)$$

Além disso, se $S(x, b)$ não for vazio, será dado por:

$$S(x, b) = \left\{ u = \frac{1}{2b} R^{-1} g^T V_x + \sqrt{\frac{1}{4} V_x^T g (bR)^{-1} g^T V_x - bl - V_x^T f (bR)^{-1/2} \nu} : \nu \in \mathcal{B} \right\} \quad (2.6)$$

onde $\mathcal{B} = \{\nu \in \mathbb{R}^m : \|\nu\| \leq 1\}$.

Prova: Vide apêndice A.

Dada a definição do conjunto satisfatório $S(x, b)$ (definição 2), qualquer sinal de controle $u(x)$ contínuo em \mathbb{R}^n e pertencente a $S(x, b)$ é considerado um controle satisfatório, como mostra a definição abaixo.

Definição 3 *A lei de controle $u=k(x)$, com $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, é um controle satisfatório se:*

1. $S(x, b(x))$ não é vazio para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $k(x) \in S(x, b(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
3. k é contínuo em \mathbb{R}^n .

O próximo lema será útil para mostrar que o controlador satisfatório garante estabilidade assintótica ao sistema.

Lema 2.1 *Suponha que $f(x)$ é localmente Lipschitz em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $f(0) = 0$. Se existe uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, definida positiva e radialmente ilimitada, tal que $V_x^T f < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então a origem é globalmente assintoticamente estável.*

Prova: vide (Khalil 2002)

Teorema 2.2 *Se $u = k(x)$ é um controle satisfatório, então o sistema em malha fechada $\dot{x} = f(x) + g(x)k(x)$ é uniformemente assintoticamente estável.*

Prova: Dado que $g(x)$ é localmente Lipschitz e $k(x)$ é contínuo, então gk é localmente Lipschitz. A mesma conclusão é válida para $f + gk$.

Como $k(x) \in S(x, b(x))$, da equação (2.4) sabe-se que:

$$V_x^T (f + gk) \leq -b(l + k^T Rk) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Sabendo-se da equação (2.3) que $p_r = l + k^T R k$ é maior que zero e que $b > 0$, temos conseqüentemente $V_x^T(f + gk) < 0$, logo do lema 2.1 conclui-se que a origem é globalmente assintoticamente estável. ■

A equação (2.4) e o Teorema 2.1 mostram que o índice de seletividade b desempenha um papel crítico no tamanho do conjunto satisfatório. O próximo lema mostrará que, para cada estado x , o índice de seletividade b pode sempre ser escolhido de forma que o conjunto satisfatório não seja vazio.

Lema 2.2 *Para cada estado x , o conjunto satisfatório não é vazio se e somente se o índice de seletividade b satisfaz $0 < b(x) \leq \bar{b}(x)$, onde*

$$\bar{b}(x) \triangleq -\frac{V_x^T f}{2l} + \sqrt{\left(\frac{V_x^T f}{2l}\right)^2 + \frac{1/4V_x^T g R^{-1} g^T V_x}{l}} \quad (2.7)$$

Prova: Vide apêndice A

Da definição 3, sabe-se que uma condição para uma lei de controle $u = k(x)$ ser um controle satisfatório, é que $k(x)$ seja contínuo em \mathbb{R}^n . Para resolver essa questão, primeiramente deve ser definido quando uma CLF $V(x)$ satisfaz a propriedade de *pequeno-controle* (Sontag 1998):

Definição 4 *Uma CLF $V(x)$ satisfaz a propriedade de pequeno-controle se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ de forma que, se $0 < \|x\| < \delta$, há um $k(x)$ com $\|k(x)\| < \varepsilon$ tal que:*

$$V_x^T f + V_x^T g k < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (2.8)$$

O próximo teorema mostra que se uma CLF $V(x)$ satisfaz a propriedade de pequeno-controle, pode ser escolhida uma lei de controle $k(x)$ contínua em \mathbb{R}^n que satisfaz a desigualdade (2.8) (Sontag 1998).

Teorema 2.3 *Seja $V(x)$ uma CLF. Então existe um $k(x)$, $k(0) = 0$, $k(x)$ suave em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, satisfazendo (2.8). Contudo, se $V(x)$ satisfaz a propriedade de pequeno-controle, então α também pode ser escolhido contínuo para $x = 0$.*

Da definição 4 e do teorema 2.3 conclui-se que uma condição que pode ser utilizada para o projeto de uma lei de controle $u = k(x)$ contínua em \mathbb{R}^n utilizando uma CLF $V(x)$, é que $V(x)$ satisfaça a propriedade de *pequeno-controle*.

O próximo teorema parametriza o conjunto de controladores satisfatórios e mostra como projetar um controlador satisfatório utilizando uma CLF.

Teorema 2.4 *Se*

1. $V(x)$ é uma CLF,
2. $\nu(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua em \mathbb{R}^n e satisfaz $\|\nu(x)\| \leq 1$,
3. $\eta(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua em \mathbb{R}^n e satisfaz

$$0 < \eta(x) \leq 1, \quad (2.9)$$

então

$$u = k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2n\bar{b}}R^{-1}g^TV_x + \sqrt{\frac{1}{4}V_x^Tg(n\bar{b}R)^{-1}g^TV_x - \eta\bar{b}l - V_x^Tf(\eta\bar{b}R)^{-1/2}\nu} & \text{se } V_x^Tg \neq 0 \\ 0 & \text{se } V_x^Tg = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

é um controle satisfatório.

Se além disso $V(x)$ satisfaz a propriedade de pequeno-controle, então $k(x)$ pode ser escolhido contínuo para $x = 0$.

Prova: Vide apêndice A

Observe, comparando as equações (2.6) e (2.10), que η parametriza o índice de seletividade e portanto caracteriza o tamanho do conjunto satisfatório, enquanto ν parametriza o elemento do conjunto satisfatório escolhido.

2.2 Sintonia do controlador satisfatório

Como o controlador satisfatório depende das funções η e ν , os valores dessas funções podem ser determinados dinamicamente para se obter um melhor desempenho do sistema. Optou-se pela utilização do algoritmo do gradiente descendente (Kelley 1995) para minimizar uma função custo local dependente de η e ν . Para isso, é realizada uma predição do estado do sistema em um determinado intervalo de tempo à frente, fixou-se esse estado e através do algoritmo do gradiente descendente calculou-se os valores de

η e ν que minimizam a função custo proposta. As funções $\eta(x)$ e $\nu(x)$ podem então ser geradas a cada instante de tempo de forma a otimizar a função custo (Curtis & Beard 2001).

Dado um sinal de controle satisfatório $u = k(x(t), \eta^i, \nu^i)$, o custo do sistema num instante de tempo à frente pode ser estimado para qualquer $x(t)$ como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= \phi(t+T, x(t), k(x(t), \eta^i, \nu^i)) \\ J(t+T) &= x(t+T)^T \hat{Q} x(t+T) + k(\eta^i, \nu^i)^T \hat{R} k(\eta^i, \nu^i) \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde $\phi()$ é a solução do sistema no instante $t+T$ para uma condição inicial $x(t)$ e um controle $u = k(x(t), \eta^i, \nu^i)$, $J(\eta^i, \nu^i, x(t+T))$ é o custo previsto, $\hat{Q} > 0$ e $\hat{R} > 0$. Note que $x(t+T)$ pode ser calculado aproximadamente utilizando uma aproximação de Euler se o T for pequeno.

Aplicando o algoritmo do gradiente descendente, chega-se no seguinte algoritmo (Curtis & Beard 2001) de atualização dos valores de η e ν .

- 1: $i = 0$;
- 2: $\eta^0 = \eta_0$;
- 3: $\nu^0 = \nu_0$;

fazer

- 4: $\eta^{i+1} = \eta^i - h_\eta \frac{\partial J}{\partial \eta^i}$;
- 5: $\nu^{i+1} = \nu^i - h_\nu \frac{\partial J}{\partial \nu^i}$;
- 6: Se $\eta^{i+1} \leq 0$, então $\eta^{i+1} = \epsilon$;
- 7: Se $\eta^{i+1} \geq 1$, então $\eta^{i+1} = 1$;
- 8: Se $\|\nu^{i+1}\| > 1$, então $\nu^{i+1} = \frac{\nu^{i+1}}{\|\nu^{i+1}\|}$;
- 9: $i = i + 1$;

Enquanto $(\|\eta^i - \eta^{i-1}\| + \|\nu^i - \nu^{i-1}\|) \geq \epsilon_0$.

$$(2.12)$$

onde

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{J(\alpha + \epsilon) - J(\alpha)}{\epsilon}$$

e h_η e h_ν são os intervalos de iteração do gradiente.

Note que se η ou ν deixarem os limites determinados pelo Teorema 2.4, serão reescalados para pertencerem aos seus limites de região válidos.

Uma vantagem de otimizar controladores pertencentes ao conjunto satisfatório é que a estabilidade é garantida para todos os valores de η e ν válidos, o que torna possível a atualização desses parâmetros em qualquer instante. Com isso, em vez de se calcular o algoritmo de atualização de η e ν em tempo real, onde o cálculo deve ser finalizado antes do próximo passo de tempo, pode-se calcular o algoritmo em qualquer instante. Isto significa que caso o algoritmo de atualização não tenha sido calculado em uma determinada iteração do cálculo do controle, pode-se utilizar os valores de η e ν mais recentes. Estes valores, embora subótimos, já representam uma melhora quando comparados com os valores iniciais e garantem a estabilidade do sistema.

Para exemplificar a utilização do controle satisfatório com sintonia automática, considere o sistema não linear mostrado abaixo:

$$\dot{x} = x^2 e^{-x} + u \quad (2.13)$$

Deve-se primeiramente encontrar uma CLF para o sistema. Considere então, a função candidata $V(x) = x^2$. Se $V(x)$ for uma CLF, então existe um sinal de controle $u = k(x)$ que faz $\dot{V}(x) < 0$. Calculando $\dot{V}(x)$, temos

$$\dot{V}(x) = 2x(x^2 e^{-x} + u)$$

Considerando $u = -x^2 - x$, substituindo na equação acima e desenvolvendo, temos:

$$\dot{V}(x) = 2x^3(e^{-x} - 1) - 2x^2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Conclui-se então que $V(x)$ é uma CLF para o sistema da equação (2.13). Utilizando essa CLF e considerando $l(x) = x^2$ e $R = 1$ nas equações (2.7) e (2.10) chega-se na equação do controlador satisfatório mostrada abaixo:

$$k(x) = \frac{-x + \sqrt{x^2 - \eta^2 \bar{b}^2 x^2 - 2x f \eta \bar{b} \nu}}{\eta \bar{b}}, \quad (2.14)$$

onde $f(x) = x^2 e^{-x}$ e

$$\bar{b} = \frac{-f + \sqrt{f^2 + x^2}}{x}.$$

Observe que $f(x)$ é localmente Lipschitz. Como $k(x)$ é um controle satisfatório, sabe-se que $k(x)$ é contínuo, logo o sistema em malha fechada $\dot{x} = f + gk$ também é localmente Lipschitz, possuindo então solução única. Com isso, a estabilidade do sistema em malha fechada pode ser verificada utilizando a análise de Lyapunov (Khalil 1992, página 112). Dessa forma, o controle satisfatório pôde ser aplicado no sistema da equação (2.13). As figuras 2.1 e 2.2 mostram respectivamente a saída da planta e o sinal de controle para uma condição inicial $x = 5$. Para a sintonia automática do controlador, considerou-se $\hat{R} = 1$ e $Q = 1$ na equação (2.11)

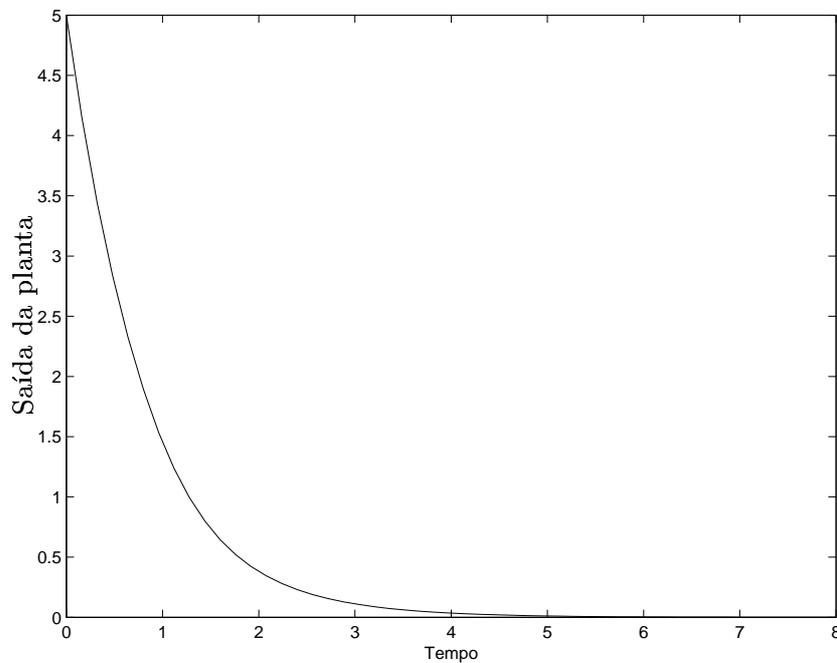


FIGURA 2.1: Controle satisfatório do sistema $\dot{x} = x^2 e^{-x} + u$: Resposta do sistema

2.3 Controle Satisfatório Robusto

Na seção 2.1, mostrou-se que todo controle satisfatório garante estabilidade assintótica e que para uma dada CLF $V(x)$ satisfazendo a propriedade de *pequeno-controle*, o conjunto de controladores gerados por $V(x)$ são parametrizados por duas funções contínuas

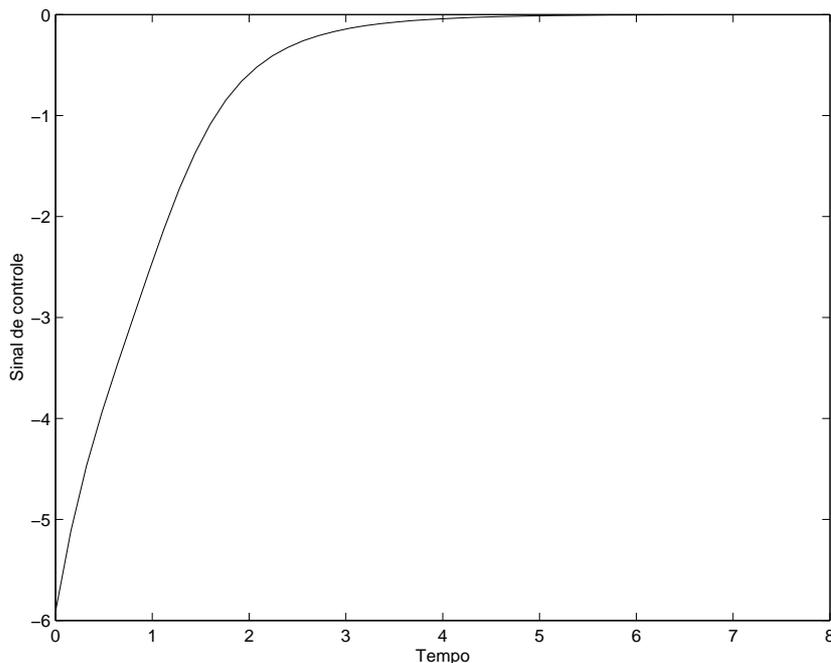


FIGURA 2.2: Controle satisfatório do sistema $\dot{x} = x^2e^{-x} + u$: Sinal de controle

$\eta(x)$ e $\nu(x)$. No entanto, nenhuma análise de robustez foi realizada. Sabe-se que a análise de robustez é de fundamental importância, pois um controlador sofre as mais variadas perturbações do meio. Além disso, em sistemas muito complexos, a dinâmica não modelada do sistema pode ser considerada como uma perturbação. O que se procura saber é o quanto um sinal de controle pode ser alterado por uma perturbação, sem instabilizar o sistema. Veremos nesta seção as propriedades de robustez do controle satisfatório. Para isso, é apresentada a definição do conjunto satisfatório robusto $S_r(x)$ (Beard et al. 2001), que é um subconjunto do conjunto satisfatório. Todo controlador satisfatório pertencente a $S_r(x)$ é denominado controle satisfatório robusto. Mostra-se que o controle satisfatório robusto $k_r(x)$ é inversamente ótimo, possuindo margem de estabilidade $[-\frac{1}{2}, \infty)$, pois sabe-se que toda lei de controle inversamente ótima possui essa margem de estabilidade.

Margem de estabilidade define a margem de alteração de um sinal de controle na qual é garantida a estabilidade do sistema, como mostra a definição abaixo:

Definição 5 *Uma lei de controle assintoticamente estabilizante, $u = k(x)$, tem mar-*

gem de estabilidade (m_1, m_2) onde

$$-1 \leq m_1 < m_2 \leq \infty,$$

se para todo $\alpha \in (m_1, m_2)$, $u = (1 + \alpha)k(x)$ também estabiliza o sistema assintoticamente.

O principal resultado desta seção é a demonstração que o controle satisfatório robusto é uma lei de controle inversamente ótima.

O problema de controle ótimo inverso consiste em determinar se uma lei de controle

$$u = k(x) = -\frac{1}{2}\tilde{R}^{-1}(x)g^T V_x$$

minimiza a função custo

$$J(x, u) = \int_0^\infty (l(x) + u^T \tilde{R}(x)u)dt, \quad (2.15)$$

onde $\tilde{R}(x) = \tilde{R}^T(x) > 0$ e $l(x) \geq 0 \forall x$, $V(x)$ é uma função de Lyapunov e $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema. Muitos trabalhos já foram desenvolvidos para resolver o problema do controle ótimo (Zubov 1966, Krasovsky 1971, Jacobson 1977, Jurdjevic & Quin 1978, Kalman 1964, Moylan & Anderson 1973, Sontag 1998). Desses trabalhos, sabe-se que o problema de controle ótimo pode ser resolvido através da solução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman. Dessa forma, uma lei de controle inversamente ótima pode ser definida como mostrado abaixo:

Definição 6 Uma lei de controle $u = k(x)$ que estabiliza assintoticamente o sistema $\dot{x} = f(x) + g(x)k(x)$ é inversamente ótima se para todo x existir uma função $V(x)$ definida positiva e radialmente ilimitada, uma função $l(x) \geq 0$ e uma função $\tilde{R}(x) = \tilde{R}^T(x) > 0$ tal que:

$$u = k(x) = -\frac{1}{2}\tilde{R}^{-1}g^T V_x$$

minimiza a função custo da equação (2.15), onde $V(x)$ satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$V_x^T f(x) + l(x) - \frac{1}{4}V_x^T g(x)\tilde{R}^{-1}(x)g^T(x)V_x = 0 \quad (2.16)$$

para todo x .

Para se determinar o controle satisfatório robusto $k_r(x)$, primeiramente é definido o conjunto satisfatório robusto:

Definição 7 O conjunto satisfatório robusto, $S_r(x)$, é um conjunto de valores de controle dependentes do estado definido como:

$$S_r(x) = \{k(x, \nu) \in S(x) : V_x^T g R^{-1/2} \nu \leq 0\}, \quad (2.17)$$

com $\|\nu\| < 1$.

Observa-se que $S_r(x)$ se constitui em um subconjunto de $S(x)$ onde os valores de controle fazem a derivada da função de Lyapunov mais negativa. Para verificar essa observação, redefina a equação do controlador satisfatório (equação (2.10)) como:

$$k(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x) R^{-\frac{1}{2}} \nu \quad (2.18)$$

onde,

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= -\frac{1}{2n\bar{b}} R^{-1} g^T V_x \quad \text{e} \\ \sigma_2(x) &= \sqrt{\frac{1}{4} V_x^T g (n\bar{b}R)^{-1} g^T V_x - \eta\bar{b}l - V_x^T f (\eta\bar{b})^{-1/2}} \end{aligned}$$

Como $k \in S(x)$ (k é um controle satisfatório), sabe-se da definição 2 que

$$\dot{V} = V_x^T f + V_x^T g k < -b(l(x) + u^T R u) < 0.$$

Substituindo-se (2.18) na desigualdade acima, tem-se:

$$V_x^T f + V_x^T g \sigma_1(x) + \sigma_2(x) V_x^T g R^{-\frac{1}{2}} \nu < 0.$$

Conclui-se então, que o conjunto de valores de controle satisfatórios tais que a desigualdade $V_x^T g R^{-\frac{1}{2}} \nu < 0$ seja válida ($k(x) \in S_r(x)$), fazem a derivada da função de Lyapunov mais negativa. A consequência disso é que o sistema terá uma margem de estabilidade maior. Posteriormente será mostrado que todo controlador pertencente a

$S_r(x)$ tem margem de estabilidade $[-\frac{1}{2}, \infty)$.

A próxima definição atesta que qualquer controlador pertencente ao conjunto satisfatório robusto é denominado controle satisfatório robusto:

Definição 8 *Um controle satisfatório robusto, $k_r(x)$, é uma função satisfazendo $k_r(0) = 0$ e localmente Lipschitz em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que $k_r(x) \in S_r(x)$ para todo x diferente de zero.*

O teorema à seguir mostra que todo controlador satisfatório robusto é inversamente ótimo e determina a sua margem de estabilidade.

Teorema 2.5 *Se $k_r(x)$ é um controle satisfatório robusto, então:*

1. $k_r(x)$ tem margem de estabilidade de $[-\frac{1}{2}, \infty)$.
2. $k_r(x)$ pode ser escrita da forma $k_r(x) = -\frac{1}{2}\tilde{R}^{-1}(x)g^T V_x$.
3. $k_r(x)$ é inversamente ótima.

Prova: Vide apêndice A

A vantagem do controlador satisfatório robusto é que este possui uma margem de estabilidade bem definida, como mostra o teorema acima. No entanto, o controlador satisfatório robusto não possui uma forma fechada para o seu cálculo. Por isso, geralmente é mais fácil determiná-lo utilizando-se um algoritmo para escolher ν de forma que a desigualdade $V_x^T g R^{-1/2} \nu \leq 0$ seja satisfeita (ver definições 8 e 7).

Outra questão importante é se a CLF pode ser escolhida de forma que todo controle satisfatório pertença ao conjunto satisfatório robusto, independentemente do valor do parâmetro ν . Se isso for possível, pode-se procurar critérios de escolha de CLF's de forma a garantir que o controlador satisfatório sempre pertença ao conjunto satisfatório robusto, sendo portanto uma lei de controle inversamente ótima. Deseja-se então determinar se uma CLF $V(x)$ pode ser escolhida de forma que todo controle satisfatório seja inversamente ótimo. Para isso, observe da equação (2.10) que se

$$\frac{1}{4}V_x^T g(\eta\bar{b}R)^{-1}g^T V_x - \eta\bar{b}l - V_x^T f = 0, \quad (2.19)$$

a equação do controlador satisfatório pode sempre ser escrita da forma

$$k(x) = -\frac{1}{2\eta\bar{b}}R^{-1}g^T V_x.$$

Observe que a equação (2.19) é exatamente a equação de *Hamilton-Jacobi-Bellman* (equação (2.16)). Logo, se a CLF $V(x)$ satisfaz essa equação, todo controlador satisfatório é inversamente ótimo. No entanto, a equação de *Hamilton-Jacobi-Bellman* é difícil de ser resolvida, pois é uma equação diferencial com derivadas parciais. Portanto, para se obter um controlador satisfatório inversamente ótimo, é mais fácil escolher um ν de forma a satisfazer a desigualdade da definição 7, o que pelo teorema 2.5 garantiria uma lei de controle inversamente ótima.

2.4 Controle satisfatório aplicado em sistemas lineares

Nesta seção é feita uma análise da aplicação do controle satisfatório em sistemas lineares. Essa análise é realizada com o objetivo de alcançar um maior entendimento do controle satisfatório e compará-lo com o controle ótimo.

Considere portanto o sistema linear invariante no tempo (SLTI)

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (2.20)$$

Comparando esse sistema linear com o sistema da equação (2.1), conclui-se que $f(x) = Ax$ e $g(x) = B$. Levando isto em consideração em (2.10) chega-se na equação do controlador satisfatório para o caso de um sistema linear:

$$k(x) = -\frac{1}{2\eta\bar{b}}R^{-1}B^T Px + \sqrt{\frac{1}{4\eta\bar{b}}x^T P^T B R^{-1} B^T P x - \eta\bar{b}l - x^T P^T A x (\eta\bar{b}R)^{-1/2}\nu} \quad (2.21)$$

onde $P = P^T > 0$, de forma que $V(x) = \frac{1}{2}x^T P x$ seja uma CLF, $l(x) \geq 0 \forall x$ e

$$\bar{b}(x) \triangleq -\frac{x^T P^T A x}{2l} + \sqrt{\left(\frac{x^T P^T A x}{2l}\right)^2 + \frac{x^T P^T B R^{-1} B^T P x}{4l}}. \quad (2.22)$$

Uma forma de se achar uma CLF para sistemas lineares é encontrar um $P = P^T > 0$, de forma que $V = \frac{1}{2}x^T P x$ seja uma CLF. Para isso, pode-se utilizar o lugar das raízes simétrico (Franklin, Powell & Emami-Naeini 1991).

Considerando uma planta SISO, para um determinado ρ , o lugar das raízes simétrico fornece a localização dos polos em malha fechada que minimiza a função custo da equação (2.23).

$$J = \int_0^{\infty} (\rho x^T(t)x(t) + u(t)^2) dt \quad (2.23)$$

Com os polos em malha fechada fornecido pelo lugar das raízes simétrico, a fórmula de Ackermann (Franklin et al. 1991) pode ser utilizada para calcular o ganho do controlador K que minimiza a função custo. Como $u = -Kx$, o sistema em malha fechada fica:

$$\dot{x} = A_c x \quad (2.24)$$

onde $A_c = A - BK$.

Como o sistema da (2.24) é estável, para uma matriz $Q > 0$, existe um $P = P^T > 0$ que é solução da equação de Lyapunov $A_c^T P + P^T A_c = -Q$, onde $Q > 0$. Resolvendo-se a equação de Lyapunov, a matriz P e conseqüentemente a CLF $V(x)$ são determinados.

À seguir serão dados dois exemplos da aplicação do controle satisfatório com predição dos parâmetros η e ν em um sistema linear.

2.4.1 Caso de estudo I: Controle de um integrador

$$\dot{x} = u(t) \quad (2.25)$$

$$y = x$$

Escolheu-se a CLF $V(x) = \frac{x^2}{2}$, $P = 1$, $R = 1$ e $l(x) = x^2$. Para o integrador, $A = 0$ e $B = 1$. Substituindo-se esses valores em (2.21), chega-se na Equação mostrada abaixo:

$$k(x) = \frac{x}{\eta} + x\nu \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \quad (2.26)$$

Observe que nesse caso temos $p_r = x^2 + u^2$ e $p_s = -xu$. Para ficar mais clara a noção de conjunto satisfatório ($S(x, b)$), a figura 2.3 mostra $S(x, b)$ para o estado particular $x = 1$ e considerando o índice de seletividade $b = 0.1$. Observe também, que a equação

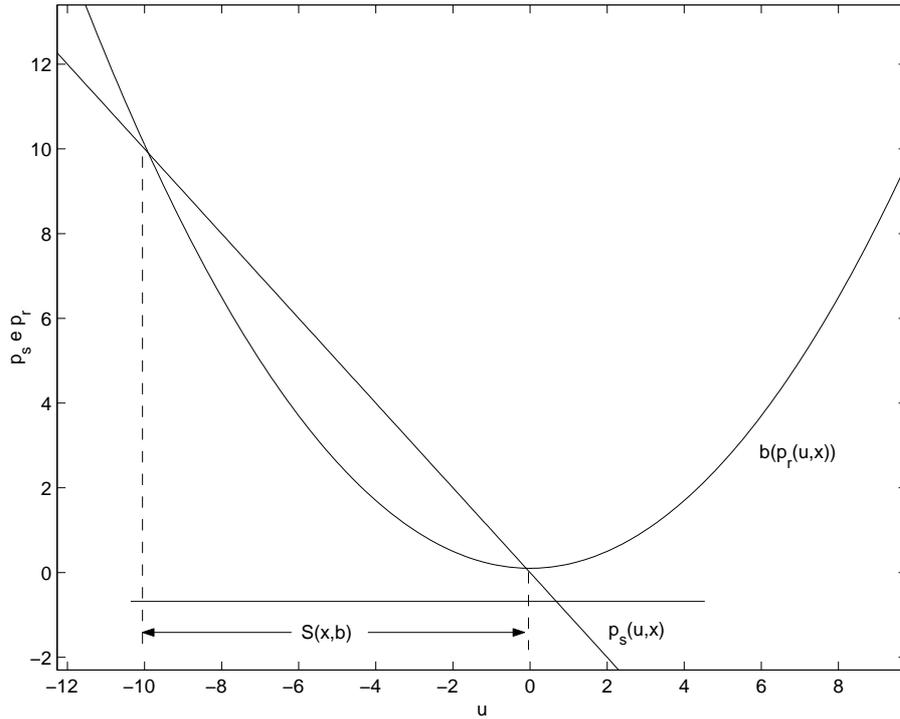


FIGURA 2.3: As funções seletividade e rejeitabilidade como função de u , para um x particular e o conjunto satisfatório resultante

(2.26) é uma lei de controle linear, onde o seu ganho depende dos parâmetros ν e η .

Considere agora $l(x) = x^2 + x^4$. Nesse caso, a equação do controlador será:

$$k(x) = -\frac{x}{r\eta\bar{b}} + \frac{\sqrt{\frac{x^2}{r\eta\bar{b}} - \eta\bar{b}(x^2 + x^4) + 2x}}{\sqrt{\eta\bar{b}r}}\nu$$

onde

$$\bar{b} = \frac{\sqrt{r} + \sqrt{r + x^2 + x^4}}{\sqrt{r}x(1 + x^2)}$$

Observa-se então, que uma escolha diferente de $l(x)$ levou a uma lei de controle satisfatória não linear. Conclui-se então, que o controlador satisfatório será na maioria das vezes não linear, mesmo quando aplicado em uma planta linear.

2.4.2 Caso de estudo II: Controle de um duplo integrador

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.27}$$

$$y = cx$$

onde: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Para aplicar o controle satisfatório, uma CLF foi calculada da forma explicada no início dessa seção. Para isso, considerou-se $\rho = 1$, que gerou polos em malha fechada em $s = -0.7071 \pm 0.7071i$. Utilizando a fórmula de Ackermann chegou-se a um ganho do controlador $K = [1 \quad 1.4142]$. Resolvendo-se a equação de Lyapunov para $Q = I$, onde $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, chega-se na matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 1.4142 & -0.5 \\ -0.5 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Substituindo A , B , P , $R = 1$ e $l(x) = x^2$ nas equações (2.21) e (2.22), chega-se na equação do controlador mostrada abaixo:

$$k(x) = -\frac{1}{2\eta\bar{b}}B^T Px + \sqrt{l(x) \left(\frac{\bar{b}_2}{\eta\bar{b}} - \eta\bar{b} - \bar{b}_1 \right) (\eta\bar{b})^{-1/2}} \nu \quad (2.28)$$

onde:

$$\bar{b} = -\frac{\bar{b}_1}{2} + \sqrt{\bar{b}_1^2 + \bar{b}_2} \quad (2.29)$$

$$\bar{b}_1(x) = \frac{x^T P^T A x}{l} \quad (2.29)$$

$$\bar{b}_2(x) = \frac{x^T P^T B B^T P x}{4l} \quad (2.30)$$

Abaixo, é apresentada a equação do controlador em função dos estados x_1 e x_2 do duplo integrador:

$$k(x) = \frac{0.5x_1 + 0.7071x_2}{2\eta L_3} + \sqrt{\frac{L_1}{4\eta L_3} - \eta L_3 - L_2 x_2} \sqrt{\frac{1}{\eta L_3}} \nu$$

onde:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 0.25x_1^2 + 0.7071x_1x_2 + 0.5x_2^2, \\
 L_2 &= 1.4142x_1 + 0.5x_2, \\
 L_3 &= \frac{-L_2x_2}{2(x_1^2 + x_2^2)} + \sqrt{\frac{L_2^2x_2^2}{4(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{L_1}{4(x_1^2 + x_2^2)}}.
 \end{aligned}$$

Foram feitas simulações utilizando a lei de controle satisfatória da equação (2.28), de forma que a saída do duplo integrador no estado estacionário seja igual à de um modelo de referência $\{A_m, B_m, C_m\}$. A Figura 2.4 mostra o diagrama de blocos do sistema simulado, onde o modelo de referência utilizado é o mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_m &= A_mx_m + B_mu_r \\
 y_m &= C_mx_m
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$ e $B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

Os parâmetros η e ν do controle satisfatório foram ajustados dinamicamente, utilizando-se o algoritmo da equação (2.12). Para isso, na função custo dada pela equação (2.11), considerou-se $\hat{Q} = I$, $\hat{R} = I$ e $T = 0.05$. As Figuras 2.5, 2.6 e 2.7 mostram respectivamente os gráficos da saída da planta (duplo integrador), do sinal de controle e do erro entre a saída da planta e do modelo de referência, com um degrau unitário como entrada.

Com o objetivo de observar o comportamento do algoritmo do gradiente descendente da equação (2.12), foi plotado o gráfico do gradiente e da função custo da equação (2.11) em função de η e ν . Considerou-se η e ν variando entre os valores permitidos pelo teorema 2.4 e o estado x constante. A Figura 2.8 mostra o gráfico da função custo para $x^T = [1 \ 1]$. Já a Figura 2.9 mostra o gráfico das curvas de nível e do gradiente, para os valores iniciais de $\eta^0 = 0.5$ e $\nu^0 = 0.5$ e o mesmo valor do estado x da Figura 2.8.

Para mostrar o comportamento não linear da equação do controlador satisfatório mesmo quando aplicado em um sistema linear, traçou-se o gráfico do controle $k(x(t))$ da equação (2.14). Considerou-se $\eta = 0.99$ e $\nu = 0.39$, pois esses são os valores obtidos

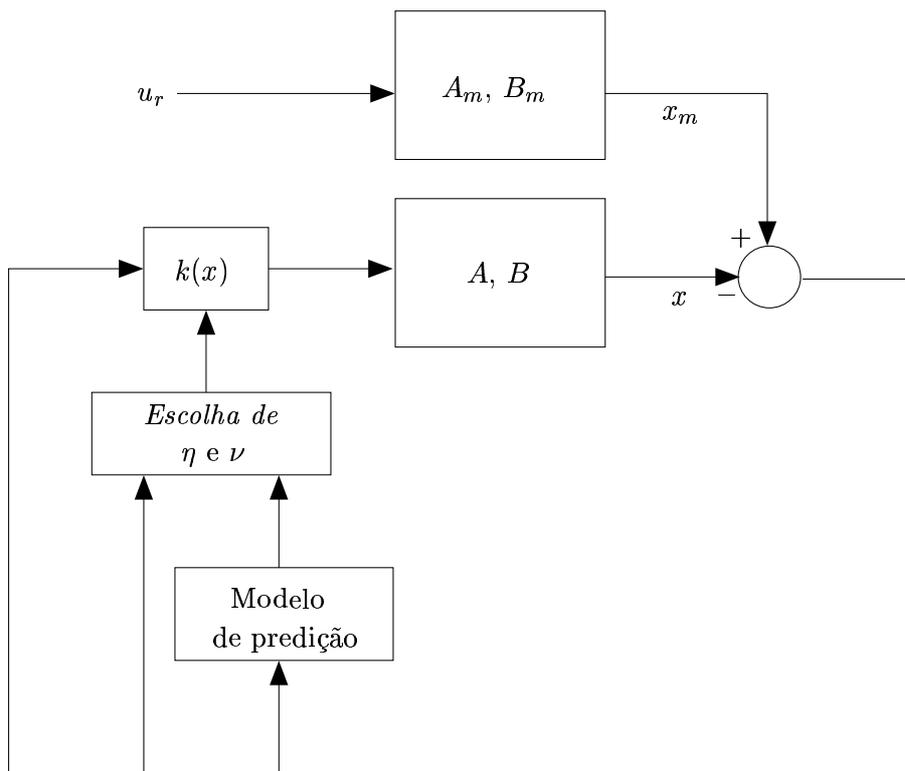


FIGURA 2.4: Controle satisfatório de um duplo integrador: Diagrama de blocos

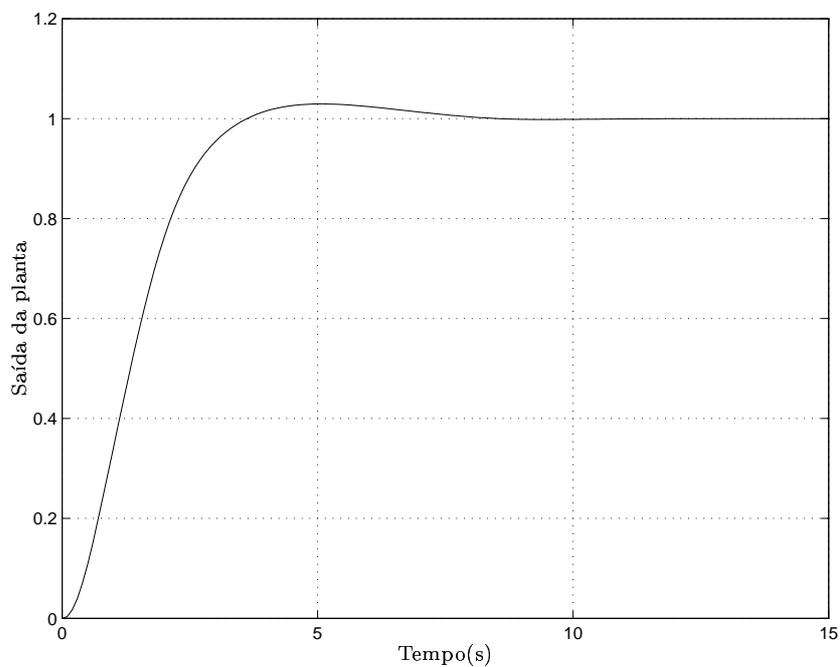


FIGURA 2.5: Controle satisfatório de um duplo integrador: Resposta do sistema

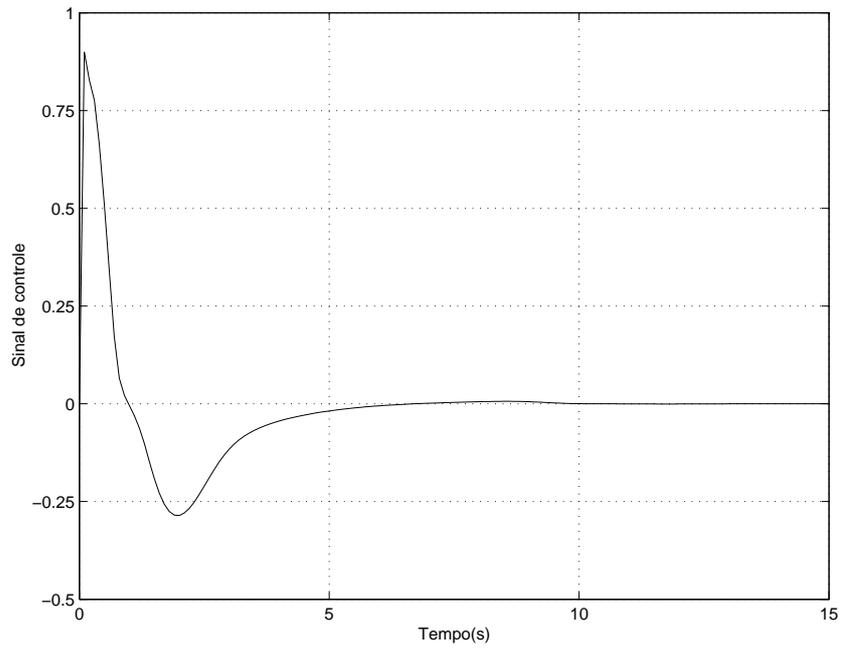


FIGURA 2.6: Controle satisfatório de um duplo integrador: Sinal de controle

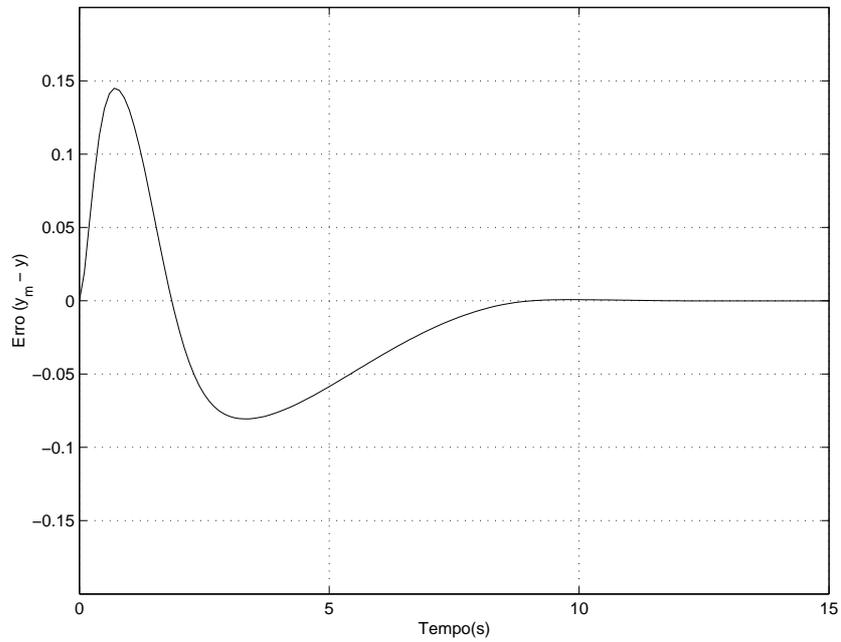


FIGURA 2.7: Controle satisfatório de um duplo integrador: Erro de saída

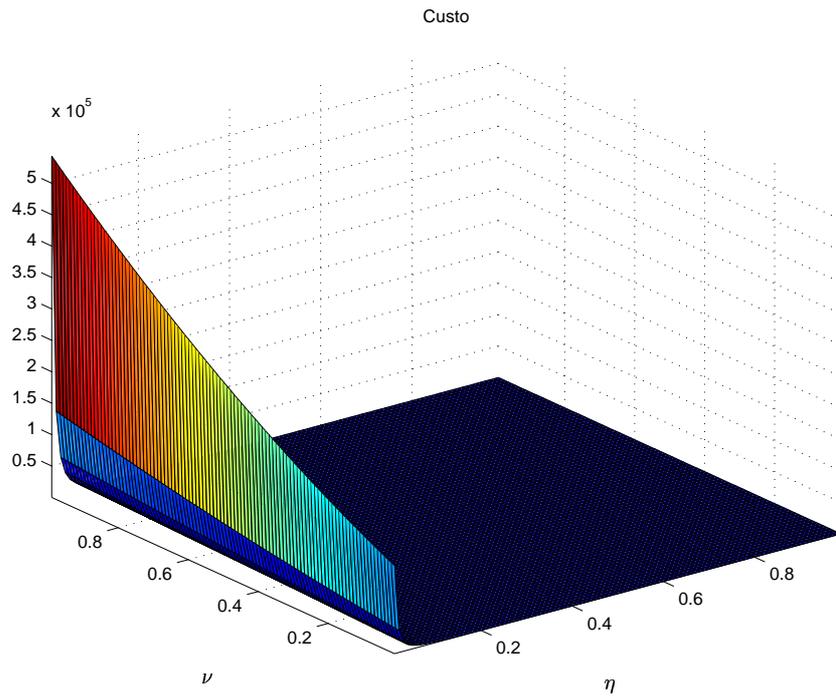


FIGURA 2.8: Função custo $J(\eta, \nu, x)$ para $x^T = [1 \ 1]$

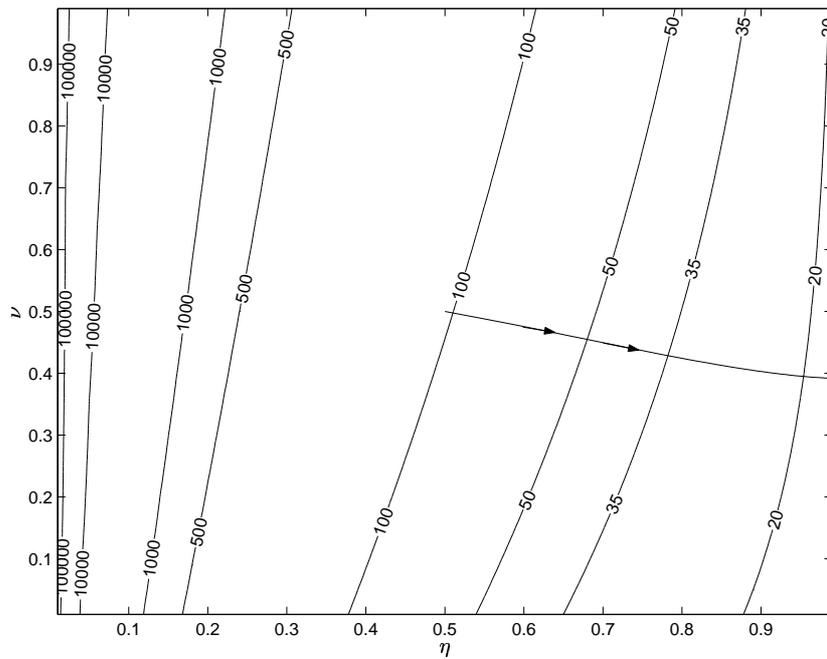


FIGURA 2.9: Curvas de nível e gradiente para $x^T = [1 \ 1]$

pelo algoritmo do gradiente descendente e mostrados na Figura 2.9. Considerou-se também a variação dos estados do sistema $x_1(t)$ e $x_2(t)$ linear entre os intervalos $[0, 2]$ e $[-1, 1]$, respectivamente. A Figura 2.10 mostra o gráfico resultante. Conclui-se

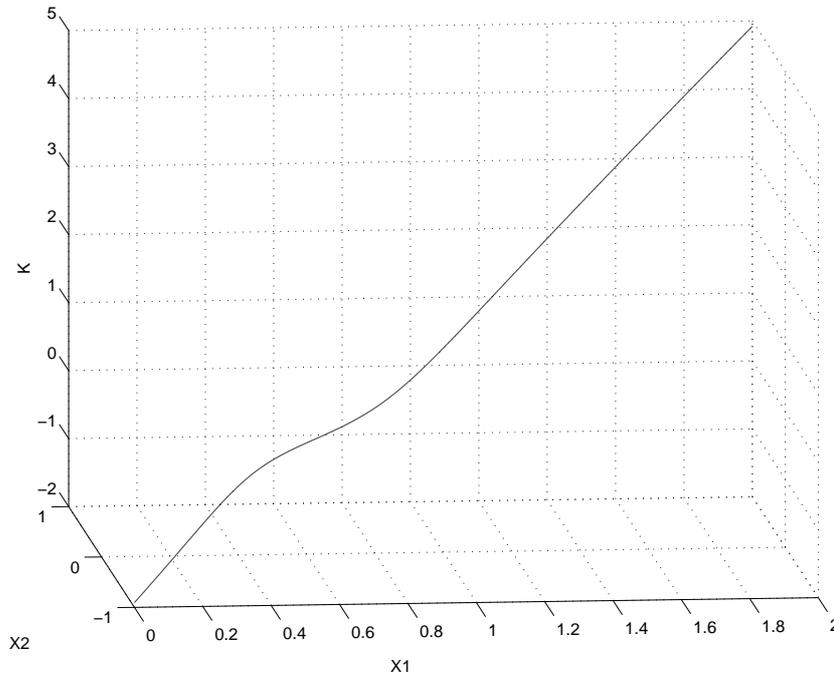


FIGURA 2.10: Comportamento não linear do controle satisfatório

então que mesmo que o controle satisfatório seja aplicado em um sistema linear, a lei de controle gerada provavelmente será não linear, dependendo da função $l(x)$ escolhida e dos parâmetros P e R utilizados na equação (2.21). Devido a esse comportamento não linear, torna-se difícil resolver de forma fechada o problema de otimização dado pelo algoritmo do gradiente descendente da equação (2.12). No entanto, para um sistema linear, o valor dos parâmetros η e ν que minimiza a função custo da equação (2.11) é único, não dependendo do estado x . Por esse motivo, o algoritmo do gradiente descendente pode ser calculado *off-line*, somente na primeira iteração do cálculo do controlador.

Finalmente, foi implementado um controlador ótimo, com o objetivo de comparar o seu desempenho com o controle satisfatório. Projetou-se o controlador ótimo para

seguir o mesmo modelo de referência da equação (2.31). Para a função custo

$$J(x) = \int_0^{\infty} (x^T \tilde{Q}x + u^T \tilde{R}u) dt \quad (2.32)$$

considerou-se $\tilde{R} = 1$ e $\tilde{Q} = I$. O ganho ótimo encontrado foi $k = [1 \ 1.73]$. O diagrama de blocos da Figura 2.11 mostra o sistema simulado. As Figuras 2.12 e 2.13 mostram respectivamente a saída da planta e o sinal de controle com os controles satisfatório e ótimo. Observe que o controle satisfatório teve um comportamento próximo ao do

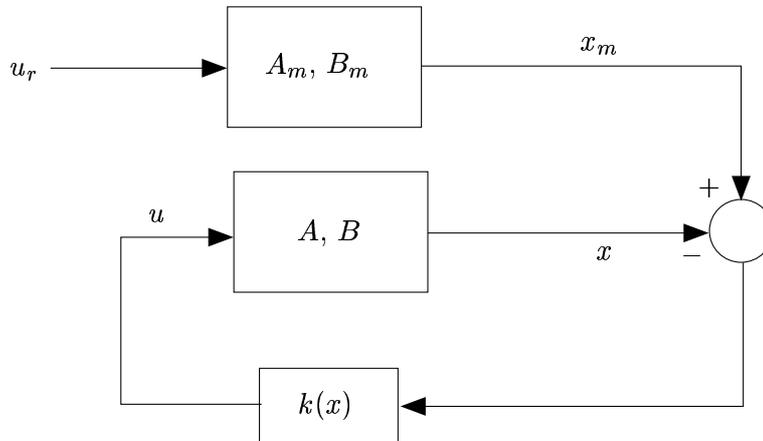


FIGURA 2.11: Controle ótimo de um duplo integrador: Diagrama de blocos

controle ótimo.

Sabe-se que o controlador satisfatório é ótimo, se seus parâmetros de seleção η e ν forem escolhidos de forma a minimizar a função custo da equação (2.11). Neste caso, é necessário a utilização de um algoritmo de sintonia do controlador satisfatório. A questão que fica, é se há alguma condição sobre a equação do controlador satisfatório para o caso linear (equação (2.21)) que gere uma lei de controle ótima. Uma forma de resolver essa questão é escolher $\nu = 0$. Para $\nu = 0$, a equação do controlador satisfatório para o caso linear seria

$$k(x) = -\frac{1}{2\eta b} R^{-1} B^T P x. \quad (2.33)$$

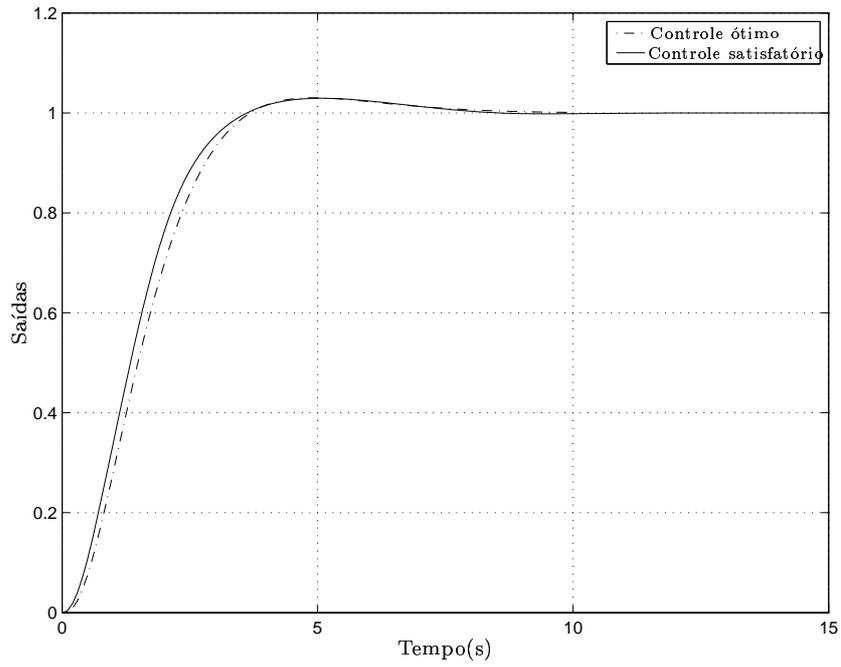


FIGURA 2.12: Controle ótimo de um duplo integrador: Resposta do sistema

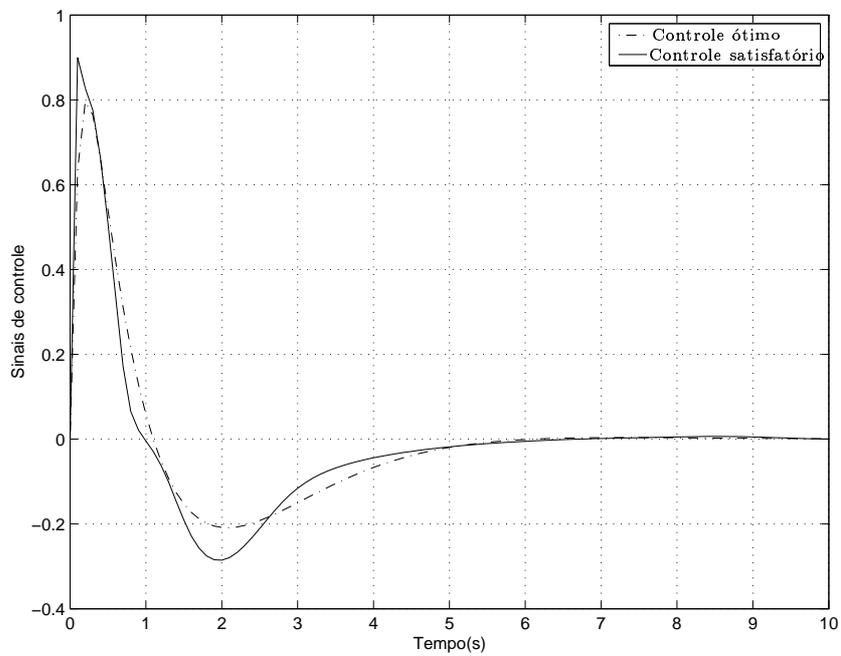


FIGURA 2.13: Controle ótimo de um duplo integrador: Sinal de controle

Observe, que a equação (2.33) é semelhante à solução do controle ótimo

$$k(x) = \tilde{R}^{-1}(x)B^T Px, \quad (2.34)$$

onde P é solução da equação de Ricatti matricial

$$PA + A^T P + PB\tilde{R}^{-1}B^T P - \tilde{Q} = 0,$$

$\tilde{R} = \tilde{R}^T > 0$, $P = P^T > 0$ e $\tilde{Q} > 0$. Comparando as equações (2.33) e (2.34) observa-se que, considerando-se $\tilde{R} = \frac{1}{2\eta\bar{b}}R$, se for escolhido um valor de η dentro do intervalo $0 < \eta < 1$ e \bar{b} for constante, o controlador satisfatório da equação (2.33) será um controle ótimo. Para uma planta de primeira ordem, pode-se verificar que \bar{b} é constante. Para isso, considere o sistema

$$\dot{x} = ax + bu$$

Substituindo-se $l(x) = \alpha x^2$, $P = p$ e $R = r$ na equação de \bar{b} (equação (2.22)), temos:

$$\bar{b} = -\frac{pa}{2\alpha} + \frac{p}{2}\sqrt{\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2r}{\alpha}}$$

onde p , r e α são constantes escalares positivas. Conclui-se então que \bar{b} é constante e conseqüentemente o controlador satisfatório para $\nu = 0$ é ótimo. A dificuldade é que para plantas com ordem maior que um, \bar{b} depende do estado. A consequência disso, é que \tilde{R} não será constante e conseqüentemente não se pode afirmar que a lei de controle satisfatória resultante para $\nu = 0$ é ótima. A questão da descontinuidade de \tilde{R} é abordada na próxima seção, onde a condição para o controlador satisfatório ser escrito da forma da equação (2.33) foi expandida de $\nu = 0$ para $x^T P B R^{-1/2} \nu \leq 0$.

2.4.3 Controle satisfatório robusto aplicado em plantas lineares

Nesta seção, o controle satisfatório robusto é aplicado em plantas lineares. Neste caso, mostrou-se que todo controlador satisfatório robusto pode ser escrito da forma

$k_r(x) = -\tilde{R}(x)^{-1}B^T Px$, onde P é solução da *equação de Ricatti dependente do estado (SDRE)*

$$PA + A^T P + PB\tilde{R}^{-1}B^T P - \tilde{Q}(x) = 0, \quad (2.35)$$

onde $\tilde{R}^T(x) = \tilde{R}(x) > 0$ penaliza o esforço de controle e $\tilde{Q}(x) = \tilde{Q}^T(x) > 0$ penaliza o estado na função de custo da equação (2.32). Os teoremas e demonstrações seguem as mesmas linhas de raciocínio utilizadas na seção 2.3 e apêndice A, que tratam do controle satisfatório robusto.

Dado que a planta é linear, a sua função de Lyapunov de controle pode ser escrita como

$$2V(x) = x^T Px, \quad (2.36)$$

logo $V_x = Px$, onde $P = P^T > 0$. Pode-se então reescrever a Definição 7 e o Teorema 2.5 da seguinte forma:

Definição 9 *O conjunto satisfatório robusto para o caso linear, $S_r(x)$, é um conjunto de valores de controle dependentes do estado definido como:*

$$S_r(x) = \{k(x, \nu) \in S(x) : x^T P B R^{-1/2} \nu \leq 0\}$$

Teorema 2.6 *Se k_r é um controle satisfatório robusto, então:*

1. $k_r(x)$ tem margem de ganho de $[-\frac{1}{2}, \infty)$.
2. $k_r(x)$ pode ser escrita da forma

$$k_r(x) = -\tilde{R}(x)B^T Px. \quad (2.37)$$

3. $k_r(x)$ é ótima, logo dado um P e \tilde{R} , existe um único \tilde{Q} que satisfaz a equação de Ricatti dependente do estado da equação (2.35).

Prova:

As demonstrações dos itens 1 e 2 são idênticas às demonstrações dos itens 1 e 2 do Teorema 2.5. Falta demonstrar portanto, o item 3.

Aplicando o lema A.4 em um sistema linear, sabe-se que todo controle satisfatório robusto pode ser escrito da forma $k_r(x) = -\tilde{R}^{-1}(x)B^T Px$. Sabe-se então, do item 1,

que o sistema

$$\dot{x} = Ax + B\frac{1}{2}k_r(x) \quad (2.38)$$

é estável. Diferenciando a função de Lyapunov da (2.36) ao longo das soluções de (2.38) tem-se:

$$\dot{V} = x^T(PA + A^T P)x - \frac{1}{2}x^T(P\tilde{R}^{-1}B^T P + PB\tilde{R}^{-1}P)x$$

Sabendo-se que $P = P^T > 0$ e $\tilde{R} = \tilde{R}^T > 0$, temos que $P\tilde{R}^{-1}B^T P = PB\tilde{R}^{-1}P$, logo,

$$\dot{V} = x^T(PA + A^T P)x - x^T PB\tilde{R}^{-1}(x)B^T Px.$$

Assumindo $\tilde{Q} = PA + A^T P - PB\tilde{R}^{-1}(x)B^T P$, teremos que a equação de Ricatti será satisfeita. ■

Observe que equação de Ricatti satisfeita é dependente do estado, pois embora o valor de P seja fixo, tem-se \tilde{R} e \tilde{Q} variáveis com o estado ($\tilde{R}(x)$ e $\tilde{Q}(x)$). Por isso, o controlador satisfatório robusto para o caso linear não consiste em uma lei de controle ótima, pois não minimiza a função custo da equação (2.32), visto que, no controle ótimo, \tilde{R} e \tilde{Q} são constantes.

Capítulo 3

Controle satisfatório em sistemas passivos

O estudo de sistemas passivos foi primeiramente motivado por sistemas físicos que dissipam e conservam energia, como estruturas mecânicas (Anderson & Vongpanitlerd 1973) e circuitos elétricos constituídos por resistores, capacitores e indutores (RLC) (Benhabib, Iwens & Jackson 1979). Desde então, devido à sua estabilidade, os sistemas passivos têm sido utilizados em diversas áreas da engenharia. Como exemplo, pode-se citar o trabalho de (Kerns & Yang 1997), onde desenvolve-se um algoritmo de redução de redes RLC, que preserva a passividade da rede com o objetivo de emular o funcionamento de circuitos integrados, e o trabalho de (Zio, Cantarella & Cammi 2003), onde é proposto um método de avaliação da confiabilidade de sistemas passivos visando aplicá-los no desenvolvimento de soluções para a tecnologia de plantas nucleares.

Na área de controle, o conceito de passividade é utilizado principalmente na análise de estabilidade e no projeto de controladores para sistemas não lineares. Na década de 60, Popov introduziu o conceito de passividade no controle realimentado (Popov 1960, Kokotovic & Arcak 2001). Popov introduziu o conhecido teorema da passividade. Segundo esse teorema, a realimentação negativa de dois sistemas passivos é passiva.

Em 1972, Willems introduziu a teoria de sistemas dissipativos para sistemas não lineares (Willems 1972 *a*). Willems definiu duas funções: A função de armazenagem $V(x)$ e a taxa de fornecimento $w(u, y)$, onde x , y e u são respectivamente o estado, a saída e a entrada do sistema. Um sistema dissipativo foi definido então como um

sistema em que $\dot{V}(x) \leq w(u, y)$. De forma semelhante, um sistema passivo foi definido como um caso especial, quando $w(u, y) = y^T u$. Vale observar que a função de armazenagem está associada com a energia do sistema e a taxa de fornecimento está associada com a potência enviada para o sistema por uma fonte externa. Esta teoria de sistemas dissipativos foi estendida por (Hill & Moylan 1977, Hill & Moylan 1980b, Hill & Moylan 1980a) de onde conclui-se que, para um dado sistema não linear passivo $\dot{x} = f(x) + g(x)u(x)$, tem-se $V_x^T f(x) < 0$ e $V_x^T g(x) = h^T(x)$, onde $y = h(x)$ é a saída do sistema.

A teoria de sistemas dissipativos é de grande importância, pois a utilização da função de armazenagem permite analisar a estabilidade de um sistema realimentado. Para isso, as funções de armazenagens dos subsistemas na interconexão da realimentação devem ser combinadas e utilizadas na análise de estabilidade de Lyapunov (Slotine & Li 1991). Como exemplo, o teorema do “pequeno-ganho” (*small-gain*) (Sandberg 1964, Zames 1966, Khalil 2002) alcança um número de interessantes resultados concernentes à estabilidade de vários importantes sistemas lineares e não lineares interconectados.

O conceito de passividade é utilizado também no desenvolvimento de controladores estabilizantes. Sabe-se que sistemas passivos podem ser assintoticamente estabilizados utilizando somente uma realimentação de saída. Com isso, uma forma de estabilizar um sistema é torná-lo passivo e utilizar uma realimentação de saída para garantir estabilidade assintótica. De (Byrnes et al. 1991) sabe-se que sistemas com algumas características especiais podem ser transformados em sistemas passivos. Outro ponto que torna relevante o conceito de passividade, é que muitos sistemas já são naturalmente passivos. Como exemplo, pode-se citar, além dos circuitos RLC e estruturas mecânicas, os modelos de controle de fluxo de dados em redes de computadores e os modelos de braços robóticos, quando a gravidade é compensada.

Neste capítulo é revisado um número de conceitos e propriedades básicas relacionadas à noção de passividade (veja (Byrnes et al. 1991, Isidori 1999) para mais detalhes). O objetivo é aplicar algumas propriedades dos sistemas passivos no controle satisfatório, para desenvolver uma versão desse controlador para sistemas passivos, denominada controle satisfatório passivo. O controle satisfatório passivo possui a vantagem de ser uma realimentação de saída, não precisando de uma CLF para ser calculado.

3.1 Sistemas passivos: Definição e propriedades

Seja $w(u, y)$ uma função de valor real, denominada taxa de fornecimento. Assumiu-se que para qualquer sinal de controle $u \in \mathcal{U}$ e para qualquer condição inicial x^0 , para $t = 0$, a saída $y(t) = h(\phi(t, x^0, u))$ do sistema

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3.1)$$

onde $\phi(t, x^0, u)$ é a solução do sistema no instante t , é tal que $w(u(s), y(s))$ satisfaz

$$\int_0^t |w(s)| ds < \infty \quad (3.2)$$

para todo $t \geq 0$.

Dada uma taxa de fornecimento $w(u, y)$ obedecendo a desigualdade (3.2), pode-se definir um sistema dissipativo, como mostrado abaixo:

Definição 10 *O sistema da equação (3.1) com taxa de fornecimento w é dissipativo se existir uma função não negativa C^0 $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denominada função de armazenagem, tal que para todo $u \in \mathcal{U}$, condição inicial x^0 e $t \geq 0$, a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$V(x) - V(x^0) \leq \int_0^t w(s) ds \quad (3.3)$$

onde $x = \phi(t, x^0, u)$.

Neste trabalho, estamos interessados em estudar sistemas dissipativos com taxa de fornecimento dada pelo produto interno, isto é:

$$w = \langle u, y \rangle = y^T u. \quad (3.4)$$

Definição 11 *O sistema da equação (3.1) é passivo se for dissipativo com taxa de fornecimento $w = \langle u, y \rangle$ e se sua função de armazenagem V satisfaz $V(0) = 0$.*

Em outras palavras, o sistema (3.1) é passivo se existir uma função não negativa C^0 $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfaz $V(0) = 0$, tal que

$$V(x) - V(x^0) \leq \int_0^t y^T(s)u(s) ds \quad (3.5)$$

Definição 12 *O sistema passivo (3.1) com função de armazenagem V é estritamente passivo se houver uma função definida positiva $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $u \in \mathcal{U}$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$, tem-se:*

$$V(x) - V(x^0) = \int_0^t y^T(s)u(s)ds - \int_0^t S(x(s))ds \quad (3.6)$$

Será apresentado agora uma propriedade fundamental de sistemas passivos que é uma extensão para sistemas não lineares do lema de Kalman-Yacubovitch-Popov (KYP) para sistemas lineares positivos reais (PR) (Khalil 2002).

Definição 13 *Um sistema (3.1) tem a propriedade KYP se existe uma função não negativa C^1 , $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $V(0) = 0$, tal que*

$$V_x^T f \leq 0 \quad (3.7)$$

$$V_x^T g = h^T(x) \quad (3.8)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

O próximo lema será útil no desenvolvimento do controle satisfatório passivo.

Lema 3.1 *Um sistema (3.1) que satisfaz a propriedade KYP é passivo, com função de armazenagem V . Por outro lado, um sistema passivo que possui uma função de armazenagem C^1 satisfaz a propriedade KYP.*

Como exemplo de um sistema passivo, considere a equação do braço robótico desconsiderando a gravidade, mostrada abaixo:

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) = \tau \quad (3.9)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^n$ é um vetor descrevendo a posição das juntas do robô, τ é o vetor de torques de entrada, $C(\theta, \dot{\theta})$ representa as forças de Corioles e centrípeta causada pelo movimento dos enlacs e $M(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia do braço robótico.

Mostraremos então que o braço robótico descrito pela equação (3.9) é passivo de $\tau \mapsto \dot{\theta}$.

Sabe-se que:

1. $M(\theta) = M^T(\theta) > 0$, i.e. $x^T M(\theta)x > 0$

2. Definindo $N(\theta, \dot{\theta}) = \dot{M} - 2C$ têm-se

$$\dot{\theta}^T N(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = 0.$$

Para uma escolha particular de $C(\theta, \dot{\theta})$ tem-se que $x^T N(\theta, \dot{\theta})x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, i.e., $N = -N^T$. Esta propriedade é útil no projeto de controladores via teoria de Lyapunov, principalmente porque ela implica na passividade do sistema de $\tau \mapsto \dot{\theta}$.

Considere uma função de energia do tipo:

$$2V = \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}$$

para o caso planar sem gravidade ($G(\theta) = 0$) tem-se que a derivada de V considerando o modelo dinâmico do manipulador é dada por:

$$\dot{V} = \dot{\theta}^T M(\theta) \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \dot{M}(\theta) \dot{\theta}$$

Dado que $M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} = \tau$ tem-se

$$\dot{V} = \dot{\theta}^T [\tau - C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}] + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \dot{M}(\theta) \dot{\theta} = \dot{\theta}^T \tau + \frac{1}{2} \underbrace{\dot{\theta}^T [\dot{M}(\theta) - C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta}] \dot{\theta}}_{=0}$$

Conseqüentemente,

$$\dot{V} = \dot{\theta}^T \tau \quad \text{Potência injetada no sistema}$$

Portanto o sistema é passivo no sentido que a energia dele é conservada.

3.2 Controle satisfatório passivo

Nesta seção, o lema 3.1 é aplicado no desenvolvimento do controle satisfatório passivo. Obtêm-se uma lei de controle que é uma realimentação de saída. A vantagem desta lei de controle é que não há necessidade de uma CLF para o seu cálculo.

Como no capítulo 2 (seção 2.3), é feita uma análise de robustez do controle satisfatório passivo. Obtêm-se então um subconjunto dos controladores satisfatórios passivos, denominado controle satisfatório passivo robusto, que possui margem de estabilidade $(-\frac{1}{2}, \infty]$.

3.2.1 Controle satisfatório passivo: Desenvolvimento

Considere o sistema da equação (3.1) passivo. Sabendo-se da equação (2.3) que a função rejeitabilidade não deve ser negativa, pode-se redefinir a função rejeitabilidade como:

$$p_{rp} = b(l(y) + u^T Ru) - V_x^T f \quad (3.10)$$

pois da definição 13 e lema 3.1, sabe-se que $V_x^T f \leq 0$. O conjunto satisfatório pode então ser redefinido como o conjunto de entradas u tais que a função seletividade da equação (2.2) é maior ou igual que a função rejeitabilidade da equação (3.10), ou seja:

$$S_p = \{u \in \mathbb{R}^m : p_s \geq p_{rp}\}.$$

O conjunto satisfatório S_p é então denominado conjunto satisfatório passivo. O próximo lema mostra que S_p depende somente da saída do sistema e do índice de seletividade b .

Lema 3.2 *O conjunto satisfatório passivo S_p depende somente da saída do sistema e do índice de seletividade e é dado por:*

$$S_p(y, b) = \{u \in \mathbb{R}^m : -y^T u \geq bl(y) + bu^T Ru\}, \quad (3.11)$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Prova: Para o conjunto satisfatório passivo não ser vazio, deve-se ter:

$$-V_x^T (f + gu) \geq b(l(y) + u^T Ru) - V_x^T f, \quad (3.12)$$

logo:

$$-V_x^T gu \geq bl(y) + u^T bRu$$

Pelo Lema 3.1 e definição 13, sabe-se que $V_x^T g = h^T(x)$, logo:

$$-h^T(x)u \geq bl(y) + bu^T Ru \implies -y^T u \geq bl(y) + bu^T Ru,$$

pois $y = h(x)$. Logo o conjunto satisfatório passivo é dado pela equação (3.11). ■

O próximo teorema mostra a condição necessária e suficiente para $S_p(y, b)$ não ser vazio, ou seja, que haja um conjunto de sinais de controle u tais que $p_s \geq p_{rp}$.

Teorema 3.1 *O conjunto satisfatório dado pela equação (3.11) não é vazio, se e somente se:*

$$\frac{1}{4}y^T(bR)^{-1}y - bl(y) \geq 0, \quad (3.13)$$

e é dado por

$$S_p(y, b) = \left\{ u = -\frac{1}{2}(bR)^{-1}y + \sqrt{\frac{1}{4}y^T(bR)^{-1}y - bl(y)} (bR)^{-1/2}\nu : \nu \in \mathcal{B} \right\} \quad (3.14)$$

onde $\mathcal{B} = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| \leq 1\}$.

A demonstração desse teorema segue o raciocínio da demonstração de teorema 2.1.

Prova: Da equação (3.11) observa-se que $S_p(y, b)$ não é vazio se e somente se:

$$u^T bRu + y^T u + bl(y) \leq 0$$

Considerando $A = bR$, $d = y$, $c = bl(y)$ e aplicando o lema (A.1) chega-se nas equações (3.13) e (3.14). ■

Note que a fórmula da equação (3.14) fornece um mapeamento da bola unitária para o conjunto satisfatório passivo.

O próximo lema mostra que para cada y , pode-se escolher b para o conjunto satisfatório passivo não ser vazio.

Lema 3.3 *Para cada y , o conjunto satisfatório passivo não é vazio, se e somente se*

o índice de seletividade satisfaz o limite $0 < b(y) \leq \bar{b}(y)$, onde

$$\bar{b}(y) = \sqrt{\frac{1}{4l(y)}y^T(R^{-1})y} \quad (3.15)$$

Prova:

Para o conjunto satisfatório passivo não ser vazio, a desigualdade (3.13) deve ser satisfeita, logo:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{4}y^T(R)^{-1}y\right) \geq bl(y) \Rightarrow b^2 \leq \frac{1}{4l(y)}y^T(R^{-1})y \Rightarrow -\sqrt{\frac{1}{4l(y)}y^T(R^{-1})y} \leq b \leq \sqrt{\frac{1}{4l(y)}y^T(R^{-1})y}$$

Como $b \geq 0$, conclui-se que:

$$0 < b \leq \bar{b}(y)$$

onde:

$$\bar{b}(y) = \sqrt{\frac{1}{4l(y)}y^T(R^{-1})y}$$

Logo, se $0 \leq b(y) \leq \bar{b}(y)$ o conjunto satisfatório passivo não é vazio. ■

Se S_p não for vazio, toda lei de controle contínua $k \in S_p$ é definida como um controle satisfatório passivo, como mostra a definição abaixo:

Definição 14 O mapeamento $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um controle satisfatório passivo se

1. $S_p(y, b(y))$ não é vazio para cada $y \in \mathbb{R}^m$,
2. $k(y) \in S_p(y, b(y))$ para cada $y \in \mathbb{R}^m$,
3. k é contínuo em \mathbb{R}^m

O próximo teorema mostra que todo controle satisfatório passivo garante estabilidade assintótica ao sistema:

Teorema 3.2 Se $k(y)$ é um controle satisfatório passivo, então o sistema em malha fechada $\dot{x} = f + gk$ é uniformemente assintoticamente estável.

Prova: Sabe-se, da demonstração do Teorema 2.2, que $f + gk$ é localmente Lipschitz. Dado que $k(y) \in S_p(y, b(y))$, do lema 3.2 conclui-se que a desigualdade abaixo é

satisfeita:

$$-y^T u \geq bl(y) + bu^T Ru.$$

Da prova do lema 3.2 sabe-se que, para sistemas passivos, satisfazer a desigualdade anterior é equivalente a satisfazer a desigualdade abaixo:

$$V_x^T(f + gk) \leq -bl(y) - k^T b R k + V_x^T f \quad (3.16)$$

Como $-bl(y) - k^T b R k \leq 0$ ($R \geq 0$ e $l(y)$ não negativa) e $V_x^T f \leq 0$ (ver definição 13 e lema 3.1), conclui-se que:

$$V_x^T(f + gk) \leq -bl(y) - k^T b R k + V_x^T f \leq V_x^T f$$

Conclui-se então que a derivada da função de Lyapunov no sistema em malha fechada, será mais negativa que em malha aberta, garantindo maior estabilidade e robustez ao sistema realimentado. ■

O próximo teorema parametriza o conjunto de controladores satisfatórios passivos.

Teorema 3.3 *Se*

1. $\nu : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínuo em \mathbb{R}^m e satisfaz $\|\nu(y)\| \leq 1$,
2. $\eta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínuo em \mathbb{R}^m e satisfaz

$$0 < N \leq \eta(y) \leq 1$$

então

$$k(y) = \left\{ -\frac{1}{2}(\eta \bar{b} R)^{-1} y + \sqrt{\frac{1}{4} y^T (\eta \bar{b} R)^{-1} y - \eta \bar{b} l(y) (\eta \bar{b} R)^{-1/2} \nu : \nu \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)} \right\} \quad (3.17)$$

é um controle satisfatório passivo.

Note que η parametriza o índice de seletividade, caracterizando portanto, o tamanho do conjunto satisfatório passivo, enquanto ν parametriza o elemento do conjunto satisfatório passivo escolhido.

3.3 Controle Satisfatório Passivo Robusto

Nesta seção é feita uma análise de robustez do controle satisfatório passivo. Para isso, é utilizado um desenvolvimento semelhante ao da seção 2.3, definindo-se um subconjunto do conjunto satisfatório passivo, denominado conjunto satisfatório passivo robusto ($S_{pR}(y)$). Toda lei de controle pertencente a $S_{pR}(y)$ é denominada controle satisfatório passivo robusto ($k_R(y)$). Mostra-se que $k_R(y)$ possui margem de estabilidade de $[-\frac{1}{2}, \infty)$.

Como passo inicial no desenvolvimento do controle satisfatório passivo robusto, é mostrado abaixo a definição do conjunto satisfatório passivo robusto:

Definição 15 *O conjunto satisfatório passivo robusto, denominado $S_{pR}(y)$, é o conjunto de valores de controle dependentes da saída, definido como:*

$$S_{pR}(y, b) = \{k(y, b, \nu) \in S_p(y, b) : \nu^T y \leq 0\}$$

Dessa definição conclui-se que $S_{pR}(y, b)$ é um subconjunto do conjunto satisfatório passivo $S_p(y, b)$. Toda lei de controle contínua pertencente a $S_{pR}(y, b)$ é então definida como um controle satisfatório passivo robusto, como mostrado abaixo:

Definição 16 *O controle satisfatório passivo robusto, k_R , é uma função com $k(0) = 0$ que é localmente Lipschitz em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e tal que $k_R(y) \in S_{pR}(y, b)$ para todo y diferente de zero.*

O próximo teorema mostra que todo controle satisfatório passivo robusto tem margem de estabilidade de $[-\frac{1}{2}, \infty)$:

Teorema 3.4 *Se $k_R(y)$ é um controle satisfatório passivo robusto, então $k_R(y)$ tem margem de estabilidade de $[-\frac{1}{2}, \infty)$.*

A prova deste teorema segue a mesma linha de raciocínio da prova do item 1 do Teorema 2.5 mostrada no apêndice A.

Prova: Dado que $k_R(y)$ é um controle satisfatório passivo robusto, sabe-se que $k_R \in S_{pR}$. Sabe-se então que $k_R \in S_p$, pois S_{pR} é um subconjunto de S_p (ver definição 15). Como $k_R \in S_p$, sabe-se do lema 3.2 que a desigualdade abaixo deve ser satisfeita:

$$y^T k_R \leq -bl(y) - bk_R^T R k_R \quad (3.18)$$

Sabe-se também da prova do teorema 3.2 que toda lei de controle que satisfaz a desigualdade (3.18) garante estabilidade assintótica ao sistema.

Adicionando $\alpha y^T k_R$ de ambos os lados da desigualdade (3.18), temos:

$$(1 + \alpha)y^T k_R \leq -bl(y) - bk_R^T R k_R + \alpha y^T k_R \quad (3.19)$$

Deseja-se então provar que se $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \infty)$ a desigualdade (3.19) é satisfeita, garantindo estabilidade assintótica ao sistema. Definindo-se:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}(bR)^{-1}y, \\ \sigma_2 &= \sqrt{\frac{1}{4b^2}y^T R^{-1}y - l(y)}, \end{aligned}$$

sabe-se, da equação (3.17), que k_R pode ser escrito da forma abaixo:

$$k_R(y) = \sigma_1 + \sigma_2 R^{-\frac{1}{2}}\nu$$

Substituindo-se $k_R(y)$ na desigualdade (3.19) e desenvolvendo, temos:

$$(1 + \alpha)y^T k_R \leq -b(l(y) + \sigma_2^2 \nu^T \nu) - \frac{1}{2b}(\frac{1}{2} + \alpha)y^T R^{-1}y + (1 + \alpha)y^T R^{-\frac{1}{2}}\nu\sigma_2$$

Analisando essa desigualdade, observa-se que o primeiro termo do lado direito é sempre não-positivo. Já o segundo termo é não-positivo se $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \infty)$. Neste caso, o terceiro termo é não-positivo se $\nu^T y \leq 0$, o que se verifica, pois k_R é um controle satisfatório passivo robusto. Logo se $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \infty)$ o sistema é assintoticamente estável. ■

Observa-se que, como ocorre com o controlador satisfatório robusto do capítulo 2, o controle satisfatório passivo robusto não possui uma forma fechada. Por esse motivo, o sua implementação deve ser feita escolhendo-se ν cada vez que o controle é calculado de forma que $\nu^T y$ seja menor ou igual a zero.

Capítulo 4

Controle do fluxo de dados em redes de computadores

O controle de fluxo de dados em uma rede de comunicação de tráfego elástico, tais como Internet e ATM/ABR, consiste em ajustar a taxa de transmissão de cada fonte para utilizar completamente os recursos da rede sem exceder a capacidade dos seus enlaces (*links*). Os principais objetivos são a estabilidade, a eficiência e uma divisão justa dos recursos da rede entre as fontes. Esses objetivos devem ser alcançados com um controle descentralizado, onde cada fonte define sua taxa de transmissão, utilizando poucas informações sobre o restante da rede. Por isso, o controle do fluxo em uma rede de comunicação torna-se um problema desafiador. Neste capítulo, o controle satisfatório passivo é aplicado em dois modelos de rede de comunicação com tráfego elástico, procurando utilizar todos os recursos da rede sem que ocorra perda de dados.

O problema de controle de fluxo de dados em uma rede de comunicação é de grande relevância, pois nos dias atuais procura-se transmitir tráfego multimídia em alta velocidade. Esse problema é tratado por uma categoria ampla de redes de comunicação, denominada redes de pacotes de serviço integrados (ISPNs). A definição de ISPN é tão ampla, que a maioria das futuras redes de comunicação caem dentro desta definição. Como exemplo, podemos citar a rede ATM (Modo de Transferência assíncrono) e as arquiteturas IntServ (R. Braden & Shenker 1994) e DiffServ (S. Blake 1999), que estão definindo a futura infraestrutura da internet.

No caso da rede ATM, devido à variedade do tráfego multimídia, para garantir uma

qualidade de serviço (QoS) ponto a ponto, os vários tipos de tráfego (voz, dados e etc) foram divididos em pequenas células de tamanho fixo, cujo o atraso de transmissão pode ser previsto e controlado. A rede ATM é então uma tecnologia de Circuito Virtual (VC) que combina as vantagens da comutação de circuito (todos os comutadores são comunicados do requerimento de uma transmissão, sendo então estabelecida uma conexão) e da comutação de pacotes (alguns circuitos podem compartilhar um dispositivo da rede). Pelo fato de vários VC's compartilharem os recursos da rede, devem ser projetados e implementados algoritmos de controle de fluxo e congestionamento. O problema de controle de congestionamento é resolvido, regulando a taxa do tráfego de entrada. Além disso, devido à sua inerente flexibilidade, o tráfego ATM utiliza uma das seguintes classes de serviço:

1. **Taxa de Bits Constante (CBR):** Utilizada pelo tráfego que precisa de um tamanho de banda passante fixo e garantido (conversa telefônica, vídeo conferência e televisão).
2. **Taxa de Bits Variável (VBR):** Acomoda tráfego em rajada, tais como, controle industrial, multimídia email e compressão de vídeo interativo.
3. **Taxa de Bits Disponível (ABR):** Utilizada para transferência de arquivos (FTP) ou e-mail.
4. **Taxa de Bits Não Especificada (UBR):** Utiliza os recursos que estão sobrando na rede para acomodar aplicações, tais como email.

Nas classes de serviço CBR e VBR, um “contrato” de tráfego é negociado no estágio inicial da configuração do circuito virtual, sendo mantido enquanto durar a conexão. Este contrato garante os seguintes parâmetros QoS:

- Taxa de Células Mínima (MCR)
- Taxa de Pico de Células (PCR)
- Variação de Atraso das Células (CDV)
- Máximo Atraso de Transferência de Células (maxCTD)
- Taxa de Perda de Células (CLR)

O “contrato” então estabelece que, uma vez estabelecida a conexão e enquanto durar esta, as taxas das fontes CBR e VBR devem ser mantidas constantes para qualquer situação de congestionamento da rede.

Na classe de serviço ABR, as fontes devem obedecer somente as condições de PCR e MCR. As taxas das fontes devem então ser ajustadas dinamicamente para ocupar de forma eficiente os recursos disponíveis depois que as fontes CBR e VBR forem ajustadas. Para evitar o congestionamento da rede, foram propostas duas estratégias de controle das fontes ABR. São elas:

- Algoritmo de controle baseado em crédito

Neste algoritmo, cada enlace possui um nó transmissor (fonte ou comutador) e um nó receptor (destino final ou comutador). Cada nó receptor mantém uma fila para cada VC (circuito virtual), monitorando o tamanho de todas essas filas. Com este monitoramento, o receptor determina o número de células que cada transmissor pode enviar em cada VC. Esse número é denominado crédito. O envidador então transmite o número de células que o seu crédito permite.

A principal desvantagem desse algoritmo, é que o comutador deve manter uma fila separada para cada VC, mesmo para aqueles que estejam inativos, o que torna a complexidade do comutador proporcional ao número de VC's. Por este motivo, o algoritmo de controle baseado em crédito foi considerado não escalável para um grande número de VC's.

- Algoritmo de controle baseado em taxa

O comutador monitora o tamanho da sua fila e realimenta explicitamente para a fonte a taxa de transmissão das células. Este algoritmo não necessita de uma fila para cada circuito virtual. A utilização ou não de uma fila por VC fica então a critério do implementador.

A grande vantagem do controle baseado em taxa, é que caso o implementador decida que cada comutador da rede possua somente uma fila, o número de VC's não irá alterar a complexidade dos comutadores, o que torna a rede escalável com relação ao número de VC's. Esse foi o principal motivo que fez com que o Forum ATM (AF-TM-0056.00 1996) escolhesse o algoritmo de controle baseado em taxa

como o esquema de controle para o tráfego ABR.

Para transportar as informações de controle, as fontes ATM/ABR devem gerar uma célula de controle, denominada RM, a cada 32 células de dados. As células RM possuem uma área contendo a taxa explícita (ER) desejada, uma área contendo a taxa de células atual e um bit de indicação de congestionamento (CI). Já as células de dados possuem 6 áreas no seu cabeçalho, como mostra a figura 4.1. Os quatro primeiros bits

Controle de fluxo Generalizado (GFC)	ID do caminho virtual	ID do circuito virtual	Tipo de carga-paga	Prioridade de perda de carga	Checagem de erro do cabeçalho
4	8	16	3	1	8

FIGURA 4.1: Célula de dados da rede ATM/ABR

do cabeçalho da célula de dados, que são utilizados na interface rede-usuário, foram reservados para o GFC. Na interface rede-rede o GFC não é utilizado. Sendo assim, os seus bits passam a fazer parte de uma área caminho virtual estendido (VP). Esperava-se que os bits GFC fossem utilizados pela rede para controlar o fluxo de dados da fonte. No entanto, essa abordagem foi abandonada.

Para realizar o controle de fluxo de dados da rede ATM, os comutadores ao longo do VC escrevem na área ER da célula RM as suas taxas desejadas para evitar o congestionamento. O comutador de destino tem então um conjunto com as taxas desejadas por todos os comutadores ao longo do VC, escolhendo a menor delas para reenviar para a fonte, como um sinal de realimentação, utilizando para isso a célula RM.

Nos algoritmos anteriores de controle da rede ATM, os comutadores da rede utilizavam a área tipo de carga-paga (*Payload Type*) da célula de dados (figura 4.1) para conduzir informações de congestionamento de forma binária (congestionado ou não congestionado). Para isso, o primeiro bit desta área era marcado com 0. Sendo assim, o segundo bit era tratado como uma "indicação de congestionamento direto explícito (EFCI)". Quando o bit EFCI estava marcado, significava que a rede estava congestionada. Dessa forma, os comutadores ao longo do circuito virtual marcavam ou não o bit EFCI, de acordo com o nível de ocupação de seus acumuladores (*buffers*). Para enviar as informações de controle, as fontes enviavam uma célula RM a cada n células de dados. A célula RM continha na área ER a taxa de transmissão da fonte. Se entre as n

células de dados recebidas houvesse uma com o bit EFCI marcado, o destino retornava para a fonte a célula RM com o bit CI marcado. A fonte então recebia a célula RM e atualizava a sua taxa de transmissão de acordo com o valor do bit CI. Se $CI = 0$ a taxa era aumentada e se $CI = 1$ a taxa era reduzida. Se houvesse perda da célula RM, devido ao congestionamento da rede, a taxa da fonte também era reduzida.

Esses algoritmos mostraram-se oscilatórios. Além disso, a estabilidade em malha fechada não era comprovada.

Com o objetivo de realizar uma análise de estabilidade e comportamento e propor direções para melhorar os principais protocolos atuais, a comunidade de controle tem estudado o controle de fluxo de dados em redes de comunicação. Muitos trabalhos foram realizados, tanto para redes ATM como para redes TCP (veja (Athuraliya et al. 2001, Kelly et al. 1998, Kelly 1999, Low 2000, Low & Lapsley 1999, Paganini 2002)).

No caso da rede TCP, os trabalhos (Jacobson 1988, Floyd & Fall 1999, Low, Paganini & Doyle 2002, Hespanha, Hohacek, Obrarzka & Lee 2001) consideram o problema de desenvolver métodos de análise de sistemas teóricos que são apropriados para o projeto e análise do controle de congestionamento da internet. Vale ressaltar, que atualmente a rede TCP não utiliza o controle por taxa e sim um algoritmo de controle de congestionamento baseado em janela. O padrão TCP define uma variável *cwnd* chamada janela de congestionamento. Cada fonte utiliza esta variável para rastrear o número de pacotes não reconhecidos que podem estar em trânsito em um determinado instante, isto é o número de pacotes no “cano” formado por enlaces e acumuladores no caminho de transmissão. Quando o tamanho da janela é esgotado, a fonte deve esperar por um sinal de reconhecimento (*acknowledgment*-ACK) antes de enviar um novo pacote. O controle de congestionamento é alcançado pela adaptação dinâmica do tamanho da janela de acordo com uma lei de incremento aditivo e decremento multiplicativo. Vale ressaltar que o algoritmo de controle TCP é feito exclusivamente entre a fonte e o destino, ou seja, os comutadores da rede não atuam no controle. Vale ressaltar também que o sinal de realimentação (ACK) é binário, logo não há realimentação explícita da taxa de transmissão. Portanto, a maioria dos trabalhos encontrados na literatura que estudam o controle de congestionamento por taxa, abordam a rede ATM.

Um dos fatores limitantes dos primeiros algoritmos de controle de congestionamento por taxa, é que estes necessitavam do conhecimento da banda passante disponível para

o tráfego ABR. Este fato torna-se um problema nas aplicações multimídia, onde a banda passante disponível para o tráfego ABR varia. Isso porque o tráfego ABR utiliza a banda passante disponível depois da acomodação do tráfego ABR e CBR. Em (Mascolo 1997) esta questão particular foi tratada utilizando um preditor de Smith que considera a banda passante disponível como uma perturbação desconhecida. Embora esse controlador tivesse algumas propriedades desejáveis, este considerava conhecido o atraso de transmissão dos dados entre as fontes e os destinos, embora no relatório técnico anterior (Cavendish, Mascolo & Gerla 1996) o conhecimento do atraso não fosse conhecido. Em (Imer, Compans, Basar & Srikant 2001), um controlador robusto foi projetado para um número incerto de fontes ABR e um atraso desconhecido. Um controlador com a mesma característica de robustez de (Imer et al. 2001) foi projetado em (Tarbouriech, Abdallah & Ariola 2001), sendo que neste caso foi levado em consideração as limitações da taxa do tráfego e a velocidade de mudança em tais taxas.

Seguindo com o estudo do controle de congestionamento da rede, neste capítulo, o controle satisfatório passivo com predição dos parâmetros de seleção é aplicado no controle de fluxo de dados de redes de computadores de tráfego elástico. O objetivo é utilizar a vantagem da sintonia automática do controlador satisfatório passivo, quando seus parâmetros de seleção são escolhidos utilizando um algoritmo de predição. Além disso, o controlador satisfatório passivo garante estabilidade global assintótica à rede e sua robustez pode ser aumentada utilizando funções de rejeitabilidade mais negativas.

Para implementar o controlador são utilizados dois modelos de rede, ambos de primeira ordem, sendo um deles não linear.

No modelo linear (Mascolo 1997, Mascolo 1999), utiliza-se o controle de fluxo por taxa, escolhido pelo forum ATM (AF-TM-0056.00 1996) como a estratégia de controle a ser utilizada no controle do fluxo de dados de uma rede ATM. Para o modelo não linear, o controle de fluxo é decomposto em um problema de otimização estática e um problema de estabilização dinâmica (Kelly et al. 1998, Low & Lapsley 1999, Wen & Arcak 2004). Primeiramente é resolvido o problema de otimização estática. Para isso, à cada fonte é associada uma função de utilização $U_i(x_i)$, onde x_i é a taxa de transmissão de cada fonte. O problema de otimização estática consiste então em maximizar a soma das funções de utilização, obedecendo à limitação da capacidade dos enlaces da rede,

isto é:

$$\max_{x \geq 0} \sum_{i=1}^N U_i(x_i) \quad \text{sujeito a} \quad y = R_r x \leq c, \quad (4.1)$$

onde N é o número de fontes da rede, R_r a matriz de roteamento e $y \in \mathbb{R}^L$ é um vetor com as taxas nos enlaces da rede, onde L é o número de enlaces.

A otimização estática incorpora justiça, limitação da capacidade e utilização da rede e a sua solução fornece o desejado ponto de operação no estado estacionário (equilíbrio do sistema em malha fechada).

Resolvido o problema de otimização estática, o controlador é projetado para garantir a convergência da rede para o ponto ótimo. Esse controlador atua de forma descentralizada, através de sinais de preço que são enviados dos enlaces para as fontes. As fontes então utilizam esses sinais de preço para atualizar suas taxas.

Na próxima seção é tratado o modelo de rede linear, onde é utilizado o controle de fluxo por taxa.

4.1 Caso de estudo I: Modelo de rede linear

É utilizado o modelo de uma rede com uma única fonte e nó, com atraso constante e conhecido. Um preditor de Smith é utilizado (Franklin et al. 1991, Mascolo 1999) para que o atraso não instabilize o sistema.

Considerando a rede mostrada na Figura 4.2, deseja-se implementar o controle de fluxo baseado em taxa, utilizando-se o controle satisfatório passivo. Para isso, considere $q(t) \geq 0$ o tamanho da fila no acumulador do nó, $r(t) \geq 0$ a realimentação explícita da taxa e $c(t)$ a banda passante do enlace. O modelo dinâmico da rede da Figura 4.2 é então:

$$\dot{q}(t) = r(t - \tau) - c(t) \quad (4.2)$$

onde τ é o *round trip time delay* (RTT). O RTT é a soma dos atrasos direto e reverso, desprezando-se o atraso de processamento dos dados pela fonte.

Deseja-se que o número de pacotes no nó nunca ultrapasse a capacidade máxima do acumulador, para não haver perda de dados. Para isso é utilizado o modelo de

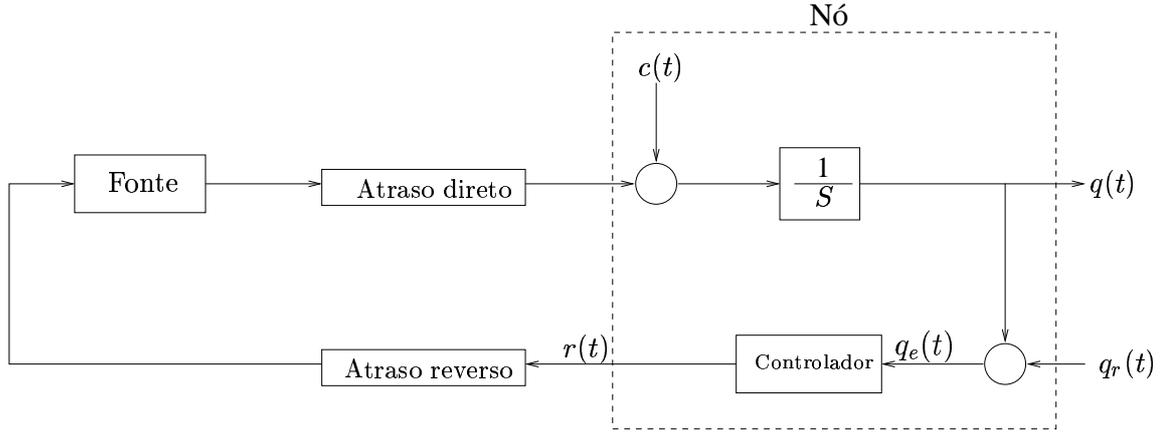


FIGURA 4.2: Rede de comunicação controlada por taxa: Diagrama de blocos.

referência mostrado abaixo, que possui o comportamento desejado.

$$\dot{q}_r = -q_r + u_r \quad (4.3)$$

O controle satisfatório passivo foi então projetado, de forma que o erro entre as saídas do modelo de referência e do modelo da rede seja zero no estado estacionário. Para isso foi considerado inicialmente o sistema sem atraso, como mostra a figura (4.3). Observe que os parâmetros η e ν são selecionados automaticamente, utilizando-se o algoritmo do gradiente descendente, mostrado na equação (2.12). A equação abaixo mostra o controlador obtido utilizando-se a equação do controle satisfatório passivo (equação(3.17)), onde $l(q_e) = q_e^2$ e $R = 1$:

$$k(q_e) = q_e \left(\frac{1}{\eta} + \nu \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \right), \quad (4.4)$$

onde $q_e = q_r - q$.

Considerando agora um atraso constante, para preservar a estabilidade, utilizou-se o preditor de Smith (Franklin et al. 1991), como mostra a figura 4.4. O sistema dinâmico resultante então comporta-se como se o atraso estivesse fora da realimentação (Mascolo 1999), como mostra a Figura 4.5. A Figura 4.6 mostra o resultado da simulação para $c(t) = 150$ e um atraso constante de 2 segundos.

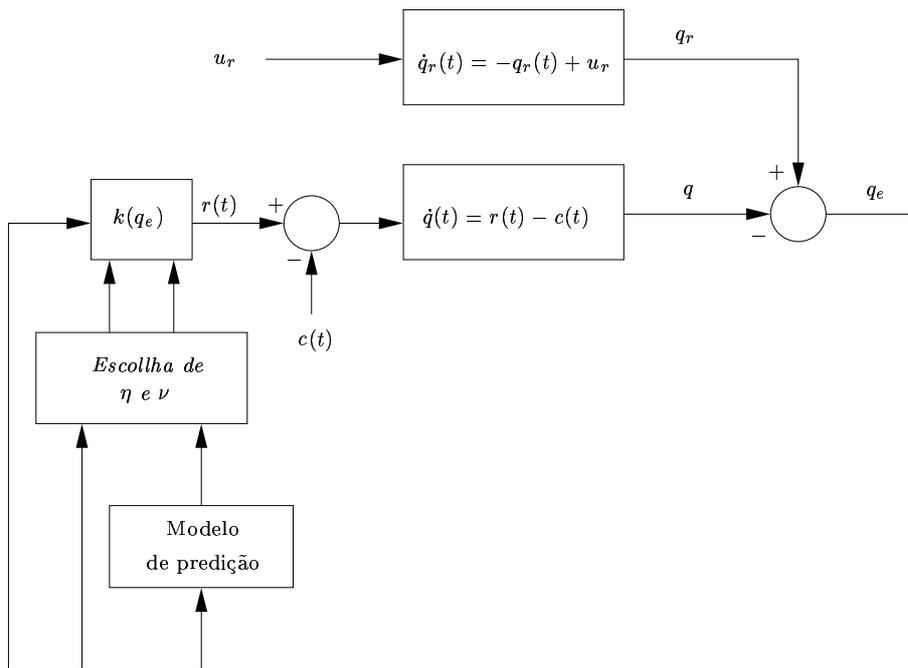


FIGURA 4.3: Modelo linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada sem atraso.

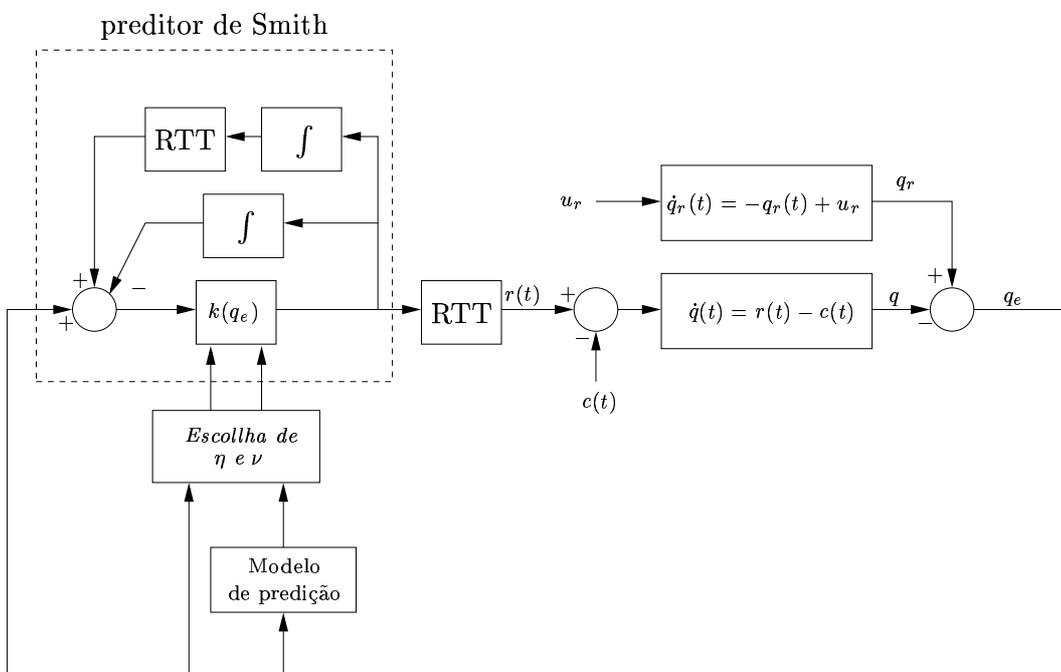


FIGURA 4.4: Modelo linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do sistema com atraso e preditor de Smith

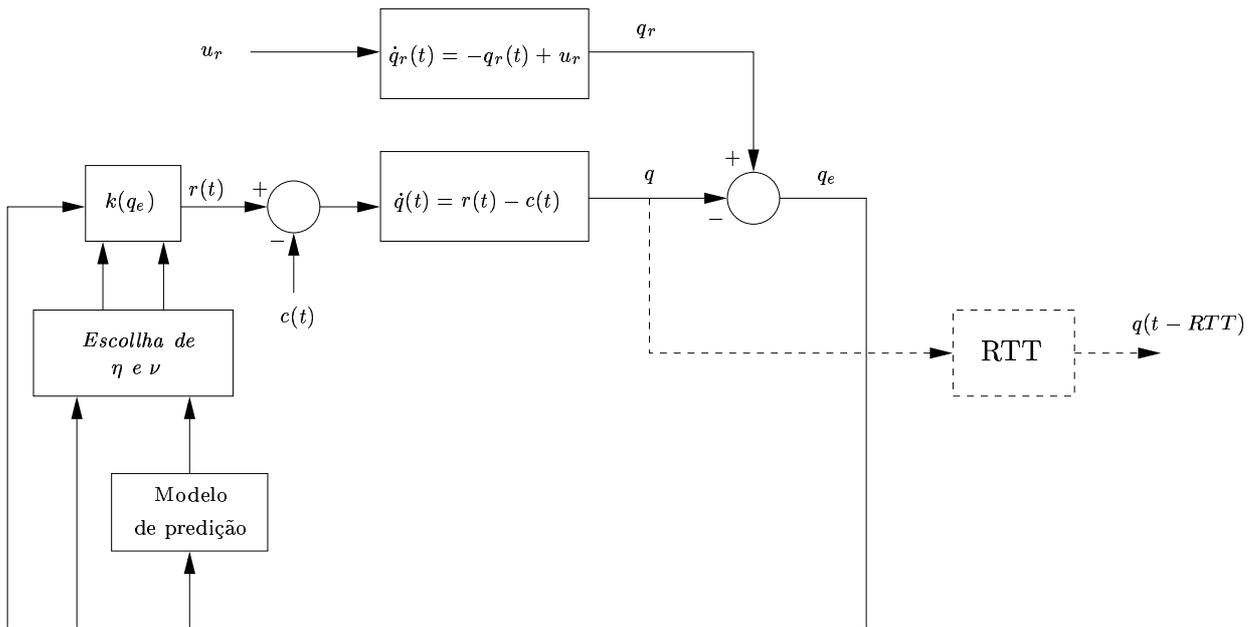


FIGURA 4.5: Modelo linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do sistema com atraso fora da malha de realimentação

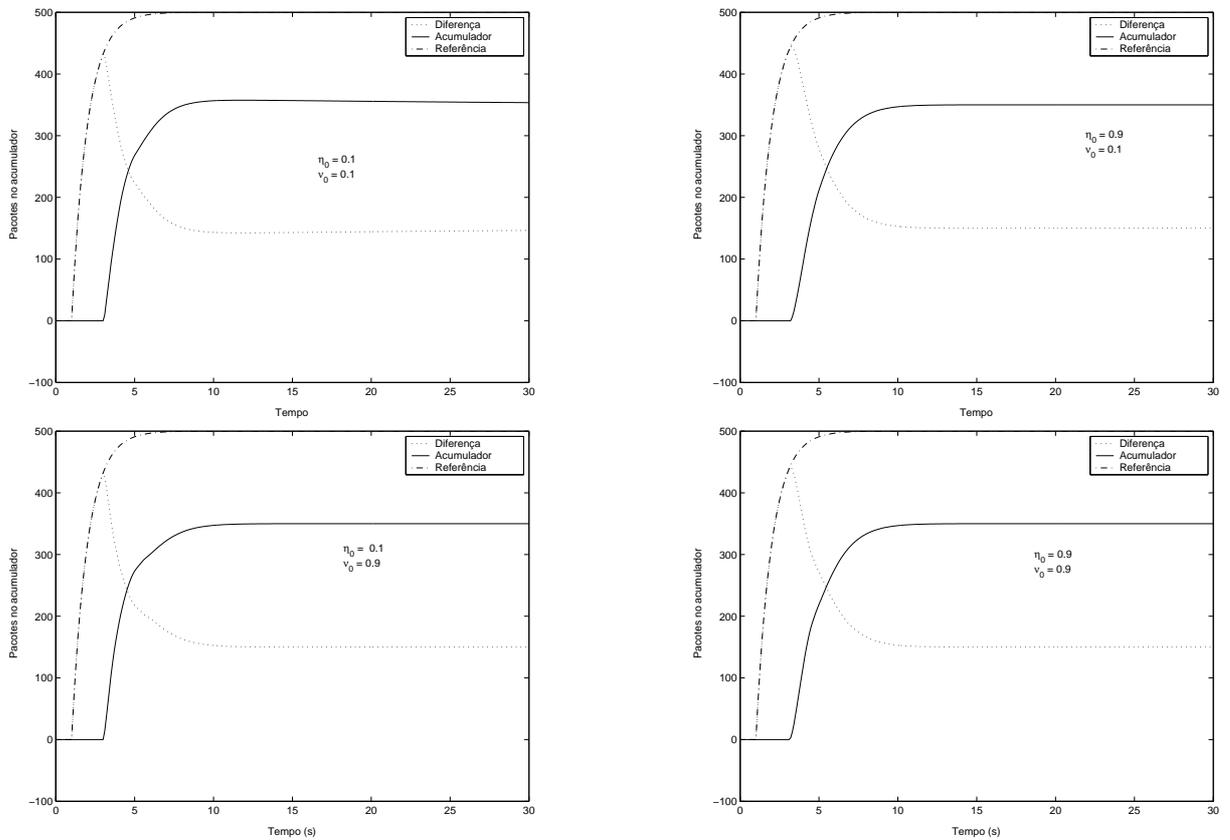


FIGURA 4.6: Controle satisfatório por taxa do fluxo de dados de uma rede de comunicação: Resposta do sistema

4.2 Modelo Não Linear

Antes da abordagem do modelo não linear da rede, é definida a projeção positiva de uma função.

Definição 17 Dada uma função $f(x)$, sua projeção positiva é definida como:

$$(f(x))_x^+ \triangleq \begin{cases} f(x) & \text{if } x \geq 0 \text{ or } x = 0 \text{ e } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \text{ e } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Se x e $f(x)$ forem vetores, a projeção $(f(x))_x^+$ é interpretada como a projeção positiva de cada componente. Quando $(f(x))_x^+ = 0$, diz-se que a projeção está ativa e quando $(f(x))_x^+ = f(x)$ que a projeção está inativa.

O modelo utilizado é o de uma rede com N fontes e L enlaces. O controle do fluxo é governado pela interconexão entre as fontes de informação e os enlaces de comunicação através de uma matriz de roteamento R_r como mostrado na Figura 4.7. Pacotes de

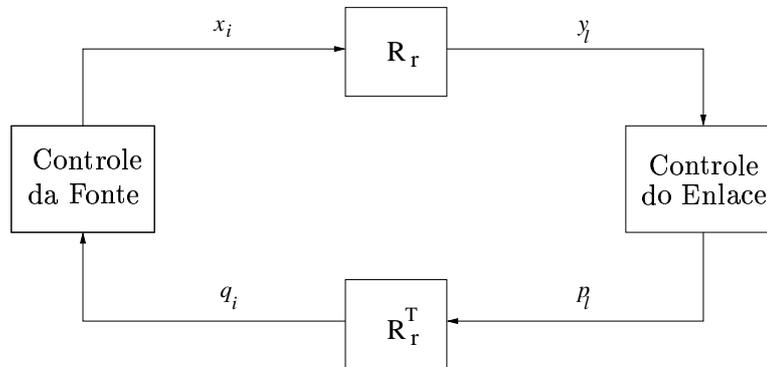


FIGURA 4.7: Modelo não linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos da interconexão entre fontes e enlaces.

cada fonte (com taxa x_i) são roteados através dos enlaces (com taxa do enlace agregada y_l). Cada enlace tem uma capacidade c_l fixa, e baseado no seu congestionamento e tamanho da fila no acumulador um preço do enlace p_l é computado. A informação de preço é então realimentada para cada fonte (com preço agregado à fonte q_i), que regula sua taxa de transmissão com base nessa informação. Dado que os enlaces somente

realimentam as informações de preço para as fontes que os utilizam, têm-se as relações:

$$y = R_r x \quad (4.5)$$

$$q = R_r^T p \quad (4.6)$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$ é a taxa da fonte, $y \in \mathbb{R}^L$ é a taxa agregada ao enlace, $p \in \mathbb{R}^L$ é preço do enlace, e $q \in \mathbb{R}^N$ é o preço agregado à fonte. Assume-se que não há atraso no loop e a capacidade c é um vetor constante. A Figura 4.8 mostra o diagrama de blocos do sistema realimentado onde a lei de atualização da fonte é dada por:

$$\dot{x} = K(U'(x) - q)_x^+ \quad (4.7)$$

onde $K = \text{diag}\{K_i\}$, $K_i > 0$ e $U(x) \in \mathbb{R}^N$ é uma função crescente, estritamente côncava e continuamente diferenciável de x sobre a faixa $x \geq 0$ (Kelly et al. 1998), com $U'(x) \in \mathbb{R}^N$ com i -th component $U'_i(x_i)$. O objetivo do controle é que o estado

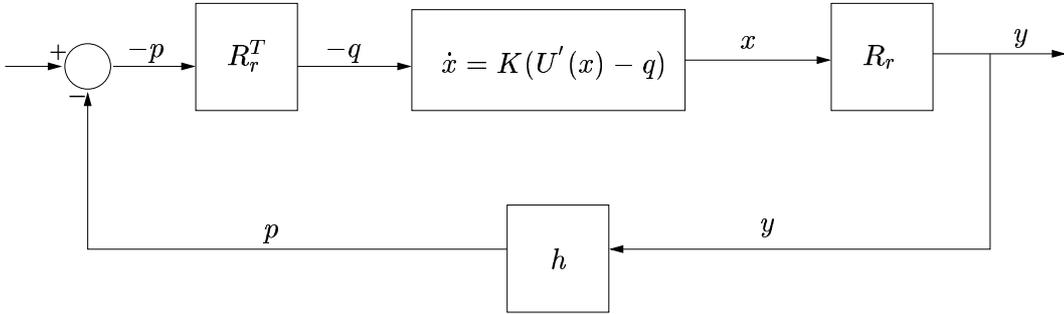


FIGURA 4.8: Modelo não linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do controle de fluxo de dados.

estacionário do sistema realimentado seja a solução do problema de otimização estática x^* , y^* , p^* e q^* (Wen & Arcak 2004).

Para projetar o controlador, o sistema interconectado da Figure 4.8 é apresentado de uma forma equivalente na Figure 4.9, baseado no desvio da condição de equilíbrio (Wen & Arcak 2004). A entrada do sistema será então $-(q - q^*)$ e sua dinâmica:

$$\dot{x} = K(U'(x) - U'(x^*) - (q - q^*))_x^+ \quad (4.8)$$

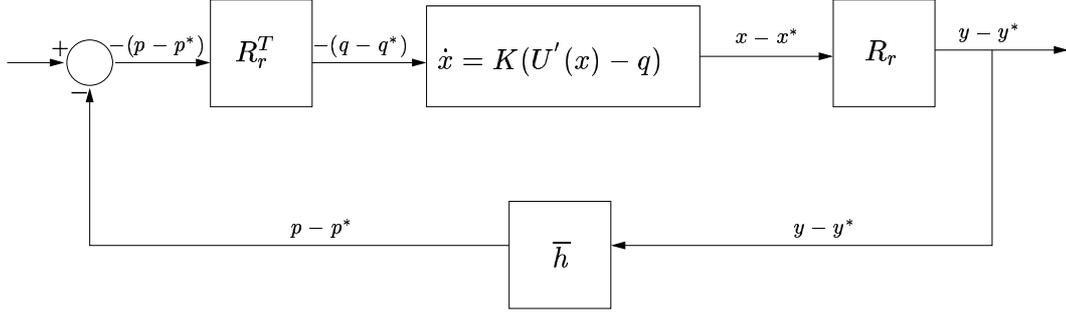


FIGURA 4.9: Modelo não linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos da representação equivalente do controle de fluxo de dados.

Da figura 4.9 sabe-se que $p - p^* = \bar{h}(y - y^*)$. Utilizando (4.5) e $p - p^* = \bar{h}(y - y^*)$ em (4.8), a dinâmica do sistema realimentado será:

$$\dot{x} = K(U'(x) - U'(x^*) - R_r^T \bar{h}(y - y^*))_x^+, \quad (4.9)$$

onde $\bar{h}(y - y^*) = h(y) - h(y^*)$. O seguinte teorema, retirado de (Wen & Arcak 2004), mostra que o sistema direto da Figura 4.9 é estritamente passivo (veja definição 12).

Teorema 4.1 *Considere a interconexão realimentada mostrada na Figura 4.9. O sistema de $-(p - p^*)$ para $y - y^*$ é estritamente passivo.*

Prova: Considere

$$2V(x - x^*) = (x - x^*)^T K^{-1}(x - x^*) \quad (4.10)$$

A derivada ao longo da solução é

$$\dot{V} = (x - x^*)^T (U'(x) - q)_x^+$$

Observe que:

$$(x_i - x_i^*)(U_i'(x_i) - q_i)_x^+ \leq (x_i - x_i^*)(U_i'(x_i) - q_i)$$

Isto ocorre porque, se a projeção estiver inativa, então ambos os lados da desigualdade acima serão iguais e se a projeção estiver ativa, teremos, pela definição 17, $x_i = 0$ e $U_i'(x_i) - q_i \leq 0$, então o lado esquerdo será zero e o lado direito não-negativo.

Adicionando e subtraindo q^* de q , temos que:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq (x - x^*)^T (U'(x) - q^* + q^* - q) \\ &\leq (x - x^*)^T (U'(x) - \underbrace{q^*}_{U'(x^*)} + q^* - q)\end{aligned}\quad (4.11)$$

De (Wen & Arcak 2004) sabe-se que $U'(x^*) = q^*$, logo:

$$\dot{V} \leq (x - x^*)^T (U'(x) - U'(x^*) + q^* - q) \quad (4.12)$$

Da equação (4.6), sabe-se que $(q - q^*) = R^T(p - p^*)$. Substituindo essa equação na desigualdade (4.12), temos:

$$\dot{V} \leq (x - x^*)^T (U'(x) - U'(x^*)) - (x - x^*)^T R^T(p - p^*)$$

Sabendo-se da equação (4.5) que $(y - y^*)^T = (x - x^*)^T R^T$, conclui-se que:

$$\dot{V} \leq (x - x^*)^T (U'(x) - U'(x^*)) - (y - y^*)^T (p - p^*) \quad (4.13)$$

Dado que U é uma função crescente, estritamente côncava e continuamente diferenciável, então $\text{sign}(x - x^*) \neq \text{sign}(U'(x) - U'(x^*))$, logo pode-se escrever a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}U''(x) &\leq -k \implies \\ U'(x) &\leq -kx\end{aligned}\quad (4.14)$$

onde $k > 0$.

Usando (4.14) em (4.13), temos que:

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq -k(x - x^*)^T (x - x^*) - (y - y^*)^T (p - p^*) \\ &\leq -k \|x - x^*\|^2 - (y - y^*)^T (p - p^*)\end{aligned}\quad (4.15)$$

Da definição 12, pode-se concluir que o sistema de $-(p - p^*)$ para $(y - y^*)$ é estritamente passivo. ■

Dada a passividade do sistema da figura 4.9, o controle satisfatório passivo pode ser aplicado no controle do fluxo de dados da rede. A subseção seguinte mostra o resultado da simulação.

4.2.1 Resultado da Simulação

Para ilustrar o uso do controle satisfatório passivo no modelo de rede não linear da equação (4.7), foi utilizado um exemplo de 4-fontes/3-enlaces, apresentado na Figura 4.10.

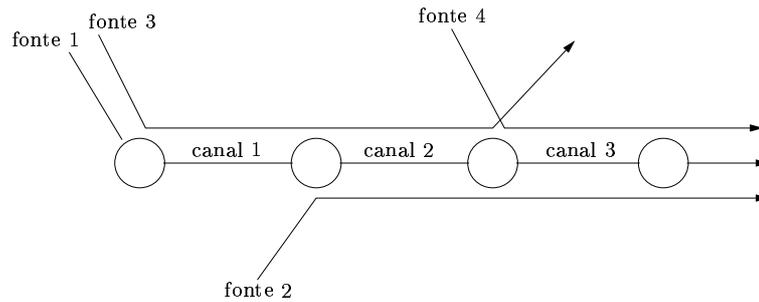


FIGURA 4.10: Exemplo de rede de comunicação

A matriz de roteamento correspondente é dada por

$$R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assumiu-se que todas as funções utilidades são dadas por:

$$U_i(x) = \ln(x_i)$$

Considerou-se também todos os enlaces com capacidade igual a um. A solução do

problema de otimização estática (estado estacionário) é dada por (Wen & Arcak 2004):

$$\begin{aligned} x^* &= \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T \\ q^* &= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T \\ y^* &= \begin{bmatrix} 0.75 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \\ p^* &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

As taxas iniciais das fontes são dadas por:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1.0 \end{bmatrix}^T$$

As condições iniciais de p e q são consideradas zero. Para calcular o controle satisfatório, considerou-se:

$$l(y_e) = y_e^T y_e, \quad e \quad R = I$$

onde $y_e = y - y^*$ e $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz identidade. Utilizando-se as Equações (3.15) e (3.17), obteve-se a equação do controlador mostrada abaixo:

$$k(y_e) = \frac{y_e}{\eta} + \|y_e\| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \nu \quad (4.16)$$

A figura 4.11 mostra o diagrama de blocos do sistema da figura 4.9 com o controlador satisfatório passivo no lugar de \bar{h} . Observe que os parâmetros η e ν foram selecionados automaticamente utilizando o algoritmo do gradiente descendente (equação (2.12)).

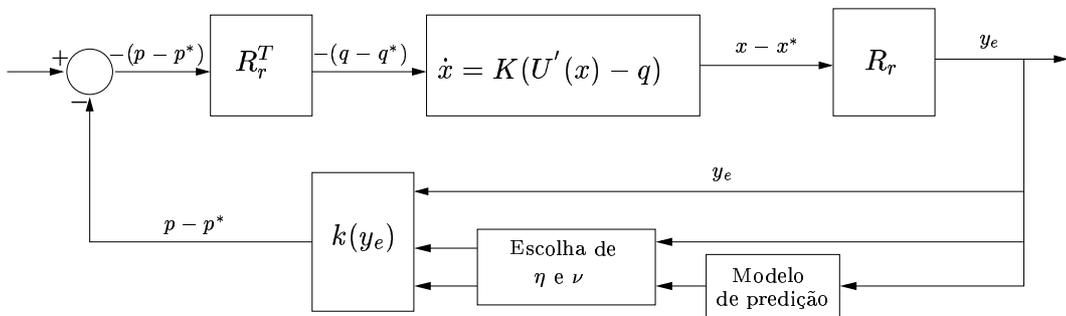


FIGURA 4.11: Modelo não linear de uma rede de comunicação: Diagrama de blocos do sistema com o controle satisfatório passivo.

A equação (4.16) caracteriza uma estratégia de controle centralizada. No entanto, sabe-se que para o controle do fluxo de dados de uma rede, o controle deve ser implementado de forma descentralizada. Deve-se então procurar uma versão descentralizada da lei de controle da equação (4.16). Para isso, observe que essa equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$k(y_e) = \begin{bmatrix} \frac{y_e^1}{\eta} + \|y_e\| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \nu_1 \\ \frac{y_e^2}{\eta} + \|y_e\| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \nu_2 \\ \vdots \\ \frac{y_e^l}{\eta} + \|y_e\| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \nu_l \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde y_e^l e ν_l são respectivamente os l 'ésimos elementos de y_e e ν , correspondentes ao enlace l .

Uma estratégia de controle descentralizada pode ser obtida substituindo-se $|y_e^l|$ no lugar de $\|y_e\|$. Nesse caso, a equação do controlador será

$$k_1(y_e) = \begin{bmatrix} \frac{y_e^1}{\eta} + |y_e^1| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \nu_1 \\ \frac{y_e^2}{\eta} + |y_e^2| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \nu_2 \\ \vdots \\ \frac{y_e^l}{\eta} + |y_e^l| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \nu_3 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Falta mostrar que essa lei de controle também caracteriza um controlador satisfatório passivo. Sabe-se que $\|y_e\| \geq |y_e^l|$, logo sempre teremos um α_l que satisfaz $0 \leq \alpha_l \leq 1$ tal que $|y_e^l| = \alpha_l \|y_e\|$. Podemos então expressar k_1 como:

$$k_1(y_e) = \begin{bmatrix} \frac{y_e^1}{\eta} + \|y_e\| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \alpha_1 \nu_1 \\ \frac{y_e^2}{\eta} + \|y_e\| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \alpha_2 \nu_2 \\ \vdots \\ \frac{y_e^l}{\eta} + \|y_e\| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \alpha_l \nu_l \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Teremos então:

$$k_1(y_e) = \frac{y_e}{\eta} + \|y_e\| \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \nu, \quad (4.20)$$

onde $\nu' = \alpha\nu$ e

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_l \end{bmatrix}.$$

Como $\alpha_l \leq 1$, temos que $\|\nu'\| \leq \|\nu\|$. Com isso, comparando as equações (4.20) e (4.16), conclui-se que k_1 também é um controle satisfatório, pois ν' também satisfaz a condição para o parâmetro ν expressa no Teorema 3.3.

A Figura 4.12 mostra a resposta do sistema e o sinal de controle para o controlador satisfatório. Para comparação, a Figura 4.13 mostra a resposta do sistema para o controlador proporcional utilizado em (Wen & Arcak 2004).

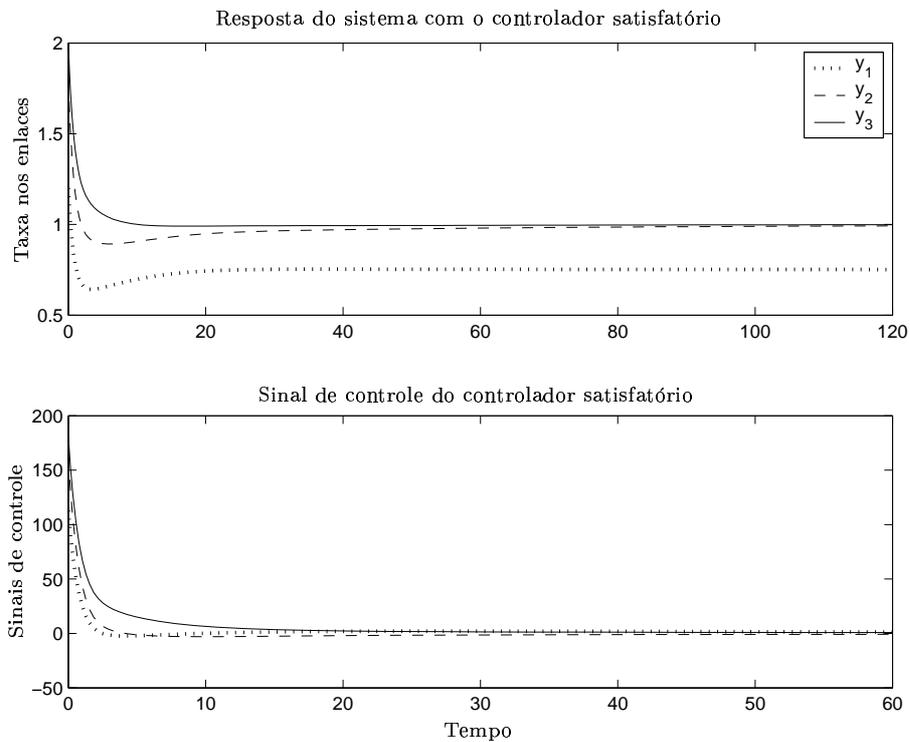


FIGURA 4.12: Controle satisfatório passivo descentralizado do fluxo de dados de uma rede de comunicação: Resposta do sistema e sinal de controle

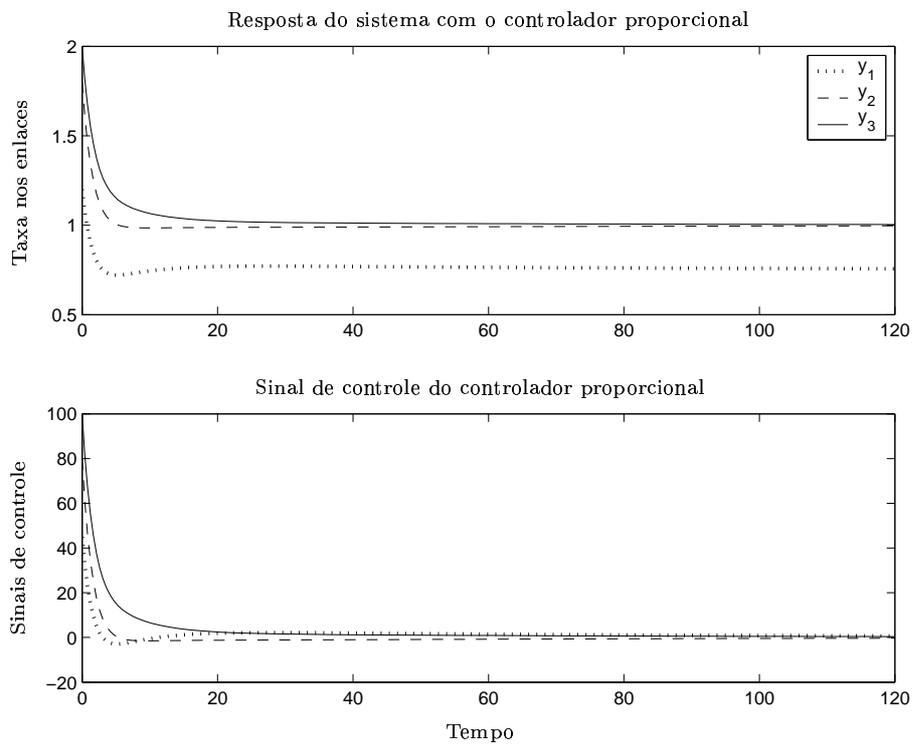


FIGURA 4.13: Controle proporcional descentralizado do fluxo de dados de uma rede de comunicação: Resposta do sistema e sinal de controle

Capítulo 5

Controle de atitude de um corpo rígido

Controle de orientação de um corpo rígido é necessário para o posicionamento e deslocamento de naves espaciais (veja (Wie & Barba 1985) e (Wie, Weiss & Arapostathis 1989)) e no controle de orientação de uma carga rígida sendo manipulada por um (ou vários) manipulador robótico (veja (Luh, Walker & Paul 1980, Salcudean 1988) e (Wen & Kreutz-Delgado 1992)). No caso de sistemas robóticos, os braços ou dedos de uma mão robótica podem ser vistos como atuadores controlando a atitude de um objeto sendo segurada.

Existem várias parametrizações possíveis da variedade $SO(3)$ onde a orientação evolve. Os quaternions, que consistem em 4 parâmetros sujeito a uma restrição de norma unitária, é uma escolha popular no controle de naves espaciais (vide (Wie & Barba 1985) e (Wie et al. 1989)). Isto é devido ao fato de que os quaternions são uma parametrização globalmente não singular. Uma apresentação minuciosa do problema de controle de atitude utilizando quaternions foi apresentada em (Wen & Kreutz-Delgado 1991); onde foi apresentada varias lei de controle estabilizantes: desde proporcional-derivativo (PD) independente do modelo da planta até controle adaptativo. Os controladores foram baseados na propriedade de passividade inerente ao problema: a dinâmica de um corpo rígido é passiva considerando torque como entrada e velocidade angular como saída.

Neste capítulo o controlador satisfatório passivo é aplicado no problema de controle

da atitude de um corpo rígido. É mostrado que a realimentação linear do quaternion do erro de atitude e a realimentação não linear da velocidade angular do corpo rígido utilizando o controle satisfatório passivo estabiliza assintoticamente o sistema. São mostrados resultados de simulações que exemplificam o resultado encontrado.

5.1 Controle de Atitude

Considere dois frames de coordenadas ortonormais: A coordenada inercial (mundo), E^0 , e a coordenada no corpo (ligada ao corpo rígido), E^B . Defina $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ como a matriz de atitude. A equação diferencial do corpo rígido pode ser escrita na coordenada inercial como:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= -H^{-1}\omega \times H\omega + H^{-1}\tau \\ \dot{q} &= \frac{1}{2}E(q)\omega\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde

$$E(q) = \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix},$$

e $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz de inércia, $\omega \in \mathbb{R}^3$ é o vetor velocidade angular, $\tau \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de torque do controle e $q = [q_0 \quad q_v^T]$, com $q_v = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$, é a representação do quaternion unitário da matriz de atitude A .

Uma dada matriz atitude A possui nove parâmetros, sujeitos a seis restrições impostas pela ortogonalidade. Por razões de manipulação, análise e implementação, frequentemente é mais simples utilizar outras representações. O número mínimo de parâmetros necessários para se representar A sem restrições é três. Algumas representações mínimas comuns são: Ângulos de Euler, vetor de Gibbs, equivalente unitário eixo/ângulo e vetor quaternion. Representações mínimas são mapeamentos somente locais, um-para-um e bijetivos da matriz atitude e sempre existem orientações singulares. O número mínimo de parâmetros que podem representar globalmente e sem singularidades a atitude é quatro, com uma equação de restrição. O quaternion unitário (ou

parâmetros de Euler) é uma popular representação de quatro parâmetros não singular devido às suas desejadas propriedades computacionais. (veja (Hughes 1986) para uma discussão mais detalhada).

Nesta seção, o controle satisfatório passivo é aplicado no controle da atitude de um corpo rígido. É considerado um problema de rastreamento e um problema de regulação, que consiste em guiar a matriz de atitude A para uma matriz de atitude alvo A_d . Deseja-se então, que o erro de atitude no estado estacionário seja nulo.

Defina a matriz de atitude do erro como

$$A_e = A_d A^T \quad (5.2)$$

e considere o quaternion do erro $e^T = [e_0 \quad e_v^T]$ a representação quaternion unitário de A_e . A cinemática do erro será dada por:

$$\dot{e} = \frac{1}{2} E(e) \omega.$$

Deseja-se então aplicar o controle satisfatório passivo para anular o erro de atitude.

Para o controle satisfatório passivo ser utilizado, o sistema da equação (5.1) deve ser passivizado (transformado em um sistema passivo). Para isso é utilizado o resultado de (Lizarralde & Wen 1995), que mostra que a realimentação proporcional do vetor quaternion do erro, como mostra a figura 5.1, torna o sistema da equação (5.1) passivo. Conclui-se então que o mapeamento de v para ω na figura 5.1 é passivo. Deve-se então provar que o controle satisfatório passivo leva o erro de atitude para zero. Para isso, considere a definição de conjunto invariante e o teorema do conjunto invariante global mostrados a seguir:

Definição 18 *Um conjunto $\bar{\Omega}$ é um conjunto invariante para um sistema dinâmico se toda a trajetória do sistema que inicia de um ponto em $\bar{\Omega}$ permanece sempre em $\bar{\Omega}$.*

Teorema 5.1 *Considere o sistema $\dot{x} = f(x)$, com f contínuo e seja $V(x)$ um função escalar com primeira derivada parcial contínua (C^1). Assuma que*

- $\dot{V}(x) \leq 0$ para todo x .
- $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Seja M o conjunto de todos os pontos onde $\dot{V}(x) = 0$ e $\bar{\Omega}$ o maior conjunto invariante em M . Então todas as soluções convergem globalmente assintoticamente para $\bar{\Omega}$ quando $t \rightarrow \infty$.

Dada a definição 18 e o teorema 5.1, o próximo Teorema mostra que a realimentação linear do vetor quaternion do erro, e_v , e a realimentação não linear de ω , utilizando o controlador satisfatório passivo, estabiliza o sistema globalmente e assintoticamente, levando o erro de atitude para zero.

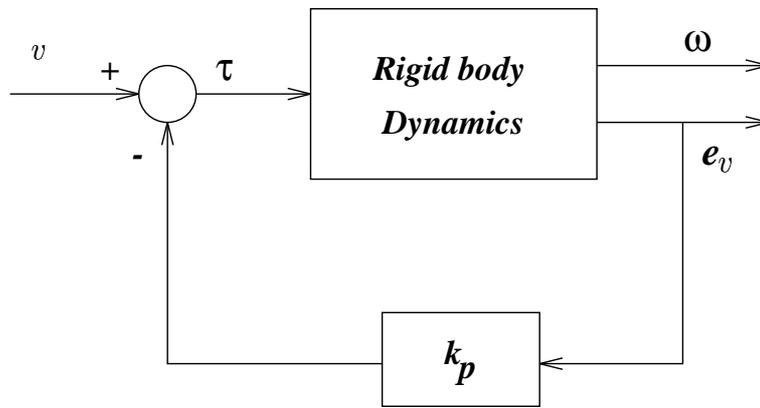


FIGURA 5.1: Corpo rígido: Sistema com realimentação proporcional

Teorema 5.2 Considere o sistema da Figura 5.1, que possui somente uma realimentação proporcional. Se $k(\omega)$ é um controle satisfatório passivo, então a entrada de controle $\tau = -k_p e_v + k(\omega)$, onde k_p é um escalar positivo, assintoticamente estabiliza o sistema de malha fechada.

Prova: Considere a seguinte função de Lyapunov candidata motivada pela energia total do sistema (5.1):

$$V = k_p[(e_0 - 1)^2 + e_v^T e_v] + \frac{1}{2} \omega^T H \omega \quad (5.3)$$

Usando (5.1), a derivada ao longo da solução será:

$$\dot{V} = \omega^T (\tau + k_p e_v) \quad (5.4)$$

Com a lei de controle

$$\tau = -k_p e_v - k(\omega) \quad (5.5)$$

a derivada de V será dada por

$$\dot{V} = \omega^T k(\omega)$$

Utilizando (3.17), \dot{V} será:

$$\dot{V} = -\frac{1}{2\eta\bar{b}}\omega^T R^{-1}\omega + \omega^T \sqrt{\frac{1}{4(\eta\bar{b})^2}\omega^T R^{-1}\omega - l(\omega)R^{-\frac{1}{2}}\nu}$$

Considerando a expressão de \bar{b} dada pela equação (3.15), temos que:

$$\dot{V} = -\frac{\sqrt{l}}{\eta}\sqrt{\omega^T R^{-1}\omega} + \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1}\sqrt{l}\omega^T R^{-\frac{1}{2}}\nu \quad (5.6)$$

A equação acima poderia ser escrita como:

$$\dot{V} = -\frac{\sqrt{l}}{\eta} \left[\sqrt{\omega^T R^{-1}\omega} - \sqrt{1 - \eta^2}\omega^T R^{-\frac{1}{2}}\nu \right] \quad (5.7)$$

Uma condição para estabilidade é $\dot{V} \leq 0$. Para isso, sabendo-se que $\eta \in (0, 1]$, devemos ter:

$$\sqrt{\omega^T R^{-1}\omega} \geq \omega^T R^{-\frac{1}{2}}\nu \quad (5.8)$$

Notando que $\|\omega\|_R^2 = \omega^T R^{-1}\omega$ é uma norma com peso, devemos satisfazer:

$$\|\omega\|_R \geq \omega^T R^{-\frac{1}{2}}\nu,$$

onde $\|\omega\|_R = \|\omega R^{-1/2}\|$.

Sabendo-se que

$$\omega^T R^{-\frac{1}{2}}\nu \leq \|\omega\|_R \|\nu\|,$$

basta mostrarmos que:

$$\|\omega\|_R \geq \|\omega\|_R \|\nu\| \quad (5.9)$$

Sabendo-se do Lemma A.1 que $\|\nu\| < 1$, temos que a desigualdade (5.9) e consequentemente a (5.8) é satisfeita, logo $\dot{V} \leq 0$.

Dado que V é continuamente diferenciável, radialmente ilimitada, definida positiva

e $\dot{V} \leq 0$ em todo espaço de estado, utilizando o teorema 5.1, temos que todas as trajetórias convergem para o maior conjunto invariante $\bar{\Omega}$ em $\Omega = \{(e, \omega) : \dot{V} = 0\} = \{(e, \omega) : \omega = 0\}$. No conjunto invariante temos, da equação (5.1), que $H\dot{\omega} = \tau = -k_p e_v = 0$. Isto implica que $\bar{\Omega} = \{(e, \omega) : e_v = 0, \omega = 0\}$. Como $(e_0 = \pm 1, e_v = 0)$ representam a mesma orientação física, a matriz identidade que representa o erro de atitude R_e e a velocidade angular zero são equilíbrios globalmente assintoticamente estáveis. ■

5.1.1 Controle de Atitude: Resultados das Simulações

Para ilustrar o resultado apresentado no Teorema 5.2, é tratado um exemplo simples, abordado em (Slotine & Li 1991, Curtis & Beard 2002). São considerados um problema de regulação e um problema de rastreamento. Nos dois problemas, os parâmetros η e ν do controle satisfatório passivo são selecionados utilizando o algoritmo do gradiente descendente, mostrado no Capítulo 2. A figura mostra o diagrama de blocos do sistema simulado:

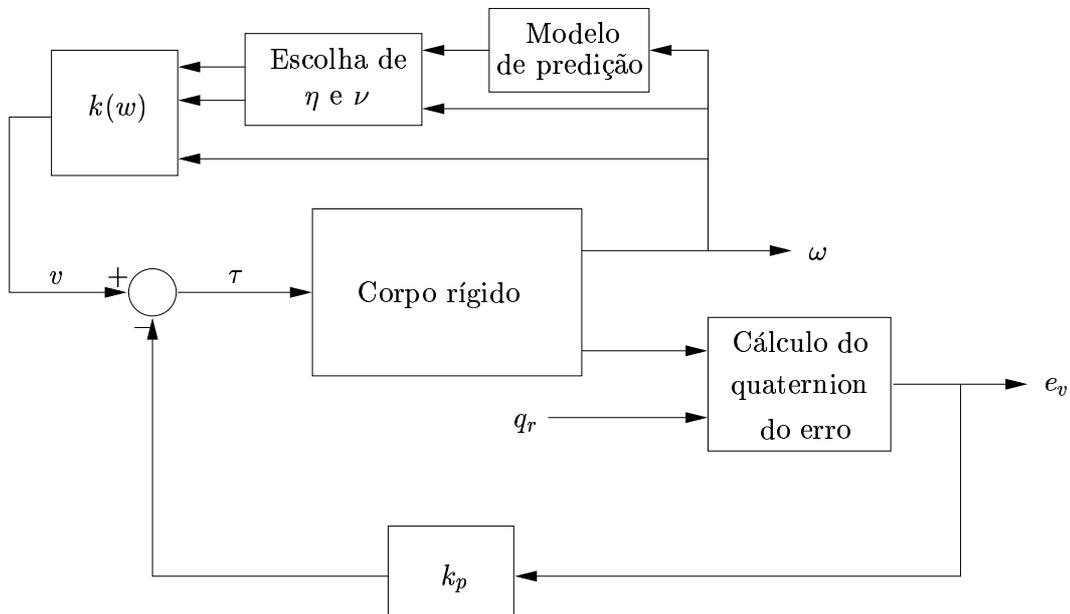


FIGURA 5.2: Corpo rígido: Sistema simulado

Para o cálculo do quaternion do erro, primeiramente são calculadas as matrizes de atitude do corpo e de atitude desejada. Posteriormente é calculada a matriz de atitude

do erro (A_e), através da equação (5.2). Utilizando A_e , o quaternion do erro é então calculado.

5.1.1.1 Problema de regulação

Considere primeiramente o problema de regulação, que consiste em guiar a atitude para uma atitude de estado-estacionário alvo. Para isso, na equação (5.1), considere a matriz de inércia como:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & .5 & 1 \\ .5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Considere também a condição inicial do quaternion como

$$q^T(0) = [0.8325 \quad -0.2057 \quad 0.3430 \quad 0.3834],$$

a atitude desejada como

$$q_d = [0.8339, 0.4353, 0.1252, -0.3192]$$

e $k_p = 1$ na equação (5.5).

As Figuras 5.3 e 5.4 apresentam o desempenho do esquema proposto na figura 5.2 para o problema de regulação, sendo que a Figura 5.3 mostra o quaternion do erro e a Figura 5.4 o sinal de controle.

5.1.1.2 Problema de rastreamento

Considere agora o problema de rastreamento de trajetória. Para isso, utilize a mesma matriz de inércia do problema de regulação. A trajetória desejada $A_d(t) = \exp(\phi_d(t)k \times)$, é dada pela rotação ao longo de um eixo equivalente $k^T = [0.4896, 0.2032, 0.8480]$, indo da atitude inicial para a atitude desejada $I_{3 \times 3}$. O ângulo de rotação desejado é dado por:

$$\phi_d(t) = \phi_f - (\phi_f - \phi_i)e^{-\alpha t^2}$$

com $\alpha = 0.5$, $\phi_i = 2.4648 \text{ rad}$ e $\phi_f = 0$. Então a condição inicial é $q(0) = [0.332, 0.4618, 0.1917, 0.8]^T$.

As Figuras 5.5–5.6 ilustram novamente o desempenho obtido utilizando o esquema

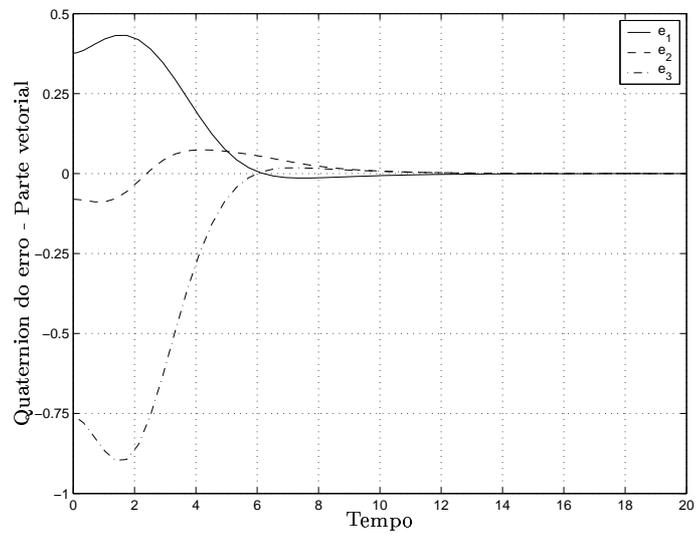


FIGURA 5.3: Controle de atitude - Problema de Regulação: Quaternion do erro - Parte vetorial

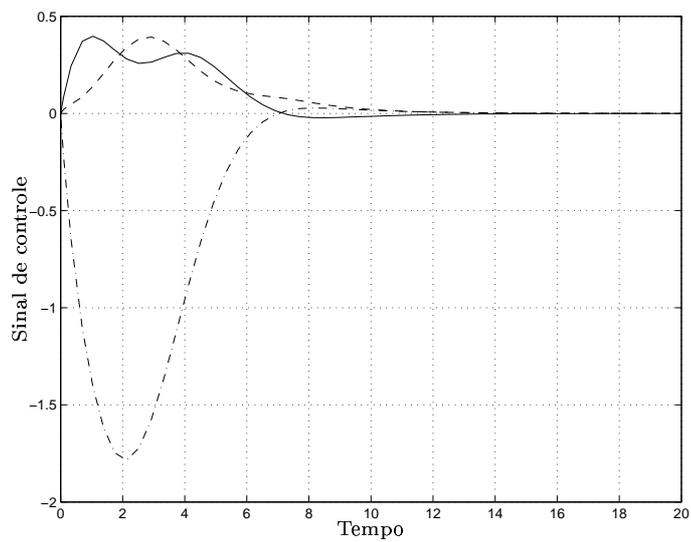


FIGURA 5.4: Controle de atitude - Problema de Regulação: Sinal de Controle

proposto na figura 5.2.

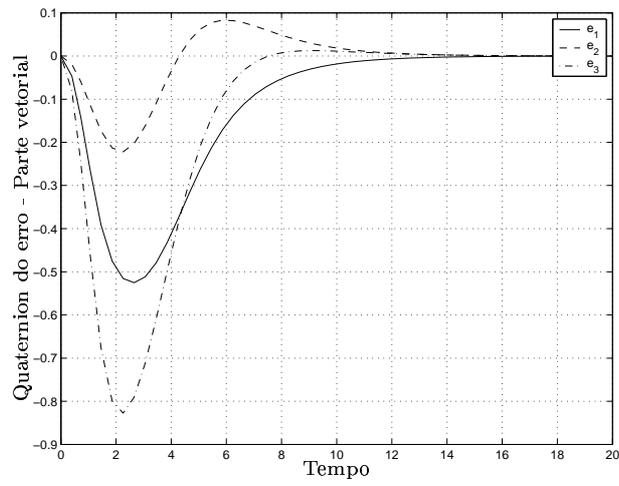


FIGURA 5.5: Controle de atitude - Rastreamento de trajetória: Quaternion do erro - Parte Vetorial

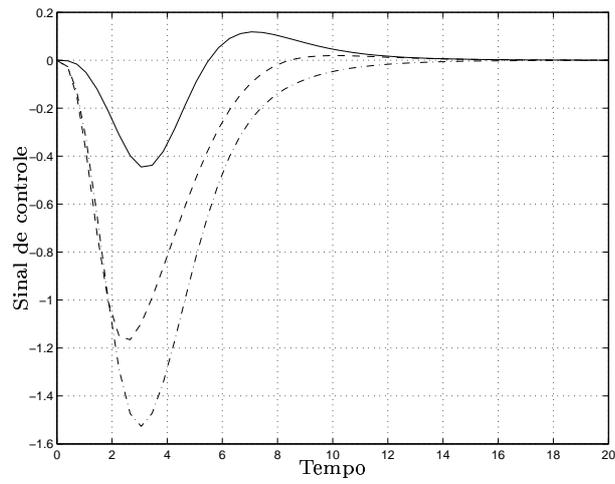


FIGURA 5.6: Controle de atitude - Rastreamento de trajetória: Sinal de Controle

Capítulo 6

Discussão e Conclusões Gerais

Este trabalho abordou a estabilização de sistemas não lineares utilizando a estratégia de controle satisfatória proposta recentemente. Esta estratégia consiste na definição de duas funções dependentes do sinal de controle e dos estados do sistema, denominadas seletividade e rejeitabilidade, que quantificam respectivamente os benefícios e o custo de uma ação. Deseja-se então determinar o conjunto de leis de controle que fazem a função seletividade maior que a função rejeitabilidade. Em particular, foi estudado o controle satisfatório desenvolvido por (Beard et al. 2001), onde a estratégia satisfatória foi utilizada para gerar leis de controle assintoticamente estabilizantes a partir de CLF's. Foi estudado também um subconjunto dos controladores satisfatórios, denominado conjunto satisfatório robusto, onde todo controlador caracteriza uma lei de controle inversamente ótima. Para proporcionar um maior entendimento, foi estudada a utilização do controle satisfatório em sistemas lineares. Mostrou-se que mesmo em sistemas lineares, o controlador satisfatório pode caracterizar uma lei de controle não linear. Além disso, mostrou-se também que o controlador satisfatório robusto, quando aplicado em um sistema linear, gera uma lei de controle ótima que poderia ser obtida através da solução da equação algébrica de Ricatti dependente do estado.

Afim de estender a estratégia satisfatória para sistemas passivos, as propriedades de passividade foram aplicadas no controle satisfatório. Mostrou-se que para sistemas passivos, o controlador satisfatório torna-se uma realimentação de saída, logo não necessita de uma CLF para ser calculado.

Como exemplo de aplicação, o controlador satisfatório passivo foi utilizado no con-

trole da atitude de um corpo rígido e no controle de congestionamento em redes de comunicação de tráfego elástico.

No caso da rede, o controlador satisfatório passivo foi aplicado em um modelo de rede linear e não linear. No caso não linear, o problema de controle de congestionamento foi dividido em um problema de otimização estática e um problema de estabilização dinâmica. O controlador satisfatório passivo foi utilizado para resolver o problema de estabilização dinâmica, onde mostrou-se que, com uma pequena alteração na lei de controle, o controlador satisfatório passivo pode ser utilizado como uma estratégia de controle descentralizada.

No caso do corpo rígido, mostrou-se que com uma realimentação proporcional do vetor quaternion do erro e uma realimentação não linear da velocidade angular, utilizando o controlador satisfatório passivo, o sistema é assintoticamente estabilizado.

Para todos os casos foram realizadas simulações. Os resultados confirmaram as propriedades de estabilidade do controlador. Nessas simulações, o controlador satisfatório passivo foi sintonizado automaticamente, utilizando um modelo de predição e o algoritmo da gradiente descendente, com o objetivo de tentar encontrar os parâmetros de seleção do controlador satisfatório passivo (η e ν) que minimizam uma dada função custo.

6.1 Propostas para trabalhos futuros

Com o objetivo de incentivar a continuidade da pesquisa abordada por esse trabalho, segue algumas propostas de trabalhos futuros.

- Utilizar outros métodos de otimização para sintonizar o controlador satisfatório que consigam evitar os mínimos locais, afim de se obter um controlador garantidamente ótimo.
- Estudar a robustez do controlador satisfatório para sistemas com atraso, afim de aplicá-lo em um modelo de rede de comunicação mais real.
- Estudar a utilização do controle satisfatório passivo junto com métodos de passivização de sistemas.

Apêndice A

Provas dos teoremas do Controle Satisfatório

Lema A.1 *Se $A = A^T > 0$, então o conjunto de soluções da desigualdade quadrática*

$$\xi^T A \xi + d^T \xi + c \leq 0 \quad (\text{A.1})$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^s$, é não vazio se e somente se

$$\frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

e é dado por

$$\xi = -\frac{1}{2}A^{-1}d + \sqrt{\frac{1}{4}d^T A^{-1}d - c}A^{-1/2}\nu, \quad (\text{A.3})$$

onde $\nu \in \{\xi \in \mathbb{R}^s : \|\xi\| \geq 1\}$.

Prova:

Dado que $A = A^T > 0$, esta é inversível e pode ser fatorada como $A = A^{1/2}A^{1/2}$ onde $A^{1/2}$ também é simétrica e inversível. Podemos então escrever (A.1) da seguinte forma:

$$\xi^T A \xi + d^T \xi + c = (A^{1/2}\xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d)^T (A^{1/2}\xi + \frac{1}{2}A^{-1/2}d) + c - \frac{1}{4}d^T A^{-1}d.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\xi^T A \xi + d^T \xi + c \leq 0 &\iff (A^{1/2} \xi + \frac{1}{2} A^{-1/2} d)^T (A^{1/2} \xi + \frac{1}{2} A^{-1/2} d) \leq \frac{1}{4} d^T A^{-1} d - c \\ &\iff \left\| A^{1/2} \xi + \frac{1}{2} A^{-1/2} d \right\|^2 \leq \frac{1}{4} d^T A^{-1} d - c\end{aligned}$$

Observa-se que o lado esquerdo da última desigualdade é positivo, logo a solução existe somente se $\frac{1}{4} d^T A^{-1} d - c \geq 0$. Neste caso, temos que:

$$\left\| A^{1/2} \xi + \frac{1}{2} A^{-1/2} d \right\| \leq \sqrt{\frac{1}{4} d^T A^{-1} d - c}$$

Note que a desigualdade anterior limita a magnitude, mas não a direção de $A^{1/2} \xi + \frac{1}{2} A^{-1/2} d$. Portanto se $\nu \in B(\mathbb{R}^s)$, temos que:

$$\begin{aligned}\left\| A^{1/2} \xi + \frac{1}{2} A^{-1/2} d \right\| &\leq \sqrt{\frac{1}{4} d^T A^{-1} d - c} \\ \iff A^{1/2} \xi + \frac{1}{2} A^{-1/2} d &= \sqrt{\frac{1}{4} d^T A^{-1} d - c} \nu \\ \iff A^{1/2} \xi &= -\frac{1}{2} A^{-1/2} d + \sqrt{\frac{1}{4} d^T A^{-1} d - c} \nu \\ \iff \xi &= -\frac{1}{2} A^{-1} d + \sqrt{\frac{1}{4} d^T A^{-1} d - c} A^{-1/2} \nu\end{aligned}$$

■

Prova do teorema 2.1:

Sabe-se que o conjunto satisfatório é dado por:

$$\begin{aligned}S(x, b) &= \{u \in \mathbb{R}^m : p_s(u, x) \leq b p_r(u, x)\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^m : -V_x^T f - V_x^T g u \geq b l + b u^T R u\} \\ &= \{u \in \mathbb{R}^m : u^T (b R) u + (g^T V_x)^T u + (b l + V_x^T f) \leq 0\}\end{aligned}$$

A prova do Teorema 2.1 segue aplicando-se o Lema A.1, onde $A = bR$, $d = g^T V_x$ e $c = b l + V_x^T f$. ■

Prova do Lema 2.2:

Do Teorema 2.1, o conjunto satisfatório será não vazio se e somente se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}V_x^T b(bR)^{-1}g^T V_x - bl - V_x^T f \geq 0 \\
& \iff \frac{1}{b} \left(\frac{1}{4}V_x^T gR^{-1}g^T V_x \right) \geq bl + V_x^T f \\
& \iff b^2l + b(V_x^T f) - \frac{1}{4}V_x^T gR^{-1}g^T V_x \leq 0 \\
& \iff l \left(b + \frac{V_x^T f}{2l} \right)^2 - \frac{1}{4}V_x^T gR^{-1}g^T V_x - \frac{(V_x^T f)^2}{4l} \leq 0 \\
& \iff -\sqrt{\frac{V_x^T gR^{-1}g^T V_x}{4l} + \left(\frac{V_x^T f}{2l} \right)^2} \leq b + \frac{V_x^T f}{2l} \leq \sqrt{\frac{V_x^T gR^{-1}g^T V_x}{4l} + \left(\frac{V_x^T f}{2l} \right)^2} \\
& \iff -\frac{V_x^T f}{2l} - \sqrt{\frac{V_x^T gR^{-1}g^T V_x}{4l} + \left(\frac{V_x^T f}{2l} \right)^2} \leq b \leq -\frac{V_x^T f}{2l} + \sqrt{\frac{V_x^T gR^{-1}g^T V_x}{4l} + \left(\frac{V_x^T f}{2l} \right)^2}
\end{aligned}$$

Pela definição, sabe-se que o índice de seletividade deve ser sempre maior que zero. Observando-se que o lado esquerdo da última desigualdade acima é sempre menor ou igual a zero e o lado direito é sempre maior ou igual a zero, chega-se no resultado da Equação (2.7). ■

Lema A.2 *A função*

$$\phi(a, c, l) = \begin{cases} 0 & \text{se } c = 0, a < 0 \text{ e } l \neq 0 \\ -2\frac{a+\sqrt{a^2+lc}}{c} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é contínua no conjunto $P = \{(a, c, l) \in \mathbb{R}^3 | (c > 0 \text{ ou } a < 0) \text{ e } l \neq 0\}$.

Lema A.3 *Se V é uma CLF e se $l(x)$ é uma função definida positiva, então sobre a hipótese do teorema 2.4 o controle satisfatório $k(x)$ na equação (2.10) é contínuo fora de $x = 0$.*

Prova: A prova segue o argumento utilizado por (Krstic & Deng 1998) para mostrar a continuidade da fórmula universal de Sontag (Sontag 1998). ■

Prova do Teorema 2.4

Comparando as equações (2.6) e (2.10), fica claro que $k(x)$ faz parte do conjunto satisfatório. Falta provar portanto (ver definição 3), que $k(x)$ é contínuo em \mathbb{R}^n . Como o lema A.3 mostrou que $k(x)$ é contínuo fora de $x = 0$, falta provar que $k(x)$ é contínuo na origem. Para isso, mostraremos que próximo da origem $k(x)$ é limitado superiormente por uma função contínua que é zero na origem. Para facilitar, considere $a = V_x^T f$, $d = R^{-1}g^T V_x$ e $\hat{\phi} = \phi(a, d^T R d, l)$. Definindo:

$$\begin{aligned}\lambda_1(x) &= -\frac{1}{2\eta}\hat{\phi}d, \\ \lambda_2(x) &= \sqrt{4\hat{\phi}^2\frac{d^T R d}{\eta^2} - l - \frac{4a}{\eta}\hat{\phi}},\end{aligned}\tag{A.4}$$

teremos $k(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x)R^{-1/2}\nu$, que implica em

$$\|k\| \leq \|\lambda_1\| + \sqrt{\bar{\sigma}(R)}\|\lambda_2\|,$$

onde $\bar{\sigma}(R)$ é o maior valor singular de R .

Considere primeiro o caso quando $a = V_x^T f \geq 0$. Como V satisfaz a propriedade de controle pequeno, existe um $\alpha_c(x)$ contínuo, com $\alpha_c(0) = 0$ tal que

$$a + d^T R \alpha_c < 0, \forall x \neq 0,$$

que implica em $|a| < \bar{\sigma}(R)\|d\|\|\alpha_c\|$. Dado que V é uma CLF, temos $d \neq 0$, que implica em

$$\frac{|a|}{\|d\|} < \bar{\sigma}(R)\|\alpha_c\|.$$

Considere $\underline{\sigma}(R)$ o menor valor singular de R . Então λ_1 pode ser limitado como

$$\begin{aligned}
\|\lambda_1\| &\leq \left\| \frac{1}{\eta} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd}}{d^T Rd} \right) d \right\| \\
&\leq \frac{1}{N} \left[\frac{|a|\|d\|}{\underline{\sigma}(R)\|d\|^2} + \frac{\|d\|\sqrt{a^2 + l\bar{\sigma}(R)\|d\|^2}}{\underline{\sigma}(R)\|d\|^2} \right] \\
&\leq \frac{1}{\underline{\sigma}(R)N} \left[\bar{\sigma}(R)\|\alpha_c\| + \sqrt{\bar{\sigma}^2(R)\|\alpha_c\|^2 + l\bar{\sigma}(R)} \right] \\
&\leq \frac{\bar{\sigma}(R)}{\underline{\sigma}(R)N} \left[\|\alpha_c\| + \sqrt{\|\alpha_c\|^2 + l/\bar{\sigma}(R)} \right].
\end{aligned}$$

Similarmente, λ_2 pode ser limitado como

$$\begin{aligned}
\|\lambda_2\|^2 &= \left\| \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd}}{d^T Rd} \right)^2 \frac{d^T Rd}{\eta^2} - l + \frac{2a}{\eta} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd}}{d^T Rd} \right) \right\|^2 \\
&= \left\| \frac{2(1+\eta)}{\eta^2} \frac{a^2}{d^T Rd} + \frac{2(1+\eta)}{\eta^2} \frac{a\sqrt{a^2 + ld^T Rd}}{d^T Rd} + \frac{1-\eta^2}{\eta^2} l \right\|^2 \\
&\leq \frac{4}{\underline{\sigma}(R)N^2} \left(\frac{|a|}{\|d\|} \right)^2 + \frac{4}{\underline{\sigma}(R)N^2} \left(\frac{|a|}{\|d\|} \right) \sqrt{\left(\frac{|a|}{\|d\|} \right)^2 + l\bar{\sigma}(R)} + \frac{1}{N^2} l \\
&\leq \frac{4}{\underline{\sigma}(R)N^2} \|\alpha_c\|^2 + \frac{4}{\underline{\sigma}(R)N^2} \|\alpha_c\|^2 \sqrt{\|\alpha_c\|^2 + l\bar{\sigma}(R)} + \frac{1}{N^2} l
\end{aligned}$$

Alternativamente, assuma que $a = V_x^T f < 0$ e note que isto implica em

$$a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd} < \sqrt{ld^T Rd} \leq \sqrt{\bar{\sigma}(R)\|d\|}\sqrt{l}.$$

que torna λ_1 limitado como

$$\begin{aligned}
\|\lambda_1(x)\| &\leq \left\| \frac{1}{\eta} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd}}{d^T Rd} \right) d \right\| \\
&\leq \frac{\sqrt{l}\|d\|^2\sqrt{\bar{\sigma}(R)}}{D\|d\|^2\underline{\sigma}(R)} \\
&= \left(\frac{\sqrt{\bar{\sigma}(R)}}{D\underline{\sigma}(R)} \right) \sqrt{l}.
\end{aligned}$$

De forma similar, λ_2 é limitado como

$$\begin{aligned}
\|\lambda_2\|^2 &= \left\| \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd}}{d^T Rd} \right)^2 \frac{d^T Rd}{\eta^2} - l + \frac{2a}{\eta} \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd}}{d^T Rd} \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{(a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd})^2}{\eta^2 d^T Rd} - l + \frac{\eta}{\eta^2} \left(\frac{2a^2 + 2a\sqrt{a^2 + ld^T Rd} + ld^T Rd - ld^T Rd}{d^T Rd} \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{(a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd})^2}{\eta^2 d^T Rd} - l + \frac{\eta}{\eta^2} \left(\frac{(a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd})^2}{d^T Rd} - l \right) \right\| \\
&= \left\| \frac{1 + \eta (a + \sqrt{a^2 + ld^T Rd})}{\eta^2 d^T Rd} - \left(\frac{N+1}{N} \right) l \right\| \\
&\leq \left\| \frac{2 l \|d\|^2 \bar{\sigma}(R)}{\eta^2 \|d\|^2 \underline{\sigma}(R)} - \left(\frac{N+1}{N} \right) l \right\| \\
&\leq \left(\frac{2}{N^2} \frac{\bar{\sigma}(R)}{\underline{\sigma}(R)} + \frac{N+1}{N} \right) l
\end{aligned}$$

Portanto k é contínuo para $x = 0$. ■

Lema A.4 *Se $g^T V_x \neq 0$ então todo controle satisfatório robusto pode ser escrito como $k_R(x) = -\frac{1}{2} \tilde{R}^{-1}(x) g^T V_x$, onde $\tilde{R}(x)$ é uma matriz função definida positiva.*

Prova: Primeiro defina o vetor fundamental $v_f = -\frac{1+1/\bar{b}}{2} g^T V_x$. Sabe-se que:

$$v_f^T k_R = \frac{(1+1/\bar{b})}{4b} V_x^T g R^{-1} g^T V_x - \frac{(1+1/\bar{b})\sigma}{2} V_x^T g R^{-1/2} \nu > 0$$

Pelo fato de $k_r \in S_R$ implica que $V_x^T g R^{-1/2} \nu < 0$. Portanto, uma vez que $v_f^T k_R = \|v_f\| \|k_R\| \cos\theta$ (onde θ é o ângulo entre v_f e k_R), sabemos que $\cos\theta > 0$ ou que $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Para o caso trivial onde $\theta = 0$, teremos simplesmente $\tilde{R}^{-1}(x) = \frac{\|k_R\|}{(1+1/\bar{b})\|v_f\|}$. Suponha, contudo, k_R não paralelo a v_f . Nosso objetivo é construir uma matriz $P = P^T > 0$ tal que $Pv_f = k_R$ para todo $x \neq 0$.

Iniciamos definindo uma nova base ortonormal para \mathbb{R}^m . O primeiro vetor base, $b_1 = \frac{k_R}{\|k_R\|}$, é um vetor unitário na direção de k_R . O segundo vetor base,

$$b_2 = \frac{-\frac{v_f^T k_R}{k_R^T k_R} k_R + v_f}{\left\| -\frac{v_f^T k_R}{k_R^T k_R} k_R + v_f \right\|}$$

é um vetor unitário que pertence ao plano gerado por k_R e v_f , onde b_2 é ortogonal a k_R . Os outros vetores da base (b_3, \dots, b_m) , são gerados pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, de forma que (b_1, \dots, b_m) constitua uma base ortonormal completa. Defina a matriz transformação $T = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ e note que $T^{-1} = T^T$. Neste novo frame de coordenadas, o vetor k_R será $\hat{k}_R = [\|k_R\|, 0, \dots, 0]$. Igualmente, v_f será $\hat{v}_f = \|v_f\|[\cos\theta, \sin\theta, 0, \dots, 0]$. Construiremos uma matriz rotação $R_0 = R_0^T > 0$ para rotacionar \hat{v}_f em \hat{k}_R . Sabendo-se que, com exceção dos dois primeiros, todos os outros elementos de \hat{v}_f e \hat{k}_R são zero, teremos:

$$R_0 = \begin{bmatrix} \hat{R}_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

onde

$$\hat{R}_0 = \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{bmatrix}$$

Teremos então:

$$\begin{bmatrix} \|k_R\| \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \delta & \beta \end{bmatrix} \|v_f\| \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix},$$

que implica nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \alpha \cos\theta + \delta \sin\theta &= \frac{\|k_R\|}{\|v_f\|}, \\ \delta \cos\theta + \beta \sin\theta &= 0. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Além disso, sabemos que $\alpha\beta - \delta^2 > 0$ e $\alpha > 0$, pois R_0 é definida positiva.

Considerando $\delta = -\sin\theta$, $\beta = \cos\theta$ e

$$\alpha = \frac{\frac{\|k_R\|}{\|v_f\|} + \sin^2\theta}{\cos\theta}$$

(onde $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ assegura que α é bem definida), temos que todas as equações anteriores são satisfeitas. Definindo $P = T^T R_0 T$, então

$$P v_f = T^T R_0 T v_f = T^T R_0 \hat{v}_f = T^T \hat{k}_R = k_R.$$

Pela definição, $P = P^T > 0$. Considerando $\tilde{R}(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{b}}P^{-1}(x)$, mostra-se que qualquer k_r pode ser escrito da forma desejada. ■

Prova do Teorema 2.5:

O lema A.4 prova o ítem 3 do teorema. Falta provar portanto os ítems 1 e 2.

Prova do ítem 1:

Pela definição, sabe-se que, por pertencer ao conjunto satisfatório, k_R satisfaz a seguinte desigualdade:

$$V_x^T f + V_x^T g k_R < -bl - b k_R^T R k_R$$

Adicionando $\alpha V_x^T g k$ do ambos os lados, temos

$$V_x^T f + (1 + \alpha) V_x^T g k_R < -bl - b k_R^T R k_R + \alpha V_x^T g k_R \quad (\text{A.6})$$

Uma condição suficiente para estabilidade assintótica é que o lado direito da (A.6) seja não positivo para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Precisamos mostrar que esta condição é satisfeita para todo $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. Definindo

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4b^2} V_x^T g R^{-1} g^T V_x - l - \frac{V_x^T f}{b}},$$

teremos:

$$k_R(x) = -\frac{1}{2b} R^{-1} g^T V_x + \sigma R^{-1/2} \nu.$$

Substituindo k_R na desigualdade (A.6), teremos:

$$-bl - b k_R^T R k_R + \alpha V_x^T g k_R = -b(l + \sigma^2 \nu^T \nu) - \frac{1}{2b} \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) V_x^T g R^{-1} g^T V_x + \sigma(1 + \alpha) V_x^T g R^{-1/2} \nu$$

O primeiro termo é sempre não-positivo. O segundo termo será não positivo se $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. Neste caso, o terceiro termo será não-positivo se $V_x^T g R^{-1/2} \nu \leq 0$. ■

Prova do ítem 2

A prova segue os argumentos de (Sepulchre, Jankovic & Kokotovic 1997). Seja $k_r(x)$ uma lei de controle satisfatória robusta. Do lema A.4, existe uma função matriz definida positiva \hat{R} tal que $k_R = -\frac{1}{2} \tilde{R}^{-1} g^T V_x$. Uma vez que $\frac{1}{2} k_R$ 'e assintoticamente

estabilizante, sabemos que:

$$V_x^T f - \frac{1}{4} V_x^T g \tilde{R}^{-1} g^T V_x < 0$$

Escolhendo

$$m(x) = -V_x^T f + \frac{1}{4} V_x^T g \tilde{R}^{-1} g^T V_x > 0,$$

$W(x) = V(x)$ e $\hat{R}(x) = \tilde{R}(x)$, verifica-se que a equação de Hamilton-Jacobi (2.16) é satisfeita para todo x .

■

Referências Bibliográficas

- AF-TM-0056.00, A. F. T. M. (1996), *The ATM Forum Traffic Management Specification Version 4.0*, April.
- Anderson, B. & Vongpanitlerd, S. (1973), *Network Analysis and Synthesis - A Modern Systems Theory Approach*, Prentice Hall, New Jersey.
- Artstein, Z. (1983), 'Stabilization with relaxed controls', *Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications* **7**(11), 1163–1173.
- Athuraliya, S., Low, S. H., Li, V. H. & Yin, Q. (2001), 'REM: active queue management', *IEEE Network* *15* (3) **15**(3), 48–53.
- Beard, R., Young, B. & Stirling, W. (2001), Nonlinear regulation using the satisficing paradigm, in 'Proc. American Contr. Conf.', Washington (DC).
- Bellman, R. (1962), *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton.
- Benhabib, R., Iwens, R. & Jackson, R. (1979), Stability of distributed control for large flexible structures using positivity concepts, in 'AIAA Guidance and Control Conference', Boulder, Co, p. 1780.
- Byrnes, C. I., Isidori, A. & Willems, J. C. (1991), 'Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **36**(11), 1228–1240.
- Cavendish, D., Mascolo, S. & Gerla, M. (1996), SP-EPRCA: an ATM rate based congestion control scheme based on a Smith predictor, Technical Report 960001, UCLA CS.
- Cornell, J. A. (1990), *Experiments with mixtures*, J. Wiley & Sons, New York.
- Curtis, J. W. & Beard, R. W. (2002), Ensuring stability of state-dependent Riccati equation controllers via satisficing, in 'Conference on Decision and Control', Las Vegas, NV, pp. 2645–2650.
- Curtis, W. & Beard, R. (2001), A model-predictive satisficing approach to a nonlinear tracking problem, in 'Proc. IEEE Conf. on Decision and Control', Orlando.
- Dalmo, M. & Egeland, O. (1997), 'State feedback \mathcal{H}_∞ suboptimal control of a rigid spacecraft', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**(5), 1186–1189.
- Debs, A. & Athans, M. (1969), 'On the optimal angular velocity control of asymmetrical space vehicles', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **14**(1), 80–83.

- Desoer, C. A. & Vidyasagar, M. (1975), *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York.
- Floyd, S. & Fall, K. (1999), ‘Promoting the use of end-to-end congestion control in the internet’, *IEEE/ACM Transactions on Networking* **7**(4), 458–472.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. & Emami-Naeini, A. (1991), *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley.
- Freeman, R. A. & Kokotovic, P. V. (1998), *Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques. System & Control: Foundation & Application*, Birkhauser.
- Goodrich, M., Stirling, W. & Frost, R. (1998), ‘A theory of satisficing decision and control’, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics - Part A* **28**(6), 763–779.
- Gouvea, J. A., Lizarralde, F. & Beard, R. (2004), Control of passive systems using the satisficing paradigm, in ‘Proc. American Contr. Conf.’, Boston (MA). Aceito para publicação.
- Grimm, G., Messina, M. J., Teel, A. R. & Tuna, S. (2003), Multi-user rate-based flow control: Distributed game-theoretic algorithms, in ‘Proc. American Contr. Conf.’, Denver (CO).
- Guldner, J. & Utkin, V. I. (1993), Sliding mode control for an obstacle avoidance strategy based on an harmonic potential field, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, San Antonio, TX, pp. 424–429.
- Hespanha, J., Hohacek, S., Obrarzka, K. & Lee, J. (2001), Hybrid model of tcp congestion control, in ‘Hybrid Systems: Computation and Control’, pp. 291–304.
- Hill, D. & Moylan, P. (1976), ‘The stability of nonlinear dissipative systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **21**(5), 708–711.
- Hill, D. & Moylan, P. (1977), ‘Stability results for nonlinear feedback systems.’, *Automatica* **13**, 377–382.
- Hill, D. & Moylan, P. (1980a), ‘Connections between finite gain and asymptotic stability’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **25**(5), 931–936.
- Hill, D. & Moylan, P. (1980b), ‘Dissipative dynamical systems: Basic input-output and state properties’, *Journal of Franklin Institute* **309**(5), 327–357.
- Hughes, P. C. (1986), *Spacecraft Attitude Dynamics*, J. Wiley & Sons.
- Imer, O. C., Compans, S., Basar, T. & Srikant, R. (2001), ‘Control in ATM networks’, *IEEE Control Systems Magazine* **21**(1), 38–56.
- Isidori, A. (1999), *Nonlinear Control Systems II*, Springer Verlag.
- Jacobson, D. H. (1977), *Extension of linear-quadratic control, optimization and matrix theory*, Academic Press, New York.

- Jacobson, V. (1988), Congestion avoidance and control, in ‘SIGCOMM’, Palo Alto, CA.
- Jadbabaie, A. & Hauser, J. (2000), Relaxing the optimality condition in receding horizon control, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Sydney (Australia).
- Jurdjevic, V. & Quin, J. P. (1978), ‘Controllability and stability’, *Journal of Differential Equations* **28**, 381–389.
- Kalman, R. (1964), ‘When is a linear control system optimal?’, *Journal of Basic Engineering* **86**, 1–10.
- Kang, W. (1995), ‘Nonlinear \mathcal{H}_∞ control and application to rigid spacecraft’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **40**(5), 1281–1285.
- Kelley, C. (1995), *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM.
- Kelly, F., Maullo, A. & Tan, D. (1998), ‘Rate control in communication networks: shadow prices, proportional fairness and stability.’, *Journal of the Operational Research Society* **49**(3), 237–252.
- Kelly, F. P. (1999), Mathematical modeling of the internet, in ‘Fourth International Congress on Industrial and Applied Mathematics’, Edinburgh (Scotland).
- Kerns, K. J. & Yang, A. T. (1997), Preservation of passivity during RLC network reduction via split congruence transformations, in ‘IEEE Design Automation Conference’, pp. 34–39.
- Khalil, H. K. (1992), *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company.
- Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company.
- Kokotovic, P. & Arcak, M. (2001), ‘Constructive nonlinear control: a historical perspective’, *Automatica* **37**(5), 637–662.
- Krasovsky, A. A. (1971), ‘A new solution to the problem of a control system analytical design’, *Automatica* **7**, 45–50.
- Krstic, M. & Deng, H. (1998), *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems*, Communications and Control Engineering, Springer Verlag.
- Krstic, M. & Tsiotras, P. (1999), ‘Inverse optimal stabilization of a rigid spacecraft’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **44**(5), 1042–1049.
- Levi, I. (1980), *The Enterprise of Knowledge*, MIT Press, Cambridge (MA).
- Lin, Y. & Sontag, E. (1995), ‘Control-lyapunov universal formulas for restricted inputs’, *Control-Theory and Advanced Technology* **10**, 1981–2004.
- Lizarralde, F. & Wen, J. T. (1995), ‘Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **41**(3), 468–472.
- Low, S. H. (2000), A duality model of TCP flow controls, in ‘ITC Specialist Seminar on IP Traffic Measurement, Modeling and Management’, Monterey (CA).

- Low, S. H. & Lapsley, D. E. (1999), ‘Optimization flow control - I: basic algorithm and convergence.’, *IEEE/ACM Trans. on Networking* **7**(6), 861–874.
- Low, S., Paganini, F. & Doyle, J. (2002), ‘Internet congestion control’, *IEEE Control Systems Magazine* **32**, 28–43.
- Luh, J., Walker, P. & Paul, R. (1980), ‘Resolved acceleration control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **25**(3), 468–474.
- Mascolo, S. (1997), Smith’s principle for congestion control in high speed data networks, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, San Diego, pp. 4595–4600.
- Mascolo, S. (1999), ‘Congestion control in high-speed communication networks using the Smith principle’, *AUT* **35**, 1921–1935.
- Moylan, P. J. & Anderson, B. D. O. (1973), ‘Nonlinear regulator theory and an inverse optimal control problem’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **18**, 460–465.
- Nam, Y. S., Lee, B. H. & Ko, N. Y. (1996), A view-time based potential field method for moving obstacle avoidance, in ‘SICE’, pp. 1463–1468.
- Paganini, F. (2002), ‘A global stability result in network flow control’, *Systems and Contr. Letters* **46**(3), 153–163.
- Pontryagin, L. S., Boltyanski, V. G., Gamkrelidze, R. V. & Mischenko, E. F. (1962), *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, J. Wiley & Sons, New York.
- Popov, V. M. (1960), ‘Criterion of quality for non-linear controlled systems.’, *Preprints of the first IFAC world congress* pp. 173–176.
- Primbs, J. A. & Doyle, J. C. (2000), ‘A receding horizon generalization of pointwise min-norm controllers’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **45**(6), 898–909.
- R. Braden, D. C. & Shenker, S. (1994), ‘Integrad services in the internet architerture: An overview’, *Internet Engineering Task Force (IEFT), RFC 1633*.
- Rotea, M., Tsiotras, P. & Corless, M. (1998), ‘Suboptimal control of rigid body motion with a quadratic cost’, *Dynamical Control* **8**(1), 55–81.
- S. Blake, D. Black, M. C.-E. D. Z. W. W. W. (1999), ‘An architecture for differentiated services’, *Internet Engineering Task Force (IEFT), RFC 1633*.
- Salcudean, S. (1988), On the control of magnetically levitated robot wrists, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Austin, TX, pp. 186–191.
- Sandberg, I. W. (1964), ‘On the l_2 boundedness of solutions of nonlinear function equations’, *Bell System Tech. J.* **43**(11), 99–104.
- Sandberg, I. W. (1978), ‘On the stability of interconnected systems’, *Bell System Tech. J.* **54**, 3031–3046.
- Screivener, S. & Thompson, R. (1994), ‘Survey on time-optimal attitude maneuvers’, *J. Guidance, Control and Dynamics* **17**(2), 225–233.

- Sepulchre, R., Jankovic, J. & Kokotovic, P. (1997), *Constructive Nonlinear Control*, Springer Verlag, New York.
- Simon, H. A. (1955), 'A behavioral model of rational choice', *Quart. J. Economics* **59**, 99–118.
- Slotine, J. E. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall.
- Sontag, E. D. (1983), 'A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability', *SIAM Journal on Control and Optimization* **21**(3), 462–471.
- Sontag, E. D. (1989), 'A 'universal' construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization,"', *Systems and Contr. Letters* **13**(12), 117–123.
- Sontag, E. D. (1998), *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer Verlag, New York.
- Stirling, W. (2003), *Satisficing Games and Decision Making: with Applications to Engineering and Computer Science*, Cambridge University Press.
- Stirling, W. & Morrell, D. R. (1991), 'Convex bayes decision theory', *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* **21**(1), 173–183.
- Stirling, W. C., Goodrich, M. A. & Frost, R. L. (1996), 'Procedurally rational decision-making and control', *IEEE Control Systems Magazine* **16**(5), 66–75.
- Tarbouriech, S., Abdallah, C. T. & Ariola, M. (2001), Bounded control of multiple-delay systems with applications to ATM networks, in 'Proc. IEEE Conf. on Decision and Control', Orlando.
- Tsiotras, P. (1998), 'Further passivity results for the attitude control problem', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **43**(11), 1597–1600.
- Vidyasagar, M. (1977), ' l_2 stability of interconnected systems using a reformulation of the passivity theorem', *IEEE Trans. Circuits Syst.* **24**(11), 637–645.
- Vidyasagar, M. (1979), 'New passivity-type criteria for large-scale interconnected systems', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **24**(4), 575–579.
- Wen, J. T. & Arcak, M. (2004), 'A unifying passivity framework for network flow control', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **49**(2), 162–174.
- Wen, J. T. & Kreutz-Delgado, K. (1991), 'The attitude control problem', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **36**(10), 1148–1162.
- Wen, J. T. & Kreutz-Delgado, K. (1992), 'Motion and force control of multiple robotic manipulators', *Automatica* **28**(4), 729–744.
- Wie, B. & Barba, P. (1985), 'Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers', *J. Guidance, Control and Dynamics* **8**(3), 360–365.
- Wie, B., Weiss, H. & Arapostathis, A. (1989), 'Quaternion feedback regulator for spacecraft eigenaxis rotations', *J. Guidance, Control and Dynamics* **12**(3), 375–380.

- Willems, J. C. (1971), *The analysis of feedback systems*, MIT Press, Cambridge.
- Willems, J. C. (1972a), 'Dissipative dynamical systems - part I: General theory', *Arch. Rational Mechanics and Analysis* **45**, 321–351.
- Willems, J. C. (1972b), 'Dissipative dynamical systems - part II: Linear systems with quadratic supply rates', *Arch. Rational Mechanics and Analysis* **45**, 352–393.
- Zames, G. (1966), 'On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems - parts I and II.', *IEEE Trans. Automat. Contr.* **11**, 228–238, 465–476.
- Zio, E., Cantarella, M. & Cammi, A. (2003), 'The analytic hierarchy process as a systematic approach to the identification of important parameters for the reliability assessment of passive systems', *Nuclear Engineering and Design* **226**, 311–336.
- Zubov, V. I. (1966), *Theory of optimal control*, Sudostroenie, Leningrad.