

# OBSERVADORES: FUNDAMENTOS E ROBUSTEZ

Elaine Cristina da Assunção Viegas Paulino

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovado por:

---

Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, D. Sc.

---

Prof. Pedro Magalhães Guimarães Ferreira, D. Sc.

---

Prof. Roosevelt José Dias, D. Sc.

---

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2003

PAULINO, ELAINE CRISTINA DA ASSUN-  
ÇÃO VIEGAS

Observadores: Fundamentos e Robustez

[Rio de Janeiro] 2003

VI, 179 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,  
Engenharia Elétrica, 2003)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Observadores
2. Relações Fundamentais dos Observadores
3. Robustez
4. Estabilidade de Lyapunov

I. COPPE/UFRJ      II. Título (série).

# DEDICATÓRIA

Dedico ao meu filho, Thiago José e a minha mãe.

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus por ter iluminado meu caminho, o meu viver, dando-me força para chegar até aqui.

Queria agradecer ao meu filhinho, Thiago José, que apesar de ser uma criança e não ter maturidade para entender, abdicou o seu tempo comigo em função deste trabalho.

Gostaria de agradecer à minha mãe pelo incentivo, confiança, apoio, amizade, força e, principalmente, por ter sempre a palavra certa nas horas mais difíceis.

Em especial agradeço ao meu orientador, Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, pela sua dedicação, apoio, paciência, confiança e amizade dispensados para a execução deste trabalho. E, principalmente, por ter acreditado e me incentivado para a conclusão deste trabalho.

Agradeço ao corpo docente da área de Sistemas de Controle do Programa de Engenharia Elétrica da UFRJ, a oportunidade de realizar este curso.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## **OBSERVADORES: FUNDAMENTOS E ROBUSTEZ**

Elaine Cristina da Assunção Viegas Paulino

Março/2003

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Programa: Engenharia Elétrica

Os observadores de estado constituem uma poderosa ferramenta para o projeto de sistemas de controle, sendo a sua formulação baseada nas Relações Fundamentais dos Observadores. A sensibilidade a perturbações nos parâmetros do modelo da planta representa a principal dificuldade para os observadores. A fim de solucionar este problema muitos estudos têm sido feitos nesta área. Nesta tese apresenta-se a estrutura dos observadores redundantes e é feito um estudo sobre a robustez destes observadores em situação diversas, quando inseridos numa malha de realimentação ou somente como monitores de estados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## **OBSERVERS: FUNDAMENTALS AND ROBUSTNESS**

Elaine Cristina da Assunção Viegas Paulino

March/2003

Advisor: Afonso Celso Del Nero Gomes

Department: Electrical Engineering

State observers constitute a powerful tool for the design of control systems. Their formulation is based on the Basic Relations of the Observers. Sensitivity to disturbances in the parameters of the model of the plant represents the drawback for observers use. In order to solve this problem many studies have been done in this area. This thesis presents the structure of redundant observers and a study is made of the robustness properties of them, either when inserted in a feedback loop, for a control purpose, or when functioning as a mere state monitor.

# Sumário

<b>Dedicatória</b>	<b>ii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Símbolos</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Métodos de Espaço de Estado</b>	<b>5</b>
2.1 O Estado de um Sistema . . . . .	6
2.2 Técnicas de Recuperação de Estado . . . . .	8
2.2.1 Derivação de Saídas e Entradas . . . . .	8
2.2.2 Reconstrução do Modelo . . . . .	11
2.3 Técnicas de Substituição de Estado . . . . .	13
2.4 Teoria dos Observadores . . . . .	15
2.4.1 Determinando a Velocidade de Convergência . . . . .	24

2.4.2	Observadores de Ordem Mínima . . . . .	27
2.4.3	Separação de Estados . . . . .	30
2.4.4	Robustez . . . . .	37
2.4.5	Monitores e Compensadores . . . . .	46
2.5	Conclusões . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Observador de Estado Redundante</b>	<b>53</b>
3.1	Idéias Básicas . . . . .	54
3.1.1	Formas Canônicas . . . . .	55
3.2	Estimação de Estado Redundante . . . . .	56
3.2.1	Formalização do Procedimento . . . . .	59
3.3	Observador Redundante Mínimo . . . . .	65
3.4	Conclusões . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Projeto de Observadores</b>	<b>71</b>
4.1	Conceitos Básicos . . . . .	71
4.1.1	Sistema Observável e Sistema Detetável . . . . .	72
4.1.2	Alocação dos Autovalores . . . . .	73
4.2	Observador Identidade . . . . .	76
4.3	Observador de Luenberger . . . . .	79
4.4	Forma Canônica do Observador . . . . .	82
4.5	Observador de Estado Robusto . . . . .	88
4.5.1	Estimação de Estado Robusta . . . . .	91
4.5.2	Método para Plantas Instáveis . . . . .	100
4.5.3	Perturbação no Modelo da Matriz $B$ . . . . .	106
4.5.4	Projetando a Matriz $J$ . . . . .	109
4.6	Conclusões . . . . .	115

<b>5</b>	<b>Exemplos de Aplicação</b>	<b>117</b>
5.1	Problemas Numéricos do Observador de Estado Robusto . . . . .	117
5.1.1	Questões Numéricas . . . . .	117
5.1.2	Considerações Sobre a Singularidade . . . . .	118
5.1.3	Alteração no Projeto . . . . .	121
5.1.4	Conclusões . . . . .	124
5.2	Exemplo de um Reator Químico . . . . .	124
5.2.1	Descrição do Modelo . . . . .	124
5.2.2	Projeto do Estimador de Estado Redundante . . . . .	126
5.2.3	Projeto do Observador Identidade . . . . .	132
5.2.4	Projeto do Estimador de Estado Robusto . . . . .	133
5.2.5	Simulações . . . . .	136
5.3	Exemplo de uma Fornalha com Disparo à Gás . . . . .	142
5.3.1	Descrição do Modelo . . . . .	143
5.3.2	Projeto do Observador de Estado Redundante . . . . .	143
5.3.3	Projeto do Observador Identidade . . . . .	149
5.3.4	Projeto do Estimador de Estado Robusto . . . . .	151
5.3.5	Simulações . . . . .	152
5.4	Conclusões . . . . .	159
<b>6</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>161</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>165</b>

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de blocos de uma realimentação de estado . . . . .	7
2.2	Diagrama de blocos do método de derivação de saídas e entradas . . . . .	9
2.3	Diagrama de blocos do método de reconstrução de estado . . . . .	11
2.4	Diagrama de blocos da técnica de substituição de estado . . . . .	14
2.5	Diagrama de blocos da conexão de um observador numa planta . . . . .	15
2.6	Diagrama de blocos da construção de um estimador assintótico de estados	17
2.7	Variáveis de estado com os pólos em $-1$ . . . . .	26
	(a) $x_1$ e $w_1$ . . . . .	26
	(b) $x_2$ e $w_2$ . . . . .	26
2.8	Variáveis de estado com os pólos em $-5$ . . . . .	26
	(a) $x_1$ e $w_1$ . . . . .	26
	(b) $x_2$ e $w_2$ . . . . .	26
2.9	Variáveis de estado . . . . .	30
	(a) $x_2$ e $w_2$ , com os pólos em $-1$ . . . . .	30
	(b) $x_2$ e $w_2$ , com os pólos em $-5$ . . . . .	30
2.10	Diagramas de blocos da realimentação de estado: (a) situação desejável;	
	(b) situação real . . . . .	31
2.11	Desempenho do sistema realimentado em malha fechada . . . . .	35
	(a) Variáveis de estado para: condições ideais $x_1$ , observador com os	
	pólos em $-1$ , $x_{1_5}$ e observador com os pólos em $-5$ , $x_{1_5}$ . . . . .	35

(b)	Variáveis de estado para: condições ideais $x_2$ , observador com os pólos em $-1, x_{2_1}$ e observador com os pólos em $-5, x_{2_5}$ . . . . .	35
2.12	Desempenho do sistema realimentado em malha fechada . . . . .	36
(a)	Variáveis de estado para: condições ideais $x_1$ , observador mínimo com os pólos em $-1, x_{1_1}$ e com os pólos em $-5, x_{1_5}$ . . . . .	36
(b)	Variáveis de estado para: condições ideais $x_2$ , observador mínimo com os pólos em $-1, x_{2_1}$ e com os pólos em $-5, x_{2_5}$ . . . . .	36
2.13	Comportamento do erro de estimação . . . . .	41
(a)	Observador nominal . . . . .	41
(b)	Observador perturbado . . . . .	41
2.14	Comportamento do erro de estimação . . . . .	43
(a)	Observador nominal . . . . .	43
(b)	Observador perturbado . . . . .	43
2.15	Diagrama de blocos da realimentação de estado, mostrado na figura 2.10 (b) da subseção 2.4.3 . . . . .	47
2.16	Comportamento do erro de estimação . . . . .	49
(a)	Observador nominal . . . . .	49
(b)	Planta perturbada . . . . .	49
(c)	Sistema perturbado (Observador + Planta) . . . . .	49
3.1	Diagrama de blocos das conexões necessárias para implementar o estimador de estado . . . . .	55
4.1	Diagrama de blocos da implementação de um observador identidade . . . . .	77
4.2	Diagramas de blocos equivalentes da implementação do observador identidade . . . . .	78

4.3	Diagrama de blocos das conexões necessárias para implementar o estimador de estado . . . . .	96
5.1	Diagrama de blocos da simulação do estimador redundante com realimentação . . . . .	136
5.2	Diagrama de blocos da simulação do observador identidade com realimentação . . . . .	137
5.3	Diagrama de blocos da simulação do estimador robusto com realimentação	137
5.4	Gráfico do sinal de entrada $u(t)$ . . . . .	138
5.5	Gráficos dos estados do sistema sem perturbação e com perturbação . .	138
5.6	Gráficos do erro de estado dos observadores redundantes (de ordem completa e mínimo) e do identidade para um sistema sem perturbação	139
5.7	Gráficos do erro de estado do observador robusto para um sistema sem perturbação e com perturbação . . . . .	140
5.8	Gráficos do erro de estado dos observadores redundantes (de ordem completa e mínimo) e do identidade para um sistema com perturbação	141
5.9	Gráficos do estado da planta e dos observadores redundantes (de ordem completa e mínimo) e identidade para um sistema com perturbação . .	141
5.10	Gráfico do sinal de entrada $u(t)$ . . . . .	153
5.11	Diagrama de blocos da simulação do estimador de estado redundante .	153
5.12	Diagrama de blocos da simulação do estimador identidade . . . . .	154
5.13	Diagrama de blocos da simulação do estimador de estado robusto . . .	154
5.14	Gráficos dos estados do sistema sem perturbação e com perturbação . .	155
5.15	Gráficos do erro de estado dos observadores redundantes (de ordem completa e mínimo) para um sistema sem perturbação . . . . .	156
5.16	Gráficos do erro de estado dos observadores redundante e identidade para um sistema sem perturbação . . . . .	157

5.17 Gráficos do erro de estado dos observadores redundante e robusto para um sistema sem perturbação . . . . .	157
5.18 Gráficos do erro de estado dos observadores redundantes (de ordem completa e mínimo), identidade e robusto para um sistema com perturbação	158

# Lista de Abreviaturas e Símbolos

$\mathbb{R}$	— conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^{m \times m}$	— anel das matrizes racionais $m \times m$
$\mathbb{C}$	— conjunto dos números complexos
$\mathbb{C}^-$	— semiplano complexo esquerdo aberto
$\Re(z)$	— parte real de um número complexo $z$
$\forall$	— para todo
$I_m$	— matriz identidade de ordem $m$
$m_{ij}$	— elemento $(i, j)$ da matriz $M$
$M^{-1}$	— inversa da matriz $M$
$M^+$	— pseudoinversa da matriz $M$
$M^T$	— transposta da matriz $M$
$M > 0$	— a matriz $M$ é positiva definida
$M \geq 0$	— a matriz $M$ é positiva semi-definida
$\dim \mathcal{M}$	— dimensão do espaço de estado $\mathcal{M}$
$\lambda(M)$	— autovalores da matriz $M$
$\bar{\lambda}(M)$	— autovalor máximo da matriz $M$ , onde os autovalores de $M$ são reais
$\lambda^+(M)$	— autovalor da matriz $M$ situado no semiplano direito fechado de $\mathbb{C}^-$
$\rho(M)$	— posto da matriz $M$
$\mathcal{N}(M)$	— nulidade ou espaço nulo da matriz $M$
$\Delta$	— denota perturbação de um parâmetro
$\delta$	— $\geq \ \Delta\ $
$\ \cdot\ _2$	— norma-2 de uma matriz
$\ \cdot\ _\infty$	— norma-infinita de uma matriz

$\dot{x}(t)$  —  $:= \frac{dx(t)}{dt}$

$s$  — operador de Laplace

$\square$  — fim de uma prova

$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$  — abreviação da realização em espaço de estados  $C(sI - A)^{-1}B + D$

$tol$  — tolerância

$sign(\cdot)$  — sinal de  $(\cdot)$

$\ni$  — tal que

# Capítulo 1

## Introdução

As técnicas de projeto de sistemas de controle via métodos de espaço de estados, especialmente para o caso multivariável, têm grande aplicabilidade prática. Dentre as metodologias básicas estão a alocação de pólos, a realimentação de estados e a observação de estados, empregadas em um sem número de possíveis aplicações.

Estas ferramentas permitem, por exemplo, projetar sistemas tendo os pólos de malha fechada desejados (ou equações características desejadas) ou, ainda, sistemas de controle ótimos em relação a índices de desempenho pré determinados. Entretanto, tais projetos requerem descrição matemática precisa da dinâmica do sistema. Do ponto de vista computacional, estes métodos são adequados e liberam os esforços do projetista para aspectos analíticos do problema.

A estimação de estados, necessária para que se possa realimentá-los, é feita através dos observadores. Dentre os aspectos que merecem um estudo maior nos projetos está a robustez destes observadores. Este não é um assunto novo, pois no final da década de 70, Doyle e Stein [6] publicaram um estudo sobre a robustez dos observadores. Historicamente podemos lembrar a descoberta da realimentação de estados, na década de 50. Um pouco depois, em 1960, o filtro de Kalman [18], em 1961, o filtro de Kalman e Bucy [19] e em 1964, o projeto de observadores de Luenberger [23] para sistemas lineares. As propriedades teóricas do filtro de Kalman e

dos observadores de Luenberger foram bem explicadas em 1970, por Jazwinski [15], em 1984, por Chen [4] e em 1986, por Friedland [9]. Note que esta não é uma lista exaustiva e sim um breve relato histórico.

Atualmente muitas pesquisas têm sido feitas neste campo de robustez de observadores, aplicada nas mais diversas áreas. Podemos citar o estudo da robustez em sistemas com incertezas parametrizadas e com incertezas desestruturadas aplicadas nas matrizes do sistema. Nesta situação a robustez é alcançada através de uma lei de controle robusta que provê uma estabilidade relativa através da atenuação de distúrbios pelo método  $\mathcal{H}_\infty$  e pela otimização  $\mathcal{H}_2$  [31]. Outro estudo nesta área que também utiliza o método  $\mathcal{H}_\infty$  em conjunto com a parametrização de Youla para o observador a fim de assegurar a robustez do sistema na presença de distúrbios e de ruídos pode ser vista em [12]. Um estudo interessante, uma vez que também utiliza as relações fundamentais dos observadores, é feito por Lin et al [22]. Neste estudo o observador é projetado utilizando-se as relações para sistemas variantes no tempo, com atraso e com parâmetros incertos. Existem inúmeros estudos nessa área, podemos ainda referenciar [13], [14], [20],[30] e [32].

O objetivo desta tese é contribuir para o estudo da robustez de estimadores. Um tipo de observador, baseado em uma manipulação — ao que tudo indica nova — das Relações Fundamentais dos Observadores é proposto. Algumas características destes estimadores justificam o nome “redundantes” para eles. O fato de haver redundância em um dado projeto sugere que ele se comporte bem na presença de perturbações, o que será verificado.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 2 são recordados conceitos básicos da teoria de controle via métodos de espaço de estados, quando são recordados os conceitos de realimentação de estados e a teoria dos observadores. São feitos ainda alguns comentários sobre a velocidade de convergência dos obser-

vadores, observadores mínimos, a separação de estados após a introdução de uma lei de controle e uma breve análise da robustez dos observadores. No capítulo 3 são apresentados os observadores redundantes como a sua motivação e metodologia de projeto através da resolução as Relações Fundamentais dos Observadores. Toda a formalização do procedimento, bem como a determinação da matriz  $T$  e os algoritmos são apresentados. Em seguida o capítulo 4 também será um capítulo com algumas recordações sobre alguns métodos de projetos de observadores. Os projetos a serem apresentados são dos observadores: identidade, o tradicional de Luenberger, o observador de ordem completa via forma canônica do observador e o observador robusto. Os conceitos de observabilidade e detetabilidade, as formas canônicas e a alocação de autovalores são conceitos básicos também mostrados neste capítulo. No final deste capítulo é apresentado o projeto e um algoritmo para observadores redundantes mínimos. A seguir no capítulo 5 são feitos exemplos de implementação dos projetos dos observadores redundantes. E afim de compararmos os desempenhos são também projetados os observadores identidade e robusto. Neste capítulo são analisados os desempenhos dos observadores redundantes inclusive na presença de perturbações. Finalmente no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e motivações para trabalhos futuros.



## Capítulo 2

# Métodos de Espaço de Estado

Neste capítulo serão recordados alguns conceitos necessários ao estudo dos projetos de sistemas de controle pelos métodos de espaço de estados.

Na teoria convencional consideram-se importantes somente os sinais de entrada, saída e erro, e através das funções de transferência e de uma variedade de técnicas gráficas são feitas a análise e o projeto dos controladores.

A teoria de controle via métodos de espaço de estados permite o projeto de controladores ótimos, escolher as equações características, ou seja, os pólos de malha fechada e incluir condições iniciais no projeto.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção 1 apresenta-se a motivação para um projeto de realimentação de estados. Na seção 2 são apresentadas as técnicas de recuperação de estados para um projeto via realimentação de estados, que podem ser por derivação de saídas e entradas ou por reconstrução do modelo. Na seção 3 apresentam-se as técnicas de substituição de estados, que são uma outra maneira para solucionar os problemas do projeto via realimentação de estados. Na seção 4 apresenta-se a teoria dos observadores, necessária para poder transformar o problema de realimentar um estado inacessível em um problema de realimentar saídas e entradas mensuráveis. Seguem-se comentários sobre a velocidade de convergência dos observadores, pois deve-se ter cautela ao determiná-la para não gerar problemas

associados a ganhos elevados. Depois serão apresentados os observadores de ordem mínima, uma vez que eles permitem estimativas perfeitas para algumas das variáveis de estado. Tendo feito isso, apresenta-se a separação de estados, que nos permite saber o comportamento do sistema após a introdução de uma lei de controle. E finalmente, se analisará a robustez dos observadores, para que possam ser aplicados em situações mais realistas, já que o mundo físico é imperfeito e os parâmetros normalmente variam. Na seção 5 são apresentadas as conclusões.

As idéias apresentadas neste capítulo são muito conhecidas e podem ser facilmente encontradas na literatura de sistemas de controle. Maiores detalhes sobre os conceitos aqui revistos podem ser encontrados em [2], [3], [5], [8], [10], [16], [21], [24], [26], [29], [34].

## 2.1 O Estado de um Sistema

Com a descoberta, na década de 50, de que a solução para alguns problemas de *controle ótimo* seria aplicar na entrada do sistema uma combinação linear das variáveis de estado, passou-se a prestar mais atenção nessa ferramenta. Talvez este tenha sido um primeiro indício da importância de se realimentar os estados.

O reconhecimento da realimentação de estados como uma ferramenta extremamente poderosa se deveu às descobertas de que se consegue fazer com a realimentação de estados tudo o que se faz com a realimentação das saídas, mas o inverso não é possível; e ainda com a existência de uma conexão entre a controlabilidade e a alocação arbitrária dos autovalores. Dessa forma, recomenda-se o uso de realimentação de estados em situações onde se deseja mudar as características de um sistema, ou seja, em situações em que se necessite fazer o *controle* de um sistema.

Entretanto, na prática somente a saída  $\mathbf{y}$  é mensurável, sendo o estado da planta

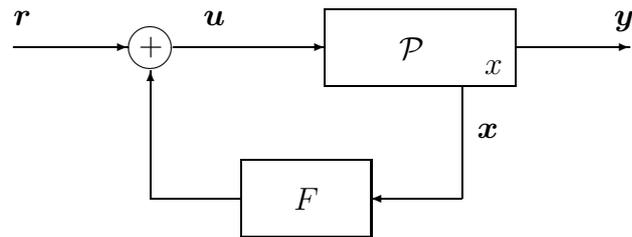


Figura 2.1: Diagrama de blocos de uma realimentação de estado

$\boldsymbol{x}$ , na maioria das vezes inacessível e não se pode, portanto, utilizá-lo na realimentação. A inacessibilidade do estado da planta pode se dever ao fator econômico, uma vez que, dependendo do sistema, fica muito caro instalar-se sensores que forneceriam todas as variáveis de estado. Em outras situações a presença desses sensores poderia alterar significativamente a planta e, ainda, pode ser impossível fisicamente instalar-se algum sensor a fim de se obter o estado do sistema.

A imensurabilidade do estado global de um sistema é uma realidade, e torna-se uma restrição a ser considerada nas técnicas de compensação por meio da realimentação de estado. Isto motiva a busca de métodos para contornar este obstáculo, a fim de que se possa utilizar a realimentação de estado e usufruir de seus benefícios. Ao longo do tempo algumas soluções básicas foram encontradas para este problema, e pode-se agrupá-las em três categorias, quais sejam:

- **Técnicas de Recuperação do Estado**

Recupera-se e utiliza-se o estado inacessível.

- **Técnicas de Substituição do Estado**

Constrói-se um estado “equivalente” que pode ser usado como substituto do estado inacessível.

- **Técnicas de Transformação do Problema**

Transforma-se o problema de realimentação de estado em um problema de rea-

limentação de saída.

Dentre as técnicas acima mencionadas, somente as duas primeiras serão vistas aqui, uma vez que as técnicas de transformação do problema, também conhecidas como compensadores dinâmicos de Pearson, estão em desuso.

Para o presente estudo as seguintes definições são necessárias:

DEFINIÇÃO 2.1: matriz de observabilidade

$$\begin{bmatrix} C \\ C A \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

DEFINIÇÃO 2.2: espectro de uma matriz  $[\lambda(\cdot)]$

Denota o conjunto de todos os autovalores da matriz  $(\cdot)$

DEFINIÇÃO 2.3: semiplano esquerdo aberto  $[\mathbb{C}^-]$

Região estável do plano complexo,  $\mathbb{C}$ .

Apresentadas as definições de 2.1 a 2.3, vamos agora ao estudo propriamente dito dos projetos pelos métodos de espaço de estado.

## 2.2 Técnicas de Recuperação de Estado

Esta técnica consiste em resgatar, recuperar o estado inacessível, e para isso existem duas maneiras básicas, que são:

1. Derivação de saídas e entradas.
2. Reconstrução do modelo.

### 2.2.1 Derivação de Saídas e Entradas

Antes de explicar o método da derivação, um exemplo simples ilustrará a sua aplicação.

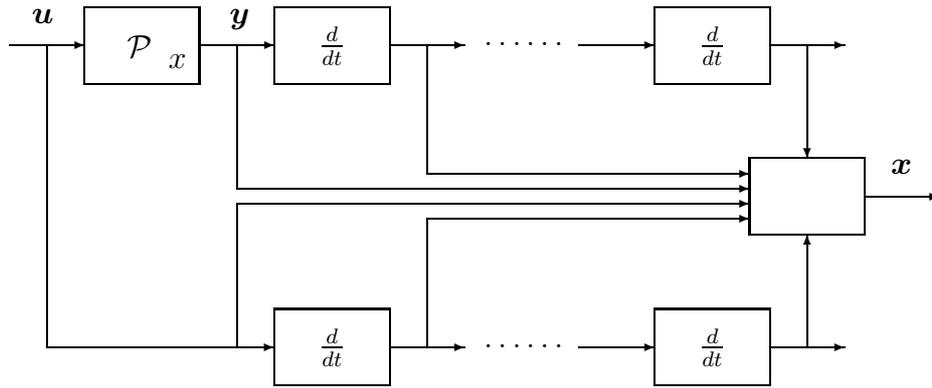


Figura 2.2: Diagrama de blocos do método de derivação de saídas e entradas

EXEMPLO 2.1: *Dado o sistema:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = Cx = [1 \ 0 \ 0] x \end{cases}$$

*Sendo a saída mensurável e derivando a mesma, temos:*

$$y = Cx = [1 \ 0 \ 0] x = x_1$$

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu = [0 \ 1 \ 0] x = x_2$$

$$\ddot{y} = CA(Ax + Bu) + CB\dot{u} = [0 \ 0 \ 1] x = x_3$$

Percebe-se que, pelo menos neste exemplo, a saída de um sistema dinâmico e suas derivadas podem trazer informações suficientes para a reconstituição do estado do sistema. De maneira geral, supondo que a saída, suas derivadas, a entrada e suas derivadas se encontram disponíveis para medição, pode-se recuperar o estado. O processo de recuperação de estados por meio de derivação de saídas e entradas está representado na figura 2.2.

Seja agora o caso geral,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Este método começa derivando-se sucessivamente a saída mensurável  $y$ , o que nos permite escrever a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ CB \\ CAB \\ \vdots \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ CB \\ \vdots \end{bmatrix} \dot{u} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ CB \end{bmatrix} u^{(n-2)} \quad (2.3)$$

Se a saída, suas derivadas, a entrada e suas derivadas forem mensuráveis, pode-se resolver a equação (2.3) e então recuperar o estado  $x$ .

No caso de um sistema completamente observável, a matriz de observabilidade terá posto completo, ou seja, todas as suas colunas serão linearmente independentes, portanto será possível encontrar uma matriz  $V$  tal que

$$V \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = I_n \quad (2.4)$$

Sendo assim, pode-se reescrever a equação (2.3) em função de  $x$  a partir da equação (2.4), obtendo-se:

$$x = V \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} - V \begin{bmatrix} 0 \\ CB \\ CAB \\ \vdots \end{bmatrix} u - V \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ CB \\ \vdots \end{bmatrix} \dot{u} - \cdots - V \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ CB \end{bmatrix} u^{(n-2)} \quad (2.5)$$

Pode-se observar que as variáveis de estado podem ser expressas como combinações lineares das variáveis de saída e suas derivadas e das variáveis de entrada e suas derivadas. E, ainda, que este método está relacionado com a observabilidade do sistema, ou seja, o par  $\langle C, A \rangle$ .

Porém vale ressaltar que, na prática a aplicação deste método é inviável, já que a aplicação dos derivadores em sistemas reais geram graves problemas de ampliação de ruídos.

Conclui-se que o interesse deste método é puramente teórico.

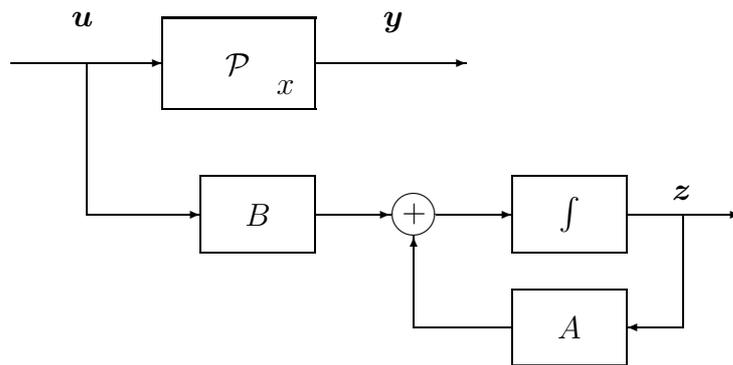


Figura 2.3: Diagrama de blocos do método de reconstrução de estado

### 2.2.2 Reconstrução do Modelo

O presente método parte do princípio que, mesmo o estado  $x$  do sistema sendo inacessível, é sempre possível construir em laboratório e/ou simular em um computador um sistema dinâmico com equações idênticas às da planta. Portanto, se o modelo da planta for excitado por uma entrada  $u$  e estiver sujeito às mesmas condições iniciais, então o seu estado  $z$  será idêntico ao estado inacessível  $x$ . Este estado  $z$  tem, ainda, uma vantagem: ele está disponível, uma vez que o modelo foi construído pelo projetista. Na figura 2.3 pode-se ver a representação do diagrama de blocos do método de reconstrução de estado.

Da mesma forma que no método anterior, no caso geral teremos um planta  $\mathcal{P}$ , descrita pelas seguintes equações dinâmicas tradicionais

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Neste método, o fato de o estado  $x$  não ser mensurável não importa, mas as matrizes do sistema  $A$ ,  $B$  e  $C$ , a entrada do sistema  $u$  e a condição inicial  $x_0$  devem ser conhecidas. De posse dessas grandezas pode-se realizar fisicamente um sistema  $\mathcal{M}$ , com entrada  $u$  e estado  $z$ , expresso como

$$\mathcal{M} \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Quando fazemos  $z_0 = x_0$  no sistema  $\mathcal{M}$  obtemos  $z(t) = x(t)$ ,  $\forall t$ . E como o estado  $z$  é mensurável, soluciona-se o problema.

Na prática, para que  $z(t) = x(t) \forall t$  seja verdade, precisa-se de uma identificação perfeita, ou seja, deve-se conhecer exatamente as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $x_0$ . Além disso o modelo deve ser implementado com componentes de alta precisão e acurados e, ainda, suas condições iniciais devem ser exatamente iguais às da planta. Dessa forma, o modelo terá um desempenho igual ao da planta e o estado  $z$  será uma reconstituição segura do estado  $x$ . A seguir tem-se uma demonstração para justificar essas afirmações.

Suponha que as matrizes utilizadas no modelo  $\mathcal{M}$  sejam  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ . Obtem-se então,

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

DEFINIÇÃO 2.4: erro de estado ou de operação [ $e(t)$ ]

$$e(t) = x(t) - z(t) \quad (2.8)$$

A partir das equações (2.7) e (2.8) obtemos uma expressão para o erro de estado:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{z} \\ &= Ax + Bu - \tilde{A}z - \tilde{B}u \\ &= Ax - \tilde{A}z + (B - \tilde{B})u \end{aligned} \quad (2.9)$$

Caso a identificação seja perfeita e o modelo implementado com componentes de alta precisão e acurados, teremos  $A = \tilde{A}$  e  $B = \tilde{B}$ , portanto

$$\dot{e} = Ae \quad (2.10)$$

E ainda, se a identificação da condição inicial da planta  $x_0$  e o ajuste de  $z_0$  forem extremamente precisos, tem-se  $e(t_0) = 0$  o que leva a

$$e(t) = 0 \quad \forall t \quad (2.11)$$

Deseja-se a equação (2.11) como resultado, porém ao se obter  $e(t_0) \neq 0$ , a solução da equação (2.10) informa que o máximo que se pode obter é  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , e para isto acontecer é necessário que os autovalores de  $A$  estejam no semiplano esquerdo aberto do plano complexo, ou seja, a planta deve ser estável.

Na prática, existem erros na identificação da planta, uma vez que os métodos disponíveis de identificação são imperfeitos, e também na implementação do modelo, pois mesmo que houvesse uma identificação perfeita seria impossível construir um modelo com parâmetros idênticos. Dessa forma não se terá a garantia de um comportamento adequado do erro de estado  $e$ , e portanto o estado do modelo  $z$  não será a reconstrução do estado da planta  $x$ .

Conclui-se que a reconstrução de modelo é uma técnica inviável para a recuperação do estado, tendo apenas interesse teórico.

## 2.3 Técnicas de Substituição de Estado

Esta técnica emprega a filosofia básica da realimentação a fim de solucionar os problemas encontrados no método da recuperação de estados descrito anteriormente. Na figura (2.4) pode-se observar um diagrama de blocos da técnica de substituição de estados.

Começamos supondo que a identificação da planta é exata, então temos as matrizes:  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Em seguida coloca-se uma matriz de ganho  $L$  na malha de realimentação, para que a velocidade de convergência do sinal possa ser alterada. Sendo assim, o sistema  $\mathcal{M}$ , com entrada  $u$ , saída  $\tilde{y}$  e estado  $z$ , passa agora a ser expresso como

$$\begin{cases} \dot{z} = A z + B u + L (y - \tilde{y}) \\ \tilde{y} = C z \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Manipulando-se as seguintes equações:

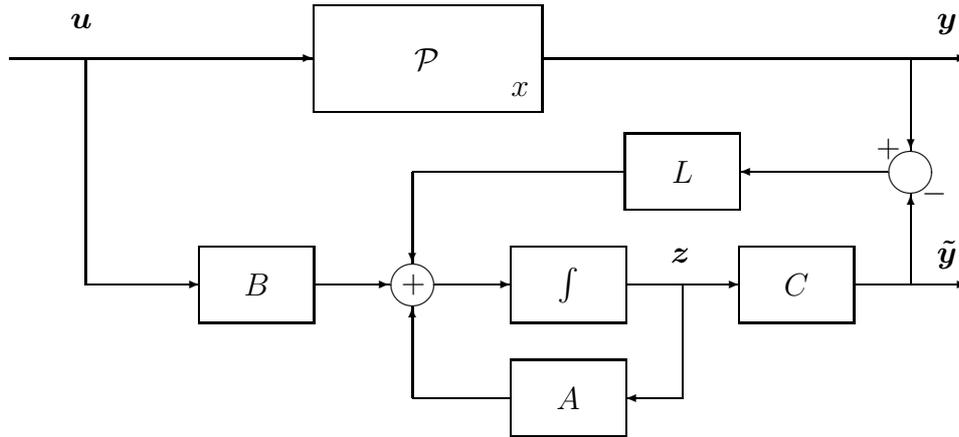


Figura 2.4: Diagrama de blocos da técnica de substituição de estado

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$\dot{z} = Az + L(y - \tilde{y}) + Bu$$

pode-se reescrever a equação dinâmica do modelo, da seguinte forma:

$$\dot{z} = (A - LC)z + Bu + Ly \quad (2.13)$$

A partir da definição do erro de estado, feita anteriormente, temos

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{z}$$

$$\dot{e} = Ax + Bu - (A - LC)z - Bu - Ly$$

$$\dot{e} = Ax - (A - LC)z - LCx$$

$$\dot{e} = (A - LC)e \quad (2.14)$$

Donde se conclui que, se os autovalores de  $(A - LC)$  puderem ser colocados no semiplano esquerdo aberto do plano complexo, então  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \forall e_0$ . Em outras palavras, o estado do modelo  $z$  tenderá assintoticamente para o estado da planta  $x$  independentemente de as condições iniciais do modelo e da planta serem diferentes. No caso de as condições iniciais serem iguais,  $e(t) = 0 \quad \forall t$ , teremos  $x(t) = z(t) \quad \forall t$ .

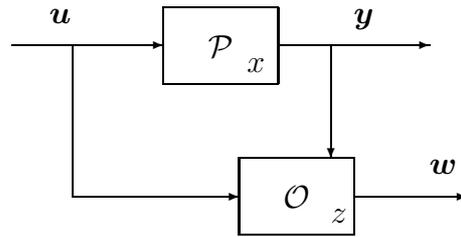


Figura 2.5: Diagrama de blocos da conexão de um observador numa planta

Enfim, tem-se um método que pode funcionar, desde que os autovalores de  $(A - LC)$  sejam convenientemente escolhidos.

**TEOREMA 2.1** Os autovalores da matriz  $(A - LC)$  podem ser livremente designados através de escolha da matriz  $L$  se e somente se o par  $\langle C, A \rangle$  for observável.

**DEMONSTRAÇÃO:** Este é um resultado muito conhecido. □

Este teorema clássico da teoria de sistemas lineares trata exatamente da situação em questão. Portanto, se uma planta for observável pode-se construir um modelo cujo estado poderá substituir o estado imensurável.

## 2.4 Teoria dos Observadores

Os Estimadores Assintóticos de Estado ou Observadores Assintóticos ou apenas Observadores, foram introduzidos na literatura por Luenberger [23].

O observador é um sistema dinâmico capaz de reproduzir, substituir os estados não mensuráveis de uma planta  $\mathcal{P}$  através do conhecimento de suas entradas e saídas. Na figura (2.5) temos o diagrama de blocos da conexão de um observador a uma planta.

O projeto de um observador, basicamente, é criar um sistema dinâmico cujas entradas são: a entrada da planta  $u$  e a saída da planta  $y$ . Este sistema terá uma saída  $w$  que substituirá o estado imensurável  $x$ , ou seja,  $w$  deve tender assintoticamente para

$x$  ao longo do tempo.

$$w(t) \rightarrow x(t) \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

ou então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [w(t) - x(t)] = 0 \quad (2.15)$$

Uma vez que a planta seja linear e invariante no tempo, deseja-se que o seu estado seja observado por estimadores também lineares e invariantes no tempo. A situação agora pode ser resumida da seguinte forma:

### Problema de Estimação de Estado

Seja uma planta  $\mathcal{P}$ , descrita pelas matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  e com condição inicial  $x_0$ . Encontre um sistema dinâmico acionado pela entrada e pela saída da planta, com condição inicial  $z_0$  e cuja saída  $w$  tende assintoticamente para o estado imensurável  $x$  de  $\mathcal{P}$ , independente das condições iniciais e das entradas, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [w(t) - x(t)] = 0 \quad \forall x_0, \forall z_0, \forall u \quad (2.16)$$

O sistema dinâmico referido acima é o *Observador* e será utilizado o símbolo  $\mathcal{O}$  para indicá-lo.

Lembrando que a planta e o observador são lineares e invariantes no tempo, as seguintes equações dinâmicas descrevem os sistemas:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = G z(t) + H u(t) + J y(t) \\ w(t) = M z(t) + N y(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

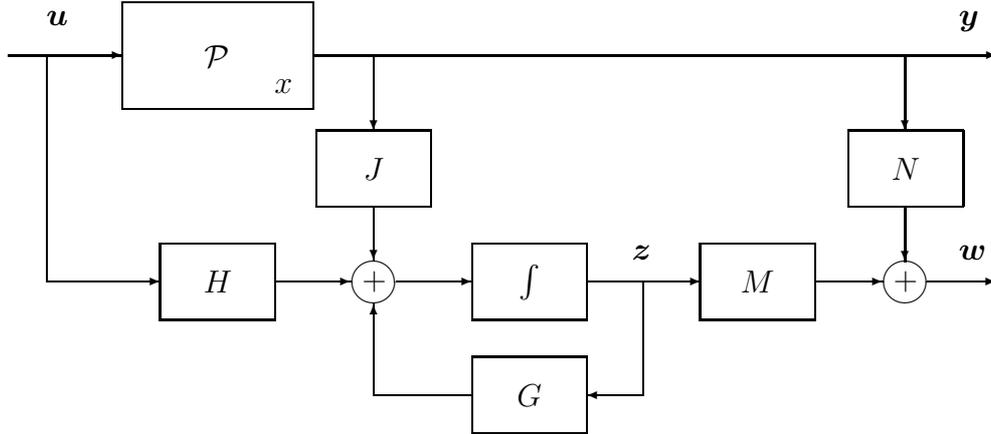


Figura 2.6: Diagrama de blocos da construção de um estimador assintótico de estados

Seja a dimensão da planta  $n$ , então  $x(t)$  pertence ao espaço de estados  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ . Da mesma forma,  $u(t) \in \mathcal{U}$  com  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$  e  $y(t) \in \mathcal{Y}$  com  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^r$ . Portanto, as matrizes são  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ . Suponha que o observador tem dimensão  $o$ , isto é, o seu estado  $z(t) \in \mathcal{Z}$  com  $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^o$ , como a saída  $w(t)$  deve ter a mesma dimensão de  $x(t)$ , temos  $w(t) \in \mathcal{W} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ . As matrizes são  $G \in \mathbb{R}^{o \times o}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{o \times m}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{o \times r}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times o}$  e  $N \in \mathbb{R}^{n \times r}$ . A figura 2.6 mostra o diagrama de blocos para a implementação de um observador a partir de suas equações dinâmicas.

Pode-se pensar em relacionar a saída  $w(t)$  do observador com a entrada da planta  $u(t)$ , através de um termo do tipo  $\bar{N}u(t)$  inserido na equação de  $w(t)$ . Posteriormente, algumas análises mostrarão que tal acoplamento direto é desnecessário, uma vez que a estrutura descrita acima se mostrará capaz de resolver o problema.

Pode-se agora enunciar novamente o problema de estimação de estados. Para isso precisamos da seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.5: erro de estimação  $[\varepsilon(t)]$

$$\varepsilon(t) = w(t) - x(t) \quad (2.17)$$

### Projeto de Estimação de Estado

Seja uma planta  $\mathcal{P}$ , descrita pelas matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  e pela condição inicial  $x_0$ . Projetar um sistema dinâmico  $\mathcal{O}$ , caracterizado pelas matrizes  $\langle G, H, J, M, N \rangle$ , de forma que  $\varepsilon(t)$  tenda assintoticamente para zero, independente das condições iniciais da planta, do observador e da entrada.

#### TEOREMA 2.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DOS OBSERVADORES [10], [8]

O sistema dinâmico  $\mathcal{O} = \langle G, H, J, M, N \rangle$  é um observador assintótico para a planta  $\mathcal{P} = \langle A, B, C \rangle$  se e somente se existir uma matriz  $T \in \mathbb{R}^{o \times n}$ , com  $o \leq n$ , tal que:

$$T A - G T = J C \quad (2.18)$$

$$T B = H \quad (2.19)$$

$$M T + N C = I_n \quad (2.20)$$

$$\lambda(G) \subset \mathbb{C}^- \quad (2.21)$$

#### DEMONSTRAÇÃO:

A CONDIÇÃO É NECESSÁRIA: Suponha que  $\mathcal{O} = \langle G, H, J, M, N \rangle$  estima o estado da planta, ou seja,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ . A partir da equação (2.17), temos

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= w(t) - x(t) \\ &= M z(t) + N C x(t) - x(t) \\ &= M z(t) + (N C - I) x(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

logo,

$$M z(t) = (I - N C) x(t) + \varepsilon(t) \quad (2.23)$$

É importante observar que estamos considerando  $o \leq n$  e que a matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times o}$  pode ser escolhida com posto completo, donde  $\rho(M) = o$ . Isto garante a existência de

uma matriz  $M^+ \in \mathbb{R}^{o \times n}$  tal que  $M^+ M = I_o$ . Pré multiplicando a equação (2.23) por  $M^+$  obtém-se a seguinte expressão para  $z(t)$ :

$$z(t) = M^+ (I - N C) x(t) + M^+ \varepsilon(t) \quad (2.24)$$

Chamando,

$$M^+ (I - N C) = T \quad (2.25)$$

e

$$M^+ \varepsilon(t) = e(t) \quad (2.26)$$

obtém-se:

$$z(t) = T x(t) + e(t) \quad (2.27)$$

Esta expressão mostra claramente que o estado  $z$  é uma transformação linear do estado  $x$  acrescido de um erro de estado  $e$ . Ao derivar a equação (2.27) e utilizar as equações básicas de  $\mathcal{O}$ , resulta

$$\dot{z}(t) = T \dot{x}(t) + \dot{e}(t) \quad (2.28)$$

$$= T A x(t) + T B u(t) + \dot{e}(t) \quad (2.29)$$

$$= G z(t) + H u(t) + J y(t) \quad (2.30)$$

Substituindo  $y(t) = C x(t)$  na equação (2.30) e igualando a equação (2.29) e depois substituindo a (2.27), tem-se:

$$T A x(t) + T B u(t) + \dot{e}(t) = G z(t) + H u(t) + J C x(t)$$

$$T A x(t) + \dot{e}(t) = G [T x(t) + e(t)] + (H - T B) u(t) + J C x(t)$$

$$(G T + J C - T A) x(t) + (H - T B) u(t) - [\dot{e}(t) - G e(t)] = 0 \quad (2.31)$$

A equação (2.31) deve ser nula independentemente das funções  $x(t)$ ,  $u(t)$  e  $e(t)$

envolvidas, portanto é necessário que

$$GT + JC - TA = 0 \quad (2.32)$$

$$H - TB = 0 \quad (2.33)$$

$$\dot{e}(t) - Ge(t) = 0 \quad (2.34)$$

As equações (2.32) e (2.33) equivalem, respectivamente, às equações (2.18) e (2.19). Já a equação (2.34) se transforma em

$$\dot{e}(t) = Ge(t) \quad (2.35)$$

Mas  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , pois  $e(t) = M^+ \varepsilon(t)$  e  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ , já que por hipótese a estimação funciona. Como estas expressões devem ser válidas para quaisquer condições iniciais, o erro de operação  $e(t)$  tem um comportamento estável, ou seja,

$$\lambda(G) \in \mathbb{C}^- \quad (2.36)$$

esta equação (2.36) é idêntica a equação (2.21).

A fim de estabelecer a validade da equação (2.20), relembra-se que  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ , o que leva a  $\lim_{t \rightarrow \infty} [w(t) - x(t)] = 0$ , que pode ser transformado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [Mz(t) + Ny(t) - x(t)] &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \{M[Tx(t) + e(t)] + NCx(t) - x(t)\} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \{[MT + NC - I]x(t) + Me(t)\} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [MT + NC - I]x(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} Me(t) &= 0 \end{aligned}$$

Mas  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , e como a expressão deve ser válida para qualquer  $x(t)$ , temos

$$MT + NC = I \quad (2.37)$$

e esta equação (2.37) é exatamente a equação (2.20). Portanto, conclui-se a demonstração da necessidade do problema.

A CONDIÇÃO É SUFICIENTE: Sejam as matrizes  $G$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $M$  e  $N$  escolhidas de modo a satisfazer as equações (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21). Com elas pode-se construir um sistema dinâmico  $\mathcal{O}$  descrito por,

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = G z(t) + H u(t) + J y(t) \\ w(t) = M z(t) + N y(t) \end{cases}$$

Analisando-se o sinal  $w(t) - x(t)$  e utilizando a equação (2.20) temos

$$\begin{aligned} w(t) - x(t) &= M z(t) + N y(t) - x(t) \\ &= M z(t) + (N C - I) x(t) \\ &= M z(t) - M T x(t) \\ &= M [z(t) - T x(t)] \end{aligned} \tag{2.38}$$

Chamando  $z(t) - T x(t) = e(t)$  e derivando esta equação, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{z} - T \dot{x}(t) \\ &= G z(t) + H u(t) + J y(t) - T [A x(t) + B u(t)] \\ &= G [T x(t) + e(t)] + H u(t) + J C x(t) - T A x(t) - T B u(t) \\ &= (G T + J C - T A) x(t) + (H - T B) u(t) + G e(t) \end{aligned} \tag{2.39}$$

entrando com as equações (2.18) e (2.19) temos

$$\dot{e} = G e(t)$$

Usando agora (2.21) conclui-se que o erro de operação  $e(t)$  tem um comportamento estável. Portanto, como o sinal  $z(t) - T x(t)$  tende à origem, o sinal  $w(t)$  é uma estimativa assintótica de  $x(t)$ . Dessa forma, mostrou-se que o sistema  $\mathcal{O}$  funciona como um *Estimador Assintótico de Estados*.  $\square$

A partir deste teorema, o problema prático de projetar um sistema dinâmico capaz de gerar um substituto para o estado inacessível de uma dada planta se transformou no seguinte problema matemático:

Dadas as matrizes reais  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  encontrar, se possível, as matrizes reais:  $T$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $M$  e  $N$ , tais que as expressões (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21), chamadas de Relações Fundamentais dos Observadores, se verifiquem.

Tendo em mãos uma solução para as relações, o projeto se encerraria com a efetiva implementação do estimador. Para isto constrói-se um sistema dinâmico de acordo com o diagrama de blocos da figura 2.6.

Diante de um problema matemático, a postura se resume em duas etapas:

1. Saber se existe solução;
2. Em caso afirmativo, encontrar uma delas, ou mais de uma, ou então delimitar a família de todas as possíveis soluções.

As próximas seções tratarão com mais detalhes destes aspectos matemáticos de existência de soluções e de uma busca ordenada delas. Antes disso, com o intuito de facilitar a visualização da teoria desenvolvida, a seguir será desenvolvido um exemplo ilustrativo.

EXEMPLO 2.2: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  modelada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

*Um maneira para se resolver as relações fundamentais do observador, equações (2.18) a (2.21) é fixar uma das matrizes procuradas e verificar se é possível encontrar as demais. Como a matriz  $G$  fornece a dinâmica do observador, às vezes é vantajoso fixá-la inicialmente. Então, escolhendo  $G$  de maneira a satisfazer a equação (2.21), temos*

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*Resolvendo agora a equação (2.18), tomando  $T$  e  $J$  totalmente literais, fica*

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} [1 \quad 0]$$

*Desenvolvendo, obtém-se:*

$$\begin{bmatrix} t_{11} - 2t_{12} & t_{11} - t_{12} \\ t_{21} - 2t_{22} & t_{21} - t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ j_2 & 0 \end{bmatrix}$$

*A expressão acima fornece as seguintes restrições:*

$$\begin{cases} t_{12} = t_{11} \\ t_{22} = t_{21} \end{cases} \quad \begin{cases} j_1 = t_{11} - 2t_{12} = -t_{11} \\ j_2 = t_{21} - 2t_{22} = -t_{21} \end{cases}$$

*Substituindo as matrizes  $T$ ,  $J$  e resolvendo a equação (2.19):*

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11} \\ t_{21} & t_{21} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -t_{11} \\ -t_{21} \end{bmatrix}; \quad H = TB = \begin{bmatrix} -2t_{11} \\ -2t_{21} \end{bmatrix}$$

*Resolvendo agora a equação (2.20) para  $M$  e  $N$  totalmente literais temos*

$$MT = I_2 - NC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$MT = \begin{bmatrix} 1 - n_1 & 0 \\ -n_2 & 1 \end{bmatrix}$$

*Como as colunas de  $T$  são idênticas, as de  $MT$  também devem ser, logo:*

$$\begin{cases} 1 - n_1 = 0 \\ n_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

*O produto de  $M$  pela segunda coluna de  $T$  deve ser igual à segunda coluna de  $I - NC$ :*

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Esta equação admite muitas soluções. Supondo, por exemplo,  $t_{11} = t_{21} = 1$  encontraríamos as restrições  $m_{11} + m_{12} = 0$  e  $m_{21} + m_{22} = 1$ , acarretando*

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix}$$

*A solução encontrada para as relações fundamentais dos observadores seria constituída pelas matrizes:*

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$H = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e o observador seria implementado de acordo com o diagrama de blocos da figura 2.6.

### 2.4.1 Determinando a Velocidade de Convergência

De acordo com o teorema 2.1, o erro de operação  $e(t)$  para um observador projetado para uma planta  $\mathcal{P}$  satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} e(t) &= z(t) - T x(t) \\ \dot{e} &= G e(t) \\ &\Downarrow \\ e(t) &= e^{tG} e_0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

dessa forma, o estado do observador é dado por

$$z(t) = T x(t) + e^{tG} (z_0 - T x_0) \tag{2.41}$$

Fazendo  $z_0 = T z_0$ , obtém-se a seguinte dependência linear exata entre os estados do observador e da planta:

$$z(t) = T x(t) \quad \forall t \tag{2.42}$$

e o erro de operação será identicamente nulo:  $e(t) = 0 \quad \forall t$ . Da mesma forma, o erro de estimação será nulo,  $\varepsilon(t) = 0$ , ou seja, a estimação será perfeita:

$$w(t) = x(t) \quad \forall t \tag{2.43}$$

Esses resultados não ocorrem na prática, pois é impossível ajustar a condição inicial do observador com tamanha exatidão. Porém com uma escolha adequada do espectro de  $G$  pode-se ter  $e(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou seja,  $z(t) \rightarrow T x(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ , ou ainda,  $w(t) \rightarrow x(t)$ . Quanto mais à esquerda os autovalores de  $G$  estiverem, uma vez que eles se localizam em  $\mathbb{C}^-$ , mais rápidas serão as convergências. A matriz  $G$  deve satisfazer a equação (2.18) das relações fundamentais do observador, e se após

essa restrição ser atendida, ainda for possível escolher arbitrariamente os autovalores de  $G$ , então a convergência do observador será arbitrariamente designada.

A seguir, um exemplo que permitirá visualizar como o desempenho da estimação depende da dinâmica da matriz  $G$ .

EXEMPLO 2.3: *Utilizando a mesma planta do exemplo 2.2:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0] x(t) \end{cases}$$

*O observador projetado tinha as seguintes equações:*

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t) \end{cases}$$

*Este observador tem o seu desempenho caracterizado por autovalores em  $-1$ . Aplicando um degrau unitário na entrada,  $u(t) = 1(t)$ , escolhendo condições iniciais  $x_0$  e  $z_0$  nulas e  $m_{11} = m_{21} = 1$ , verifica-se por simulação (ou por alguns cálculos simples) que o observador tem um funcionamento perfeito:  $w(t) - x(t) = 0 \ \forall t$ .*

*Quando  $T x_0 \neq z_0$ , observa-se o caráter assintótico da estimação. Para isso, seja então  $z_0 = [-1 \ -2]^T$  e  $x_0 = [2 \ 1]^T$ . Nas figuras 2.7(a) e 2.7(b) pode-se observar o comportamento das variáveis de estado reais,  $x_1$  e  $x_2$  e das estimadas  $w_1$  e  $w_2$ . As variáveis estimadas tendem para as variáveis reais, como deveriam.*

*Refazendo os cálculos do exemplo anterior para  $G$  com autovalores em  $-5$ , encontram-se as seguintes equações dinâmicas:*

$$\begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -17 \\ -17 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} y(t) \end{cases}$$

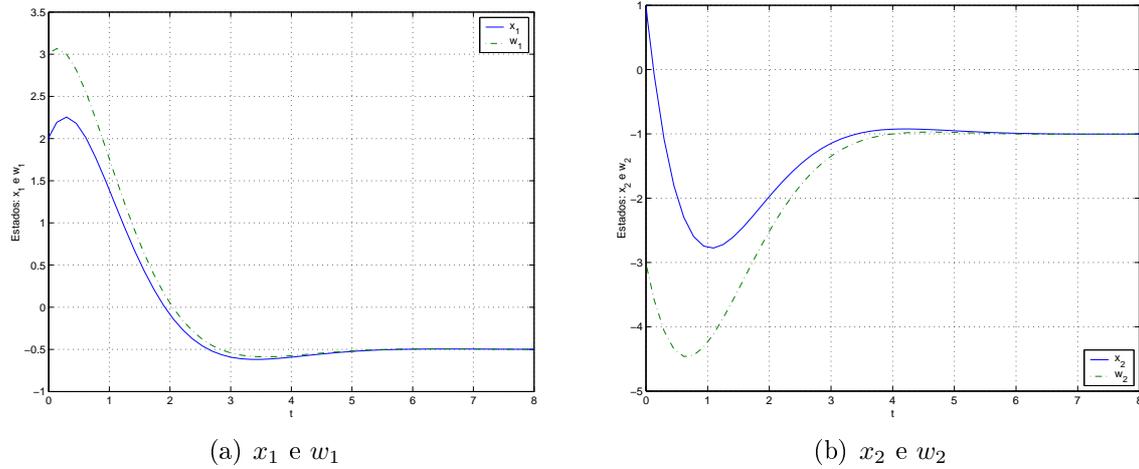


Figura 2.7: Variáveis de estado com os pólos em  $-1$

Manteve-se a entrada, os valores escolhidos para as condições iniciais e os valores de  $m_{11}$  e  $m_{21}$ . Em seguida, simulou-se novamente a fim de se fazer uma comparação entre os desempenhos resultantes obtidos nos diferentes projetos. Nas figuras 2.8(a) e 2.8(b) pode-se observar que ao se colocar os autovalores de  $G$  mais à esquerda no plano  $\mathbb{C}^-$  a velocidade de convergência aumenta.

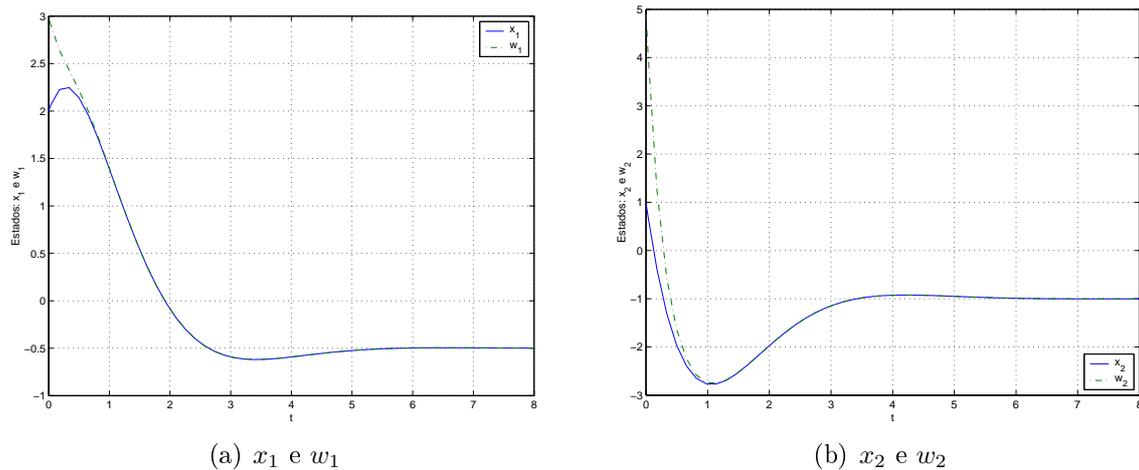


Figura 2.8: Variáveis de estado com os pólos em  $-5$

É importante ressaltar que deve-se ter cautela ao escolher os autovalores de  $G$ .

Quando o espectro do observador pode ser livremente escolhido, a tendência natural é a de colocar os autovalores o máximo possível à esquerda, a fim de garantir uma convergência mais rápida. Tal procedimento, entretanto, pode causar problemas associados a ganhos elevados, tais como saturação de componentes, picos indesejados nos transitórios, amplificação de ruídos etc.

### 2.4.2 Observadores de Ordem Mínima

Para uma planta  $\mathcal{P} = \langle A, B, C \rangle$  cada conjunto  $\mathcal{O} = \langle T, G, H, J, M, N \rangle$  com matrizes escolhidas convenientemente diz respeito a um observador distinto. Pode-se pensar em qual seria a mínima ordem possível para os observadores de uma planta, ou seja, qual o valor inteiro mínimo para  $o$  que satisfaz as relações fundamentais do observador.

**COROLÁRIO 2.1** A ordem mínima necessária para um observador estimar o estado de uma planta é  $n - r$ , onde  $r$  representa o número de variáveis de saída da planta.

**DEMONSTRAÇÃO:** Pode-se reescrever a equação (2.20) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} = I_n \quad (2.44)$$

A álgebra matricial tem um resultado clássico que nos diz que *o posto de um produto de matrizes é sempre menor ou igual ao posto dos fatores*, ou seja,

$$\begin{aligned} X &= W Z \\ &\Downarrow \\ \rho(X) &\leq \min\{\rho(W), \rho(Z)\} \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\rho \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \geq \rho(I_n) = n$$

Mas a matriz  $[M \ N]$  tem  $o + r$  colunas, então

$$o + r \geq \rho[M \ N] \geq n \quad (2.45)$$

o que leva a:  $o \geq n - r$  □

Por definição as  $r$  variáveis de saída são combinações lineares das variáveis de estado, portanto é natural supor que não haja necessidade de estimar  $r$  variáveis de estado, uma vez que podem ser obtidas diretamente através das medidas de  $y$ . Assim, basta construir um observador para as  $n - r$  componentes de  $x$  que restam. A seguir, um exemplo simples para ilustrar este corolário.

EXEMPLO 2.4: *Seja a mesma planta  $\mathcal{P}$  dos exemplos 2.2 e 2.3 modelada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]$$

*No exemplo 2.2 um observador de ordem  $o = n = 2$  foi projetado, agora através das mesmas relações fundamentais do observador será projetado um de ordem mínima, ou seja,  $o = n - r = 1$ . Da mesma forma que anteriormente, escolhe-se  $G = -1$ ; a partir de  $T$  e  $J$  literais a equação (2.18) fica*

$$[t_{11} \ t_{12}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - (-1) [t_{11} \ t_{12}] = (j_1) [1 \ 0]$$

$$[t_{11} - 2t_{12} \ t_{11} - t_{12}] = [j_1 \ 0]$$

*Esta expressão fornece as restrições:  $t_{12} = t_{11}$  e  $j_1 = t_{11} - 2t_{12} = -t_{11}$ . Logo,*

$$T = [t_{11} \ t_{11}]; \quad J = -t_{11}; \quad H = TB = -2t_{11};$$

*Aplicando  $M$  e  $N$  literais na equação (2.19), temos*

$$MT = I_2 - NC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} [1 \ 0]$$

$$MT = \begin{bmatrix} 1 - n_1 & 0 \\ -n_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como as colunas de  $T$  são idênticas, as de  $MT$  também devem ser, logo:

$$\begin{cases} 1 - n_1 = 0 \\ n_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

exatamente como no caso do exemplo 2.2. Resolvendo a equação (2.19), fica:

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} m_{11} t_{11} = 0 \\ m_{21} t_{11} = 1 \end{cases}$$

A partir das restrições fornecidas acima conclui-se que  $m_{11} = 0$  ou  $T$  seria nula; já a segunda restrição admite várias soluções. Suponha, então, que  $t_{11} = 1$ , logo  $m_{21} = 1$ . Dessa forma, o observador tem as seguintes matrizes:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad G = -1; \quad H = -2; \quad J = -1;$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e seria implementado por:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -z(t) - 2u(t) - y(t); \\ w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t) \end{cases}$$

Analisando as equações dinâmicas do observador, observa-se que a componente  $w_1$  é idêntica à saída  $y$ , o que demonstra que de fato o estimador pode ter ordem mínima pois não há necessidade de estimar um sinal mensurável. A fim de comparar os resultados obtidos neste exemplo com os do exemplo 2.3, serão simulados os observadores com dinâmica em  $-1$  e  $-5$ .

Refazendo os cálculos para o observador mínimo com polos em  $-5$ , encontra-se

as seguintes equações dinâmicas:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -5z(t) - 6u(t) - 17y(t); \\ w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} y(t) \end{cases}$$

Da mesma forma que no exemplo 2.3, foi utilizada uma entrada em degrau unitário e as mesmas condições iniciais. Nas figuras 2.9(a) e 2.9(b) pode-se novamente perceber que o observador com autovalores em  $-1$  é mais lento que o com autovalores em  $-5$ . Note que as variáveis  $x_1$  e  $w_1$  não são mostradas já que elas são mensuráveis.

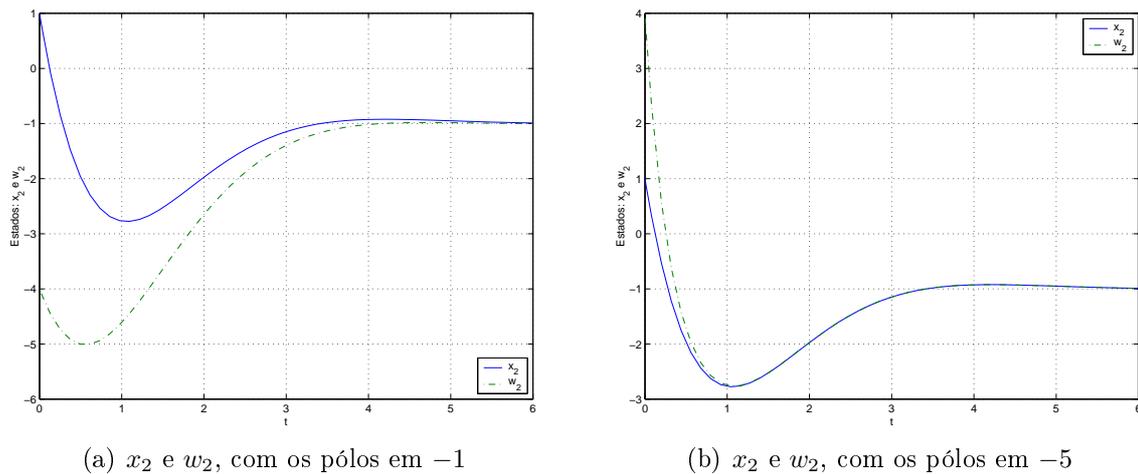


Figura 2.9: Variáveis de estado

### 2.4.3 Separação de Estados

Normalmente os problemas de controle requerem uma realimentação de estado, ou seja, uma lei de controle do tipo  $u = Fx + v$ , onde  $x$  é o estado da planta. Na prática consegue-se implementar a lei  $u = Fw + v$ , onde  $w$  é a saída mensurável de um observador. Idealmente, as condições iniciais seriam adequadas ( $z_0 = Tx_0$ ),  $w(t) = x(t) \forall t$  e os resultados seriam exatamente iguais aos teóricos.

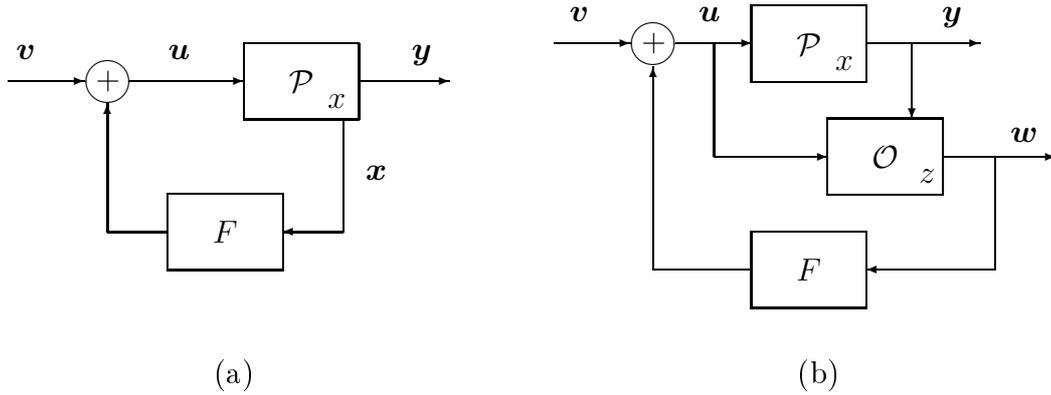


Figura 2.10: Diagramas de blocos da realimentação de estado: (a) situação desejável; (b) situação real

Deve-se, porém, levar em consideração que as condições iniciais podem ser desfavoráveis, e neste caso  $w(t)$  apenas tenderá assintoticamente para  $x(t)$ . Assim, deve-se estudar qual será o efeito de se substituir o estado real pelo observado na lei de controle. Novos elementos dinâmicos serão introduzidos na malha de controle e até o momento a teoria não assegura que o comportamento dos sinais  $x$  e  $y$  será semelhante após a introdução no sistema da lei de controle, somente garante que  $w(t) \rightarrow x(t)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Na figura 2.10 podem ser observados dois diagramas de blocos que ilustram as duas situações, a desejável e a real que pode ser construída na prática.

Seja a planta  $\mathcal{P}$  e um observador qualquer  $\mathcal{O}$ :

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t); \quad x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = G z(t) + H u(t) + J y(t) \\ w(t) = M z(t) + N y(t); \quad z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

O sistema global constituído por  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{O}$  pode ser descrito pelas seguintes equações dinâmicas:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ J C & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ H \end{bmatrix} u \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \\ w = [N C \quad M] \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

A partir das equações do sistema global verifica-se que realimentar o estado significa usar a lei:

$$\begin{aligned} u &= F w + v \\ &= F (M z + N C x) + v \\ &= F N C x + F M z + v \end{aligned} \quad (2.46)$$

Portanto, a equação dinâmica da malha fechada fica:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B F N C & B F M \\ J C + H F N C & G + H F M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ H \end{bmatrix} v \quad (2.47)$$

A mudança de base a seguir permitirá uma melhor visualização das propriedades da equação acima.

$$p = Q \tilde{p} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ T & I_o \end{bmatrix} \tilde{p}, \quad p = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

onde  $p$  é o estado expandido composto por  $x$  e por  $z$ . Portanto,

$$\tilde{p} = Q^{-1} p = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -T & I_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z - T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Desta forma, a equação dinâmica da malha fechada passaria a ser descrita por

$$\dot{\tilde{p}} = Q^{-1} \begin{bmatrix} A + B F N C & B F M \\ J C + H F N C & G + H F M \end{bmatrix} Q \tilde{p} + Q^{-1} \begin{bmatrix} B \\ H \end{bmatrix} v$$

Aproveitando as propriedades estruturais da matriz  $Q$  escolhida, o desenvolvimento dos produtos acima fica:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B F & B F M \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ w = [I \ M] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.49)$$

Como foi dito anteriormente, as propriedades dinâmicas do sistema expandido planta + observador + lei de controle  $u = F w + v$  são realçadas com esta mudança

de base. É importante notar que o espectro da malha fechada é a união do espectro desejado com o espectro do observador, ou seja,

$$\lambda(A_e) = \lambda(A + BF) \cup \lambda(G) \quad (2.50)$$

A lei de controle que se deseja implementar,  $u = Fx + v$ , iria interagir com a dinâmica da planta fazendo com que o comportamento da malha fechada fosse descrito pelos autovalores da matriz  $A + BF$ . A lei de controle que se consegue implementar na prática,  $u = Fw + v$ , é capaz de impor à malha fechada os autovalores de  $A + BF$ , porém além destas características dinâmicas desejadas a dinâmica do observador também fará parte da malha fechada. A presença dos autovalores de  $G$  na dinâmica final não causa problemas no comportamento do sistema, uma vez que os observadores são sistemas projetados estáveis. Além disso, pode-se observar pelas equações dinâmicas (2.49) que existe uma “separação” entre os comportamentos dos sistemas envolvidos.

As equações dinâmicas (2.49) mostram que o sinal  $e = z - Tx$  é incontrolável por  $u$ , ou seja, a matriz de transferência relacionando  $y$  e  $v$  é:

$$Y(s) = C(sI - A - BF)^{-1}BV(s) \quad (2.51)$$

Esta equação poderia levar a concluir que o observador não influencia a malha fechada e que o efeito da lei de controle seria absolutamente igual quer pudéssemos medir integralmente o estado quer usássemos um estimador. A realidade não é bem assim, o uso de observadores permite atingir efeitos globais desejados, mas distorce os sinais envolvidos. Para conciliar esta última expressão com a realidade, lembremos que a matriz de transferência acima descreve o comportamento da malha fechada quando as condições iniciais são nulas:  $x_0 = e_0 = 0$ . Mas isto apenas durante o transitório, ao longo do tempo esta ação diminui e a convergência assintótica às curvas ideais é preservada.

O exemplo 2.5 exemplifica as diferenças entre a montagem de uma lei de controle ideal e uma implementação através de um observador.

EXEMPLO 2.5: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  modelada por:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]; \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

*Esta planta é instável, mas controlável. Escolhendo os autovalores da malha fechada em  $-1 \pm j$  e colocando a malha aberta na forma canônica apropriada, facilmente se obtém a lei de controle  $u = Fx = [1 \ 2]$  que estabiliza a planta. As equações obtidas são:*

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x} = (A + BF)x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t); \\ y = Cx(t) = [1 \ 0] x(t) \\ x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

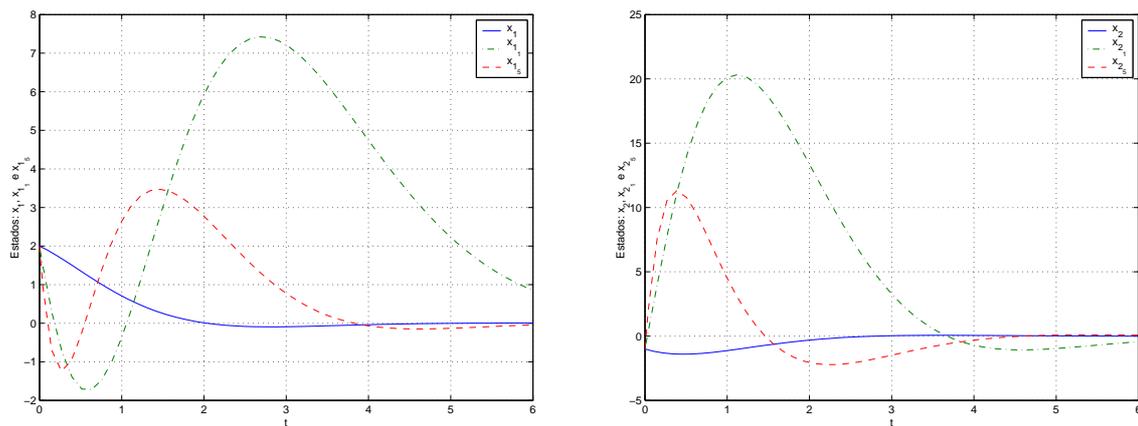
*A seguir aplicou-se o método de projeto apresentado anteriormente para se obter um observador de estado para a planta, com dinâmica caracterizada por autovalores em  $-1$ .*

$$\mathcal{O}_1 \begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} y(t) \quad \text{e } z_0 = 0 \end{cases}$$

*Este observador é lento, uma vez que seus autovalores são iguais à parte real dos autovalores que se deseja impor à planta. Um observador com a dinâmica dada por autovalores em  $-5$  é mais rápido, como o observador a seguir:*

$$\mathcal{O}_5 \begin{cases} \dot{z} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 24 \\ 37 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} y(t) \quad \text{e } z_0 = 0 \end{cases}$$

Em seguida foram feitas as simulações dos três sistemas em malha fechada: em condições ideais com o controle  $u = F x$ ; em condições reais com o controle  $u = F w$ , através de dois observadores com dinâmicas diferentes. Nos gráficos 2.11(a) e 2.11(b) aparecem as variáveis de estados nessas três situações.



(a) Variáveis de estado para: condições ideais  $x_1$ , observador com os pólos em  $-1$ ,  $x_{1_1}$  e observador com os pólos em  $-5$ ,  $x_{1_5}$

(b) Variáveis de estado para: condições ideais  $x_2$ , observador com os pólos em  $-1$ ,  $x_{2_1}$  e observador com os pólos em  $-5$ ,  $x_{2_5}$

Figura 2.11: Desempenho do sistema realimentado em malha fechada

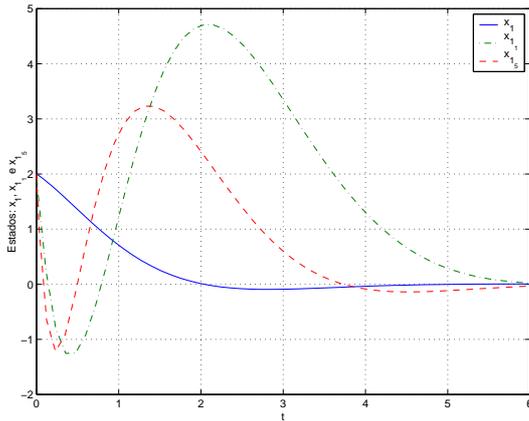
O desempenho do observador com autovalores em  $-5$  é melhor que o observador com autovalores em  $-1$ , já que as variáveis se aproximam mais rapidamente das curvas ideais. Entretanto, mesmo com este desempenho melhor, na parte transitória do gráfico vê-se que a amplitude de pico pode ser inaceitável em certas aplicações práticas. Claro que um ajuste nas condições iniciais do observador poderiam melhorar o desempenho, mas para isso as condições iniciais da planta deveriam ser conhecidas o que nem sempre é possível. Existe, também, a possibilidade de se alterar os autovalores do observador através de técnicas de Controle Linear Quadrático. Outra opção são os observadores mínimos, uma vez que eles permitem estimativas perfeitas para algumas variáveis de estado, o que poderia ser suficiente para ao menos minimizar o problema detectado.

Para concluir este exemplo serão simulados os observadores mínimos com autovalores em  $-1$  e em  $-5$ , cujas equações estão a seguir:

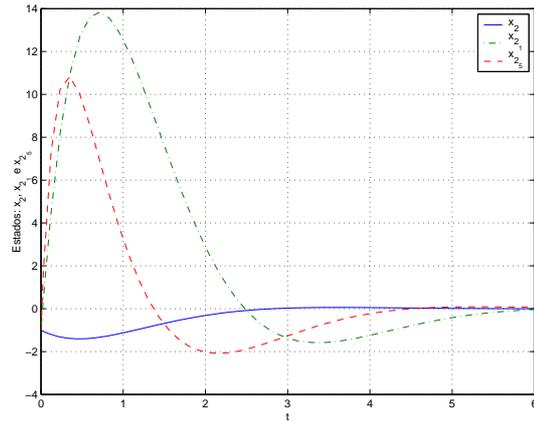
$$\mathcal{O}_{m^1} \begin{cases} \dot{z} = -z(t) + 2u(t) + y(t); \\ w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} y(t) \end{cases}$$

$$\mathcal{O}_{m^5} \begin{cases} \dot{z} = -5z(t) + 6u(t) + 37y(t); \\ w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix} y(t) \end{cases}$$

As simulações podem ser observadas nas figuras 2.12(a) e 2.12(b).



(a) Variáveis de estado para: condições ideais  $x_1$ , observador mínimo com os pólos em  $-1$ ,  $x_{11}$  e com os pólos em  $-5$ ,  $x_{15}$



(b) Variáveis de estado para: condições ideais  $x_2$ , observador mínimo com os pólos em  $-1$ ,  $x_{21}$  e com os pólos em  $-5$ ,  $x_{25}$

Figura 2.12: Desempenho do sistema realimentado em malha fechada

As amplitudes do transitório foram realmente reduzidas, e o comportamento global do sistema se tornou mais aceitável. Nota-se que a inclusão de um observador na malha de controle afetou os sinais. Como o efeito ocorre somente no transitório e diminui ao longo do tempo, a convergência assintótica é preservada.

O objetivo deste exemplo 2.5 foi demonstrar a validade do uso de observadores em leis de controle, e não comparar tipos diferentes de projeto. Deve-se, entretanto,

*notar que os observadores mínimos geram estimativas perfeitas para algumas variáveis e são opções interessantes.*

#### 2.4.4 Robustez

Imperfeições práticas inevitáveis fazem com que seja impossível construir um modelo com os parâmetros idênticos aos de projeto. As causas das imperfeições podem ser erros na identificação da planta já que os métodos disponíveis de identificação são imperfeitos ou os componentes podem ter seus valores numéricos alterados por envelhecimento, ou por efeito do calor ou da umidade, ou ainda por vários outros motivos possíveis.

Na maioria das vezes as diferenças são pequenas, mas mesmo assim é necessário verificar se esse sistema imperfeito é capaz de continuar estimando, ou seja, como não se tem garantia de um comportamento adequado do erro, a saída  $w$  do observador pode não ser a reconstrução do estado da planta  $x$ .

Dessa forma, seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita pelas matrizes nominais  $\langle A_0, B_0, C_0 \rangle$  para a qual foi projetado um observador  $\mathcal{O}$  caracterizado pelas matrizes de projeto  $\langle G_0, H_0, J_0, M_0, N_0 \rangle$ , logo as relações fundamentais do observador fornecidas nas equações (2.18) a (2.21) ficam:

$$T A_0 - G_0 T = J_0 C_0 \quad (2.52)$$

$$T B_0 = H_0 \quad (2.53)$$

$$M_0 T + N_0 C_0 = I_n \quad (2.54)$$

$$\lambda(G_0) \subset \mathbb{C}^- \quad (2.55)$$

Definindo  $V_0$  como o valor de projeto, ou nominal, de uma dada grandeza, o seu valor real ou efetivo  $V$  será diferente de  $V_0$  devido às imperfeições citadas acima. Portanto,  $V = V_0 + \delta V$  e a perturbação  $\delta V$  deve ter sempre as mesmas dimensões

de  $V_0$ . Já que o observador é construído com componentes reais, a seguir aplica-se a definição de perturbação aos seus parâmetros:

$$G = G_0 + \delta G$$

$$H = H_0 + \delta H$$

$$J = J_0 + \delta J$$

$$M = M_0 + \delta M$$

$$N = N_0 + \delta N$$

Da mesma forma, a planta tem seus valores incertos,

$$A = A_0 + \delta A$$

$$B = B_0 + \delta B$$

$$C = C_0 + \delta C$$

Quando se fala em utilizar componentes precisos na implementação, ou que se tem um modelo confiável, isto significa que as perturbações  $\delta A$ ,  $\delta B$ ,  $\delta C$ ,  $\delta G$ ,  $\delta H$ ,  $\delta J$ ,  $\delta M$  e  $\delta N$  são “pequenas”. Porém dizer apenas que são “pequenas” é muito vago, e para tornar esta linguagem mais precisa será considerada a classe das perturbações.

Sendo  $\epsilon > 0$ , o símbolo  $\Omega_V(\epsilon)$  denota a classe de perturbações cujos elementos são, em módulo, estritamente menores do que  $\epsilon$ :

$$\Omega_V(\epsilon) = \{\delta V : \forall i, j \quad |(\delta V)_{ij}| < \epsilon\} \quad (2.56)$$

Para melhor elucidar este conceito será enunciado um conhecido resultado da teoria matricial, baseado no fato de que os autovalores de uma matriz quadrada são funções contínuas dos seus elementos.

**TEOREMA 2.3** Sendo  $M_0$  uma matriz quadrada real com  $\lambda(M_0) \subset \mathbb{C}^-$  então existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\lambda(M_0 + \delta M) \subset \mathbb{C}^-$  para perturbações  $\delta M \in \Omega_V(\epsilon)$ .

Este resultado diz que se os elementos de uma matriz “estável” forem submetidos a perturbações que estejam dentro de certos limites, então a matriz resultante permanecerá “estável”. O cálculo do valor máximo de  $\epsilon$  que ainda preserva a propriedade está associado à determinação do raio da hipersfera de estabilidade.

A fim de verificar se um observador  $\langle G_0, H_0, J_0, M_0, N_0 \rangle$  projetado para a planta  $\langle A_0, B_0, C_0 \rangle$ , cuja construção terá valores reais  $\langle G, H, J, M, N \rangle$  e a planta real é descrita por  $\langle A, B, C \rangle$ , terá um desempenho ainda satisfatório serão analisadas a seguir as relações fundamentais do observador. Primeiramente se verifica se mesmo com as perturbações as relações ainda são satisfeitas.

$$T(A_0 + \delta A) - (G_0 + \delta G)T = (J_0 + \delta J)(C_0 + \delta C) \quad (2.57)$$

$$T(B_0 + \delta B) = (H_0 + \delta H) \quad (2.58)$$

$$(M_0 + \delta M)T + (N_0 + \delta N)(C_0 + \delta C) = I_n \quad (2.59)$$

$$\lambda(G_0 + \delta G) \subset \mathbb{C}^- \quad (2.60)$$

O teorema 2.3 garante a validade da equação (2.60) para perturbações adequadas de  $\delta G$ . Para que as equações (2.57) a (2.59) continuem sendo satisfeitas é necessário e suficiente que:

$$T(\delta A) - (\delta G)T = J_0(\delta C) + (\delta J)C_0 + (\delta J)(\delta C) \quad (2.61)$$

$$T(\delta B) = \delta H \quad (2.62)$$

$$(\delta M)T + N_0(\delta C) + (\delta N)C_0 + (\delta N)(\delta C) = 0 \quad (2.63)$$

A partir das relações obtidas nas equações (2.61) a (2.63), conclui-se que as relações fundamentais do observador permanecem válidas desde que as perturbações satisfaçam um conjunto bem definido de restrições. Sabe-se, entretanto, que na prática os parâmetros variam de maneira arbitrária, portanto pode-se estabelecer o fato a seguir.

FATO 2.1 As relações fundamentais do observador dadas pelas equações (2.52), (2.53) e (2.54) deixam de ser satisfeitas para quase todas perturbações  $\delta G$ ,  $\delta H$ ,  $\delta J$ ,  $\delta M$  e  $\delta N$  dos valores de projeto e  $\delta A$ ,  $\delta B$  e  $\delta C$  dos valores nominais.

A fim de ilustrar a capacidade de um observador para estimar o estado de uma dada planta na presença de perturbações nos parâmetros, o exemplo a seguir terá o erro de estimação para  $t \rightarrow \infty$  como a medida do seu comportamento, ou seja, se  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  a estimação é válida, se  $\varepsilon(t)$  não se anula mas permanece limitado a estimação pode ou não ser aceita, e se o erro cresce indefinidamente há uma falha total na estimação.

EXEMPLO 2.6: *Seja a planta:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0] x(t) \\ x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

para a qual se projeta o estimador:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = G_0 z(t) + H_0 u(t) + J_0 y(t) \\ w(t) = M_0 z(t) + N_0 y(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (2.64)$$

com valores nominais dados por:

$$\begin{aligned} G_0 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; & H_0 &= \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}; & J_0 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \\ M_0 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; & N_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; & z_0 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

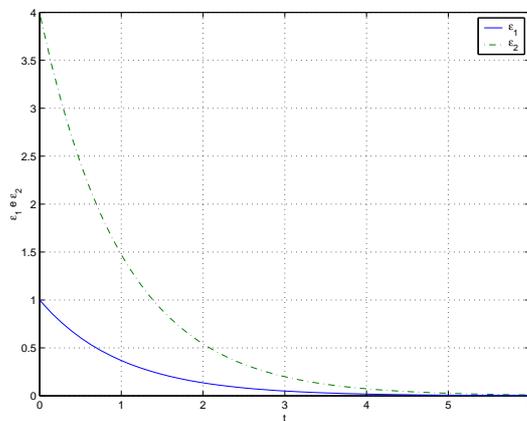
O observador tem dinâmica caracterizada pelos autovalores em  $-1$  e deve estimar os estados da planta para uma entrada igual ao degrau unitário  $u(t) = 1(t)$ . Suponha que o sistema efetivamente construído tem apenas o elemento  $j_{11}$  com seu valor alterado, porém por um valor desprezível. Dessa forma, os parâmetros do observador

são:

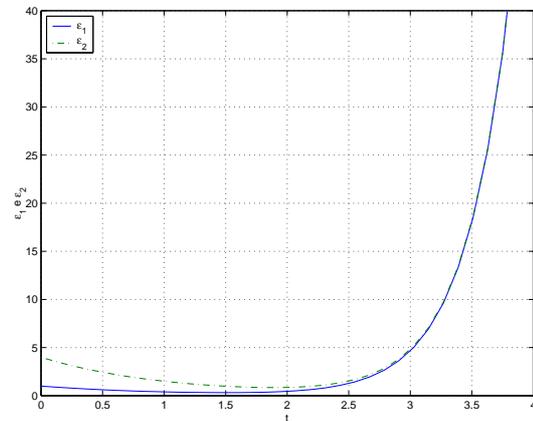
$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -0,99 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix};$$

As figuras 2.13(a) e 2.13(b) mostram o comportamento do erro de estimação  $\varepsilon(t) = w(t) - x(t)$ , obtido por simulação.



(a) Observador nominal



(b) Observador perturbado

Figura 2.13: Comportamento do erro de estimação

Observa-se que o erro do observador nominal tende para zero, ou seja, a estimação é perfeita como o esperado, porém o erro do observador com valores perturbados diverge e qualquer possibilidade de estimação se perde. A seguir será considerada a planta dos exemplos anteriores:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0] x(t) \\ x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

O observador projetado obedecia as mesmas equações mostradas em (2.64) com os seguintes valores nominais:

$$G_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad H_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad J_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad N_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix};$$

O observador também tem dinâmica caracterizada pelos autovalores em  $-1$  e para uma entrada igual ao degrau unitário  $u(t) = 1(t)$  foi visto no exemplo 2.3 que as variáveis  $w_1$  e  $w_2$  estimam as variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , ou seja, o erro de estimação tende assintoticamente para zero. Suponha agora, que no sistema efetivamente construído existem perturbações consideráveis, onde os valores nominais variam de 50% a 100%, incluindo a perda de um componente, o  $j_{21}$ . Note que, os zeros da matriz  $G$  e o da  $M$  foram mantidos, pois supõe-se que elementos nulos indicam a ausência de um elemento físico cujo valor possa sofrer alteração. Portanto, os parâmetros do observador são:

$$G = \begin{bmatrix} -1,5 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} -1,7 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} 1,1 & -0,8 \\ 0,5 & 0 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1,3 \\ -1,1 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix};$$

As figuras 2.14(a) e 2.14(b) mostram o comportamento do erro de estimação  $\varepsilon(t) = w(t) - x(t)$ , obtido por simulação.

O comportamento deste observador perante as perturbações dos parâmetros de projeto pode ser considerado aceitável: apesar de o erro deixar de tender a zero ele se mantém limitado. É razoável especular que, para este particular exemplo, se fossem perturbações mais suaves (da ordem de 10 % como é comum na prática), este erro convergiria para valores próximos de zero e o observador com parâmetros perturbados teria um desempenho bem próximo do normal.

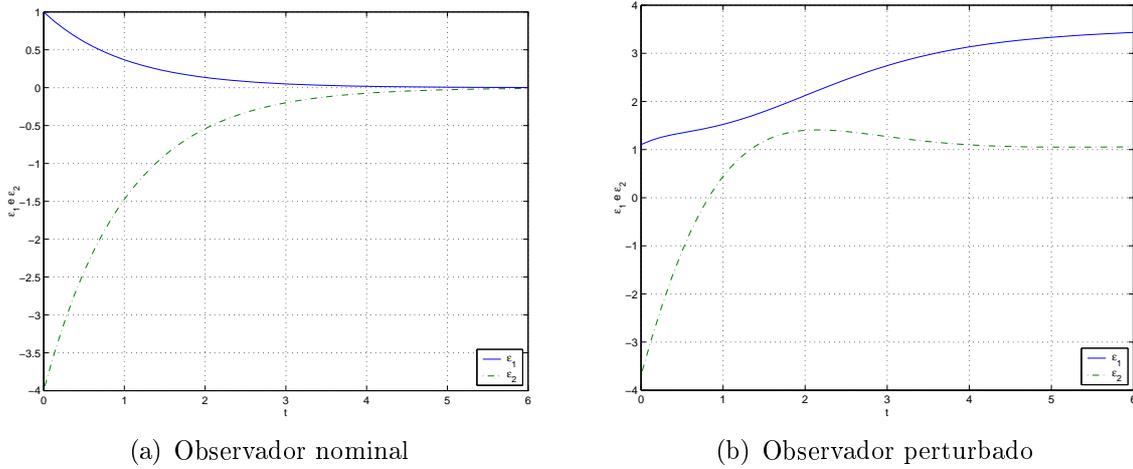


Figura 2.14: Comportamento do erro de estimação

*Na primeira parte deste exemplo, uma perturbação mínima em apenas um elemento da implementação causou um comportamento inaceitável para um observador real. Já na segunda parte, para perturbações exageradas os efeitos foram menores e até mesmo aceitáveis.*

Este exemplo permitiu visualizar a seguinte conclusão: mudanças nos valores de projeto de um observador podem alterar a sua capacidade de estimar os estados. Existem casos em que o erro de estimação deixa de ser nulo, mas permanece limitado; em outras situações, o observador com parâmetros perturbados perde completamente a capacidade de estimar.

Para uma análise mais detalhada, seja a planta  $\mathcal{P}$  modelada por  $\langle A_0, B_0, C_0 \rangle$  cujos parâmetros se supõe fixos, e um observador com a seguinte implementação real:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = (G_0 + \delta G) z(t) + (H_0 + \delta H) u(t) + (J_0 + \delta J) y(t) \\ w(t) = (M_0 + \delta M) z(t) + (N_0 + \delta N) y(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (2.65)$$

onde os valores nominais  $\langle G_0, H_0, J_0, M_0, N_0 \rangle$  satisfazem as relações fundamentais do observador. Aproveitando os desenvolvimentos teóricos da seção 2.4, temos a ex-

pressão (2.26) que pode ser reescrita como:  $\varepsilon(t) = M^+ e(t)$  que relaciona o erro de estimação  $\varepsilon(t)$  ao erro de operação, expressão (2.27):  $e(t) = z(t) - T x(t)$ . Como, por hipótese, as colunas de  $M$  são linearmente independentes,  $\varepsilon(t)$  tende a zero se e somente se  $e(t)$  também tender a zero. Derivando-se a expressão de  $e(t)$  e substituindo-se as equações (2.52) e (2.53) temos

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= \dot{z} - T \dot{x} \\
 &= (G_0 + \delta G) z + (H_0 + \delta H) u + (J_0 + \delta J) y - T (A_0 x + B_0 u) \\
 &= (G_0 + \delta G) z + (H_0 + \delta H - T B_0) u + (J_0 C_0 + (\delta J) C_0 - T A_0) x \\
 \\
 \dot{e} &= G_0 z + (\delta G) z + (\delta H) u + (\delta J) C_0 x - G_0 T x \\
 &= G_0 e + (\delta G) z + (\delta H) u + (\delta J) C_0 x
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Como estamos supondo que  $\delta A = \delta B = \delta C = 0$ , as equações (2.61) a (2.63) ficam:

$$(\delta G) T + (\delta J) C_0 = 0 \tag{2.67}$$

$$\delta H = 0 \tag{2.68}$$

$$(\delta M) T + (\delta N) C_0 = 0 \tag{2.69}$$

Admitindo-se que as restrições (2.67) a (2.69) são satisfeitas, então o erro de operação passa a ser descrito como

$$\begin{aligned}
 \dot{e}(t) &= G_0 e(t) + (\delta G) z(t) - (\delta G) T x(t) \\
 \dot{e}(t) &= (G_0 + \delta G) e(t)
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Já que por projeto  $G_0$  é estável o teorema 2.3 garante que  $G_0 + \delta G$  também será, para perturbações  $\delta G$  razoáveis. Entretanto, no mundo real não se pode garantir nada a respeito das perturbações e portanto deve-se considerar a expressão completa obtida na equação (2.66).

Portanto, pode-se garantir que:

- sendo os sinais  $z(t)$ ,  $u(t)$  e  $x(t)$  limitados, o sinal  $e(t)$  também será, já que  $G_0$  é estável;
- se os sinais  $z(t)$ ,  $u(t)$  e  $x(t)$  tendem a valores de regime constantes, o sinal  $e(t)$  também tenderá;
- se as perturbações  $\delta G$ ,  $\delta H$  e  $\delta J$  forem “pequenas” pode-se admitir que  $e(t)$  e  $\varepsilon(t)$  tenderão para valores de regime próximos de 0, isto é, o observador é pouco sensível;
- quando algum (ou vários) dos sinais  $z(t)$ ,  $u(t)$  e  $x(t)$  crescem indefinidamente, os sinais  $e(t)$  e  $\varepsilon(t)$  também crescerão indefinidamente, exceto por alguns casos muito particulares.

A respeito dos casos particulares mencionados acima, em que os sinais  $e(t)$  e  $\varepsilon(t)$  não crescerão indefinidamente, considere uma planta instável com uma condição inicial  $x_0$  que faz com que  $x(t) \rightarrow \infty$ . A única possibilidade de este sinal não influenciar  $e(t)$  fazendo-o crescer indefinidamente também, será forçar as matrizes  $G_0$  e  $(\delta J)C_0$  a formar um par incontrolável. Sendo a controlabilidade uma propriedade genérica, isto só irá acontecer para alguns valores especiais da perturbação; e ainda como as perturbações são imprevisíveis e arbitrárias, então é impossível de se construir um observador nestas condições.

O mais comum é considerar a perturbação na planta, já que os métodos de identificação são imperfeitos. Como os observadores podem ser implementados em um computador digital, considera-se que os parâmetros de projeto são perfeitos.

### 2.4.5 Monitores e Compensadores

Existem observadores que são construídos com a única finalidade de fornecer uma cópia visualizável de variáveis de estado remotas ou inacessíveis, estes são conhecidos como *Monitores de Estados*. Normalmente a saída  $w(t)$  de um monitor de estados é utilizada em tempo real a fim de acompanhar a evolução do processo ou sistema, fornecendo aos operadores informações úteis sobre o desempenho e que podem influenciar e facilitar a tomada de decisões. Os desenvolvimentos anteriores indicam que o funcionamento dos monitores de estado é bastante sensível a variações nos valores nominais de modelagem e de projeto. Um estudo teórico pode ser feito para prever com mais exatidão as situações perigosas e para construir artefatos mais robustos, na medida do possível. Isto não será feito aqui porque, do ponto de vista de Controle, os observadores são utilizados para funções diferentes das de apenas monitorar estados.

Em Controle os observadores são utilizados para viabilizar a realimentação do estado  $x$  imensurável através do seu substituto  $w$ , implementando-se a lei  $u = Fw + v$ , como mostrado na subseção 2.4.3. Analisando-se a figura 2.15 que contém o mesmo diagrama apresentado na figura 2.10 (b) percebe-se que o sinal  $w$  é multiplicado pela matriz  $F$  e injetado no somador inicial, estabelecendo um caso básico de realimentação. É bem sabido do Controle Clássico que realimentações negativas da resposta têm a tendência de tornar os sistemas de malha fechada menos sensíveis a perturbações. Ainda de acordo com a subseção 2.4.3, o diagrama de malha fechada 2.15 pode ser descrito pelas equações (2.49) repetidas aqui com os valores nominais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 F_0 & B_0 F_0 M_0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix} v \\ y = [C_0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad w = [I \ M_0] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.71)$$

A entrada de referência  $v$  pode ser considerada nula, uma vez que estamos inte-

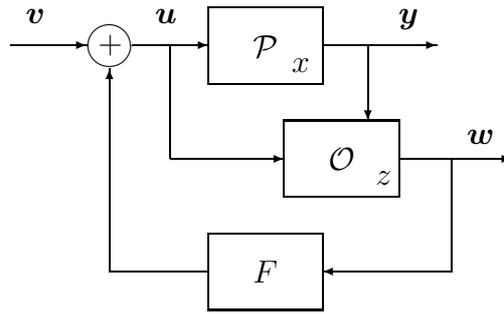


Figura 2.15: Diagrama de blocos da realimentação de estado, mostrado na figura 2.10 (b) da subseção 2.4.3

ressados na estabilidade do sistema, portanto o sistema pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 F_0 & B_0 F_0 M_0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Se a realimentação de estados é calculada para estabilizar a malha fechada, tem-se  $\lambda(A_0 + B_0 F_0) \subset \mathbb{C}^-$ . Por projeto, os observadores são sistemas estáveis, sendo assim, o sistema expandido das equações (2.71) ou (2.72) é estável, pelo menos para valores nominais. Neste ponto o teorema 2.3 nos garante que:

**FATO 2.2** Quando um observador é usado como parte de uma lei de controle estabilizadora por realimentação de estados o sistema resultante é robusto, ou seja, permanece estável para perturbações nos valores de projeto ou modelados pertencentes a uma certa classe.

Os dispositivos utilizados para implementar leis de controle são chamados de **compensadores**; caso tenham como função principal a estabilização chamam-se de **compensadores estabilizadores** ou somente **estabilizadores**. Portanto, quando um observador faz parte de um compensador estabilizador por realimentação de estados a implementação será capaz de suportar perturbações. A seguir será desenvolvido um exemplo para ilustrar as conclusões mencionadas.

EXEMPLO 2.7: *Seja a planta:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0] x(t) \\ x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

para a qual se projeta o estimador:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = G_0 z(t) + H_0 u(t) + J_0 y(t) \\ w(t) = M_0 z(t) + N_0 y(t) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (2.73)$$

com valores nominais dados por:

$$\begin{aligned} G_0 &= \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}; & H_0 &= \begin{bmatrix} -13 \\ -13 \end{bmatrix}; & J_0 &= \begin{bmatrix} -78 \\ -78 \end{bmatrix}; \\ M_0 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; & N_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}; & z_0 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

A planta em questão é instável e, portanto, a função do observador como monitor fará com que o sistema seja muito sensível a perturbações. Uma realimentação  $u = F_0 x$  com  $F_0 = [74 \ 68]/13$  coloca os autovalores de  $A_0 + B_0 F_0$  em  $-4$ , estabilizando a malha fechada. Aplicando o desenvolvimento mostrado na subseção 2.4.3, temos as seguintes equações para o sistema expandido planta + observador + lei de controle, supondo a entrada de referência  $v$  nula:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 F_0 N_0 C_0 & B_0 F_0 M_0 \\ J_0 C_0 + H_0 F_0 N_0 C_0 & G_0 + H_0 F_0 M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

onde os valores nominais para a planta e para a lei de controle são fornecidos e supondo que as perturbações nestes dados são:

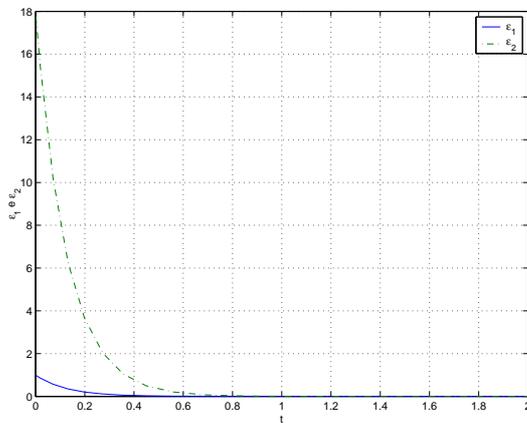
$$A = A_0 + \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 1,2 \\ 1,7 & 2,3 \end{bmatrix}; \quad B = B_0 + \delta B = \begin{bmatrix} 0,9 \\ -2,7 \end{bmatrix};$$

$$C = C_0 + \delta C = [0,9 \ 0]; \quad F = F_0 + \delta F = [59 \ 54] / 13;$$

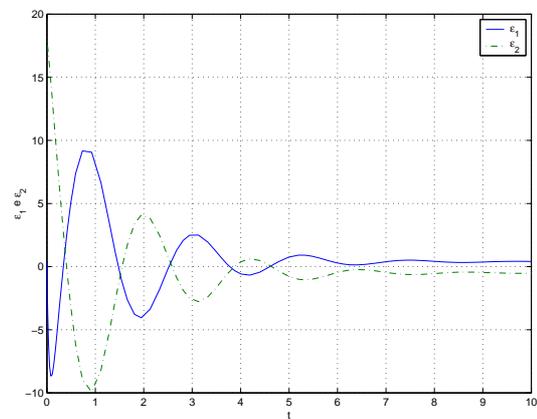
$$G = G_0 + \delta G = \begin{bmatrix} -7,6 & 0 \\ 0 & -7,5 \end{bmatrix}; \quad H = H_0 + \delta H = \begin{bmatrix} -12 \\ -11,7 \end{bmatrix};$$

$$J = J_0 + \delta J = \begin{bmatrix} -70,2 \\ -72 \end{bmatrix}; \quad M = M_0 + \delta M = \begin{bmatrix} 1,1 & -0,9 \\ 0,9 & 0 \end{bmatrix};$$

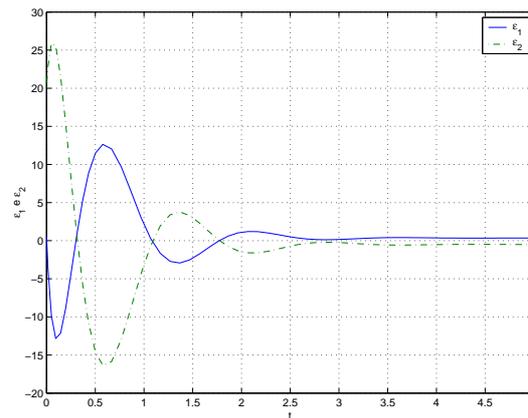
$$N = N_0 + \delta N = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 11 \end{bmatrix}; \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix};$$



(a) Observador nominal



(b) Planta perturbada



(c) Sistema perturbado (Observador + Planta)

Figura 2.16: Comportamento do erro de estimação

Os gráficos das figuras 2.16(a), 2.16(b) e 2.16(c) mostraram o comportamento

do erro de estimação  $\varepsilon(t) = w(t) - x(t)$ , obtido por simulação.

*Observa-se que o erro do observador nominal tende para zero, ou seja, a estimação é perfeita como esperado. Em seguida nas figuras 2.16(b) e 2.16(c) temos o comportamento do sistema perante as perturbações de todos os parâmetros e perante as perturbações nos parâmetros do observador e da matriz de realimentação  $F$ . Em ambas situações o observador consegue estimar. Note que as perturbações aplicadas no sistema não são tão suaves como ocorrem na prática (que são da ordem de 10%). Podemos concluir que quando um observador está inserido numa malha de controle, mesmo na presença de perturbações bruscas ele consegue atingir o objetivo de estimação dos estados.*

É razoável supor que podemos usar componentes de alta qualidade e precisão nas implementações dos observadores. Indo mais além, se o observador for implementado em um computador digital podemos até mesmo considerar uma implementação perfeita, pois os parâmetros de projeto não estão associados a grandezas físicas, e sim a dados de um programa, que uma vez digitados e armazenados podem ser considerados fixos e imperturbáveis.

A planta, por outro lado, está restrita a uma existência no mundo físico, com todas as suas imperfeições e parâmetros variantes. Mesmo supondo que os parâmetros da planta sejam fixos, não se pode ter certeza absoluta que seus valores nominais correspondem à realidade.

## 2.5 Conclusões

O desejo de implementar uma lei de controle através da realimentação do estado de uma planta tinha como obstáculo a imensurabilidade de alguns componentes do vetor de estado. As técnicas de recuperação de estado, como foi visto, são de interesse

puramente teórico, já que são inaplicáveis. Em seguida, as técnicas de substituição de estado mostraram ter uma sólida base teórica, cujos passos de implementação seriam:

- Verificar a observabilidade da planta.
- Encontrar  $L$  tal que os autovalores de  $A - LC$  sejam estáveis.
- Construir um modelo de acordo com o diagrama da figura 2.4.

Estas técnicas mostraram que através de um sistema dinâmico modelo anexado à planta, o estado construído é mensurável e pode ser um substituto para o estado imensurável da planta, tendendo assintoticamente a ele. A seguir, o estudo dos observadores mostrou através do teorema fundamental dos observadores, que pode-se projetar um sistema dinâmico capaz de gerar um substituto para o estado inacessível.

Dessa maneira o problema se transformou num problema matemático, no qual através das equações (2.18) a (2.21), chamadas de *Relações Fundamentais dos Observadores*, encontra-se o sistema  $\mathcal{O}$  descrito pelas matrizes:  $\langle G, J, H, M, N \rangle$ , quando o projeto se encerra com a implementação do observador, de acordo com o diagrama da figura 2.6.

O projeto de observadores nos dá muita liberdade na escolha dos parâmetros, porém deve-se ter cuidado na sua escolha, um exemplo são os autovalores de  $G$ , que determinam a velocidade de convergência do observador. Esta cautela se deve ao fato de poder-se causar ganhos elevados, bem como saturação de componentes, picos indesejáveis nos transitórios, ampliação de ruídos etc.

Os observadores de ordem mínima podem em certas ocasiões reduzir os efeitos desses ganhos elevados, já que eles geram estimativas perfeitas para algumas variáveis.

Através da separação de estados, foi mostrado que ao se introduzir uma lei de controle:  $u = Fw + v$ , onde  $w$  é o estado estimado pelo observador; novos elementos

dinâmicos são introduzidos no sistema. Entretanto, existe uma separação entre os comportamentos dos sistemas envolvidos que são: *planta + controle* e *observação*.

Como as imperfeições práticas impedem o funcionamento previsto pela teoria, então é necessário verificar se, na presença de pequenas diferenças, o sistema ainda é capaz de continuar estimando, já que a sua capacidade de estimar é alterada.

Os monitores de estado são muito sensíveis, e tem seus componentes afetados sempre. Às vezes, as conseqüências são toleráveis e os erros de estimação finitos e próximos de zero; já em outras, as plantas são instáveis e os erros tendem ao infinito e inviabilizam qualquer tentativa de implementação.

Quando os observadores funcionam em malhas estabilizadoras já se pode garantir a continuação do funcionamento nominal mesmo na presença de perturbações. Porém, para cada caso é necessário determinar com exatidão a amplitude máxima das perturbações admissíveis.

Nada disso, invalida a utilização dos observadores de estado, os quais podem e devem ser usados na implementação prática de compensadores estabilizadores por realimentação de estados.

## Capítulo 3

# Observador de Estado Redundante

Conforme visto no capítulo 2, a existência de estimadores de estado está associada à resolução de uma série de restrições matriciais chamadas de Relações Fundamentais dos Observadores, as RFO [8]. A cada conjunto de matrizes que satisfazem as RFO corresponde um particular observador para uma dada planta.

Os projetos conhecidos se baseiam em uma particular maneira de encarar as RFO: transformá-las no problema de alocar os autovalores de  $A - JC$  por meio de escolha de  $J$ .

Neste capítulo será apresentada uma metodologia, aparentemente nova, para se resolver as Relações Fundamentais do Observador e, conseqüentemente, projetar estimadores de estado.

O capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção 1 apresenta-se a motivação para este projeto e é apresentado um método para obtenção da forma canônica. Na seção 2 é apresentada a estimação de estado redundante bem como a formalização do procedimento e o projeto da matriz  $T$ . No final da seção é apresentado um algoritmo para projeto do observador de estado redundante. Na seção 3 é apresentado o procedimento, bem como o projeto e o algoritmo necessário para um observador de estado redundante mínimo. Na seção 4 são apresentadas as conclusões.

### 3.1 Idéias Básicas

Da mesma forma que o capítulo 3, este capítulo tem o objetivo prático de construir um observador  $\mathcal{O}$  para uma dada planta  $\mathcal{P}$ . Já vimos que este problema pode ser transformado em um problema de Álgebra Matricial: dadas as matrizes reais  $A (n \times n)$ ,  $B (n \times m)$  e  $C (r \times n)$  encontrar, se possível, matrizes reais

$$\begin{aligned} T (o \times n), \quad G (o \times o), \quad H (o \times m), \\ J (o \times r), \quad M (n \times o), \quad N (n \times r) \end{aligned}$$

com  $o \leq n$  tais que as relações fundamentais dos observadores, reescritas a seguir, se verifiquem

$$T A - G T = J C \quad (3.1)$$

$$T B = H \quad (3.2)$$

$$M T - N C = I_n \quad (3.3)$$

$$\lambda(G) \subset \mathbb{C}^- \quad (3.4)$$

Tendo encontrado uma solução para este Problema Matemático Associado, construiríamos o sistema dinâmico descrito pelas equações:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = G z(t) + H u(t) + J y(t) \\ w(t) = M z(t) + N y(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

Na figura 3.1 pode ser visto o diagrama de blocos que ilustra as conexões a serem feitas para efetivamente se implementar o estimador de estado.

Já vimos que existem muitas maneiras de se encontrar soluções para as relações fundamentais dos observadores. Neste capítulo será proposta uma outra metodologia. Antes, porém, serão propostas duas maneiras de colocar o sistema em formas canônicas.

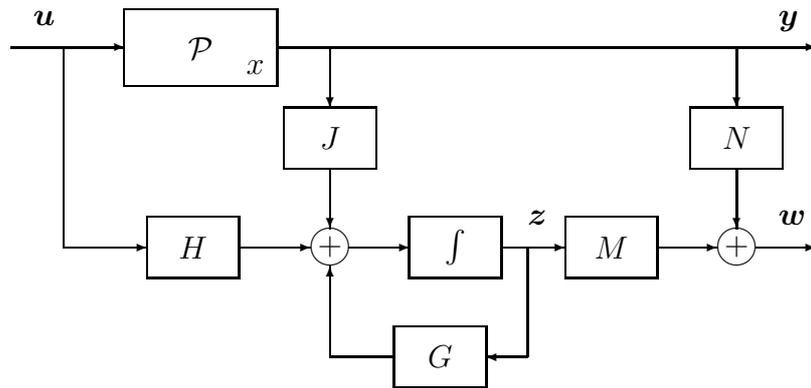


Figura 3.1: Diagrama de blocos das conexões necessárias para implementar o estimador de estado

### 3.1.1 Formas Canônicas

Existem muitas transformações que podem ser efetuadas nas equações de espaço de estado a fim de facilitar a resolução dos problemas de Controle.

Considere o sistema descrito pelas equações:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $x$  é o vetor de estado,  $u$  é o vetor de entrada (ou de controle),  $y$  é o vetor de saída e  $A$ ,  $B$  e  $C$  são as matrizes do sistema.

Suponha que existe uma matriz  $P$  inversível tal que a mudança de bases dada por  $\bar{x} = Px$  faz com que as  $r$  primeiras variáveis de estado sejam as variáveis de saída.

Isto significa que  $P$  transforma a matriz  $C$  da seguinte forma:

$$\bar{C} = \left[ I_r \mid 0 \right] \quad (3.7)$$

Para encontrar uma tal  $P$  considere

$$\begin{aligned} \bar{C} &= CP^{-1} \\ C &= \bar{C}P \\ C &= \left[ I_r \mid 0 \right] \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde:  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $\bar{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Então,  $P_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$  e  $P_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ .

Logo,

$$C = I_r P_1 = P_1$$

A única restrição em  $P_2$  é que suas linhas sejam linearmente independentes das linhas de  $P_1$ . Uma possível maneira de garantir isso é fazendo  $P_2 = K_C^T$  onde as colunas de  $K_C$  formam uma base para o espaço nulo de  $C$ .

Dessa forma, conclui-se que:

$$\begin{cases} P_1 = C \\ P_2 = K_C^T \text{ onde } C K_C = 0 \end{cases}$$

Portanto, a matriz  $P$  deve ter a seguinte forma:

$$P = \begin{bmatrix} C \\ K_C^T \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

## 3.2 Estimação de Estado Redundante

Dentre as diferentes maneiras de resolver as relações fundamentais do observador (3.1) a (3.4), uma delas é a de fixar uma das matrizes procuradas e verificar se é possível encontrar as demais. Neste estudo foi escolhida a matriz  $G$  como ela fornece a dinâmica do observador, a sua escolha inicial torna desnecessária a alocação dos autovalores. Escolhemos a matriz  $G$  na forma diagonal e com autovalores idênticos:

$$G = \lambda I_n \quad (3.9)$$

Esta particular escolha justifica o nome redundante. Ela também define a ordem do estimador:  $o = n$  e a equação (3.4) das relações fundamentais do observador é satisfeita desde que  $\lambda < 0$ . A partir desta matriz, as demais serão calculadas pelas relações fundamentais do observador.

Considere os seguintes exemplos, já mostrados no capítulo 2 mas necessários para auxiliar a compreensão.

EXEMPLO 3.1: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  modelada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]$$

*Fixando  $G$  de acordo a restrico da equaco (3.4) temos, para  $\lambda = -1$ .*

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*Resolvendo agora a equaco (3.1), tomando  $T$  e  $J$  totalmente literais, fica*

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} [1 \ 0]$$

*Desenvolvendo, obtém-se:*

$$\begin{bmatrix} t_{11} - 2t_{12} & t_{11} - t_{12} \\ t_{21} - 2t_{22} & t_{21} - t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & 0 \\ j_2 & 0 \end{bmatrix}$$

*A expressão acima fornece as seguintes restrico:*

$$\begin{cases} t_{12} = t_{11} \\ t_{22} = t_{21} \end{cases} \quad \begin{cases} j_1 = t_{11} - 2t_{12} = -t_{11} \\ j_2 = t_{21} - 2t_{22} = -t_{21} \end{cases}$$

*Substituindo as matrizes  $T$ ,  $J$  e resolvendo a equaco (3.2):*

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11} \\ t_{21} & t_{21} \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} -t_{11} \\ -t_{21} \end{bmatrix}; \quad H = T B = \begin{bmatrix} -2t_{11} \\ -2t_{21} \end{bmatrix}$$

*Resolvendo agora a equaco (3.3) para  $M$  e  $N$  totalmente literais temos*

$$MT = I_2 - NC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} [1 \ 0]$$

$$MT = \begin{bmatrix} 1 - n_1 & 0 \\ -n_2 & 1 \end{bmatrix}$$

*Como as colunas de  $T$  são idênticas, as de  $MT$  também devem ser, logo:*

$$\begin{cases} 1 - n_1 = 0 \\ n_2 = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

O produto de  $M$  pela segunda coluna de  $T$  deve ser igual à segunda coluna de  $I - NC$ :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta equação admite muitas soluções. Supondo, por exemplo,  $t_{11} = t_{21} = 1$  encontramos as restrições  $m_{11} + m_{12} = 0$  e  $m_{21} + m_{22} = 1$ , acarretando

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix}$$

A solução encontrada para as relações fundamentais dos observadores é constituída pelas matrizes:

$$\begin{aligned} G &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; & T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; & J &= \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \\ H &= \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}; & M &= \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 1 - m_{21} \end{bmatrix}; & N &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e o observador será implementado pelo diagrama de blocos da figura 3.1.

Verificamos que esta sistemática propicia muita liberdade na escolha dos parâmetros de  $T$ . A relação feita,  $t_{11} = t_{21} = 1$ , foi aleatória. O que aconteceria para outras escolhas? Sejam, por exemplo,  $t_{11} = 1$  e  $t_{21} = 0$ . Isto causa:

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; & J &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; & H &= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}; \\ M &= \begin{bmatrix} 0 & m_{12} \\ 1 & m_{22} \end{bmatrix}; & N &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e o estimador será representado por:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} y$$

Como  $G$  é diagonal, verifica-se que a segunda componente de  $z$  é incontrolável: os sinais  $u$  e  $y$  são incapazes de afetá-la. Isto leva a ver que nada se perderia

no comportamento dinmico do estimador se desprezssemos esta parte (a segunda componente de  $z$ ) e considerssemos apenas a equaco reduzida.

$$\begin{aligned} \dot{z}_r &= z_r - 2u - y \\ w &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z_r + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

 imediato verificar que este sistema  tambm um observador (de ordem mnima!) porque as Relaces Fundamentais dos Observadores so satisfeitas para  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $G = -1$ ,  $H = -2$ ,  $J = -1$ ,  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  e  $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ .

A capacidade de desprezar partes de um observador e mesmo assim continuar com um sistema reduzido ainda capaz de estimar levou ao nome ‘‘redundante’’.

### 3.2.1 Formalizaco do Procedimento

Para se projetar um estimador de estado deve-se obedecer as relaces fundamentais do observador, mencionadas em (3.1) a (3.4). Como a equaco (3.4) j foi satisfeita pela escolha de  $G$ , ficam restando as outras trs. Portanto, iniciemos com a equaco (3.1), utilizando a matriz  $G$  dada em (3.9). Chamando  $p = -\lambda$ , e como  $\lambda < 0$  temos

$$\begin{cases} TA - GT = JC \\ G = -pI_n, \text{ onde } p > 0 \end{cases} \Rightarrow TA + pT = JC \quad (3.10)$$

Mas  $pT = Tp$  e a equaco acima fica  $T(A + pI) = JC$ . Chamando  $\Theta = A + pI_n$  obtemos:

$$T\Theta = JC \quad (3.11)$$

Observando a equaco (3.11) percebe-se que sua resoluco pode ser simplificada se  $C$  estiver no formato  $\begin{bmatrix} I_r & | & 0 \end{bmatrix}$ . Se esse no for o caso, uma mudana de bases preliminar, como a vista anteriormente, conserta as coisas. Seja, ento  $C =$

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \end{array} \right].$$

$$JC = \left[ \begin{array}{c|c} J & 0 \end{array} \right]$$

logo,

$$T\Theta = \left[ \begin{array}{c|c} J & 0 \end{array} \right] \quad (3.12)$$

Se particionarmos a matriz  $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  em duas submatrizes  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ , da mesma forma que a matriz  $JC$ , ficamos com:

$$T \left[ \begin{array}{c|c} \Theta_1 & \Theta_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} J & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{cases} T\Theta_1 = J \\ T\Theta_2 = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

O problema de encontrar uma matriz  $T$  tal que  $T\Theta_2 = 0$  será visto posteriormente. Feito isso, obtém-se as matrizes  $J$  e  $H$  satisfazendo as relações fundamentais do observador (3.1) e (3.2).

$$J = T\Theta_1 \quad (3.14)$$

$$H = TB \quad (3.15)$$

Já foram satisfeitas as equações (3.1), (3.2) e (3.4). A seguir será resolvida a equação (3.3), a partir das matrizes obtidas anteriormente.

$$MT + NC = I_n$$

$$\begin{aligned} M \left[ \begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array} \right] + N \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \end{array} \right] &= I_n \\ \left[ \begin{array}{c|c} MT_1 + N & MT_2 \end{array} \right] &= I_n \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como as submatrizes são:  $MT_1 + N \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $MT_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  temos

$$MT_1 + N = \left[ \begin{array}{c} I_r \\ 0 \end{array} \right] \quad (3.17)$$

$$MT_2 = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ I_{n-r} \end{array} \right] \quad (3.18)$$

Dessa forma, através das relações fundamentais do observador (e, possivelmente, utilizando uma transformao de similaridade nas matrizes das equações dinâmicas da planta) pode-se projetar um observador redundante de maneira sistemática.

### Projeto da Matriz $T$

Da equação (3.13) obteve-se uma condição necessária: a matriz  $T$  é tal que  $T \Theta_2 = 0$ .

De outra forma:

$$\Theta_2^T T^T = 0 \quad (3.19)$$

Então podemos dizer que as colunas da transposta da matriz  $T$  pertencem ao espaço nulo da transposta da matriz  $\Theta_2$ . Supondo que este espaço nulo tem dimensão  $n - r$  e que  $K \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$   uma matriz cujas colunas formam uma base para ele temos

$$T^T = K \tau \quad (3.20)$$

onde:  $\tau \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$   uma matriz qualquer. Finalmente, chamando  $X^T = \tau$  temos

$$T = X K^T \quad (3.21)$$

Esta é uma expressão geral que fornece todas as possíveis matrizes  $T$  em função do parâmetro livre  $X$ , uma matriz real  $n \times (n - r)$ .

### Condições de Existência

A partir da equação (3.21) obtida anteriormente e reescrevendo da seguinte forma:

$$T = X \left[ K_1^T \mid K_2^T \right]$$

onde  $K_1^T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$  e  $K_2^T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ . Particionado também a matriz  $T$ , obtém-se

$$T = \left[ T_1 \mid T_2 \right] = \left[ X K_1^T \mid X K_2^T \right]$$

Substituindo a matriz  $T_2$  na equação (3.18), encontra-se:

$$M X K_2^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Analisando a equação (3.22) conclui-se que equações para  $M$  e  $N$  terão solução desde que  $K_2^T$  tenha posto completo, isto é,

$$\rho(K_2^T) = n - r \quad (3.23)$$

### Algoritmo

1. Achar uma matriz  $P$  inversível capaz de transformar a matriz  $C$  para  $\bar{C} = \left[ \begin{array}{c|c} I_r & 0 \end{array} \right]$ . Em seguida, obter o sistema similar através da transformação.

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u \\ y = \bar{C} \bar{x} \end{cases}$$

onde  $\bar{A} = P A P^{-1}$ ,  $\bar{B} = P B$  e  $\bar{C} = C P^{-1}$ .

2. Escolher o valor de  $\lambda < 0$  e criar a matriz  $G = \lambda I_n = -p I_n$ , onde  $p > 0$ .
3. Crie a matriz  $\Theta = \bar{A} + p I_n$ .
4. Particione  $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  em:  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ ,

$$\Theta = \left[ \begin{array}{c|c} \Theta_1 & \Theta_2 \end{array} \right]$$

5. Encontre  $K \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ , uma base para o espaço nulo de  $\Theta_2^T$ .
6. Particione  $K^T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  em:  $K_1^T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$  e  $K_2^T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ . Se  $\rho(K_2^T) = n - r$ , então prossiga. Caso contrário não existe solução.

7. Encontre a matriz  $T \ni T \Theta_2 = 0$ , a partir de:

$$T = X K^T$$

onde:  $X \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  é um parâmetro qualquer.

8. Encontre as matrizes  $J$  e  $H$ ,

$$J = T \Theta_1$$

$$H = T \bar{B}$$

9. Particione a matriz  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  encontrada em:  $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $T_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ ,

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array} \right]$$

10. Encontra a matriz  $M \ni M T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$ .

11. Encontre a matriz  $N \ni N = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} - M T_1$ .

O mesmo exemplo anterior será resolvido agora, seguindo os passos deste algoritmo.

EXEMPLO 3.2: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  modelada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]$$

1. Escolhendo  $\lambda < 0$  e criando a matriz  $G$ .

$$\lambda = -1$$

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Criando a matriz  $\Theta = A + p I_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ .

3. Particionando  $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  em:  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ ,

$$\Theta = \left[ \Theta_1 \mid \Theta_2 \right]$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

4. Encontrando a matriz  $T \ni T \Theta_2 = 0$ , a partir de  $T = X K^T$ , onde:  $K \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  e  $X \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ .

$$K = \begin{bmatrix} 0,7071 \\ 0,7071 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} -0,7071 \\ 0,7071 \end{bmatrix};$$

$$T = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix};$$

5. Encontrando as matrizes  $J$  e  $H$ ,

$$J = T \Theta_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix};$$

$$H = T B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

6. Particionando a matriz  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  encontrada em:  $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $T_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ ,

$$T_1 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}; \quad T_2 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix};$$

7. Encontra a matriz  $M \ni M T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-r} \end{bmatrix}$ .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$8. \text{ Encontre a matriz } N \ni N = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} - MT_1.$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Este algoritmo permite a construção de **toda uma família de observadores**, parametrizada pela matriz  $X$ .

### 3.3 Observador Redundante Mínimo

Vimos na seção anterior um procedimento para a construção de observadores de ordem completa  $o = n$ . Antes de analisar o caso mínimo vejamos um exemplo.

EXEMPLO 3.3: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  modelada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0]$$

*No exemplo 3.1 um observador de ordem  $o = n = 2$  foi projetado, agora através das mesmas relações fundamentais do observador será projetado um de ordem mínima, ou seja,  $o = n - r = 1$ . Da mesma forma que anteriormente, escolhe-se  $G = -1$ ; a partir de  $T$  e  $J$  literais a equação (3.1) fica*

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} - (-1) \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \end{bmatrix} = (j_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t_{11} - 2t_{12} & t_{11} - t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Esta expressão fornece as restrições:  $t_{12} = t_{11}$  e  $j_1 = t_{11} - 2t_{12} = -t_{11}$ . Logo,*

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11} \end{bmatrix}; \quad J = -t_{11}; \quad H = TB = -2t_{11};$$

Aplicando  $M$  e  $N$  literais na equação (3.3), temos

$$MT = I_2 - NC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$MT = \begin{bmatrix} 1 - n_1 & 0 \\ -n_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como as colunas de  $T$  são idênticas, as de  $MT$  também devem ser, logo:

$$\begin{cases} 1 - n_1 = 0 \\ n_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

exatamente como no caso do exemplo 3.1. Resolvendo a equação (3.3), fica:

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

↓

$$\begin{cases} m_{11} t_{11} = 0 \\ m_{21} t_{11} = 1 \end{cases}$$

A partir das restrições fornecidas acima conclui-se que  $m_{11} = 0$  ou  $T$  seria nula; já a segunda restrição admite várias soluções. Suponha, então, que  $t_{11} = 1$ , logo  $m_{21} = 1$ . Dessa forma, o observador tem as seguintes matrizes:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad G = -1; \quad H = -2; \quad J = -1;$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e seria implementado por:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = -z(t) - 2u(t) - y(t); \\ w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y(t) \end{cases}$$

É importante notar que este mesmo observador foi obtido no exemplo 3.1 ao se desprezar partes do observador completo.

A possibilidade de obter um observador mínimo a partir de um completo é interessante, mas muitas vezes é mais rápido chegar ao mínimo diretamente, sem precisar projetar um completo antes.

Seguindo o projeto da mesma forma que anteriormente, temos que obedecer as relações fundamentais do observador, mencionadas em (3.1) a (3.4). Sendo  $G$  de ordem mínima:  $G = -p I_{n-r}$  com  $p > 0$ , o que satisfaz a equação (3.4). Iniciando a resolução das outras três equações pela (3.1), utilizando a matriz  $G$  mínima teremos:

$$\begin{cases} TA - GT = JC \\ G = -p I_{n-r}, \text{ onde } p > 0 \end{cases} \Rightarrow TA + pT = JC$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ ,  $T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{(n-r) \times m}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  e  $N \in \mathbb{R}^{n \times r}$ .

Temos, como antes,  $pT = Tp$  e a equação acima fica:  $T(A + pI) = JC$ . Dessa forma, podemos fazer o mesmo procedimento anterior:  $\Theta = A + pI$ , que resulta:

$$T\Theta = JC$$

Como pode ser observado o procedimento é análogo ao anterior. A condição de existência é a mesma. A seguir será mostrado o algoritmo para a obtenção do observador mínimo.

### Algoritmo - Observador Mínimo

1. Achar uma matriz  $P$  inversível capaz de transformar a matriz  $C$  para  $\bar{C} = \begin{bmatrix} I_r & | & 0 \end{bmatrix}$ . Em seguida, obter o sistema similar através da transformação.

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} \end{cases}$$

onde  $\bar{A} = PAP^{-1}$ ,  $\bar{B} = PB$  e  $\bar{C} = CP^{-1}$ .

2. Escolher o valor de  $\lambda < 0$  e criar a matriz  $G = \lambda I_{n-r} = -p I_{n-r}$ , onde  $p > 0$ .

3. Crie a matriz  $\Theta = \bar{A} + p I_n$ .

4. Particione  $\Theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  em:  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$  e  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ ,

$$\Theta = \left[ \begin{array}{c|c} \Theta_1 & \Theta_2 \end{array} \right]$$

5. Encontre a matriz  $T \ni T \Theta_2 = 0$ , a partir de:

$$T = X K^T$$

onde:  $K \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  é uma base para o espaço nulo de  $\Theta_2^T$  e  $X \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  é um parâmetro livre.

6. Encontre as matrizes  $J$  e  $H$ ,

$$J = T \Theta_1$$

$$H = T \bar{B}$$

7. Particione a matriz  $T \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$  encontrada em:  $T_1 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$  e  $T_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ ,

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array} \right]$$

8. Encontra a matriz  $M \ni M T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline I_{n-r} \end{bmatrix}$ .

9. Encontre a matriz  $N \ni N = \begin{bmatrix} I_r \\ \hline 0 \end{bmatrix} - M T_1$ .

## 3.4 Conclusões

Neste capítulo foi apresentada uma maneira de se resolver as tradicionais relações fundamentais do observador, fixando-se a matriz de ganho  $G$  e colocando-a na forma diagonal. O procedimento leva a toda uma família de observadores, obtidos em função de um parâmetro matricial de variação livre.

Um exemplo sugeriu que observadores mínimos podem ser obtidos por meio de uma escolha especial do parâmetro livre, do observador completo, mas mesmo assim foi desenvolvido um algoritmo de projeto para o caso mínimo.

Estes observadores foram chamados de redundantes pelo fato de continuarem a estimar mesmo quando partes de sua estrutura são desprezadas.

O projeto dos observadores redundantes é simples e direto, quer para o caso completo quer para o mínimo e, importante, o fato de o sistema ter uma ou mais variáveis de saída é irrelevante.

É sabido tradicionalmente que, em termos gerais, redundância aumenta a robustez, ou seja, torna os sistemas mais resistentes a falhas e perturbações. Dessa forma surgiu a conjectura de que um observador redundante seja mais robusto que outros. No capítulo 5 são feitas simulações onde será testado o comportamento do observador redundante e de outros na presença de perturbações no sistema.



# Capítulo 4

## Projeto de Observadores

Neste capítulo serão apresentados métodos de projeto de observadores de estado. Na seção 1 são recordados os conceitos de sistemas observáveis e detetáveis, o uso de formas canônicas e alocação de autovalores, necessários ao desenvolvimento do presente capítulo. Em seguida, na seção 2, estuda-se o observador identidade assim como um algoritmo de projeto. Na seção 3 o tradicional observador de Luenberger é mostrado. Na seção 4 o observador de ordem completa via forma canônica do observador é apresentado, com um algoritmo de projeto. A seção 5 mostra um observador robusto, e na seção 6 são apresentadas as conclusões.

### 4.1 Conceitos Básicos

O objetivo deste capítulo é essencialmente prático: construir um observador  $\mathcal{O}$  para uma dada planta  $\mathcal{P}$ , cujas equações dinâmicas são:

$$\mathcal{P} \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad \mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = Gz(t) + Hu(t) + Jy(t) \\ w(t) = Mz(t) + Ny(t) \end{cases}$$

onde:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{o \times o}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{o \times m}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{o \times r}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times o}$  e  $N \in \mathbb{R}^{n \times r}$ .

Como já foi visto na teoria de observadores, na seção 2.4, este problema pode ser transformado num problema de Álgebra Matricial, onde dadas as matrizes reais  $A$ ,  $B$ ,

$C$  e  $D$  deve-se encontrar, se possível, as matrizes reais:  $T$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $J$ ,  $M$  e  $N$  tais que as seguintes relações fundamentais dos observadores sejam satisfeitas:

$$TA - GT = JC \quad (4.1)$$

$$TB = H \quad (4.2)$$

$$MT - NC = I_n \quad (4.3)$$

$$\lambda(G) \subset \mathbb{C}^- \quad (4.4)$$

Encontrando-se uma solução para este problema matemático associado, constrói-se o sistema dinâmico do observador, descrito acima, que estimará assintoticamente os estados imensuráveis da planta. A seguir serão apresentados diversos métodos para resolver o problema matemático associado. Antes, porém, alguns conceitos muito conhecidos, necessários ao presente estudo, serão apresentados e podem ser encontrados em muitas fontes, como por exemplo [5], [10], [16], [26] e [29].

#### 4.1.1 Sistema Observável e Sistema Detetável

O problema de, dadas as matrizes  $A$  e  $C$ , encontrar uma matriz  $J$  de modo a alocar com total liberdade os autovalores de  $A - JC$  é muito conhecido no estudo de sistemas lineares. Este é um problema de designação de autovalores por meio de injeção de saída. As condições de existência de solução estão associadas aos conceitos de observabilidade e de detetabilidade do par  $\langle C, A \rangle$ .

DEFINIÇÃO 4.1 Um par  $\langle C, A \rangle$  é detetável quando:

$$\rho \begin{bmatrix} \lambda^+ I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

para todo autovalor  $\lambda^+$  de  $A$  situado no semiplano direito fechado de  $\mathbb{C}$ .

A definição acima diz que a parte instável de  $A$  deve ser observável, isto é, se há uma parte inobservável do estado da planta, esta parte deve ser estável.

PROPRIEDADE 4.1 O par  $\langle C, A \rangle$  é detetável se e somente se existir uma matriz  $J$  tal que  $\lambda(A - JC) \subset \mathbb{C}^-$ .

Os autovalores de  $(A - JC)$  devem estar todos na região “estável” do plano complexo. A existência de uma matriz  $J$  descrita pela propriedade 4.1 equivale a ter o par  $\langle C, A \rangle$  detetável. Como o conceito de observabilidade é o mais conhecido, a propriedade 4.2 se faz necessária.

PROPRIEDADE 4.2 Um par  $\langle C, A \rangle$  é observável quando:

$$\rho \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

para todo autovalor  $\lambda$  de  $A$ .

PROPRIEDADE 4.3 O par  $\langle C, A \rangle$  é observável se e somente se o espectro de  $(A - JC)$  é arbitrariamente designável por escolha de  $J$ .

Se o par  $\langle C, A \rangle$  é observável então ele será também detetável. Percebe-se que a detetabilidade é um conceito menos exigente que a observabilidade. Quando o sistema for observável pode-se alocar livremente autovalores de  $(A - JC)$  através da escolha da matriz  $J$ . Caso o sistema seja detetável, garante-se apenas que estes autovalores podem ser colocados na região estável  $\mathbb{C}^-$ .

### 4.1.2 Alocação dos Autovalores

É bem sabido na teoria de controle que para se alocar, ou designar, livremente os autovalores de um sistema, a malha aberta deve ser controlável. Um método conhecido que permite a escolha dos autovalores da malha fechada para sistemas controláveis com apenas uma variável de entrada, é o método de Ackerman. Neste algoritmo as matrizes  $A$  e  $B$  são os dados iniciais, bem como o polinômio característico desejado para a malha fechada,  $p_C^*(s)$ .

### Algoritmo da Alocação de Pólos via Ackerman

1. Calcule a matriz de controlabilidade  $U_a$  e sua inversa.

$$U_a = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b] \quad (4.5)$$

2. Calcule  $p_C^*(A)$ , a partir do polinômio característico para a malha fechada,  $p_C^*(s)$ .
3. A matriz  $f = -[0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] U_a^{-1} p_C^*(A)$  é a realimentação procurada.

Um possível método para se obter uma realimentação de estados capaz de alocar os autovalores de plantas com várias entradas será tratado a seguir.

Considere uma planta controlável, com  $A$  cíclica, e seja  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  um vetor escolhido ao acaso. É claro que  $Bu_0 = b$  representa uma combinação linear das colunas de  $B$ . Seja o teorema a seguir.

**TEOREMA 4.1:** Sendo  $\langle A, B \rangle$  um sistema controlável com  $A$  cíclica, e sendo  $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_m b_m$  uma combinação linear qualquer das colunas de  $B$ , então  $\langle A, b \rangle$  será quase certamente controlável.

O teorema acima garante que para “quase todos” vetores  $b = Bu$  o par  $\langle A, b \rangle$  será controlável. Se não o for, uma outra escolha aleatória de  $u_0$  resolverá. Usando a teoria do caso monovariável é fácil escolher  $f$  tal que  $A+bf$  tenha o espectro desejado. Como  $A+bf = A+Bu_0f$ , então a solução procurada para o sistema original  $\langle A, B \rangle$  será  $F = u_0f$ . Isto sugere um algoritmo para alocação de autovalores.

Antes, porém, vale a pena lembrar que uma matriz  $A$  é cíclica se e somente se o posto de  $\langle A, b \rangle$  for igual a  $n$ . Note que se os autovalores de  $A$  são distintos ela é cíclica. A “ciclicidade” é uma propriedade genérica, isto é, “quase todas” as matrizes quadradas são cíclicas, possuem autovalores distintos. Caso a matriz  $A$  da planta não seja cíclica o seguinte teorema será útil:

TEOREMA 4.2: Sendo  $\langle A, B \rangle$  controlável, para “quase toda” matriz  $F$  os autovalores de  $A + BF$  são distintos.

Isto significa que, caso  $A$  não seja cíclica, uma realimentação de estados preliminar se faz necessária.

### Algoritmo da Alocação de Pólos por Escolhas Aleatórias

Este algoritmo permite a designação dos autovalores da malha fechada para sistemas controláveis. As matrizes da malha aberta  $A$  e  $B$  são os dados iniciais.

1. Verificar se  $A$  é cíclica.
2. Se  $A$  é cíclica, escolha  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  ao acaso.
3. Faça  $Bu_0 = b$ .
4. Se  $A$  e  $b$  forem controláveis, encontre a solução  $f$  (via Ackerman, por exemplo).
5. A solução global será  $F = u_0 f$ .
6. Se  $A$  e  $b$  não forem controláveis retorne ao passo 2.
7. Se  $A$  não é cíclica, escolha  $F_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ao acaso.
8. Se  $A + BF_0$  é cíclica vá ao passo 2.
9. Se  $A + BF_0$  não é cíclica vá ao passo 7.

Há na literatura vários outros procedimentos para a alocação de autovalores dos sistemas multivariáveis por meio de realimentação de estados, este é apenas um deles.

## 4.2 Observador Identidade

Neste primeiro método será vista uma maneira simples e direta de encontrar um observador para uma dada planta. Para resolver o problema matemático associado consideraremos:

$$T = I_n$$

Com esta escolha já decidimos a ordem do estimador:  $o = n$ . E a equação (4.2) garante que  $H = B$ . Uma maneira trivial de satisfazer a equação (4.3) é:  $M = I_n$  e  $N = 0$ . Falta atender as equações (4.1) e (4.4). Isto se resume a encontrar  $J$  tal que

$$G = A - JC$$

tenha seus autovalores em  $\mathbb{C}^-$ . Este problema é conhecido no estudo de sistemas lineares, e sua solução está relacionada aos conceitos de observabilidade e detetabilidade do par  $\langle C, A \rangle$ . Supondo que a planta é observável pode-se garantir, por dualidade, que o par  $\langle A^T, C^T \rangle$  é controlável. Agora, encontrar  $F$  tal que o espectro de  $A^T + C^T F$  seja livremente designável é algo bem conhecido. Como

$$\lambda(A^T + C^T F) = \lambda(A^T + C^T F)^T = \lambda(A + F^T C) \quad (4.6)$$

verifica-se que a matriz  $J = -F^T$  é a solução procurada, e já é possível construir o observador.

Em resumo, para construir um observador para a planta  $\langle A, B, C, D \rangle$  por meio do método do observador identidade devemos escolher

$$T = I_n$$

$$H = B$$

$$M = I_n$$

$$N = 0$$

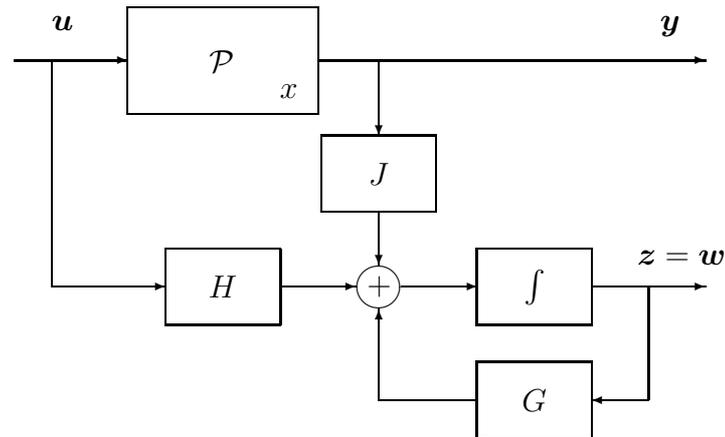


Figura 4.1: Diagrama de blocos da implementação de um observador identidade

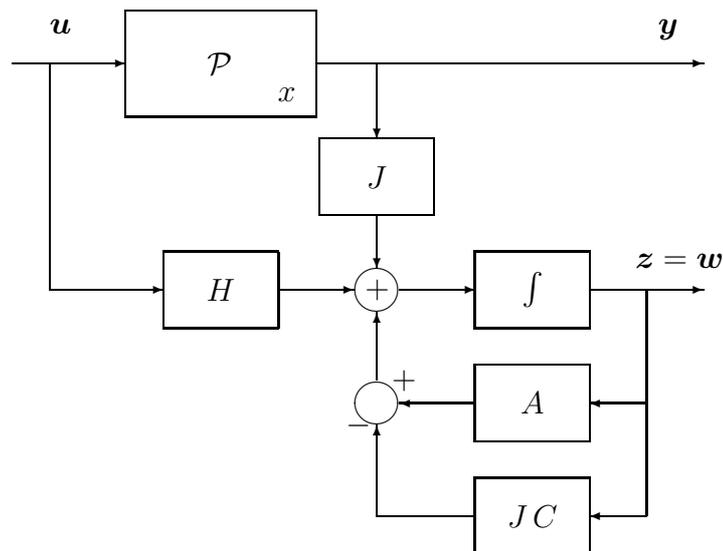
após o que o problema passa a ser encontrar  $J$  tal que  $G = A - JC$  tenha seus autovalores em  $\mathbb{C}^-$ . Havendo observabilidade, ou, menos ainda, detetabilidade, este problema tem solução. A teoria também garante que a observabilidade, por ser uma propriedade genérica, estará presente “quase sempre”. Para encontrar efetivamente uma solução podemos usar os resultados de dualidade e transformar o problema em um problema de realimentação de estados.

Este método fornece observadores de ordem completa ( $n$ ) e pode ser usado para plantas com qualquer número de variáveis de saída ( $r \geq 1$ ). Encontradas matrizes que satisfazem as relações fundamentais dos observadores, o próximo passo é a implementação física, de acordo com o diagrama de blocos da figura 4.1.

Lembrando que  $G = A - JC$  este diagrama pode ser modificado para a forma equivalente apresentada na figura 4.2.

### Algoritmo - Construção de Observadores Identidade

Este algoritmo permite a escolha de matrizes que satisfazem as relações fundamentais dos observadores e a subsequente construção de observadores de ordem  $n$ . A planta é observável, ou, no mínimo, detetável, e as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são dados bem como os



ou ainda,

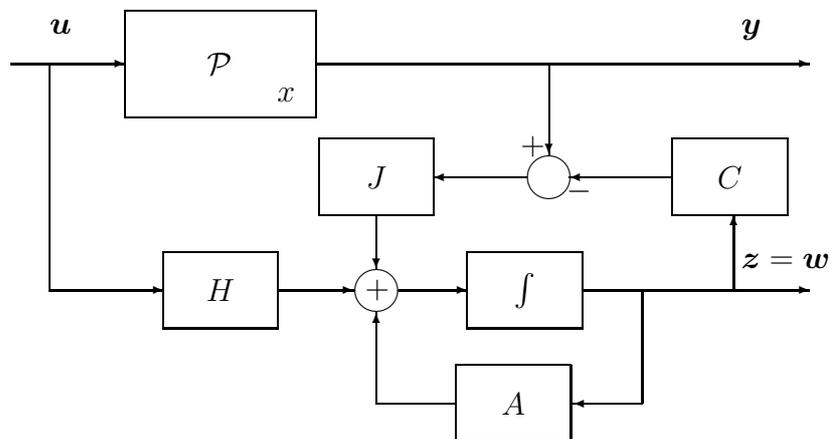


Figura 4.2: Diagramas de blocos equivalentes da implementação do observador identidade

autovalores desejados para o estimador.

1. Encontrar a matriz  $F \in \mathbb{R}^{r \times m}$  tal que os autovalores da matriz  $A^T + C^T F$  estejam em  $\mathbb{C}^-$ .
2. Calcular a matriz  $J = -F^T$ .
3. As matrizes  $J$ ,  $T = I_n$ ,  $G = A - JC$ ,  $H = B$ ,  $M = I_n$  e  $N = 0$  satisfazem as relações fundamentais dos observadores.
4. O estimador procurado é descrito por:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = G z(t) + H u(t) + J y(t) \\ w(t) = z(t) \end{cases}$$

### 4.3 Observador de Luenberger

O tradicional observador de Luenberger consiste em construirmos uma cópia da planta que é acionada pelo erro entre a saída real  $y = Cx$  e a saída  $\tilde{y} = Cz$ , como pode ser visto nas equações dinâmicas a seguir.

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + L(y - \tilde{y}) \\ \tilde{y} = Cz \end{cases} \quad (4.7)$$

onde  $L$  é a matriz de ganho a ser projetada.

Pela definição do erro de estado:  $e = x - z$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{z} \\ &= Ax + Bu - Az - Bu - LCe \\ &= A(x - z) - LCe \\ &= (A - LC)e \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pode-se ver a partir da equação (4.8) do erro de estado, que  $(A - LC)$  deve ser estável para que o erro tenda a zero, este já é um resultado bem conhecido. Portanto, o projeto do observador de Luenberger se resume a encontrar uma matriz  $L$  tal

que  $\lambda(A - LC) \subset \mathbb{C}^-$ . Observando o diagrama de blocos modificado do observador identidade na figura 4.2, conclui-se que os observadores de Luenberger e o identidade são iguais, desde que façamos  $L = J$ .

Além destas interpretações, o método do observador identidade fornece um procedimento simples, direto e geral para o projeto de estimadores assintóticos. Ele se aplica para qualquer número de saídas ou entradas da planta, e fornece um observador de ordem completa, com dimensão  $n$ , igual à da planta. O que poderia atrapalhar um pouco a simplicidade do método é o problema operacional da escolha de  $J$ , ou seja, como escolher um  $J$  estabilizante de maneira suave. Uma possível estratégia é o uso de formas canônicas. Antes de ilustrar esta técnica, veremos alguns exemplos.

EXEMPLO 4.1: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1,7 & -0,8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

1. Encontrar a matriz  $F \in \mathbb{R}^{r \times m}$  tal que os autovalores da matriz  $A^T + C^T F$  estejam em  $\mathbb{C}^-$ .

- (a) Calcule a matriz  $U_a$  e sua inversa.

$$U_a = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & A^{T^2} C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) Calcular  $p_C^*(A^T)$ , a partir do polinômio característico para a malha fechada,  $p_C^*(s)$ . Escolhendo uma rapidez de convergência caracterizada por autovalores localizados em  $-1$  temos  $p_C^*(s) = (s + 1)^3$  e

$$p_C^*(A^T) = (A + I_3)^3 = \begin{bmatrix} 0 & -2,2 & 0,46 \\ 1,3 & -3,74 & -1,418 \\ 2,2 & -0,46 & -3,372 \end{bmatrix}$$

- (c) A matriz  $F = -[0 \ \dots \ 0 \ 1] U_a^{-1} p_C^*(A^T)$  é a realimentação procurada.

$$F = -[0 \ 0 \ 1] U_a^{-1} p_C^*(A^T) = [-2,2 \ 0,46 \ 3,372]$$

2. Calcular a matriz  $J = -F^T$ .

$$J = \begin{bmatrix} 2,2 \\ -0,46 \\ -3,372 \end{bmatrix}$$

3. Calcular a matriz  $G = A - JC$ .

$$G = \begin{bmatrix} -2,2 & 1 & 0 \\ 0,46 & 0 & 1 \\ 2,372 & -1,7 & -0,8 \end{bmatrix}$$

4. As matrizes  $J$ ,  $T = I_3$ ,  $G$ ,  $H = B$ ,  $M = I_3$  e  $N = 0$  satisfazem as relações fundamentais dos observadores.

5. O observador procurado é descrito por:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -2,2 & 1 & 0 \\ 0,46 & 0 & 1 \\ 2,372 & -1,7 & -0,8 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2,2 \\ -0,46 \\ -3,372 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) = z(t) \end{cases}$$

EXEMPLO 4.2: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

1. Encontrar a matriz  $F \in \mathbb{R}^{r \times m}$  tal que os autovalores da matriz  $A^T + C^T F$  estejam em  $\mathbb{C}^-$ .

- (a) Calcule a matriz  $U_a$  e sua inversa.

$$U_a = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & A^{T^2} C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) Calcular  $p_C^*(A^T)$ , a partir do polinômio característico para a malha fechada,  $p_C^*(s)$ . Neste exemplo, escolhendo-se uma rapidez de convergência caracterizada por autovalores localizados em  $-1$ .

$$p_C^*(A^T) = (A + I_3)^3 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 23 \\ 5 & 14 & 52 \\ 6 & 23 & 83 \end{bmatrix}$$

(c) A matriz  $F = - [0 \ \dots \ 0 \ 1] U_a^{-1} p_C^*(A^T)$  é a realimentação procurada.

$$F = - [0 \ 0 \ 1] U_a^{-1} p_C^*(A^T) = [-6 \ -23 \ -83]$$

2. Calcular a matriz  $J = -F^T$ .

$$J = \begin{bmatrix} 6 \\ 23 \\ 83 \end{bmatrix}$$

3. Calcular a matriz  $G = A - JC$ .

$$G = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -23 & 0 & 1 \\ -82 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4. As matrizes  $J$ ,  $T = I_3$ ,  $G$ ,  $H = B$ ,  $M = I_3$  e  $N = 0$  satisfazem as relações fundamentais dos observadores.

5. O observador procurado é descrito por:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -23 & 0 & 1 \\ -82 & 2 & 3 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ 23 \\ 83 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) = z(t) \end{cases}$$

## 4.4 Forma Canônica do Observador

A parte mais trabalhosa do método anterior é a alocação dos autovalores de  $G$ ; o caminho sugerido era transformar o problema, através de dualidade, na busca de uma realimentação de estados  $F$  capaz de designar a contento o espectro de  $A^T + C^T F$ . Vale ressaltar que podem ser utilizados também, métodos diretos sem empregar a dualidade. Problemas deste tipo podem ser muito facilitados quando as matrizes envolvidas exibem determinadas formas canônicas. A idéia é aproveitar possíveis vantagens oferecidas pela particular base em que se encontram as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Assim, quando as equações dinâmicas da planta apresentarem certas estruturas particulares, o cálculo prático dos observadores poderá se simplificar.

Em outras palavras, o problema de se encontrar uma injeção de saída  $J$  tal que  $\lambda(A - JC) \subset \mathbb{C}^-$  pode ter solução direta quando  $A$  e  $C$  estiverem em determinadas formas canônicas.

Supomos inicialmente que as matrizes  $A$  e  $C$  da planta já se encontram na forma canônica do observador, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{e} \quad C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$$

onde o polinômio característico de  $A$  é:

$$p_{C_A}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \quad (4.9)$$

Devemos solucionar as relações fundamentais dos observadores mais uma vez. Escolhemos, como no caso do observador identidade,  $T = I_n$ . Com isto, (4.2) e (4.3) serão trivialmente satisfeitas pondo  $H = B$ ,  $M = I_n$  e  $N = 0$ . Falta ainda escolher  $J$  de modo a posicionar o espectro de  $G = A - JC$  em  $\mathbb{C}^-$ . Nesta etapa os efeitos simplificadores da forma canônica do observador podem ser sentidos. Impondo para  $G$  um formato semelhante ao de  $A$ , teremos:

$$G = \begin{bmatrix} -g_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -g_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -g_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -g_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Tendo  $G$  este formato, seus autovalores podem ser designados pela escolha apropriada dos  $g_i$ . Concluiríamos também que a matriz  $A - G$  tem todas as colunas nulas exceto a primeira:

$$A - G = \begin{bmatrix} g_{n-1} - a_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ g_{n-2} - a_{n-2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1 - a_1 & 0 & \dots & 0 \\ g_0 - a_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Como devemos ter  $A - G = JC$ , e como  $CC^T = 1$ , podemos encontrar  $J$  a partir de:

$$J = (A - G)C^T = \begin{bmatrix} g_{n-1} - a_{n-1} \\ g_{n-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ g_1 - a_1 \\ g_0 - a_0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

O uso da forma canônica realmente simplificou os cálculos: a matriz  $J$  pode ser escolhida de maneira direta, bastando conhecer os coeficientes do polinômio característico da planta e os autovalores desejados para o estimador. Assim, podemos escrever o seguinte algoritmo.

### Algoritmo - Construção de Observadores via Forma Canônica

Este algoritmo permite a escolha de matrizes que satisfazem as relações fundamentais dos observadores e a subsequente construção de observadores de ordem completa via uma mudança de bases que coloca a planta na Forma Canônica do Observador. A planta deve ser observável, possuir uma única variável de saída, e as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os dados iniciais, bem como os autovalores desejados para o estimador.

1. Encontrar  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\bar{A} = PAP^{-1}$ ,  $\bar{B} = PB$  e  $\bar{C} = CP^{-1}$  estejam na forma canônica do observador.
2. Sendo  $p_{C_G}(s) = s^n + g_{n-1}s^{n-1} + \dots + g_0$  o polinômio característico desejado para o estimador, construir a matriz  $G$  como:

$$G = \begin{bmatrix} -g_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -g_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -g_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -g_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

3. Calcular  $J = (\bar{A} - G)\bar{C}^T$ .

4. As matrizes  $T = I_n$ ,  $G$ ,  $H = \bar{B}$ ,  $J$ ,  $M = I_n$  e  $N = 0$  satisfazem as relações fundamentais dos observadores.
5. O estimador procurado é descrito por:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = G z(t) + H u(t) + J y(t) \\ w(t) = M z(t) \end{cases}$$

Sua saída  $w(t) = z(t)$  é uma estimativa para  $\bar{x}(t)$ . Para estimar  $x(t)$  devemos usar  $Q w(t)$ , onde  $Q = P^{-1}$ .

Para resolver o item 1 deste algoritmo há métodos em [8]. A seguir serão desenvolvidos exemplos a fim de ilustrar o algoritmo desenvolvido.

EXEMPLO 4.3: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1,7 & -0,8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

1. Encontrando  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\bar{A} = P A P^{-1}$ ,  $\bar{B} = P B$  e  $\bar{C} = C P^{-1}$  estejam na forma canônica do observador.

Uma maneira de calcular a matriz  $P$  para sistemas com uma entrada é:

- (a) sendo o polinômio característico de  $A$ :  $p_C = s^3 + 0,8s^2 + 1,7s + 1$ .
- (b) calculando as colunas de  $Q$ , pois  $P = Q^T$ .

$$q_1 = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$q_2 = (A^T + a_{n-1} I_3) q_1 = (A^T + 0,8 I_3) q_1 = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$q_3 = ((A^T)^2 + a_{n-1} A^T + a_{n-2} I_3) q_1 = ((A^T)^2 + 0,8 A^T + 1,7 I_3) q_1 = \begin{bmatrix} 1,7 \\ 0,8 \\ 1 \end{bmatrix};$$

(c) obtendo  $P$ .

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0,8 & 1,7 \\ 0 & 1 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad P = Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & 1 & 0 \\ 1,7 & 0,8 & 1 \end{bmatrix};$$

(d) as matrizes após a transformação:

$$\bar{A} = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} -0,8 & 1 & 0 \\ -1,7 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = P B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{C} = C P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

2. Desejando rapidez de convergência caracterizada por autovalores localizados em  $-1$ , temos:  $p_{C_G}(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$  o polinômio característico desejado para o estimador e a matriz  $G$  como:

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3. Calculando  $J = (\bar{A} - G) \bar{C}^T$ .

$$J = \begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

4. As matrizes  $T = I_3$ ,  $G$ ,  $H = \bar{B}$ ,  $J$ ,  $M = I_3$  e  $N = 0$  satisfazem as relações fundamentais dos observadores.

5. O estimador procurado é descrito por:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,3 \\ 0 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) = z(t) \end{cases}$$

EXEMPLO 4.4: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

1. Encontrando  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\bar{A} = P A P^{-1}$ ,  $\bar{B} = P B$  e  $\bar{C} = C P^{-1}$  estejam na forma canônica do observador.

Uma maneira de calcular a matriz  $P$  para sistemas com uma entrada é:

(a) sendo o polinômio característico de  $A$ :  $p_C = s^3 - 3s^2 - 2s - 1$ .

(b) calculando as colunas de  $Q$ , pois  $P = Q^T$ .

$$q_1 = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$q_2 = (A^T + a_{n-1} I_3) q_1 = (A^T - 3 I_3) q_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$q_3 = ((A^T)^2 + a_{n-1} A^T + a_{n-2} I_3) q_1 = ((A^T)^2 - 3 A^T - 2 I_3) q_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

(c) obtendo  $P$ .

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad P = Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix};$$

(d) as matrizes após a transformação:

$$\bar{A} = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = P B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{C} = C P^{-1} = [1 \ 0 \ 0];$$

2. Desejando rapidez de convergência caracterizada por autovalores localizados em  $-1$ , temos:  $p_{C_G}(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$  o polinômio característico desejado para o estimador e a matriz  $G$  como:

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3. Calculando  $J = (\bar{A} - G)\bar{C}^T$ .

$$J = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix};$$

4. As matrizes  $T = I_3$ ,  $G$ ,  $H = \bar{B}$ ,  $J$ ,  $M = I_3$  e  $N = 0$  satisfazem as relações fundamentais dos observadores.

5. O estimador procurado é descrito por:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} y(t) \\ w(t) = z(t) \end{cases}$$

## 4.5 Observador de Estado Robusto

Nesta seção mostramos um observador robusto devido a Da-Wei Gu e Fu Wah Poon [11] e [28], baseado na inclusão de um termo extra no tradicional projeto de observadores de Luenberger, utilizando o teorema de estabilidade de Lyapunov e a equação algébrica de Riccati. Posteriormente são vistos métodos para plantas instáveis e para perturbações na matriz  $B$ . Em seguida o projeto da matriz de ganho  $J$ , através do método de realimentação de estado.

No presente estudo será considerada a incerteza no modelo. A incerteza no modelo pode ser modelada como sinais de distúrbios ou como perturbações na dinâmica da planta. Sinais de distúrbios representam ruídos nos sensores e/ou nos atuadores, e perturbações representam incertezas nos parâmetros, onde a estrutura do modelo é conhecida. A perturbação é a pior das duas, assim consideraremos o efeito de um modelo perturbado na observação de estado. A situação mais comum na prática é a de perturbações afetando a dinâmica do sistema, ou seja, a matriz  $A$ .

A descrição do observador de Luenberger, ou identidade, já foi feita anteriormente, na seção 4.2. Vamos agora repeti-la para um caso ligeiramente mais geral, onde a planta é a seguinte:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (4.12)$$

As dinâmicas do observador são definidas a seguir,

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu + J(y - \tilde{y}) \\ \tilde{y} = Cz + Du \\ w = z \end{cases} \quad (4.13)$$

onde  $J$  é a matriz de ganho a ser projetada.

Utilizando a nomenclatura dos autores, chamaremos de resíduo a diferença entre a saída  $y$  da planta e a saída  $\tilde{y}$  do observador.

$$r(t) = y(t) - \tilde{y}(t) \quad (4.14)$$

O resíduo pode ser expresso como

$$\begin{aligned} r &= y - \tilde{y} \\ &= Cx + Du - Cz - Du \\ &= C(x - z) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pela definição do erro de estado:  $e = x - z$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{z} \\ &= Ax + Bu - Az - Bu - JCe \\ &= A(x - z) - JCe \\ &= (A - JC)e \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pode-se ver que  $(A - JC)$  deve ser estável para que o erro tenda a zero, resultado bem conhecido.

### O Teorema de Estabilidade de Lyapunov

O teorema de estabilidade de Lyapunov é o seguinte:

**TEOREMA 4.3** Um sistema dinâmico é assintoticamente estável se existe uma função  $V$  dos estados do sistema com as seguintes propriedades:

- $V$  é positiva para todos os valores não nulos dos estados
- $V$  é zero quando os estados são zero
- A derivada de  $V$  em relação ao tempo é negativa ao longo da trajetória do sistema, isto é,  $\dot{V} < 0$ .

Este teorema é muito conhecido e demonstrações para ele podem ser encontradas, por exemplo, em [5], [17], [16], [21], [26], [28] e [29].

Sendo  $P$  uma matriz ( $n \times n$ ) qualquer, a forma quadrática  $x^T P x$  sempre pode ser escrita como  $x^T M x$  onde  $M$  é simétrica. É fácil estabelecer este fato:

$$\begin{aligned} x^T P x &= \frac{1}{2} (x^T P x + x^T P x) \\ &= \frac{1}{2} (x^T P x + x^T P^T x) \\ &= \frac{1}{2} x^T (P + P^T) x \\ &= x^T M x \end{aligned}$$

onde  $M = \frac{1}{2} (P + P^T) = M^T$ , sendo portanto simétrica.

Agora será ilustrado o uso do teorema da estabilidade de Lyapunov na análise do observador de Luenberger. O objetivo do observador é fazer  $e \rightarrow 0$ , através da escolha apropriada de  $J$ . Usando Lyapunov, o erro de estado tenderá a zero se pudermos achar uma função que satisfaça as propriedades dadas acima. Seja a seguinte função de energia:

$$V = \frac{1}{2} e^T P e \tag{4.17}$$

onde  $P$  é uma matriz positiva definida e portanto  $V$  satisfaz as duas primeiras condições do teorema. Pode-se supor que  $P$  é simétrica, sem perda de generalidade. Derivando a função de energia temos

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [(A - JC) e]^T P e + e^T P [(A - JC) e] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^T (A - JC)^T P e + e^T P (A - JC) e \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^T \left\{ (A - JC)^T P + P (A - JC) \right\} e\end{aligned}$$

Portanto, a terceira condição do teorema será satisfeita se a matriz  $P > 0$  puder ser encontrada de forma a satisfazer a seguinte inequação

$$(A - JC)^T P + P (A - JC) < 0 \quad (4.18)$$

Para  $P > 0$  e para assegurar a inequação,  $(A - JC)$  deve ser estável. E ainda, o par  $\langle C, A \rangle$  deve ser observável ou pelo menos detetável para garantir que  $J$  existe tal que os autovalores de  $(A - JC)$  possam ser colocados em  $\mathbb{C}^-$ . Dessa forma, uma simples derivação da equação do erro de estado e da aplicação do teorema da estabilidade de Lyapunov ilustra o principal método de aplicação na parte teórica deste estudo.

### 4.5.1 Estimação de Estado Robusta

O desempenho do observador será analisado quando se considera uma perturbação no modelo da planta. A perturbação é representada pela adição à matriz de estado nominal da planta da matriz  $\Delta_A$ , que representa a incerteza nos parâmetros. Assume-se que existe um limite no tamanho desta incerteza. A dinâmica da planta com perturbação passa a ser

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + \Delta_A) x + B u \\ y = C x + D u \end{cases} \quad (4.19)$$

onde  $\|\Delta_A\|_2 < \delta$  com  $\delta$  sendo um número positivo conhecido. Considerando-se o observador de Luenberger previamente definido, o erro de estado fica:

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= \dot{x} - \dot{z} \\
&= (A_0 + \Delta_A)x + Bu - A_0z - Bu - J(y - \tilde{y}) \\
&= A_0x + \Delta_Ax - A_0z - J(Cx + Du - Cz - Du) \\
&= A_0(x - z) - JC(x - z) + \Delta_Ax \\
&= (A_0 - JC)e + \Delta_Ax
\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde se nota que  $e(t)$  tende a zero apenas quando  $x(t) \rightarrow 0$ . Este método visa eliminar o efeito da perturbação de tal forma que o erro de estado tenda a zero.

### Generalizando o Projeto

A idéia básica do observador proposto é a introdução de um termo extra na equação de  $z$ . Esta função extra,  $\alpha$ , é utilizada para superar os efeitos da perturbação  $\Delta_A$  e forçar o erro de estado a convergir para zero. As quantidades que deverão ser medidas pela função serão determinadas mais à frente. Seja então o observador com a adição do novo sinal.

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0z + Bu + J(y - \tilde{y}) + \alpha \\ \tilde{y} = Cz + Du \end{cases} \tag{4.21}$$

A equação do resíduo é a mesma mostrada na equação (4.15) e a partir do erro de estado definido na equação (2.8), tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= \dot{x} - \dot{z} \\
&= (A_0 + \Delta_A)x + Bu - A_0z - Bu - J(y - \tilde{y}) - \alpha \\
&= A_0x + \Delta_Ax - A_0z - J(Cx + Du - Cz - Du) - \alpha \\
&= A_0(x - z) - JC(x - z) + \Delta_Ax - \alpha \\
&= (A_0 - JC)e + \Delta_Ax - \alpha
\end{aligned} \tag{4.22}$$

O termo extra  $\alpha$  aparece na equação do erro de estado onde tem o propósito de eliminar o efeito do termo  $\Delta_Ax$ .

LEMA 4.1 Dados  $e_x, z \in \mathbb{R}^n$ , e  $P = P^T$  e  $\Delta_A$  matrizes  $(n \times n)$  onde  $\|\Delta_A\|_2 < \delta$  então

$$e_x^T P \Delta_A z \leq \frac{1}{2} e_x^T P^2 e_x + \frac{1}{2} z^T \delta^2 z$$

DEMONSTRAÇÃO: Ver Poon (2000) [28]. □

TEOREMA 4.4 Dado o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + \Delta_A) x + B u \\ y = C x + D u \end{cases}$$

onde  $\|\Delta_A\|_2 < \delta$ , então o erro de estado do observador de estado robusto (4.21) converge para zero ( $e \rightarrow 0$ ) se

$$\alpha \geq \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \quad (4.23)$$

onde  $P > 0$  e satisfaz a seguinte inequação matricial

$$(A_0 - J C)^T P + P (A_0 - J C) + 2 P^2 + \delta^2 I < 0 \quad (4.24)$$

onde  $J$  é tal que  $(A_0 - J C)$  é estável.

DEMONSTRAÇÃO [28]: O objetivo é fazer  $e \rightarrow 0$ , através da escolha apropriada de  $J$  e  $\alpha$ . Este objetivo é alcançado utilizando-se o teorema da estabilidade de Lyapunov onde a função positiva definida de energia é escolhida e sua derivada deve ser negativa. Portanto, seja a seguinte função de energia:

$$V = \frac{1}{2} e^T P e$$

onde  $P$  é uma matriz positiva definida a ser determinada. Sua derivada é:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ [(A_0 - J C) e + \Delta_A x - \alpha]^T P e + e^T P [(A_0 - J C) e + \Delta_A x - \alpha] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2} \left\{ [(A_0 - JC)e]^T P e + e^T P (A_0 - JC)e + (\Delta_A x)^T P e + e^T P (\Delta_A x) \right. \\
&\quad \left. - \alpha^T P e - e^T P \alpha \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ e^T (A_0 - JC)^T P e + e^T P (A_0 - JC)e + (\Delta_A x)^T P e + e^T P (\Delta_A x) \right. \\
&\quad \left. - \alpha^T P e - e^T P \alpha \right\}
\end{aligned}$$

Uma vez que  $e$ ,  $\Delta_A x$  e  $\alpha$  são vetores e  $P$  é simétrica, temos:  $(\Delta_A x)^T P e = e^T P (\Delta_A x)$  e  $\alpha^T P e = e^T P \alpha$  e a derivada da função de energia fica

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{2} \left\{ e^T (A_0 - JC)^T P e + e^T P (A_0 - JC)e + 2e^T P (\Delta_A x) - 2e^T P \alpha \right\} \\
&= \frac{1}{2} e^T \left[ (A_0 - JC)^T P + P (A_0 - JC) \right] e + e^T P (\Delta_A x) - e^T P \alpha \\
&= \frac{1}{2} e^T \left[ (A_0 - JC)^T P + P (A_0 - JC) \right] e + e^T P \Delta_A (e + z) - e^T P \alpha \\
&= \frac{1}{2} e^T \left[ (A_0 - JC)^T P + P (A_0 - JC) \right] e + e^T P \Delta_A e + e^T P \Delta_A z - e^T P \alpha
\end{aligned}$$

A partir do lema 4.1 podem-se deduzir as seguintes inequações:

$$\begin{aligned}
e^T P \Delta_A e &\leq \frac{1}{2} e^T P^2 e + \frac{1}{2} e^T \delta^2 e \\
e^T P \Delta_A z &\leq \frac{1}{2} e^T P^2 e + \frac{1}{2} z^T \delta^2 z
\end{aligned}$$

onde a inequação  $\Delta_A^T \Delta_A < \delta^2 I$  foi utilizada. Conseqüentemente

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq \frac{1}{2} e^T \left[ (A_0 - JC)^T P + P (A_0 - JC) \right] e + \frac{1}{2} e^T P^2 e + \frac{1}{2} e^T \delta^2 e + \frac{1}{2} e^T P^2 e \\
&\quad + \frac{1}{2} z^T \delta^2 z - e^T P \alpha \\
&= \frac{1}{2} e^T \left[ (A_0 - JC)^T P + P (A_0 - JC) \right] e + e^T P^2 e + \frac{1}{2} e^T \delta^2 e + \frac{1}{2} z^T \delta^2 z \\
&\quad - e^T P \alpha \\
&= \frac{1}{2} e^T \left[ (A_0 - JC)^T P + P (A_0 - JC) + 2P^2 + \delta^2 \right] e + \frac{1}{2} \delta^2 z^T z - e^T P \alpha
\end{aligned}$$

Assim a condição suficiente para  $\dot{V}$  ser negativa definida são as equações (4.25) e (4.26) a seguir,

$$(A_0 - JC)^T P + P(A_0 - JC) + 2P^2 + \delta^2 I < 0 \quad (4.25)$$

$$e^T P \alpha \geq \frac{1}{2} \delta^2 z^T z \quad (4.26)$$

Se fizermos  $\alpha = \gamma(t) P^{-1} C^T r$  então a inequação (4.26) fica,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 z^T z &\leq e^T P \alpha \\ &= e^T P \gamma(t) P^{-1} C^T r \\ &= \gamma(t) r^T r \end{aligned}$$

Logo, com

$$\gamma(t) \geq \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} \quad (4.27)$$

a inequação (4.26) é válida. Portanto, o observador é robusto na presença de perturbações no modelo da matriz  $A$  se escolhermos  $\alpha$  da seguinte maneira:

$$\alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r$$

onde  $P > 0$  é a solução da inequação (4.25).  $\square$

O diagrama de blocos que ilustra as conexões a serem feitas na implementação do estimador de estado, pode ser observado na figura 4.3.

**OBSERVAÇÃO 4.1:** Existe um problema em potencial na implementação do resultado acima. O erro de estado  $e$  vai a zero, e a magnitude do resíduo  $r = C e$  também ficará pequena. Com isso a magnitude de  $\alpha$  crescerá ilimitadamente e tornará impossível a computação (exceto em alguns casos especiais nos quais o estado estimado vai a zero). Na prática, uma tolerância (limite inferior) de  $r$  pode ser adotada a fim de prevenir tais situações. Isto implicará em que o erro de estado não vá necessariamente a zero,

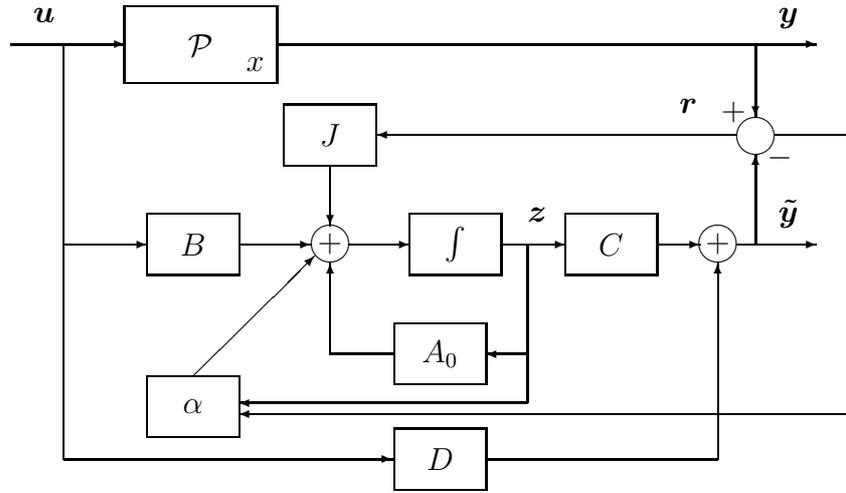


Figura 4.3: Diagrama de blocos das conexões necessárias para implementar o estimador de estado

mas tenda e fique contido na vizinhança da origem. Uma discussão mais detalhada sobre este problema pode ser encontrada na referência [28].

OBSERVAÇÃO 4.2: A inequação (4.24) envolve duas matrizes desconhecidas  $P$  e  $J$ , e sua solução não é direta, entretanto ao introduzir-se o parâmetro  $\xi$  pode-se reescrevê-la como uma equação algébrica de Riccati (ARE)

$$(A_0 - JC)^T P + P(A_0 - JC) + 2P^2 + \delta^2 I + \xi^2 I = 0 \quad (4.28)$$

Em comparação com o caso nominal, o problema foi resolvido pela equação de Lyapunov e tem solução através da equação algébrica de Riccati. Note que a solução não requer uma matriz  $P$  estabilizante, somente que  $P > 0$ .

### Resolvendo a Equação Algébrica de Riccati

A solução da equação algébrica de Riccati (4.28) não é direta, já que a adição do parâmetro  $J$  não deixa a equação na forma padrão. Os termos quadrático e constantes são ambos positivos enquanto que na forma padrão os sinais são opostos. Este tipo de equação algébrica de Riccati ocasionalmente aparece na literatura, mas infelizmente a

existência de solução não está catalogada, havendo um exemplo recente que pode ser observado em [1].

**TEOREMA 4.5: (Existência de Solução)** Suponha que o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{ou} \quad G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

é controlável e observável e que  $\Re \lambda(A) < 0 (> 0)$ . Então existe uma solução real e simétrica da seguinte equação algébrica de Riccati:

$$A^T K + K A - K B B^T K - C^T C = 0$$

tendo a propriedade  $\Re \lambda(A + B B^T K) \leq 0 (\geq 0)$  se e somente se

$$I - B^T (-j\omega I - A^T)^{-1} C^T C (j\omega I - A^T)^{-1} B \geq 0 \quad \forall \omega$$

Além disso, a solução é única e tem uma propriedade a mais:  $K = K^T < 0$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Ver Willems [33]. □

Este resultado, básico para toda a teoria do Regulador Linear Quadrático, não tem aplicação para o caso em questão.

**COROLÁRIO 4.1: (Existência de Solução)** Assuma que o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{ou} \quad G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

é controlável e observável e que  $\Re \lambda(A) < 0$ . Então existe uma única solução real e simétrica  $P = P^T > 0$  da seguinte equação algébrica de Riccati:

$$A^T P + P A + P B B^T P + C^T C = 0$$

tendo a propriedade  $\Re \lambda(A - B B^T P) \leq 0$  se e somente se  $\|G(j\omega)\|_\infty \leq 1 \forall \omega$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Direto a partir do teorema 4.5. □

Pode-se reescrever a equação (4.28) da seguinte forma:

$$(A_0 - JC)^T P + P(A_0 - JC) + P \begin{pmatrix} \sqrt{2} I \\ \sqrt{2} I \end{pmatrix} P + \begin{bmatrix} \delta I \\ \xi I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta I \\ \xi I \end{bmatrix} = 0 \quad (4.29)$$

A condição necessária e suficiente para a existência da solução  $P$  da equação algébrica de Riccati (4.29), em função de  $J$  e  $\xi$  é dada pelo corolário 4.1. Suponha que

- o sistema

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_0 - JC & \sqrt{2} I \\ \hline \begin{bmatrix} \delta I \\ \xi I \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right] \quad (4.30)$$

é observável e controlável.

- $\Re \lambda(A_0 - JC) < 0$ .

Então existe uma solução única e positiva definida para  $P$  da equação (4.29), se e somente se  $\|G(j\omega)\|_\infty \leq 1 \forall \omega$ , ou seja,

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A_0 - JC & I \\ \hline \begin{bmatrix} \delta I \\ \xi I \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right] \right\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.31)$$

Dessa forma, a questão é a escolha de  $\xi$  e da matriz de ganho  $J$  que satisfaçam as condições acima. Vários métodos podem ser utilizados para projetar  $J$  e  $\xi$ , tal como o convencional método de alocação de pólos. Mais detalhes estão na seção 3.

O procedimento de projeto definido acima pode ser resumido da seguinte forma:

- Seja  $\delta > \|\Delta_A\|_2$ .
- Atribua um valor a  $\xi$  e projete  $J$  utilizando o método convencional de alocação de pólos.

- Verifique se a inequação

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A_0 - JC & I \\ \hline \begin{bmatrix} \delta I \\ \xi I \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right] \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

é satisfeita. Projete  $J$  novamente, se necessário, até que a inequação seja satisfeita.

- Utilizando  $J$  e  $\xi$  obtidos acima resolva a seguinte equação algébrica de Riccati para  $P$ .

$$(A_0 - JC)^T P + P(A_0 - JC) + P(2I)P + (\delta^2 + \xi^2)I = 0$$

- Construa o seguinte observador de estado robusto:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + B u + J(y - \tilde{y}) + \alpha \\ \tilde{y} = C z + D u \\ r = y - \tilde{y} \\ \alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \end{cases}$$

É importante notar que alguns passos do procedimento acima podem ser ignorados em uma aplicação prática. A tarefa de procurar  $\xi$  e  $J$  capazes de satisfazer a inequação (4.5.1) tem como principal objetivo garantir que a equação algébrica de Riccati tenha solução. Mas o uso de *softwares*, como por exemplo o MATLAB, permite verificar numericamente se a equação algébrica de Riccati tem ou não solução positiva definida, para isso encontrar  $J$  tal que  $A - JC$  seja estável e usar  $\xi$  qualquer.

A fim de ilustrar o procedimento descrito acima será feito agora um exemplo.

EXEMPLO 4.5: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1,7 & -0,8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Seja  $\delta > \|\Delta_A\|_2$ .

Escolhendo o maior valor possível que não instabiliza o sistema:  $\delta = 0,069344$ .

2. Utilizando a matriz calculada no exemplo 4.1:  $J = \begin{bmatrix} 2,2 & -0,46 & -3,372 \end{bmatrix}^T$

que aloca os três autovalores de  $(A - JC)$  em  $-1$ . Escolhemos  $\xi = 0,1$ .

3. Utilizando  $J$  e  $\xi$  obtidos acima e resolvendo a equação algébrica de Riccati.

$$(A_0 - JC)^T P + P(A_0 - JC) + P(2I)P + (\delta^2 + \xi^2)I = 0$$

Por meio de auxílio computacional obtemos:  $P = \begin{bmatrix} 1,9344 & -0,8625 & 0,0654 \\ -0,8625 & 0,5628 & 0,1310 \\ 0,0654 & 0,1310 & 0,3881 \end{bmatrix}$ .

4. Construir o seguinte observador de estado robusto:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + B u + J(y - \tilde{y}) + \alpha \\ \tilde{y} = C z + D u \\ r = y - \tilde{y} \\ \alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \end{cases}$$

## 4.5.2 Método para Plantas Instáveis

Nesta seção será generalizado o projeto do estimador de estado robusto, descrito na seção anterior, para o caso de uma planta instável. Quando a planta é instável, o modelo é previamente modificado de acordo com o

LEMA 4.2 Dado o sistema

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

onde o par  $\langle C, A \rangle$  é observável, existe uma transformação  $T$  tal que

$$\hat{A} = T A T^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{array} \right]$$

$$\hat{B} = T B = \left[ \begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{array} \right]$$

$$\hat{C} = C T^{-1} = [ I \quad 0 ]$$

com  $\hat{A}_{22}$  estável.

DEMONSTRAÇÃO: Ver Poon (2000) [28]. □

Pelo lema 4.2 temos que um sistema observável pode ser transformado para a seguinte forma:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right]$$

onde  $C_1 = I$ ,  $C_2 = 0$  e  $A_{22}$  estável. Supondo que a planta já se encontra nesta forma, e que apenas os blocos diagonais de  $A$  são perturbados, temos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} + \Delta_1) x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_{21} x_1 + (A_{22} + \Delta_2) x_2 + B_2 u \\ y = x_1 + D u \end{cases} \quad (4.32)$$

onde  $\|\Delta_1\|_2 < \delta_1$  e  $\|\Delta_2\|_2 < \delta_2$ . Note que as perturbações são adicionadas ao sistema transformado e não ao original. O observador será:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u + \alpha_1 + J(y - \tilde{y}) \\ \dot{z}_2 = A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u + \alpha_2 \\ \tilde{y} = z_1 + D u \end{cases} \quad (4.33)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são funções mensuráveis que serão determinadas depois. O resíduo é definido como

$$\begin{aligned} r &= y - \tilde{y} \\ &= x_1 + D u - z_1 - D u \\ &= x_1 - z_1 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Existem dois erros de estado, o primeiro é definido como:  $e_{x_1} = x_1 - z_1$  e o segundo como:  $e_{x_2} = x_2 - z_2$ . A equação para  $e_{x_1}$  é

$$\begin{aligned} \dot{e}_{x_1} &= \dot{x}_1 - \dot{z}_1 \\ &= (A_{11} + \Delta_1) x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u - A_{11} z_1 - A_{12} z_2 - B_1 u - \alpha_1 - J(y - \tilde{y}) \\ &= A_{11} (x_1 - z_1) - J(x_1 - z_1) + A_{12} (x_2 - z_2) + \Delta_1 x_1 - \alpha_1 \\ &= (A_{11} - J) e_{x_1} + A_{12} e_{x_2} + \Delta_1 x_1 - \alpha_1 \end{aligned} \tag{4.35}$$

e a segunda equação do erro de estado é:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{x_2} &= \dot{x}_2 - \dot{z}_2 \\ &= A_{21} x_1 + (A_{22} + \Delta_2) x_2 + B_2 u - A_{21} z_1 - A_{22} z_2 - B_2 u - \alpha_2 \\ &= A_{21} x_1 - A_{21} z_1 + A_{22} x_2 - A_{22} z_2 + \Delta_2 x_2 - \alpha_2 \\ &= A_{21} (x_1 - z_1) + A_{22} (x_2 - z_2) + \Delta_2 x_2 - \alpha_2 \\ &= A_{21} e_{x_1} + A_{22} e_{x_2} + \Delta_2 x_2 - \alpha_2 \end{aligned} \tag{4.36}$$

TEOREMA 4.6 Seja o sistema instável,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (A_{11} + \Delta_1) x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_{21} x_1 + (A_{22} + \Delta_2) x_2 + B_2 u \\ y = x_1 + D u \end{cases}$$

onde  $\|\Delta_1\|_2 < \delta_1$  e  $\|\Delta_2\|_2 < \delta_2$ . Então o erro de estado do observador robusto (4.33) converge para zero ( $x_1 - z_1 \rightarrow 0$  e  $x_2 - z_2 \rightarrow 0$ ) se

$$\alpha_1 \geq \frac{2 \|r\| \|P\| \delta_1 \|z_1\| + \delta_2^2 z_2^T z_2 P^{-1} r}{2 r^T r}$$

$$\alpha_2 \geq 0$$

onde  $P > 0$  é a solução da seguinte equação algébrica de Riccati,

$$(A_{11} - J)^T P + P (A_{11} - J) + 2 P^2 + (\delta_1^2 + \xi^2 + 1) I = 0 \quad (4.37)$$

onde  $\xi$  é constante e  $J$  é escolhido tal que  $A_{11} - J$  é estável.

DEMONSTRAÇÃO: Ver Poon (2000) [28]. □

### Resolvendo a Equação Algébrica de Riccati

Pode-se observar que a equação algébrica de Riccati (4.37) não está na forma padrão, mas o corolário 4.1 diz que existe uma única solução para ela se:

- O sistema

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_{11} - J}{\sqrt{\delta_1^2 + \xi^2 + 1} I} & \sqrt{2} I \\ \hline & 0 \end{array} \right] \quad (4.38)$$

é observável e controlável.

- $\Re \lambda(A_{11} - J) < 0$ .
- $\|G(j\omega)\|_\infty \leq 1 \forall \omega$ .

Dessa forma, a tarefa é encontrar  $J$  e  $\xi$  tal que  $A_{11} - J$  seja estável e

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_{11} - J}{\sqrt{\delta_1^2 + \xi^2 + 1} I} & I \\ \hline & 0 \end{array} \right] \right\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.39)$$

O método descrito acima pode ser resumido como:

- Seja  $\delta_1 > \|\Delta_1\|_2$  e  $\delta_2 > \|\Delta_2\|_2$ .
- Projete  $J$  e  $\xi$  tal que  $\left\| \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_{11} - J}{\sqrt{\delta_1^2 + \xi^2 + 1} I} & I \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \right\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $A_{11} - J$  seja estável.
- Resolva a seguinte equação algébrica de Riccati para  $P$ .

$$(A_{11} - J)^T P + P(A_{11} - J) + 2P^2 + (\delta_1^2 + \xi^2 + 1)I = 0$$

- Construa o seguinte observador de estado robusto.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u + \alpha_1 + J(y - \tilde{y}) \\ \dot{z}_2 = A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u + \alpha_2 \\ \tilde{y} = z_1 + D u \\ \alpha_1 = \frac{2 \delta_1 \|r\| \|P\| \|z_1\| + \delta_2^2 z_2^T z_2}{2 r^T r} P^{-1} r \\ \alpha_2 = 0 \\ r = y - \tilde{y} \end{array} \right.$$

Lembramos que o uso de recursos computacionais pode fornecer diretamente uma solução  $P > 0$  para a equação algébrica de Riccati, evitando assim o problema de se resolver a inequação (4.39).

O teorema a seguir nos fornece uma equação de Riccati alternativa para a equação (4.37) e que pode ser de resolução mais fácil.

**TEOREMA 4.7** Seja o sistema instável,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = (A_{11} + \Delta_1) x_1 + A_{12} x_2 + B_1 u \\ \dot{x}_2 = A_{21} x_1 + (A_{22} + \Delta_2) x_2 + B_2 u \\ y = x_1 + D u \end{array} \right.$$

onde  $\|\Delta_1\|_2 < \delta_1$  e  $\|\Delta_2\|_2 < \delta_2$ . Então o erro de estado do observador de estado robusto (4.33) converge para zero ( $x_1 - z_1 \rightarrow 0$  e  $x_2 - z_2 \rightarrow 0$ ) se

$$\alpha_1 = \frac{2 \|r\| \|P\| \delta_1 \|z_1\| + \delta_2^2 z_2^T z_2}{2 r^T r} P^{-1} r$$

$$\alpha_2 = 0$$

onde  $P > 0$  é a solução da seguinte equação algébrica de Riccati,

$$(A_{11} - J)^T P + P(A_{11} - J) + P(A_{12} A_{12}^T + \delta_1^2 I) P + (1 + \xi^2) I = 0 \quad (4.40)$$

onde  $\xi$  é constante e  $J$  é escolhido tal que  $A_{11} - J$  é estável.

DEMONSTRAÇÃO: Ver Poon (2000) [28].  $\square$

A seguir temos um exemplo de uma planta instável para ilustrar o método descrito anteriormente.

EXEMPLO 4.6: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

*A matriz  $C$  já está na forma  $\left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \end{array} \right]$ , mas a matriz  $A_{22}$  não é estável. Por isso será aplicada uma transformação de similaridade que modifique somente as estruturas de  $A$  e  $B$  e se obtenha uma matriz  $A_{22}$  estável.*

1. Usando  $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -18 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , teremos  $\bar{B} = B$ ,  $\bar{C} = C$  e

$$\bar{A} = T A T^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -7 & -5 & 1 \\ -25 & -16 & 3 \end{bmatrix}$$

onde  $A_{22}$  é estável.

2. Seja  $\delta_1 > \|\Delta_1\|_2$  e  $\delta_2 > \|\Delta_2\|_2$ .

$$\delta_1 = 0,1 \cdot \|A_{11}\|_2 = 0,5$$

$$\delta_2 = 0,1 \cdot \|A_{22}\|_2 = 1,7059$$

3. Resolvendo a seguinte equação algébrica de Riccati.

$$(A_{11} - J)^T P + P(A_{11} - J) + 2P^2 + (\delta_1^2 + \xi^2 + 1)I = 0$$

Escolhendo  $J = 7$  e  $\xi = 0, 1$ . A solução da equação é:  $P = 0,39172$  ou  $P = 1,6083$ .

4. Construir o seguinte observador de estado robusto.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u + \alpha_1 + J(y - \tilde{y}) \\ \dot{z}_2 = A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u + \alpha_2 \\ \tilde{y} = z_1 + D u \\ \alpha_1 = \frac{2\delta_1 \|r\| \|P\| \|z_1\| + \delta_2^2 z_2^T z_2}{2r^T r} P^{-1} r \\ \alpha_2 = 0 \\ r = y - \tilde{y} \end{array} \right.$$

### 4.5.3 Perturbação no Modelo da Matriz $B$

Agora será mostrado um método para superar uma perturbação no modelo da matriz  $B$  de modo similar ao descrito nos métodos anteriores. As dinâmicas da planta são definidas a seguir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + (B_0 + \Delta_B) u \\ y = Cx + Du \end{array} \right. \quad (4.41)$$

onde  $\|\Delta_B\|_2 < \delta$ . O termo  $\alpha$  introduzido é uma função de quantidades mensuráveis, a ser determinado depois.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = Az + B_0 u + J(y - \tilde{y}) + \alpha \\ \tilde{y} = Cz + Du \end{array} \right. \quad (4.42)$$

O resíduo é definido como:

$$\begin{aligned} r &= y - \tilde{y} \\ r &= C(x - z) \end{aligned}$$

O erro de estado é  $e = x - z$  e sua derivada fica

$$\begin{aligned}
 \dot{e} &= \dot{x} - \dot{z} \\
 &= Ax + (B_0 + \Delta_B)u - Az - B_0u - J(y - \tilde{y}) - \alpha \\
 &= Ax + \Delta_B u - Az - J(y - \tilde{y}) - \alpha \\
 &= Ax + \Delta_B u - Az - JCx + JCz - \alpha \\
 &= (A - JC)e + \Delta_B u - \alpha
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

TEOREMA 3.9 Dado o sistema,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + (B_0 + \Delta_B)u \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

onde  $\|\Delta_B\|_2 < \delta$ , o erro de estado do observador de estado robusto (4.41) converge para zero se

$$\alpha = \frac{\delta u^T u}{2r^T r} P^{-1} C^T r$$

onde  $P > 0$  é a solução da seguinte equação algébrica de Riccati,

$$(A - JC)^T P + P(A - JC) + P(I)P + \xi^2 I = 0 \tag{4.44}$$

onde  $\xi$  é constante e  $J$  é escolhido tal que  $A - JC$  é estável.

DEMONSTRAÇÃO: Ver Poon (2000) [28]. □

### Resolvendo a Equação Algébrica de Riccati

Pode-se observar que a equação algébrica de Riccati (4.44) não está na forma padrão, mas o corolário 4.1 diz que existe uma única solução para (4.44) se:

- O sistema

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A - JC & I \\ \hline \xi I & 0 \end{array} \right] \tag{4.45}$$

é observável e controlável.

- $\Re \lambda(A - JC) < 0$ .
- $\|G(s)\|_\infty \leq 1$  para  $\forall \omega$ .

O método descrito acima para uma planta com perturbação no modelo da matriz  $B$ , pode ser resumido como:

- Projete  $J$  e  $\xi$  tal que  $\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A - JC & I \\ \hline \xi I & 0 \end{array} \right] \right\|_\infty \leq 1$  e  $(A - JC)$  seja estável.
- Utilizando  $J$  e  $\xi$  acima, resolve-se a seguinte equação de Riccati para  $P$ .

$$(A - JC)^T P + P(A - JC) + P^2 + \xi^2 I = 0$$

- Construa o seguinte observador de estado robusto.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = Az + B_0 u + J(y - \tilde{y}) + \alpha \\ \tilde{y} = Cz + Du \\ \alpha = \frac{\delta u^T u}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \\ r = y - \tilde{y} \end{cases}$$

onde  $\delta > \|\Delta_B\|_2$ .

Como nos casos anteriores, a solução da inequação (4.45) pode ser evitada pelo uso de recursos numéricos. A seguir será desenvolvido um exemplo a fim de ilustrar o algoritmo desenvolvido.

EXEMPLO 4.7: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1,7 & -0,8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

1. Resolvendo a seguinte equação algébrica de Riccati para  $P$ .

$$(A - JC)^T P + P(A - JC) + P^2 + \xi^2 I = 0$$

Utilizando a matriz calculada no exemplo 4.1:  $J = [2, 2 \quad -0,46 \quad -3,372]^T$

e escolhendo  $\xi = 0,1$  teremos

$$P = \begin{bmatrix} 3,9611 & -1,7392 & 0,0632 \\ -1,7392 & 1,1411 & 0,2747 \\ 0,0632 & 0,2747 & 0,8336 \end{bmatrix}$$

2. Construa o seguinte observador de estado robusto.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A z + B_0 u + J(y - \tilde{y}) + \alpha \\ \tilde{y} = C z + D u \\ \alpha = \frac{\delta u^T u}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \\ r = y - \tilde{y} \end{cases}$$

onde  $\delta = 0,01 \cdot \|B\|_2 = 0,01$ .

#### 4.5.4 Projetando a Matriz $J$

Para o projeto do observador robusto com perturbação na matriz  $A$ , nosso caso principal, devemos encontrar  $\xi$  e  $J$  tal que a inequação (4.31) associada seja satisfeita:

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A_0 - J C & I \\ \hline \begin{bmatrix} \delta I \\ \xi I \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right] \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

O problema é como resolver esta inequação. A seguir será mostrado um método que possibilita que ela seja resolvida.

#### Método de Realimentação de Estado

Este primeiro método considera a formulação do problema como um problema de realimentação de estado.

TEOREMA 4.8: (**Realimentação de Estado**) Dado o sistema

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

observável e controlável, seja  $X \geq 0$  a solução da seguinte equação algébrica de Riccati:

$$A^T X + X A - X B B^T X + C^T C = 0$$

que satisfaz  $\Re \lambda(A - B B^T X) \leq 0$ . Então, o sistema em malha fechada

$$T(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A - B B^T X & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

tem norma infinita menor ou igual a 1, isto é,

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A - B F & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \right\|_{\infty} \leq 1$$

onde  $F = B^T X$ .

DEMONSTRAÇÃO: Ver [28]. □

COROLÁRIO 4.2: (**Realimentação de Estado**) Dado o sistema

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

observável e controlável, seja  $X \geq 0$  a solução da seguinte equação algébrica de Riccati:

$$A^T X + X A - \gamma^{-2} X B B^T X + C^T C = 0$$

que satisfaz  $\Re \lambda(A - \gamma^{-2} B B^T X) \leq 0$ . Então, o sistema em malha fechada

$$T(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A - \gamma^{-2} B B^T X & \gamma^{-1} B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

tem norma infinita menor ou igual a 1, isto é,

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A - \gamma^{-2} B B^T X & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \right\|_{\infty} \leq \gamma$$

$$\forall \omega, \quad \bar{\lambda}(T(j\omega)) \leq \gamma$$

$$\gamma^2 - B^T (-j\omega I - A^T + \gamma^{-2} X B B^T)^{-1} C^T C (j\omega I - A + \gamma^{-2} X B B^T)^{-1} B \geq 0$$

DEMONSTRAÇÃO: Direto a partir do teorema 4.8.  $\square$

Resolver a inequação (4.31) é equivalente a resolver a inequação

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A_0^T - C^T J^T & [\delta I \quad \xi I] \\ \hline I & 0 \end{array} \right] \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.46)$$

O corolário 4.2 mostra como encontrar a matriz  $J$  para resolver este problema.

TEOREMA 4.9 Seja  $X \geq 0$  a solução da seguinte equação algébrica de Riccati,

$$A_0 X + X A_0^T - 2 X C^T C X + (\delta^2 + \xi^2) X^2 + \gamma^{-2} I_n = 0 \quad (4.47)$$

que satisfaz  $\Re \lambda(A_0^T - C^T C X) < 0$ . Então, o sistema

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_0^T - C^T C X & [\delta I \quad \xi I] \\ \hline I & 0 \end{array} \right] \quad (4.48)$$

tem norma infinita menor ou igual a  $\gamma$ , isto é,

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A_0^T - C^T J^T & [\delta I \quad \xi I] \\ \hline I & 0 \end{array} \right] \right\|_{\infty} \leq \gamma \quad (4.49)$$

onde  $J^T = C X$ .

DEMONSTRAÇÃO: Ver Gu & Poon (2001) [11].  $\square$

O procedimento exposto pelo teorema 4.9 para a solução de  $J$ , a partir de um valor para  $\xi$ , pode ser visto também em [27].

A partir do teorema 4.9, pode-se observar que se  $X$  é positiva definida, a solução  $P$  da equação algébrica de Riccati (4.28) será a inversa de  $X$ , com  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Sendo assim, obteve-se um método que garante a existência de solução para a equação algébrica de Riccati, e a seguir será feito um pequeno resumo de como se projetar o observador de estado robusto.

- Seja  $\delta > \|\Delta_A\|_2$  e  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

- Projete  $\xi$  de tal forma que:

$$\left\| \left[ \begin{array}{c|c} A_0^T & \sqrt{\gamma^{-2}(\delta^2 + \xi^2)} I \\ \hline I & 0 \end{array} \right] \right\|_{\infty} \leq 1 \quad \text{ou} \quad \left\| \left[ \begin{array}{c|c} A_0^T & \sqrt{(\delta^2 + \xi^2)} I \\ \hline I & 0 \end{array} \right] \right\|_{\infty} \leq \gamma \quad (4.50)$$

- Resolva a seguinte equação algébrica de Riccati para  $X$ .

$$A_0 X + X A_0^T - 2 X C^T C X + (\delta^2 + \xi^2) X^2 + \gamma^{-2} I_n = 0$$

- Faça  $J = X C^T$  e resolva a seguinte equação algébrica de Riccati para  $P$ .

$$(A_0 - J C)^T P + P (A_0 - J C) + P (2 I) P + (\delta^2 + \xi^2) I = 0$$

- Construa o seguinte observador de estado robusto:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + B u + J (y - \tilde{y}) + \alpha \\ \tilde{y} = C z + D u \\ r = y - \tilde{y} \\ \alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \end{cases}$$

O inconveniente deste método é que outra equação algébrica de Riccati (4.47) deve ser resolvida para garantir a existência de solução única para a equação algébrica de Riccati original. Esta nova equação algébrica de Riccati também não está na forma padrão onde a constante e os termos quadráticos têm o mesmo sinal. Dessa forma, não será possível resolver a equação (4.47) se a perturbação for muito grande.

Antes de prosseguir com o outro método serão desenvolvidos dois exemplos a fim de ilustrar o algoritmo desenvolvido.

EXEMPLO 4.8: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1,7 & -0,8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

1. Sendo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $\delta > \|\Delta_A\|_2 \Rightarrow \delta = 0,1 \cdot \|A\|_2 = 0,23115$ .
2. Resolvendo-se a seguinte equação algébrica de Riccati para  $X$ .

$$A_0 X + X A_0^T - 2 X C^T C X + (\delta^2 + \xi^2) X^2 + 2 I_n = 0$$

Escolhendo  $\xi = 0,1$ , a matriz encontrada é:

$$X = \begin{bmatrix} 1,3331 & 0,6718 & -1,0459 \\ 0,6718 & 2,6157 & -0,8003 \\ -1,0459 & -0,8003 & 3,4242 \end{bmatrix}$$

3. Fazendo  $J = X C^T$  e resolvendo-se a seguinte equação algébrica de Riccati para  $P$ .

$$(A_0 - J C)^T P + P (A_0 - J C) + P (2 I) P + (\delta^2 + \xi^2) I = 0$$

$$J = \begin{bmatrix} 1,3135 \\ 0,6875 \\ -0,9093 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 0,0402 & -0,0238 & -0,0225 \\ -0,0238 & 0,1436 & 0,0173 \\ -0,0225 & 0,0173 & 0,0680 \end{bmatrix};$$

4. Construa o seguinte observador de estado robusto:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + B u + J (y - \tilde{y}) + \alpha \\ \tilde{y} = C z + D u \\ r = y - \tilde{y} \\ \alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \end{cases}$$

EXEMPLO 4.9: *Seja a planta  $\mathcal{P}$  descrita por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

1. Sendo  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $\delta > \|\Delta_A\|_2 \Rightarrow \delta = 0,01 \cdot \|A\|_2 = 0,0386$ .
2. Resolvendo a seguinte equação algébrica de Riccati para  $X$ .

$$A_0 X + X A_0^T - 2 X C^T C X + (\delta^2 + \xi^2) X^2 + 2 I_n = 0$$

Escolhendo  $\xi = 0,01$ , a matriz encontrada é:

$$X = \begin{bmatrix} 7,1456 & 35,495 & 130,28 \\ 35,495 & 206,79 & 761,66 \\ 130,28 & 761,66 & 2826,2 \end{bmatrix}$$

3. Fazendo  $J = X C^T$  e resolvendo-se a seguinte equação algébrica de Riccati para  $P$ .

$$(A_0 - J C)^T P + P (A_0 - J C) + P (2 I) P + (\delta^2 + \xi^2) I = 0$$

$$J = \begin{bmatrix} 7,1456 \\ 35,495 \\ 130,28 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 0,7096 & 0,0405 & -0,0464 \\ 0,0405 & 0,3960 & -0,1054 \\ -0,0464 & -0,1054 & 0,0302 \end{bmatrix};$$

4. Construa o seguinte observador de estado robusto:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + B u + J (y - \tilde{y}) + \alpha \\ \tilde{y} = C z + D u \\ r = y - \tilde{y} \\ \alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \end{cases}$$

## 4.6 Conclusões

Neste capítulo foram mostrados alguns projetos de observadores de estado. O observador identidade é uma maneira simples e direta de se resolver as Relações Fundamentais dos Observadores. No método seguinte pode-se verificar como o uso de formas canônicas simplifica o projeto, mas o método analisado serve somente para sistemas com uma única entrada. Foi mostrado que o observador tradicional de Luenberger é equivalente ao identidade e a partir dele vimos um projeto alternativo de observador, que é robusto na presença de perturbações no modelo. O projeto necessitou da solução de equações algébricas de Riccati que não estavam na forma padrão. Foi mostrado que este tipo de equação algébrica de Riccati é resolvida primeiro satisfazendo-se a inequação associada. Dessa forma, no final do capítulo foi mostrado um método que permite que esta inequação seja satisfeita e subsequenteiramente resolve-se as equações algébricas de Riccati. O projeto de um estimador de estado robusto proposto é analisado nas simulações do capítulo 5. Este capítulo forneceu uma boa base para a construção do estimador de estado redundante que será apresentado no capítulo 4, a seguir.



# Capítulo 5

## Exemplos de Aplicação

O capítulo se inicia, na seção 1, mostrando os problemas numéricos do projeto do observador robusto devido a singularidade do termo  $\alpha$  [28]. Na seção 2, apresenta-se o exemplo de um reator químico real, instável em malha aberta, sendo projetados os observadores robusto, redundante e identidade seguidos de uma análise de desempenho. A seguir na seção 3, é feito o exemplo de uma fornalha com disparo à gás, quando o observador funciona como um monitor de estados, sendo novamente projetados os observadores robusto, redundante e identidade e sua análise. Na seção 4 são apresentadas as conclusões.

### 5.1 Problemas Numéricos do Observador de Estado Robusto

Serão mostrados os problemas numéricos que ocorrem, as singularidades de alguns termos e alteração no método decorrente.

#### 5.1.1 Questões Numéricas

Nos métodos propostos para o observador de estado robusto, aparecem alguns termos que contém singularidades. No método referente à perturbação na matriz  $A$ , quando

foi adicionado um termo extra  $\alpha$ , este foi definido como:

$$\alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \quad (5.1)$$

Claramente, não se pode implementar este termo  $\alpha$  quando  $r^T r = 0$  já que  $\alpha$  será infinito e não poderá ser computado. Para superar este problema, será feita uma substituição do termo  $r^T r$  quando  $r \rightarrow 0$  mas a partir na demonstração do teorema 3.4 deve-se satisfazer a seguinte inequação:

$$\begin{aligned} e^T P \alpha &\geq \frac{1}{2} \delta^2 z^T z \\ \frac{2}{\delta^2 z^T z} e^T P \alpha &\geq 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Esta inequação garante que a derivada da função de energia definida na demonstração é menor que zero ( $\dot{V} < 0$ ) e conseqüentemente as condições do teorema da estabilidade de Lyapunov são satisfeitos.

### 5.1.2 Considerações Sobre a Singularidade

A seguir serão listados alguns métodos que podem ser utilizados para melhorar os resultados da simulação. Será comentado também sobre como efetivamente se garante que a computação de  $\alpha$  e que a inequação (5.2) sejam satisfeitas.

1. Quando  $r^T r \leq tol$ , substitui-se o termo  $r^T r$  pelo número pequeno  $tol$ . A justificativa para esta substituição é a garantia de que o termo  $\alpha$  é sempre computado.

Se a substituição for feita no lado esquerdo da inequação (5.2) temos

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{\delta^2 z^T z} \right) e^T P \alpha &= \left( \frac{2}{\delta^2 z^T z} \right) e^T P \left( \frac{\delta^2 z^T z}{2 \cdot tol} P^{-1} C^T r \right) \\ &= e^T P \left( \frac{1}{tol} P^{-1} C^T r \right) \\ &= \frac{r^T r}{tol} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Dessa forma, o lado esquerdo da inequação (5.2) nunca será maior que um.

2. Substitui-se o termo  $r^T r$  por  $r^T r + tol$ . A justificativa para usar esta substituição se deve ao fato de que esta função  $\alpha$  suaviza o resultado em relação a função de  $\alpha$  que contém singularidade. Substituindo-se no lado esquerdo da inequação (5.2) obtemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{\delta^2 z^T z} \right) e^T P \alpha &= e^T P \left( P^{-1} C^T \frac{r}{r^T r + tol} \right) \\ &= \frac{r^T r}{r^T r + tol} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Portanto, o lado esquerdo da inequação (5.2) nunca será maior ou igual a 1.

3. Quando  $r^T r \leq tol$ , substitui-se o termo  $\frac{r}{r^T r}$  por  $\frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{tol}} \text{sign}(r)$ , onde  $n$  é o número de elementos de  $r$ . A justificativa para esta substituição é porque na simulação  $r$  converge rapidamente para zero, o que quer dizer que nos dois métodos anteriores  $\alpha$  converge para zero depois da correta estimação dos estados. A substituição garante que quando  $r \rightarrow 0$ ,  $\alpha$  não tenderá a zero. Fazendo-se a substituição no lado esquerdo da inequação (5.2) tem-se:

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{\delta^2 z^T z} \right) e^T P \alpha &= e^T P \left( P^{-1} C^T \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{tol}} \text{sign}(r) \right) \\ &= r^T \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{tol}} \begin{pmatrix} \text{sign}(r_1) \\ \vdots \\ \text{sign}(r_n) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{tol}} (|r_1| + \dots + |r_n|) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{tol}} n \sqrt{tol} \\
&= \frac{n}{\sqrt{n}} \\
&= \sqrt{n}
\end{aligned}$$

quando utiliza-se a inequação,

$$\begin{aligned}
r^T r \leq tol &\Rightarrow \sum r_i^2 \leq tol \\
&\Rightarrow r_i^2 \leq tol \\
&\Rightarrow r_i \leq \sqrt{tol} \\
&\Rightarrow \sum |r_i| \leq n \sqrt{tol}
\end{aligned}$$

Então, o lado esquerdo da inequação (5.2) pode ser ou não maior ou igual a um para  $n > 1$ .

4. Utilizando o seguinte algoritmo para calcular  $\alpha$ .

**IF**  $r^T r \leq tol$

**IF**  $flag = 1$

$$\alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2} P^{-1} C^T \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{tol}} sign(r)$$

$$\alpha_{old} = \alpha$$

**ELSE**

$$\alpha = \alpha_{old}$$

**END IF**

$$flag = 0$$

**ELSE**

$$\alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2} P^{-1} C^T r$$

$$flag = 1$$

**END IF**

A justificativa para este algoritmo é que quando  $r$  ficar muito pequeno, as rotinas numéricas podem determinar incorretamente o sinal de  $r$ . Este erro nas rotinas numéricas podem fazer com que  $\alpha$  varie rapidamente entre valores positivos e negativos. O algoritmo acima pode reduzir a variação no sinal, mantendo o valor de  $r$  até que o valor do resíduo esteja fora da faixa de tolerância.

OBSERVAÇÃO 5.1 Para melhorar as simulações, pode-se fazer  $\xi = 0$  o que nos leva a confiar na inequação  $e^T P \alpha \geq \delta^2 z^T z$  para que a função de energia permaneça menor do que zero. Então, quando faz-se a substituição por  $\frac{r}{r^T r}$ , o resíduo crescerá mais rápido do que se  $\xi \neq 0$ .

### 5.1.3 Alteração no Projeto

Como já foi mencionado anteriormente, o problema potencial do projeto proposto é que o termo extra incluído no observador  $\alpha$  contém singularidade, isto é, o denominador tende pra zero fazendo com que  $\alpha$  tenda ao infinito. Nesta seção é discutido um método capaz de remover a singularidade, o que requer uma alteração no projeto e assume-se que existe uma faixa onde os estados são conhecidos.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \frac{1}{2} e^T \left\{ (A_0 - LC)^T P + P (A_0 - LC) \right\} e + \frac{1}{2} e^T P^2 e + \frac{1}{2} e^T \delta^2 e + \frac{1}{2} e^T P^2 e \\ & + \frac{1}{2} z^T \delta^2 z - e^T P \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} e^T \left\{ (A_0 - LC)^T P + P (A_0 - LC) \right\} e + e^T P^2 e + \frac{1}{2} e^T \delta^2 e + \frac{1}{2} z^T \delta^2 z \\
&\quad - e^T P \alpha \\
&= \frac{1}{2} e^T \left\{ (A_0 - LC)^T P + P (A_0 - LC) + 2P^2 \right\} e + \frac{1}{2} \delta^2 e^T e + \frac{1}{2} \delta^2 z^T z \\
&\quad - e^T P \alpha
\end{aligned}$$

Conseqüentemente, a condição suficiente para  $\dot{V}$  ser negativa definida é dada por:

$$(A_0 - LC)^T P + P (A_0 - LC) + 2P^2 < 0 \quad (5.3)$$

$$e^T P \alpha \geq \frac{1}{2} \delta^2 e^T e + \frac{1}{2} \delta^2 z^T z \quad (5.4)$$

De fato, a partir da equação (5.4) pode-se ver que existe uma contradição. Se  $e = 0$  então a inequação fica

$$0 \geq \frac{1}{2} \delta^2 z^T z$$

o que só pode ocorrer quando  $z = 0$  o que é impossível no caso generalizado. Todavia, a partir da equação (5.4), precisamos que

$$\begin{aligned}
(x - z)^T P \alpha &\geq \frac{1}{2} \delta^2 (x - z)^T (x - z) + \frac{1}{2} \delta^2 z^T z \\
(x^T P - z^T P) \alpha &\geq \delta^2 \left( z^T z + \frac{1}{2} x^T x - \frac{1}{2} x^T z - \frac{1}{2} z^T x \right)
\end{aligned}$$

Como  $x$  e  $z$  são vetores pode-se usar a definição de produto escalar (definição 3.2) para mostrar que:

$$x^T z = z^T x$$

Sendo assim, podemos reescrever a inequação acima como,

$$(x^T P - z^T P) \alpha \geq \delta^2 \left( z^T z + \frac{1}{2} x^T x - z^T x \right)$$

Assuma que  $x$  é limitada tal que  $\|x\| < \zeta$ . Sabe-se pela propriedade submultiplicativa da norma de uma matriz que

$$\begin{aligned} |z^T x| &\leq \|z\| \|x\| \\ &= \|z\| \zeta \end{aligned}$$

Portanto, assume-se que

$$(x^T - z^T) P \alpha \geq \delta^2 \left( z^T z + \frac{1}{2} \zeta^2 - \|z\| \zeta \right) \quad (5.5)$$

Façamos  $\alpha = \gamma P^{-1} C^T \text{sign}(r)$ , então a equação (5.5) fica,

$$\begin{aligned} \gamma (x^T - z^T) P P^{-1} C^T \text{sign}(r) &\geq \delta^2 \left( z^T z + \frac{1}{2} \zeta^2 - \|z\| \zeta \right) \\ \gamma (x^T - z^T) C^T \text{sign}(r) &\geq \delta^2 \left( z^T z + \frac{1}{2} \zeta^2 - \|z\| \zeta \right) \\ \gamma r^T \text{sign}(r) &\geq \delta^2 \left( z^T z + \frac{1}{2} \zeta^2 - \|z\| \zeta \right) \end{aligned}$$

Podemos, então resolver a inequação a seguir, como um problema equivalente.

$$\gamma r^T \text{sign}(r) - \gamma m \geq \delta^2 \left( z^T z + \frac{1}{2} \zeta^2 - \|z\| \zeta \right)$$

onde  $m > 0$  e  $m \neq r^T \text{sign}(r)$ . Assuma que  $(r^T \text{sign}(r) - m) > 0$ , então com

$$\gamma \geq \frac{\delta^2 \left( z^T z + \frac{1}{2} \zeta^2 - \|z\| \zeta \right)}{r^T \text{sign}(r) - m}$$

a inequação permanece. Dessa forma, faça  $\alpha$  como

$$\alpha \geq \frac{\delta^2 \left( z^T z + \frac{1}{2} \zeta^2 - \|z\| \zeta \right)}{r^T \text{sign}(r) - m} P^{-1} C^T \text{sign}(r) \quad (5.6)$$

onde pode-se observar que  $\alpha$  não demorará a conter uma singularidade. Infelizmente, esta aproximação falha quando  $r = 0$  então  $(r^T \text{sign}(r) - m) \leq 0$  o que contradiz uma das hipóteses assumidas.

### 5.1.4 Conclusões

Nesta seção, foram sugeridas formas de superar o problema do projeto proposto conter singularidade. Foi mostrado que existe um método que até o momento garante que o termo  $\alpha$  é computável e que as condições do teorema da estabilidade de Lyapunov são satisfeitas. Contudo, nos métodos fornecidos  $\alpha$  é computável o que significa que a simulação não obstante pode não satisfazer sempre a inequação (5.2). Entretanto, quando a inequação (5.2) não é satisfeita o resíduo crescerá e excederá a banda de tolerância, fazendo com que se utilize a função original de  $\alpha$  ao invés da substituição por  $\frac{r}{rT_r}$ . Isto significa que a inequação (5.2) pode ser satisfeita novamente. Portanto, na prática, o resíduo pode não tender a zero mas ele tenderá a um valor pequeno próximo de zero (banda de tolerância) o que satisfaz o nosso propósito.

## 5.2 Exemplo de um Reator Químico

Nesta seção são propostas as estimações de estado de acordo com os projetos apresentados nos capítulos 3 e 4, através da simulação de um sistema simples de um reator químico real, instável em malha aberta, quando o observador funciona observando os estados numa malha de realimentação.

### 5.2.1 Descrição do Modelo

O modelo a ser considerado, de um reator químico, tem duas entradas e duas saídas. Os detalhes desta planta podem ser obtidos em [25]. A descrição do sistema em espaço de estado é a seguinte:

$$\left[ \begin{array}{c} \dot{x} \\ y \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x \\ u \end{array} \right] \quad (5.7)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1,38 & -0,2077 & 6,715 & -5,676 \\ -0,5814 & -4,29 & 0 & 0,675 \\ 1,067 & 4,2073 & -6,654 & 5,893 \\ 0,048 & 4,273 & 1,343 & -2,104 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5,679 & 0 \\ 1,136 & -3,146 \\ 1,136 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

O modelo é instável em malha aberta, portanto primeiramente será proposta uma realimentação de estado a fim de estabilizar o sistema em malha fechada.

### Alocando os Pólos por Escolhas Aleatórias

Utilizando o algoritmo fornecido no capítulo 4, temos:

1. Verificando se  $A$  é cíclica.

$$\lambda(A) = \{ 1,9958; 0,0597; -5,0618; -8,6617 \}$$

2. Como  $A$  é cíclica, escolhe-se  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  ao acaso.

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

3. Fazendo  $B u_0 = b$ .

$$b = B u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5,679 \\ -8,302 \\ 1,136 \end{bmatrix}$$

4. Como  $A$  e  $b$  são controláveis, encontra-se a solução  $f$ .

(a) Calculando a matriz  $U_a$  e sua inversa.

$$U_a = [b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b] = \begin{bmatrix} 0 & -63,375 & 432,9 & -3900,6 \\ 5,679 & -23,596 & 145,31 & -882,63 \\ -8,302 & 85,829 & -674,79 & 5497,5 \\ 1,136 & 10,727 & -11,168 & -241,04 \end{bmatrix}$$

(b) Cálculo de  $p_C^*(A)$ .

$$p_C^*(A) = (A + 10I)^4 = \begin{bmatrix} 19878 & 1369,1 & 13776 & -8894,9 \\ -1746,9 & 1870,8 & -896,83 & 1858,4 \\ 1573,3 & 7928,7 & 2709,9 & 6088,6 \\ -449,12 & 7891,2 & 1326,2 & 7087,5 \end{bmatrix}$$

(c) A matriz  $f$  é:

$$f = -[0 \ 0 \ 0 \ 1] U_a^{-1} p_C^*(A)$$

$$f = \begin{bmatrix} 33,703 & 36,554 & 30,279 & 13,607 \end{bmatrix}$$

5. A solução global é  $F = u_0 f$ .

$$F = \begin{bmatrix} 33,703 & 36,554 & 30,279 & 13,607 \\ 101,11 & 109,66 & 90,838 & 40,82 \end{bmatrix}$$

## 5.2.2 Projeto do Estimador de Estado Redundante

Nesta seção será considerado o projeto do observador de estado redundante proposto no capítulo 3. Serão feitos dois projetos, para um observador de ordem completa e outro de ordem mínima, utilizando os algoritmos desenvolvidos.

**Projeto do Observador de Ordem Completa**

1. Achando a matriz  $P$  que transforma a matriz  $C$  para  $\left[ I_r \mid 0 \right]$ .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,5774 & 0 & 0,7887 & 0,2113 \\ 0,5774 & 0 & 0,2113 & 0,7887 \end{bmatrix}$$

O sistema transformado:

$$\bar{A} = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} -0,4013 & -0,2734 & -1,9057 & 2,9447 \\ -0,4188 & -4,29 & 0,4783 & 0,1967 \\ -5,422 & 4,3411 & -5,4236 & 4,0627 \\ 2,7604 & 4,1392 & 1,3919 & -1,5531 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = P B = \begin{bmatrix} 0 & -3,146 \\ 5,679 & 0 \\ 1,136 & -2,4812 \\ 1,136 & -0,6648 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = C P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

2. Escolhendo o valor de  $\lambda < 0$  e criar a matriz  $G = \lambda I_4 = -p I_4$ , onde  $p > 0$ .

$$\lambda = -10; \quad \rightarrow \quad p = 10;$$

$$G = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

3. Criando a matriz  $\Theta = \bar{A} + p I_4$ .

$$\Theta = \begin{bmatrix} 9,5987 & -0,2734 & -1,9057 & 2,9447 \\ -0,4188 & 5,71 & 0,4783 & 0,1967 \\ -5,422 & 4,3411 & 4,5764 & 4,0627 \\ 2,7604 & 4,1392 & 1,3919 & 8,4469 \end{bmatrix}$$

4. Particionando  $\Theta \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  em:  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  e  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ .

$$\Theta = \left[ \begin{array}{c|c} \Theta_1 & \Theta_2 \end{array} \right]$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 9,5987 & -0,2734 \\ -0,4188 & 5,71 \\ -5,422 & 4,3411 \\ 2,7604 & 4,1392 \end{bmatrix}; \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} -1,9057 & 2,9447 \\ 0,4783 & 0,1967 \\ 4,5764 & 4,0627 \\ 1,3919 & 8,4469 \end{bmatrix};$$

5. Encontrando a matriz  $T \ni T\Theta_2 = 0$ , a partir de:

$$T = X K^T$$

onde:  $K \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  é fixa e  $X \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  é um parâmetro livre, para o qual será escolhido um particular valor neste exemplo,

$$X = \begin{bmatrix} -0,2177 & 0,6251 \\ -0,0326 & -0,0913 \\ -0,5148 & -0,7202 \\ -0,8286 & 0,2868 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 0,6723 & -0,3314 \\ -0,3792 & -0,9202 \\ 0,4547 & -0,0978 \\ -0,4443 & 0,184 \end{bmatrix};$$

$$T = \begin{bmatrix} -0,3535 & -0,4927 & -0,1601 & 0,2117 \\ 0,0084 & 0,0963 & -0,0059 & -0,0023 \\ -0,1075 & 0,8579 & -0,1637 & 0,0962 \\ -0,6521 & 0,0503 & -0,4048 & 0,4209 \end{bmatrix};$$

6. Encontrando as matrizes  $J$  e  $H$ .

$$J = T\Theta_1 = \begin{bmatrix} -1,7343 & -2,5353 \\ 0,0653 & 0,5126 \\ -0,2379 & 4,6159 \\ -2,9239 & 0,4501 \end{bmatrix};$$

$$H = T\bar{B} = \begin{bmatrix} -2,7394 & 1,3686 \\ 0,5377 & -0,0101 \\ 4,7956 & 0,6803 \\ 0,3038 & 2,7762 \end{bmatrix};$$

7. Particionando a matriz  $T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  encontrada em:  $T_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  e  $T_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ .

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array} \right]$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} -0,3535 & -0,4927 \\ 0,0084 & 0,0963 \\ -0,1075 & 0,8579 \\ -0,6521 & 0,0503 \end{bmatrix}; \quad T_2 = \begin{bmatrix} -0,1601 & 0,2117 \\ -0,0059 & -0,0023 \\ -0,1637 & 0,0962 \\ -0,4048 & 0,4209 \end{bmatrix};$$

8. Encontrando uma particular matriz  $M \ni MT_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$ .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14,057 & 3,214 \\ 0 & 0 & -13,521 & 5,4675 \end{bmatrix};$$

9. Encontrando uma particular matriz  $N \ni N = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix} - MT_1$ .

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0,585 & 11,898 \\ 2,1121 & 11,325 \end{bmatrix};$$

### Projeto do Observador de Ordem Mínima

Será utilizada a mesma transformação mostrada no observador de ordem completa, portanto as matrizes  $P$ ,  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  são as mesmas.

1. Escolhendo o valor de  $\lambda < 0$  e criar a matriz  $G = \lambda I_2 = -p I_2$ , onde  $p > 0$ .

$$\lambda = -10; \quad \rightarrow \quad p = 10;$$

$$G = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

2. Criando  $\Theta = \bar{A} + pI_4$ .

$$\Theta = \begin{bmatrix} 9,5987 & -0,2734 & -1,9057 & 2,9447 \\ -0,4188 & 5,71 & 0,4783 & 0,1967 \\ -5,422 & 4,3411 & 4,5764 & 4,0627 \\ 2,7604 & 4,1392 & 1,3919 & 8,4469 \end{bmatrix}$$

3. Particionando  $\Theta \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  em:  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  e  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ .

$$\Theta = \left[ \begin{array}{c|c} \Theta_1 & \Theta_2 \end{array} \right]$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 9,5987 & -0,2734 \\ -0,4188 & 5,71 \\ -5,422 & 4,3411 \\ 2,7604 & 4,1392 \end{bmatrix}; \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} -1,9057 & 2,9447 \\ 0,4783 & 0,1967 \\ 4,5764 & 4,0627 \\ 1,3919 & 8,4469 \end{bmatrix};$$

4. Encontrando a matriz  $T \ni T\Theta_2 = 0$ , a partir de:

$$T = X K^T$$

onde:  $K \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  é fixa e  $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é um parâmetro livre, para o qual será escolhido um particular valor neste exemplo,

$$X = \begin{bmatrix} -0,2177 & 0,6251 \\ -0,0326 & -0,0913 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 0,6723 & -0,3314 \\ -0,3792 & -0,9202 \\ 0,4547 & -0,0978 \\ -0,4443 & 0,184 \end{bmatrix};$$

$$T = \begin{bmatrix} -0,3535 & -0,4927 & -0,1601 & 0,21171 \\ 0,0084 & 0,0963 & -0,0059 & -0,0023 \end{bmatrix};$$

5. Encontrando as matrizes  $J$  e  $H$ ,

$$J = T \Theta_1 = \begin{bmatrix} -1,7343 & -2,5353 \\ 0,0653 & 0,5126 \end{bmatrix};$$

$$H = T \bar{B} = \begin{bmatrix} -2,7394 & 1,3686 \\ 0,5377 & -0,0101 \end{bmatrix};$$

6. Particionando a matriz  $T \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$  encontrada em:  $T_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $T_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array} \right]$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} -0,3535 & -0,4927 \\ 0,0084 & 0,0963 \end{bmatrix}; \quad T_2 = \begin{bmatrix} -0,1601 & 0,21171 \\ -0,0059 & -0,0023 \end{bmatrix};$$

7. Encontrando uma particular matriz  $M \ni M T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$ .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1,4345 & -130,85 \\ 3,6388 & -98,955 \end{bmatrix};$$

8. Encontrando uma particular matriz  $N \ni N = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix} - M T_1$ .

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0,585 & 11,898 \\ 2,1121 & 11,325 \end{bmatrix};$$

### 5.2.3 Projeto do Observador Identidade

No projeto a matriz  $F$  será chamada de  $L$  a fim de não confundir a matriz do observador com a matriz da alocação de pólos.

1. Encontrando a matriz  $L \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  tal que os autovalores da matriz  $A^T + C^T L$  estejam em  $-10$ . Utilizando o algoritmo utilizado para alocação de pólos, temos:

- (a) Verificando se  $A$  é cíclica.

$$\lambda(A) = \{ 1,9958; 0,0597; -5,0618; -8,6617 \}$$

- (b) Como  $A$  é cíclica, escolhe-se  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  ao acaso.

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- (c) Fazendo  $C^T u_0 = c$ .

$$c = C^T u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (d) Como  $A$  e  $c$  são controláveis, encontrando a solução  $l$  da seguinte forma:

- i. Calculando a matriz  $U_a$  e sua inversa.

$$\begin{aligned} U_a &= \begin{bmatrix} c & A^T c & A^{T^2} c & A^{T^3} c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 13,148 & -63,852 & 713,4 \\ 3 & -14,126 & 63,97 & -299,76 \\ 1 & 1,1419 & 43,135 & -631,24 \\ -1 & 16,314 & -92,522 & 522,88 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- ii. Calculando  $p_C^*(A)$ .

$$p_C^*(A) = (A + 10I)^4 = \begin{bmatrix} 19878 & 1369,1 & 13776 & -8894,9 \\ -1746,9 & 1870,8 & -896,83 & 1858,4 \\ 1573,3 & 7928,7 & 2709,9 & 6088,6 \\ -449,12 & 7891,2 & 1326,2 & 7087,5 \end{bmatrix}$$

iii. A matriz  $l$  :

$$l = - [ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ] U_a^{-1} p_C^*(A)$$

$$l = \begin{bmatrix} -43,847 & 28,568 & -23,986 & 46,205 \end{bmatrix}$$

(e) A solução global é  $L = u_0 l$ .

$$L = \begin{bmatrix} -43,847 & 28,568 & -23,986 & 46,205 \\ -131,54 & 85,705 & -71,958 & 138,61 \end{bmatrix}$$

2. Calculando a matriz  $J = -L^T$ .

$$J = \begin{bmatrix} 43,847 & 131,54 \\ -28,568 & -85,705 \\ 23,986 & 71,958 \\ -46,205 & -138,61 \end{bmatrix}$$

3. As matrizes  $J$ ,  $T = I_n$ ,  $G = A - JC$ ,  $H = B$ ,  $M = I_n$  e  $N = 0$  satisfazem as relações fundamentais dos observadores.

$$G = \begin{bmatrix} -42,467 & -131,75 & -37,132 & 38,171 \\ 27,987 & 81,415 & 28,568 & -27,893 \\ -22,919 & -67,75 & -30,64 & 29,879 \\ 46,253 & 142,89 & 47,548 & -48,309 \end{bmatrix}$$

cujos autovalores estão em  $-10$ , como desejado.

4. O estimador procurado é:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = G z(t) + H u(t) + J y(t) \\ w(t) = z(t) \end{cases}$$

## 5.2.4 Projeto do Estimador de Estado Robusto

Esse sistema tem propriedades numéricas que causam dificuldades e no início deste capítulo foi mostrado como se tratar os problemas que ocorrem durante o projeto.

Dessa forma, esse mesmo raciocínio foi utilizado nas expressões de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . O projeto do observador de estado robusto para plantas instáveis conforme foi mostrado no capítulo 4, envolve  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  que são definidas da seguinte maneira:

$$\alpha_1 = \frac{2\delta_1 \|r\| \|P\| \|z_1\| + \delta_2^2 z_2^T z_2}{2r^T r} P^{-1} r$$

$$\alpha_2 = 0$$

onde  $\delta_1 > \|\Delta_1\|_2$ ,  $\delta_2 > \|\Delta_2\|_2$  e  $P > 0$  é a solução da seguinte equação algébrica de Riccati:

$$(A_{11} - J)^T P + P(A_{11} - J) + P(A_{12} A_{12}^T + \delta_1^2 I) P + (1 + \xi^2) I = 0 \quad (5.8)$$

onde  $J$  é escolhido tal que  $A_{11} - J$  é estável e escolhe-se apropriadamente um valor para  $\xi$  tal que a solução possa ser encontrada. Conforme já foi mostrado a equação 5.8 não está na forma padrão aonde os termos quadrático e constante são ambos positivos. Dessa forma, deve-se aplicar o corolário 3.1 a fim de garantir que exista uma única solução para a equação algébrica de Riccati.

- O sistema

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_{11} - J}{\sqrt{\delta_1^2 + \xi^2 + 1} I} & \sqrt{2} I \\ \hline & 0 \end{array} \right]$$

é observável e controlável.

- $\Re \lambda(A_{11} - J) < 0$ .
- $\|G(s)\|_\infty \leq 1$  para  $\forall \omega$ .

As duas primeiras condições serão válidas, se a matriz  $J$  escolhida tornar o sistema estável, observável e controlável, após a perturbação. A terceira condição pode ser satisfeita utilizando o método determinado na subseção 3.4.3. Projetando de acordo com o desenvolvimento fornecido no capítulo 4.

1. A matriz  $T$  que transforma a matriz  $C$  para  $\left[ \begin{array}{c|c} I & 0 \end{array} \right]$ .

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,5774 & 0 & 0,7887 & 0,2113 \\ 0,5774 & 0 & 0,2113 & 0,7887 \end{bmatrix}$$

onde  $A_{22}$  é estável. As matrizes transformadas são:

$$\bar{A} = T A T^{-1} = \begin{bmatrix} -0,4013 & -0,2734 & -1,9057 & 2,9447 \\ -0,4188 & -4,29 & 0,4783 & 0,1967 \\ -5,422 & 4,3411 & -5,4236 & 4,0627 \\ 2,7604 & 4,1392 & 1,3919 & -1,5531 \end{bmatrix};$$

$$\bar{B} = T B = \begin{bmatrix} 0 & -3,146 \\ 5,679 & 0 \\ 1,136 & -2,4812 \\ 1,136 & -0,66483 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = C T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

2. Fazendo  $\delta_1 > \|\Delta_1\|_2$  e  $\delta_2 > \|\Delta_2\|_2$ .

$$\delta_1 = 0,01 \cdot \|\Delta_1\|_2 = 0,0432$$

$$\delta_2 = 0,01 \cdot \|\Delta_2\|_2 = 0,0708$$

3. Resolvendo a seguinte equação algébrica de Riccati.

$$(A_{11} - J)^T P + P (A_{11} - J) + P (A_{12} A_{12}^T + \delta_1^2 I) P + (1 + \xi^2) I = 0$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,0691 & 0,1618 \\ 0,1618 & 1,4119 \end{bmatrix}$$

onde  $J = \begin{bmatrix} 6,3478 & -32,395 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  é tal que  $(A_{11} - J)$  é estável e  $\xi = 0,1$ .

4. O observador de estado robusto.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u + \alpha_1 + J(y - w) \\ \dot{z}_2 = A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u \\ w = z_1 \\ \alpha_1 = \frac{2 \delta_1 \|r\| \|P\| \|z_1\| + \delta_2^2 z_2^T z_2}{2 r^T r} P^{-1} r \\ r = y - w \end{cases}$$

### 5.2.5 Simulações

As condições iniciais da planta e do observador foram consideradas nulas. Nas simulações dos observadores de estado redundante, identidade e robusto foram utilizados os diagramas de blocos da planta combinado com cada observador, conforme mostram as figuras 5.1, 5.2 e 5.3, respectivamente. O sistema tem como entrada o sinal  $u(t)$  como mostra a figura 5.4.

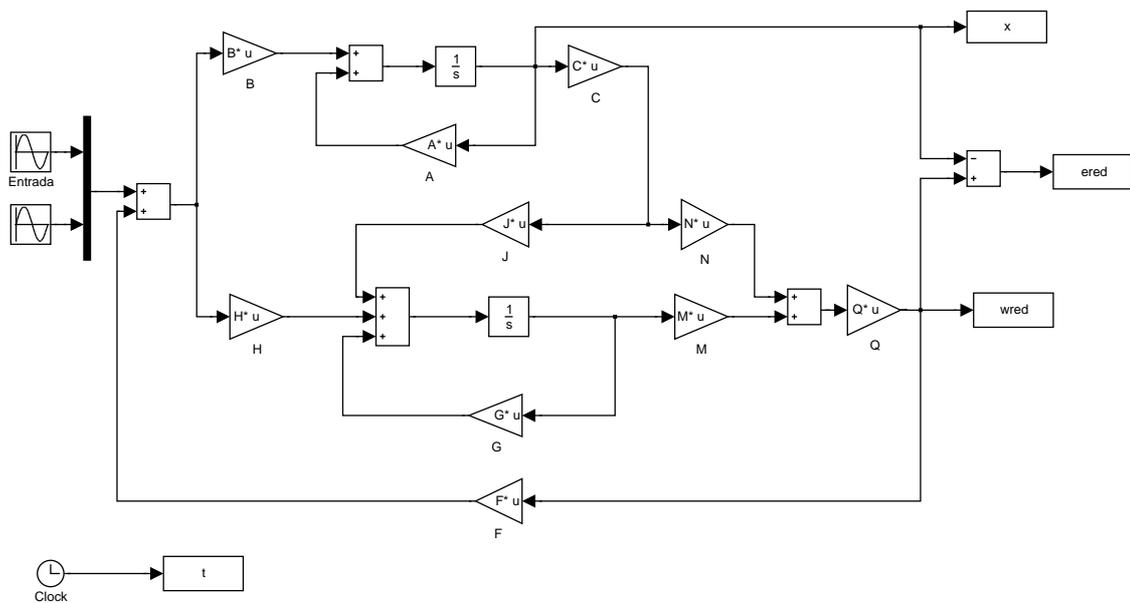
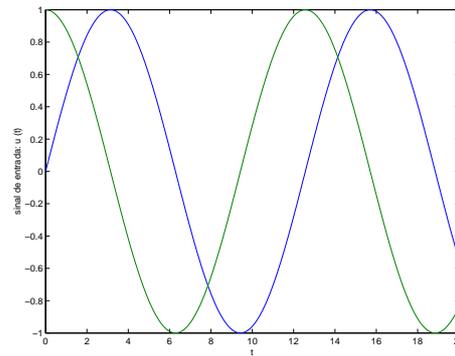


Figura 5.1: Diagrama de blocos da simulação do estimador redundante com realimentação



Figura 5.4: Gráfico do sinal de entrada  $u(t)$ 

Foram simuladas duas situações: o sistema sem perturbação ( $\delta = 0$ ) e com perturbação ( $\delta = 0,01$ ) máxima que não instabiliza o sistema realimentado. Nos gráficos da figura 5.5 são mostrados os estados do sistema em condições ideais, isto é, o sistema sendo realimentado pelos estados  $x$  para as diferentes perturbações.

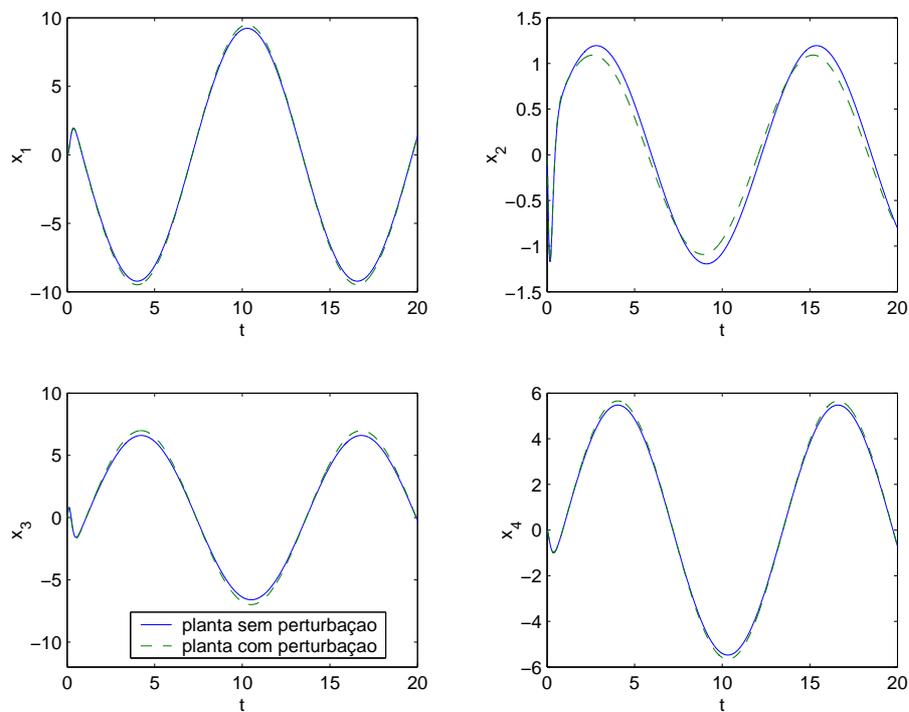


Figura 5.5: Gráficos dos estados do sistema sem perturbação e com perturbação

Os estados observados pelos observadores redundantes de ordem completa e de ordem mínima e do observador identidade não serão mostrados sozinhos, uma vez que o erro é muito pequeno e não é visualmente nítida a mínima diferença entre eles. Na figura 5.6 são mostrados os erros dos observadores redundantes de ordem completa e ordem mínima e do identidade, quando  $\delta = 0$ .

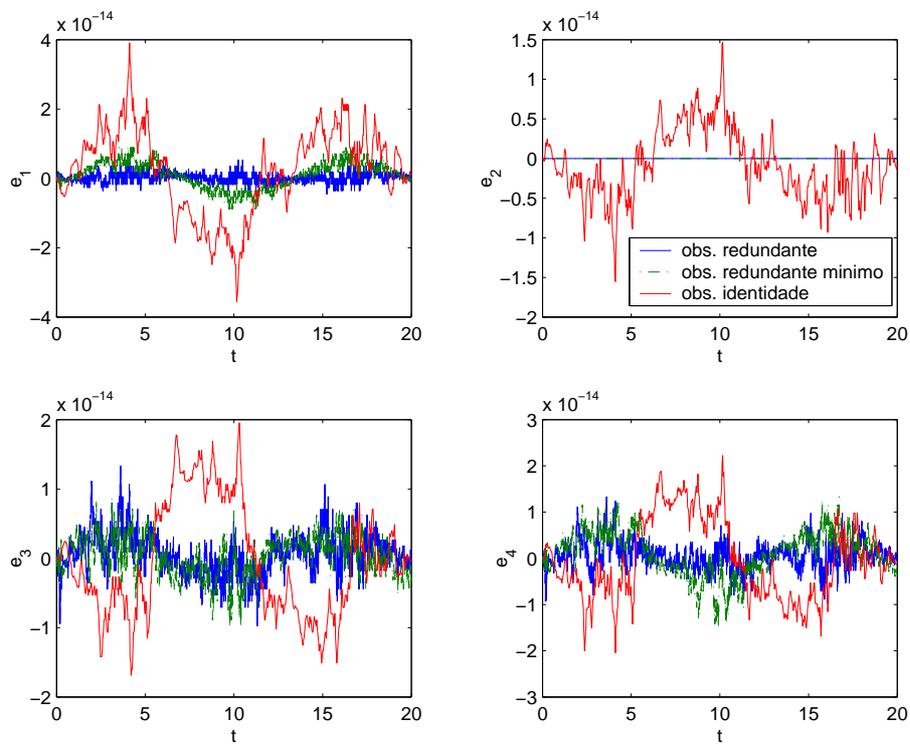


Figura 5.6: Gráficos do erro de estado dos observadores redundantes (de ordem completa e mínima) e do identidade para um sistema sem perturbação

Os erros de estado do observador robusto são mostrados sozinhos na figura 5.7, pois são de ordem de grandeza maior que os outros. Note que os gráficos em linha tracejada denotam o comportamento para  $\delta = 0,01$  e conseqüentemente os em linha cheia denotam o comportamento para  $\delta = 0$ .

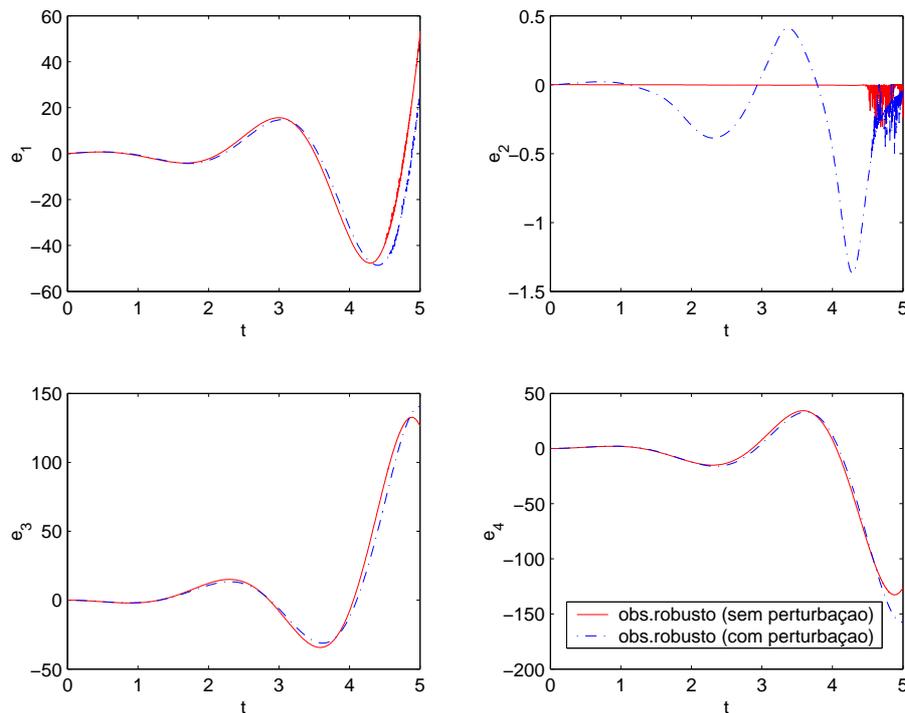


Figura 5.7: Gráficos do erro de estado do observador robusto para um sistema sem perturbação e com perturbação

Na figura 5.8 são mostrados os erro de estado dos observadores redundantes de ordem completa e mínimo e do identidade para um sistema com  $\delta = 0,01$ . Finalmente na figura 5.9 são mostrados os gráficos dos estados  $x$  da planta e dos estados observados  $w$  para estes observadores com  $\delta = 0,01$ .

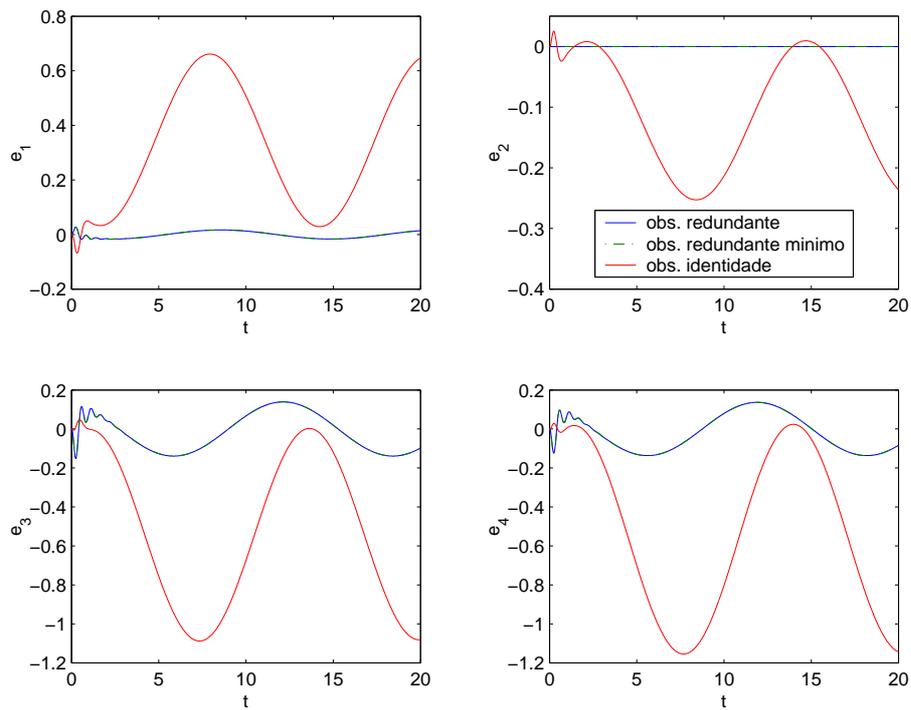


Figura 5.8: Gráficos do erro de estado dos observadores redundantes (de ordem completa e mínimo) e do identidade para um sistema com perturbação

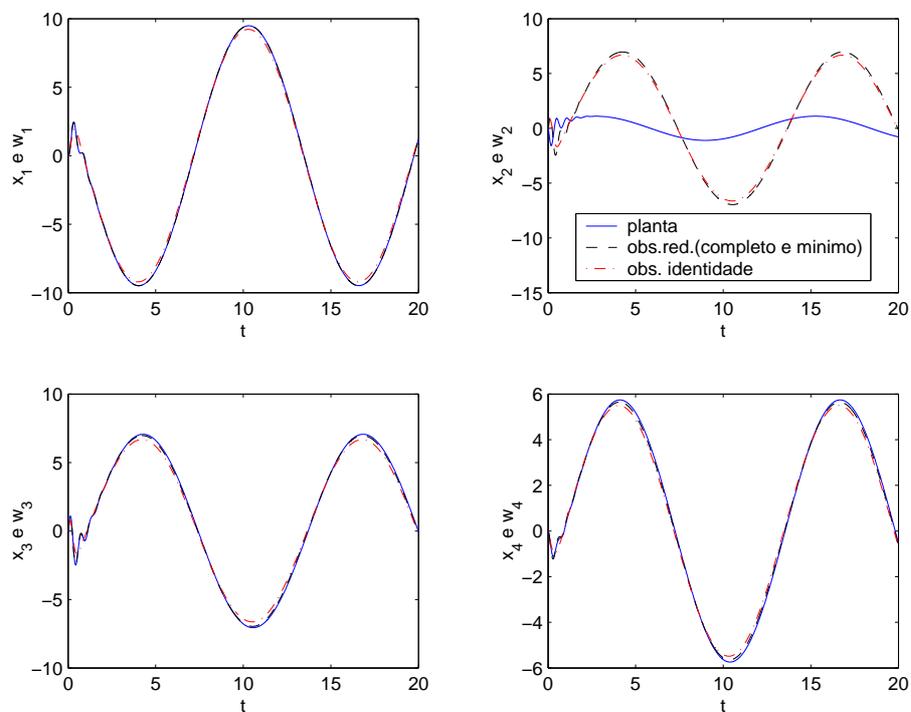


Figura 5.9: Gráficos do estado da planta e dos observadores redundantes (de ordem completa e mínimo) e identidade para um sistema com perturbação

Neste exemplo de um sistema instável podemos mostrar que os observadores redundantes geram estimativas muito boas para os estados mensuráveis, uma vez que os erros de estado são da ordem de  $10^{-14}$ , quando  $\delta = 0$ , o qual podemos considerar de ordem numérica. O tradicional observador de Luenberger ou identidade também gera uma boa estimativa, porém com um erro desprezível superior. Note que a segunda variável de estado, quando observada pelos observadores redundantes geram uma estimativa perfeita, já o observador identidade tem uma boa estimativa porém não é perfeita.

Quando na presença de uma pequena perturbação, os observadores redundantes e o identidade não têm erros tendendo a zero, como se esperava, já que não foram projetados para isso, mas estes erros são limitados e aceitáveis. É de se notar a superioridade do observador redundante.

O observador robusto não apresentou um bom desempenho em nenhuma das duas situações. Note que ele começa com um bom desempenho, porém com o tempo ele vai instabilizando o sistema e perde-se qualquer chance de mensurar os estados. É importante ressaltar que no estudo feito pelos autores sobre este observador robusto [28] e [11], não houve qualquer referência a singularidade dos termos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Neste nosso estudo utilizamos um raciocínio análogo ao feito pelos autores e descrito no início deste capítulo, mas infelizmente não obtivemos um resultado satisfatório.

### 5.3 Exemplo de uma Fornalha com Disparo à Gás

Nesta seção são propostas as estimações de estado de acordo com os projetos apresentados nos capítulos 3 e 4, através da simulação de um sistema simples de uma fornalha com disparo à gás quando o observador funciona como um monitor de estados. Esse sistema tem propriedades numéricas que causam dificuldades e no início deste capítulo

foram focados esses problemas que surgem durante os projetos.

### 5.3.1 Descrição do Modelo

O modelo a ser considerado será do disparo de gás de uma fornalha, o qual tem duas entradas e duas saídas. As entradas são o sinal de posição da válvula de combustível e o sinal do “trim” de oxigênio. As saídas são a temperatura da fornalha e a porcentagem de escapamento de oxigênio. Os detalhes desta planta podem ser obtidos em [7]. O modelo é estável, observável e controlável. A descrição do sistema em espaço de estado é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -0,0186 & -0,0065 & 0,0190 & 0,0129 \\ 0,0026 & -0,1354 & 0,0310 & 0,0040 \\ -0,0972 & 0,0695 & -0,1273 & 0,0530 \\ -0,0193 & -0,0155 & -0,1121 & -0,4934 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,0960 \\ 0,4969 & 0,0453 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,6707 & -0,1085 & -0,0286 & 0,0086 \\ -0,2750 & -0,1933 & -0,2175 & 0,0060 \end{bmatrix};$$

com os seguintes autovalores:  $\lambda(A) = \{-0,4752; -0,1791; -0,0352; -0,0852\}$ .

### 5.3.2 Projeto do Observador de Estado Redundante

Nesta seção será considerado o projeto do observador de estado redundante proposto no capítulo 3. Serão feitos dois projetos, para um observador de ordem completa e outro de ordem mínima, utilizando os algoritmos desenvolvidos.

### Projeto do Observador de Ordem Completa

1. Achando  $P$  que transforma a matriz  $C$  para  $\begin{bmatrix} I_2 & | & 0 \end{bmatrix}$ .

$$P = \begin{bmatrix} 0,6707 & -0,1085 & -0,0286 & 0,0086 \\ -0,2750 & -0,1933 & -0,2175 & 0,0060 \\ -0,0814 & -0,6915 & 0,7177 & 0,0110 \\ -0,0077 & 0,0288 & 0,0116 & 0,9995 \end{bmatrix}$$

As matrizes transformadas são:

$$\bar{A} = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} -0,0305 & -0,0386 & 0,0038 & 0,0029 \\ 0,0077 & -0,0739 & 0,0002 & -0,0184 \\ -0,1384 & -0,0308 & -0,1764 & 0,0321 \\ 0,0570 & 0,2474 & -0,0719 & -0,4940 \end{bmatrix};$$

$$\bar{B} = P B = \begin{bmatrix} 0,0043 & 0,0031 \\ 0,0030 & 0,0212 \\ 0,0054 & -0,0684 \\ 0,4966 & 0,0442 \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = C P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Escolhendo o valor de  $\lambda < 0$  e criar a matriz  $G = \lambda I_4 = -p I_4$ , onde  $p > 0$ .

$$\lambda = -1; \quad \rightarrow \quad p = 1;$$

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Criando a matriz  $\Theta = \bar{A} + \lambda I_4$ .

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0,9695 & -0,0386 & 0,0038 & 0,0029 \\ 0,0077 & 0,9261 & 0,0002 & -0,0184 \\ -0,1384 & -0,0308 & 0,8236 & 0,0321 \\ 0,0570 & 0,2474 & -0,0719 & 0,5060 \end{bmatrix}$$

4. Particionando  $\Theta \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  em:  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  e  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ ,

$$\Theta = \left[ \begin{array}{c|c} \Theta_1 & \Theta_2 \end{array} \right]$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0,9695 & -0,0386 \\ 0,0077 & 0,9261 \\ -0,1384 & -0,0308 \\ 0,0570 & 0,2474 \end{bmatrix}; \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} 0,0038 & 0,0029 \\ 0,0002 & -0,0184 \\ 0,8236 & 0,0321 \\ -0,0719 & 0,5060 \end{bmatrix};$$

5. Encontrando a matriz  $T \ni T\Theta_2 = 0$ , a partir de:

$$T = X K^T$$

onde:  $K \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  é fixa e  $X \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  é um parâmetro livre, para o qual será escolhido um particular valor neste exemplo,

$$X = \begin{bmatrix} -0,0045 & 0,0059 \\ -0,0008 & -0,0363 \\ -0,9949 & 0,1010 \\ 0,1011 & 0,9942 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} -0,9967 & 0,0811 \\ 0,0808 & 0,9961 \\ 0,0053 & 0,0025 \\ 0,0083 & 0,0357 \end{bmatrix};$$

$$T = \begin{bmatrix} 0,0050 & 0,0055 & 0 & 0,0002 \\ -0,0022 & -0,0363 & -0,0001 & -0,0013 \\ 0,9998 & 0,0203 & -0,0051 & -0,0047 \\ -0,0202 & 0,9985 & 0,0030 & 0,0363 \end{bmatrix};$$

6. Encontrando as matrizes  $J$  e  $H$ .

$$J = T\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0,0049 & 0,0050 \\ -0,0024 & -0,0338 \\ 0,9699 & -0,0209 \\ -0,0102 & 0,9344 \end{bmatrix};$$

$$H = T\bar{B} = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0001 \\ -0,0008 & -0,0008 \\ 0,0020 & 0,0037 \\ 0,0209 & 0,0225 \end{bmatrix};$$

7. Particionando a matriz  $T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  encontrada em:  $T_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  e  $T_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ .

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array} \right]$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0,0050 & 0,0055 \\ -0,0022 & -0,0363 \\ 0,9998 & 0,0203 \\ -0,0202 & 0,9985 \end{bmatrix}; \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,0002 \\ -0,0001 & -0,0013 \\ -0,0051 & -0,0047 \\ 0,0030 & 0,0363 \end{bmatrix};$$

8. Encontrando uma particular matriz  $M \ni MT_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$ .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -213,8081 & -27,6311 \\ 0 & 0 & 17,5778 & 29,8066 \end{bmatrix};$$

9. Encontrando uma particular matriz  $N \ni N = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix} - MT_1$ .

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 213,1976 & 31,9219 \\ -16,9717 & -30,1170 \end{bmatrix};$$

### Projeto do Observador de Ordem Mínima

Será utilizada a mesma transformação mostrada no observador de ordem completa, portanto as matrizes  $P$ ,  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  são as mesmas.

1. Escolhendo o valor de  $\lambda < 0$  e criar a matriz  $G = \lambda I_2 = -p I_2$ , onde  $p > 0$ .

$$\lambda = -1; \quad \rightarrow \quad p = 1;$$

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Criando a matriz  $\Theta = \bar{A} + \lambda I_4$ .

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0,9695 & -0,0386 & 0,0038 & 0,0029 \\ 0,0077 & 0,9261 & 0,0002 & -0,0184 \\ -0,1384 & -0,0308 & 0,8236 & 0,0321 \\ 0,0570 & 0,2474 & -0,0719 & 0,5060 \end{bmatrix}$$

3. Particionando  $\Theta \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  em:  $\Theta_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  e  $\Theta_2 \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ ,

$$\Theta = \left[ \begin{array}{c|c} \Theta_1 & \Theta_2 \end{array} \right]$$

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0,9695 & -0,0386 \\ 0,0077 & 0,9261 \\ -0,1384 & -0,0308 \\ 0,0570 & 0,2474 \end{bmatrix}; \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} 0,0038 & 0,0029 \\ 0,0002 & -0,0184 \\ 0,8236 & 0,0321 \\ -0,0719 & 0,5060 \end{bmatrix};$$

4. Encontrando a matriz  $T \ni T \Theta_2 = 0$ , a partir de:

$$T = X K^T$$

onde:  $K \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  é fixa e  $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é um parâmetro livre, para o qual será

escolhido um particular valor neste exemplo,

$$X = \begin{bmatrix} -0,0046 & 0,0059 \\ -0,0008 & -0,0364 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} -0,9967 & 0,0811 \\ 0,0808 & 0,9961 \\ 0,0053 & 0,0025 \\ 0,0083 & 0,0357 \end{bmatrix};$$

$$T = \begin{bmatrix} 0,0050 & 0,0055 & -0,00001 & 0,0002 \\ -0,0022 & -0,0363 & -0,0001 & -0,0013 \end{bmatrix};$$

5. Encontrando as matrizes  $J$  e  $H$ ,

$$J = T\Theta_1 = \begin{bmatrix} 0,0049 & 0,005 \\ -0,0024 & -0,0338 \end{bmatrix};$$

$$H = T\bar{B} = \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0001 \\ -0,0008 & -0,0008 \end{bmatrix};$$

6. Particionando a matriz  $T \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$  encontrada em:  $T_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  e  $T_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,

$$T = \left[ \begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array} \right]$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0,0050 & 0,0055 \\ -0,0022 & -0,0363 \end{bmatrix}; \quad T_2 = \begin{bmatrix} -0,00001 & 0,0002 \\ -0,0001 & -0,0013 \end{bmatrix};$$

7. Encontrando uma particular matriz  $M \ni MT_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$ .

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -45114 & -5993 \\ 3241,7 & -336,57 \end{bmatrix};$$

8. Encontrando uma particular matriz  $N \ni N = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0 \end{bmatrix} - M T_1$ .

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 213,2 & 31,922 \\ -16,972 & -30,1175 \end{bmatrix};$$

### 5.3.3 Projeto do Observador Identidade

1. Encontrar a matriz  $L \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  tal que os autovalores da matriz  $A^T + C^T L$  estejam em  $\mathbb{C}^-$ . Utilizando o algoritmo utilizado para alocação de pólos, temos:

(a) Verificando se  $A$  é cíclica.

$$\lambda(A) = \{ -0,4752; -0,1791; -0,0352; -0,0852 \}$$

(b) Como  $A$  é cíclica, escolhe-se  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  ao acaso.

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) Fazendo  $C^T u_0 = c$ .

$$c = C^T u_0 = \begin{bmatrix} 0,1207 \\ -0,4951 \\ -0,4636 \\ 0,0206 \end{bmatrix}$$

(d) Como  $A$  e  $c$  são controláveis, encontramos a solução  $l$  da seguinte forma:

i. Calculando a matriz  $U_a$  e sua inversa.

$$U_a = \begin{bmatrix} c & A^T c & A^{T^2} c & A^{T^3} c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,1207 & -0,0076 & 0,0007 & -0,0002 \\ -0,4951 & 0,0531 & -0,0066 & 0,001 \\ -0,4636 & 0,014 & 0,0052 & -0,0025 \\ 0,0206 & 0,0472 & -0,0255 & 0,0121 \end{bmatrix}$$

ii. Calculando  $p_C^*(A)$ .

$$p_C^*(A) = (A + I)^4 = \begin{bmatrix} 0,9171 & -0,0151 & 0,0539 & 0,0268 \\ -0,007 & 0,5681 & 0,0794 & 0,0111 \\ -0,312 & 0,1814 & 0,5606 & 0,07 \\ 0,0065 & -0,0475 & -0,1586 & 0,0509 \end{bmatrix}$$

iii. A matriz  $l$  é:

$$l = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U_a^{-1} p_C^*(A)$$

$$l = \begin{bmatrix} -11251 & -435,64 & -2485,9 & -650,34 \end{bmatrix}$$

(e) A solução global é  $L = u_0 l$ .

$$L = \begin{bmatrix} -11251 & -435,64 & -2485,9 & -650,34 \\ -22502 & -871,28 & -4971,9 & -1300,7 \end{bmatrix}$$

2. Calculando a matriz  $J = -L^T$ .

$$J = \begin{bmatrix} 11251 & 22502 \\ 435,64 & 871,28 \\ 2485,9 & 4971,9 \\ 650,34 & 1300,7 \end{bmatrix}$$

3. As matrizes  $J$ ,  $T = I_n$ ,  $G = A - JC$ ,  $H = B$ ,  $M = I_n$  e  $N = 0$  satisfazem as relações fundamentais dos observadores.

$$G = \begin{bmatrix} -1358 & 5570,4 & 5216 & -231,76 \\ -52,579 & 215,55 & 201,99 & -8,9702 \\ -300,15 & 1230,9 & 1152,4 & -51,157 \\ -78,515 & 321,97 & 301,38 & -13,89 \end{bmatrix}$$

4. O estimador é:

$$\mathcal{O} \begin{cases} \dot{z}(t) = A z(t) + B u(t) + J y(t) \\ w(t) = z(t) \end{cases}$$

### 5.3.4 Projeto do Estimador de Estado Robusto

O projeto do observador de estado robusto conforme foi mostrado no capítulo 4, envolve  $\alpha$  que é definida da seguinte maneira:

$$\alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r$$

onde  $\delta > \|\Delta_A\|_2$  e  $P > 0$  é a solução da seguinte equação algébrica de Riccati:

$$(A_0 - J C)^T P + P (A_0 - J C) + P (2 I) P + (\delta^2 + \xi^2) I = 0 \quad (5.10)$$

onde escolhe-se apropriadamente um valor para  $\xi$  tal que a solução possa ser encontrada. Conforme já foi mostrado a equação (5.10) não está na forma padrão aonde os termos quadráticos e constante são ambos positivos. Dessa forma, deve-se aplicar o corolário 3.1 a fim de garantir que exista uma única solução para a equação algébrica de Riccati.

- O sistema  $G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_0^T - C^T J^T & [\delta I \quad \xi I] \\ \hline \sqrt{2} I & 0 \end{array} \right]$  deve ser observável e controlável.
- $\Re \lambda(A_0^T - C^T J^T) < 0$ .
- Existe  $\xi$  tal que  $\|G(s)\|_\infty \leq 1$ .

As duas primeiras condições serão válidas, se o sistema for estável, observável e controlável, após a escolha da perturbação. A terceira condição pode ser satisfeita utilizando o método da realimentação de estado determinado na subseção 3.4.4.

1. Fixando os valores de  $\delta > \|\Delta_A\|_2$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$  e  $\xi = 0, 1$ .

$$\delta = 0,06 \cdot \|\Delta_A\|_2 = 0,0304$$

2. Resolvendo a seguinte equação algébrica de Riccati para  $X$ .

$$A_0 X + X A_0^T - 2 X C^T C X + (\delta^2 + \xi^2) X^2 + 2 I_n = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} 1,4146 & 0,3531 & -0,4828 & 0,0634 \\ 0,3531 & 5,4453 & -2,5196 & 0,5280 \\ -0,4828 & -2,5196 & 5,5143 & -0,7175 \\ 0,0634 & 0,5280 & -0,7175 & 2,2448 \end{bmatrix}$$

3. Fazendo  $J = X C^T$  e resolvendo a seguinte equação algébrica de Riccati para  $P$ .

$$(A_0 - J C)^T P + P (A_0 - J C) + P (2 I) P + (\delta^2 + \xi^2) I = 0$$

$$J = X C^T = \begin{bmatrix} 0,9248 & -0,3519 \\ -0,2774 & -0,5985 \\ -0,2143 & -0,5839 \\ 0,0251 & 0,0500 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,0107 & 0,0040 & -0,0066 & -0,0007 \\ 0,0040 & 0,0336 & -0,0167 & -0,0012 \\ -0,0066 & -0,0167 & 0,0409 & 0,0015 \\ -0,0007 & -0,0012 & 0,0015 & 0,0143 \end{bmatrix}$$

4. O observador de estado robusto:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_0 z + B u + J (y - w) + \alpha \\ w = C z + D u \\ r = y - w \\ \alpha = \frac{\delta^2 z^T z}{2 r^T r} P^{-1} C^T r \end{cases}$$

### 5.3.5 Simulações

As condições iniciais da planta e do observador foram consideradas nulas. O sistema tem como entrada o sinal  $u(t)$  como mostra a figura 5.10. Nas simulações dos observadores de estado robusto, redundante e identidade foram utilizados os diagramas de



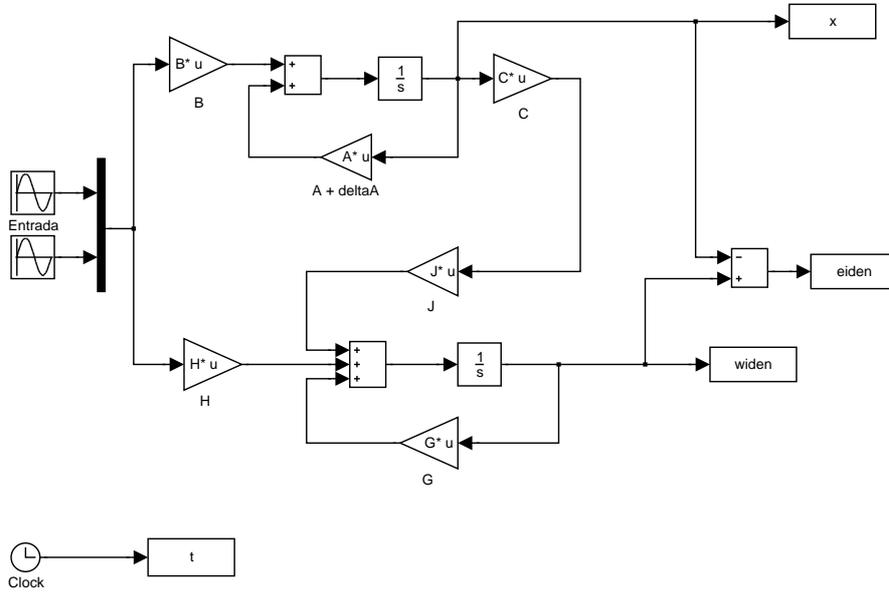


Figura 5.12: Diagrama de blocos da simulação do estimador identidade

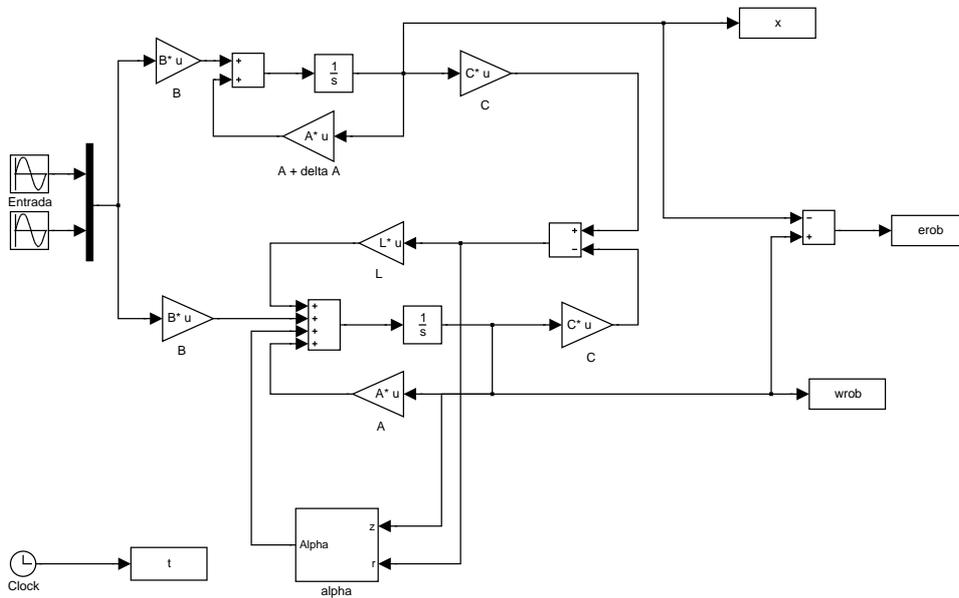


Figura 5.13: Diagrama de blocos da simulação do estimador de estado robusto

Foram simuladas duas situações: o sistema sem perturbação ( $\delta = 0$ ) e com perturbação ( $\delta = 0,06$ ) máxima que não instabiliza o sistema. Nos gráficos da figura 5.14 são mostrados os estados reais  $x$  da planta em condições ideais, isto é, caso eles fossem mensuráveis, para as diferentes perturbações. Os estados observados pelos observadores não serão mostrados sozinhos, uma vez que o erro é muito pequeno e não é visualmente nítida a mínima diferença entre eles.

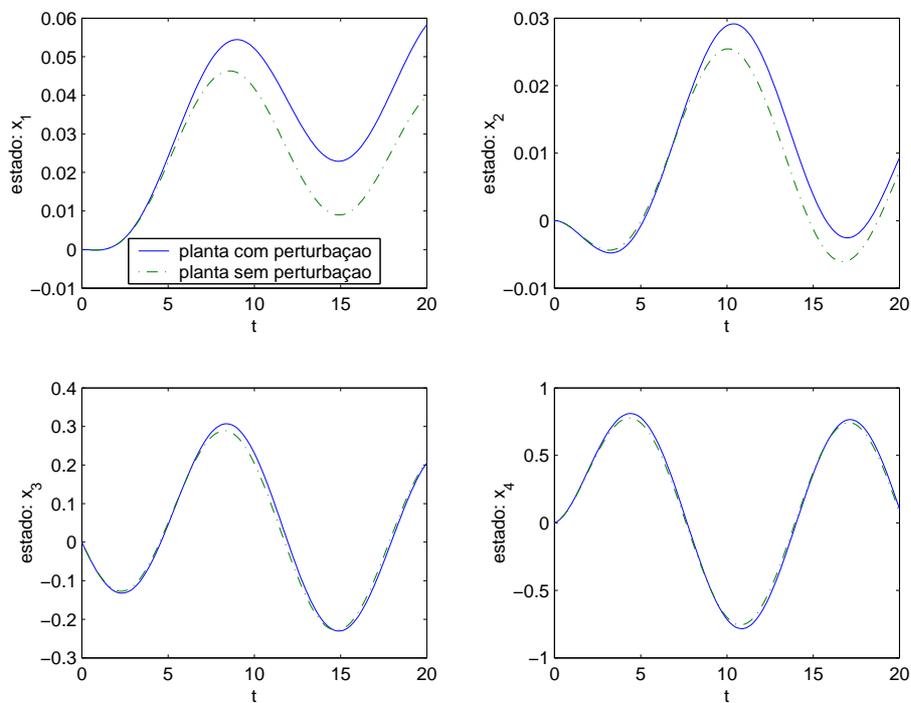


Figura 5.14: Gráficos dos estados do sistema sem perturbação e com perturbação

Na figura 5.15 são mostrados os erros dos observadores redundantes de ordem completa e ordem mínima, quando  $\delta = 0$ . Em seguida a figura 5.16 mostra estes mesmos erros junto com o erro do observador identidade e a figura 5.17 mostra agora estes erros juntos com o erro do observador robusto. Finalmente, os gráficos da figura 5.18 mostram os erros de estado com  $\delta = 0,06$ , dos observadores de estado redundantes de ordem completa e mínimo, do identidade e do robusto.

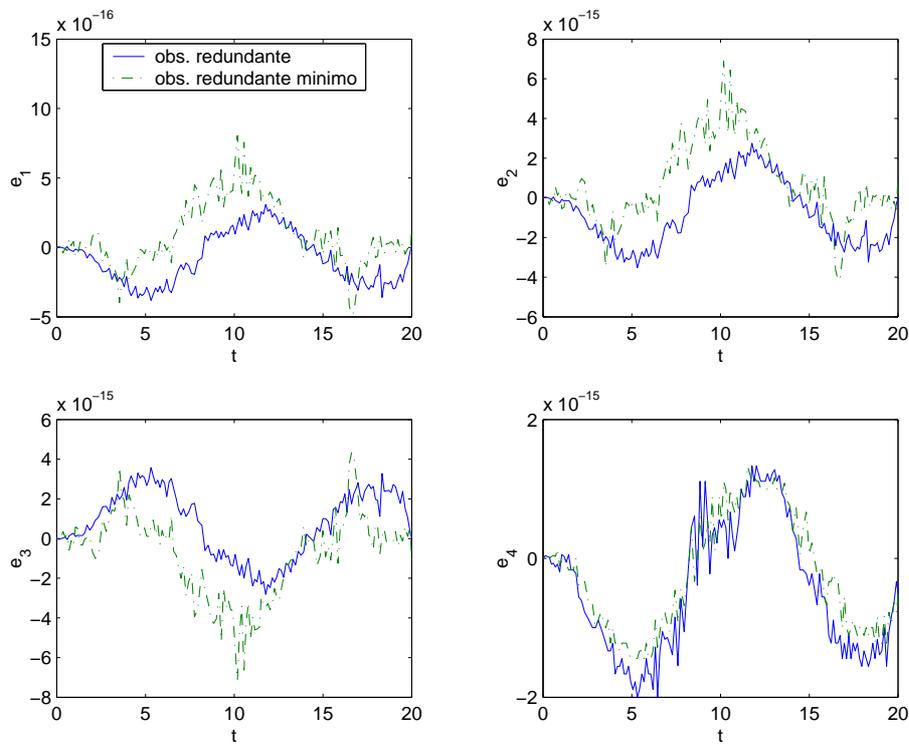


Figura 5.15: Gráficos do erro de estado dos observadores redundantes (de ordem completa e mínimo) para um sistema sem perturbação

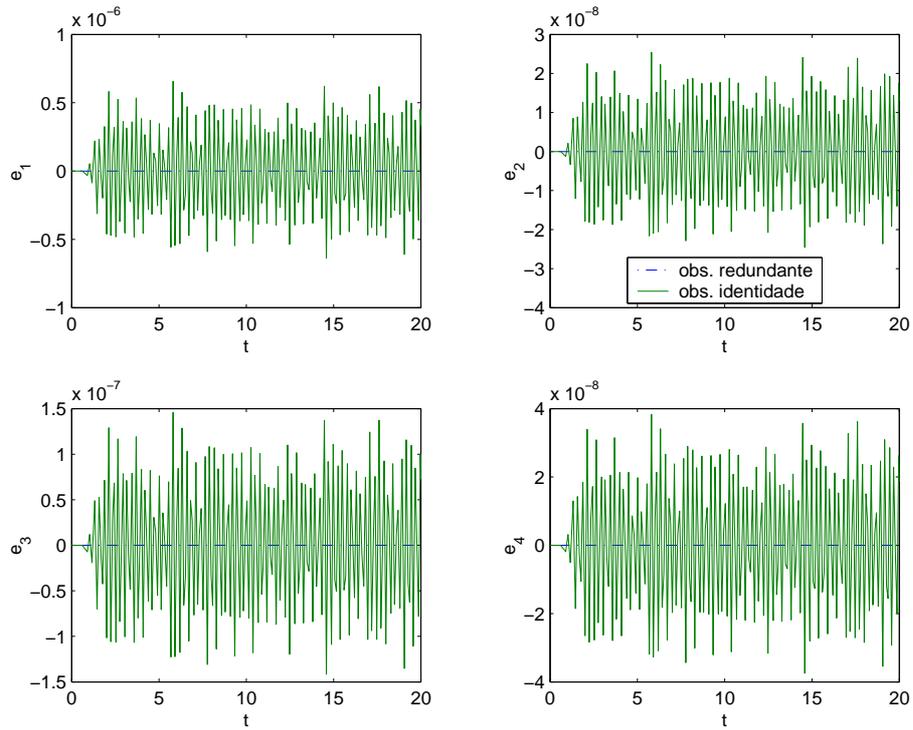


Figura 5.16: Gráficos do erro de estado dos observadores redundante e identidade para um sistema sem perturbação

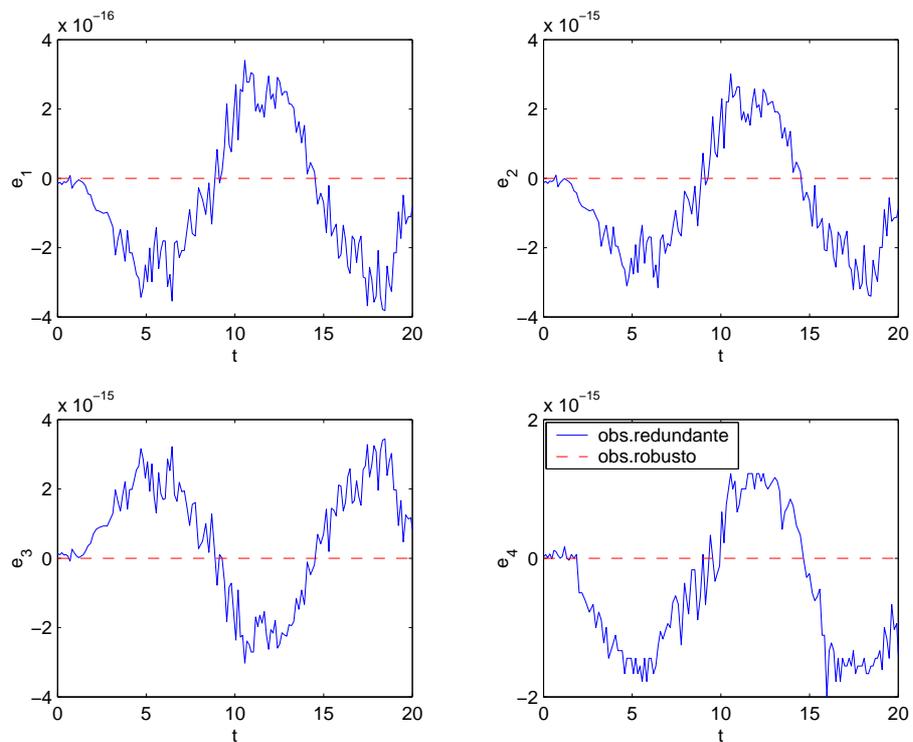


Figura 5.17: Gráficos do erro de estado dos observadores redundante e robusto para um sistema sem perturbação

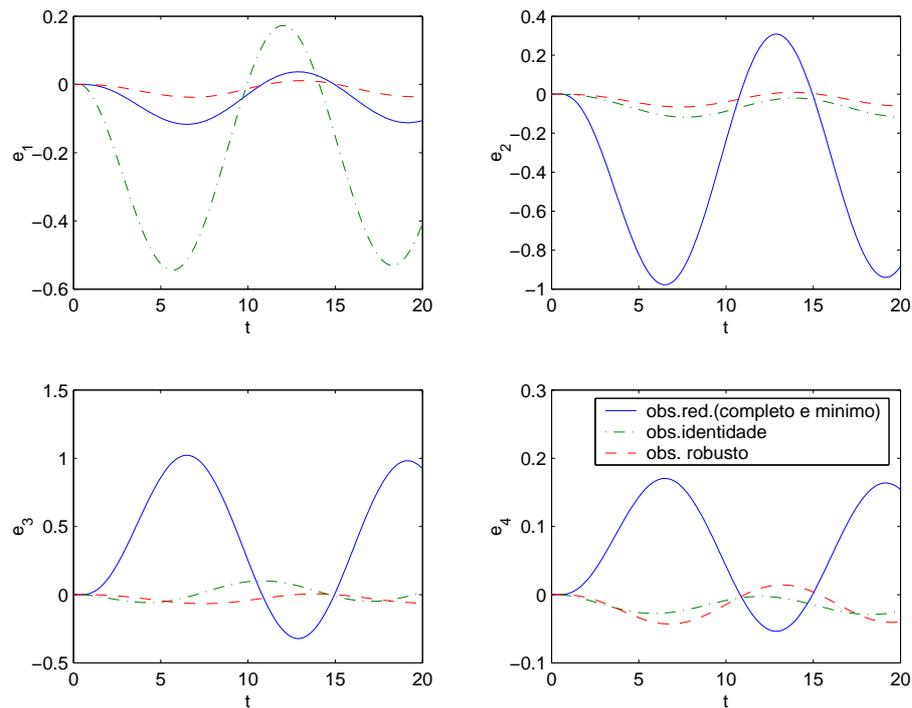


Figura 5.18: Gráficos do erro de estado dos observadores redundantes (de ordem completa e mínimo), identidade e robusto para um sistema com perturbação

Neste exemplo de um sistema estável quando os observadores funcionam como monitores de estado, foi mostrado que os observadores redundantes geram estimativas muito boas para os estados mensuráveis, uma vez que os erro de estado são da ordem de  $10^{-15}$ , quando  $\delta = 0$ . O tradicional observador de Luenberger ou identidade também gera uma boa estimativa, com um erro superior da ordem de  $10^{-7}$ . Tanto a ordem do erro do observador redundante quanto a ordem do erro do identidade são consideradas numéricas. O observador robusto apresentou, nesta situação, o melhor desempenho, ou seja, um erro de estado nulo.

Quando na presença de uma perturbação aceitável, 6%, o desempenho de todos os observadores foi ruim. O observador robusto apresentou o melhor desempenho comparativo, o que era esperado uma vez que o mesmo foi projetado com tal finalidade.

## 5.4 Conclusões

Neste capítulo foram implementados os observadores de estado redundantes de ordem completa e mínimo de acordo com os algoritmos desenvolvidos no capítulo 3. Os observadores identidade ou de Luenberger e o robusto também foram implementados para uma análise comparativa entre os desempenhos.

Pode-se verificar através das implementações que o observador redundante proposto tem um desempenho altamente satisfatório caso o sistema não esteja sujeito a perturbações, com um desempenho melhor que o observador identidade nos exemplos vistos. Quando o sistema está submetido a perturbações em seu modelo, o desempenho não foi o ideal já que o erro não pode ser desprezível. Entretanto, seu desempenho não foi muito pior do que o do observador robusto, que por projeto deveria ter um comportamento bem melhor do que o apresentado.



## Capítulo 6

# Conclusões e Trabalhos Futuros

A implementação de uma lei de controle necessita de uma realimentação do estado da planta, entretanto a imensurabilidade de alguns componentes do vetor de estado era um empecilho. Com isso foram desenvolvidas diversas técnicas para, através de um sistema dinâmico anexado à planta, obter-se um estado construído, mensurável e que pode ser um substituto para o estado imensurável da planta.

A partir do teorema fundamental dos observadores pode-se projetar um sistema dinâmico capaz de gerar um substituto para o estado inacessível através das chamadas *Relações Fundamentais dos Observadores*. O projeto dos observadores passa então a ser um problema matemático no qual encontra-se o sistema  $\mathcal{O}$  descrito pelas matrizes:  $\langle G, J, H, M, N \rangle$ .

Uma maneira simples e direta de se resolver essas relações é o conhecido observador identidade. Através de manipulações no diagrama de blocos, mostrou-se que os observadores identidade e o observador tradicional de Luenberger são equivalentes. O uso de formas canônicas simplifica o projeto e um observador pode ser projetado dessa forma, porém o método analisado nesta tese serve somente para sistemas com uma única entrada.

O projeto dos observadores através das Relações Fundamentais dos Observadores nos dá muita liberdade na escolha dos parâmetros. É possível, por exemplo, escolher os

autovalores de  $G$ , que determinam a velocidade de convergência do observador. Como toda escolha, esta também deve ser feita com cautela para evitar ganhos elevados, bem como saturação de componentes, picos indesejáveis nos transitórios, ampliação de ruídos etc. A estimativa perfeita de algumas variáveis levou à criação dos observadores de ordem mínima e estes podem em certas ocasiões reduzir os efeitos desses ganhos elevados.

A mensurabilidade dos estados através dos observadores possibilita a introdução de uma lei de controle. Mesmo com a introdução de novos elementos dinâmicos no sistema é possível analisar os comportamentos desses sistemas de modo independente, já que existe uma separação entre os comportamentos: *planta + controle* e *observação*.

No mundo real existem imperfeições que impedem que o desempenho real seja como o teórico, então é necessário que seja verificada a capacidade de o sistema continuar a estimar na presença de pequenas diferenças, ou seja a robustez do sistema.

Vimos um projeto alternativo de observador a partir do tradicional de Luenberger, que é robusto na presença de perturbações no modelo. Este projeto necessita da solução de equações algébricas de Riccati quando a equação não está em sua forma padrão. O que pode ser solucionado satisfazendo-se a inequação associada.

Os observadores podem funcionar numa malha estabilizadora, quando se pode garantir a continuação do funcionamento nominal mesmo na presença de perturbações. Porém, é necessário determinar com exatidão a amplitude máxima das perturbações admissíveis em cada situação.

Outra condição de funcionamento é como monitores de estado. Nesta condição eles são muito sensíveis e têm seus componentes afetados sempre, o que algumas vezes é tolerável, já em outras inviabiliza qualquer tentativa de implementação.

O objetivo desta tese é contribuir para o estudo da robustez de estimadores. Um observador, baseado em uma manipulação das Relações Fundamentais dos Ob-

---

servadores e tendo como característica a forma diagonal e fixa da matriz de ganho  $G$ , foi proposto. Tal procedimento levou a toda uma família de observadores, obtidos em função de um parâmetro matricial de variação livre.

Um observador mínimo pode ser obtido por meio de uma escolha especial do parâmetro livre do observador completo. Foi visto que o projeto dos observadores redundantes é simples e direto, quer para o caso de ordem completa quer para o caso mínimo e, importante, o fato de o sistema ter uma ou mais variáveis de saída é irrelevante.

A característica da matriz diagonal ter como elementos os autovalores do observador e o fato de continuarem a estimar mesmo quando partes de sua estrutura são desprezadas justifica o nome “redundante” para ele. A existência de redundância no projeto aumenta a robustez, isto sugere que ele se comporte bem na presença de perturbações.

Nas implementações analisadas, nas situações em que o sistema esteve sujeito a perturbações, o observador redundante proposto teve um desempenho altamente satisfatório, sendo inclusive melhor que o tradicional observador de Luenberger. Já na presença de perturbações, o desempenho não foi ideal já que o erro não tendia a zero, porém seu desempenho não foi muito pior do que o do observador robusto, que por projeto deveria ter um comportamento bem melhor que o apresentado.

Os observadores redundantes têm a desvantagem de ter pólos reais e iguais, devido à forma da matriz  $G$ . Acredita-se que isto não seja um inconveniente tão grande, que comprometa a sua aplicação, pois as vantagens de simplicidade e facilidade de aplicação compensam.

No que se refere à aplicação deste estudo em trabalhos futuros, note que seria necessário um maior detalhamento matemático para a quantificação do erro dos observadores redundantes. Pode-se pensar, também, em adicionar uma malha de reali-

mentação no observador, isto é através de um termo extra na dinâmica do observador. Isto seguiria a mesma idéia do observador robusto, a fim de verificar se este termo aumenta a robustez dos observadores redundantes.

# Referências Bibliográficas

- [1] AGGOUNE, W., BOUTAYEB, M. AND DAROUACH, M. Observers design for a class of nonlinear systems with time-varying delay. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, 1999*, Dec, 2912-2913.
- [2] BHATTACHARYYA, S. P. *Robust Stabilization Against Structured Perturbations*. Lecture Notes in Control and Info. Sciences, vol. 99, Springer-Verlag, 1987.
- [3] BROGAN, W. L. *Modern Control Theory*. Prentice Hall, 1990.
- [4] CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. Saunders College Publishing, 1984.
- [5] CHEN, C. T. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1998.
- [6] DOYLE, J. C. & STEIN, G. Robustness with observers. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, **1979**, 24, 607-611.
- [7] EDWARDS, C. AND SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Basingstoke, U.K.: Taylor and Francis, 1998.
- [8] FOSSARD, A. *Commande des Systems Multidimensionnels*. Dunod - Paris, **1972**.
- [9] FRIEDLAND, B. *Control system design: an introduction to state-space methods*. McGraw-Hill, New York, USA, **1986**.

- 
- [10] GOMES, A. C. D. N. *Notas de Aula. Curso de Sistemas Lineares II*, COPPE/UFRJ, 1999.
- [11] GU, D. W. & POON, F. W. A Robust state observer scheme. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, **2001**, 46, 1958-1963.
- [12] HAO, Q. AND GUO, G. AND CHEN, S. AND LOW, T.-S. A Self-tuning robust track-following control of sampled-data hard disk drive servo system. *Proc. of Amer. Contr. Conf.*, **2001**, VA 25-27, 3843-3848.
- [13] HUH, K. AND STEIN, J. L. Well-conditioned observer design for observer-based monitoring systems. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Contr.*, **1995**, 117, 592-599.
- [14] HUH, K. AND JUNG, J. AND STEIN, J. L. Discrete-time well-conditioned state observer design and evaluation. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Contr.*, **2001**, 123, 615-622.
- [15] JAZWINSKI, A. H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, 1970.
- [16] KAILATH, T. *Linear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1980.
- [17] KALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [18] KALMAN, R. H. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME J. Basic Eng.*, **1960**, 82D: 35-45.
- [19] KALMAN, R. H. AND BUCY, R. S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. *Trans. ASME J. Basic Eng.*, **1961**, 83D: 95-108.

- 
- [20] KIM, J. AND HUH, K. Robust estimation techniques for monitoring the lateral tire force. *Proc. of AVEC 2000 - 5th Int'l Symp. on Adv. Vehicle Contr.*, **2000**, 22-24.
- [21] LATHI, B. P. *Linear Systems and Signals*. Berkeley Cambridge Pr, 2001.
- [22] LIN, Z. AND GUAN, X. AND LIU, Y. AND SHI, P. Observer-based robust control for uncertain systems with time-varying delay. *IMA J. of Math. Contr. and Inform.*, **2001**, 18, 439-450.
- [23] LUENBERGER, D. G. Observing the State of a Linear System. *IEEE Trans. on Military Electronics*, **1964**, April, 74-80.
- [24] LUENBERGER, D. G. An introduction to observers. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, **1971**, 16, 596-602.
- [25] MACFARLANE, A. G. J. & KOUVARITAKIS, B. A design technique for linear multivariable feedback systems. *Int. J. Contr.*, **1977**, 25, 836-874.
- [26] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, New Jersey, 1990.
- [27] PETERSEN, I. I. *Disturbance attenuation and  $h^\infty$  optimization: A design method based on the algebraic Riccati equation*. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, **1987**, 32, 427-429.
- [28] POON, F. W. *Observer based robust fault detection: Theory and rolling mill case study*. Ph.D. dissertation, University of Leicester, U.K., **2000**.
- [29] ROSENBROCK, H. H. *State Space and Multivariable Theory*. Nelson, London, 1970.
- [30] TU, J. F. AND STEIN, J. L. Model error compensation for observer design. *Int. J. Contr.*, **1998**, 69, 329-345.

- [31] WANG, S.-G. AND QIAO, H. Robust filtering for bilinear uncertain stochastic discrete-time systems. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, **2002**, 50, 560-567.
- [32] WANG, S.-G. AND YEH, H. Y. AND ROSCHKE, P. N. Robust control for structural systems with parametric and unstructured uncertainties. *Proc. of the Amer. Contr. Conf.*, **2001**, VA 25-27, 1109-1114.
- [33] WILLEMS, J. C. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, **1971**, 16, 621-634.
- [34] ZADEH, L. A. AND DESOER, C. A. *Linear System Theory*. Krieger Publishing Company, 1979.